《抽象代数》
第二次作业

姓名：姜岚曦 学号：19375233
姓名：魏来 学号：20374104
姓名：曹建钬 学号：20375177
姓名：李璞 学号：20376164
姓名：刘灵 学号：21374261

\$1.7：一一映射、变换

1. $A = \{$ 所有 > 0 的数 $\}$，$\bar{A} = \{$ 所有实数 $\}$. 找一个 A 与 $\bar{A}$ 间的一一映射.

解:

定义 $\phi: \quad a \leftrightarrow \lg a$ 是满足要求的一一映射

对于 $\forall a \in A, \exists \bar{a} = \lg a$, 且 $\bar{a} \in \bar{A}$.

对于 $\forall \bar{b} \in \bar{A}, \exists b = e^{\bar{b}} \in A$.

故 ϕ 既为单射，亦为满射，即一一映射.

2. $A = \{$ 所有 ≥ 0 的数 $\}$，$\bar{A} = \{$ 所有实数 $\bar{a}, 0 \leq \bar{a} \leq 1\}$. 找一个 A 到 $\bar{A}$ 的满射.

解:

$\phi: \quad a \to |\sin a|$

对于 $\forall \bar{a} \in \bar{A}, \exists a = |\arcsin \bar{a}| \in A$.

故 ϕ 是一个 A 到 $\bar{A}$ 的满射.

3. 假定 ϕ 是 A 与 $\bar{A}$ 间的一个一一映射，a 是 A 的一个元.

$$\phi^{-1}[\phi(a)] = ? \quad \phi[\phi^{-1}(a)] = ?$$

若 ϕ 是 A 的一个一一变换，这两个问题的回答又该是什么?

解:

- 若 ϕ 是 A 与 $\bar{A}$ 间的一个一一映射，$\phi^{-1}[\phi(a)] = a$，但 a 不一定是 $\bar{A}$ 中的元素，$\phi[\phi^{-1}(a)]$ 未必有意义，除非 $\bar{A} = A$.
- 若 ϕ 是 A 的一个一一变换，则 $\phi^{-1}[\phi(a)] = a$，亦有 $\phi[\phi^{-1}(a)] = a$

\$1.8：同态

1. $A = \{$ 所有实数 $x\}$. A 的代数运算是普通乘法. 以下映射是不是 A 到 A 的一个子集 $\bar{A}$ 的同态满射?

$$a)\ x \to |x| \quad b)\ x \to 2x \quad c)\ x \to x^2 \quad d)\ x \to -x$$

解:

$a)$ $x \to |x|$

首先对 $\forall \bar{a} = |a| \in \bar{A}, \exists a = -\bar{a}$ 或 $\bar{a} \in A$. 即 $a)$ 是一个满射.

对于 $\forall a, b \in A, \bar{a} = |a|, \bar{b} = |b|$.

$a \circ b = ab, \bar{a} \circ \bar{b} = \bar{a}\bar{b} = |a| \cdot |b| = |ab| = \phi(a \circ b)$. 故有 $a \circ b \to \bar{a} \circ \bar{b}$

故 $a)$ 是同态满射

$b)$ $x \to 2x$

显然 $b)$ 也是一个满射.

对于 $\forall a, b \in A, \bar{a} = 2a, \bar{b} = 2b$.

$a \circ b = ab, \bar{a} \circ \bar{b} = 2a \cdot 2b = 4ab \neq \phi(a \circ b) = 2ab$. 式中不等号在 $ab \neq 0$ 时始终成立.

故 $b)$ 不是同态满射

$c)$ $x \to x^2$

显然对 $\forall \bar{a} \in \bar{A}, \exists a = \sqrt{\bar{a}} \in A$. 即 $c)$ 是一个满射.

对于 $\forall a, b \in A, \bar{a} = a^2, \bar{b} = b^2$.

$a \circ b = ab, \bar{a} \circ \bar{b} = a^2b^2 = \phi(a \circ b) = a^2b^2$.

故 $a)$ 是同态满射

$d)$ $x \to -x$

显然 $d)$ 是一个满射.

对于 $\forall a, b \in A, \bar{a} = -a, \bar{b} = -b$.

$a \circ b = ab, \bar{a} \circ \bar{b} = ab \neq \phi(a \circ b) = -ab$. 在 $ab \neq 0$ 时成立.

故 $d)$ 不是同态满射

2. 假定 A 和 $\bar{A}$ 对于代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\circ}$ 来说同态，$\bar{A}$ 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于代数运算 $\bar{\circ}$ 和 $\bar{\bar{\circ}}$ 来说同态. 证明，A 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\bar{\circ}}$ 来说同态.

证明:

对于 $\forall a \in A, \exists \phi_1 : \quad a \to \bar{a}, \bar{a} \in \bar{A}$.

对于 $\forall \bar{b} \in \bar{A}, \exists \phi_2 : \quad \bar{b} \to \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{A}}$.

且有 $\forall a, b \in A$，有 $\phi_1(a \circ b) = \phi_1 a \ \bar{\circ} \ \phi_1 b$

$\forall c, d \in \bar{A}$，有 $\phi_2(c \ \bar{\circ} \ d) = \phi_2 c \ \bar{\bar{\circ}} \ \phi_2 d$.

令 $c = \phi_1 a, d = \phi_1 b$，有 $\phi_1(a \circ b) = c \bar{\circ} d$

即有 $\phi_2(\phi_1(a \circ b)) = \phi_2(\phi_1 a) \bar{\bar{\circ}} \phi_2(\phi_1 b)$

定义从 A 到 $\bar{\bar{A}}$ 的映射 ϕ_3： $a \to \phi_2(\phi_1(a))$.

则可知 A 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于 $\circ$ 和 $\bar{\bar{\circ}}$ 同态.

$1.9：同构、自同构

1. $A=\{a,b,c\}$. 代数运算 $\circ$ 由下表给定

	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

找出所有 A 的一一变换，对于代数运算 $\circ$ 来说，这些一一变换是否都是 A 的自同构?
解:

$$\phi_1:\ a\to b,\ b\to c,\ c\to a$$
$$\phi_2:\ a\to a,\ b\to b,\ c\to c$$
$$\phi_3:\ a\to a,\ b\to c,\ c\to b$$
$$\phi_4:\ a\to b,\ b\to a,\ c\to c$$
$$\phi_5:\ a\to c,\ b\to a,\ c\to b$$
$$\phi_6:\ a\to c,\ b\to b,\ c\to a$$

A 的任意一一变换对于 $\circ$ 而言均是 A 的自同构.

2. $A=\{$ 所有有理数 $\}$. 找一个 A 的对于普通加法来说的自同构 (映射 $x\leftrightarrow x$ 除外).
解:
设 $\{\phi_k\}$ 是 $A\to A$ 的一系列映射.
考虑映射 $\phi_k:\ a\to\bar{a}=ka$，其中 k 是任意不等于 1 的有理数.
对于 $\forall a,b\in A, a\circ b=a+b,\bar{a}=ka,\bar{b}=kb$.
$\phi_k(a\circ b)=k(a+b)=\phi_k(a)\circ\phi_k(b)=ka+kb$
显然，任何形如 ϕ_k 的映射均是一一映射，故都是 A 的自同构.

3*.
解:
假设存在一个一一映射 $\phi:\ A\to\bar{A}$. 使得其为 A 到 $\bar{A}$ 的同构映射.
令 $a\in A,\phi(a)=\bar{a}\in\bar{A}$.

由同构映射, 有 $\phi(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})=\phi(\frac{a}{2})\cdot\phi(\frac{a}{2})$ 成立.
即 $\phi(a)=\phi^2(\frac{a}{2})$
由于 $\bar{A}$ 是有理数集的子集，故 $\phi^2(\frac{a}{2})>0$，即 $\phi(a)>0$ 对任意 $a\in A$ 成立.
意味着任意 $\bar{b}<0$，且 $\bar{b}\in\bar{A}$ 将找不到 ϕ^{-1} 对应的 A 中原象，与 ϕ 是一一映射矛盾，故 ϕ 不存在.

\$1.10：等价关系与集合的分类

1. $A=\{$ 所有实数 $\}$. A 的元间的关系 $>$ 以及 $\geq$ 是不是等价关系?
解:
对于关系 $>$，显然不符合反射律，$\forall a\in A$, 不存在 $a>a$. 故非等价关系
对于关系 $\geq$, 符合反射律: $\forall a\in A$, 有 $a\geq a$ 成立. 不符合对称律: $\forall a,b\in A$ 且 $a\neq b$，$a\geq b$ 与 $b\geq a$ 只能成立其一.
故非等价关系.

2*.
解:
即便满足对称律与推移律. 对于 a 而言，假如不存在一个使得 aRb 成立的 b, 就无法得到 aRa.
反由对称律与推移律的存在无法确保如是的 b 存在.

3. 仿照例 3 规定整数间的关系:

$$a\equiv b(-5)$$

证明你所规定的是一个等价关系，并且找出模 -5 的剩余类.
证明:
反射律：$a\equiv a(-5)$ 显然成立.
对称律：$a\equiv b(-5)\Rightarrow b\equiv a(-5)$ 显然成立.
推移律：$a\equiv b(-5), b\equiv c(-5)\Rightarrow a\equiv c(-5)$，显然成应.
定义 -5 的剩余类 $\{0,1,2,3,4\}$