

计算机学院《算法设计与分析》

(2022 年秋季学期)

第四次作业

作业提交截止时间：2022 年 12 月 19 日 23 : 55

1 对下面的每个描述，请判断其是正确或错误，或无法判断正误。对于你判为错误/无法判断的描述，请说明它为什么是错误/无法判断的。(每小题 5 分，共 20 分)

1. P 类问题为 NP 类问题的真子集。
2. 如果假设 $P \neq NP$ ，则 NP 完全问题可以在多项式时间内求解。
3. 若 SAT 问题可以用复杂度为 $O(n^9)$ 的算法来解决，则所有的 NP 完全问题都可以在多项式时间内被解决；
4. 对于一个 NP 完全问题，其所有种类的输入均需要用指数级的时间求解。

2 颜色交错最短路问题 (20 分)

给定一个无权有向图 $G = \langle V, E \rangle$ (所有边长度为 1)，其中 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ，且这个图中的每条边不是红色就是蓝色 ($\forall e \in E, e.color = red$ 或 $e.color = blue$)，图 G 中可能存在自环或平行边。

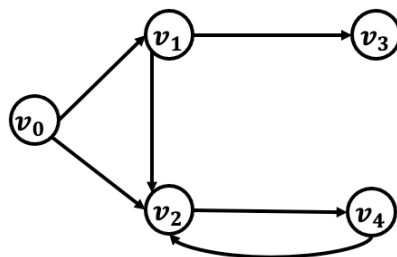
现给定图中两点 v_x, v_y ，请设计算法求出一条从 v_x 到 v_y ，且红色和蓝色边交替出现的最短路径。如果不存在这样的路径，则输出-1。请给出分析过程、伪代码以及算法复杂度。

3 最小闭合子图问题 (20 分)

对于一个有向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，其闭合子图是指一个顶点集为 $V' \subseteq V$ 的子图，且保证点集 V' 中的所有出边都指向该点集。换言之， V' 需满足对所有边 $(u, v) \in E$ ，如果点 u 在集合 V' 中，则点 v 也一定在集合 V' 中。

现给定一个包含 n 个点的有向图 $G = \langle V, E \rangle$ ，请设计算法求出该图中的闭合子图至少应包含几个顶点，并分析其时间复杂度。

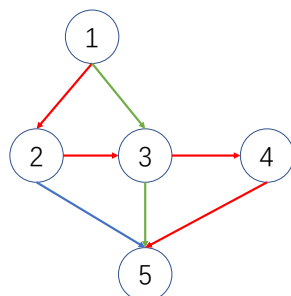
例如，给定如下图所示的包含 5 个顶点的图，其闭合子图可能为： $\{v_3\}$ ， $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ， $\{v_2, v_4\}$ 。最小的闭合子图仅包含 1 个顶点，为 $\{v_3\}$ 。请给出分析过程、伪代码以及算法复杂度。



4 食物链问题 (20 分)

给定一个食物网，包含 n 个动物， m 个捕食关系，第 i 个捕食关系使用 (s_i, t_i) 表示， s_t 捕食者， t_i 表示被捕食者，根据生物学定义，食物网中不会存在环。

长度为 k 的食物链指包含 k 个动物的链： a_1, a_2, \dots, a_k ，其中 a_i 会捕食 a_{i+1} ，一个食物链为最大食物链当且仅当 a_1 不会被任何动物捕食，且 a_k 不会捕食任何动物。



如图上图所示，该食物网存在 5 个动物，7 个捕食关系，其中红色和绿色均可以称为最大食物链，而蓝色食物链则不能成为最大食物链，图中一共包含 5 个最大食物链，分别是 1-2-5，1-2-3-5，1-2-3-4-5，1-3-5，1-3-4-5。

请设计一个高效算法计算食物网中最大食物链的数量，并给出分析过程、伪代码以及算法复杂度。

5 景区限流问题 (20 分)

已知某市有热门景区 m 个，可以表示为集合 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ，有游客 n 人，可以表示为 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ 。每名游客有 k 个心仪的景区，但每个景区最多容纳 l 人，问最多有多少人能够去到自己心仪的景区，并给出分析过程、伪代码以及算法复杂度。

对于游客与景区的偏好关系，用 H 表示，则 H 可以表示如下形式，其中 (t_u, s_v) 表示游客 t_u 偏好景点 s_v 。

$$H = \begin{Bmatrix} (t_1, s_{11}), & \cdots & (t_1, s_{1k}), \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (t_n, s_{n1}), & \cdots & (t_n, s_{nk}) \end{Bmatrix}$$