20375177 曹建钦

北京航空航天大学

BEIJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

求 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的Jordan标准形 J

并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=J$

解

$$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

则有 $\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)(\lambda-5)^5$

求得特征值为 $\lambda_1=1$ $\lambda_2=2$（五重）

对于 $\lambda_1=1$ $m_1=1$：由于

$\operatorname{rank}(E-A)=5=6-1$ 故 $J_1=[J_{11}]=[1]$

解方程 $(E-A)x_1=0$ $\Rightarrow$ 求得非零解 $x_1=[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

对于 $\lambda_2=2$ $m_2=5$：由于

$$\operatorname{rank}(A-2E)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=4$$

而 $(A-2E)x=0$ 解空间维数 $d_1=6-4=2$

$$\operatorname{rank}(A-2E)^2=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=2$$

$(A-2E)^2x=0$ 解空间维数 $d_2=6-2=4$

$$\operatorname{rank}(A-2E)^3 = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$(A-2E)^3x$ 解空间维数 $d_3 = 6-1 = 5$ 达到代数重数

由 $d_1=2$, $d_2=4$, $d_3=5$ 可画出 $A-2E$ 在其作用下的箭头图:

$$0 \longleftarrow x_1 \longleftarrow x_3 \longleftarrow x_5$$

$$0 \longleftarrow x_2 \longleftarrow x_4$$

共2行, 每行非零向量个数为 3, 2 $\Rightarrow$ 属于特征值2的若当块有2块, 阶数为 3, 2

即 $J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

则 $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

取 $x_5 = (1,1,3,0,1,1) \Rightarrow x_3 = (5,5,0,3,0,0)$ $\quad x_1 = (3,3,0,0,0,0)$

取 $x_4 = (3,0,0,0,-2,1) \Rightarrow x_2 = (-4,-1,-3,0,0,0)$

则有 $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为可逆矩阵