20375177　　201411　　曹建钦　　数理统计

19. 解 由 $X_i \sim N(\mu_0,\sigma^2)$ $(i=1,2\cdots n)$ 且 $X_1, X_2\cdots, X_n$ 相互独立

可得 $\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$ $(i=1,2\cdots n)$ 且 $\frac{X_1-\mu_0}{\sigma}$, $\frac{X_2-\mu_0}{\sigma}$ $\cdots$ $\frac{X_n-\mu_0}{\sigma}$ 相互独立

根据 χ^2 分布可知 $\frac{n\hat\sigma_2^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$

$\Rightarrow E_{\sigma^2}(\hat\sigma_2^2)=\sigma^2$　　$Var_{\sigma^2}(\hat\sigma_2^2)=\frac{2}{n}\sigma^4$

又∵ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　　$\frac{n\hat\sigma_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

∴ $E_{\sigma^2}(S^2)=\sigma^2$　　$Var_{\sigma^2}(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$　　$E_{\sigma^2}(\hat\sigma_3^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$　　$Var_{\sigma^2}(\hat\sigma_3^2)=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma$

由均方误差计算公式　$E_\theta[T-q(\theta)]^2=Var_\theta(T)+\{E_\theta[T-q(\theta)]\}^2$

有 $E_{\sigma^2}(S^2-\sigma^2)^2=\frac{2}{n-1}\sigma^4$　　$E_{\sigma^2}(\hat\sigma_2^2-\sigma^2)^2=\frac{2}{n}\sigma^4$　　$E_{\sigma^2}(\hat\sigma_3^2-\sigma^2)^2=\frac{2n-1}{n^2}\sigma$

$\Rightarrow E_{\sigma^2}(\hat\sigma_3^2-\sigma^2)^2<E_{\sigma^2}(\hat\sigma_2^2-\sigma^2)^2<E_{\sigma^2}(S^2-\sigma^2)^2$

故 $\hat\sigma_3^2$ 比 S^2 和 $\hat\sigma_2^2$ 更优

21. 解. $E(\hat\mu_1)=E(\hat\mu_2)=E(\hat\mu_3)=\mu$

$\Rightarrow$ $\hat\mu_1, \hat\mu_2, \hat\mu_3$ 都为 μ 的无偏估计

由 X_1, X_2, X_3 的独立性

$\Rightarrow Var(\hat\mu_1)=\left(\frac{1}{5^2}+(\frac{3}{10})^2+(\frac{1}{2})^2\right)Var(X_1)=\frac{19}{50}Var(X_1)$

$Var(\hat\mu_2)=\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+(\frac{5}{12})^2\right)Var(X_1)=\frac{25}{72}Var(X_1)$

$Var(\hat\mu_3)=\left(\frac{1}{3^2}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{1}{12^2}\right)Var(X_1)=\frac{49}{72}Var(X_1)$

故 $\hat\mu_2$ 要比 $\hat\mu_1$ 和 $\hat\mu_3$ 优

23.

(1) $E_\theta(X_{(n)})=\frac{n}{n+1}\theta$ $\quad Var_\theta(X_{(n)})=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$

$\Rightarrow$ $\hat\theta(c)=cX_{(n)}$ 均方误差为

$$MSE_\theta(\hat\theta(c))=\left(\frac{n}{n+2}c^2-\frac{2n}{n+1}c+1\right)\theta^2$$

(2) 取 $\min MSE_\theta(\hat\theta(c))$ $\Rightarrow$ $c=\frac{n+2}{n+1}$

即 θ的估计取 $\hat\theta_1=\frac{n+2}{n+1}X_{(n)}$

(3) 对任意$n\geq1$有

$$E_\theta(\hat\theta_1)=\frac{n+2}{n+1}E_\theta(X_{(n)})=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\theta\neq\theta$$

$\Rightarrow$ $\hat\theta_1=\frac{n+2}{n+1}X_{(n)}$ 为θ的有偏估计

25 (2)

解 $\because X_{k+1}-X_k\sim N(0,2\sigma^2)$ $\quad\therefore E(X_{k+1}-X_k)^2=2\sigma^2$

$\Rightarrow E\left[\sum_{k=1}^{n-1}(X_{k+1}-X_k)^2\right]=2(n-1)\sigma^2$

当 $n>1$有 $E\left[\sum_{k=1}^{n-1}(X_{k+1}-X_k)^2\frac{1}{2(n-1)}\right]=\sigma^2$

$\Rightarrow$ $c=2(n-1)$ 时 $\hat\sigma^2$是σ^2的无偏估计

32.

(1) 解.

样品联合密度函数为

$$p(x_1,x_2\cdots x_n,\mu)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}\exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma^2}\bar x\right\}$$

令 $c(\mu)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}$, $h(x_1,x_2\cdots x_n)=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$

$w(\mu)=\frac{n\mu}{\sigma^2}$, $T(x_1,x_2\cdots x_n)=\bar x$

则有 $p(x_1,x_2,\cdots x_n,\mu)=c(\mu)h(x_1,x_2\cdots x_n)\exp\{w(\mu)T(x_1,x_2\cdots x_n)\}$

由于 $w(\mu)$的值域R包含内点. $\bar x$是完全充分统计量. 又由于 $E(\bar x)=\mu$, 所以$\bar x$是μ的无偏估计, 又是$\bar x$的函数 $\therefore$ $\bar x$是μ的一致最小方差无偏估计

(2) 样本联合密度函数为

$$p(x_1,x_2\cdots x_n;\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}$$

令 $c(\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}$，$h(x_1,x_2\cdots,x_n)=1$

及 $w(\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$，$T(x_1,x_2\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

有分解式 $p(x_1,x_2\cdots,x_n;\sigma^2)=c(\sigma^2)h(x_1,x_2\cdots,x_n)\exp\{w(\sigma^2)T(x_1,\cdots x_n)\}$

由于 $w(\sigma^2)$ 的值域 $(-\infty,0)$ 包含内点，则 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 是完全统计量

又 $\because E(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2)=n\sigma^2$ 即 $E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2]=\sigma^2$

$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 既是 σ^2 的无偏估计，又是完全充分统计量 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 的函数

$\therefore \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 是 σ^2 的一致最小方差无偏估计

34. 证明

$$p(x_1,x_2\cdots x_n;\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\}\exp\{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\}$$

令 $c(\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\}$，$h(x_1,x_2\cdots,x_n)=1$

及 $w(\mu,\sigma^2)=(w_1(\mu,\sigma^2),w_2(\mu,\sigma^2))=(\frac{\mu}{\sigma^2},-\frac{1}{2\sigma^2})$

$T=(T_1,T_2)=(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2)$

有分解式 $p(x_1,x_2\cdots x_n;\mu,\sigma^2)=c(\mu,\sigma^2)h(x_1,x_2\cdots x_n)\exp\{w_1(\mu,\sigma^2)T_1+w_2(\mu,\sigma^2)T_2\}$

由于 $w(\mu,\sigma^2)$ 的值域 $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,0)$ 包含内点

$\Rightarrow T=(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2)$ 是完全充分统计量

$\because E(S^2)=\sigma^2$，$E(\bar{x}^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$ $\therefore E(\hat{\mu}^2)=E(\bar{x}^2)-E(\frac{S^2}{n})=\mu^2$

$\therefore \hat{\mu}^2=\bar{x}^2-\frac{S^2}{n}$ 是 μ^2 的无偏估计

又 $\because \hat{\mu}^2=\bar{x}^2-\frac{S^2}{n}=\frac{1}{n(n-1)}[(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2]$

$\therefore \hat{\mu}^2$ 是完全统计量 $T=(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2)$ 的函数

$\therefore \hat{\mu}^2=\bar{x}^2-\frac{S^2}{n}$ 是 μ^2 的一致最小方差无偏估计

43.

证明 $E_\lambda(X)=\frac{1}{\lambda}$ $Var_\lambda(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

故 $I(\lambda)=E_\lambda[\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln f(x,\lambda)]^2=E_\lambda(X-\frac{1}{\lambda})^2=\frac{1}{\lambda^2}$

又∵ $Var_\lambda(\bar{X})=\frac{1}{n\lambda^2}$ ∴对任意 $\lambda(\lambda>0)$ 有 $Var_\lambda(\bar{X})=\frac{1}{n\lambda^2}=\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)}$

即信息不等式中等号成立，故 $\bar{X}$ 是 $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的有效估计

45.

(1) 解

$E_\theta(T(X))=-E_\theta(\ln X_1)=-\theta\int_0^1 u^{\theta-1}\ln u\,du=\frac{1}{\theta}$

$Var_\theta(T(X))=\frac{1}{n}Var_\theta(\ln X_1)=\frac{1}{n\theta^2}$

而 $I(\theta)=-E_\theta[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X;\theta)]=\frac{1}{\theta^2}$

∴ 对所有 $\theta>0$ 有 $Var_\theta(T(X))=\frac{1}{n\theta^2}=\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$

即信息不等式中等号成立．故 $T(X)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 是 $g(\theta)=\frac{1}{\theta}$ 的有效估计