《抽象代数》
第一次作业

姓名：姜岚曦　学号：19375233
姓名：魏来　学号：20374104
姓名：曹建钦　学号：20375177
姓名：李璞　学号：20376164
姓名：刘灵　学号：21374261

\$1.2：映射

1. $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$. 找一个 $A\times A$ 到 A 的映射.

解:

定义 ϕ : $\quad (a_1,a_2)\longrightarrow\lfloor\frac{1}{2}(a_1+a_2)\rfloor=\phi(a_1,a_2)$ 为 $A\times A$ 到 A 的一个映射

其中 $\lfloor\frac{1}{2}(a_1+a_2)\rfloor$ 表示不超过 $\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ 的最大整数

2. 在你为习题 1 所找到的映射之下，是不是 A 的每一个元都是 $A\times A$ 的一个元的象?

解:

是，对于 $\forall x\in A,\exists(a_1,a_2)=(x,x),s.t.\phi(x,x)=x$

\$1.3：代数运算

1. $A=\{$ 所有不等于零的偶数 $\}$. 找一个集合 D，使得普通除法是 $A\times A$ 到 D 的代数运算，是不是找得到一个以上的这样的 D?

解:

可以找到一个以上这样的 D

令 $D_0=Q$，即有理数的全体构成的集合

那么包含 D_0 的任意集合都是符合要求的 D，故 D 肯定不止一个

2. $A=\{a,b,c\}$. 规定 A 的两个不同的代数运算.

解:

R_1 和 R_2 都是 $A=\{a,b,c\}$ 的代数运算:

R_1 :

	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

R_2 :

	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

$1.4：结合律

1. $A = \{$ 所有不等于零的实数 $\}$. $\circ$ 是普通除法：$a \circ b = \frac{a}{b}$. 这个代数运算适合不适合结合律?

解：

考虑：

$$(a \circ b) \circ c = \frac{a}{b} \circ c = \frac{a}{bc}$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$$

由于 $a, b, c \in A = \{x | x \in R, x \neq 0\}$ 任意性，一般没有 $\frac{a}{bc} = \frac{ac}{b}$，即 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 未必成立，故代数运算 $\circ$ 不适合结合律

2. $A = \{$ 所有实数 $\}$.

$$\circ : \qquad (a, b) \to a + 2b = a \circ b$$

这个代数运算适合不适合结合律?

解：

$$(a \circ b) \circ c = (a + 2b) \circ c = a + 2b + 2c$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + 2c) = a + 2b + 4c$$

由于 $a, b, c \in A = \{$ 所有实数 $\}$ 任意性，代数运算 $\circ$ 不适合结合律

3. $A = \{a, b, c\}$. 由表：

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

所给的代数运算适合不适合结合律?

解：

$$a \circ b \circ c = a$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ a = a$$

依次替换 $3^3 = 27$ 次进行验证可证得此代数运算适合结合律

$1.5：交换律

1. $A = \{$ 所有实数 $\}$. $\circ$ 是普通减法：$a \circ b = a - b$. 这个代数运算适合不适合交换律?
解：

$$a \circ b = a - b$$
$$b \circ a = b - a$$

显然，此代数运算不适合交换律

2. $A = \{a, b, c, d\}$. 由表：

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	b	d
d	d	c	a	b

所给的代数运算适合不适合交换律?
解：
若代数运算是符合交换律的，则其运算应为对称阵
可见 $c \circ d = d \neq a = d \circ c$，故不适合交换律

$1.6：分配率

1. 假定 $\bigodot$，$\bigoplus$ 是 A 的两个代数运算，并且 $\bigoplus$ 适合结合律，$\bigodot$，$\bigoplus$ 适合两个分配率. 证明

$$\begin{aligned} &(a_1 \odot b_1) \oplus (a_1 \odot b_2) \oplus (a_2 \odot b_1) \oplus (a_2 \odot b_2) \\ = &(a_1 \odot b_1) \oplus (a_2 \odot b_1) \oplus (a_1 \odot b_2) \oplus (a_2 \odot b_2) \end{aligned}$$

证明：

$$\begin{aligned} (a_1 \odot b_1) \oplus (a_1 \odot b_2) \oplus (a_2 \odot b_1) \oplus (a_2 \odot b_2) \\ = (a_1 \odot (b_1 \oplus b_2)) \oplus (a_2 \odot (b_1 \oplus b_2)) \\ = (a_1 \oplus a_2) \odot (b_1 \oplus b_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(a_1 \odot b_1) \oplus (a_2 \odot b_1) \oplus (a_1 \odot b_2) \oplus (a_2 \odot b_2) \\
&= ((a_1 \oplus a_2) \odot b_1) \oplus ((a_1 \oplus a_2) \odot b_2) \\
&= (a_1 \oplus a_2) \odot (b_1 \oplus b_2)
\end{aligned}
$$

两式相等，原命题得证。