20375177 曹建钦

4.1 非线性方程的迭代方法 1、2、4、5、7、9

1. (1) $x^3-3x+1=0$ (只求最大的正根)

设 $f(x)=x^3-3x+1$

由 $f(1)=-1$ 和 $f(2)=3$ 知 $f(x)=0$ 在 $(+1,+2)$ 内有根，设为 ξ

$f(\frac{3}{2})=-0.125<0$ 故 $\xi\in(\frac{3}{2},2)$

$f(1.75)=1.109375>0$ 故 $\xi\in(1.5,1.75)$

$f(1.625)=0.416>0$ 故 $\xi\in(1.5,1.625)$

$f(1.5625)=0.127>0$ 故 $\xi\in(1.5,1.5625)$

$f(1.53125)=-0.003<0$ 故 $\xi\in(1.53125,1.5625)$

$f(1.546875)=0.06>0$ 故 $\xi\in(1.53125,1.546875)$

$f(1.5390625)=0.03>0$ 故 $\xi\in(1.53125,1.5390625)$

$f(1.53515625)=0.01>0$ 故 $\xi\in(1.53125,1.53515625)$

$f(1.533203125)=0.0045>0$ 故 $\xi\in(1.53125,1.533203125)$

取 $\xi=1.5322265625$ 则绝对误差不超过 0.0009765625 即满足题目要求

(2) $x+\sin x=1$

设 $f(x)=x+\sin x-1$

由 $f(0)=-1$ 和 $f(1)=0.84$ 知 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有根，设为 ξ

$f(0.5)=-0.02<0$ 故 $\xi\in(0.5,1)$

$f(0.75)=0.43>0$ 故 $\xi\in(0.5,0.75)$

$f(0.625)=0.21>0$ 故 $\xi\in(0.5,0.625)$

$f(0.5625)=0.096>0$ 故 $\xi\in(0.5,0.5625)$

$f(0.53125)=0.038>0$ 故 $\xi\in(0.5,0.53125)$

$f(0.515625)=0.0087>0$ 故 $\xi\in(0.5,0.515625)$

$f(0.5078125)=-0.005$ 则 $\xi\in(0.5078125,\ 0.515625)$

$f(0.51171875)=0.001$ 则 $\xi\in(0.5078125,\ 0.51171875)$

$f(0.509765625)=-0.002$ 则 $\xi\in(0.509765625,\ 0.51171875)$

取 $\xi=0.5107421875$ 有绝对误差限为 10^{-3}

2.解：(1) $e^x+10x-2=0$

令 $f(x)=e^x+10x-2$ $f(0)=-1$ $f(\frac{1}{5})=e^{\frac{1}{5}}>0$

则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{5}]$ 内有根

取 $x_{k+1}=\dfrac{2-e^{x_k}}{10}$ $\varphi(x)=\dfrac{2-e^x}{10}$

满足 $\varphi(x)$ 在 $(0,\frac{1}{5})$ 内可导，当 $x\in[0,\frac{1}{5}]$ $\varphi(x)\in[0,\frac{1}{5}]$

当 $x\in(0,\frac{1}{5})$ 时 $|\varphi'(x)|=\dfrac{e^x}{10}<1$

则 迭代收敛

迭代过程如下.

$k=0$ $x_0=0.2$; $k=1$ $x_1=0.0778597$; $k=2$ $x_2=0.0919$

$k=3$ $x_3=0.090374$; $k=4$ $x_4=0.0905416$; $k=5$ $x_5=0.0905233$

$k=6$ $x_6=0.090525299$; $k=7$ $x_7=0.0905250796$; $k=8$ $x_8=0.090525103 68$

此时 $\dfrac{|x_8-x_7|}{|x_8|}=2.657\times10^{-7}<10^{-6}$ 迭代结束

则 根为 $0.0905 2510368$

(2) $x-\tan(x-1)=0$ (只求最小的正根)

令 $f(x)=x-\tan(x-1)$ 有 $f(2.1)=0.135$ $f(2.2)=-0.37$ 则 $f(x)$ 在 $[2.1,2.2]$ 内有根

取 $x_{k+1}=\arctan x+1$ $\varphi(x)=\arctan x+1$

满足 $\varphi(x)$ 在 $(2.1,2.2)$ 内可导，当 $x\in[2.1,2.2]$ $\varphi(x)\in[2.1,2.2]$

当 $x\in[2.1,\ 2.2]$ 时. $|\varphi'(x)|<1$ 则 迭代收敛

迭代如下：$k=0$ $x_0=2.1$; $k=1$ $x_1=2.1264$; $k=2$ $x_2=2.1312$

$k=3$ $x_3=2.1321$; $k=4$ $x_4=2.1322$; $k=5$ $x_5=2.13226148$

$k=6$ $x_6=2.1322666000452 08$; $k=7$ $x_7=2.1322675224035 36$

此时 $\dfrac{|x_7-x_6|}{|x_7|}=4.326\times10^{-7}<10^{-6}$ 则 根为 2.132267522403536

(3) $e^{-x}=\cos x$ （只求最小的正根）

令 $f(x)=e^{-x}-\cos x$ $f(1.2)=-0.06$ $f(1.3)=0.005$ 则 $f(x)$ 在 $[1.2,1.3]$ 内有根

取 $x_{k+1}=$ ~~arccos~~ $\arccos(e^{-x})$ $\varphi(x)=\arccos(e^{-x})$

满足 $\varphi(x)$ 在 $(1.2,1.3)$ 内可导，当 $x\in[1.2,1.3]$ $\varphi(x)\in[1.2,1.3]$

当 $x\in[1.2,1.3]$ 时 $|\varphi'(x)|<1$ 则迭代收敛

迭代过程如下

$k=0$, $x_0=1.2$；$k=1$, $x_1=1.26485$；$k=2$, $x_2=1.284625$；

$k=3$, $x_3=1.290381$；$k=4$, $x_4=1.29034181$；$k=5$, $x_5=1.29250678$；

$k=6$, $x_6=1.29264177$；$k=7$, $x_7=1.292680317$；$k=8$, $x_8=1.292691322$

$k=9$, $x_9=1.292694464$；$k=10$, $x_{10}=1.292695360947176$

此时 $\frac{|x_{10}-x_9|}{|x_9|}=6.94\times10^{-7}<10^{-6}$，则根为 1.292695360947176

4.解 证明 $x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$ $\Rightarrow \frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{x_k^2+3a}{3x_k^2+a}$

有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k^2+3a}{3x_k^2+a}=\frac{1}{3}$ 则其产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛，假设其收敛为 Y

则有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k^2+3a}{3x_k^2+a}$ $\Rightarrow 1=\frac{Y^2+3a}{3Y^2+a}$ $\Rightarrow Y=\sqrt{a}$

故证得 $\{x_k\}$ 收敛于 $\sqrt{a}$ $(a>0)$

$\because \varphi'(x)=\frac{3x^4-6ax^2+3a^2}{(3x^2+a)^2}$ $\varphi'(\sqrt{a})=0$

$\varphi''(\sqrt{a})=0 \Longrightarrow$ 由定理4.4可知，其有三阶收敛速度

5. 解 用 Steffensen 迭代法求方程 $e^x+10x-2=0$

对于 $\varphi(x)=\frac{2-e^x}{10}$ $\varphi'(s)=-\frac{e^s}{10}\neq 1$ 故当 x_0 充分靠近 s 时

迭代公式 $\begin{cases} y_k=\frac{2-e^{x_k}}{10} \\ z_k=\frac{2-e^{y_k}}{10} \\ x_{k+1}=x_k-\frac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \end{cases}$ $(k=0,1,\cdots)$

能平方收敛于 s

迭代过程如下

$k=0$，$x_0=0.2$；　$k=1$，$x_1=0.0904547729524225$

$k=2$，$x_2=0.0905251012805427$；　$k=3$，$x_3=0.0905251013072255$

$\frac{|x_3-x_2|}{|x_3|}=2.95\times10^{-10}<10^{-6}$ 迭代结束

则 根为 0.0905251013072255

7. 解 要想使 Newton 法具有三阶收敛速度

牛顿迭代法的迭代函数为 $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

设 s 是 $f(x)$ 的一个单根，即 $f(s)=0$，$f'(s)\neq0$，有

$\varphi'(s)=1-\frac{(f')^2-ff''}{[f']^2}\Big|_{x=s}=\frac{f(s)f''(s)}{[f'(s)]^2}=0$ 　$\varphi''(s)=\frac{f''(s)}{f'(s)}$ 需要 $\varphi''(s)=0\Rightarrow f''(s)=0$

同时要 $\varphi'''(s)\neq0\Rightarrow f'''(s)\neq0$

则综上可知，需要 $f''(s)=0$ 而 $f'''(s)\neq0$

9. 解 割线法和单点割线法求 $x+\sin x=1$ 的根

所求根在 $(0,1)$ 内　　$f(x)=x+\sin x-1$

割线法 迭代公式：$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)\quad(k=0,1,\cdots)$$

取 $x_{-1}=0$，$x_0=1$，迭代过程如下

$k=-1$，$x_{-1}=0$；$k=0$，$x_0=1$；$k=1$，$x_1=0.543044$；$k=2$，$x_2=0.5080928$

$k=3$，$x_3=0.5109857506$；$k=4$，$x_4=0.5109734340141305$

$k=5$，$x_5=0.5109734293885617$

此时 $\frac{|x_5-x_4|}{|x_5|}=9\times10^{-9}<10^{-6}$　则根为 0.5109734293885617

单点割线法

迭代公式为 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_0)}{f(x_k)-f(x_0)}$$

取 $x_0=0$　$x_1=1$，迭代过程如下：

$k=0$，$x_0=0$；$k=1$，$x_1=1$；$k=2$，$x_2=0.543$；$k=3$，$x_3=0.5124$

$k=4$，$x_4=$ ~~0.51104~~ 0.51103566；$k=5$，$x_5=0.5109761255$

$k=6$，$x_6=0.5109735461856442$；$k=7$，$x_7=0.5109734344482594$

此时 $\frac{|x_7-x_6|}{|x_7|}=2.2\times10^{-7}<10^{-6}$　则根为 0.5109734344482594