2.8 指数型母函数

设有n个元素，其中元素a_1重复了n_1次，元素a_2重复了n_2次，…，a_k重复了n_k次，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$。

全排列数：

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

2.8 指数型母函数

若有8个元素，其中a_1重复3次，a_2重复2次，a_3重复3次。从中取r个$(r \le 8)$组合，其组合数为c_r，则c_r的母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$

$$=(1+2x+3x^2+3x^3+2x^4+x^5)\cdot(1+x+x^2+x^3)$$

$$=1+3x+6x^2+9x^3+10x^4+9x^5+6x^6+3x^7+x^8$$

2.8 指数型母函数

从x^4的系数可知，这8个元素中取4个组合，其组合数为10。这10个组合可从下面展开式中得到：

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1+x_1^2+x_1^3)(1+x_2+x_2^2)(1+x_3+x_3^2+x_3^3)\\
&=[1+(x_1+x_2)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\\
&\quad+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2)+(x_1^3x_2+x_1^2x_2^2)+x_1^3x_2^2]\\
&\cdot(1+x_3+x_3^2+x_3^3)\\
&=1+(1+x_1+x_2+x_3)+(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_1x_3\\
&\quad+x_2x_3+x_3^2)+(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3\\
&\quad+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3)+(x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2\\
&\quad+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^3x_3+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_3\\
&\quad+x_1^2x_2^2)+\cdots
\end{aligned}
$$

2.8 指数型母函数

其中4次方项有：

$$x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^2x_3^2+x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2+x_1^3x_3$$
$$+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1^3x_3+x_1^2x_2^2 \quad (2-7-2)$$

该式表达了从8个元素（a_1、a_3各3个，$a_2$2个）中取4个的组合。例如$x_1x_3{}^3$为1个a_1，3个a_3的组合，$x_2^2x_3^2$为2个a_2，2个a_3的组合，以此类推。

若研究从中取4个的不同排列总数，以$x_2^2x_3^2$对应的两个a_2两个a_3的不同排列为例，其不同排列数为：

$$\frac{4!}{2!\,2!}$$

2.8 指数型母函数

故取4个元素作允许重复的排列，其排列数为：

$$4!\left(\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{1!3!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{1!1!2!}+\frac{1}{2!2!}+\frac{1}{3!1!}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!1!1!}+\frac{1}{1!2!1!}+\frac{1}{3!1!}+\frac{1}{2!2!}\right)$$

$$=4!\left(\frac{4}{3!}+\frac{3}{2!2!}+\frac{3}{2!}\right)=4!\frac{4\cdot 2!\cdot 2!+3\cdot 3!+3\cdot 2!\cdot 3!}{2!2!3!}$$

$$=16+18+36=70$$

2.8 指数型母函数

为了便于计算，形式地引进函数：

$$G_e(x) = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)$$

$$\cdot\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$G_e(x)=\left(1+2x+2x^2+\frac{7}{6}x^3+\frac{5}{12}x^4+\frac{1}{12}x^5\right)$$

$$\cdot\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right)$$

$$=1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{12}x^4+\frac{17}{12}x^5$$

$$+\frac{35}{72}x^6+\frac{8}{72}x^7+\frac{1}{72}x^8 \qquad (2-7-3)$$

2.8 指数型母函数

将等号右端写成：

$$G_e(x)=1!+\frac{3}{1!}x+\frac{9}{2!}x^2+\frac{28}{3!}x^3+\frac{70}{4!}x^4+\frac{170}{5!}x^5$$
$$+\frac{350}{6!}x^6+\frac{560}{7!}x^7+\frac{560}{8!}x^8 \quad (2-7-4)$$

【定义3】对于序列$a_0, a_1, a_2 \ldots$，定义

$$G_e(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\frac{a_3}{3!}x^3+\cdots$$

是序列$\{a_n\}$的指数型母函数。

2.8 指数型母函数

【例11】序列{1，1，1，⋯}的指数型母函数:

$$G_e(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = e^x$$

序列{0!，1!，2!，3!,⋯}的指数型母函数:

$$G_e(x) = 0! + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

【例12】由1，2，3，4四个数字组成的五位数中，要求数1出现次数不超过2次，但不能不出现；2出现次数不超过1次；3出现次数可达3次，也可以不出现；4出现次数为偶数。求满足上述条件的数的个数。

2.8 指数型母函数

$$G_e(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!})(1 + x)(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})$$

$$\times (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})$$

$$= (x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3)(1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

$$+ \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \frac{x^6}{48} + \frac{x^7}{144})$$

2.8 指数型母函数

$$= x + \frac{5}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{43}{24}x^5 + \frac{43}{48}x^6$$

$$+ \frac{17}{48}x^7 + \frac{1}{288}x^8 + \frac{1}{48}x^9 + \frac{1}{288}x^{10}$$

$$= \frac{x}{1!} + 5\frac{x^2}{2!} + 18\frac{x^3}{3!} + 64\frac{x^4}{4!} + 215\frac{x^5}{5!} + 645\frac{x^6}{6!}$$

$$+ 1785\frac{x^7}{7!} + 140\frac{x^8}{8!} + 7650\frac{x^9}{9!} + 12600\frac{x^{10}}{10!}$$

2.8 指数型母函数

【例13】求1，3，5，7，9五个数字组成的r位数的个数，要求其中3，7出现的次数为偶数，其他1，5，9出现次数不加限制。

$$G_e(x) =$$
$$\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\right)^2\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots\right)^3$$

由于

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

2.8 指数型母函数

$$\therefore \quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

$$G_e(x)=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2e^{3x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{3x}$$

2.8 指数型母函数

$$=\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^{x})$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n+2\cdot 3^n+1)\frac{x^n}{n!}.$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1).$$

2.9 错排

n个有序的元素应有$n!$个不同的排列，如若一个排列使得所有的元素**不**在原来的位置上，则称这个排列为**错排**。

以1，2，3，4四个数的错排为例，分析其结构，找出规律性的东西来。

1 2的错排是唯一的，即2 1。

1 2 3的错排有3 1 2，2 3 1。可以看作是1 2错排，3分别与1，2换位而得的。

2.9 错排

n个有序的元素应有$n!$个不同的排列，如若一个排列使得所有的元素**不**在原来的位置上，则称这个排列为**错排**。

以1，2，3，4四个数的错排为例，分析其结构，找出规律性的东西来。

1 2的错排是唯一的，即2 1。

1 2 3的错排有3 1 2，2 3 1。可以看作是1 2错排，3分别与1，2换位而得的。

2.9 错排

4 3 2 1，4 1 2 3，4 3 1 2，
3 4 1 2，3 4 2 1，2 4 1 3，
2 1 4 3，3 1 4 2，2 3 4 1。

第一列是4分别与1，2，3互换位置，其余两个元素错排，由此生成的。

第二列是4分别与3，1，2（123的一个错排）的每一个数互换而得到的。

第三列则是由另一个错排231和4换位而得到。

2.9 错排

上面的分析结果，给出了一种产生错排的方法。

设n个数$1,2,\ldots,n$错排的数目为D_n，任取其中一数i，数i分别与其他的$n-1$个数之一互换，其余n−2个数进行错排，共得$(n-1)D_{n-2}$个错排。

另一部分位数i以外的n−1个数进行错排，然后i与其中每个数互换得$(n-1)D_{n-1}$个错排。

综合以上分析结果得递推关系:

$$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),\quad D_1=0,\ D_2=1$$

可以推得：$D_0=1$

2.9 错排

这是一个非常系数递推关系，下面提供一种解法：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] \\ &= (-1)^2[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}] \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &= (-1)^{n-1}[D_1 - D_0] \end{aligned}$$

考虑初始值，可得：

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$$

2.9 错排

令$G_e(x) = D_0 + D_1 x + \frac{D_2}{2!}x^2 + \frac{D_3}{3!}x^2 + \ldots$

$$x\colon\ D_1 = D_0 + (-1)^1$$

$$\frac{x^2}{2!}\colon\ D_2 = 2D_1 + (-1)^2$$

$$\frac{x^3}{3!}\colon\ D_3 = 3D_2 + (-1)^3$$

…… …… ……

相加可得： $G_e(x) - xG_e(x) = e^{-x}$

2.9 错排

$$G_e(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

容易得出：

$$= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

$$D_n = \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots \pm \frac{1}{n!}\right) n!$$

2.10 非线性递推关系

不像线性常系数齐次递推关系，基本全部解决。非齐次递推关系只有部分能解，非线性递推关系只有特殊几类能解。

本节讨论Stirling数（双参数）、Catalan 数两个内容。

首先介绍多项式系数，从大家熟悉的例子开始。

【例1】n个有区别的球放到两个有区分的盒子里，若要求第1个盒子放k个球，第二个盒子放$n-k$个球$(k=0,1,2,\ldots,n)$，方案数应是$(x_1+x_2)^n$中$x_1^k x_2^{n-k}$项的系数$C(n,k)$。

2.10.1 Stirling数

取x1=x2=1，即有：

$$C(n,0)+C(n,1)+\ldots+C(n,n)=2^n$$

继而推广到n个有区别的球放到m个有区别的盒子情形，要求m个盒子放的球数分别是$n_1,n_2,\ldots,n_m$，$n_1+n_2+\ldots+n_m=n$，其不同方案数用

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_m}$$ 表示

从n个有区别的球中取出n_1个放到第1个盒子里去，其选取方案数为$\binom{n}{n_1}$；当第1个盒子的n_1个球选定，

2.10.1 Stirling数

第2个盒子里的n_2个球则是从$n-n_1$个中选取的，其方案数应为$\binom{n-n_1}{n_2}$；第3个盒子的n_3个球则是从$n-n_1-n_2$中选取，其方案数为$\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$；依此类推，根据乘法原理可得：

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_m} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!}$$

可以按照排列给出其它解释。

上式称为多项式系数，是展开式的系数。

2.10.1 Stirling数

因此$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$，展开式中$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$的系数即为：

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_m}$$

【定理2-10-1】$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$展开式的项数等于$\binom{n+m-1}{n}$，且系数之和等于m^n。

证明：展开式中的$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$项和从$m$个元素$x_1, x_2, \ldots x_m$中取$n$个作允许重复的组合一一对应。故得展开式的项数等于$\binom{n+m-1}{n}$。

因为从m个球中取n个作允许重复的组合的全体，对于每个球都有m种选择，由乘法原理可证。

2.10.1 Stirling数

【定义1】$[x]_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = s(n,0) + s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \ldots + s(n,n)x^n$

称 $s(n,0)$、$s(n,1)$、$s(n,2)$、$\ldots s(n,n)$是第一类Stirling数。

$$[x]_{n+1} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)$$
$$= [s(n,0) + s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \ldots + s(n,n)x^n](x-n)$$
$$= s(n+1,0) + s(n+1,1)x + s(n,2)x^2 + \ldots + s(n+1,n+1)x^{n+1}$$

容易知道：$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k)$

2.10.1 Stirling数

【定义2】n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数用$S(n,m)$表示，称为第二类Stirling数。

【例2】红，黄，蓝，白四种颜色的球，放到两个无区别的盒子里，不允许有空盒，其方案有如下七种：

	1	2	3	4	5	6	7
第 1 盒子	r	y	b	w	ry	rb	Rw
第 2 盒子	ybw	rbw	ryw	ryb	bw	yw	yb

$$S(4,2)=7$$

2.10.1 Stirling数

【定理2-10-2】第二类Stirling数$S(n,k)$有下列性质：$(a)S(n,0)=0;(b)S(n,1)=1;$ $(c)S(n,2)=2^{n-1}-1;(d)S(n,n-1)=C(n,2);(e)S(n,n)=1.$

证明：$(a)(b)(e)$显然。

(c)设有n个不相同的球$b_1,b_2,\ldots,b_n$，从中取出球b_1，其余的$n-1$个球，每个都有与b_1同盒，或不与b_1同盒两种选择. 但必须排除一种情况，即都与b_1同盒，因这时另一盒将是空盒.

故实际上只有$2^{n-1}-1$种方案，即$S(n,2)=2^{n-1}-1$

2.10.1 Stirling数

(d) n个球放到$n-1$个盒子里，不允许有一空盒，故必有一盒有两个球，从n个有区别的球中取2个共有$C(n,2)$种组合方案。

【定理2-10-3】第二类Stirling数满足下面的递推关系，$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$，$(n>1,\ m\geq 1)$

证明：设有n个有区别的球$b_1,b_2,\ldots,b_n$，从中取一个球设为b_1。把n个球放到m个盒子无一空盒的方案可分为两类。

2.10.1 Stirling数

（a）b_1独占一盒，其方案数显然为$S(n-1,m-1)$

（b）b_1不独占一盒，这相当于先将剩下的$n-1$个球放到m个盒子，不允许空盒，共有$S(n-1,m)$种不同方案，然后将b_1球放进其中一盒，从乘法原理得不独占一盒的方案数应为$mS(n-1,m)$。

根据加法原理有

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$$

【例3】将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里，没有空盒，有多少种方案？

$$S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)=15$$

2.10.1 Stirling数

如下图所示：

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg	ybw	r	ybwg	g	rybw
yg	rbw	y	rbwg		
bg	ryw	b	rywg		
wg	ryb	w	rybg		
ryg	bw	ry	bwg		
rbg	yw	rb	ywg		
rwg	yb	rw	ybg		

2.10.1 Stirling数

n个球放到m个盒子里，依球和盒子是否有区别？是否允许空盒？共有$2^3=8$种状态，其方案计数分别列于下表。

(1) n个球有区别，m个盒子有区别，有空盒时方案计数为m^n

(2) n个球有区别，m个盒子有区别，无空盒时方案计数为$m!\,S(n,m)$

(3) n个球有区别，m个盒子无区别，有空盒时方案计数为$S(n,1)+S(n,2)+\ldots S(n,m),\ n\geq m$

$$S(n,1)+S(n,2)+\ldots S(n,n),\ n\leq m$$

2.10.1 Stirling数

(4) n个球有区别，m个盒子无区别，无空盒时方案计数为$S(n,m)$

(5) n个球无区别，m个盒子有区别，有空盒时方案计数为$C(n+m-1,n)$

(6) n个球无区别，m个盒子有区别，无空盒时方案计数为$C(n-1,m-1)$

(7) n个球无区别，m个盒子无区别，有空盒时方案计数为$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$的$x^n$项系数

(8) n个球无区别，m个盒子无区别，无空盒时方案计数为$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$的$x^n$项系数

2.10.1 Stirling数

最后给出Stirling数的计算公式。

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$$

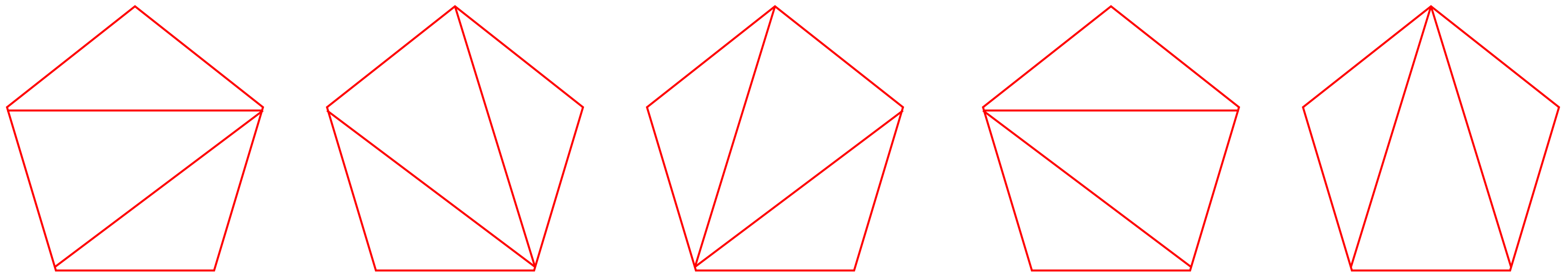
【例4】 $S(n,3)=\frac{1}{3!}[3^n-3\cdot 2^n+3]$

利用$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$，还可以自己绘制得到速查表。

2.10.2 Catalan 数

这一部分讨论Catalan数，其递推关系是非线性的，许多有意义的计数问题都会导致这样的递推关系。

一个凸n边形，通过不相交于n边形内部的对角线，把n边形拆分成若干三角形，不同拆分的数目用C_n表之。五边形有5种拆分方式，如下图



2.10.2 Catalan数

1.关于Catalan数的递推关系

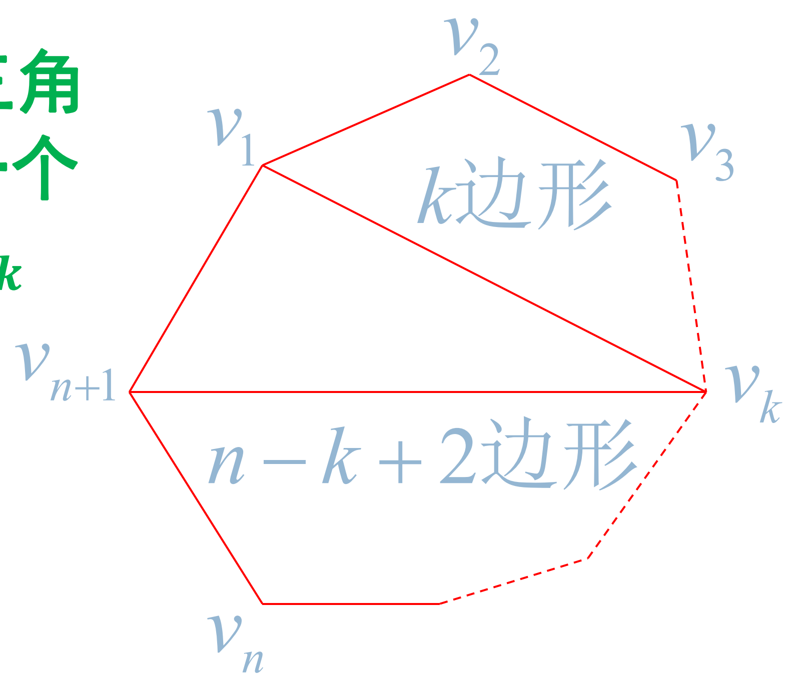
【定理2-10-4】Catalan数C_n满足以下递推关系：

（1）$C_{n+1}=C_2C_n+C_3C_{n-1}+\ldots+C_{n-1}C_3+C_nC_2$

（2）$(n-3)C_n=\frac{n}{2}(C_3C_{n-1}+C_4C_{n-2}+\ldots+C_{n-2}C_4+C_{n-1}C_3)$

证明：（1）

如图所示，以v_1v_{n+1}作为三角形的一条边，三角形的另一个顶点为v_k，三角形$v_1v_{n+1}v_k$将凸$n+1$边形分割成两部分，一部分是k边形，另一部分为$n-k+2$边形。



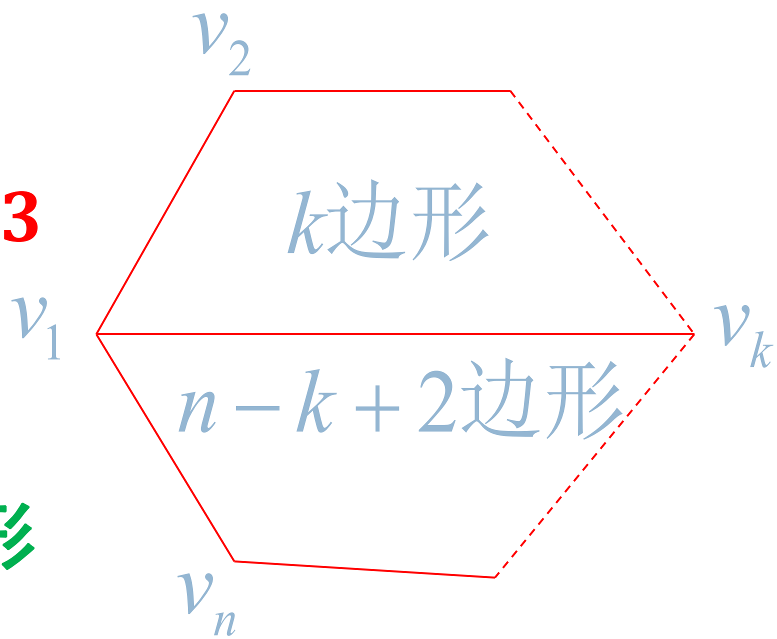
2.10.2 Catalan数

根据乘法原理，以$v_1v_{n+1}v_k$为一剖分三角形的剖分数应为C_kC_{n-k+2}，$k=2,3,\ldots,n$。

再因为加法原理，就有：

$$C_{n+1}=C_2C_n+C_3C_{n-1}+\ldots+C_{n-1}C_3+C_nC_2$$

（2）如图所示，从v_1点向其它$n-3$个顶点可引出$n-3$条对角线。对角线v_1v_k把n边形分割成两个部分，因此以v_1v_k为剖分线的n边形



2.10.2 Catalan数

剖分数目为C_kC_{n-k+2}, $k=3,4,\ldots,n-1$。

对所有这些点求和得

$$C_3C_{n-1}+C_4C_{n-2}+\ldots+C_{n-2}C_4+C_{n-1}C_3$$

以其他顶点取代v_1点也有类似的结果。但考虑到对角线有两个顶点，而且每个剖分总有$n-3$条对角线，对每条对角线都计算一次得

$$\frac{n}{2}(C_3C_{n-1}+C_4C_{n-2}+\ldots+C_{n-2}C_4+C_{n-1}C_3)$$

注意每个n边形的剖分都通过$n-3$条对角线，所以剖分方案重复计算了$n-3$次，得证。

2.10.2 Catalan数

2. Catalan数计算公式

（1）递推关系法

由于$C_2=1$,所以

$$C_{n+1}=C_2C_n+C_3C_{n-1}+\dots+C_{n-1}C_3+C_nC_2$$

则 $$C_{n+1}-2C_n=C_3C_{n-1}+\dots+C_{n-1}C_3$$

$$(n-3)C_n=\frac{n}{2}(C_3C_{n-1}+C_4C_{n-2}+\dots+C_{n-2}C_4+C_{n-1}C_3)$$

$$=\frac{n}{2}(C_{n+1}-2C_n)$$

2.10.2 Catalan数

整理得

$$nC_{n+1} = (4n-6)C_n$$

令$nC_{n+1} = E_{n+1}$，则有

$$E_{n+1} = (4n-6)\frac{E_n}{n-1} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}E_n,\ E_2 = C_2 = 1$$

即

$$E_{n+1} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{(n-1)(n-1)}\frac{(2n-4)(2n-5)}{(n-2)(n-2)}\cdots\frac{4\cdot 3}{2\cdot 2}\frac{2\cdot 1}{1\cdot 1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

$$E_{n+1} = \binom{2n-2}{n-1} = nC_{n+1}$$

2.10.2 Catalan数

所以有

$$C_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

（2）母函数法

由于$C_2 = C_3 = 1$

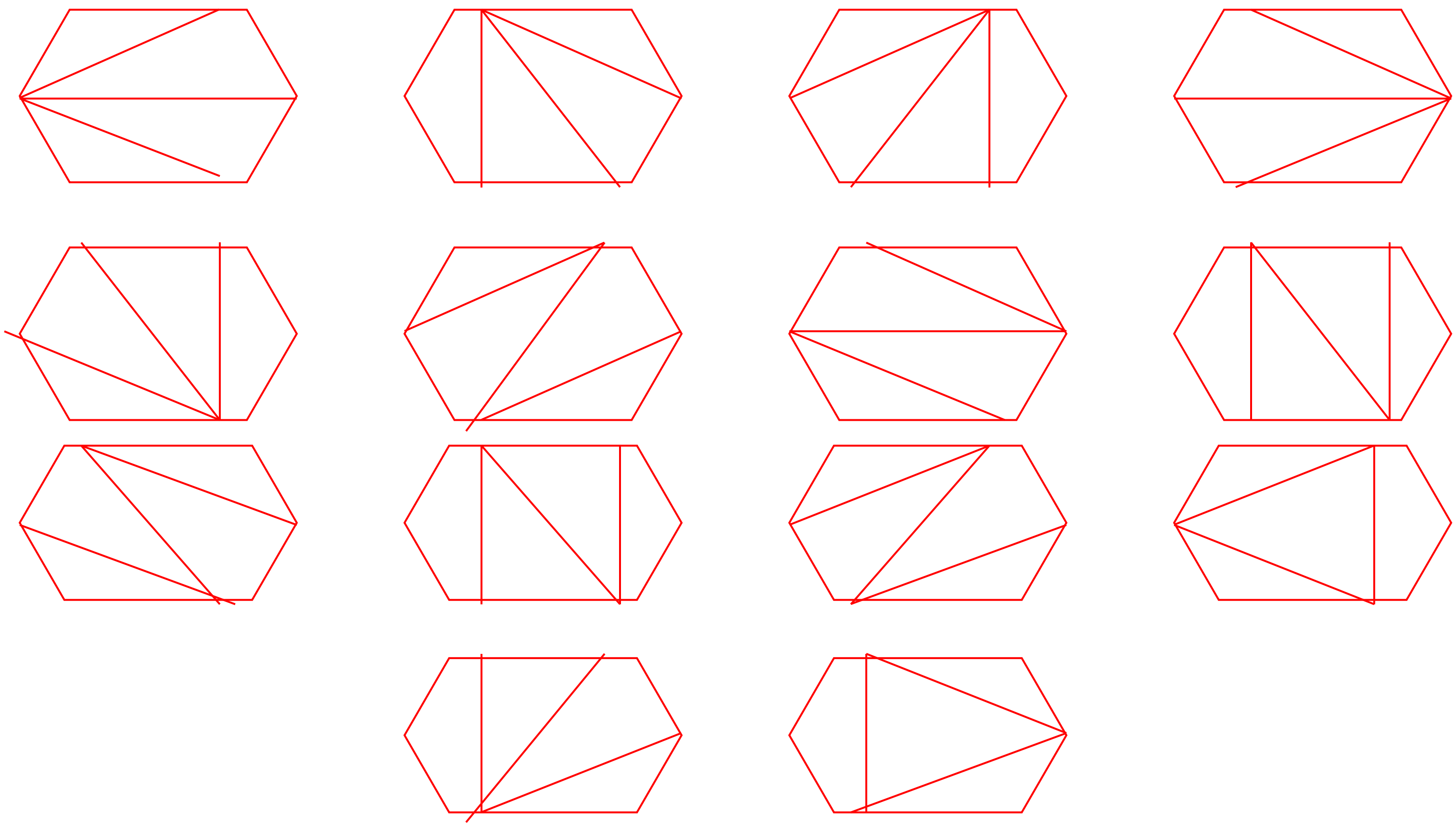
设$G(x) = C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + \dots$

相应各式相加可以得到结果。

（3）微分方程法

2.10.2 Catalan数

【例5】 $C_6 = 14$



2.10.2 Catalan数

【例6】$P = a_1 a_2 \ldots a_n$为n个数的乘积，依据乘法的结合律，不改变其顺序，只用加进括号表示乘积的顺序，试问有多少种不同的乘法方案?

分析：假设p_n表示n个数乘积的n-1对括号插入的不同方案数。

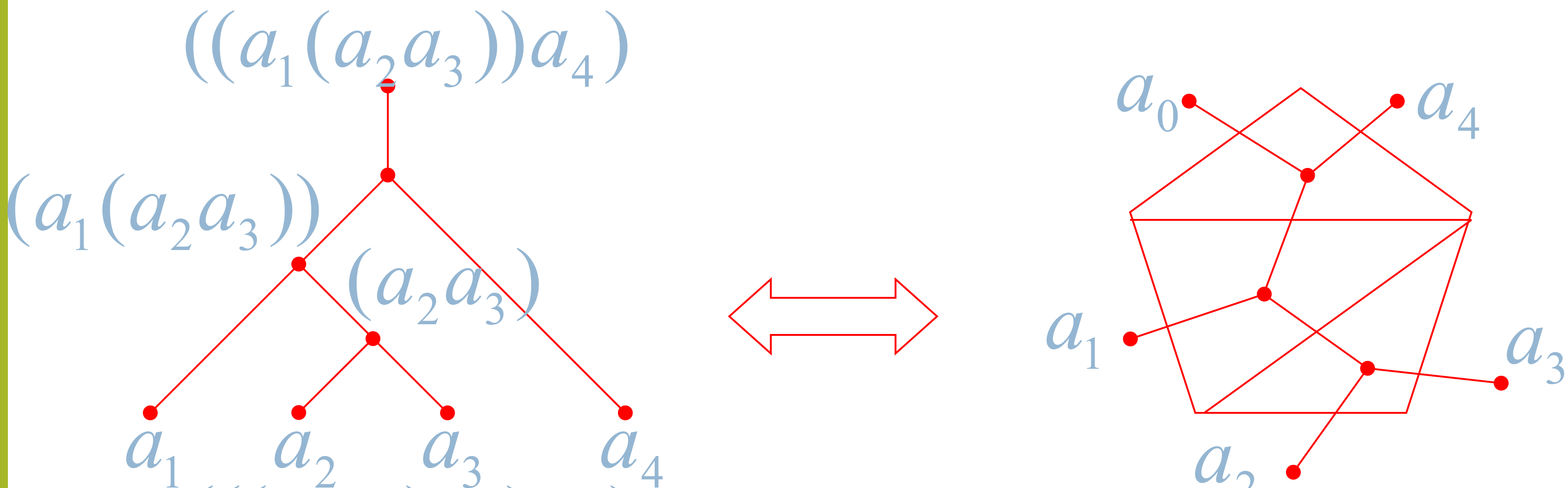
$$p_n = p_1\, p_{n-1} + p_2\, p_{n-2} + \ldots + p_{n-1}\, p_1,$$

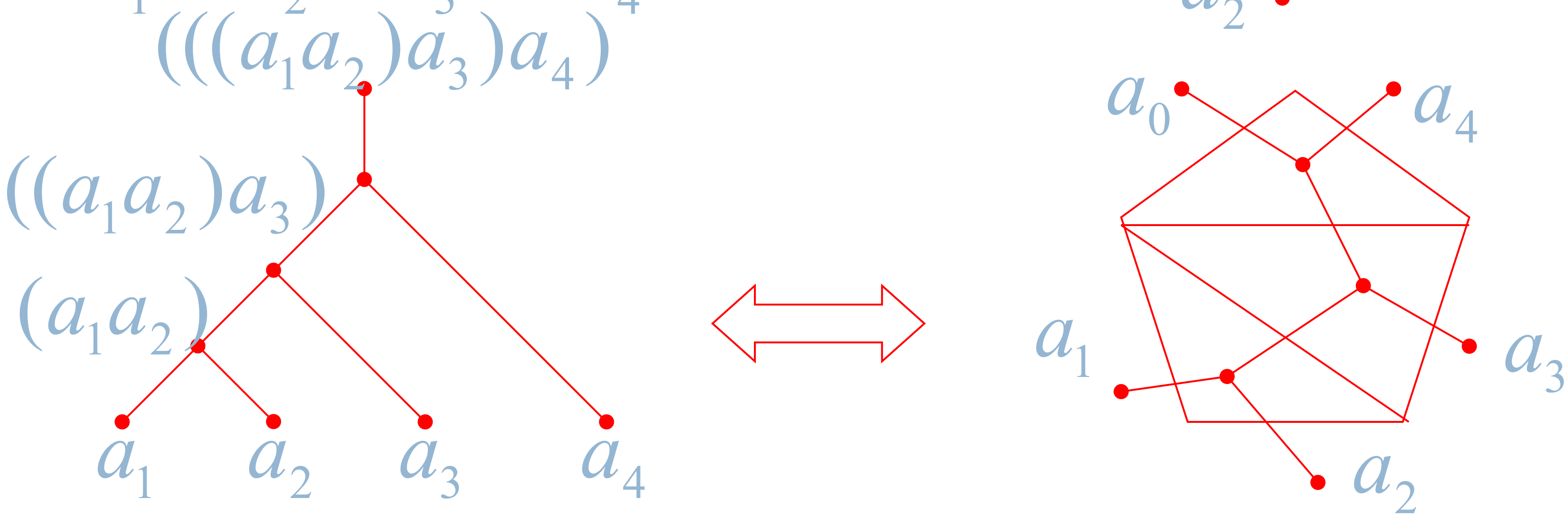
$$p_1 = p_2 = 1$$

显然，$p_k = C_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots, n$

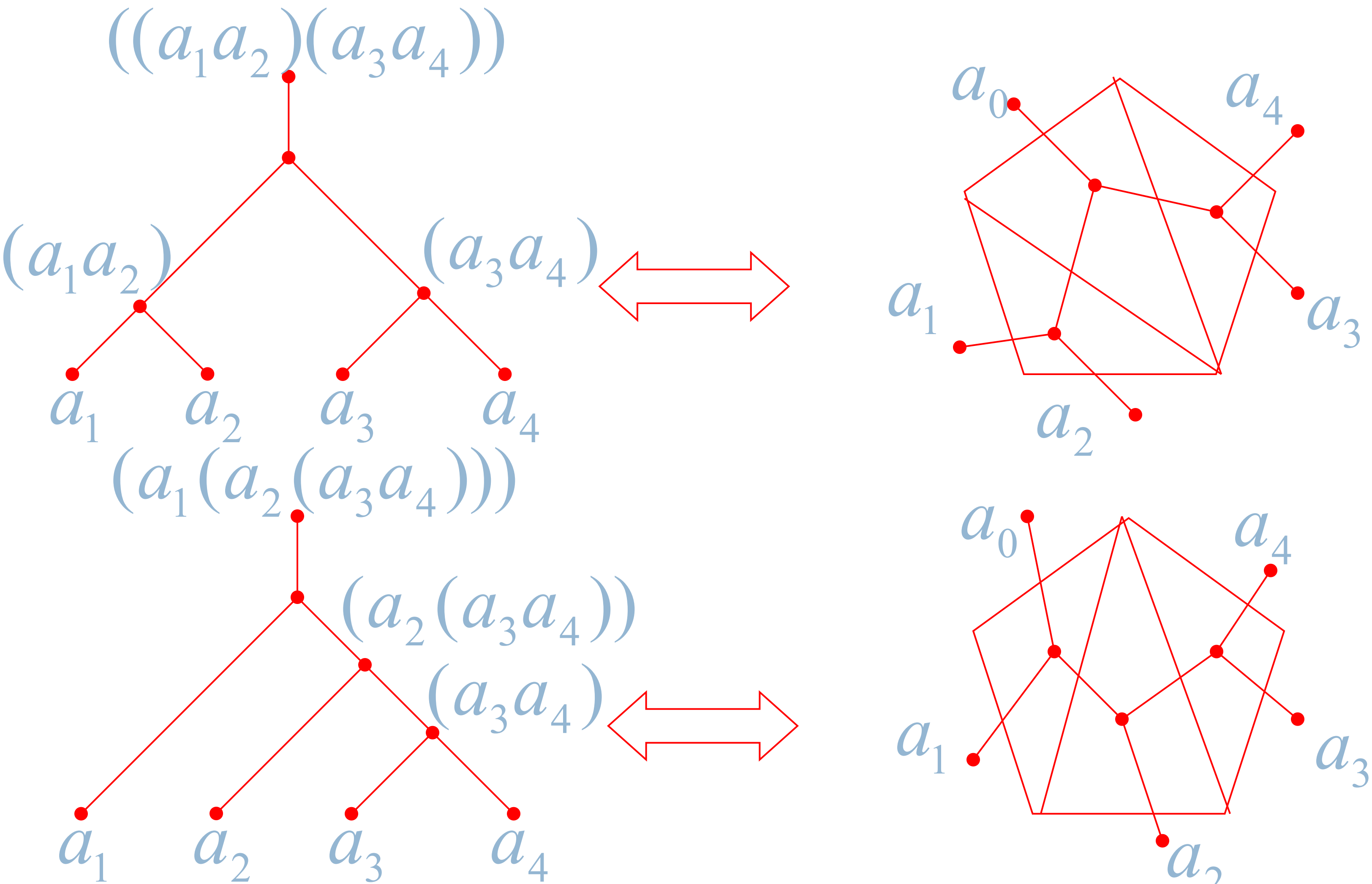
以$k = 4$为例，给出图示。

2.10.2 Catalan数





2.10.2 Catalan数



2.10.2 Catalan数