数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第五章 插值与逼近

5.3 样条插值

背景

代数插值

*Hermite*插值

高次插值会出现龙格现象

分段低次插值 在节点处不一定光滑

分段Hermite插值 导数值不容易求得

三次样条插值(先由函数值确定导数值，再由分段Hermite插值解决问题)

一、 样条插值（Cubic Spline Interpolation）

“样条”名词来源于工程中船体和汽车等的外形设计：给出外形曲线上的一组离散点(样点),$(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$, 将有弹性的细长木条 (样条)在样点上固定,使其在其它地方自由弯曲,这种样条所表示的曲线,称为样条曲线(函数)。

- 这样，整个曲线不仅通过样点，并且在整个区间上其一阶导数，二阶导数是连续的。

样条函数的定义：对于区间$[a, b]$上的一个分划

$$\pi: \ a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

如果函数 $s(x)$满足条件

(1) $s(x)$在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0,1,\ldots,n-1$)上是k次多项式，

(2) $s(x)$在区间$[a, b]$上有$k-1$阶连续导数，

则称 $s(x)$是定义在$[a, b]$上对应于分划 π 的 **k次多项式样条函数**(简称 k 次样条)，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 称为**样条节点**，其中$x_1, \ldots, x_{n-1}$ 称为**内节点**，x_0 和 x_n 称为**边界节点**。

- 样条插值是分段低次插值函数；
- 实际应用中常取$k=3$，即三次样条函数。

三次样条插值

将$[a,b]$分成n个小区间,$x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$,插值节点为$(x_i, f(x_i))$,

设这个样条为$s(x)$, $s(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$上为$s_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$

它共有4个待定系数a_i, b_i, c_i, d_i,在$[a,b]$中$s(x)$共有$4n$个待定系数;

需要满足的条件:

(1)$s(x)$为连续函数,即$s_i(x_i) = s_{i-1}(x_i), i = 1, 2, \ldots, n-1$,

共有$n-1$个方程;

(2)$s(x)$的一阶导数连续,即$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i), i = 1, 2, \ldots, n-1$,

共有$n-1$个方程;

（3）$s(x)$的二阶导数连续,即$s_i''(x_i) = s_{i-1}''(x_i), i = 1,2,3,\ldots,n-1,$

共有$n-1$个方程

这样共有$3n-3$个条件;还缺$n+3$个条件,

称满足上面条件的$s(x)$为$f(x)$的三次样条函数。

余下的$n+3$个条件的确定:

（1）$n+1$个插值节点条件，即$s(x_k)=f(x_k)=y_k$;

（2）两个边界条件!

三次样条插值的边界

第一种边界条件：

给定两边界点的二阶导数$y_0'' = f''(x_0), y_n'' = f''(x_n)$.

要求$s(x)$满足$s''(x_0) = y_0'', s''(x_n) = y_n''$,

若$y_0'' = y_n'' = 0$，称为自然边界条件；

第二种边界条件： 给定两边界点的一阶导数$y_0' = f'(x_0), y_n' = f'(x_n)$

并要求$s(x)$ 满足$s'(x_0) = y_0'.s'(x_n) = y_n'$

第三种边界条件： 被插值函数 $f(x)$是以$x_n - x_0$为周期的函数，

要求$s(x)$满足条件$\begin{cases} s'(x_0^+) = s'(x_n^-), \\ s''(x_0^+) = s''(x_n^-); \end{cases}$

$S'(x_0^+)$：$S'(x)$在x_0的右极限.

定理5.4 三次样条插值问题的解存在且唯一。

定义： 对于区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$,称$\|f(x)\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x)|$为函数$f(x)$的**∞-范数**.

定理5.5 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有4阶连续导数，$s(x)$是关于第一或第二边界条件的三次样条插值问题的解，$h_i = x_i - x_{i-1}, h = \max\limits_{1\le i\le n} h_i$，则有 $\|f^{(m)} - s^{(m)}\|_\infty \le \alpha_m \|f^{(4)}\|_\infty h^{4-m}$，$m = 0,1,2$,其中$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$都是常数。

$$\Rightarrow \begin{cases} S(x) \xrightarrow[\text{一致收敛}]{h\to 0} f(x) \\ S'(x) \longrightarrow f'(x) \\ S''(x) \longrightarrow f''(x) \end{cases}$$

二、 三弯矩法求三次样条插值函数

$S(x)$在区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式,则$S''(x)$就是线性函数,

设$S''(x_j)=M_j (j=0,1,2,\cdots,n)$,则$S''(x)$可表示为

$$S''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}$$

$$S'(x)=\frac{M_j}{h_j}\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2}+\frac{M_{j+1}}{h_j}\frac{(x-x_j)^2}{2}+c_1$$

$$S(x)=\frac{M_j}{h_j}\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6}+\frac{M_{j+1}}{h_j}\frac{(x-x_j)^3}{6}+c_1x+c_2$$

利用初始值$S(x_j)=y_j, S(x_{j+1})=y_{j+1}$,可得

$$S(x_j)=\frac{1}{6}h_j^2M_j+c_1x_j+c_2=y_j,$$

$$S(x_{j+1})=\frac{1}{6}h_j^2M_{j+1}+c_1x_{j+1}+c_2=y_{j+1},$$

$$\begin{cases} c_1=\dfrac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\dfrac{1}{6}h_j(M_{j+1}-M_j), \\ c_2=\dfrac{y_jx_{j+1}-y_{j+1}x_j}{h_j}-\dfrac{1}{6}h_j(x_{j+1}M_j-x_jM_{j+1}). \end{cases}$$

可得

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$

$$+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j},\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

$[x_j, x_{j+1}]$

求M_j

$S'(x_j+0)=S'(x_j-0)$

这里$M_j(j=0,1,\cdots,n)$都未知.

$$S'(x)=-\frac{M_j}{h_j}\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2}+\frac{M_{j+1}}{h_j}\frac{(x-x_j)^2}{2}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j$$

$[x_{j-1}, x_j]$

$$S'(x_j+0)=-\frac{h_j}{3}M_j-\frac{h_j}{6}M_{j+1}+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}$$

类似可求出$S(x)$在$[x_{j-1},x_j]$上的表达式,进而可得

$$S'(x_j-0)=\frac{h_{j-1}}{3}M_j-\frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}$$

利用$S'(x_j-0)=S'(x_j+0)$可得

$$\gamma_j M_{j-1}+2M_j+\alpha_j M_{j+1}=\beta_j,\qquad j=1,2,\cdots,n-1,$$

其中 $\gamma_j=\dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j},\quad \alpha_j=\dfrac{h_j}{h_{j-1}+h_j},$

$$\beta_j=6\frac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{h_{j-1}+h_j}=f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}],\qquad j=1,2,\cdots,n-1,$$

$M_0=S''(x_0)=f''(x_0)$

1.第一种边值条件：二阶导数$y_0''=f''(x_0),\ y_n''=f''(x_n)$. $=M_n$

$M_0=f_0'',\quad M_n=f_n'',\qquad$ 令$\alpha_0=0,\beta_0=2y_0'',\gamma_n=0,\beta_n=2y_n''.$

$$\gamma_j M_{j-1}+2M_j+\alpha_j M_{j+1}=\beta_j,\qquad j=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(x_j-0)=S'(x_j+0) \\ M_0=f_0'',\ M_n=f_n'' \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & \alpha_0 & & & & \\ \gamma_1 & 2 & \alpha_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & \gamma_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵主对角线按行严格占优，所以有唯一解.

自然边界条件： 二阶导数 $f''(x_0) = f''(x_n) = 0.$

$$M_0 = M_n = 0, \quad \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_n = \beta_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 & & & & \\ \gamma_2 & 2 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \alpha_{n-2} \\ & & & & \gamma_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

从中解出M_i (i=1,...,n-1) 得三次样条函数$S(x)$.

2. 第二种边值条件： $S'(x_0)=y'_0$, $S'(x_n)=y'_n$ GR

$$-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_1}=y'_0$$

$$\frac{h_n}{6}M_{n-1}+\frac{h_n}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}=y'_n$$

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=\dfrac{6}{h_0}(f[x_0,x_1]-f'_0), =\beta_0 \\ M_{n-1}+2M_n=\dfrac{6}{h_{n-1}}(f'_n-f[x_{n-1},x_n]); =\beta_n \end{cases}$$

令 $\alpha_0=1, \beta_0=\dfrac{6}{h_1}\left(\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-y'_0\right)$,

$\gamma_n=1, \beta_n=\dfrac{6}{h_n}\left(y'_n-\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right)$

$$\gamma_j M_{j-1}+2M_j+\alpha_j M_{j+1}=\beta_j,\quad j=1,\cdots,n-1,$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(x_j-0)=S'(x_j+0) \\ S'(x_0)=y'_0, S'(x_n)=y'_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_0 & & & & \\ \gamma_1 & 2 & \alpha_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & \gamma_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵主对角线按行严格占优，所以有唯一解.

从中解出$M_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ 得三次样条函数$S(x)$.

3. 第三种边值条件有： $S'(x_0^+) = S'(x_n^-)$，$S''(x_0^+) = S''(x_n^-)$

$M_0 = M_n$

$$-\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_1} = -\frac{h_n}{3}M_{n-1} - \frac{h_n}{6}M_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

$$M_0 = M_n,$$

消去M_0，整理化简可得 $\gamma_n M_{n-1} + 2M_n + \alpha_n M_1 = \beta_n$

$$\alpha_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n}, \gamma_n = 1 - \alpha_n, \beta_n = \frac{6}{h_1 + h_n}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

$$\gamma_j M_{j-1} + 2M_j + \alpha_j M_{j+1} = \beta_j, \quad j = 1, \cdots, n-1,$$

$$\left.\begin{array}{l} S'(x_j-0)=S'(x_j+0) \\ S'(x_0^+)=S'(x_n^-),\quad S''(x_0^+)=S''(x_n^-) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$M_0=M_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \alpha_1 & & & & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 2 & \alpha_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & & & & \gamma_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

系数矩阵非奇异，所以有唯一解.

从中解出$M_i\,(i=1,\ldots,n)$ 得三次样条函数$S(x)$.

特例：三对角阵的追赶法（A的前n-1个顺序主子式非零）

在数值求解常微分方程边值问题、热传导方程和建立三次样条函数时，都会要解三对角方程组：$AX = f$

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & & \\
c_2 & a_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
 & & c_n & a_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\alpha_1 & & & \\
\gamma_2 & \alpha_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & \gamma_n & \alpha_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & \beta_1 & & \\
 & 1 & \ddots & \\
 & & \ddots & \beta_{n-1} \\
 & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma_i = c_i \quad , \quad i = 2, \cdots, n \\
\alpha_i = a_i - c_i \beta_{i-1} \quad , \quad i = 1, \cdots, n \quad , \quad c_1 = 0 \\
\beta_i = b_i \big/ \alpha_i \quad , \quad i = 1, \cdots, n
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_i = (f_i - c_i y_{i-1}) \big/ \alpha_i \quad , \quad i = 1, \cdots, n \\
x_i = y_i - \beta_i x_{i+1} \quad , \quad i = n, \cdots, 1 \quad (\beta_n = 0)
\end{cases}
$$

综上所述，为确定三次样条插值函数 $s(x)$，其计算步骤为：

(1) 根据给定的$(x_i, y_i)(i=0,1,\cdots,n)$以及边界条件，计算关于 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 的线性方程组中的有关参数（系数矩阵的元素和右端项）。

(2) 求解上述线性方程组（可用追赶法）。

(3) 把求出的 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入式(5.47)，所得的 $s(x)$就是所求的三次样条插值函数。

把 $M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入式(5.48)还可得到三次样条插值函数的导数 $s'(x)$。在实际应用中，不仅常用三次样条函数 $s(x)$计算被插值函数 $f(x)$的近似值，而且常用 $s'(x)$近似计算 $f'(x)$。

在力学中，二阶导数决定梁的弯矩。由于方程组(5.52)或方程组(5.54)中的每一个方程至多出现相邻三个节点处的 M_i，故称上述方法为三弯矩法。

【例1】 已知函数表

j	0	1	2	3
x_j	0	1	2	3
y_j	0	2	3	16

[0, 3]

S(x)

$S'(0)=1$, $S'(3)=0$

求边界条件 y′(0)=1,y′(3)=0的三次样条插值公式。

其中 $\gamma_j = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}$, $\alpha_j = \dfrac{h_j}{h_{j-1}+h_j}$,

$$\beta_j = 6\frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j-1}+h_j}, \quad j = 1,2$$

解：用三弯矩方程求解。

由已知，$h_0 = h_1 = h_2 = 1$。

$\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$,

$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1$

$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 2$

$\Rightarrow \beta_1 = 6 \cdot \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{h_0 + h_1} = -3$

$f[x_2, x_3] = \dfrac{16-3}{1} = 13$

$\beta_2 = 6 \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2} = \dfrac{13-1}{2} \cdot 6 = 36$

方程组的系数及右端项为

j	γ_j	α_j	β_j
0		1	6
1	1/2	1/2	-3
2	1/2	1/2	36
3	1		-78

令$\alpha_0 = 1, \gamma_n = 1,$

$$\beta_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right),$$

$$\beta_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

代入得方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 36 \\ -78 \end{pmatrix}$$

追赶法，即LU分解求M_i

其解$M_0=\frac{28}{3}, M_1=-\frac{38}{3}, M_2=\frac{106}{3}, M_3=\frac{170}{3}$，代入，得

$x_j=j$ $(j=0,1,2,3)$ | $y_0=0$ $y_1=2$

$S(x)=$

$$S_0(x)=-\frac{38}{3}\times\frac{(x-0)^3}{6}-\frac{28}{3}\times\frac{(x-1)^3}{6}+(2+\frac{38}{3\times 6})(x-0)-(0-\frac{28}{3\times 6})(x-1)$$

$$=\frac{x}{3}(-11x^2+14x+3) \qquad x\in[0,1]$$

$$S_0(x)=M_0\frac{(x_1-x)^3}{6}+M_1\frac{(x-x_0)^3}{6}+(y_0-\frac{M_0}{6})(x_1-x)+(y_1-\frac{M_1}{6})(x-x_0)$$

$$S_1(x)=\frac{1}{3}(24x^3-91x^2+108x-35) \qquad x\in[1,2]$$

$$S_2(x)=\frac{1}{3}(-46x^3+329x^2-732x+525) \qquad x\in[2,3]$$

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$

$$+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}, \quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

[0,3]

[0,1]
[1,2]
[2,3]

其解$M_0=\frac{28}{3}, M_1=-\frac{38}{3}, M_2=\frac{106}{3}, M_3=\frac{170}{3}$，代入，得

$x_j=j$ $(j=0,1,2,3)$

$y_0=0$

$y_1=2$

$S(x)=$

$$S_0(x)=-\frac{38}{3}\times\frac{(x-0)^3}{6}-\frac{28}{3}\times\frac{(x-1)^3}{6}+(2+\frac{38}{3\times 6})(x-0)-(0-\frac{28}{3\times 6})(x-1)$$

$$=\frac{x}{3}(-11x^2+14x+3) \qquad x\in[0,1]$$

$$S_0(x)=M_0\frac{(x_1-x)^3}{6}+M_1\frac{(x-x_0)^3}{6}+(y_0-\frac{M_0}{6})(x_1-x)+(y_1-\frac{M_1}{6})(x-x_0)$$

$$S_1(x)=\frac{1}{3}(24x^3-91x^2+108x-35) \qquad x\in[1,2]$$

$$S_2(x)=\frac{1}{3}(-46x^3+329x^2-732x+525) \qquad x\in[2,3]$$

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}$$

$$+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}, \quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

$[0,3]$

$[0,1]$

$[1,2]$

$[2,3]$

$$S_0(x) = -\frac{38}{3}\times\frac{(x-0)^3}{6} - \frac{28}{3}\times\frac{(x-1)^3}{6} + (2+\frac{38}{3\times 6})(x-0) - (0-\frac{28}{3\times 6})(x-1)$$

$$= \frac{x}{3}(-11x^2 + 14x + 3) \qquad x \in [0,1]$$

$$S_1(x) = \frac{1}{3}(24x^3 - 91x^2 + 108x - 35) \qquad x \in [1,2]$$

$$S_2(x) = \frac{1}{3}(-46x^3 + 329x^2 - 732x + 525) \qquad x \in [2,3]$$

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [0,1] \\ S_1(x), & x \in [1,2] \\ S_3(x), & x \in [2,3] \end{cases}$$

例2 已知离散点: (1.1, 0.4000), (1.2, 0.8000), (1.4, 1.6500), (1.5, 1.8000), 取自然边界条件 $M_0 = M_3 = 0$, 构造三次样条插值函数，并计算 $f(1.25)$.

解 $n = 3$. $\because$ $h_0 = x_1 - x_0 = 0.1$, $h_1 = 0.2$, $h_2 = 0.1$, $M_0 = M_3 = 0$

$$\gamma_1 = \frac{0.1}{0.1+0.2} \approx 0.3333, \gamma_2 = \frac{0.2}{0.2+0.1} \approx 0.6667,$$

令 $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 2y_0'' = 0,$

$\gamma_n = 0 = \beta_n = 2y_n'' = 0.$

$$\alpha_1 = \frac{0.2}{0.1+0.2} \approx 0.6667, \alpha_2 = \frac{0.1}{0.2+0.1} \approx 0.3333,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

其中 $\gamma_j = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}$, $\alpha_j = \dfrac{h_j}{h_{j-1}+h_j}$,

$$\beta_j = 6\frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j-1}+h_j}, \quad j = 1, 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0.6667} \\ \mathbf{0.6667} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -55 \end{pmatrix}, \ \ \textbf{solve}\begin{cases} M_1 = 13.125, \\ M_2 = -31.875. \end{cases}$$

因此，分段的三次样条插值函数为

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 21.875x^3 - 72.1875x^2 + 83.1875x - 32.875, & x \in [1.1, 1.2] \\ S_1(x) = -37.5x^3 + 141.625x^2 - 173.3125x + 69.725, & x \in [1.2, 1.4] \\ S_2(x) = 53.125x^3 - 239.0625x^2 + 359.5625x - 178.95, & x \in [1.4, 1.5] \end{cases}$$

$$f(1.25) \approx S(1.25) \qquad \because 1.25 \in [1.2, 1.4].$$

$$= S_1(1.25) = 1.0336.$$

例3 设$f(x)$为定义在[27.7, 30]上的函数，在节点及函数值为

$$x_0 = 27.7,\quad x_1 = 28,\quad x_2 = 29,\quad x_3 = 30,$$

$$f_0 = 4.1,\quad f_1 = 4.3,\quad f_2 = 4.1,\quad f_3 = 3.0,$$

$$\gamma_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j},\quad \alpha_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j},$$

试求满足边界条件$S'(27.7)=3.0$, $S'(30)=-4.0$的三次样条函数$S(x)$.

$$\beta_j = 6\frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{h_{j-1}+h_j},$$

解 由条件知 $h_0=0.3$, $h_1=h_2=1$,

$$\gamma_1 = \frac{h_0}{h_0+h_1} = \frac{0.3}{0.3+1} = \frac{3}{13}, \gamma_2 = \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{10}{13}, \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

$$\beta_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0') = -46.666,\quad \beta_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = -4.0002,$$

$$\beta_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -2.70000,\quad \beta_3 = \frac{6}{h_2}(f_3' - f[x_2, x_3]) = -17.4.$$

由此得矩阵形式的线性方程组(6.13)为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ \frac{3}{13} & 2 & \frac{10}{13} & \\ & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46.666 \\ -4.0002 \\ -2.70000 \\ -17.4 \end{bmatrix}$$

得到 $M_0 = -23.531, M_1 = 0.395, M_2 = 0.830, M_3 = -9.115.$

代入 (6.8)：

$$S(x) = \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} M_j + \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} M_{j+1}$$

$$+ (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}) \frac{x - x_j}{h_j},$$

得到

$$S(x)=\begin{cases} 13.07278(x-28)^3-14.84322(x-28)+0.21944 \\ (x-27.7)^3+14.31358(x-27.7), \quad x\in[27.7,28], \\ 0.06583(29-x)^3+4.23417(29-x)+0.13833 \\ (x-28)^3+3.96167(x-28), \quad x\in[28,29], \\ 0.13833(30-x)^3+3.96167(30-x)-1.51917 \\ (x-29)^3+4.51917(x-29), \quad x\in[29,30], \end{cases}$$

通常求三次样条函数可根据上述例题的计算步骤直接编程上机计算，或直接使用数学库中的软件，根据具体要求算出结果即可.

例4 已知离散点: (1.1, 0.4000), (1.2, 0.8000), (1.4, 1.6500), (1.5, 1.8000), 取自然边界条件 $M_0 = M_3 = 0$, 构造三次样条插值函数，并计算 $f(1.25)$.

解 $n = 3.\ \because\ h_0 = x_1 - x_0 = 0.1,\ h_1 = 0.2,\ h_2 = 0.1,\quad M_0 = M_3 = 0$

$$\gamma_1 = \frac{0.1}{0.1+0.2} \approx 0.3333,\ \gamma_2 = \frac{0.2}{0.2+0.1} \approx 0.6667,$$

令 $\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 2y_0'' = 0,$

$\gamma_n = 0 = \beta_n = 2y_n'' = 0.$

$$\alpha_1 = \frac{0.2}{0.1+0.2} \approx 0.6667,\ \alpha_2 = \frac{0.1}{0.2+0.1} \approx 0.3333,$$

$$\beta_1 = 6\,\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{0.1+0.2} = 6\cdot\frac{0.25}{0.3} = 5$$

$$\beta_2 = 6\cdot\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{h_1+h_2} = 6\times\frac{1.5-4.25}{0.3} = -55$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1} = \frac{0.85}{0.2} = 4.2500$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{0.15}{0.1} = 1.5$$

$$f[x_0,x_1] = \frac{0.4}{0.1} = 4.0000$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.6667 \\ 0.6667 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -55 \end{pmatrix}, \quad \text{solve}\begin{cases} M_1 = 13.125, \\ M_2 = -31.875. \end{cases}$$

因此，分段的三次样条插值函数为

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 21.875x^3 - 72.1875x^2 + 83.1875x - 32.875, & x \in [1.1, 1.2] \\ S_1(x) = -37.5x^3 + 141.625x^2 - 173.3125x + 69.725, & x \in [1.2, 1.4] \\ S_2(x) = 53.125x^3 - 239.0625x^2 + 359.5625x - 178.95, & x \in [1.4, 1.5] \end{cases}$$

$$f(1.25) \approx S(1.25) \qquad \because 1.25 \in [1.2, 1.4].$$

$$= S_1(1.25) = 1.0336.$$

小　结

多项式插值法，其目的是利用节点上的值，构造通过这些节点的多项式,从原则上说,利用 $n+1$个节点的值，可以构造 n 次多项式,而且这种构造是**唯一的**！利用待定系数法,将节点值带入后,得到一个 $n+1$ 阶线性方程，即可求出多项式.

为便于在计算机上实现，引入了Lagrange插值公式和牛顿插值公式，各有千秋， Lagrange插值公式便于理解和记忆，牛顿公式便于计算机计算。

但必须指出的是，不管用什么方法插值，所得到的插值公式实际上是完全一样的，包括上面所说的待定系数法，这就是插值公式唯一性。唯一性的一个直接推论就是各种插值公式的余项完全一样，都是Lagrange余项。

- Lagrange公式的构造思想非常重要！后面的埃尔米特公式出发点也是利用了这一点。
- 如果节点上不仅已知函数值，同时还已知函数的导数值，即要求插值多项式在节点上与函数具有相同的函数值和导数值，这时要用埃尔米特公式。
- 高次插值有时会引起较大误差，对此，解决的方案是分段低次插值。如果对插值多项式要求较好的光滑性，这时就需要进行样条函数插值。

- 插值法
  - 插值问题的相关概念
    - 插值函数、插值节点、插值条件
  - Lagrange插值
    - 插值基函数、插值公式
  - 牛顿插值法
    - 差商、牛顿插值公式
  - 分段低次插值
    - 龙格现象
    - 分段线性插值、二次、三次插值
  - 二元插值
  - 埃尔米特插值
    - 待定系数法构造插值函数
    - Lagrange型插值基函数法
    - 牛顿插值法构造Hermite插值
  - 三次样条插值
    - 三次样条插值的概念
    - 三种边界条件
    - 三弯矩法求样条函数

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院

作　业

教材第146页习题：23、26