

# 计算机学院《算法设计与分析》

## (2022 年秋季学期)

### 第三次作业

作业提交截止时间: 2022 年 11 月 21 日 23 : 55

#### 1 最长空位问题 (20 分)

给定一长度为  $n$  的 01 串  $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ , 仅有一次机会挑选其中两个元素  $s_i, s_j (1 \leq i, j \leq n)$  并交换他们的位置。请设计算法求出交换之后  $S$  中最多有几个连续的 0。

例如, 串  $S = \text{"10010101"}$  通过交换  $s_4$  和  $s_7$  可以变为  $\text{"10000111"}$ , 连续的 0 的数量为 4。  
请先简要描述策略, 然后写出伪代码, 最后分析时间复杂度。

#### 2 最大收益问题 (20 分)

某公司有一台机器, 在每天结束时, 该机器产出的收益为  $X_1$  元。在每天开始时, 若当前剩余资金大于等于  $U$  元, 则可以支付  $U$  元来升级该机器 (每天最多只能升级一次)。从升级之日起, 该机器每天可以多产出  $X_2$  元的收益。即是说, 在执行  $K$  次升级之后, 这台机器每天的产出为  $X_1 + K \times X_2$  元。

该公司初始资金为  $C$  元, 请你设计算法求出  $n$  天之后该公司拥有的总资金的最大值。  
请先简要描述策略, 然后写出伪代码, 最后分析时间复杂度。

#### 3 探险家分组问题 (20 分)

营地中共有  $n$  个探险家, 第  $i$  个探险家的经验值为  $e_i (1 \leq i \leq n)$ 。现他们希望组成尽可能多的队伍前去探险。探险家组建队伍需满足如下规则:

1. 探险家可以不参加任何队伍, 即留在营地;
2. 如果第  $i$  个探险家参加了某支队伍, 那么该队伍的人数应不小于其经验值  $e_i$ 。

请设计一个尽可能高效的算法求出最多可组建几支队伍前去探险, 并分析其时间复杂度。

例如有  $n = 5$  名探险家, 其经验值分别为  $e = \{2, 1, 2, 2, 6\}$ , 则可组建  $(1, 2), (2, 2)$  两支队伍, 把经验值为 6 的探险家留在营地。

请先简要描述策略, 然后写出伪代码, 最后分析时间复杂度。

#### 4 分店选址问题 (20 分)

某奶茶品牌想在全国投资开分店来扩大规模提高影响力, 通过向新老顾客发放问卷的形式调研产生了  $n$  个备选地址, 并实地考察到了两组数据  $flow$  和  $cost$ , 其中  $flow[i]$  表示第  $i$  个备选地址的人流量,  $cost[i]$  表示在该地址开店所需的最低资金。由于当前总资金有限, 该奶茶品牌希望根据这两组数据, 从  $n$  个备选地址中挑选出  $k$  个组成最终分店名单, 使得能够在满足以下约束条件的前提下尽可能降低总投资成本:

1. 对每个被选中的地址, 应当按照其人流流量与其他  $k - 1$  个被选中地址人流流量的比例来投入资金;

2. 被选中的每个地址的投入资金都不得低于其所需的最低资金。

请设计一个算法求满足上述条件的前提下，该奶茶品牌需要投入的总资金的最小值。  
请先简要描述策略，然后写出伪代码，最后分析时间复杂度。

## 5 交通建设问题 (20 分)

现有  $n$  个城市，初始时任意两个城市之间均不可互达。现有两种交通建设方案：

1. 花费  $c_{i,j}$  的代价，在城市  $i$  和城市  $j$  之间建设一条道路，可使这两个城市互相可达。
2. 花费  $a_i$  的代价，在城市  $i$  建设一个机场，可以使得其与其他所有建设了机场的城市互相可达。

只要两个城市  $i$  和  $j$  之间存在一条可达的路径，则这两个城市也互相可达。请设计一个尽可能高效的算法求出使所有城市之间互相可达所需的最小花费。  
请先简要描述策略，然后写出伪代码，最后分析时间复杂度。