第三章 容斥原理和鸽巢原理

Inclusion-Exclusion Principle and Pigeonhole Principle

3.1 容斥原理引论

【例1】[1，20]中2或3的倍数的个数。

解：2的倍数是：2，4，6，8，10，12，
14，16，18，20。 10个

3的倍数是：3，6，9，12，15，18。 6个

但答案不是10+6=16个，因为6，12，18在两类中重复计数，应减去。故答案是：16-3=13

容斥原理研究有限集合的交或并的计数。

3.1 容斥原理引论

【DeMorgan定理】若A和B是集合U的子集，则

$(a)\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $(b)\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

证明：(a)设$\forall x \in \overline{A \cup B}$，则$x \overline{\in} A \cup B$，相当于$x \overline{\in} A$且$x \overline{\in} B$同时成立，即

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

反之，设$\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$，则$x \in \overline{A}$且$x \in \overline{B}$，即$x \overline{\in} A$且$x \overline{\in} B$同时成立，也就是$x \overline{\in} A \cup B$，相当于

$$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

(a)得证，(b)的证明与之类似。

3.1 容斥原理引论

【广义DeMorgan定理】若$A_1, A_2, \dots A_n$是集合U的子集，则

$(a)\overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \dots \cap \overline{A_n}$;

$(b)\overline{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \dots \cup \overline{A_n}$

证明：(a)数学归纳法，$n = 2$时已证。假设定理对于n成立，即：

$\overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \dots \cap \overline{A_n}$，则取$n+1$时，

$$\overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n \cup A_{n+1}} = \overline{(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}}$$

$$= \overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n} \cap \overline{A_{n+1}} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \dots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}$$

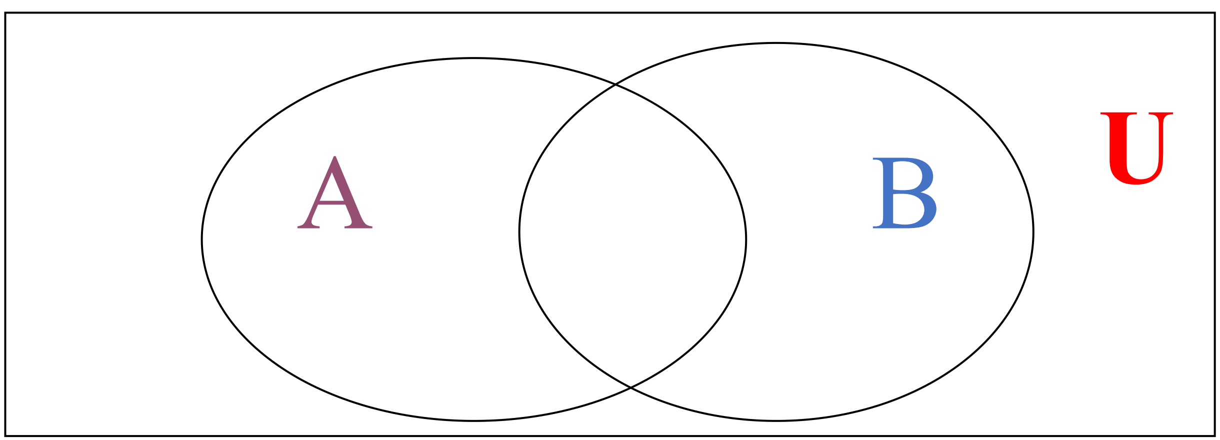
(a)得证，(b)的证明与之类似。

3.2 容斥原理

最简单的计数问题是求有限集合A和B的并的元素数目。显然有

【定理3-1】$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$，

即具有性质A或B的元素的个数等于具有性质A的元素个数与具有性质B的元素个数之和，减去同时具有性质A和B的元素个数。

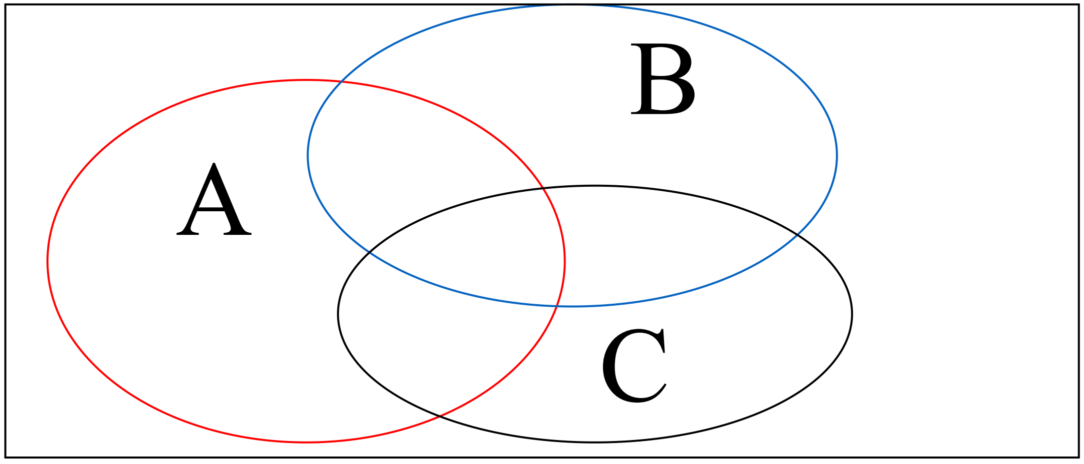


3.2 容斥原理

【定理3-2】$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

证明: $|A\cup B\cup C| = |A\cup(B\cup C)| =$

$|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)| = |A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)| = |A|+|B|+|C|-|B\cap C|-|(A\cap B)|-|(A\cap C)|+|A\cap B\cap C|$



3.2 容斥原理

【例2】某学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学、物理两门课的学生45人；同时修数学、化学的20人；同时修物理、化学的22人。同时修三门的3人。问这学校共有多少学生？

解：令 M 为修数学的学生集合；

P 为修物理的学生集合；

C 为修化学的学生集合；

由题意可知

$$|M|=170,\ |P|=130,\ |C|=120,\ |M\cap P|=45,\ |M\cap C|=20,\ |P\cap C|=22,\ |M\cap P\cap C|=3$$

3.2 容斥原理

故 $|M \cup P \cup C| =$
$170+130+120-45-20-22+3$=336(人)

即此学校的人数为336人。

【例3】$S=\{1,2,\ldots,600\}$，**求其中被2，3，5除尽的数的个数。**

解：令 A,B,C**分别表示**S中**被2，3，5除尽的数，则**

$$|A|=\left\lfloor\frac{600}{2}\right\rfloor=300,\ |B|=\left\lfloor\frac{600}{3}\right\rfloor=200,$$

$$|C|=\left\lfloor\frac{600}{5}\right\rfloor=120,\ |A\cap B|=\left\lfloor\frac{600}{2\times 3}\right\rfloor=100,$$

3.2 容斥原理

$$|A\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{2\times5}\right\rfloor=60,\ |B\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{3\times5}\right\rfloor=40,$$

$$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{600}{2\times3\times5}\right\rfloor=20$$

故，$|A\cup B\cup C|=300+200+120-100-60-40+20=440$

利用数学归纳法可以证得一般的容斥原理。

【容斥原理】设$A_1,A_2,\ldots A_n$是有限集合，则

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|+$$

3.2 容斥原理

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|+\ldots(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots A_n|$$

证明：使用数学归纳法，$n=2$时已证。假设定理对于$n-1$成立，即：

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots A_{n-1}|=\sum_{i=1}^{n-1}|A_i|-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}\left|A_i\cap A_j\right|+$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}\sum_{k>j}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|+\ldots(-1)^{n-2}|A_1\cap A_2\cap\ldots A_{n-1}|$$

则取n时，

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1}\cup A_n|=|(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})\cup A_n|$$

$$=|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1}|+|A_n|-|(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{n-1})\cap A_n|$$

3.2 容斥原理

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}| +$$

$$|A_n| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n| =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}| +$$

$$|A_n| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j \cap A_n| -$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| + \dots (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1} \cap A_n|$$

3.2 容斥原理

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n|$$

此时，由于广义DeMorgan定理：

$$\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}$$，**可以得出**

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n|$$

容斥原理需要注意的就是这样两个公式，
$|\cup_{i=1}^{n} A_i|$和$|\cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}|$，**下面看一下示例。**

3.3 容斥原理示例

【例4】求a, b, c, d, e, f六个字母的全排列中不允许出现ace和df图像的排列数。

解：设A为ace作为一个元素出现的排列集，B为df作为一个元素出现的排列集，$A\cap B$为同时出现ace、df的排列集。

根据容斥原理，不出现ace和df的排列数为：

$$|\bar{A}\cap\bar{B}| = N - |A| - |B| + |A\cap B| = 6! - 4! - 5! + 3! = 582$$

【例5】求由a, b, c, d四个字母构成的n位符号串中，a, b, c至少出现一次的符号串数目。

解：令A、B、C分别为n位符号串中不出现a，b，c符号的集合。

3.3 容斥原理示例

由于n位符号串中每一位都可取a，b，c，d四种符号中的一个，故不允许出现a(或b, c)的n位符号串的个数应是：

$$|A| = |B| = |C| = 3^n$$

不出现a和b、b和c、a和c的n位符号串的个数应是：

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = 2^n$$

不出现a和b和c的n位符号串的个数应是：1

故，a，b，c至少出现一次的n位符号串集合即为

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$$
$$= N - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|$$
$$- |A \cap B \cap C| = 4^n - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n - 1$$

3.3 容斥原理示例

【例6】求不超过120的素数个数。

解：因$11^2=121$，故不超过120的合数必然是2、3、5、7的倍数，而且不超过120的合数的因子不可能都超过11。

设A_1,A_2,A_3,A_4分别为不超过120的数的2，3，5，7倍数集

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| = 120-60-40-24-17+20+12+8+8+5+3-4-2-1-1+0=27$$

但此时，因为合数集中包括2、3、5、7，同时1算作了素数，故所求素数个数应当为：27+4−1=30

3.3 容斥原理示例

【例7】用26个英文字母作不允许重复的全排列，要求排除dog，god，gum，depth，thing字样的出现，求满足这些条件的排列数。

解：所有排列中，令：A_1为出现dog字样的排列，相当于把dog作为一个单元参加排列，故$|A_1| = 24!$

同样理由，A_2为出现god字样的排列，$|A_2| = 24!$

A_3为出现gum字样的排列，$|A_3| = 24!$

A_4为出现depth字样的排列，$|A_4| = 22!$

A_5为出现thing字样的排列，$|A_5| = 22!$

所求排列数为：$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}|$

3.3 容斥原理示例

因为排列不允许重复，因而有些排列有交集、有些没有交集。

比如：dog和god不能同时出现，但dog和gum可以表现为dogum。

三个排列情形也类似。

【例8】欧拉函数$\varphi(n)$是求小于n且与n互素的数的个数。

解：若n分解为素数的乘积，

$$n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_k}^{\alpha_k}$$

令 A_i为$N=\{1,2,\ldots n\}$中p_i倍数的数的集合，$i = 1, 2 \ldots k$

3.3 容斥原理示例

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots k, \ j > i$$

类似可以证明，

$$\varphi(n) = n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) + \ldots \pm \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} =$$

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

注意：1在其中。

3.4 错排问题

n个元素依次给以标号1，2，…，n。n个元素的全排列中，每个元素都不在自己原来位置上的排列数。

设A_i为数i在第i位上的全体排列，$i=1$，2，…，n。因数字i不能动，因而有：

$$|A_i|=(n-1)!,\ \ i=1,2,\ldots,n$$

同理，

$$\left|A_i\cap A_j\right|=(n-2)!\,,\ \ i,j=1,2,\ldots k,\ j\neq i$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|=1$$

这样，错排数$D_n=n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!+\ldots\pm C(n,n)0!=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\pm\frac{1}{n!}\right)$

3.4 错排问题

【例9】数1，2，…，9的全排列中，求偶数在原来位置上，其余都不在原来位置的错排数目。

解：实际上是1，3，5，7，9五个数的错排问题，总数为：

$$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$

【例10】在8个字母A, B, C, D, E, F, G, H的全排列中，求使A, C, E, G四个字母不在原来上的错排数目。

解：8个字母的全排列中，令A_1, A_2, A_3, A_4分别表A, C, E, G在原来位置上的排列，则错排数为：

3.4 错排问题

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$
$$= 8! - C(4,1)7! + C(4,2)6! - C(4,3)5! + C(4,4)4!$$

【例11】求8个字母A, B, C, D, E, F, G, H的全排列中只有4个不在原来位置的排列数。

解：8个字母中只有4个不在原来位置上，其余4个字母保持不动，相当于4个元素的错排，其数目为

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$$

且4个元素是任意组合，故所求排列数为：

$$9C(8,4)$$

3.4 错排问题

【例11】6个人参加会议，入场时将帽子挂在衣架上，请问离开时没一人戴对自己帽子的概率是多少？

解：就是一个错排问题。

概率$p=\frac{D_6}{6!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 0.368$

可以证明，当n足够大时，$\frac{D_n}{n!}\approx\frac{1}{e}\approx 0.36788$

不难体会到：错排问题用容斥原理比递推关系容易解得多。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

【例12】4个x，3个y，2个z的全排列中，求不出现$xxxx$，yyy，zz图像的排列。

解：令 A_1为出现$xxxx$图像的排列， A_2为出现yyy图像的排列， A_3为出现zz图像的排列。

这些都是有重复的排列，所以

$$|A_1| = \frac{6!}{3!2!},\ |A_2| = \frac{7!}{4!2!},\ |A_3| = \frac{8!}{4!3!}$$

同时，

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{4!}{2!},\ |A_2 \cap A_3| = \frac{6!}{4!},\ |A_1 \cap A_3| = \frac{5!}{3!}$$

且$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{3!}{1!}$

所求排列为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = \frac{9!}{4!3!2!} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

棋盘多项式

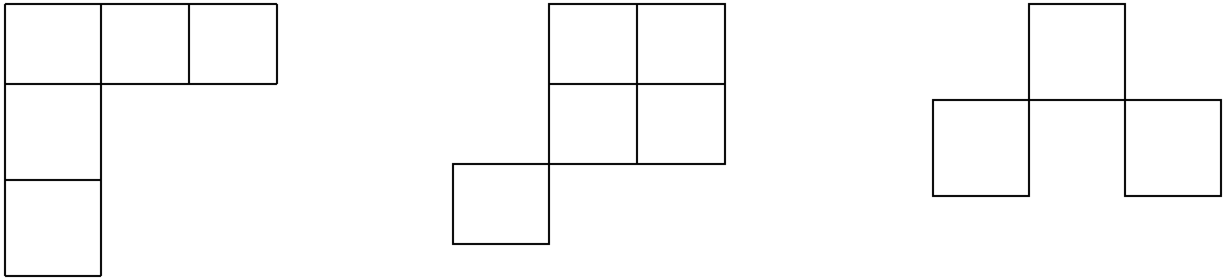
n个不同元素的一个全排列可看做n个相同的棋子在$n \times n$的棋盘上的一个布局。布局满足同一行（列）中有且仅有一个棋子。

			X	
X				
		X		
				X
	X			

如图所示的布局对应于排列41352。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

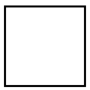
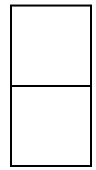
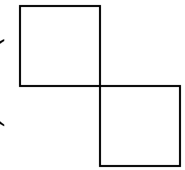
可以把棋盘的形状推广到任意形状：

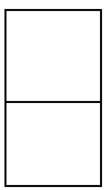
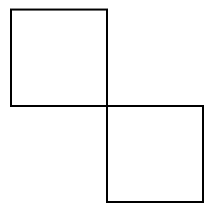


布子规定称为无对攻规则，棋子相当于象棋中的车。

令$r_k(C)$表示k个棋子布到棋盘C上的方案数。如：

3.5 棋盘多项式和有限制排列

$r_1($  $)=1$， $r_1($  $)=2$， $r_1($  $)=2$，

$r_2($  $)=0$， $r_2($  $)=1$。

为了形象化起见，（ ）中的图像便是棋盘的形状。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

【定义1】设C为一棋盘，称$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$为$C$的棋盘多项式。

规定 $r_0(C)=1$，包括$C=\emptyset$时。

设C_i是棋盘C的某一指定格子所在的行与列都去掉后所得的棋盘；C_e是仅去掉该格子后的棋盘。

在上面定义下，显然有

$$r_k(C)=rk_{-1}(Ci)+r_k(Ce),$$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

即对任一指定的格子，要么布子，所得的方案数为 $r_{k-1}(Ci)$；

要么不布子，方案数为 $r_k(Ce)$。

设C有n个格子，则 $r_1(C)=n$.

$r_1(C)=r_0(Ci)+r_1(Ce)$， $\because$ $r_1(Ce)=n-1$

$\therefore$ $r_0(Ci)=1$. 故规定 $r_0(C)=1$**是合理的.**

3.5 棋盘多项式和有限制排列

从而

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}[r_{k-1}(C_i)+r_k(C_e)]x^k$$

$$=x\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_i)x^k+\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_e)x^k$$

$$=xR(Ci)+R(C_e) \qquad (*)$$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

例如：

$$R(\square) = 1 + x;$$

$$R\left(\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}\right) = xR(\ ) + R(\square) = 1 + 2x;$$

$$\begin{aligned} R\left(\begin{array}{|c|c}\hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \cline{2-2} \end{array}\right) &= x\,R(\square) + R(\square) \\ &= x(1 + x) + 1 + x \\ &= 1 + 2x + x^2 \end{aligned}$$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

如果C由相互分离的C_1，C_2组成，即C_1的任一格子所在的行和列中都没有C_2的格子。则有：

$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$$

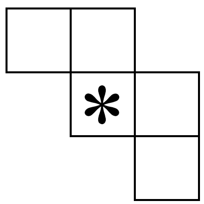
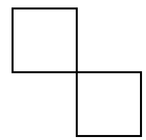
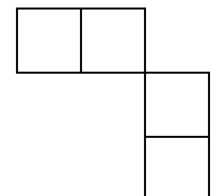
故 $R(C) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}[r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)]x^k$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2)x^j\right)$$

$$\therefore\ R(C) = R(C_1)\,R(C_2) \qquad (\blacksquare)$$

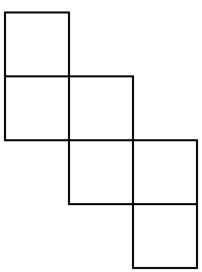
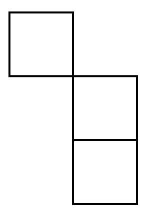
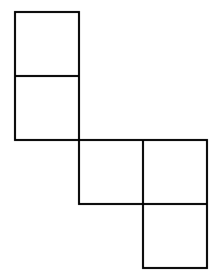
3.5 棋盘多项式和有限制排列

利用(*)和(■)，可以把一个比较复杂的棋盘逐步分解成相对比较简单的棋盘，从而得到其棋盘多项式。

例 R () = xR()+R()

$$= x(1+x)^2 + (1+2x)^2$$

$$= 1+5x+6x^2+x^3$$

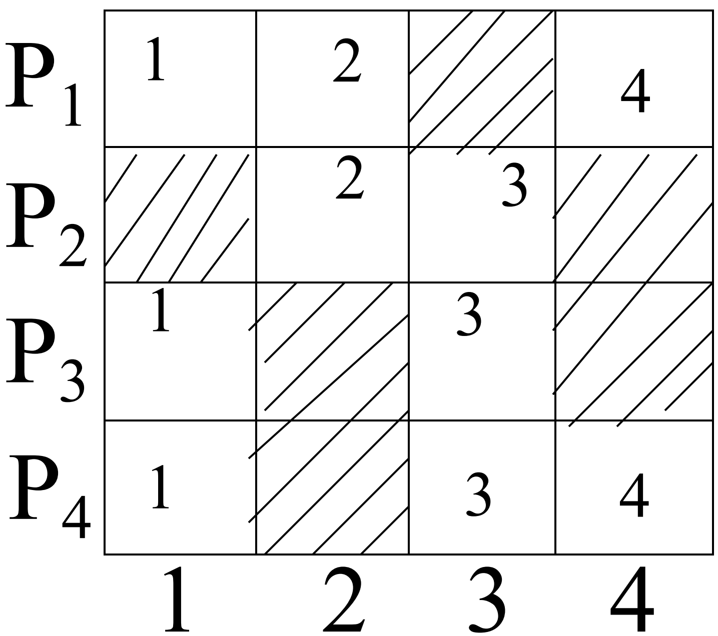
R() = xR() + R()

$$= 1+6x+10x^2+4x^3$$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

有禁区的排列

例　设对于排列$P = P_1P_2P_3P_4$，规定$P_1 \neq 3$，$P_2 \neq 1, 4$，$P_3 \neq 2, 4$，$P_4 \neq 2$。



这样的排列对应于有禁区的布子。如右图有影线的格子表示禁区。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

定理 设r_i为i个棋子布入禁区的方案数，$i=1,2,3,\cdots,n$。有禁区的布子方案数（即禁区内不布子的方案数）为:

$$r_0 n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! + \ldots + (-1)^n r_n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k r_k(n-k)!$$

证 设A_i 为第i个棋子布入禁区，其它棋子任意布的方案集，i =1 , 2 , 3, ...,n。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

则所有棋子都不布入禁区的方案数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}| = n! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k r_k(n-k)!$$

上式刻画了k个棋子布入禁区，其它n – k个棋子任意布的方案数。由假设可知等于$r_k(n-k)$！（注意：布入禁区的棋子也要遵守无对攻规则）

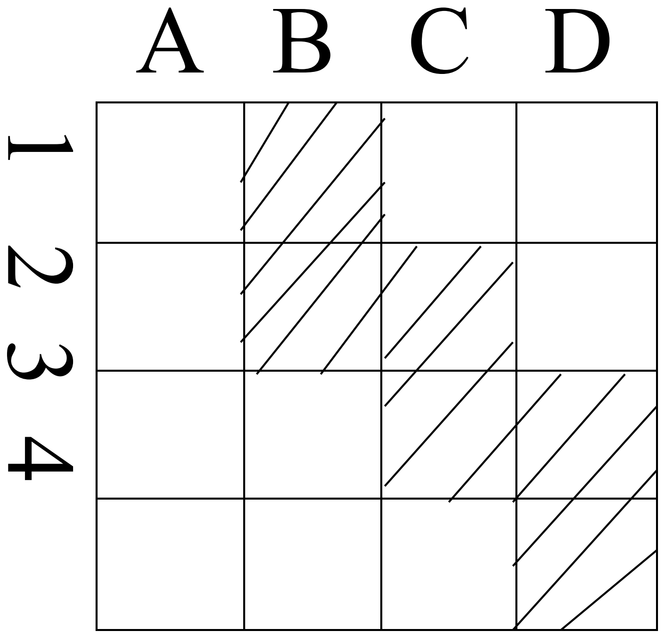
3.5 棋盘多项式和有限制排列

请给出上例的棋盘多项式，随之方案数为$4!-6(4-1)!+11(4-2)!-7(4-3)!+1(4-4)!=4$

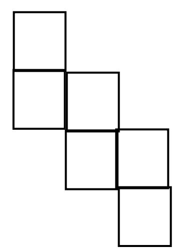
【练习】 １，２，３，４四位工人，A，B，C，D四项任务。条件如下：
１不干B；２不干B、C；
３不干C、D；４不干D。
问有多少种可行方案？

3.5 棋盘多项式和有限制排列

解：　由题意，可得如下棋盘：



其中有影线的格子表示禁区。

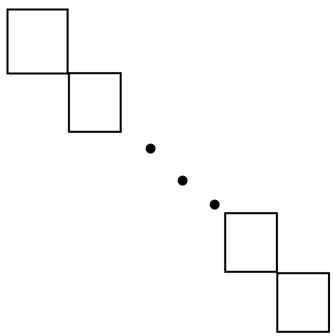
R() $=1+6x+10x^2+4x^3$

方案数 $=4!-6(4-1)!+10(4-2)!-4(4-3)!$
$+0(4-4)!=4$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

例 三论错排问题

错排问题对应的是n×n的棋盘的主对角线上的格子是禁区的布子问题。

$C =$ 

$R(C) = (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)x^i$，即$r_i = C(n,i)$

故错排问题的方案数：

$$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + \ldots \pm C(n,n)$$

3.6 一般公式

若将3.2节中的例子改为“单修一门数学的学生有多少？”“只修一门课的学生有多少？”“只修两门课的学生有多少？”则相应的答案表示如下：

$$|M \cap \overline{P} \cap \overline{C}|$$

$$|M \cap \overline{P} \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap P \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap \overline{P} \cap C|$$

$$|M \cap P \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap P \cap C| + |M \cap \overline{P} \cap C|$$

设有与性质 1，2，…，n相关的元素N个，A_i为有第i种性质的元素的集合，$i = 1, 2, \ldots, n$。

P_k为至少有k种性质的元素的个数；

q_k为恰有k种性质的元素的个数。

$$q_k = p_k - C(k+1,1)p_{k+1} + C(k+2,2)p_{k+2} + \ldots$$

$$\pm C(n, n-k)p_n，\quad k = 0, 1, 2 \ldots n$$

3.6 一般公式

前例中只修一门课的学生为：

$$|M \cap \overline{P} \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap P \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap \overline{P} \cap C| = q_1$$

$$= p_1 - C(2,1)p_2 + C(3,2)p_3 = p_1 - 2p_2 + 3p_3$$

在一般公式中，若令

$$P_0 = N, \quad q_0 = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|,$$

就得到原来的容斥原理。

【例13】某校有１２个教师，已知教数学的有８位，教物理的有６位，教化学的５位；数、理５位，数、化４位，理、化３位；数理化３位。问教其他课的有几位？只教一门的有几位？只好教两门的有几位？

3.6 一般公式

解：令教数学的教师属于A_1，教物理的属于A_2，教化学的属于A_3。则$P_0=12$，

$$P_1=|A_1|+|A_2|+|A_3|=8+6+5=19;$$

$$P_2=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|=12;$$

$$P_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|=3;$$

故 教其它课的老师数为：

$$q_0=P_0-P_1+P_2-P_3=2$$

恰好一门的教师数：

$$q_1=P_1-2P_2+3P_3=4$$

恰好教两门的老师数为：

$$q_2=P_2-3P_3=3$$