数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第五章 插值与逼近

5.6-1 函数的最佳平方逼近

对空间 C[a，b]的任意两个函数f，g，定义内积

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

定义1 设集合S是数域P上的线性空间，元素$x_1,x_2,\cdots,x_n\in S$，如果存在不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$，使得

$$\boxed{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0,} \tag{1.1}$$

则称$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性相关，否则称$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，即只有当$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$时等式(1.1)才成立.

若线性空间S是由n个线性无关元素$x_1,\cdots,x_n$生成的，即对任意$x\in$S，都有

$$x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n,$$

则$x_1,\ldots,x_n$称为空间S的一组基, 记为S=span$\{x_1,\ldots,x_n\}$,并称空间S为n维空间，系数$a_1,\ldots,a_n$为x在基$x_1,\ldots,x_n$下的坐标，记作$(a_1,\cdots,a_n)$.

如果S中有无限多个线性无关元素$x_1,\ldots,x_n,\ldots$，则称S为无限维线性空间.

一、连续函数的范数

† 设函数组$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$都是[a，b]上的连续函数，并且在[a，b]上线性无关。以此函数组为基，生成空间 C[a，b]上的一个子空间

$$H_n = Span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$$

则H_n中的任意一个元素为 $p(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)$

对空间 C[a，b]的任意两个函数f，g，定义内积

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

向量范数的定义:

定义在R^n上的实值函数$\|\cdot\|$称为**向量范数**,如果$\forall x,y \in R^n$,

$k \in R$,满足

(1)正定性: $\|x\| \geq 0$;

(2)齐次性: $\|kx\| = |k|\|x\|$;

(3)满足三角不等式:$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

向量范数是一种度量，用来衡量一个向量的长度或它到原点（即零向量）的距离。

常用范数　设 $\vec{x}=[x_1,\dots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$,

$$\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\ (\text{列范数})$$

$$\|\vec{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\ (\text{欧氏范数})$$

$$\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|\quad(\text{行范数})$$

cauchy-schwarz不等式: $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\ 2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$

类似的对连续函数空间C[a, b]，若$f\in C[a, b]$可定义以下三种

常用**函数的范数**

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)|,$$ 称为∞ – 范数

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$ 称为1 – 范数

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$ 称为2 – 范数

可以验证这样定义的范数均满足范数定义中的三个条件.

二、最佳逼近

函数逼近主要讨论：给定$f(x)\in C[a,b]$,求它的最佳逼近函数.

如果$P^*\in\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$,使得误差

$$\left\|f-P^*\right\|=\min_{P\in\Phi}\left\|f-P\right\|$$

则称$P^*(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的最佳逼近函数.

$H_n(x):[a,b]$上n次多项式空间, $\forall p(x)\in H_n$，$p(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)$.

如果$P^*\in H_n$,使得误差 $\left\|f-P^*\right\|=\min_{P\in H_n}\left\|f-P\right\|$

则称$P^*(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的最佳逼近多项式.

1 最优一致逼近多项式

如果$P^* \in H_n$,使得误差

$$\|f-P^*\|_\infty=\min_{P\in H_n}\|f-P\|_\infty=\min_{P\in H_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|$$

则称$P^*(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的**最优一致逼近多项式**.

2 最佳平方逼近

如果$P^* \in H_n$,使得误差

$$\|f(x)-P^*(x)\|_2^2=\min_{P\in H_n}\|f(x)-P(x)\|_2^2=\min_{P\in H_n}\int_a^b \rho(x)[f(x)-P(x)]^2dx$$

则称$P^*(x)$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的**最佳平方逼近多项式**.

需要解决几个重要问题： $\min\limits_{p\in H_n} \|f(x)-p(x)\|_2^2$ 是否有解？唯一？

1. H_n中$\mathrm{p}_n^*(x)$的存在唯一性；

2. 构造$\mathrm{p}_n^*(x)$的具体方法；

3. 误差 $\|\delta\|^2 = \|f(x)-\mathrm{p}_n^*(x)\|^2$ 。

魏尔斯特拉斯(Weierstrass)定理

定理1 设 $f(x)\in C[a,b]$，则对任何 $\varepsilon>0$，总存在一个代数多项式 $p(x)$，使

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

在 $[a,b]$ 上一致成立.

(Weierstrass定理)

Weierstrass,德，
1885年提出，
时年70岁；
1912年Bernstein
(俄)证明

伯恩斯坦多项式

$\forall f(x)\in C[0,1]$,定 义

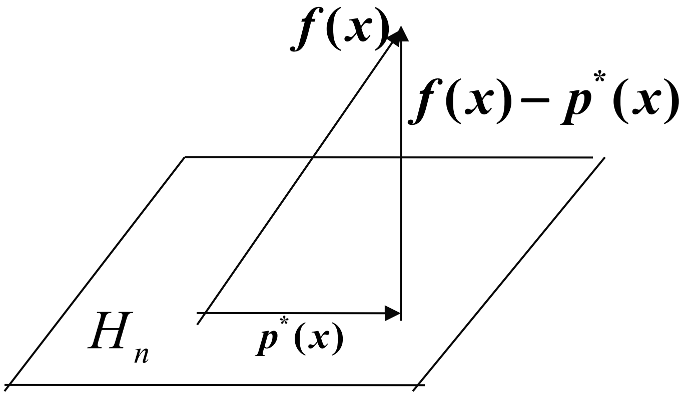
$$B_n(x;f)\equiv\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

三、最优平方逼近多项式的存在、唯一性定理

定理 5.7 设$f(x)\in C[a,b]$，$p^*(x)\in H_n$是子空间H_n中对于 $f(x)$ 的最佳平方逼近元素的充分必要条件是$(f-p^*,\varphi_j)=0, j=0,1,\cdots,n$或对于任意一个$p(x)\in H_n$，总有$(f-p^*,p)=0$。

$p(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j$

几何解释：



p^* 最佳 $\Rightarrow (f-p^*, \varphi_k)=0 \quad k=0,\cdots,n$

必要性　用反证法。设存在一个函数 $\varphi_k(x)$，使得

$$(f-p^*, \varphi_k) = \sigma_k \neq 0$$

令

$$\underline{q(x)} = \underbrace{p^*(x)}_{\in H_n} + \boxed{\frac{\sigma_k}{(\varphi_k, \varphi_k)}}^{\in R} \underbrace{\varphi_k(x)}_{\in H_n}$$

显然 $q(x) \in H_n$，利用内积性质，可得

$$(f-q, f-q) = (f-p^*, f-p^*) - \frac{2\sigma_k}{(\varphi_k, \varphi_k)}\underbrace{(f-p^*, \varphi_k)}_{\sigma_k} + \frac{\sigma_k^2}{(\varphi_k, \varphi_k)^2}\cancel{(\varphi_k, \varphi_k)} =$$

$$(f-p^*, f-p^*) - \underbrace{\frac{\sigma_k^2}{(\varphi_k, \varphi_k)}}_{>0} < \underline{(f-p^*, f-p^*)}$$

这表示 $p^*(x)$ 不是最佳平方逼近元素，所以出现的矛盾证实必要性成立。

$(f-p^*,\varphi_j)=0,\ j=0,1,\cdots,n \quad \Rightarrow \quad p^*$ 最佳

充分性　设条件(5.81)成立。对任意的 $p(x)\in H_n$，有

$$(f-p,f-p)=(f-p^*+p^*-p,f-p^*+p^*-p)=$$

$p^*=\sum_{j=0}^{n}c_j^*\varphi_j$ ， $p(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j$

$$(f-p^*,f-p^*)+2(f-p^*,p^*-p)+$$

$$(p^*-p,p^*-p)$$

$\Rightarrow \quad p^*-p=\sum_{j=0}^{n}(c_j^*-c_j)\varphi_j$

$$(f-p^*,p^*-p)=\sum_{j=0}^{n}(c_j^*-c_j)(f-p^*,\varphi_j)=0$$

$$(p^*-p,p^*-p)\geqslant 0$$

所以有

$$(f-p,f-p)\geqslant(f-p^*,f-p^*)$$

因而 $p^*(x)$是 H_n 中对于 $f(x)$的最佳平方逼近元素。

定理 设X为一个内积空间，$u_1,u_2,\ldots,u_n\in X$，矩阵

$$G=\begin{pmatrix}(u_1,u_1) & (u_2,u_1) & \cdots & (u_n,u_1)\\(u_1,u_2) & (u_2,u_2) & \cdots & (u_n,u_2)\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(u_1,u_n) & (u_2,u_n) & \cdots & (u_n,u_n)\end{pmatrix}\qquad(1.7)$$

称为**格拉姆(Gram)矩阵**, 则G非奇异的充分必要条件是$u_1,u_2,\ldots,u_n$线性无关.

证明 G非奇异等价于$\det G\neq 0$，其充分必要条件是下面齐次线性方程组只有零解

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_ju_j,u_k\right)=\sum_{j=1}^{n}(u_j,u_k)a_j=0,\ \ k=1,\cdots,n\quad(1.8)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, u_k\right) = \sum_{j=1}^{n} (u_j, u_k) a_j = 0,\ \ k = 1, \cdots, n \quad (1.8)$$

而 $$\sum_{j=1}^{n} a_j u_j = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots a_n u_n = 0 \qquad (1.9)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, \sum_{j=1}^{n} a_j u_j\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, u_k\right) = 0,\ \ k = 1, \cdots, n$$

从以上的等价关系可知道，$\det G \neq 0$等价于从方程(1.8)推出$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，而后者等价于从方程(1.9)推出$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，即 $u_1,u_2,\cdots,u_n$线性无关. 证毕

若$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是$C[a, b]$中的线性无关函数族，记

$\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$，它的**拉姆(Gram)矩阵**为

$$G = G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n) = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}.$$

根据定理3知 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\det G(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n)\neq 0.$$

定理 5.8 设$f(x)\in C[a,b]$，则在子空间H_n中对于 $f(x)$的最佳平方逼近元素是唯一的。

pf：假设 $p(x), q(x) \in H_n$ 是 $f(x)$ 的最佳平方逼近多项式，则 $(f-p, p-q) = (f-q, p-q) = 0$

所以 $(p-q, p-q) = (p-f+f-q, p-q) = (p-f, p-q) + (f-q, p-q) = 0$

$\Rightarrow$ 在 $[a,b]$ 上有 $(p-q, p-q) = 0 \Rightarrow p \equiv q$

由定理5.7,我们就可以**求出最佳平方逼近元素**，具体如下：

求最佳平方逼近元素$p^*(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^*\varphi_k(x)$，**只要求出$c_k^*$**.

因为$(f-p^*,\varphi_j)=(f,\varphi_j)-\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^*(\varphi_k,\varphi_j)=0$

于是可得 $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^*(\varphi_k,\varphi_j)=(f,\varphi_j)$

设$\varphi_0,\cdots,\varphi_n \in C[a,b]$，则Gram矩阵为

$$G = G(\varphi_0,\cdots,\varphi_n) = \begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

$\varphi_0,\cdots,\varphi_n$线性无关 $\Rightarrow \det(G) \neq 0.$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \overset{c^*}{\begin{bmatrix} c^*_0 \\ c^*_1 \\ \vdots \\ c^*_n \end{bmatrix}} = \overset{\beta}{\begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}},$$

此 方 程 组 称 为 **法 方 程** .

$G c^* = \beta$

故方程组存在唯一解.

【例1】：选取常数a,b使$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x-(ax+b)]^2dx$达到最小

分析： 相当于求一次最佳平方逼近多项式$ax+b$逼近$\sin x$.

解： 设$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x-(ax+b)]^2dx$

确定a,b使$I(a,b)$达到最小，必须满足

$$\frac{\partial I}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial I}{\partial b}=0$$

即
$$\begin{cases}-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x-(ax+b)]\ xdx=0\\ -2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin x-(ax+b)]\ dx=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \\ a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ dx + b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \end{cases}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d(-\cos x) = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^3}{24}a + \dfrac{\pi^2}{8}b = 1 \\ \dfrac{\pi^2}{8}a + \dfrac{\pi}{2}b = 1 \end{cases}$$

解得 $a \approx 0.6644389, b \approx 0.1147707$

最佳平方逼近误差

$$\delta = \|f - P^*\|_2^2 = (f - P^*, f - P^*)$$

Thm 5.7

因为$(f - P^*, P^*) = 0$，所以$\delta = (f - P^*, f) = (f, f) - (P^*, f)$

$$= (f, f) - \sum_{k=0}^{n} c_k^* (\varphi_k, f).$$

均方误差 $\sqrt{\delta}$.

【例2】： 给定$f(x)=\sqrt{1+x^2}, 0\le x\le 1$，取逼近空间$H=span\{1,x\}$，在$H$中求其最佳平方逼近函数。

解： 取 $\mathrm{H}=span\{1,x\}$，　$\rho(x)=1$

$$(\varphi_0,\ \varphi_0)=\int_0^1 dx=1,\qquad (\varphi_1,\ \varphi_0)=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2},\qquad (\varphi_1,\ \varphi_1)=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}$$

$$(\varphi_0,\ f)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx=1.147,\qquad (\varphi_1,\ f)=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,xdx=0.609$$

法方程为
$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.147\\ 0.609\end{bmatrix}$$
解得$c_0=0.934, c_1=0.426$，

解得$c_0 = 0.934, c_1 = 0.426,$

所求最佳平方逼近函数为 $s(x) = 0.934 + 0.426x$

最佳平方逼近误差为

$$\begin{aligned}\delta &= (f,f) - (s,f) = (f,f) - (c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1, f) \\ &= \int_0^1 (1+x^2)dx - c_0(\varphi_0, f) - c_1(\varphi_1, f) \\ &= \frac{2}{3} - 0.934 \times 1.147 - 0.426 \times 0.906 = 0.0026\end{aligned}$$

最大误差为 $\|\delta(x)\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|\sqrt{1+x^2} - s(x)\right| \approx 0.066.$

$g(0) = \left|\sqrt{1+x^2} - s(x)\right| \approx 0.066.$ $g(1) = \left|\sqrt{1+1^2} - s(1)\right| \approx 0.054.$

驻点$x_0 \approx 0.74216028$. $g(x_0) \approx 0.019.$

【例3】 设 $f(x)=e^x, x\in[0,1]$，求2次最佳平方逼近多项式

$$S_2^*(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.$$

解：$H_2=span\{1,x,x^2\}$,

法方程组为：
$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.7183\\ 1.0000\\ 0.7183\end{bmatrix}$$

解得 $a_0=1.1013,\ a_1=0.851,\ a_2=0.839,$

于是 $S_2^*(x)=1.1013+0.851x+0.839x^2.$

在[0,1]上由$\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$构造最佳平方逼近多项式时，法方程的系数矩阵是Hilbert矩阵，形如

$$H=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

Hilbert矩阵是一种典型的病态矩阵，随着n越大，病态越严重。因此法方程是病态方程组，数值计算结果是不稳定的。所以要改用正交多项式构造最佳平方逼近多项式。

三、基于正交多项式的逼近函数类

$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad i \neq j$

设$\{\varphi_j(x)\}(j = 0,1,\dots,n)$是区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式组,取$H$为

$$H = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$$

$G = ((\varphi_i, \varphi_i))$ 对角阵

则法方程为

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

解方程组，得 $c_j = \dfrac{(\varphi_j, f)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \quad j = 0,1,\dots,n$

因此得最佳平方逼近多项式

$$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\varphi_j,f)}{(\varphi_j,\varphi_j)}\varphi_j(x)$$

最佳平方逼近误差为

$$\delta=(f,f)-(s,f)=(f,f)-(\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j,f)$$

$$=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}c_j(\varphi_j,f)$$

$(\varphi_j,f)=c_j(\varphi_j,\varphi_j)$

$$=(f,f)-\sum_{j=0}^{n}c_j^2(\varphi_j,\varphi_j)$$

最大误差为 $\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|f(x)-s(x)\right|$

1、利用*Legendre*多项式，求最佳平方逼近多项式

取 $[a,b]=[-1,1],\rho(x)=1$

$$\varphi_j(x)=L_j(x)=\frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^j,(j=0,1,\dots,n)\quad (L_j,L_j)=\frac{2}{2j+1},$$

则 $$c_j=\frac{(L_j,f)}{(L_j,L_j)}=\frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)L_j(x)\mathrm{d}x,\quad (j=0,1,\dots,n)$$

因此得*Legendre*最佳平方逼近多项式

$$s(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jL_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(L_j,f)}{(L_j,L_j)}L_j(x)$$

*Legendre*无穷级数 $$\sum_{j=0}^{\infty}u_j(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jL_j(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(L_j,f)}{(L_j,L_j)}L_j(x)$$

最佳平方逼近误差$\delta = (f, f) - \sum_{j=0}^{n} c_j^2 (L_j, L_j) = (f, f) - \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{2j+1} c_j^2$

前几项

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = x$

$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

$S(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \underline{L_j(x)}$

【例3】：求$f(x)=x^4$在区间$[-1,1]$上的二次最佳平方逼近多项式。

解： 取$\varphi_j(x)=L_j(x), j=0,1,2.$

则有$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x, \varphi_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{5}, c_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^5dx=0, \quad c_2=\frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^4(3x^2-1)dx=\frac{4}{7}$$

故$f(x)=x^4$在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式为

$$s(x)=\sum_{j=0}^{2}c_j\varphi_j(x)=\frac{1}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{6}{7}x^2-\frac{3}{35}$$

最佳平方逼近误差为

$$c_j=\frac{(L_j,f)}{(L_j,L_j)}=\frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)L_j(x)\mathrm{d}x, \quad (j=0,1,\dots,n)$$

$$\delta^2=(f,f)-\sum_{j=0}^{2}\frac{2}{2j+1}c_j^2=\int_{-1}^{1}x^8dx-\left[2\times(\frac{1}{5})^2+\frac{2}{5}\times(\frac{4}{7})^2\right]\approx 0.011609977$$

【例4】 设$f(x)=|x|, x\in[-1,1]$,用$Legendre$多项式在$span\{1,x^2,x^4\}$中求最佳平方逼近多项式。 L_0, L_2, L_4

解： 函数$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & x\in[-1,0] \\ x & x\in[0,1] \end{cases}$

最佳平方逼近多项式$S(x)=c_0L_0(x)+c_2L_2(x)+c_4L_4(x)$

$$c_0=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0}-xL_0(x)dx+\int_0^1 xL_0(x)dx\right)=0.5$$

$$c_2=\frac{5}{2}\left(\int_{-1}^{0}-xL_2(x)dx+\int_0^1 xL_2(x)dx\right)=1.25$$

$$c_4 = \frac{9}{2}(2\int_0^1 xL_4(x)dx) = 0.1875$$

求得最佳平方逼近多项式为

$$s(x) = 0.5 + 0.625(3x^2 - 1) + 0.02344(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

对首项系数为1的勒让德多项式 $\tilde{L}_n$ 有以下性质

定理5.9 在所有最高次项系数为1的n次多项式中,勒让德多项式$\tilde{L}_n$在[-1, 1]上与零的平方误差最小.

即可以理解为 $\| (f(x)-S^*(x))-0 \|_2$ 最小等价于

$$f(x)-S^*(x)=\tilde{L}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

与零的平方误差最小.

证明 设$Q_n(x)$是任意一个最高次项系数为1的n次多项式，它可表示为

$$Q_n(x)=\tilde{L}_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\tilde{L}_k(x),$$

$$Q_n(x)=\tilde{L}_n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\tilde{L}_k(x),$$

于是 $$\|Q_n(x)\|_2^2=(Q_n(x),Q_n(x))=\int_{-1}^{1}Q_n^2(x)dx$$

$$=(\tilde{L}_n(x),\tilde{L}_n(x))+\sum_{k=0}^{n-1}a_k^2(\tilde{L}_k(x),\tilde{L}_k(x))$$

$$\geq(\tilde{L}_n(x),\tilde{L}_n(x))$$

$$=\|\tilde{L}_n(x)\|_2^2$$

因此当且仅当 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$ 时等号才成立，即当 $Q_n(x)=\tilde{L}_n(x)$ 时平方误差最小.

【例5】 求$f(x)=e^x$在$[-1,1]$上的三次最佳平方逼近多项式.

解 先计算$(f(x), L_k(x))$ $(k=0,1,2,3)$

$$(f(x),L_0(x))=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-\frac{1}{e}\approx 2.3504;$$

$$(f(x),L_1(x))=\int_{-1}^{1}xe^x dx=\frac{2}{e}\approx 0.7358;$$

$$(f(x),L_2(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})e^x dx=e-\frac{7}{e}\approx 0.1431;$$

$$(f(x),L_3(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{1}{2}x)e^x dx=-5e+\frac{37}{e}\approx 0.02013.$$

由公式$a_k^*=\dfrac{2k+1}{2}(f(x),L_k(x))$ 解得

$$a_0^* = \frac{1}{2}(f(x), L_0(x)) = 1.1752, \quad a_1^* = \frac{3}{2}(f(x), L_1(x)) = 1.1036,$$

$$a_2^* = \frac{5}{2}(f(x), L_2(x)) = 0.3578, \quad a_3^* = \frac{7}{2}(f(x), L_3(x)) = 0.07046.$$

得三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3^*(x) = a_0^* L_0(x) + a_1^* L_1(x) + a_2^* L_2(x) + a_3^* L_3(x)$$

$$= 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3.$$

可得均方误差为

$$\|\delta_n(x)\|_2 = \|e^x - S_3^*(x)\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} e^{2x}dx - \sum_{k=0}^{3} \frac{2}{2k+1} a_k^{*2}} \le 0.0084.$$

可得最大误差为

$$\|\delta_n(x)\|_\infty = \|e^x - S_3^*(x)\|_\infty \le 0.0112.$$

2. 利用*Chebyshev*多项式，求最佳平方逼近多项式

取 $[a,b]=[-1,1],\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\varphi_j(x)=T_j(x)=\cos(j\arccos x),(j=0,1,\ldots,n)$

$$\boxed{(T_j,T_j)=\frac{\pi}{2},(T_0,T_0)=\pi,}$$

则 $c_j=\dfrac{(T_j,f)}{(T_j,T_j)}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$(j=0,1,\ldots,n)$

*Chebyshev*最佳平方逼近多项式为 $s(x)=\dfrac{c_0}{2}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}c_jT_j(x)$

*Chebyshev*无穷级数 $s(x)=\dfrac{c_0}{2}+\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}c_jT_j(x)$，$-1\le x\le 1$

平方误差为$\delta = (f,f) - \sum_{j=0}^{n} c_j^2 (T_j, T_j) = (f,f) - \sum_{j=0}^{n} \frac{\pi}{2} c_j^2$

前几项

$T_0(x) = 1,\qquad T_1(x) = x,\qquad T_2(x) = 2x^2 - 1,$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x,\qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,\qquad T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,$

若令$\tilde{T}_0(x) = 1, \tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x), n = 1,2,\cdots,n$则多项式 $\tilde{T}_n(x)$是首项系数为 1 的切比雪夫多项式．若记 $\tilde{H}_n$为所有次数小于等于n的首项系数为 1 的多项式集合，对$\tilde{T}_n(x)$有以下性质．

定理5.10 设 $\tilde{T}_n(x)$是首项系数为 1 的切比雪夫多项式，则

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right|\le \max_{-1\le x\le 1}\left|P(x)\right|,\quad \forall P(x)\in \tilde{H}_n,$$

且 $\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right|=\dfrac{1}{2^{n-1}}.$

定理5.10表明在所有首项系数为1的n次多项式集合 $\tilde{H}_n$中

$$\left\|\tilde{T}_n(x)\right\|_\infty=\min_{P\in\tilde{H}_n}\left\|P(x)\right\|_\infty.$$

所以 $\tilde{T}_n(x)$是 $\tilde{H}_n$ 中最大值最小的多项式，即

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right|=\min_{P\in\tilde{H}_n}\max_{-1\le x\le 1}\left|P(x)\right|=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

利用这一结论，可求$P(x)\in H_n$在H_{n-1}中的**最佳(一致)逼近多项式.**

【例6】 求$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在 $[-1,1]$上的最佳2次逼近多项式.

解 由题意，所求最佳逼近多项式$P_2^*(x)$应满足

$$\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-P_2^*(x)|=\min .$$

由定理5.10可知，当 $f(x)-P_2^*(x)=\frac{1}{2}T_3(x)=2x^3-\frac{3}{2}x$

时，多项式$f(x)-P_2^*(x)$与零偏差最小，故

$$P_2^*(x)=f(x)-\frac{1}{2}T_3(x)=x^2+\frac{7}{2}x-1$$

就是$f(x)$在 $[-1,1]$上的最佳2次逼近多项式.

【例7】：求$f(x)=x^4, x\in[-1,1]$，在$M=span\{T_0(x),T_1(x),T_2(x)\}$中的最佳平方逼近多项式。

解：$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1$

$$c_0=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{3}{4}, \qquad c_1=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,$$

$$c_2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$$

于是所求最佳平方逼近多项式为

$$s(x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}(2x^2-1)=x^2-\frac{1}{8}, \qquad -1\le x\le 1$$

$$c_j=\frac{(T_j,f)}{(T_j,T_j)}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\quad (j=0,1,\ldots,n)$$

其最大误差为$\max\limits_{-1\le x\le 1}|f(x)-s(x)|=\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|x^4-x^2+\frac{1}{8}\right|=0.125$

【例8】求函数 $f(x)=\arcsin x$ 按 Chebyshev 多项式展开的$n=7$的部分和。

解：
$$p_7(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{7}a_jT_j(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

$$a_{2k}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{2k}(x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0\quad(k=0,1,2,3)$$

$$a_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{2k-1}(x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$x=\cos\theta$
$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos(2k-1)\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}\quad(k=1,2,3,4)$$

$$p_7(x)=\frac{4}{\pi}\left[T_1(x)+\frac{T_3(x)}{9}+\frac{T_5(x)}{25}+\frac{T_7(x)}{49}\right]$$

$$p_7(x)=\frac{4}{\pi}\left[T_1(x)+\frac{T_3(x)}{9}+\frac{T_5(x)}{25}+\frac{T_7(x)}{49}\right]$$

$$T_1(x)=x,$$

$$T_3(x)=4x^3-3x,$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$

$$T_7(x)=64x^7-112x^5+16x^3+3x,$$

$$\boxed{\arcsin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})}$$

$$p_7(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{76}{105}x+\frac{248}{315}x^3-\frac{288}{175}x^5+\frac{64}{49}x^7\right),\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

$$q_7(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{96}x^7+o(x^8)$$

$p_7(x)$比$\arcsin x$的Maclaurin级数$q_7(x)$精度高得多.

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$q_7(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{96}x^7 + o(x^8)$$

设 $q_7(x)$是函数 arcsin x 的 Maclaurin 级数 $n=7$ 的部分和，那么，在区间$[-1,1]$上用例 9 所得的 $p_7(x)$近似代替 arcsin x 的精确度比用$q_7(x)$高得多。原因是 Maclaurin 级数 $n=7$ 的部分和逼近 arcsin x 只在 $x=0$ 的近旁才有良好的精确度，而 Chebyshev 级数的部分和却是在区间$[-1,1]$上 $f(x)$的最佳平方逼近，其最佳逼近是对整个区间$[-1,1]$而言的。因此，函数的 Chebyshev 展开式常常用做函数在整个区间的近似计算，有最经济展开的称号。

3.利用*Legndre*多项式和*Chebyshev*多项式，求函数$f(x)$在任意有限区间$[a,b]$上的最佳平方逼近函数。

作变量代换将区间$[a,b]$变为$[-1,1]$

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2},\quad t=\frac{1}{b-a}(2x-a-b)$$

$$f(x)=f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)=F(t)$$

对$F(t),t\in[-1,1]$按$L_n(t)$或$T_n(t)$求最佳平方逼近多项式$s(t)$

最后换回原变量x

$$s(t)\to s\left(\frac{1}{b-a}(2x-a-b)\right)$$

【例9】 求函数$y=\arctan x$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

解: 作变量替换$x=\frac{1}{2}(t+1)$，将$[0,1]$变换到$[-1,1]$,

函数$y=\arctan x$，$x\in[0,1]$变为$y=\arctan\frac{t+1}{2}$，$t\in[-1,1]$。

利用多项式$L_0(t)=1, L_1(t)=t$,，求$y=\arctan\frac{t+1}{2}$在

$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。 $S(x)=\underline{\underline{c_0}}+\underline{\underline{c_1}}t$

分部积分

$$c_0=\frac{1}{2}(L_0(t),\ y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\arctan\frac{t+1}{2}dt=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2},$$

$$c_j=\frac{(L_j,f)}{(L_j,L_j)}=\frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)L_j(x)dx,\quad (j=0,1,2,\dots,n)$$

$$c_1=\frac{3}{2}(L_1(t),\ y)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}t\arctan\frac{t+1}{2}dt=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2\right),$$

$$c_0=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2,$$

$$c_1=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2\right),$$

$x=\frac{t+1}{2} \Rightarrow t=2x-1$

所求的一次最佳平方逼近多项式为

$$\tilde{s}(t)=c_0L_0(t)+c_1L_1(t)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2\right)t$$

即： $$s(x)=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2+\ln 2\right)(2x-1)$$

$$\approx 0.042909+0.791831x$$

四、三角函数系的应用（周期函数的逼近）

三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$

在区间$[-\pi, \pi]$上正交，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & (k \neq n) \\ \pi & (k = n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & (k \neq n) \\ \pi & (k = n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0, \quad (k, n = 1, 2, \ldots)$$

函数$f(x)$的傅里叶级数 ☆

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中a_n、b_n为$f(x)$的傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

最佳平方逼近元素是傅里叶级数的部分和

作业

- 教材第146页习题：33、34、35、37、39

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院