

计算机学院《算法设计与分析》

(2022 年秋季学期)

第二次作业

作业提交截止时间：2022 年 10 月 24 日 23 : 55

1 小跳蛙问题 (20 分)

给定 n 块石头，依次编号为 1 到 n ，第 i 块石头的高度是 h_i ，青蛙最远跳跃距离 k 。

现有一只小跳蛙在第 1 块石头上，它重复以下操作，直到它到达第 n 块石头：

若它当前在第 i 块石头上，则可跳到第 j ($i + 1 \leq j \leq \min(i + k, n)$) 块石头上，耗费的体力为 $|h_i - h_j|$ 。

试设计算法求它最少耗费多少体力可以到达第 n 块石头，写出伪代码并分析算法的时间复杂度。

2 二进制串变换问题 (20 分)

给定两个长度均为 n 的仅由 0 和 1 组成的字符串 a 和 b ，你可以对串 a 进行如下操作：

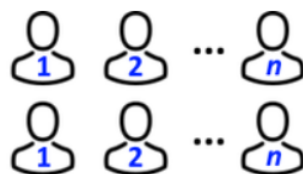
1. 对任意 i, j ($1 \leq i, j \leq n$)，交换 a_i 和 a_j ，操作代价为 $|i - j|$ ；

2. 对任意 i ($1 \leq i \leq n$)，取反 a_i ，操作代价为 1；

请你设计算法计算将串 a 变为串 b 所需的最小代价（只能对串 a 进行操作），写出伪代码并分析算法的时间复杂度。

3 球队组建问题 (20 分)

有 $2n$ 个学生分为两排，每排有 n 个人，由左至右分别编号为 $1, 2, \dots, n$ ，如图所示。现在请你在这两排学生中挑选出一些学生组成一支球队，挑选出的学生编号必须是严格递增的（编号相同的两名学生最多只能取其中一个）。此外，为避免球队中的队员都来自同一排，不能同时选择同一排相邻的两名学生（例如，若选择第一排的 5 号同学，就不能再选择第一排的 4 号和 6 号同学）。组建队伍的总人数没有限制。



给出同学们的身高数据 $h_{i,j}$ ， $h_{1,k}$ ($1 \leq k \leq n$) 表示第一排同学的身高， $h_{2,k}$ ($1 \leq k \leq n$) 表示第二排同学的身高。请你设计算法使组建成的球队中队员的身高之和最大，写出伪代码并分析算法的时间复杂度。

4 括号匹配问题 (20 分)

定义合法的括号串如下：

1. 空串是合法的括号串；
2. 若串 s 是合法的，则 (s) 和 $[s]$ 也是合法的；
3. 若串 a, b 均是合法的，则 ab 也是合法的。

现在给定由 ‘[’，‘]’ 和 ‘(’，‘)’ 构成的字符串，请你设计算法计算该串中合法的子序列的最大长度，写出伪代码并分析算法的时间复杂度。例如字符串 “([()])”，最长的合法子序列 “([()])” 长度为 6。

5 箱子问题 (20 分)

给定 n 种箱子 a_1, \dots, a_n ，第 i 种箱子 a_i 可表示为 $h_i \times w_i \times d_i$ 的长方体。请用这些箱子搭建一个尽可能高的塔：如果一个箱子 A 要水平的放在另一个箱子 B 上，那么要求箱子 A 底面的长和宽都严格小于箱子 B 。可以任意旋转箱子，每种箱子可以用任意次。

设计一个算法求出一个建塔方案使得该塔的高度最高，写出伪代码并分析算法的时间复杂度。

例如给定 $n = 1$ 种箱子，其可表示为 $3 \times 4 \times 5$ 的长方体，建塔方案如下：

1. 最底层，放置一个以 4×5 为底面的箱子，该箱子高度为 3；
2. 第二层，放置一个以 3×4 为底面的箱子，该箱子高度为 5。

此时该塔高度最高，为 $3 + 5 = 8$ 。

如下的建塔方案不合法：

1. 最底层，放置一个以 4×5 为底面的箱子，该箱子高度为 3；
2. 第二层，放置一个以 3×5 为底面的箱子，此时底面的长为 5，不满足条件。