复习概念

1、递推关系（递归关系）

$\{a_n\}$是个序列，把该序列中任一a_n和其前面几项$a_i(1 \le i \le n)$关联起来的方程称之为一个递推关系（递归关系）。

注意初值的设定。

2、母函数

给定一无穷序列$\{a_n\}$，函数$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$为序列$\{a_n\}$的母函数。

$G(x)$是形式幂级数，与$\{a_n\}$一一对应。

2.5 线性常系数齐次递推关系

上一次课我们讨论了满足F(n)=F(n-1)+F(n-2)及初值F(1)=F(2)=1的Fibonacci数列的母函数解法，本节研究一般线性常系数递推关系的母函数解法。

【定义1】$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \ldots, a_{k-1} = d_{k-1}$$

若$c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$都是常数，则称上式是$k$阶的线性常系数齐次递推关系。

2.5 线性常系数齐次递推关系

很容易看出，Fibonacci数列是2阶线性常系数齐次递推关系。然而，Hanoi问题是1阶线性常系数递推关系，但不是齐次。

与上述递推关系相对应的$C(x)=x^k+c_1x^{k-1}+\ldots+c_{k-1}x+c_k$，称之为**特征多项式**；$C(x)=0$是递推关系的**特征方程**。

由递推关系确定的序列$a_0,a_1,a_2\ldots a_n\ldots$的母函数为：

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

2.5 线性常系数齐次递推关系

由递推关系，即有

$$x^k:\ a_k + c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + \cdots + c_k a_0 = 0$$
$$x^{k+1}:\ a_{k+1} + c_1 a_k + c_2 a_{k-1} + \cdots + c_k a_1 = 0$$
$$x^{k+2}:\ a_{k+2} + c_1 a_{k+1} + c_2 a_k + \cdots + c_k a_2 = 0$$
$$\cdots\ \cdots$$

以上所有各式相加，整理可得：

$$G(x) - \sum_{h=0}^{k-1} a_h x^h + c_1 x\left[G(x) - \sum_{h=0}^{k-2} a_h x^h\right] + \ldots$$
$$+ c_k x^k G(x) = 0$$

2.5 线性常系数齐次递推关系

即 $\left(1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k\right)G(x)$

$=\sum_{h=0}^{k-1}[c_hx^h(\sum_{j=0}^{k-1-h}a_jx^j)]$，其中定义$c_0=1$。

令$P(x)=\sum_{h=0}^{k-1}[c_hx^h(\sum_{j=0}^{k-1-h}a_jx^j)]$，$P(x)$的次数不大于$k-1$次；

$$R(x)=\left(1+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_kx^k\right)$$

对于特征多项式

$$C(x)=x^k+c_1x^{k-1}+\ldots+c_{k-1}x+c_k$$

因此，$R(x)=x^kC(\frac{1}{x})$

2.5 线性常系数齐次递推关系

特征方程$C(x)=0$在复数域内有k个根。**故有**：

$$C(x)=(x-\alpha_1)^{k1}\,(x-\alpha_2)^{k2}\ldots(x-\alpha_t)^{kt}$$

其中，$k_1+k_2+\ldots+k_t=k$

所以，$R(x)=x^kC(\frac{1}{x})=$

$$(1-\alpha_1x)^{k1}\,(1-\alpha_2x)^{k2}\ldots(1-\alpha_tx)^{kt}$$

即有：$G(x)=\frac{P(x)}{R(x)}$

$$=\frac{P(x)}{(1-\alpha_1x)^{k1}\,(1-\alpha_2x)^{k2}\ldots(1-\alpha_tx)^{kt}}$$

2.5 线性常系数齐次递推关系

依据代数理论，$G(x)$可以分解为：

$$= \frac{A_{11}}{(1-\alpha_1 x)} + \frac{A_{12}}{(1-\alpha_1 x)^2} + \dots + \frac{A_{1k1}}{(1-\alpha_1 x)^{k1}}$$

$$+ \frac{A_{21}}{(1-\alpha_2 x)} + \frac{A_{22}}{(1-\alpha_2 x)^2} + \dots + \frac{A_{2k2}}{\left(1-\alpha_2 x\right)^{k2}}$$

$$+ \quad \cdots \quad \cdots$$

$$+ \frac{A_{t1}}{(1-\alpha_t x)} + \frac{A_{t2}}{(1-\alpha_t x)^2} + \dots + \frac{A_{tkt}}{\left(1-\alpha_t x\right)^{kt}}$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{ki} \frac{A_{ij}}{(1-\alpha_i x)^j}$$

2.5 线性常系数齐次递推关系

这里会用到二项式定理（书中P59有误）：

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n}=\sum_{j=0}^{\infty} C(j+n-1,j)\,\alpha^j x^j$$

相当于在$x=0$处展开为幂级数。

此时，x^n的系数a_n即为

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k\mathrm{i}} A_{ij}C(j+n-1,n)\alpha_i^n$$

2.5 线性常系数齐次递推关系

【定理2-1】设$\frac{P(x)}{R(x)}$是有理分式，多项式$P(x)$的次方低于$R(x)$的次方，则$\frac{P(x)}{R(x)}$可化为部分分式来表示，且表示唯一。

证明：假定$R(x)$的次方是n，对n作数学归纳法。

基本步骤：$n=1$，此时$P(x)$是常数，显然成立；

归纳步骤：假定对于小于n的情形定理成立，设α是$R(x)$的k重根，则

$$R(x)=(x-\alpha)^k R_1(x), R_1(\alpha)\neq 0$$

不妨设$P(x)$与$R(x)$互素，有

2.5 线性常系数齐次递推关系

$$\frac{P(x)}{R(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)^k}+\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}R_1(x)}$$

$$=\frac{AR_1(x)+(x-\alpha)P_1(x)}{R(x)}$$

故有：$P(x)=AR_1(x)+(x-\alpha)P_1(x)$, 将$\alpha$代入

即可确定 $A=\frac{P(\alpha)}{R_1(\alpha)}\neq 0$,

$$P_1(x)=\frac{P(x)-AR_1(x)}{x-\alpha}$$

因为$P_1(x)$的次方低于$P(x)$，根据归纳假设,

2.5 线性常系数齐次递推关系

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}R_1(x)}$$

可化为**部分分式，而且唯一。证毕**

以下讨论几种情形

（1）**特征方程无重根**

即：$C(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)$

则 $G(x) = \sum_{h=1}^{k}\frac{A_h}{1-\alpha_h x}$

$$a_n = \sum_{h=1}^{k} A_h\alpha_h^n$$

2.5　线性常系数齐次递推关系

即由方程组确定$A_i(i=1,2\ldots k)$：

$$\begin{cases} A_1+A_2+\ldots A_k=d_0 \\ A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\ldots A_k\alpha_k=d_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ A_1\alpha_1^{k-1}+A_2\alpha_2^{k-1}+\ldots A_k\alpha_k^{k-1}=d_{k-1} \end{cases}$$

不难发现，系数行列式正好是范德蒙行列式，行列式不等于0，所以解是唯一的。

【例1】Fibonacci数列递推关系

$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，$F(1)=F(2)=1$

2.5　线性常系数齐次递推关系

（2）特征方程有复根

设α_1、α_2是$C(x)$的一对共轭复根，

$\alpha_1 = \rho(cos\theta + isin\theta)$，$\alpha_2 = \rho(cos\theta - isin\theta)$

$$\frac{A_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{A_2}{1-\alpha_2 x}\text{中}$$

x^n的系数是$A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n =$
$A_1\rho^n(cos\theta + isin\theta)^n + A_2\rho^n(cos\theta - isin\theta)^n = (A_1 + A_2)\rho^n cosn\theta + i(A_1 - A_2)\rho^n sinn\theta =$
$A\rho^n cosn\theta + B\rho^n sinn\theta$

这里，$A = A_1 + A_2$，$B = i(A_1 - A_2)$

2.5　线性常系数齐次递推关系

【例2】递推关系$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$，$a_1 = 1$，$a_2 = 0$。

特征方程：$x^2 - x + 1 = 0$

一对共轭复根：$\alpha_1 = \left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$，

$$\alpha_2 = \left(cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3}\right)$$

令$a_n = Acosn\frac{\pi}{3} + Bsinn\frac{\pi}{3}$

此时，由初值即可确定A、B。

$$a_n = cosn\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}sinn\frac{\pi}{3}$$

2.5 线性常系数齐次递推关系

（3）特征方程有重根（α是r重根）

设$\frac{P(x)}{(1-\alpha x)^r}=\frac{A_1}{(1-\alpha x)}+\frac{A_2}{(1-\alpha x)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(1-\alpha x)^r}$

幂级数展开有：

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n}=\sum_{j=0}^{\infty}C(j+n-1,j)\,\alpha^j x^j$$

所以展开式中x^n的系数为：

$$a_n=\sum_{j=1}^{r}A_jC(j+n-1,n)\alpha^n$$

2.5　线性常系数齐次递推关系

【例3】递推关系$a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=0$，$a_0=1$，$a_1=4$。

特征方程：$x^2-4x+4=0$

二重根：　$\alpha=2$

故：$G(x)=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{(1-2x)^2}$

$$a_n=AC(n,n)2^n+BC(n+1,n)2^n$$

$$=A2^n+B(n+1)2^n$$

此时，由初值即可确定A、B。

$$a_n=(1+n)2^n$$

2.6 线性常系数非齐次递推关系

【定义2】$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n$

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \ldots, a_{k-1} = d_{k-1}$$

若$c_1, c_2, \ldots, c_k, d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$都是常数，则称上式是$k$阶的线性常系数非齐次递推关系。

对于已知序列$\{b_n\}$母函数的问题求解。

【例4】递推关系$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 4^n$，$a_0 = 5$，$a_1 = 3$。

此时，$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

2.6 线性常系数非齐次递推关系

由递推关系，即有

$$x^2: a_2 - a_1 - 6a_0 = 5 \cdot 4^2$$

$$x^3: a_3 - a_2 - 6a_1 = 5 \cdot 4^3$$

$$x^4: a_4 - a_3 - 6a_2 = 5 \cdot 4^4$$

$$\cdots\ \cdots$$

以上所有各式相加，整理可得：

$$G(x) - 3x - 5 - x(G(x) - 5) - 6x^2G(x)$$
$$= 5 \cdot [4^2x^2 + 4^3x^3 + \ldots]$$

$$G(x)(1 - x - 6x^2) = 5 - 2x + 5 \cdot \frac{4^2x^2}{1 - 4x}$$

2.6 线性常系数非齐次递推关系

$$G(x)=\frac{5-22x+88x^2}{(1-3x)(1+2x)(1-4x)}$$

$$=\frac{A}{1+2x}+\frac{B}{1—3x}+\frac{C}{1-4x}$$

联立得方程组：

$$\begin{cases} A+B+C=5 \\ 7A+2B+C=22 \\ 12A-8B-6C=88 \end{cases}$$

解得： $A=\frac{76}{15},B=-\frac{67}{5},C=\frac{40}{3}$.即

$$a_n=\frac{76}{15}(-2)^n-\frac{67}{5}3^n+\frac{40}{3}4^n$$

2.6 线性常系数非齐次递推关系

【练习1】递推关系$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n$，$a_0 = 5$，$a_1 = 2$。

线性常系数的非齐次递推关系，只限于一些特殊情况。

（1） $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n s^n$

其中s是一参数，对应的齐次递推关系为：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

若序列$\{\delta_n\}$和$\{\tau_n\}$都是非齐次递推关系的解，则两个序列的差就是对应的齐次递推关系的解。

2.6 线性常系数非齐次递推关系

则就像非齐次线性方程组求解一样，非齐次递推关系的解，可以表示成对应的齐次递推关系的解加上一个非齐次递推关系的特解。

同样，还是例4，再来求解。

【例4】递推关系$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 4^n$，$a_0 = 5$，$a_1 = 3$。

解：观察这个递推关系，取$c4^n$代入，可以解得一个特解。然后对相应的齐次递推关系求解，借助初值确定相应参数即可。

2.6 线性常系数非齐次递推关系

（2）$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = r^n b(n)$

其中，r是特征方程

$$C(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_{k-1} x + c_k$$

的m重根，$b(n)$是n的p次多项式。则特解的形式为 $r^n[k_0 n^m + k_1 n^{m+1} + \ldots + k_p n^{m+p}]$

其中，k_0，k_1，⋯，k_p是待定常数。若r不是$C(x) = 0$的根，就令$m = 0$

这个定理证明从略，但请会用之。

2.6 线性常系数非齐次递推关系

【例5】$a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=n\cdot(-7)^n$

解：对于特征方程：

$$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)=0$$

故-7不是特征根。

故特解为：$\alpha_n=(-7)^n[k_0+k_1n]$

代入非齐次递推关系即可，解得k_0，k_1。

【练习2】递推关系$a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=2^n(5+n)$，请确定特解。

线性常系数递推关系练习

【练习】1、求下列n阶行列式的值。

$$d_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

线性常系数递推关系练习

【练习】2、求$S_n = \sum_{k=0}^{n} k$

3、求$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

4、求$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$中$x^n$的系数$a_n$

2.7 整数的拆分

所谓**整数拆分**即把整数分解成若干整数的和，相当于把n个无区别的球放到n个无标志的盒子，盒子允许空着，也允许放多于一个球。整数拆分成若干整数的和，办法不一，不同拆分法的总数叫做**拆分数**。

【例6】若有1克、2克、3克、4克的砝码各一枚，问能称出那几种重量？有几种可能方案？

$$
\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \\
&=(1+x+x^2+x^3)(1+x^3+x^4+x^7) \\
&=1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6 \\
&\quad +2x^7+x^8+x^9+x^{10}
\end{aligned}
$$

2.7 整数的拆分

【例7】求用1分、2分、3分的邮票贴出不同数值的方案数。

因邮票允许重复，故母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)$$
$$\cdot(1+x^3+x^6+\cdots)$$

以其中x^4为例，其系数为4，即4拆分成1、2、3之和的拆分数为4。

2.7 整数的拆分

【例8】若有1克砝码3枚、2克砝码4枚、4克砝码2枚的砝码各一枚，问能称出那几种重量？各有几种方案？

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)$$
$$\cdot(1+x^4+x^8)$$
$$=(1+x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6$$
$$+2x^7+2x^8+2x^9+x^{10}+x^{11})(1+x^4+x^8)$$
$$=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7$$
$$+5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}$$
$$+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}$$

2.7 整数的拆分

【例9】整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，求其母函数。如若其中m至少出现一次，其母函数如何?

若整数n拆分成1，2，3，…，m的和，并允许重复，其母函数为：

$$G_1(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots$$
$$\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$

2.7 整数的拆分

$$G_1(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots$$

$$\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\cdots\frac{1}{1-x^m}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

2.7 整数的拆分

若拆分中m至少出现一次，其母函数为：

$$G_2(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots$$

$$\cdots(x^m+x^{2m}+\cdots)$$

$$=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

2.7 整数的拆分

$$G_2(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}\quad(2-6-1)$$

以上等式的组合意义：即整数n拆分成1到m的和的拆分数减去拆分成1到m-1的和的拆分数，即为至少出现一个m的拆分数。

2.7 整数的拆分

【例10】若有1、2、4、8、16、32克的砝码各一枚，问能称出那几种重量？有几种可能方案？

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\cdot(1+x^{32})$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^8}{1-x^4}\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}\frac{1-x^{64}}{1-x^{32}}$$

$$=\frac{1-x^{64}}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^{63})=\sum_{k=0}^{63}x^k$$

2.7 整数的拆分

从母函数可以得知，用这些砝码可以称出从1克到63克的重量，而且办法都是唯一的。

这问题可以推广到证明任一十进制数n，可表示为：

$$n=\sum_{k\geq 0} a_k 2^k,\quad 0\leq a_k\leq 1,\ k\geq 0$$

而且是唯一的。

2.8 指数型母函数

设有n个元素，其中元素a_1重复了n_1次，元素a_2重复了n_2次，…，a_k重复了n_k次，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$。

全排列数：

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

2.8 指数型母函数

若有8个元素，其中a_1重复3次，a_2重复2次，a_3重复3次。从中取r个（$r \le 8$）组合，其组合数为c_r，则c_r的母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$

$$=(1+2x+3x^2+3x^3+2x^4+x^5)\cdot(1+x+x^2+x^3)$$

$$=1+3x+6x^2+9x^3+10x^4+9x^5+6x^6+3x^7+x^8$$

2.8 指数型母函数

从x^4的系数可知，这8个元素中取4个组合，其组合数为10。这10个组合可从下面展开式中得到：

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3)\\
&=[1+(x_1+x_2)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\\
&\quad+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2)+(x_1^3x_2+x_1^2x_2^2)+x_1^3x_2^2]\\
&\cdot(1+x_3+x_3^2+x_3^3)\\
&=1+(1+x_1+x_2+x_3)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_3\\
&\quad+x_2x_3+x_3^3)+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3\\
&\quad+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3)+(x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2\\
&\quad+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^3x_3+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_3\\
&\quad+x_1^2x_2^2)+\cdots
\end{aligned}
$$

2.8 指数型母函数

其中4次方项有：

$$x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^3x_3$$
$$+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_3+x_1^2x_2^2 \quad (2-7-2)$$

该式表达了从8个元素（a_1、a_3各3个，$a_2$2个）中取4个的组合。例如$x_1x_3{}^3$为1个a_1，3个a_3的组合，$x_2^2x_3^2$为2个a_2，2个a_3的组合，以此类推。

若研究从中取4个的不同排列总数，以$x_2^2x_3^2$对应的两个a_2两个a_3的不同排列为例，其不同排列数为：

$$\frac{4!}{2!\,2!}$$

2.8 指数型母函数

故取4个元素作允许重复的排列，其排列数为：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{2!2!}\right)$$

$$=4!\left(\frac{4}{3!}+\frac{3}{2!2!}+\frac{3}{2!}\right)=4!\frac{4\cdot 2!\cdot 2!+3\cdot 3!+3\cdot 2!\cdot 3!}{2!2!3!}$$

$$=16+18+36=70$$

2.8 指数型母函数

为了便于计算，形式地引进函数：

$$G_e(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})\cdot(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})$$

$$G_e(x)=(1+2x+2x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{12}x^4+\frac{1}{12}x^5)\cdot(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8 \qquad (2-7-3)$$

2.8 指数型母函数

将等号右端写成：

$$G_e(x)=1!+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^2+\frac{28}{3!}x^3+\frac{70}{4!}x^4+\frac{170}{5!}x^5$$
$$+\frac{350}{6!}x^6+\frac{560}{7!}x^7+\frac{560}{8!}x^8 \quad (2-7-4)$$

【**定义3**】对于序列$a_0, a_1, a_2 \ldots$，定义

$$G_e(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots$$

是序列$\{a_n\}$的指数型母函数。

2.8 指数型母函数

【例11】序列{1，1，1，…}的指数型母函数:

$$G_e(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = e^x$$

序列{0!，1!，2!，3!, …}的指数型母函数:

$$G_e(x) = 0! + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

【例12】由1，2，3，4四个数字组成的五位数中，要求数1出现次数不超过2次，但不能不出现；2出现次数不超过1次；3出现次数可达3次，也可以不出现；4出现次数为偶数。求满足上述条件的数的个数。

2.8 指数型母函数

$$G_e(x)=(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!})(1+x)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})$$

$$\times(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!})$$

$$=(x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3)(1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3$$

$$+\frac{7}{24}x^4+\frac{1}{8}x^5+\frac{x^6}{48}+\frac{x^7}{144})$$

2.8 指数型母函数

$$= x + \frac{5}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{43}{24}x^5 + \frac{43}{48}x^6 + \frac{17}{48}x^7 + \frac{1}{288}x^8 + \frac{1}{48}x^9 + \frac{1}{288}x^{10}$$

$$= \frac{x}{1!} + 5\frac{x^2}{2!} + 18\frac{x^3}{3!} + 64\frac{x^4}{4!} + 215\frac{x^5}{5!} + 645\frac{x^6}{6!} + 1785\frac{x^7}{7!} + 140\frac{x^8}{8!} + 7650\frac{x^9}{9!} + 12600\frac{x^{10}}{10!}$$

2.8 指数型母函数

【例13】求1，3，5，7，9五个数字组成的r位数的个数，要求其中3，7出现的次数为偶数，其他1，5，9出现次数不加限制。

$$G_e(x) =$$

$$\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\right)^2\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots\right)^3$$

由于

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

2.8 指数型母函数

$$\because \quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

$$G_e(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}$$

2.8 指数型母函数

$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^{x})$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot 3^n+1)\frac{x^n}{n!}.$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1).$$