《算法设计与分析》
第二次作业

姓名：曹建钦

学号：20375177

1 小跳蛙问题

1.1 Main Idea

小跳蛙从第 1 块跳至第 n 块石头上，最后一跳的起跳点一定位于第 $(n-k)$、$(n-k+1)\dots(n-1)$ 块石头，而子问题是重叠的，因此可以使用动态规划方法进行解题。

令 $MSC(n)$ 为小跳蛙从第 1 块石头跳至第 n 块石头最少耗费的体力，那么有递推关系：

$$
\begin{aligned}
MSC(n) = Min\{MSC(n-1) + |h_n - h_{n-1}| \\
MSC(n-2) + |h_n - h_{n-2}| \\
\dots \\
MSC(n-k) + |h_n - h_{n-k}|\}
\end{aligned}
$$

算法的伪代码如下：

1.2 Pseudo Code

Algorithm 1: $Minimum-Strength-Cost(n, H, k)$

Input: 石头数量 n，从第 1 块到第 n 块石头的高度 h_i 组成的数组 H，青蛙最远跳跃距离 k

Output: 从第一块石头跳至第 n 块石头耗费的最少体力

// *初始化*
创建一维数组 $MSC[1\dots n]$;
$MSC[1] \leftarrow 0$;
// $MSC[i]$ *为小跳蛙从第 1 块跳至第 i 块石头最少耗费的体力*
for $i \leftarrow 2$ *to* n **do**
  for $j \leftarrow 1$ *to* $Min(k, i-1)$ **do**
    $MSC[i] \leftarrow Min(MSC[i-j] + |h_i - h_{i-j}|)$
  end
end
return $MSC[n]$

1.3 Complexity Analysis

算法的时间复杂度 $T(n,k)$ 来自于 4-8 行的双重循环，以比较为基本运算，故有

$$T(n,k) = O(n \cdot k)$$

2 二进制串变换问题

2.1 Main Idea

分析题目，对字符串 a 只能进行以下两种操作：

1. 交换 a_i 和 a_j，操作代价为 $|i-j|$
2. 取反 a_i，操作代价为 1

交换两个不同的字符除了使用操作 1 实现, 还可以对这两个字符分别进行取反，即进行两次操作 2。因此，如果两个不同的字符不相邻（$i-j \geq 2$），使用操作 2 更优，相邻的情况即可进行交换以将操作代价减小为 1。

此题与最小编辑问题类似，这里同样使用动态规划进行解题：

令 $C[i]$ 为 $a[1 \dots i]$ 变为 $b[1 \dots i]$ 所需的最小代价，递推关系如下：

- 若 $a[i] = b[i]$ 则：$C[i] = C[i-1]$
- 若 $a[i] \neq b[i]$ 则：
  - 当 $a[n-1] = b[n]$ 且 $a[n] = b[n-1]$：$C[i] = C[i-2] + 1$
  - 其余情况：$C[i] = C[i-1] + 1$

算法的伪代码如下：

2.2 Pseudo Code

Algorithm 2: $Operation - Cost(a, b, n)$

Input: 长度为 n 的仅由 0 和 1 组成的字符串 a 和 b

Output: 将串 a 变为串 b 的最小代价

```
// 初始化
创建一个一维数组 C[0...n] ;
C[0] ← 0 ;
if a[1] ≠ b[1] then
    C[1] ← 1
else
    C[1] ← 0
end
// C[i] 代表 a[1...i] 变为 b[1...i] 所需的最小代价
for i ← 2 to n do
    if a[i] = b[i] then
        C[i] = C[i − 1]
    else
        if a[n − 1] = b[n] and a[n] = b[n − 1] then
            C[i] = C[i − 2] + 1
        else
            C[i] = C[i − 1] + 1
        end
    end
end
return C[n]
```

2.3 Complexity Analysis

令算法的时间复杂度为 $T(n)$，以比较判断为基本运算，从伪代码中可以看出，$C[1]$ 只需要一次判断即可得到，而 $C[2]$ 到 $C[n]$ 每个则需要进行 3 次判断，则有：

$$T(n) = 1 + 3(n - 1) = O(n)$$

3 球队组建问题

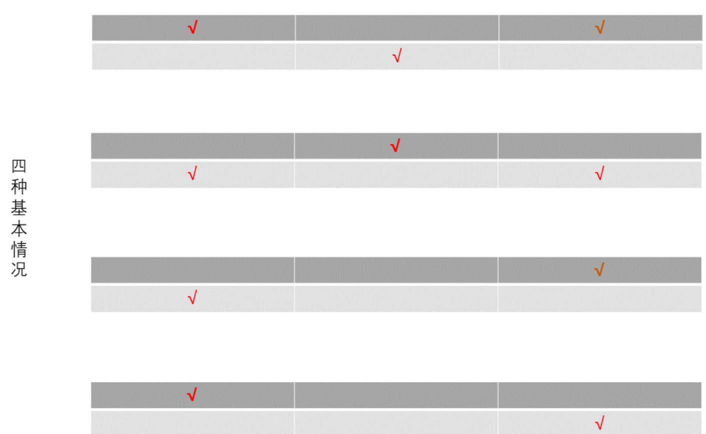
3.1 Main Idea

分析此问题可作出如下形式化定义：

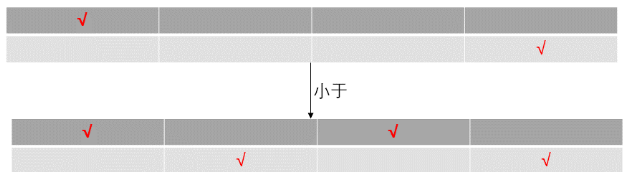
- 输入:序列 $A =< h_{1,1}, h_{1,2}, \ldots, h_{1,n} >$ 和序列 $B =< h_{2,1}, h_{2,2}, \ldots, h_{2,n} >$
- 输出：求解一个由序列 A 和序列 B 中元素组成的新序列 $N =< h_1, h_2, \ldots, h_z >$ 使得 $\sum_{i=1}^{i=z} h_i$ 最大。
- 约束条件：不能同时选择 A 中的 $h_{1,k}$ 和 B 中的 $h_{2,k}$，且各序列中的相邻元素不能同时被选（比如：选择了 A 中的 $h_{1,k}$ 就不能选择 $h_{1,k-1}$ 和 $h_{1,k+1}$）

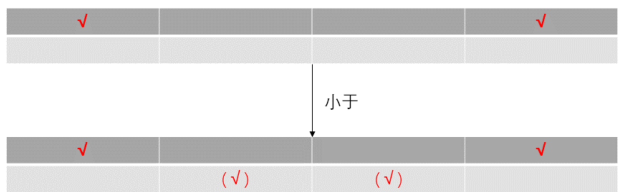
可能存在最优子结构和重叠子问题，故利用动态规划的思想。以 $H[j]$ 代表由 $A < h_{1,1}, h_{1,2}, \ldots, h_{1,j} >$ 和 $B < h_{2,1}, h_{2,2}, \ldots, h_{2,j} >$ 中元素构成的最高队列的高度。

如下图所示，在队列 A 和队列 B 中截取紧挨着的前三列（$j = 3$ 的情况下），只存在以下四种基本情况可能成为这三列中的最优解。从中可以看出：末尾元素：$h_{1,j}$ 和 $h_{2,j}$ 中一定有且只有一个元素被选中（否则一定不是最优解），而且可能存在夹在非空列之间的空列。



那么有没有可能出现两列同时没被选呢？从下图（$j = 4$ 的情况）可以看出，一旦出现这种情况，那么其一定不是最优解。因此 $H[j]$ 最优解存在最优子结构：要不从 $H[j-2]$ 中隔一行得到，要不从 $H[j-1]$ 中得到。

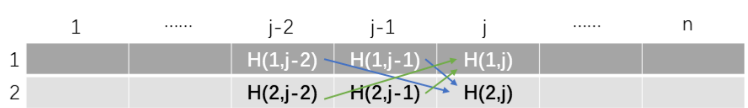




为了便于描述递推关系，将 $H[j]$ 根据最后的元素的来源分为上下两种情况，以 $H[1,j]$ 表示代表取 $h_{1,j}$ 时，由 $A<h_{1,1},h_{1,2},\ldots,h_{1,j}>$ 和 $B<h_{2,1},h_{2,2},\ldots,h_{2,j}>$ 中元素构成的最高队列的高度，以 $H[2,j]$ 表示代表取 $h_{2,j}$ 时，由 $A<h_{1,1},h_{1,2},\ldots,h_{1,j}>$ 和 $B<h_{2,1},h_{2,2},\ldots,h_{2,j}>$ 中元素构成的最高队列的高度，则有 $H[i]=\max(H[1,j],H[2,j])$，同时可得以下递推关系：

- $H[1,j]=\max(H[2,j-2]+h_{1,j}\ ,\ H[2,j-1]+h_{1,j})$
- $H[2,j]=\max(H[1,j-1]+h_{2,j}\ ,\ H[1,j-2]+h_{2,j})$
- $H[i]=\max(H[1,j],H[2,j])$

过程如下图所示：



记录决策过程：

$$Rec[i,j]=\begin{cases}1 & if\ choose\ h_{3-i,j-1}\\ 2 & if\ choose\ h_{3-i,j-2}\end{cases}$$

其中 i 取 1 或 2，$3-i$ 即为第 i 行的相邻行，$2\leq j\leq n$，伪代码如下：

3.2 Pseudo Code

Algorithm 3: $HighestQueue(h_{i,j})$

Input: 同学们的身高数据 $h_{i,j}$，$h_{1,j}(1 \leq j \leq n)$ 表示第一排同学的身高，$h_{2,j}(1 \leq j \leq n)$ 表示第二排同学的身高

Output: 组建成的球队中成员的身高之和最大的方案

```
// 初始化
创建二维数组 H[1..2, 1..n] 和 Rec[1..2, 2..n]
H[1,1] ← h_{1,1}
H[2,1] ← h_{2,1}
H[1,2] ← h_{2,1} + h_{1,2} ,Rec[1,2] ← 1
H[2,2] ← h_{1,1} + h_{2,2} ,Rec[2,2] ← 1
// 求解表格
for j ← 3 to n do
    for i ← 1 to 2 do
        if H[3 − i, j − 2] > H[3 − i, j − 1] then
            H[i, j] ← H[3 − i, j − 2] + h_{1,j}
            Rec[i, j] ← 2
        else
            H[i, j] ← H[3 − i, j − 1] + h_{1,j}
            Rec[i, j] ← 1
        end
    end
end
// 输出最优方案
j ← n
i ← max_{i=1,2}(H[i, n])
print 第 i 排第 n 个学生被选中
while j > 1 do
    j ← j − Rec[i, j]
    i ← 3 − i
    print 第 i 排第 j 个学生被选中
end
```

3.3 Complexity Analysis

令算法的时间复杂度为 $T(n)$，n 为每一排学生的人数，以比较大小为基本运算，复杂度主要来源于 8-18 行的循环，则有：

$$T(n) = O(n)$$

4 括号匹配问题

4.1 Main Idea

问题定义：

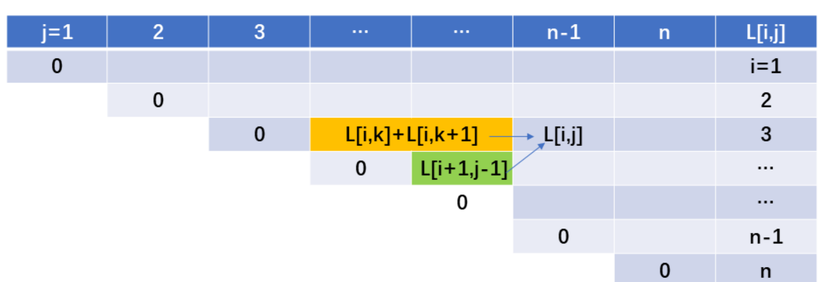
- 输入：由‘[’，‘]’和‘(’，‘)’构成的长度为 n 的字符串 $str[1 \dots n]$
- 输出：该串中合法子序列的最大长度

以 $L[i,j]$ 表示子字符串 $str[i \dots j]$ 的最长合法子序列的长度。则原始问题为：$L[1,n]$，即计算字符串 $str[1 \dots n]$ 的最长合法子序列的长度。其中 $1 \le i \le j \le n$

寻找最优子结构和递推关系：

- $str[i]$ 与 $str[j]$ 匹配时：$L[i,j] = L[i+1, j-1] + 2$
- $str[i]$ 与 $str[j]$ 不匹配时：

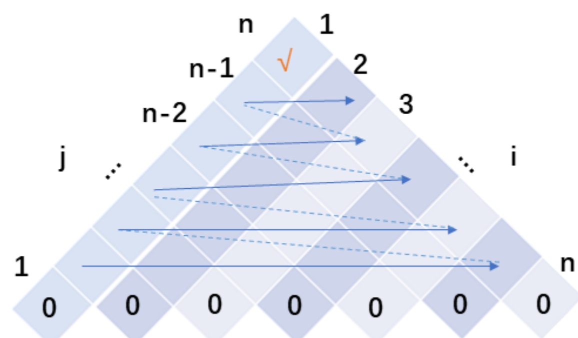
$$L[i,j] = \max_{i \le k < j} (L[i+1, j-1], L[i,k] + L[k+1,j])$$



自底向上确定计算顺序：

j=1	2	3	…	…	n-1	n	L[i,j]
0						√	i=1
	0						2
		0					3
			0				…
				0			…
					0		n-1
						0	n

逆时针旋转 45 度，如下图所示：



伪代码如下：

4.2 Pseudo Code

Algorithm 4: $Longest - Legal - Subsequences(str)$

Input: 字符串 str

Output: str 的最长合法子序列的长度

```
1  n ← length(str)
2  // 初始化
3  新建二维数组 L[1...n]
4  for i ← 1 to n do
5      L[i, i] ← 0
6  end
7  // 动态规划，其中 l 代表区间长度
8  for l ← 2 to n do
9      for i ← 1 to n − l + 1 do
10         j ← i + l − 1
11         if str[i] 与 str[j] 相匹配 then
12             L[i, j] ← L[i + 1, j − 1] + 2
13         else
14             for k ← i to j − 1 do
15                 L[i, j] ← max(L[i, k] + L[k + 1, j], L[i + 1, j − 1])
16             end
17         end
18     end
19 end
20 return L[1, n]
```

4.3 Complexity Analysis

以 $T(n)$ 代表此算法的时间复杂度，n 为原字符串的长度，以一次大小的比较为基本运算。根据 8-19 行，最坏的情况下需要经历三重循环，则有：

$$T(n) = O(n^3)$$

5 箱子问题

5.1 Main Idea

此问题很像 LIS 问题，但箱子问题中要想一个箱子 A 要水平地放在另一个箱子 B 上，要求箱子 A 底面的长和宽都严格小于箱子 B。这涉及到两个量的比较，这里以底面积大小为标准将箱子从大到小进行排序，一个底面积大的箱子永远不能出现在底面积小的箱子上面，但是底面积小的箱子可以或不能出现在底面积大的箱子上面，这样就可以在减小计算量的同时不落下每一种可能的情况。

需要注意的是，箱子可以任意进行旋转，那么 n 中箱子中的每一种箱子 a_i（高 h_i 宽 w_i 长 d_i）最多可产生三种不同底面积的箱子：$h_i * w_i$、$h_i * d_i$、$w_i * d_i$，每一种均需要参与排序和选择，问题的规模最大为 $3n$，下面只考虑最大规模的情况。

寻找最优子结构和递推关系，此问题最优解依赖枚举子问题，与课上所讲的钢条切割问题类似，以 $MTH[j]$ 代表以第 j 种箱子为塔顶时塔的最大高度，有如下递推关系：

- i 从 1 遍历至 $j-1$，对于每一种满足 $width(j) < width(i)$ 和 $depth(j) < depth(i)$ 的可能：

$$MTH[j] = \max(MTH[i]) + height(j)$$

- 遍历完成后，如果没有一个 i 使得 $width(j) < width(i)$ 和 $depth(j) < depth(i)$:

$$MTH[j] = height(j)$$

为了求出最优的建塔方案，还需要构造追踪数组 $rec[1 \dots 3n]$，用 $rec[j]$ 记录以第 j 种箱子为顶的最高建塔方案。其中：

- $rec[j] = j$：以第 j 种箱子为最底层
- $rec[j] = i$：以第 j 种箱子为上层，而下层为 $rec[i]$ 建塔方案

伪代码如下：

5.2 Pseudo Code

Algorithm 5: $Maximum-Tower-Height(a,n)$

Input: n 种箱子，且 $a_j=\{h_j,w_j,d_j\}$

Output: 使得该塔的高度最高的建塔方案

```
// 初始化
新建一维数组 MTH[1...3n] 和 rec[1...3n]
for j ← 1 to n do
    rot[3j−2] ← {h_j, w_j, d_j}
    rot[3j−1] ← {w_j, h_j, d_j}
    rot[3j] ← {d_j, w_j, h_j}
end
rot[1...3n] 按底面积大小 (rot[j][2] ∗ rot[j][3]) 进行降序排序
// 动态规划，其中 MTH[best] 为最高高度
best ← 1
for j ← 1 to 3n do
    rec[j] ← j
    MTH[j] ← rot[j][1]
    for i ← 1 to j − 1 do
        if rot[j][2] < rot[i][2] and rot[j][3] < rot[i][3] then
            if MTH[i] + rot[j][1] > MTH[j] then
                MTH[j] ← MTH[i] + rot[j][1]
                rec[j] ← i
            end
        end
    end
    if MTH[best] < MTH[j] then
        best ← j
    end
end
// 输出最优方案
cal ← 1
print 第 cal 层放置以 rot[best][2] ∗ rot[best][3] 为底面的箱子，该箱
  子的高度为 rot[best][1]
while rec[best] ≤ best do
    cal ← cal + 1
    print 第 cal 层放置以 rot[rec[best]][2] ∗ rot[rec[best]][3] 为底面
      的箱子，该箱子的高度为 rot[rec[best]][1]
    best ← rec[best]
end
```

5.3 Complexity Analysis

以 $T(n)$ 代表此算法的时间复杂度，n 为给定的箱子的种数。

第 3-7 行需要循环遍历 n 次复杂度为 $O(n)$，第 8 行降序排序复杂度为 $O(nlogn)$，第 11-25 行双重循环复杂度为 $O(n^2)$。综上：

$$T(n) = O(n^2)$$