20375177 曹建钦 数值分析第三次作业

北京航空航天大學

BEIJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

2.4 经典迭代法 (46-47页习题 13.15.16(3)、17.19.24)

13. (1) 解 $G=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ $\lambda E-G=\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-2\\2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{bmatrix}$

$|\lambda E-G|=0 \Rightarrow \lambda_1=5 \quad \lambda_2=\lambda_3=-1$

进一步有 $\rho(G)=5>1$ 因此 $\{x^{(k)}\}$ 不收敛

(2) 解 $G=\begin{bmatrix}0.2&0.5&-0.1\\0&-0.8&0.1\\-0.4&0.2&0.3\end{bmatrix}$ 存在 $\|G\|_\infty=0.9<1$

因此 $\{x^{(k)}\}$ 收敛

15. 解

迭代矩阵为 $G_J=\begin{bmatrix}0&-0.4&-0.2\\+0.25&0&-0.5\\-0.2&+0.5&0\end{bmatrix}$ 因 $\|G_J\|_\infty=0.75<1$，故迭代过程必收敛

迭代公式为 $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.4x_2^{(k)}-0.2x_3^{(k)}-2.4\\x_2^{(k+1)}=0.25x_1^{(k)}-0.5x_3^{(k)}+2.5\\x_3^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k)}+0.5x_2^{(k)}+0.1\end{cases}$

选取初始值 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ $x^{(1)}=(-2.4,2.5,0.1)^T$ $x^{(2)}=(-3.42,1.85,1.83)^T$

$x^{(3)}=(-3.506,0.73,1.709)^T$ $x^{(4)}=(-3.0338,0.769,1.1662)^T$ $x^{(5)}=(-2.94084,1.15345,1.09126)^T$

$x^{(6)}=(-3.081632,1.21916,1.267393)^T$ $x^{(7)}=(-3.1411426,1.0958935,1.3259064)^T$

$x^{(8)}=(-3.10353948,1.05176115,1.27617627)^T$ $x^{(9)}=(-3.073939714,1.08602695,1.246388471)^T$

$x^{(10)}=(-3.0837214922,1.107720836,1.2582014403)^T$ $x^{(11)}=(-3.0947286224б,1.0491671568,1.2206761167)^T$

$x^{(12)}=(-3.0941030826008,1.0910147286165,1.26892430283 2)^T$

16.(3)

解:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$G_J=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$ ~~由 $|\lambda E-G_J|=0$ 得 λ~~ $|G_J|=0$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

则有 G_J 为幂零矩阵，同时 $\rho(G)=0<1$ 则其收敛

17.

解 $Ax=b$ 的系数矩阵A是主对角线按行严格占优的，因此GS迭代法求解必收敛

迭代公式为
$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-0.4x_2^{(k)}-0.2x_3^{(k)}-2.4\\ x_2^{(k+1)}=0.25x_1^{(k+1)}-0.5x_3^{(k)}+2.5\\ x_3^{(k+1)}=-0.2x_1^{(k+1)}+0.3x_2^{(k+1)}+0.1\end{cases}$$

代入初值 $(-3.1,1.1,1.3)^T=(x)^{(0)}$ $x^{(1)}=(-3.1,1.075,1.2575)^T$

~~$x^{(2)}=(-3.084,1.07,1.2575)^T$ $x^{(3)}=(-3.0875,1.10025,1.2618)^T$~~

~~$x^{(4)}=(-3.09246,1.097225,1.267625)^T$ $x^{(5)}=(-3.856429,1.0930725,1.26710453)^T$~~

$x^{(2)}=(-3.0815,1.100875,1.2667375)^T$ $x^{(3)}=(-3.0936975,1.093206875,1.265342938)^T$

$x^{(4)}=(-3.090351338,1.094740696,1.265440616)^T$ $x^{(5)}=(-3.090984402,1.094533592,1.265463676)^T$

$x^{(6)}=(-3.090906172,1.094541619,1.265452044)^T$

19.解: ~~$G_J=-(D+L)^{-1}U$~~

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=10\\ 10x_1-2x_2=3\\ 2x_1+10x_2-x_3=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x_1-2x_2=3\\ 2x_1+10x_2-x_3=15\\ x_1+2x_2-5x_3=10\end{cases}$$ 则此系数矩阵按行严格占优

用GS迭代法必收敛

迭代公式为
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} - 2 \end{cases}$$

24. 解
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$
A的顺序主子式为

$D_1 = 2 > 0$　　$D_2 = 6 > 0$　　$D_3 = 10 > 0$

故A为正定矩阵，$0 < 1.25 < 2$ 故SOR迭代过程必收敛

迭代公式为:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25x_1^{(k)} + 1.25(-x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 0.5) \\ x_2^{(k+1)} = -0.25x_2^{(k)} + 1.25(-0.4x_1^{(k+1)} + 0.8x_3^{(k)} + 0.4) \\ x_3^{(k+1)} = -0.25x_3^{(k)} + 1.25(0.4x_1^{(k+1)} + 0.8x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

代初值 $x^{(0)} = (0.5, 1, 1)^T$ 发现满足该公式，即可得精确解 $(0.5, 1, 1)^T$

3.1 幂法和反幂法　　　P65　1.3.6

1. 解　使用形式为 $u_k = A^k u_0$ 时

$n \times n$ 矩阵自乘 A^k 需要 $(k-1)n^3$ 次乘法运算

$n \times n$ 矩阵乘一次向量，需要 n^2 次乘法运算

$\rangle$ 需要 $(k-1)n^3 + n^2$ 次乘法运

使用形式为 $u_i = Au_{i-1}$　$(i = 1, 2, \cdots, k)$

执行k次 $n \times n$ 矩阵乘一次向量，共需要 kn^2 次乘法运算

3. 解　证明：设 $u_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$（其中 $\alpha_1 \neq 0$）

设 $v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$

有 $v_k = A^k v_0 = \lambda_1^k [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 (\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}) x_2 + \cdots + \alpha_n (\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}) x_n]$

则 $v^T u_k = \lambda_1^k [\beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 (\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}) + \cdots + \beta_n \alpha_n (\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k})]$

$k \to \infty$ 时 $v^T u_k \to \lambda_1^k \beta_1 \alpha_1$ 记 $v^T u_k = \lambda_1^k (\beta_1 \alpha_1 + \varepsilon_k)$

则 $\rho_k = \frac{v^T u_k}{v^T u_{k-1}} = \lambda_1 (\frac{\beta_1 \alpha_1 + \varepsilon_k}{\beta_1 \alpha_1 + \varepsilon_{k-1}}) \xrightarrow{k \to \infty} \lambda_1$

即 $\{\rho_k\}$ 收敛于 λ_1

6. 解 $-50 < \lambda_1 < \lambda_2 < -10 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_n$

因为 $0 < |\lambda_1 + 50| < |\lambda_2 + 50| < 40 \le |\lambda_3 + 50| \le |\lambda_n + 50|$

对 $A - \mu I$（其中 $\mu = -50$）实行反幂法迭代得 λ_1

迭代格式
$$\begin{cases} \text{任取非零向量 } u_0 \in R^n \\ \eta_{k-1} = \sqrt{u_{k-1}^T u_{k-1}} \\ y_{k-1} = u_{k-1} / \eta_{k-1} \\ A u_k = y_{k-1} + (-50 I) u_k \\ \rho_k = y_{k-1}^T u_k \quad (k = 1, 2 \cdots) \end{cases}$$

得到 λ_1 的近似解后 有 $0 < |\lambda_2 - \lambda_1| < |\lambda_3 - \lambda_1| \le |\lambda_n - \lambda_1|$

对 $A - \lambda_1 I$ 实行反幂法迭代可得 λ_2

迭代格式为
$$\begin{cases} \text{任取非零向量 } u_0 \in R^n \\ \eta_{k-1} = \sqrt{u_{k-1}^T u_{k-1}} \\ y_{k-1} = u_{k-1} / \eta_{k-1} \\ A u_k = y_{k-1} + \lambda_1 I u_k \\ \rho_k = y_{k-1}^T u_k \quad (k = 1, 2 \cdots) \end{cases}$$

对 $A - \mu I$（其中 $\mu = -50$）用正幂法迭代得 λ_3

迭代格式为
$$\begin{cases} \text{任取非零向量 } u_0 \in R^n \\ \eta_{k-1} = \sqrt{u_{k-1}^T u_{k-1}} \\ y_{k-1} = u_{k-1} / \eta_{k-1} \\ u_k = (A + 50 I) y_{k-1} \\ \rho_k = y_{k-1}^T u_k \quad (k = 1, 2 \cdots) \end{cases}$$