20375177　　曹建钦

1. 解 正五边形内角为 $\frac{540^\circ}{5}=108^\circ$

用其搭成的凸多面体应有三个面汇到一个顶点

则角为 $360^\circ-3\times108^\circ=36^\circ$ 则有 $\frac{720^\circ}{36^\circ}=20$ 个顶点

棱长为 $20\times3/2=30$ 根据 $20+f-30=2$ 有 $f=12$

即有12个面

2. 解 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(1)(2\ 3)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2)(3)$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 3)(2)$

3. 解 2×2的棋盘：

4	1
3	2

置换群：$\overline{P_1}=(1)(2)(3)(4)=(1)^4$

$\overline{P_2}=(1\ 2\ 3\ 4)=(4)^1$

$\overline{P_3}=(1\ 3)(2\ 4)=(2)^2$ $\overline{P_4}=(4\ 3\ 2\ 1)=(4)^1$

则根据polya定理可得

$$l=\frac{1}{4}(3^4+3^2+2\times3^1)=24$$

则有24种不同着色方案

4. 证明：在 $(1)^{c_1}(2)^{c_2}\cdots(n)^{c_n}$ 格式中，长度为k的循环可以重复k次，c_k 个k阶循环共重复了 $c_k!\,k^{c_k}$ 次

因此，共轭类的元素个数为

$$\frac{n!}{c_1!\,c_2!\cdots c_n!\,1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}$$

5. 解：使正六面体重合的置换群中有24个置换：

① 不动置换，型为 1^6，有1个；

② 相对两面中心轴旋转 $90°$，$270°$ 的置换，型为 $1^2 4^1$，有6个；旋转 $180°$ 的置换，型为 $1^2 2^2$，有3个

③ 绕相对两顶点连线旋转 $120°$，$240°$ 的置换，型为 3^2，有8个

④ 绕相对两边中点连线旋转 $180°$ 的置换，型为 2^3，有6个.

则着色方案数为 $l=\frac{1}{24}(3^6+6\cdot3^3+3\cdot3^4+8\cdot3^2+6\cdot3^3)=57$

着色方案为：

$$p=\frac{1}{24}[(r+b+g)^6+6(r+b+g)^2(r^4+b^4+g^4)+3(r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2)^2$$
$$+8(r^3+b^3+g^3)^2+6(r^2+b^2+g^2)^3]$$

其中红出现4次，蓝、绿各出现1次的方案数为上述展开式中 r^4bg 的系数

为 $\frac{1}{24}\left(\frac{6!}{4!1!1!}+6\cdot\frac{2!}{1!1!}+3\cdot\frac{2!}{1!1!}\right)=2$

则方案数为2