

# 计算机学院《算法设计与分析》

## (2022 年秋季学期)

### 第一次作业

作业提交截止时间：2022 年 9 月 26 日 23 : 55

- 1 请给出  $T(n)$  尽可能紧凑的渐进上界并予以说明，可以假定  $n$  是 2 的整数次幂。(每小题 3 分，共 21 分)

1.

$$\begin{aligned} T(1) &= T(2) = 1 \\ T(n) &= T(n-2) + 1 \quad \text{if } n > 2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + n \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4T(n/2) + 1 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + \log n \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 3T(n/2) + n^2 \quad \text{if } n > 1 \end{aligned}$$

## 2 寻找中位数问题 (19 分)

一组数据  $x = (x_1, \dots, x_n)$  从小到大排序后的序列为  $x'_1, \dots, x'_n$ , 则这组数据的中位数  $M$  为

$$M = \begin{cases} x'_{\frac{n+1}{2}} & \text{若 } n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{2}(x'_{\frac{n}{2}} + x'_{\frac{n}{2}+1}) & \text{若 } n \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

给定两个长度分别为  $n$ 、 $m$  的有序数组  $A[1..n], B[1..m]$  ( $A$  与  $B$  均已按从小到大排序)。请设计尽可能高效的算法, 求出这两个数组中所有数据的中位数, 并分析其时间复杂度。

## 3 双调序列最大值问题 (20 分)

若一个序列  $a[1..n]$  满足以下两个性质之一, 则该序列称为双调序列:

- 性质 1: 存在  $k \in [1, n]$ , 使得  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$
- 性质 2: 序列经循环移位后满足性质 1

例如, 序列  $[1, 2, 4, 8, 7, 5, 3]$  为双调序列 (满足性质 1), 序列  $[5, 3, 1, 2, 4, 8, 7]$  也为双调序列 (循环移位后可得序列  $[1, 2, 4, 8, 7, 5, 3]$ , 满足性质 2)。

给定一个双调序列  $a[1..n]$ , 请设计一个算法来求出这个序列中的最大值, 并对该算法的复杂度进行分析。

## 4 字符串等价关系判定问题 (20 分)

给定两个长度为  $n$  的字符串  $A$  和  $B$ , 若称  $A$  与  $B$  是等价的, 当且仅当它们满足如下关系之一:

1.  $A$  和  $B$  完全相同;
2. 若将把  $A$  分成长度相等的两段  $A_1$  和  $A_2$ , 也将  $B$  分成长度相等的两段  $B_1$  和  $B_2$ 。且他们之间满足如下两种关系之一:
  - a.  $A_1$  和  $B_1$  等价且  $A_2$  和  $B_2$  等价;
  - b.  $A_1$  和  $B_2$  等价且  $A_2$  和  $B_1$  等价。

请你设计一个高效的算法来判断两个字符串是否等价并分析你的算法的时间复杂度。

例如, 假设  $A$  字符串为  $aaba$ ,  $B$  字符串为  $abaa$ 。 $A$  字符串首先分裂为  $A_1 = aa$ ,  $A_2 = ba$ 。 $B$  字符串分裂为  $B_1 = ab$ ,  $B_2 = aa$ 。 $A_2$  字符串再分裂为  $A_{21} = b$ ,  $A_{22} = a$ 。 $B_1$  字符串再分裂为  $B_{11} = a$ ,  $B_{12} = b$ 。此时  $A_{21}$  和  $B_{12}$  相等,  $A_{22}$  和  $B_{11}$  相等, 因此根据等价关系的判断条件 2.b 可知,  $A_2$  和  $B_1$  等价。又因为  $A_1$  和  $B_2$  完全相同, 根据等价关系的判断条件 1 可知,  $A_1$  和  $B_2$  等价。再次利用等价关系的判断条件 2.b, 可以得出结论, 字符串  $A$  和  $B$  等价。

## 5 向量的最小和问题 (20 分)

给定  $n$  个二维向量  $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。每一个向量  $v_i = (x_i, y_i)$  都可以变换为如下四种形式:

1.  $v_i^1 = (x_i, y_i)$
2.  $v_i^2 = (-x_i, y_i)$
3.  $v_i^3 = (x_i, -y_i)$
4.  $v_i^4 = (-x_i, -y_i)$

请你设计一个高效的算法从  $n$  个向量中找出两个向量, 使得他们以某种形式相加后的模长最小。换言之, 请找出两个向量  $v_i, v_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$  且  $i \neq j$ ), 以及两个整数  $k_1, k_2$  ( $1 \leq k_1, k_2 \leq 4$ ), 使得  $\|v_i^{k_1} + v_j^{k_2}\|_2$  最小。此外, 请分析该算法的时间复杂度。