数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第二章　线性方程组的解法

2.2.1 Doolittle分解法与Crout分解法

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\p_{21}&1&0\\p_{31}&0&1\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&p_{32}&1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$P_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\p_{21}&1&0\\p_{31}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+p_{21}a_{11}&a_{22}+p_{21}a_{12}&a_{23}+p_{21}a_{13}\\a_{31}+p_{31}a_{11}&a_{32}+p_{31}a_{12}&a_{33}+p_{31}a_{13}\end{pmatrix}$$

$$P_2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&p_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+p_{32}a_{21}&a_{32}+p_{32}a_{22}&a_{33}+p_{32}a_{23}\end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\p_{21}&1&0\\p_{31}&0&1\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&p_{32}&1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

$$p_{21}=-\frac{a_{21}}{a_{11}}\qquad p_{31}=-\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$P_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\p_{21}&1&0\\p_{31}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{32}^{(1)}\\0&a_{32}^{(1)}&a_{33}^{(1)}\end{pmatrix}$$

$$p_{32}=-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$P_2P_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&p_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}\\0&a_{32}^{(1)}&a_{33}^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}^{(1)}&a_{23}^{(1)}\\0&0&a_{32}^{(2)}\end{pmatrix}$$

即$P_2P_1A=U$， U是上三角矩阵，

$\boxed{\text{即} P_2P_1A = U, \quad U\text{是上三角矩阵},}$

$\boxed{\text{因为} P_1, P_2 \text{可逆,所以}}$ $A = P_1^{-1}P_2^{-1}U$ $\quad A$可表示为下三角矩阵 $\times$ 上三角矩阵

因为P_1, P_2是下三角矩阵,所以P_1^{-1}, P_2^{-1}也是下三角矩阵,

进一步$P_1^{-1} \cdot P_2^{-1}$也是下三角矩阵,

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p_{21} & 1 & 0 \\ -p_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以Gauss消去法本质是矩阵的三角分解过程.

$$(P_1, I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{21} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I, P_1^{-1})$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$AQ_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{11}q_{12} & a_{13} + a_{11}q_{13} \\ a_{21} & a_{22} + a_{21}q_{12} & a_{23} + a_{21}q_{13} \\ a_{31} & a_{32} + a_{31}q_{12} & a_{33} + a_{31}q_{13} \end{pmatrix}$$

$$AQ_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a_{12}q_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + a_{22}q_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + a_{32}q_{23} \end{pmatrix}$$

一、Gauss消去法本质是矩阵的三角分解过程

定义　称$n\times n$矩阵

$$
P_k=\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & p_{k+1,k} & 1 & & \\
 & & \vdots & & \ddots & \\
 & & p_{n,k} & & & 1
\end{pmatrix}
\qquad
P_k^{-1}=\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & -p_{k+1,k} & 1 & & \\
 & & \vdots & & \ddots & \\
 & & -p_{n,k} & & & 1
\end{pmatrix}
$$

为初等下三角矩阵.　　$(k=1,2,\cdots,n-1)$

$\forall A\in R^{n\times n}, P_kA$相当于对$A$做一次行变换.

将 Gauss 消去过程中第 k-1 步消元后的系数矩阵记为：

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (k=1, \ldots, n\text{-}1)$$

则 $A^{(k)}$ 与 $A^{(k+1)}$ 之间的有关系式： $\boxed{A^{(k+1)}=L_k A^{(k)}}$

其中：

$$L_k=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{ik}=a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

$$(i=k+1, \ldots, n)$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

$$\boxed{A^{(2)} = L_1 A^{(1)}}$$

$$\boxed{A^{(3)} = L_2 A^{(2)}}\boxed{= L_2 L_1 A^{(1)}}$$

于是有：$\boxed{A^{(n)} = L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A^{(1)}}$

$$L_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} \end{pmatrix} = A^{(3)}$$

于是有： $A^{(n)} = L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A^{(1)}$ → $\boxed{A = A^{(1)} = (L_{n-1} \cdots L_2 L_1)^{-1} A^{(n)}}$

容易验证： $L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{n,k} & & & 1 \end{bmatrix}$ $(k = 1, \ldots, n\text{-}1)$

记： $L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_n^{-1}$， $U = A^{(n)}$，则 $\boxed{A = LU}$ → LU 分解 (Doolittle分解)

其中： L --- 单位下三角矩阵， U --- 上三角矩阵

二、LU 分解存在唯一性

LU 分解存在 $\Longleftrightarrow$ 高斯消去法不被中断

$\Updownarrow$

所有顺序主子式不为零 $\Longleftrightarrow$ $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

定理1.3 矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}(n\geq 2)$有唯一的Doolittle分解的充分必要条件是$A$的前$n-1$个顺序主子式$D_k \neq 0(k=1,2,\ldots,n-1)$。

证明：（充分性） 根据以上高斯消去法的矩阵分析，存在性已得证，现在在 A 为非奇异矩阵的假定下证明唯一性。

设$A = LU = L_1U_1$, 其中 L, L_1 为单位下三角矩阵 $, U, U_1$为上三角阵 .

当A可逆时 ,则U, U_1可逆. $\Rightarrow L^{-1}L_1 = UU_1^{-1}$,

上式右边为上三角矩阵，左边为单位下三角矩阵，从而上

式两边都必须等于单位矩阵，故 $L = L_1, U = U_1$,

当A奇异时 ,则U, U_1都奇异 . 设$A = LU = L_1U_1$,

记$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{b} \\ \vec{a}^T & a_{nn} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} L'_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{r}'^T & 1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} U'_{n-1} & \vec{w}' \\ \vec{0}^T & u'_{nn} \end{pmatrix}$,),

其中 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}, \vec{w}, \vec{0}$是$n-1$维列向量 .

即$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \vec{b} \\ \vec{a}^T & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}\vec{w} \\ \vec{r}^T U_{n-1} & \vec{r}^T\vec{w} + u_{nn} \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} L'_{n-1}U'_{n-1} & L'_{n-1}\vec{w}' \\ \vec{r}'^T U'_{n-1} & \vec{r}'^T\vec{w}' + u'_{nn} \end{pmatrix}$,

$$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1} = L'_{n-1}U'_{n-1}, \quad L_{n-1}\vec{w} = L'_{n-1}\vec{w}',$$

$$\vec{r}^{\,T}U_{n-1} = \vec{r}'^{T}U'_{n-1}, \qquad \vec{r}^{\,T}\vec{w} + u_{nn} = \vec{r}'^{T}\vec{w}' + u'_{nn} \qquad (1)$$

因为 A 的顺序主子式 $0 \neq D_{n-1} = |A_{n-1}| = |L_{n-1}U_{n-1}| = |U_{n-1}|$,

$$= u_{11}u_{22}\cdots u_{(n-1)(n-1)}$$

所以 $u_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n-1.$

$$|A| = |U| \Rightarrow \quad u_{nn} = 0.$$

同理 $u'_{ii} \neq 0, i = 1,\cdots,n-1, u'_{nn} = 0.$

即 U_{n-1}, U'_{n-1} 非奇异 ,由(1)可得

$$L_{n-1} = L'_{n-1}, \quad U_{n-1} = U'_{n-1}, \quad \vec{w} = \vec{w}', \quad \vec{r} = \vec{r}'$$

所以 $L = L_1, \quad U = U_1.$

唯一性得证.

必要性　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 Doolittle 分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$，此时必有 $u_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n-1)$；否则就存在 $u_{kk}=0(1\leqslant k\leqslant n-1)$，而 $u_{11},u_{22},\cdots,u_{k-1,k-1}$ 不为零。那么由

$$\boldsymbol{A}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} & a_{k+1,k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_k & \boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{O} & u_{k+1,k+1}\end{bmatrix}$$

（其中 $\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{L}_k$ 和 $\boldsymbol{U}_k$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的 k 阶顺序主子矩阵）可知

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_k,\quad \boldsymbol{U}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}$$

因 $\boldsymbol{U}_k$ 奇异，故 $\boldsymbol{r}$ 不存在或存在不唯一。这与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 Doolittle 分解相矛盾。

$$U_k^Y r=x\text{有无穷多解}\ \Leftrightarrow R(U)=R(\overline{U})=r<k.$$

$$U_k^T r=x\text{无解}\ \Leftrightarrow R(U)\neq R(\overline{U})$$

由 $u_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n-1)$ 以及 $\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{L}_k\boldsymbol{U}_k$ 可知

$$D_k=\det\boldsymbol{A}_k=u_{11}u_{22}\cdots u_{kk}\neq 0\quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

证毕。

矩阵的乘法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \boxed{c_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}$$

三、直接三角（LU）分解

1、Doolittle(杜立特尔)分解

L为单位下三角，U为上三角

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{n1}} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

比较第1行：$a_{1j} = u_{1j} \quad j = 1, \cdots, n \quad \Rightarrow u_{1j} = a_{1j}$

比较第1列：$a_{i1} = l_{i1} u_{11} \quad i = 2, \cdots, n \quad \Rightarrow l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}
$$

比较第2行: $a_{2j} = l_{21}u_{1j} + u_{2j} \quad j = 2, \cdots, n \quad \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}$

比较第2列: $a_{i2} = l_{i1}\mathrm{u}_{12} + l_{i2}\mathrm{u}_{22} \quad i = 3, \cdots, n \quad \Rightarrow l_{i2} = \dfrac{a_{i2} - l_{i1}\mathrm{u}_{12}}{u_{22}}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

比较第3行：$a_{3j} = \sum_{r=1}^{2} l_{3r}u_{rj} + u_{3j} \quad j = 3,\cdots,n \quad \Rightarrow u_{3j} = a_{3j} - \sum_{r=1}^{2} l_{3r}u_{rj}$

比较第3列：

$$a_{i3} = \sum_{r=1}^{2} l_{ir}u_{r3} + l_{i3}u_{33} \quad i = 4,\cdots,n \qquad \Rightarrow l_{i3} = \frac{a_{i3} - \sum_{r=1}^{2} l_{ir}u_{r3}}{u_{kk}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

k-1次

比较第k行： $a_{kj} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} + u_{kj} \quad j = k, \cdots, n \quad \Rightarrow u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}$

比较第k列：

k-1＋1次

$$a_{ik} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} + l_{ik} u_{kk} \quad i = k+1, \cdots, n \quad \Rightarrow l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}}{u_{kk}}$$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} = LU
$$

矩阵分解的紧凑格式

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}
$$

记法主要是

考虑存储问题

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{44} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{bmatrix}
$$

按颜色顺序依次计算

2、Doolittle(杜立特尔)分解解线性方程

$$Ax=b \xrightarrow{A=LU} LUx=b \xrightarrow{Ux=y} \begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$$

三角方程组，易于求解

$$Ly=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$Ux=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1=b_1 \\ y_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j,\ i=2,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n=y_n/u_{nn} \\ x_i=\left(y_i-\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j\right)\Big/u_{ii},\ i=n-1,\cdots,1 \end{cases}$$

例1 用直接三角分解法解 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$.

解. 由 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -4 \\ & & -24 \end{pmatrix}$. $u_{1j} = a_{1j}; l_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}$.

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} = 2\times 2 + u_{22} = 5, \quad u_{22} = 1,$$

$$a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} = 2\times 3 + u_{23} = 2, \quad u_{23} = -4,$$

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 3\times 2 + l_{32} = 1, \; l_{32} = -5,$$

$$a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} = 29 + u_{33} = 5, \quad u_{33} = -24.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-4\\0&0&-24\end{pmatrix}=LU.\quad \text{设 } y=Ux.$$

$$Ly=(14,18,20)^T,\quad \text{可得}\quad y=(14,-10,-72)^T,$$

$$Ux=y=(14,-10,-72)^T,\quad \text{得 } x=(1,2,3)^T.$$

例1. 用LU分解法解方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解: 由LU分解

$$(u_{11} \quad u_{12} \quad u_{13} \quad u_{14}) = (2 \quad 10 \quad 0 \quad -3)$$

$$(1 \quad l_{21} \quad l_{31} \quad l_{41})^T = (1 \quad -1.5 \quad 0.5 \quad 2)^T$$

$$u_{1j} = a_{1j}$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & -12 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 14 & 9 & -13 \end{pmatrix}$$

$$u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj}$$

$$(u_{11} \quad u_{12} \quad u_{13} \quad u_{14}) = (2 \quad 10 \quad 0 \quad -3)$$

$$(1 \quad l_{21} \quad l_{31} \quad l_{41})^T = (1 \quad -1.5 \quad 0.5 \quad 2)^T$$

求$(0, u_{22}, u_{23}, u_{24})$

$$u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k2} = -4 - l_{21} u_{12} = -4 + 15 = 11,$$

$$u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj}$$

$$u_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k3} = -12 - (-1.5) \cdot 0 = -12,$$

$$u_{24} = a_{24} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k4} = 13 - (-1.5) \cdot (-3) = 8.5,$$

$$(0, u_{22}, u_{23}, u_{24}) = (0, 11, -12, 8.5)$$

$$(0 \quad 1 \quad l_{32} \quad l_{42})^T = (0 \quad 1 \quad -3/11 \quad -6/11)^T$$

$$l_{ir} = \frac{a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}}{u_{rr}}$$

$$(0 \quad 0 \quad u_{33} \quad u_{34}) = (0 \quad 0 \quad -3/11 \quad -2/11)$$

$$(0 \quad 0 \quad 1 \quad l_{43})^T = (0 \quad 0 \quad 1 \quad -9)^T$$

$$(0 \quad 0 \quad 0 \quad u_{44}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -4)$$

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad i = 2, \cdots, n$$

解$Ly = b$，得

$$(y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4)^T = (10 \quad 20 \quad -17/11 \quad -16)^T$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -3/11 & 1 & \\ 2 & -6/11 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 10,$$

$$y_2 = 1.5y_1 + 5 = 20,$$

$$y_3 = -2 - 0.5y_1 + \frac{3}{11}y_2 = -\frac{17}{11},$$

$$y_4 = -2 - 2y_1 + \frac{6}{11}y_2 + 9y_3 = -16,$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & -12 & 8.5 \\ 0 & 0 & -3/11 & -2/11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -17/11 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 4,$

$3x_3 = 2x_4 - 17 \Rightarrow x_3 = 3,$

进一步可得 $x_2 = 2, x_1 = 1.$

$$\boxed{(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)^T = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^T}$$

Doolittle三角分解解n元线性方程组的总运算量为：

$$\sum_{k=1}^{n-1}\big((n-k+1)(k-1)+(n-k)k\big)+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$$

大约需要 $\dfrac{n^3}{3}$ 次乘除法，和高斯消去法基本相同.

3. Crout (克劳特)分解　　L为下三角，U为单位上三角

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \triangleq LU$$

由矩阵乘法可得

$$a_{i1} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} u_{j1} = l_{i1} u_{11} \quad \Rightarrow \quad l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$a_{1j} = \sum_{i=1}^{n} l_{1i} u_{ij} = l_{11} u_{1j} \quad \Rightarrow \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 1, \cdots, n,$$

假设L的前$k-1$列，U的前$k-1$行已经算出，$\Leftrightarrow l_{ij}, u_{jl}, j \le k-1$都已求出

比较第k列：

$$\mathrm{a}_{\mathrm{ik}} = \sum_{r=1}^{k} l_{ir} u_{rk} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk} + l_{ik} \quad i = k, \cdots, n \qquad \Rightarrow l_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}$$

比较第k行：

$$a_{kj} = \sum_{r=1}^{k} l_{kr} u_{rj} = \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} + l_{kk} u_{kj} \quad j = k+1, \cdots, n \qquad \Rightarrow u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj}}{l_{kk}}$$

两次反代过程

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j, \quad i = n, \cdots, 1$$

用Crout分解法求解方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ -63 \\ 50 \end{pmatrix}$.

解 设 $A=LU$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore \quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解下三角方程组 $Ly=b$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ -63 \\ 50 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1=24 \\ y_2=-5 \\ y_3=9 \end{cases}$$

解(单位)上三角方程组 $Ux=y$，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3=9, \\ x_2=4. \\ x_1=21 \end{cases}$$

定理2.3 矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}(n\geq 2)$有唯一的Dolittle分解的充分必要条件是$A$的前$n-1$个顺序主子式$D_k\neq 0(k=1,2,\ldots,n-1)$。

定理2.3的推论 矩阵$A=[a_{ij}]_{n\times n}(n\geq 2)$有唯一的Crout分解的充分必要条件是$A$的前$n-1$个顺序主子式$D_k\neq 0(k=1,2,\ldots,n-1)$。

小　结

用LU分解（*Doolittle*）求解线性代数方程组等价于顺序*Gauss*消元法：

$Ax=b \leftrightarrow LUx=b \leftrightarrow Ux=y$，$Ly=b$；

第二章 线性方程组的解法

2.2.2 选主元的Doolittle分解法

问题: 矩阵A**非奇异**可保证Ax=b有唯一解,但A非奇异并不能保证其前$n-1$个顺序主子式$D_k \neq 0$,此时不能保证LU分解进行到底，该怎么修正算法?

矩阵A**非奇异**，但是计算l_{ik}时位于分母上的主元虽然不为0，但很小时，是否会对算法产生不良影响，怎样修正该算法?

定义 称 $n\times n$ 矩阵

$$Q_k=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ 第\ k\ 行 \\ \\ \\ \\ 第\ i_k\ 行 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\boxed{Q_kQ_k=I}$$

为初等置换矩阵，称每一行和每一列都只有一个非零元素 1 的$n\times n$矩阵为置换矩阵。

$\forall A\in R^{n\times n}, Q_kA$表示矩阵A的第$k$行和第$i_k$行交换位置；

AQ_k表示矩阵A的第k列和第i_k列交换位置；

$P=Q_1Q_2\cdots Q_r$是置换矩阵.

一、选主元的Doolittle分解

定理2.4 若矩阵A非奇异，则存在置换矩阵Q，使得QA可以做Doolittle分解

$$QA = LU$$

其中L是单位下三角矩阵，U是上三角矩阵。

注记： 定理说明，只要矩阵A非奇异,则通过对A做适当的行变换就可以进行Doolittle分解，而不必要求A的前n-1个顺序主子式都不为0.

$$Ax = b, \Rightarrow QAx = Qb \to LUx = Qb, \quad Ax = b \Rightarrow \begin{cases} Ly = Qb, \\ Ux = y. \end{cases}$$

二、列主元三角分解过程

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$l_{ir}=\frac{a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}}{u_{rr}}$$

为了避免小的数u_{rr}做除数，引进量

$$s_i=a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}\ ,i=r,\cdots,n.$$

第一步：$r=1$时，
$$s_i = a_{i1} - \sum_{k=1}^{0} l_{ik}u_{k1} = a_{i1} \qquad u_{11} = \max_{1\le i\le n}\{|s_i|\} = |a_{i_r 1}|,$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, i = 2,\cdots,n, \qquad u_{1i} = a_{1i} - \sum_{k=1}^{0} l_{1k}u_{ki} = a_{1i}, i = 2,\cdots,n,$$

$$A \to \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,r-1} & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{r-1,1} & a_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} & \cdots & a_{r-1,n} \\ l_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

把做的行变换记为Q_1

$$s_i = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr}, i = r,\cdots,n.$$

第二步：$r=2$时，$s_i=a_{i2}-\sum_{k=1}^{1}l_{ik}u_{k2}=a_{i2}-l_{i1}u_{12}, 2\le i\le n$，$u_{22}=\max_{2\le i\le n}\{|s_i|\}$，

$$l_{i1}=\frac{s_i}{u_{22}}, i=3,\cdots,n, u_{2i}=a_{2i}-\sum_{k=1}^{1}l_{2k}u_{ki}, i=3,\cdots,n,$$

$$A\to\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,r-1} & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,r-1} & u_{2r} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{r-1,1} & l_{r-1,2} & \cdots & a_{r-1,r-1} & a_{r-1,r} & \cdots & a_{r-1,n} \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

把做的行变换记为Q_2

设第r-1步已完成,就有

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,r-1} & u_{1r} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,r-1} & u_{2r} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{r-1,1} & l_{r-1,2} & \cdots & u_{r-1,r-1} & u_{r-1,r} & \cdots & u_{r-1,n} \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & l_{r,r-1} & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,r-1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\vec{Y}_r$ $\quad$ $\vec{X}_r$ $\quad$ $\vec{X}_n$

$$s_i = a_{ir} - \vec{X}_i \vec{Y}_r$$
$$i = r, \cdots, n.$$

做的行变换为Q_{r-1}

当选主元时，取i_r使得 $\left|s_{i_r}\right| = \max\limits_{r\le i\le n}\left|s_i\right|$，交换$A$的第$r$行与第$i_r$行，将$s_{i_r}$调到$(r,r)$位置,$(i,j)$处新元素仍记为$l_{ij}$和$a_{ij}$，再进行第$r$步分解计算

设n步已完成,就有

$$Q\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$Q = Q_n Q_{n-1} \cdots Q_2 Q_1$,完成分解,$Q$ 是确定的

三、列主元三角分解解线性方程

$$PAx = Pb \xrightarrow{PA=LU} LUx = Pb \xrightarrow{Ux=y} \begin{cases} Ly = Pb = \bar{b} \\ Ux = y \end{cases}$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$$

$$Ux = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \bar{b}_1 \\ y_i = \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \; i = 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = y_n / u_{nn} \\ x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} y_j \right) \Big/ u_{ii}, \; i = n-1, \cdots, 1 \end{cases}$$

例：用列主元直接三角分解法求解线性方程组 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\18\\20\end{pmatrix}$

$$\text{解}:(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&14\\2&5&2&18\\\boxed{3}&1&5&20\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&5&20\\2&5&2&18\\1&2&3&14\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[l_{31}=\frac{a_{31}}{u_{11}}]{l_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&5&20\\2/3&\frac{13}{3},&2&18\\1/3&2&3&14\end{array}\right)\xrightarrow{l_{32}=\frac{s_3}{u_{22}}}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&5&20\\2/3&13/3&-\frac{4}{3}&18\\1/3&5/13&\frac{24}{13},&14\end{array}\right)$$

$$\boxed{s_2=\frac{13}{3},}$$

$r=3$时，$s_i=a_{i3}-\sum_{k=1}^{2}l_{ik}u_{k3},3\le i\le n,\quad s_3=\frac{24}{13},\qquad s_3=\frac{5}{3},$

$$A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2/3 & 13/3 & -4/3 \\ 1/3 & 5/13 & 72/39 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 5/13 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 13/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 72/39 \end{pmatrix}$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ 1/3 & 5/13 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Pb = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 20, \\ y_2 = \dfrac{14}{3}, \\ y_3 = \dfrac{72}{13}. \end{cases}$$

$$Ux = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 13/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 72/39 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ \dfrac{14}{3} \\ \dfrac{72}{13} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

方程组的解为 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

选主元三角分解算法：$PA \to A$, 整型$Ip(n)$记录主行, $x \to b$.

1. 对 $r = 1,2,\cdots,n$,

(1) 计算 s_i： $a_{ir} \leftarrow s_i = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr} \quad (i = r,\cdots,n).$

(2) 选主元：取 i_r 使得 $\left|s_{i_r}\right| = \max_{r \le i \le n} \left|s_i\right|, Ip(r) = i_r$

(3) 交换 A的第 r 行与第 i_r 行: $a_{ri} \leftrightarrow a_{i_r,r}$, $(i = 1,2,\cdots,n)$

(4) 计算U的第r行, L的第r列元素

$$a_{rr} = u_{rr} = s_r$$

$$a_{ir} \leftarrow l_{ir} = s_i / u_{rr} = a_{ir} / a_{rr}, (i = r+1,\cdots,n, r \ne n)$$

$$a_{ri} \leftarrow u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki} \quad (i = r+1,\cdots,n, r \ne n)$$

这时$\left|l_{ir}\right| \le 1$

求解 $Ly=Pb$ 及 $Ux=y$ 的算法:

2. 对$i=1,2,\cdots,n-1$,

(1) $t \leftarrow Ip(i)$

(2) 如果$i=t$则转(3)

$$b_i = b_t$$

(3) 继续循环

3. $b_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot b_k \quad (i=2,3,\cdots,n)$

4. $b_n \leftarrow b_n / u_{nn}, \quad b_i \leftarrow (b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} b_k) / u_{ii} \quad (i=n-1,\cdots,1).$

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P$$

第二章 线性方程组的解法

2.2.3-4 三角分解法解带状线性方程组

一、三角分解法解带状系数矩阵线性方程组

上半带宽为s，下半带宽为r的带状矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,s+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{r+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-s,n} \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-r} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow A=(a_{ij})$,当$j-i>s$或$i-j>r$时，$a_{ij}=0$.

对于大型n元带状线性方程组$Ax=b$,当$n>>r+s+1$(A的总带宽)时,为节约储存空间,仅存A的带内元素.

设置二维数组$C(m,n)$,存放A的带内元素,

$m=r+s+1$.

C的第j列存放A的第j列元素,

a_{jj}放在第$s+1$行.

放完A中的带内元素后,C的其他位置记为0.

此时线性方程组 $Ax=b$ 称为带状线性方程组.

上半带宽为s=2，下半带宽为r=1的带状矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

对于大型n元带状线性方程组$Ax=b$,当n $\gg r+s+1$(A的总带宽)时,为节约储存空间,仅存A的带内元素.

设置二维数组$C(m,n)$,存放A的带内元素,

$m=r+s+1.$

C的第j列存放A的第j列元素,

a_{jj}放在第$s+1$行.

$$C(4,6)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{24} & a_{35} & a_{46} \\ 0 & a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_{45} & a_{56} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & a_{55} & a_{66} \\ a_{12} & a_{32} & a_{43} & a_{54} & a_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

A的带内元素a_{ij} = C的元素$c_{i-j+s+1,j}$.

a_{jj}放在第$s+1$行.

相当于主对角线绕a_{11}逆时针旋转45°,队列保持不变,(每列中上下位置保持),缺失位置补上0元.

定理2.5: $A=[a_{ij}]_{n\times n}(n\geq 2)$是上半带宽为$s$，下半带宽为$r$的带状矩阵，并且$A$的前$n-1$个顺序主子式不为零，则$A$有唯一的Doolittle分解$A=LU$，其中$L$是下半带宽为$r$的单位下三角矩阵，$U$是上半带宽为$s$的上三角矩阵。即：

$$A=LU=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ l_{r+1,1} & & \cdots & \cdots & & \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ & & l_{n,n-r} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,s+1} & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & u_{n-s,n} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \cdots & u_{n-1,n} \\ & & & & & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

证　由条件(2)并根据定理2.3，$\boldsymbol{A}$必有唯一的Doolittle分解$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LU}$。

当$i-j>r$时，由条件(1)可知$a_{ik}=0(k=1,2,\cdots,j)$，再由分解计算公式[参见式(2.12)]

$$l_{ik}=\left(a_{ik}-\sum_{t=1}^{k-1}l_{it}u_{tk}\right)/u_{kk}$$

可推出$l_{i1}=a_{i1}/u_{11}=0$，$l_{i2}=(a_{i2}-l_{i1}u_{12})/u_{22}=0$，$l_{i3}=0$，$\cdots$，$l_{i,j-1}=0$，$l_{ij}=0$。故$\boldsymbol{L}$是下半带宽为$r$的单位下三角矩阵。

当$j-i>s$时，由条件(1)可知$a_{kj}=0(k=1,2,\cdots,i)$，再由分解计算公式[参见式(2.12)]

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{t=1}^{k-1}l_{kt}u_{tj}$$

可推出$u_{1j}=a_{1j}=0$，$u_{2j}=a_{2j}-l_{21}u_{1j}=0$，$u_{3j}=0$，$\cdots$，$u_{i-1,j}=0$，$u_{ij}=0$。故$\boldsymbol{U}$是上半带宽为$s$的上三角矩阵。

证毕。

特例：三对角阵的追赶法（A的前n-1个顺序主子式非零）

在数值求解常微分方程边值问题、热传导方程和建立三次样条函数时，都会要解三对角方程组：$AX=f$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma_i = c_i \quad, \quad i=2,\cdots,n \\ \alpha_i = a_i - c_i\beta_{i-1} \quad, \quad i=1,\cdots,n \quad, \quad \beta_1 = 0 \\ \beta_i = \dfrac{b_i}{\alpha_i} \quad, \quad i=1,\cdots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{(f_i - c_i y_{i-1})}{\alpha_i} \quad, \quad i=1,\cdots,n \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1} \quad, \quad i=n,\cdots,1 \quad (\beta_n = 0) \end{cases}$$

所以，有计算过程如下：

$\beta_1 \to \beta_2 \to \cdots \to \beta_n$和$y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$为追；

$x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$为赶.

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - c_i\beta_{i-1} \\ \beta_i = b_i / \alpha_i \\ y_i = (f_i - c_i y_{i-1}) / \alpha_i \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$x_k = y_k - \beta_k x_{k+1} \quad , \quad k = n, \cdots, 1$$

说明：稳定性（对角占优）；运算量5n-4次乘除法；
存贮（一维数组）.

【例1】用追赶法求解方程组$Ax=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

【解】

设有分解$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - c_i\beta_{i-1} \quad , \quad i=1,\cdots,n \quad , \\ \beta_i = b_i \big/ \alpha_i \quad , \quad i=1,\cdots,n \end{cases}$$

a_i,c_i,b_i分别是系数矩阵的主对角线元素及其下边和上边的次对角线元素.

$$\alpha_1=2,\alpha_2=\frac{3}{2},\alpha_3=\frac{4}{3},\alpha_4=\frac{5}{4},\alpha_5=\frac{6}{5},\beta_1=-\frac{1}{2},\beta_2=-\frac{2}{3},\beta_3=-\frac{3}{4},\beta_4=-\frac{4}{5},$$

$$Ly=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \Rightarrow y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

$$Ux=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\ 1/3\\ 1/4\\ 1/5\\ 1/6\end{pmatrix}. \quad \Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/6\\ 2/3\\ 1/2\\ 1/3\\ 1/6\end{pmatrix}.$$

二、平方根法【Cholesky (楚列斯基)Decomposition】

应用有限元法解结构力学问题时，最后归结为求解线性代数方程组，系数矩阵往往对称正定。平方根法是一种对称正定矩阵的三角分解法，广泛用于求解系数矩阵**对称正定**的线性代数方程组。

定理2.6（对称矩阵的三角分解） 设A为n阶对称矩阵,且A的顺序主子式均不为零,则A可以唯一分解为

$$A = LDL^T,$$

其中L为单位下三角阵，D为对角阵.

【证明】

$$A=LU=\begin{pmatrix}1&&&\\ l_{21}&1&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&\\ l_{n1}&l_{n2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1n}\\ &u_{22}&\cdots&u_{2n}\\ &&\ddots&\vdots\\ &&&u_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&&\\ l_{21}&1&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&\\ l_{n1}&l_{n2}&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&&&\\ &u_{22}&&\\ &&\ddots&\\ &&&u_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{u_{12}}{u_{11}}&\cdots&\cdots&\frac{u_{1n}}{u_{11}}\\ &1&\frac{u_{23}}{u_{22}}&\cdots&\frac{u_{2n}}{u_{22}}\\ &&\ddots&&\vdots\\ &&&&1\end{bmatrix}=LD\bar{U}$$

A对称

因此$A^T=(LD\bar{U})^T=\bar{U}^T DL^T.=A$

由分解的唯一性可知：$L=\bar{U}^T,\bar{U}=L^T.$ 即$A=LDL^T.$

$$A=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{bmatrix},$$

Cholesky分解：对于$j=1,2,\cdots,n$,

1. $l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{jk}^2)^{\frac{1}{2}}$

称为平方根法，因为带了开方运算，因此不常用

2. $l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk})/l_{jj},\quad (i=j+1,\cdots,n).$

如果A为n阶正定对称矩阵,则$d_1 = D_1 > 0, d_i = D_i / D_{i-1} > 0, (i = 2, \cdots, n)$.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$$

$$A = LDL^T = LD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} L^T = (LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^T = L_1 L_1^T$$

定理2.7（对称正定矩阵的三角分解或*Cholesky*(楚列斯基)分解）设A为n阶对称正定矩阵,则存在实的非奇异下三角矩阵L使得

$$A = LL^T,$$

当限定L对角元素为正时，这种分解是唯一的.

对称矩阵的LDL^T分解算法：

$$\text{FOR } k=1 \text{ TO } n$$

$$\{$$

$$d_k = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} d_r l_{kr}^2$$

$$\text{FOR } i=k+1 \text{ TO } n \qquad (k\text{-th rank of L})$$

$$l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} d_r l_{ir} l_{kr} \right) / d_k$$

$$\}$$

求出L, D

$$Ax = b \Rightarrow LDL^T x = b$$

记$DL^T x = z$

$$Lz = b$$

记$L^T x = y$

$$Dy = z$$

$$L^T x = y$$

$$Ax = b \Rightarrow \begin{cases} Lz = b \\ Dy = z \\ L^T x = y \end{cases}$$

【例2】 用LDL^T解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

k=1,⋯n,

$$d_k = a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} d_r l_{kr}^2$$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} d_r l_{ir} l_{rk}}{d_k}$$

【解】

when $k=1$, $d_1 = a_{11} = 1$,

$$l_{21} = a_{21}/d_1 = -1,\quad l_{31} = a_{31}/d_1 = 1;$$

when $k=2$, $d_2 = a_{22} - l_{21}^2 d_1 = 2$,

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} l_{21} d_1)/d_2 = -0.5;$$

when $k=3$, $d_3 = a_{33} - l_{31}^2 d_1 - l_{32}^2 d_2 = 3$,

$$\therefore\ L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -0.5 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}.$$

$$Ax=b\Rightarrow\begin{cases}Lz=b\\ Dy=z\\ L^{T}x=y\end{cases}$$

Let $DL^{\mathrm{T}}x=z, \Rightarrow Lz=b, \ \Rightarrow z=(4,-4,6)^{\mathrm{T}}$;

Let $L^{\mathrm{T}}x=y$, then $Dy=z, \ \Rightarrow \ y=(4,-2,2)^{\mathrm{T}}$;

From $L^{\mathrm{T}}x=y, \ \Rightarrow \ x=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

总 结

Cramer rule	Gauss elimination	LU factorization	Gauss-Jordan elimination	Square root /improved square root	追赶法
(n+1)!	**$n^3/3$**	**$n^3/3$**	**$n^3/2$**	**$n^3/6$**	**5n-4**
	Row/column/complete Pivoting Only eliminating elements in a column below the diagonal one	No pivoting Directly factorization	column pivoting Eliminating elements in a row except for the diagonal element	A symmetric and positive definite No pivoting	A 三对角，弱对角占优

直接法内容总结

1：用*LU*分解（*Doolittle*）求解线性代数方程组等价于顺序*Gauss* 消元法：$Ax=b \leftrightarrow LUx=b \leftrightarrow Ux=y$，$Ly=b$；

2: 用选主元*LU*分解（*Doolittle*）求解线性代数方程组等价于选列主元*Gauss*消元法:$Ax=b \leftrightarrow LUx=Qb \leftrightarrow Ux=y, Ly=Qb$；

3：对上半带宽为s、下半带宽为r的带状矩阵作*LU*分解，那么L为下半带宽为r的下三角矩阵，U为上半带宽为s的上三角矩阵；

直接法内容总结

4：对上半带宽为s、下半带宽为r的带状矩阵作选主元LU（Doolittle）分解，将破坏L和U的带状性质；

5：对上半带宽为1、下半带宽为1的三对角带状矩阵，可以有快速追赶法；

6：对非对角占优的三对角矩阵和拟三对角矩阵作快速追赶法，可能导致求解不精确甚至求解失败。

作　业

- 教材第45页习题5、6、8
- 掌握（或者自己实现）Doolittle法和追赶法求解线性方程组的程序
- 课后阅读：《C数值算法》第二章相关内容

回顾线代知识

➢ 线性方程组的有解判定定理

$\boxed{\text{线性方程组}AX=b\text{有解的充要条件是} \Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A}).}$

➢ 线性方程组解的个数的判定

1.齐次线性方程组 $\boxed{A_{m\times n}X=0\text{ 只有零解} \Leftrightarrow R(A)=n.}$

$\boxed{A_{m\times n}X=0\text{ 有非零解} \Leftrightarrow R(A)<n.}$

2.非齐次线性方程组

$A_{m\times n}X=b$有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=n.$

$A_{m\times n}X=b$有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=r<n.$

$A_{m\times n}X=b$无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\overline{A})$

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院