数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第六章 数值积分

6.1-4 几类求积公式

一、数值积分的必要性

主要讨论如下形式的一元函数积分 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$

在微积分里，按Newton-Leibniz公式求定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

要求被积函数*f(x)*

☞ 有解析表达式;

☞ *f(x)*的原函数*F(x)*为初等函数.

1.*f(x)*的原函数*F(x)*不能用初等函数表示

例如函数: $\sin x^2, \cos x^2, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad \sqrt{1+x^3}, \quad e^{-x^2}$

2 有些被积函数其原函数虽然可以用初等函数表示成有限形式,但表达式相当复杂,计算极不方便.例如函数

$$x^2\sqrt{2x^2+3}$$

并不复杂,但它的原函数却十分复杂:

$$\frac{1}{4}x^2\sqrt{2x^2+3}+\frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3}-\frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\,x+\sqrt{2x^2+3})$$

3. $f(x)$没有解析表达式，只有数表形式:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	4.5	6	8	8.5

这些都说明,通过原函数来计算积分有它的局限性,因而,研究关于积分的数值方法具有很重要的实际意义.

所谓**数值积分**，从近似计算的角度看，就是在 区间$[a,b]$上适当地选取若干个点x_i，然后用这些节点上 的函数值$f(x_i)$的加权平均方法获得定积分的近似值， 即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

二、求积公式及代数精度

一般的求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

称$x_k(k=0,1,\cdots,n)$为求积节点并且有$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,
$A_k(k=0,1,\cdots,n)$称为求积系数，且与被积函数无关。

节点与求积系数确定,则求积公式就确定了,显然,求积公式的好坏与A_k和x_k的选取有关.

称$R_n=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$为求积公式余项或者截断误差.

定义： 如果某个求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$对于任何次数不高于$m$的多项式时，求积公式都为等式，而对于某个$m+1$次多项式求积公式不能成为等式，则称该求积公式具有$m$次**代数精度**.

$$\int_a^b a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m dx = \sum_{k=0}^{n} A_k (a_0 + a_1 x_k + \cdots + a_m x_k^m)$$

$\forall a_i$

$$\Leftrightarrow a_0 \int_a^b dx + a_1 \int_a^b x dx + \cdots + a_m \int_a^b x^m dx$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{n} A_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} A_k x_k + \cdots + a_m \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_a^b x^i dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^i, 0 \le i \le m,$$

$$\int_a^b p_{m+1}(x) dx \ne \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1}$$

$\exists p_{m+1}(x)$

如果要构造具有m次代数精度的求积公式，只要令它对于 $f(x)=1, x, x^2, \cdots, x^m$ 都能准确成立即可。

$$\int_a^b dx = \sum_{k=0}^{n} A_k$$

$$\int_a^b x dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b x^m dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m$$

$$\int_a^b a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m dx = \sum_{k=0}^{n} A_k (a_0 + a_1 x_k + \cdots + a_m x_k^m)$$

$$\Leftrightarrow a_0 \int_a^b dx + a_1 \int_a^b x dx + \cdots + a_m \int_a^b x^m dx$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{n} A_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} A_k x_k + \cdots + a_m \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m$$

由代数精度的定义不难得到：求积公式对任何一个次数不高于m的多项式成立，尤其对于$1, x, \ldots, x^m$成立；反之也成立。这样，我们便有了一种很简单的判断代数精度的初等方法.

一般地，欲使求积公式 $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \underset{=}{\approx} \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)}$ 具有m次代数精度，只要令它对于$f(x) = 1, x, \ldots, x^m$都能准确成立，这就要求

$$\begin{cases} \sum A_k = b - a; \\ \sum A_k x_k = \frac{1}{2}(b^2 - a^2); \\ \quad\cdots \\ \sum A_k x_k^m = \frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}). \end{cases}$$

$$\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1}$$

【例1】判断以下求积公式的代数精度：

$$(1)\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}[f(-1)+2f(0)+f(1)]$$

(1). $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1$, $A_0=A_2=\frac{1}{2}$, $A_1=1$

$$(2) I(f) \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$$

解： $I_k=\int_{-1}^{1}x^k dx=\dfrac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}=\begin{cases} 0, & k\text{为奇数} \\ \dfrac{2}{k+1}, & k\text{为偶数}\end{cases}$

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^j = I_j, 0 \le j \le m,$$

$\sum_{i=0}^{2} A_i = \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2} = I_0 = 2$ ✓

$\sum_{i=0}^{2} x_i A_i = -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = I_1 = 0$ ✓ 1次代数精度

$\sum_{i=0}^{2} x_i^2 A_i = (-1)^2\cdot\frac{1}{2}+0+1^2\cdot\frac{1}{2}=1 \neq I_2=\frac{2}{3}$ ✗

$$\sum_{k=0}^{2} A_k = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{4}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 2 = I_0$$ ✓

$$\sum_{k=0}^{2} x_k A_k = \frac{1}{3}(-1) + \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 = 0 = I_1$$ ✓

$$\sum_{k=0}^{2} x_k^2 A_k = \frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{4}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3} = I_2$$

$$\sum_{k=0}^{2} x_k^3 A_k = \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}\cdot 0^3 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 = 0 = I_3$$

$$\sum_{k=0}^{2} x_k^4 A_k = \frac{1}{3}(-1)^4 + \frac{4}{3}\cdot 0^4 + \frac{1}{3}\cdot 1^4 = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = I_4$$ ✗

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^j = I_j, 0 \le j \le m,$$

$A_0 = A_2 = \frac{1}{3}$, $A_1 = \frac{4}{3}$

$x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

所以该求积公式的代数精度***m*=3**

$a=0,\ b=3h$ $\qquad x_0=0,\ x_1=h,\ x_2=2h$

【例2】 试构造形如$\int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(0)+A_1 f(h)+A_2 f(2h)$的数值求积公式,使其代数精度尽可能高,并指出其代数精度的阶数.

解: 令公式对$f(x)=1,x,x^2$均准确成立,则有

$$\begin{cases} 3h=A_0+A_1+A_2 = \int_a^b dx & \checkmark \\ \dfrac{9}{2}h^2=0+A_1 h+A_2 2h = \int_0^{3h} x\,dx & \checkmark \\ 9h^3=0+A_1 h^2+A_2 4h^2 = \int_0^{3h} x^2 dx & \checkmark \end{cases}$$

$\int_0^{3h} x^3 dx = \sum_{i=0}^{2} x_i^3 A_i \quad \times$

$m \geqslant 2$

解得 $A_0=\dfrac{3}{4}h,\quad A_1=0,\quad A_2=\dfrac{9}{4}h.\qquad \Rightarrow \int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{3h}{4}f(0)+\dfrac{9h}{4}f(2h)$

而当$f(x)=x^3$时,公式的左边$=81h^4/4$,右边$=18h^4$,公式的左边$\neq$右边,说明此公式对$f(x)=x^3$不能准确成立.

所以公式只有2次代数精度.

【例2】 试构造形如$\int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(0)+A_1 f(h)+A_2 f(2h)$的数值求积公式,使其代数精度尽可能高,并指出其代数精度的阶数.

x_i

解: 令公式对$f(x)=1,x,x^2$均准确成立,则有

$$\begin{cases} 3h=A_0+A_1+A_2 \\ \dfrac{9}{2}h^2=0+A_1h+A_2 2h = \int_0^{3h} x\,dx \\ 9h^3=0+A_1h^2+A_2 4h^2 = \int_0^{3h} x^2\,dx \end{cases}$$

解得 $A_0=\dfrac{3}{4}h,\quad A_1=0,\quad A_2=\dfrac{9}{4}h.\qquad \Rightarrow \int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \approx \boxed{\dfrac{3h}{4}f(0)+\dfrac{9h}{4}f(2h)}$

而当$f(x)=x^3$时,公式的左边$=81h^4/4$,右边$=18h^4$,公式的左边$\neq$右边,说明此公式对$f(x)=x^3$不能准确成立.

所以公式只有2次代数精度.

三、插值型求积公式

作$f(x)$的插值函数：在$[a,b]$上$a \le x_0 < x_1 < \cdots x_n \le b$

得$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$，$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$

将$p_n(x)$代替$f(x)$，代入$\int_a^b f(x)dx$，得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b l_k(x)dx\, f(x_k)$$

这样我们就得到了插值型求积系数$\lambda_k^{(n)} = \int_a^b l_k(x)dx$

即得到插值型的求积公式.

三、插值型求积公式

作$f(x)$的插值函数：在$[a,b]$上$a \le x_0 < x_1 < \cdots x_n \le b$

得$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$，$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\ne k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$

将$p_n(x)$代替$f(x)$，代入$\int_a^b f(x)dx$，得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b l_k(x)dx f(x_k)$$

这样我们就得到了插值型求积系数$\lambda_k^{(n)} = \int_a^b l_k(x)dx$

即得到插值型的求积公式.

三、插值型求积公式

$f(x) \approx p_n(x)$ $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

作$f(x)$的插值函数：在$[a,b]$上$a \le x_0 < x_1 < \cdots x_n \le b$

得$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$，$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$

将$p_n(x)$代替$f(x)$，代入$\int_a^b f(x)dx$，得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)dx = \sum_{k=0}^{n} \boxed{\int_a^b l_k(x)dx} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} f(x_k)$$

这样我们就得到了插值型求积系数$\lambda_k^{(n)} = \int_a^b l_k(x)dx$

即得到插值型的求积公式.

对$f(x)$作一假设，设它在$[a,b]$上足够光滑，我们来看看截断误差.

由前面的插值，我们得到

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f(x_k)+\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)},\ \xi=\xi(x)\in(a,b)$$

则 $$R_n=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}f(x_k)=\boxed{\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)dx}$$

接下来，我们看看它的代数精度.

定理6.1 $n+1$个插值节点的插值型求积公式至少有n次代数精度.

推论 对于$n+1$个节点的插值型求积公式的求积系数$\lambda_k^{(n)}$

$$(k=0,1,\cdots,n),\ \text{必满足}\boxed{\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}=b-a} \overset{x^0}{=} \int_a^b dx$$

定理6.2 $n+1$个节点的求积公式如果具有n次或者大于n次的代数精度，则它是插值型求积公式.

证明：(插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} f(x_k),\ \text{其中}\ \lambda_k^{(n)} = \int_a^b l_k(x)dx)$$

假设求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \beta_k f(x_k)$有至少$n$次代数精度，

则对任给的n次多项式$f(x)$等式应该成立.

尤其取$f(x) = l_j(x), j = 0,1,\cdots,n$，有

$$\int_a^b l_j(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \beta_k l_j(x_k) = \beta_j (j = 0,1,\cdots,n)$$

由于 $\beta_j = \lambda_j^n (j = 0,1,\cdots,n)$，定理得证.

$P_n(x) \xrightarrow{n=1} P_1(x)$

【例3】 给定求积节点 $x_0=\frac{1}{4}, x_1=\frac{3}{4}$，试推出计算积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的插值型求积公式，并写出它的截断误差。

$$\lambda_k^{(n)}=\int_a^b l_k(x)dx$$

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

解 由公式(6.2)计算求积系数

$$\lambda_0^{(1)}=\int_0^1 \underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{l_0}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1(4x-3)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

$$\lambda_1^{(1)}=\int_0^1 \underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{l_1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(4x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

故求积公式为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

由式(6.3)，此求积公式的截断误差为

$$R_1=\int_0^1\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}x$$

其中 $\xi=\xi(x)\in(0,1)$。

四、Newton-Cotes(牛顿-科特斯)求积公式

$[a,b] \longrightarrow n$等分

对插值型积分公式，如果x_k为等距节点时，此时的求积公式称为 **Newton-Cotes** 求积公式。

如 果 节 点 等 距 ， 且 $x_0 = a, x_n = b$ ， 即 $\underline{x_k = a + kh}$ ，

$$k = 0,1,\cdots,n, \boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

此时 $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} f(x_k)$$

$$\lambda_k^{(n)} = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\Big)dx \overset{(x=a+th)}{=} \int_0^n \Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j} h\Big)dt$$

$$= \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(k-j)}$$

$$= h\Big(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{k-j}\Big)\int_0^n \Big[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\Big]dt = \frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^n \Big[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\Big]dt$$

$$= (b-a)c_k^{(n)}, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}(k-j) = (k-0)(k-1)\cdots[k-(k-1)][k-(k+1)]\cdots(k-n)$$

$$= k!(n-k)!(-1)^{n-k}$$

记 $$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \Big[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\Big]dt$$

$c_k^{(n)}$称为 **Cotes** 系数，它和 **k** 与 **n** 有关，与被积函数和积分区间无关，实际计算时可以查表。

柯特斯系数表

n				系数					
1	1/2	1/2							
2	1/6	2/3	1/6						
3	1/8	3/8	3/8	1/8					
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

注：由公式知，当$n\geq8$时，柯特斯系数出现负值，这时，初始数据误差将会引起计算结果误差增大，即计算不稳定。因此，实际计算不用$n\geq8$的牛顿-柯特斯公式．

具体计算时，我们可以使用公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

余项

$$R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\right]dx = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)\left[\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right]dt$$

其中 $\xi=\xi(a+th)\in(a,b)$

$R_i(x)=0$, $i\geq n+1$

定理6.3 当n为偶数时,$n+1$个结点的$Newton-Cotes$公式的代数精度至少是$n+1$.（节点个数为奇数时）

几种常用的 Newton-Cotes 公式

柯特斯系数表

n			
1	1/2	1/2	

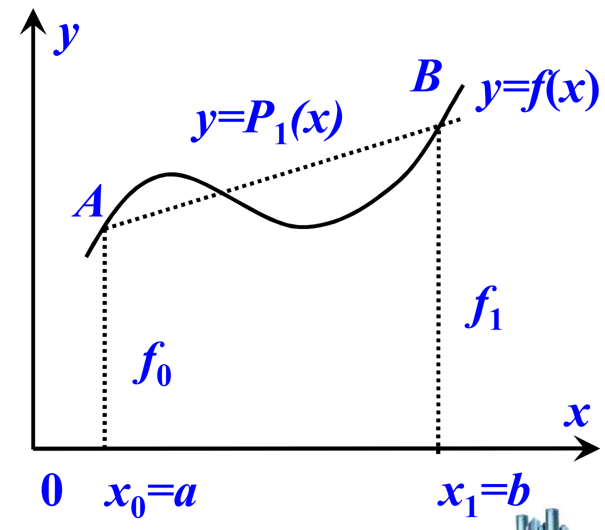
1. 梯形公式： $n=1$时的$Newton-Cotes$公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

梯形公式 的几何意义

$$x_0=a,\ x_1=b, h=b-a,\quad c_0^{(1)}=c_1^{(1)}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=T$$



梯形公式的几何意义就是用直角梯形 x_0x_1BA 的面积代替曲边梯形的面积.

梯形公式 的余项和精度

梯形公式的余项为　　　$t(t-1) \le 0 \quad t \in [0,1]$

连续

$$R_1 = \frac{(b-a)^3}{2} \int_0^1 \underline{f''(\xi)} t(t-1)dt, \xi = \xi(a+th) \in (a,b)$$

第二积分中值定理得到 $R_1 = -\dfrac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \eta \in (a,b)$

梯形公式的代数精度=1.

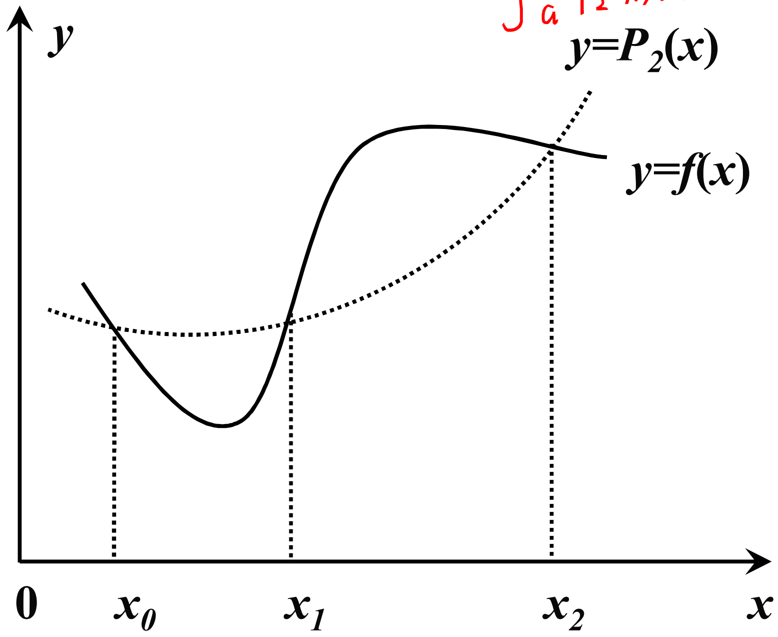
余项

$$R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} [\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)] dx = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^n f^{(n+1)}(\xi) [\prod_{j=0}^{n} (t-j)] dt$$

2. **Simpson公式：n=2时的Newton-Cotes公式**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

$\int_a^b P_2(x)dx$



柯特斯系数表

n				系数
1	1/2	1/2		
2	1/6	2/3	1/6	

几何意义是用抛物线$y=P_2(x)$围成的曲边梯形面积代替由 $y=f(x)$围成的曲边梯形面积。

代数精度 ≥ 3.

Simpson公式 的余项和代数精度

由前面的公式可得余项

$$\tilde{R}=\int_a^b \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)dx$$

明显，代数精度同余项没有保持一致，(代数精度至少为 3，但是余项只能体现为2)

其原因为余项由该式得到$f(x)=p_2(x)+r_2(x)$，其中$p_2(x)$满 足3点插值条件，

而 $f(x)=p_3(x)+r_3(x)$，其中$p_3(x)$也满足3点插值条件，

$$f(x)-p_3(x)=r_3(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx-\int_a^b p_3(x)dx=\int_a^b r_3(x)dx$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}[f(a)+f(\frac{a+b}{2})+f(b)]=\int_a^b r_3dx$$

即$R_2=\int_a^b r_3(x)dx$应该和求积公式的代数精度保持一致 了

构造满足插值条件的$p_3(x)$,(这样的$p_3(x)$很多,特别取*Hermite*）满足:

$$p_3(a)=f(a),p_3(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})$$

$$p_3(b)=f(b),p_3'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2})$$

$\Rightarrow P_3(x)$

此时 $f(x)=p_3(x)+\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-\dfrac{a+b}{2})^2(x-b)$

$$R_2=\frac{f^{(4)}(\xi(\eta))}{4!}\int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0}\underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0}\underbrace{(x-b)}_{\leq 0}\mathrm{d}x$$

由积分第二中值定理可得

$$R_2=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta),\eta\in(a,b)$$

3. **Simpson$\frac{3}{8}$公式, $n=3$的Newton-Cotes公式**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}[f(a)+3f(\frac{2a+b}{3})+3f(\frac{a+2b}{3})+f(b)]$$

截断误差为 $R_3=-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\eta),\eta\in(a,b)$

4. ***Cotes*公式, $n=4$的Newton-Cotes公式**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}[7f(a)+32f(\frac{3a+b}{4})+12f(\frac{a+b}{2})+32f(\frac{a+3b}{4})+7f(b)]$$

截断误差为 $R_4=-\frac{(b-a)^7}{1935360}f^{(6)}(\eta),\eta\in(a,b)$

【例4】 试分别使用梯形公式和 Simpson 公式计算积分 $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$ 的近似值，并估计截断误差。

【解】用梯形公式计算，得

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx \frac{2-1}{2}(e+e^{\frac{1}{2}}) \approx 2.1835$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}, \quad f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x)=(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4})e^{\frac{1}{x}}$$

$\max\limits_{1\le x\le 2} f''(x) = f''(1) = 3 \cdot e \approx 8.1548$

截断误差为 $|R_1| \le \frac{(2-1)^3}{12} \max\limits_{1\le x\le 2} |f''(x)| \approx 0.6796$

用**Simpson**公式，得

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx \approx \frac{2-1}{2}(e+4e^{\frac{1}{1.5}}+e^{\frac{1}{2}}) \approx 2.0263$$

$$f^{(4)}(x) = (\frac{1}{x^8}+\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}+\frac{24}{x^5})e^{\frac{1}{x}}$$

$$\max_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right| = f^{(4)}(1) \approx 198.43$$

截断误差为 $\left|R_2\right| \le \frac{(2-1)^5}{2880}\max_{1\le x\le 2}\left|f^{(4)}(x)\right| \approx 0.06890$

五、Newton-Cotes求积公式的收敛性

Newton – Cotes求积公式不是对所有在 $[a, b]$ 上可积函数都收敛

Newton – Cotes求积公式的数值稳定性是没有保证的.实际中，用得较多的是 $n = 1,2,4$ 的Newton – Cotes求积公式.

小结

(1)理解掌握求积公式的概念及其代数精度的定义，会求插值型积分公式.

(2) 理解Newton – Cotes求积公式的推导及

$n = 1,2,4$的Newton – Cotes求积公式.

几种常用的 Newton-Cotes 公式

1.梯形公式：$n=1$时的$Newton-Cotes$公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

代数精度$=1$

2. Simpson公式：n=2时的Newton-Cotes公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

代数精度$=3$,

3. $Cotes$公式,$n=4$的Newton-Cotes公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}[7f(a)+32f(\frac{3a+b}{4})+12f(\frac{a+b}{2})+32f(\frac{a+3b}{4})+7f(b)]$$

代数精度$=5$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院

作 业

习题6: 2,3,6,7