北京航空航天大學

BEIHANG UNIVERSITY

数学建模（一）

——分羊问题模型

学院：可靠性与系统工程学院

姓名：曹建钬

学号：20375177

分羊问题

摘要

本论文分析了分羊问题的其他两种情况——农民有四个儿子、邻居牵来两只羊，并提供了相应算法得出不定方程的全部可能结果。

问题一中，得到了农民有四个儿子，邻居牵来一只羊时分羊问题故事的全部讲法。

问题二中，得到了农民有三个儿子，邻居牵来两只羊时分羊问题故事的全部讲法。

关键词：分羊问题，不定方程

一、 问题重述

问题一：农民有 n 只羊，大儿子分 1/x，二儿子分 1/y，三儿子分 1/z，小儿子分 1/u，如果邻居牵来 1 只羊参与分羊，则四个儿子能成功分 n 只羊，求出 x , y , z , u , n 的所有可能解。

问题二：农民有 n 只羊，大儿子分 1/x，二儿子分 1/y，小儿子分 1/z，如果邻居牵来 2 只羊参与分羊，则三个儿子能成功分 n 只羊，求出 x , y , z , n 的所有可能解。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

想要得到所有可能得结果需要列方程求解。

题目给出条件如下：

一、农民有 n 只羊，n 为未知正整数

二、农民要求大儿子分 1/x，二儿子分 1/y，三儿子分 1/z，小儿子分 1/u。则 x，y，z，u 为 4 个未知的正整数，在这 4 个正整数中，因为 1>1/x>1/y>1/z>1/u，所以 1<x<y<z<u

三、再牵来 1 只羊后，羊就能够分配了，说明 x，y，z，u 都能整除 n+1

四、4 个儿子分过以后还剩 1 只羊

根据这些条件，可以找到等量关系列出方程。大儿子分得（n+1）/x 只，二儿子分得（n+1）/y 只，三儿子分得（n+1）/z 只，小儿子分得（n+1）/u 只，四个儿子共分得 n 只羊,则列出如下方程：

$$\frac{n+1}{x}+\frac{n+1}{y}+\frac{n+1}{z}+\frac{n+1}{u}=n$$

令$w=n+1$，则方程可化为：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{w}=1$$

这里，x，y，z，u，w 都必须是正整数，而且还必须满足两个条件：

① $x<y<z<u\leq w$

② x，y，z，u 都能整除 w

此为不定方程，有五个未知数，两个约束条件，方程不只有一个解。

2.2 问题二的分析

想要得到所有可能得结果需要列方程求解。

题目给出条件如下：

一、农民有 n 只羊，n 为未知正整数

二、农民要求大儿子分 1/x，二儿子分 1/y，小儿子分 1/z。则 x，y，z 为 3 个未知的正整数，在这 3 个正整数中，因为 1>1/x>1/y>1/z，所以 1<x<y<z

三、再牵来 2 只羊后，羊就能够分配了，说明 x，y，z 都能整除 n+2

四、4 个儿子分过以后还剩 2 只羊

根据这些条件，可以找到等量关系列出方程。大儿子分得（n+2）/x 只，二儿子分得（n+2）/y 只，小儿子分得（n+2）/z 只，三个儿子共分得 n 只羊,则列出如下方程：

$$\frac{n+2}{x}+\frac{n+2}{y}+\frac{n+2}{z}=n$$

令$w=n+2$，则方程可化为：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{2}{w}=1$$

这里，x，y，z，w 都必须是正整数，而且还必须满足两个条件：

① $x<y<z\leq w$

②x，y，z 都能整除 w

此为不定方程，有四个未知数，两个约束条件，方程不只有一个解。

三、 符号说明

问题一和问题二的符号说明如表格 1、表格 2 所示

表格 1：问题一符号说明

符号	说明
x	大儿子分 1/x
y	二儿子分 1/y
z	三儿子分 1/z

u	小儿子分 1/u
n	农民拥有 n 只羊
w	n+1

表格 2：问题二符号说明

符号	说明
x	大儿子分 1/x
y	二儿子分 1/y
z	小儿子分 1/z
n	农民拥有 n 只羊
w	n+2

四、 模型的建立与求解

4.1 问题一模型及求解

4.1.1 模型

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{w}=1$$

满足：

$$x<y<z<u\leq w$$

x，y，z，u 都能整除 w

求解 x，y，z，w。

4.1.2 模型的求解

解不定方程可以先根据一部分条件，选出符合要求的，然后再根据其他条件，淘汰不符合要求的，留下符合要求的，最后就可以把 x，y，z，u，w 全部求出来。

1、首先根据 x，y，z，u，w 都是正整数且有$x<y<z<u\leq w$，可以得到：

$$\begin{cases} x>1 \\ \dfrac{5}{x}>1 \end{cases}$$

则 x 只能取 2,3,4

2、分别讨论当$x=2$，$x=3$，$x=4$，时：

$$\begin{cases} y > x \\ y > \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} \\ y < \dfrac{4}{1-\frac{1}{x}} \end{cases}$$

对于每个可能的 y（如$x = 2$时，$2 < y < 8$，则 y 分别取 3,4,5,6,7）进行讨论 z 的取值范围：

$$\begin{cases} z > y \\ z > \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \\ z < \dfrac{3}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \end{cases}$$

对于每个可能的 z（如$x = 2$，$y = 3$时，$6 < z < 18$,则 z 分别取 7~17 的整数）进行讨论 u 的取值范围：

$$\begin{cases} u > z \\ u > \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}} \\ u \le \dfrac{2}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}} \end{cases}$$

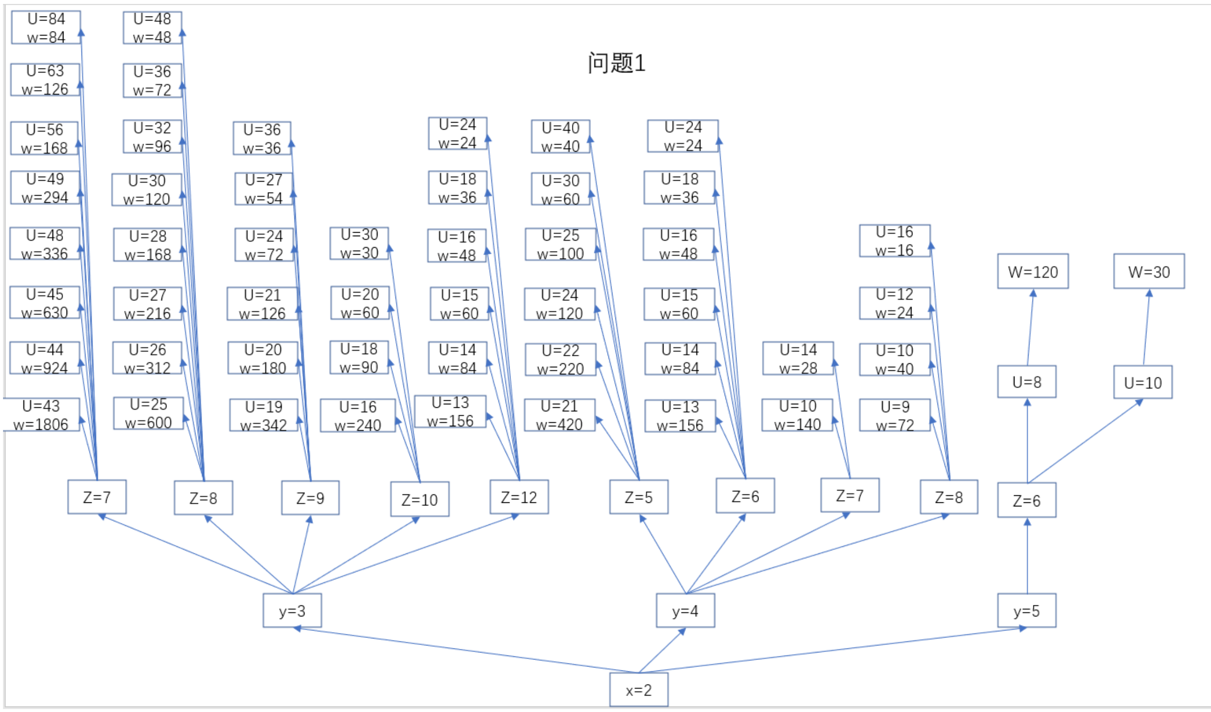
对于每个可能的 u（如$x = 2$，$y = 3$，$z = 7$时$42 < u \le 84$,则 u 分别取 43~84 之间的整数）：

可由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{w}=1$计算出对应的 w（如$x = 2$，$y = 3$，$z = 7$，$u = 43$时, $w = 1806$）

将按照这个步骤可以得到的数据依次进行检验，选出每个除以 x，y，z，u 得到整数的 w。

由于数据量太大，这里利用 Visual Studio 编写了以循环-判断结构为主体的程序，代码逻辑和上面分析讨论的逻辑相似（具体代码和运行结果见附录一）。

采用树结构描述结果如下：



此方程有 52 组解，故这个故事一共有 52 种讲法：

（x，y，z，u，n）可以等于(2, 3, 7, 43, 1805)，(2, 3, 7, 44, 923)，(2, 3, 7, 45, 629)，(2, 3, 7, 48, 335)，(2, 3, 7, 49, 293)，(2, 3, 7, 56, 167)，(2, 3, 7, 63, 125)，(2, 3, 7, 84, 83)，(2, 3, 8, 25, 599)，(2, 3, 8, 26, 311)，(2, 3, 8, 27, 215)，(2, 3, 8, 28, 167)，(2, 3, 8, 30, 119)，(2, 3, 8, 32, 95)，(2, 3, 8, 36, 71)，(2, 3, 8, 48, 47)，(2, 3, 9, 19, 341)，(2, 3, 9, 20, 179)，(2, 3, 9, 21, 125)，(2, 3, 9, 24, 71)，(2, 3, 9, 27, 53)，(2, 3, 9, 36, 35)，(2, 3, 10, 16, 239)，(2, 3, 10, 18, 89)，(2, 3, 10, 20, 59)，(2, 3, 10, 30, 29)，(2, 3, 12, 13, 155)，(2, 3, 12, 14, 83)，(2, 3, 12, 15, 59)，(2, 3, 12, 16, 47)，(2, 3, 12, 18, 35)，(2, 3, 12, 24, 23)，(2, 4, 5, 21, 419)，(2, 4, 5, 22, 219)，(2, 4, 5, 24, 119)，(2, 4, 5, 25, 99)，(2, 4, 5, 30, 59)，(2, 4, 5, 40, 39)，(2, 4, 6, 13, 155)，(2, 4, 6, 14, 83)，(2, 4, 6, 15, 59)，(2, 4, 6, 16, 47)，(2, 4, 6, 18, 35)，(2, 4, 6, 24, 23)，(2, 4, 7, 10, 139)，(2, 4, 7, 14, 27)，(2, 4, 8, 9, 71)，(2, 4, 8, 10, 39)，(2, 4, 8, 12, 23)，(2, 4, 8, 16, 15)，(2, 5, 6, 8, 119)，(2, 5, 6, 10, 29)

4.2 问题二模型及求解

4.2.1 模型

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{2}{w}=1$$

满足：

$$x < y < z \le w$$

x，y，z 都能整除 w

求解 x，y，z，w。

4.2.2 模型的求解

同样为不定方程的求解问题，求解步骤与问题一类似：

1、首先根据 x，y，z， w 都是正整数且有$x < y < z \le w$，可以得到：

$$\begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{5}{x} > 1 \end{cases}$$

则 x 只能取 2,3,4

2、分别讨论当$x = 2$，$x = 3$，$x = 4$时：

$$\begin{cases} y > x \\ y > \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}} \\ y < \dfrac{4}{1 - \dfrac{1}{x}} \end{cases}$$

对于每个可能的 y（如$x = 2$时，$2 < y < 8$，则 y 分别取 3,4,5,6,7）进行讨论 z 的取值范围：

$$\begin{cases} z > y \\ z > \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} \\ z \le \dfrac{3}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} \end{cases}$$

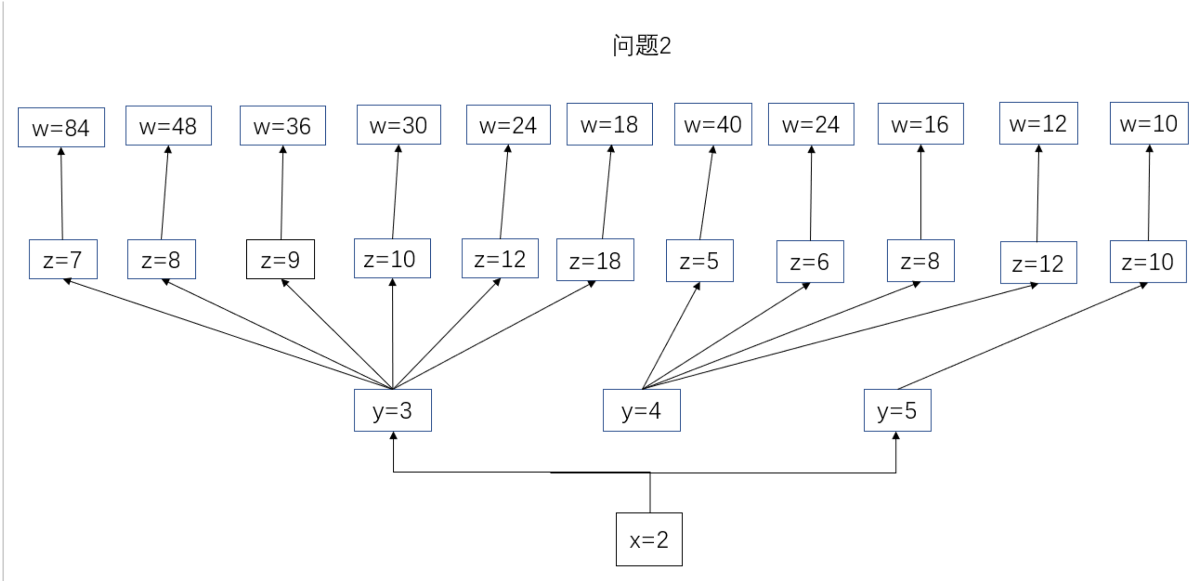
对于每个可能的 z（如$x = 2$，$y = 3$时，$6 < z \le 18$,则 z 分别取 7~18 的整数)：

可由$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{2}{w} = 1$计算出对应的 w（如$x = 2$，$y = 3$，$z = 7$时,$w = 84$）

将按照这个步骤可以得到的数据依次进行检验，选出每个除以 x，y，z 得到整数的 w。

这里同样利用 Visual Studio 编写了以循环-判断结构为主体的程序，代码逻辑和上面分析讨论的逻辑相似（具体代码和运行结果见附录二）。

采用树结构描述结果如下：



此方程一共有 11 组，故这个故事有 11 种讲法：

（x，y，z，n）可以为：(2, 3, 7, 82)，(2, 3, 8, 46)，(2, 3, 9, 34)，(2, 3, 10, 28)，(2, 3, 12, 22)，(2, 3, 18, 16)，(2, 4, 5, 38)，(2, 4, 6, 22)，(2, 4, 8, 14)，(2, 4, 12, 10)，(2, 5, 10, 8)

五、 模型的评价、改进与推广

5. 1 模型的优点

该模型为分羊问题建立了数学模型——不定方程的求解，并提供了对应代码对求解步骤进行自动化。

5. 2 模型的缺点

可以看出问题一和问题二代码重复性很高，同时，有几个儿子意味着需要几次循环，但循环次数过多会导致算法复杂度指数级增长，严重影响运行速度。

5. 3 模型的改进

可以将问题一、问题二的解题代码整合，对外只提供儿子数量和邻居牵来几只羊的接口，从而减少重复性，提高算法的适用性。

不定方程形式类似于埃及分数求和，现有迭代深搜的算法可以借鉴以优化求解过程。

5. 4 模型的推广

这两个问题分别改动了最原始的分羊问题：“从前有个农民，他有 17 只羊。他要把羊分给 3 个儿子。他说：大儿子分一半，二儿子分 1/3，小儿子分 1/9，但不允许把羊杀死或者卖掉。怎么分？”中问题设计中的变量——农民儿子的数量和分羊问题答案：邻

居牵来几只羊。

进一步地，可以设定任意数量儿子和牵来几只羊参与分羊作为问题的答案，并通过更改算法中的循环层数和参数得到相应的分羊比例。这样分羊问题就可以彻底解决。

同时，此模型也为类似的不定方程求解问题提供了一种通用的分析思路和解法。

附录一（问题一算法及结果）

```
#include<iostream>
using namespace std;
double max(double a, double b)
{
    if (a > b)
    {
        return a;
    }
    else
    {
        return b;
    }
}
//向下取整
double quzheng(double a)
{
    if (a == int(a))  return int(a);
    else if (a<int(a + 1) && a>int(a + 1) - 1e-8)  return int(a + 1);
    else if (a > int(a) && a < int(a) + 1e-8) return int(a);
    else return int(a);
}
int doubleisint(double a, double b)
{
    if (fabs(a / b - (int)(a / b)) < 1e-8)
        return 1;
    else if (fabs(a / b - 1 - (int)(a / b)) < 1e-8)
        return 1;
    else if (fabs(a / b + 1 - (int)(a / b)) < 1e-8)
        return 1;
    else
        return 0;
}
int main()
{
    double x, y, z, u, w;
    cout << "问题一解法" << endl;
    for (x = 2; x < 5; x++)
    {
        double y1 = 1 / (1 - 1 / x);
        double y2 = 4 / (1 - 1 / x);
        for (y = max(quzheng(y1) + 1, x + 1); y < quzheng(y2); y++)
        {
            double z1 = 1 / (1 - 1 / x - 1 / y);
            double z2 = 3 / (1 - 1 / x - 1 / y);
            for (z = max(quzheng(z1) + 1, y + 1); z < quzheng(z2); z++)
            {
                double u1 = 1 / (1 - 1 / x - 1 / y - 1 / z);
                double u2 = 2 / (1 - 1 / x - 1 / y - 1 / z);
                for (u = max(quzheng(u1) + 1, z + 1); u <= quzheng(u2); u++)
                {
```

```
                    w = 1 / (1 - 1 / x - 1 / y - 1 / z - 1 / u);
                    if (doubleisint(w, x) && doubleisint(w, y) && doubleisint(w, z) && doubleisint(w, u))
                    {
                        cout << "(" << x << " " << y << " " << z << " " << u <<" " << w << ")" << endl;
                    }
                }
            }
        }
    }
    system("pause");
    return 0;
}
```

输出结果：

```
问题一解法
(2 3 7 43 1806) (2 3 7 44 924) (2 3 7 45 630) (2 3 7 48 336) (2 3 7 49 294) (2 3 7 56 168) (2 3 7 63 126)
(2 3 7 84 84) (2 3 8 25 600) (2 3 8 26 312) (2 3 8 27 216) (2 3 8 28 168) (2 3 8 30 120) (2 3 8 32 96)
(2 3 8 36 72) (2 3 8 48 48) (2 3 9 19 342) (2 3 9 20 180) (2 3 9 21 126) (2 3 9 24 72) (2 3 9 27 54)
(2 3 9 36 36) (2 3 10 16 240) (2 3 10 18 90) (2 3 10 20 60) (2 3 10 30 30) (2 3 12 13 156) (2 3 12 14 84)
(2 3 12 15 60) (2 3 12 16 48) (2 3 12 18 36) (2 3 12 24 24) (2 4 5 21 420) (2 4 5 22 220) (2 4 5 24 120)
(2 4 5 25 100) (2 4 5 30 60) (2 4 5 40 40) (2 4 6 13 156) (2 4 6 14 84) (2 4 6 15 60) (2 4 6 16 48)
(2 4 6 18 36) (2 4 6 24 24) (2 4 7 10 140) (2 4 7 14 28) (2 4 8 9 72) (2 4 8 10 40) (2 4 8 12 24)
(2 4 8 16 16) (2 5 6 8 120) (2 5 6 10 30)
```

附录二（问题二算法及结果）

```
#include<iostream>
using namespace std;
double max(double a, double b)
{
    if (a > b)
    {
        return a;
    }
    else
    {
        return b;
    }
}
//向下取整
double quzheng(double a)
{
    if (a == int(a))  return int(a);
    else if (a<int(a + 1) && a>int(a + 1) - 1e-8)  return int(a + 1);
```

```
    else if (a > int(a) && a < int(a) + 1e-8) return int(a);
    else return int(a);
}
int doubleisint(double a, double b)
{
    if (fabs(a / b - (int)(a / b)) < 1e-8)
        return 1;
    else if (fabs(a / b - 1 - (int)(a / b)) < 1e-8)
        return 1;
    else if (fabs(a / b + 1 - (int)(a / b)) < 1e-8)
        return 1;
    else
        return 0;
}
int main()
{
    double x, y, z, w;
    cout << "问题二解法" << endl;
    for (x = 2; x < 5; x++)
    {
        double y1 = 1 / (1 - 1 / x);
        double y2 = 4 / (1 - 1 / x);
        for (y = max(quzheng(y1) + 1, x + 1); y < quzheng(y2); y++)
        {
            double z1 = 1 / (1 - 1 / x - 1 / y);
            double z2 = 3 / (1 - 1 / x - 1 / y);
            for (z = max(quzheng(z1) + 1, y + 1); z <= quzheng(z2); z++)
            {
                w = 2 / (1 - 1 / x - 1 / y - 1 / z);
                if (doubleisint(w, x) && doubleisint(w, y) && doubleisint(w, z))
                {
                    cout << "(" << x << " " << y << " " << z << " " << w << ")"
<< endl;
                }
            }
        }
    }
    system("pause");
    return 0;
}
```

输出结果:

```
问题二解法
(2 3 7 84)
(2 3 8 48)
(2 3 9 36)
(2 3 10 30)
(2 3 12 24)
(2 3 18 18)
(2 4 5 40)
(2 4 6 24)
(2 4 8 16)
(2 4 12 12)
(2 5 10 10)
```

数学建模（二）

——存贮模型

学院：可靠性与系统工程学院

姓名：曹建钬

学号：20375177

存贮模型

摘要

本论文证明了在建立不允许缺货和允许缺货的存贮模型时，即使在总费用中增加生产费用，重新确定的最优生产周期和产量与原来的一样。同时还建立了一种更贴近现实生活的情况——生产能力有限的存贮模型。

问题一中，提供了不考虑生产费用的理论依据。

问题二中，得到了生产能力有限时的存贮模型（包括不允许缺货和允许缺货）。

关键词：存贮模型，最优生产周期，最优产量

一、问题重述

存贮模型是研究批量生产计划的重要理论基础，课程中已经建立了不允许缺货的存储模型（如图 1)，每天总费用的平均值（目标函数）为：

$$C(T)=\frac{c_1}{T}+c_2rT/2$$

最优生产周期$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$，产量$Q=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$

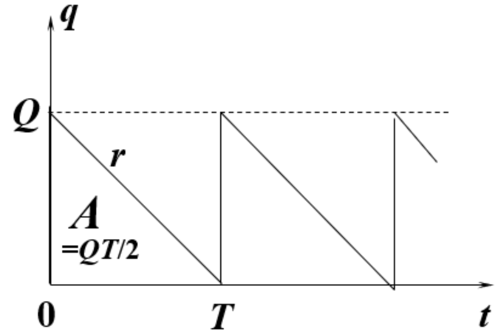


图 1：不允许缺货模型的贮存量 q(t)

以及允许缺货的存储模型（如图 2)，每天总费用的平均值（目标函数）为：

$$C(T,Q)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2Q^2}{2rT}+\frac{c_3(rT-Q)^2}{2rT}$$

最优生产周期$T'=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$，每周期初存贮量$Q'=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$，每周期的生产量$R=rT'=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$

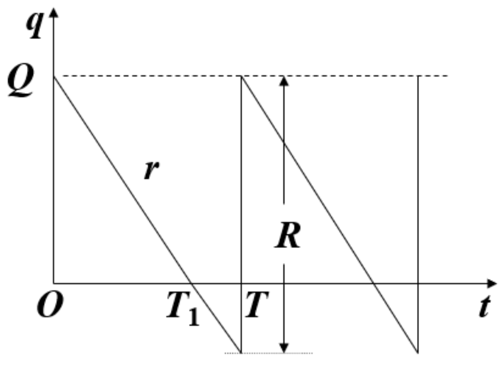


图 2：允许缺货模型的贮存量 q(t)

问题一: 为什么在建模中未考虑生产费用,在什么条件下可以不考虑生产费用的影响。

问题二：原模型的建模中假设生产能力为无限大(生产时间不计)，如果生产能力有限(是大于需求量的常数),改动假设并建立相应的模型。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

生产费用与产品产量成正比（需要注意的是一件产品的生产费用不会随着存贮时间的延长而增加，而一件产品的贮存费总额与时间成正比）。

对于不允许缺货模型和允许缺货模型来说，考虑成产费用，则原目标函数有一个增量：$\frac{一个周期内总生产费用}{生产周期}$。

对于不允许缺货模型来说，一个周期内总生产费用为一个周期内产量乘以单个产品生产费用。而生产周期等于一个周期内产量除以每日需求量，可以看出，该增量等于：*单个产品生产费用*$\times$*每日需求量*，为一个常量，因此对目标函数取最优解时变量对应的值没有影响。

对于允许缺货模型来说，一个周期内总生产费用为一个周期内产量（图 2 中的 R）乘以单个产品生产费用。而生产周期等于一个周期内产量（R）除以每日需求量，可以看出，该增量同样等于：*单个产品生产费用*$\times$*每日需求量*，为一个常量，因此对目标函数取最优解时变量对应的值也没有影响。

2.2 问题二的分析

生产能力有限意味着生产速度为一个有限常数，同时每日生产量大于每日需求量（生产速率大于销售速率）。

对于不允许缺货模型而言，一个周期开始的一段时间一边生产一边售卖，存贮量与时间成正比，后来的一段时间只售卖不生产，直到存贮量降为零，这两段时间共同构成一个周期。

对于允许缺货模型而言，一个周期 T 内有两种情况：第一种为开始的一段时间一边生产一边售卖，中间一段时间只售卖不生产直到缺货到一定数量，最后一段时间生产并售卖至不再缺货，全过程如图 3 所示；另一种情况为开始的一段时间只售卖，中间一段时间一边售卖一边生产直到存货到一定数量，最后一段时间只售卖不生产到存贮量为零，全过程如图 4 所示。进一步分析，假设第一种情况取最优解时，一个周期中间阶段 T_1 时贮存量为零。由图 5 可以看出，第一种情况

得到的最优周期再往后延伸 T_1 的贮存过程完全等同于第二种情况得到的最优周期往前提前 T_1 的贮存过程，换句话说，这两种情况得到的周期的最优解完全相同。下文只考虑第一种情况（图 3）。

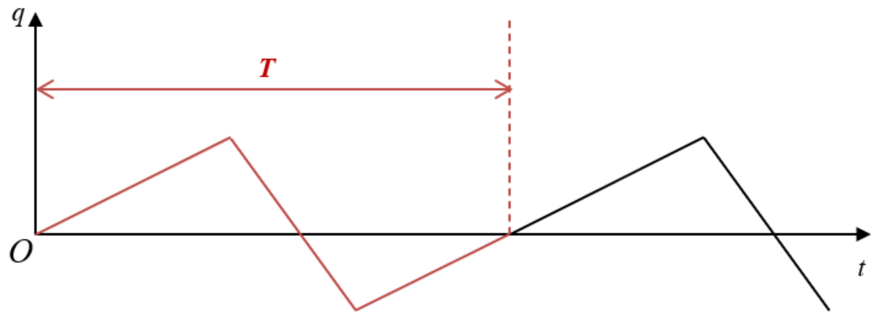


图 3：周期后段缺货

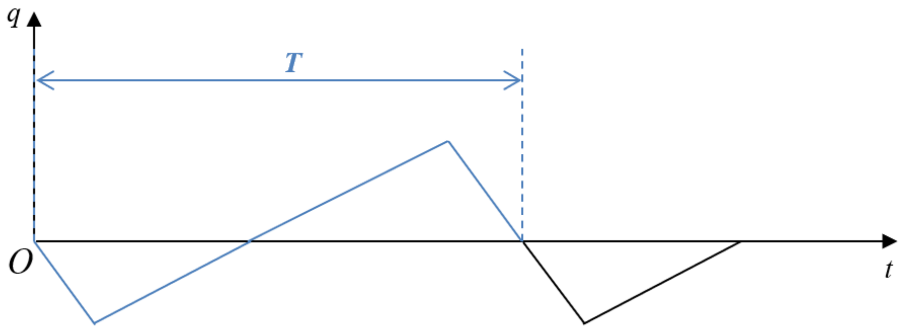


图 4：周期前段缺货

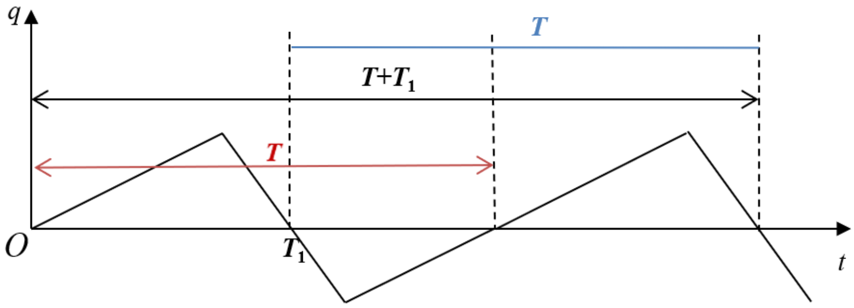


图 5：$T+T_1$

三、 模型假设

1．为了处理和分析的方便，考虑连续模型，即设生产周期 T 和每周期初贮存量 Q 均为连续量。

2．产品每天的需求量为常数 r。

3．每次生产的准备费为 c_1，每天每件产品贮存费为 c_2。

4．若生产时间不计且不允许缺货：T 天(一周期)生产一次, 每次生产 Q 件，当贮存量降为零时，Q 件产品立即生产出来。生产时间不计且允许缺货：T 天(一周期)生产一次, 每次生产 R 件，$t = T_1$时，存贮量降为零，$t = T$时 R 件产品立即生产出来以补足缺货量，最终使得周期初贮存量为 Q，每天每件缺货损失费 c_3，缺货需补足。

5．若生产时间有限，设生产速率为常数 k，k>r。当不允许缺货时，在每个生产周期 T 内，$0 < t < T_0$时一边生产一边销售，$T_0 < t < T$时只销售不生产；当允许缺货时，$0 < t < T'$时一边生产一边销售，$T' < t < T_1$时只销售不生产，$t = T_1$时存贮量刚好为零，$T_1 < t < T''$时只销售不生产且开始缺货，$T'' < t < T$时一边生产一边销售，$t = T$时存贮量为零，每天每件缺货损失费 c_3。

6．每件产品的生产费用为 k。

四、 符号说明

问题一和问题二的符号说明如表格 1、表格 2 所示

表格 1：问题一符号说明

符号	说明
Q	每周期初的存贮量
T	周期
r	产品每天的需求量
c_1	每次生产的准备费
c_2	每天每件产品贮存费
c_3	每天每件缺货损失费
k	每天产品生产费用
T_1	允许缺货模型每个周期内存贮量降为零的时刻
R	允许缺货模型每个周期的生产量

表格 2：问题二符号说明

符号	说明
k	生产速率
r	产品每天的需求量

T	周期
T_0	不允许缺货模型中 $t=T_0$ 时停止生产
T'	允许缺货模型中 t=T'时停止生产
T_1	允许缺货模型中 $t=T_1$ 时存贮量降为零
T''	允许缺货模型中 t=T''时重新开始生产
c_1	每次生产的准备费
c_2	每天每件产品贮存费
c_3	每天每件缺货损失费

五、 模型的建立与求解

5.1 问题一模型及求解

5.1.1 考虑生产费用的不允许缺货的存贮模型的建立

将贮存量表示为时间 t 的函数$q(t)$,$t=0$时生产 Q 件，存贮量$q(0)=Q$,$q(t)$以需求速率 r 递减，直到$q(T)=0$，如图 1。

显然有$Q=rT$

则一个周期的总费用为：

$$\tilde{C}=c_1+\frac{c_2QT}{2}+kQ=c_1+\frac{c_2rT^2}{2}+krT$$

则每天的平均费用为$C(T)=\frac{\tilde{C}}{T}=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2rT}{2}+kr$

5.1.2 考虑生产费用的不允许缺货的存贮模型的求解

要求$C(T)$最小，令$\frac{dc(T)}{dT}=0$

可得$T=\sqrt{\frac{2c_1}{c_2r}}$，$Q=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$与不考虑生产费用的不允许缺货的存贮模型的最优生产周期和产量相等。

5.1.3 考虑生产费用的允许缺货的存贮模型的建立

因存贮量不足导致缺货时，可以认为存贮量函数$q(t)$为负值，当$t=T_1$时$q(t)=0$，如图 2。于是有$Q=rT_1$，在 T_1 到 T 这段缺货时段内需求率 r 不变，$q(t)$按原斜率继续下降。由于规定缺货量需补足，所以在$t=T$时数量为 R 的产品立即到达，使下周期初的存贮量恢复到 Q，于是有$R=rT$。

则一个周期的总费用为：

$$\tilde{C} = c_1 + \frac{c_2 Q T_1}{2} + \frac{c_3 r (T-T_1)^2}{2} + kR$$

则每天的平均费用为$C(T,Q) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 Q^2}{2rT} + \frac{c_3 (rT-Q)^2}{2rT} + kr$

5.1.4 考虑生产费用的允许缺货的存贮模型的求解

要求$C(T,Q)$最小，联立：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C(T,Q)}{\partial T} = 0 \\ \dfrac{\partial C(T,Q)}{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

可得最优生产周期$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$，每周期初存贮量$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$，每周期的生产量$R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$

与不考虑生产费用的允许缺货模型的最优生产周期和产量相等。

综上，建模中是否考虑生产费用对不允许缺货和允许缺货模型的最优生产周期、产量和周期初存贮量均无影响。因此本文在问题二中不考虑生产费用。

5.2 问题二模型的建立及求解

5.2.1 生产能力有限时不允许缺货的存贮模型的建立

存贮量表示为时间 t 的函数 q(t)，在$0 < t < T_0$时，q(t)以积累速度$k - r$递增，在$T_0 \le t \le T$时，q(t)以需求速率 r 递减，直到$q(T) = 0$，如图 6。

由$q(T_0) = (k-r)T_0 = r(T-T_0)$，可得$T_0 = \frac{rT}{k}$，则$q(T_0) = \frac{r(k-r)T}{k}$。

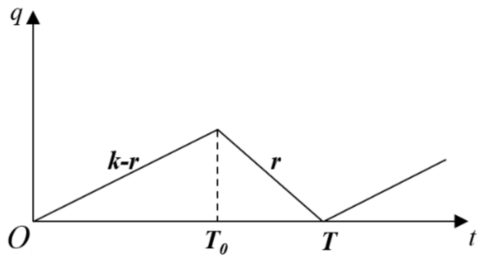


图 6:生产能力有限且不允许缺货的存贮量 q(t)

则$\tilde{C} = c_1 + \frac{c_2 T q(T_0)}{2} = c_1 + \frac{c_2 r (k-r) T^2}{2k}$

则每天的平均费用为$C(T) = \frac{\tilde{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r(k-r)T}{2k}$

5.2.2 生产能力有限时不允许缺货的存贮模型的求解

要使得$C(T)$最小，令$\frac{dc(T)}{dT}=0$

可得最优生产周期$T=\sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$，此时应在$T_0=\frac{rT}{k}=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2k(k-r)}}$时停止生产。

5.2.3 生产能力有限时允许缺货的存贮模型的建立

存贮量表示为时间 t 的函数 q(t)，在$0<t<T'$时，q(t)以积累速度$k-r$递增，在$T'\le t\le T''$时，q(t)以需求速率 r 递减，其中有$q(T_1)=0$，在$T''<t<T$时，q(t)再次以积累速度$k-r$递增，如图 7。

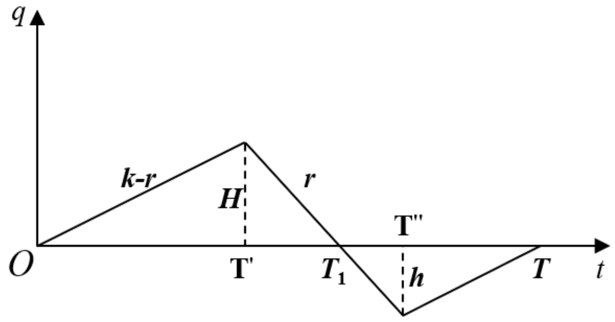


图 7：生产能力有限时允许缺货的存贮量 q(t)

由$H=q(T')=(k-r)T'=r(T_1-T')$，可得$T'=\frac{rT_1}{k}$，则$H=q(T')=\frac{r(k-r)T_1}{k}$。

同时，根据上下两三角形相似，得到比例关系：

$$\frac{h}{H}=\frac{T-T_1}{T_1}$$

则$h=q(T'')=\frac{r(k-r)(T-T_1)}{k}$

不妨令$\frac{T_1}{T}=\lambda$

则$\tilde{C}=c_1+\frac{c_2HT_1}{2}+\frac{c_3h(T-T_1)}{2}=c_1+\frac{r(k-r)}{k}\frac{T^2}{2}[c_2\lambda^2+c_3(1-\lambda)^2]$

则每天的平均费用为$C(T,\lambda)=\frac{\tilde{C}}{T}=\frac{c_1}{T}+\frac{r(k-r)T}{2k}[c_2\lambda^2+c_3(1-\lambda)^2]$

5.2.4 生产能力有限时允许缺货的存贮模型的求解

对于双变量的表达式$C(T,\lambda)$，要想使得其最小，联立

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C(T,\lambda)}{\partial T}=0\\ \dfrac{\partial C(T,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases}$$

可得：

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{c_3}{c_2+c_3} \\ T = \sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}\dfrac{(c_2+c_3)}{c_3}} \end{cases}$$

令$\mu = \sqrt{\frac{(c_2+c_3)}{c_3}}$

则：

$$\begin{cases} T' = \dfrac{r}{k}\dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}} \\ T_1 = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}} \\ T'' = (\dfrac{c_2}{c_3}\dfrac{k-r}{k}+1)\dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}} \\ T = \mu\sqrt{\dfrac{2c_1k}{c_2r(k-r)}} \end{cases}$$

六、 模型的分析

对于问题一，本论文已经给出了明确的回答——在模型建立时无需考虑生产费用的影响，这里主要对问题二建立的两个新的模型（这里命名为模型一、模型二）进行分析。

6.1 成产能力有限时不允许缺货的存贮模型的分析

6.1.1 定性分析

最优生产周期$T = \sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$，$T_0 = \frac{rT}{k} = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2k(k-r)}}$（*k>r>0*）

$c_1\uparrow$带来$T\uparrow$，$T_0\uparrow$

$c_2\uparrow$带来$T\downarrow$，$T_0\downarrow$

$k\uparrow$带来$T\downarrow$，$T_0\downarrow$

$r\uparrow$带来$T_0\uparrow$，当$0<r<\frac{k}{2}$时，$r\uparrow$带来$T\downarrow$；当$\frac{k}{2}\le r<k$时，$r\uparrow$带来$T\uparrow$

6.1.2 敏感度分析

这里进一步分析参数 c_1，c_2，k，r 的微小变化对生产周期 T 的影响。

（1） T 对 c_1 的(相对)敏感度：

$$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{dT}{dc_1}\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}$$

c_1 增加 1%, T 增加 0.5%

（2） T 对 c_2 的(相对)敏感度：

$$S(T,c_2)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_2/c_2}\approx\frac{dT}{dc_2}\frac{c_2}{T}=-\frac{1}{2}$$

c_2 增加 1%，T 减少 0.5%

（3） T 对 k 的(相对)敏感度：

$$S(T,k)=\frac{\Delta T/T}{\Delta k/k}\approx\frac{dT}{dk}\frac{k}{T}=-\frac{r}{2(k-r)}$$

（4） T 对 r 的(相对)敏感度：

$$S(T,r)=\frac{\Delta T/T}{\Delta r/r}\approx\frac{dT}{dr}\frac{r}{T}=-\frac{1}{2}\frac{(k-2r)}{(k-r)}$$

6.2 成产能力有限时允许缺货的存贮模型的分析

6.2.1 定性分析

最优生产周期$T=\sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}\frac{(c_2+c_3)}{c_3}}$，$\mu=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\sqrt{\frac{(c_2+c_3)}{c_3}}$（$k>r>0$）

$c_1\uparrow$带来$T\uparrow$

$c_2\uparrow$带来$T\downarrow$，$\mu\uparrow$

$c_3\uparrow$带来$T\downarrow$，$\mu\downarrow$

$k\uparrow$带来$T\downarrow$

当$0<r<\frac{k}{2}$时，$r\uparrow$带来$T\downarrow$；当$\frac{k}{2}\leq r<k$时，$r\uparrow$带来$T\uparrow$

6.2.2 敏感度分析

这里进一步分析参数 c_1，c_2，c_3，k，r 的微小变化对生产周期 T 的影响。

（1）T 对 c_1 的(相对)敏感度：

$$S(T,c_1)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_1/c_1}\approx\frac{dT}{dc_1}\frac{c_1}{T}=\frac{1}{2}$$

c_1 增加 1%, T 增加 0.5%

（2）T 对 c_2 的(相对)敏感度：

$$S(T,c_2)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_2/c_2}\approx\frac{dT}{dc_2}\frac{c_2}{T}=-\frac{1}{2}\frac{c_3}{c_2}$$

（3）T 对 c_3 的(相对)敏感度：

$$S(T,c_3)=\frac{\Delta T/T}{\Delta c_3/c_3}\approx\frac{dT}{dc_3}\frac{c_3}{T}=-\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_3}$$

（4）T 对 k 的(相对)敏感度：

$$S(T,k)=\frac{\Delta T/T}{\Delta k/k}\approx\frac{dT}{dk}\frac{k}{T}=-\frac{r}{2(k-r)}$$

（5）T 对 r 的(相对)敏感度：

$$S(T,r)=\frac{\Delta T/T}{\Delta r/r}\approx\frac{dT}{dr}\frac{r}{T}=-\frac{1}{2}\frac{(k-2r)}{(k-r)}$$

6.3 两个模型的联系

前面已经得到了模型一的最优生产周期$T^{(1)}=\sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$，停止生产时间为$T_0=\frac{rT}{k}=\sqrt{\frac{2c_1r}{c_2k(k-r)}}$。

而模型二的最优生产周期$T^{(2)}=\mu\sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$,停止生产的时刻为$T'=\frac{r}{k}\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$,再次启动生产的时刻为$T''=(\frac{c_2}{c_3}\frac{k-r}{k}+1)\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2c_1k}{c_2r(k-r)}}$，其中$\mu=\sqrt{\frac{(c_2+c_3)}{c_3}}$。

从中可以发现$T^{(2)}=\mu T^{(1)}$,$T'=\frac{T_0}{\mu}$

同时，$\lim\limits_{c_3\to\infty}\mu=1$，则$\lim\limits_{c_3\to\infty}T^{(2)}=T^{(1)}$，$\lim\limits_{c_3\to\infty}T'=T_0$，$\lim\limits_{c_3\to\infty}T''=T$，意味着当 c_3 趋近于无穷大时，模型二逼近于模型一。

其实这并不难理解，c_3 代表着缺货的损失，当损失无穷大，也就是说缺货间接减少的存贮费用在缺货的直接损失面前不值一提，那么，就不应该容许缺货的发生，这恰恰就是模型一的假设。

七、 模型的评价、改进与推广

7.1 模型的优点

模型考虑了更贴近于实际生产生活的情况——生产能力有限，并对允许缺货和不予许缺货这两种情况作出讨论，并找到了两者间的联系。

7.2 模型的缺点

模型假设了每日的需求量是常数，但在实际生活中，每日的需求量更接近于一个随机变量，本模型并未考虑其为随机变量的可能。

7.3 模型的改进

可以假设每日的需求量$r \sim N(\mu，\sigma^2)$，利用回归分析的办法求出一个周期内的费用的数学期望$E(\tilde{C})$，再得到$E(\frac{\tilde{C}}{T})$并对其最优化问题进行讨论。

7.4 模型的推广

成产能力有限的存贮模型同样适用于订货能力有限的订货供应情况。

数学建模（三）

——效用函数综述

学 院 ： 可 靠 性 与 系 统 工 程 学 院

姓 名 ： 曹 建 钦

学 号 ： 20375177

摘要

效用函数诞生于经济学中的最优化原理，把对商品主观、感性的偏爱提升为满足生理、心理需求的效率,将效用转化为经济行为，旨在通过效用函数这个数学模型帮助决定商品的选择，是具有现实意义的。本文搜集并整理了常用的效用函数理论和一些适用于特定场景的效用函数供参考。

关键词：效用函数

引言

效用函数通常表示消费者在消费中所获得的效用与所消费的商品组合之间数量关系的函数。它被用以衡量消费者从消费既定的商品组合中所获得满足的程度。运用无差异曲线可以分析两种商品的组合,而运用效用函数则能分析更多种商品的组合。其表达式是:$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots)$，式中$q_1, q_2, q_3, \dots$分别代表消费者所拥有或消费的各种商品的数量。下面介绍了$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots)$的具体形式及应用场景。

一、微观经济学领域中常用效用函数的形式

效用函数的存在立足于两个假设：①假定消费者偏好具有完备性、自返性、传递性、连续性和强单调性，那么，存在着一个能代表该偏好的连续效用函数②效用随着单个商品数量递增而增长,且单个商品的边际效用递减。

事实上西方经济学仅仅“证明”了效用函数的存在性，并没有求出具体的效用函数，这就给予了极大地自由去根据实际情景（对各商品之间的偏好关系）去选择已有的效用函数，或从上面的两个假设中构造出新的效用函数，下面提供了微观经济学领域经典且常用的四种效用函数的形式以供使用。

（一）、柯布—道格拉斯效用函数

1、基本形式（两件商品）

$$U(q_1, q_2) = a{q_1}^{\alpha}{q_2}^{\beta}(a > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$$

同时能得到无差别曲线（曲线上的点代表效用相等）如图 1：

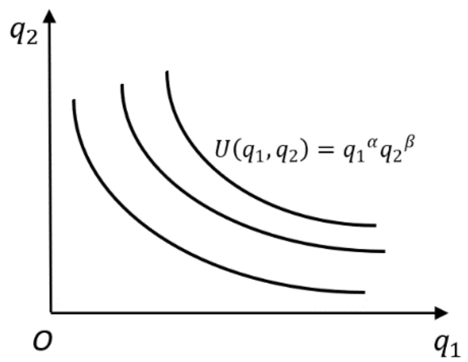


图 1：柯布—道格拉斯效用函数无差别曲线

2、对应效用最大化模型

$$max\, U(q_1, q_2)$$

$$s.t.\, p_1q_1 + p_2q_2 = s$$

其中q_1, q_2分别代表甲乙商品购买的数量，效用函数使用柯布—道格拉斯效用函数形式：$U(q_1, q_2) = a{q_1}^{\alpha}{q_2}^{\beta}(a > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$。

p_1, p_2分别代表甲乙商品的单价，s即准备付出的金额。

求解得到

$$\frac{p_1q_1}{p_2q_2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

可以看出购买两种商品所用费用之比等于参数 α 与 β 之比，与商品价格无关，其中α, β分别代表了对甲乙商品的偏爱程度，从理论上来讲,其可以通过一系列心理测试来逼近。

3、推广至多件商品

假如推广到 n 种商品，则效用函数可以推广到$U = U(q_1, q_2, \dots q_n)$。

构建效用最大化模型：

$$max\, U(q_1, q_2, \dots q_n)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} p_iq_i = s$$

其中$q_1, q_2, \dots q_n$分别代表购买的各种商品的数量，效用函数可使用柯布—道格拉斯效用函数推广形式：$U(q_1, q_2, \dots q_n) = a{q_1}^{\alpha}{q_2}^{\beta} \dots {q_n}^{\gamma}(a > 0, 0 < \alpha, \beta \dots \gamma < 1)$。

$p_1, p_2, \dots p_n$代表 n 种商品单价，s 即准备付出的金额。

根据各种商品单位金额的边际效用相等时效用函数最大：

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{p_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_n}}{p_n}$$

求解得到

$$p_1 q_1 : p_2 q_2 : \dots : p_n q_n = \alpha : \beta : \dots : \gamma$$

可以看出购买各个商品所用费用之比等于参数$\alpha, \beta \dots \gamma$之比，与商品价格无关，而$U(q_1, q_2, \dots q_n)$中的参数$\alpha, \beta \dots \gamma$即代表着对各商品的偏爱程度。

（二）、完全替代效用函数

1、基本形式（两件商品）

$$U(q_1, q_2) = \alpha q_1 + \beta q_2$$

无差别曲线如图 2：

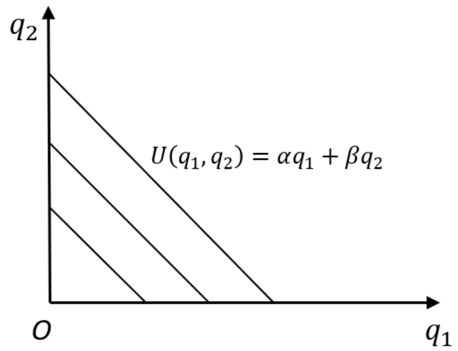


图 2：完全替代效用函数无差别曲线

2、对应效用最大化模型

$$max\, U(q_1, q_2)$$

$$s.t.\, p_1 q_1 + p_2 q_2 = s$$

完全替代效用函数$U(q_1, q_2) = \alpha q_1 + \beta q_2$，此时的$\alpha, \beta$表示消费者愿意用$\beta$单位的$q_1$替代$\alpha$单位的$q_2$，表示甲乙商品间存在完全替代关系，特别地，当$\alpha/\beta = 1$时，甲乙商品以固定比例$1:1$替代，消费者只关心$s$金额下能购买的甲乙商品总数。

最优化模型求解得到

$$\begin{cases} if\ \dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{p_1}{p_2}\ , p_1 q_1 = s \\ if\ \dfrac{\alpha}{\beta} \leq \dfrac{p_1}{p_2}\ , p_2 q_2 = s \end{cases}$$

在完全替代效应函数模型下，全部预算将会用来购买一种商品。

3、推广至多件商品

构建效用最大化模型：

$$max\, U(q_1, q_2, \dots q_n)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = s$$

效用函数可以推广到$U = U(q_1, q_2, \dots q_n) = \alpha q_1 + \beta q_2 + \cdots + \gamma q_n$

最优化模型求解得到

$$\text{if} \max\left(\frac{\alpha}{p_1}, \frac{\beta}{p_2}, \dots, \frac{\gamma}{p_n}\right) = \frac{\theta}{p_i}, p_i q_i = s$$

同样地，由于各种商品单位金额的边际效用相等为常数，只要将预算全部用来购买单位金额的边际效用最大的商品即可得到最大效用。

（三）、里昂惕夫效用函数

1、基本形式（两件商品）

$$U(q_1, q_2) = Min(\alpha q_1, \beta q_2)$$

无差别曲线如图 2：

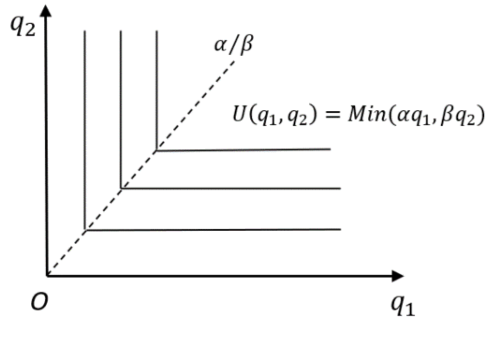


图 3：里昂惕夫效用函数无差别曲线

2、对应效用最大化模型

$$max\,U(q_1,q_2)$$

$$s.t.\,p_1q_1+p_2q_2=s$$

里昂惕夫效用函数$U(q_1,q_2)=Min(\alpha q_1,\beta q_2)$，此时的效用函数表示的是一种完全互补型偏好关系，消费者在这种偏好关系下做出的效用最大化选择一定落在直线$q_2/q_1=\alpha/\beta$上，即消费者始终以固定的比例购买甲乙两种商品。

3、推广至多件商品

构建效用最大化模型：

$$max\,U(q_1,q_2,\dots q_n)$$

$$s.t.\sum_{i=1}^{n}p_iq_i=s$$

效用函数可以推广到$U=U(q_1,q_2,\dots q_n)=Min(\alpha q_1,\beta q_2,\dots,\gamma q_n)$

最优化模型求解得到：

$$q_1:q_2:\dots:q_n=\frac{1}{\alpha}:\frac{1}{\beta}:\dots:\frac{1}{\gamma}$$

结果表明购买的各商品数量仅由效用函数中的$\alpha,\beta,\dots,\gamma$参数确定，和各商品价格无关。

这就和“木桶效应”很相似，消费者的里昂惕夫效用函数下的效用只取决于购买的不同种类商品各自提供的效用的最小值，因此在一定预算s下应该力求“均衡”，而效用函数中的参数即反映这种“均衡”关系。

（四）、常替代弹性效用函数（CES）

1、替代弹性

经济学中弹性概念关注一个变量的相对变化dx/x对另一个变量的相对变化dy/y的影响，因此弹性通常指变量x变动百分之一个单位，变量y变动多少个百分比单位。

效用函数中的替代弹性衡量两种商品相对边际替代率MRS的百分比变动将如何引起消费者对两种商品的相对消费数量Q的百分比变动，公式表示为：

$$\sigma = \frac{d\frac{Q_b}{Q_a}/\frac{Q_b}{Q_a}}{dMRS/MRS} = \frac{dIn(\frac{Q_b}{Q_a})}{dIn(MRS)}$$

其中MRS为商品 A 对商品 B 的边际替代率（无差异曲线斜率），在市场均衡时边际替代率等于两者价格之比。

2、CES 效用函数形式

CES 效用函数建立于替代弹性为常数的基础上。

其效用函数通式为：

$$U(q_1, q_2, \dots q_n) = (\sum_i^n \alpha_i {x_i}^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

常见二元形式为：

$$U(q_1, q_2) = (\alpha {q_1}^{\rho} + \beta {q_2}^{\rho})^{\frac{1}{\rho}} \text{其中} \alpha + \beta = 1$$

3、CES 效用函数替代弹性

$$MRS_{12} = \frac{\partial U}{q_1}\Big/\frac{\partial U}{q_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{{q_1}^{\rho-1}}{{q_2}^{\rho-1}}$$

$$\sigma = \frac{dIn(\frac{q_2}{q_1})}{dIn(MRS_{12})} = \frac{1}{\rho - 1}$$

因此在模型设定下，两种消费品的替代效用为常数。

4、CES 效用函数的性质

CES 效用函数不过是量化效用的一种函数形式，通过对ρ的不同设定，可以得到具有不同替代弹性的效用函数。特别的，有如下几种情况：

① $\rho = 0$时，它表示柯布—道格拉斯效用函数

② $\rho = 1$时，它表示完全替代的线性效用函数

③ $\rho \to \infty$时,它是表示完全互补的里昂惕夫效用函数

（五）、四种效用函数的联系

从 CES 效用函数的性质可以看出前面介绍的柯布—道格拉斯效用函数、完全替代的线性效用函数和完全互补的里昂惕夫效用函数都是 CES 效用函数的特

例，自然他们都建立在替代弹性的基础上。商品之间的替代关系及个人经济单位的经济行为正是微观经济学的研究领域，可以说，上面的四种效用函数理论极大地推动了微观经济学向数学化、模型化的发展。

二、“新”效用函数

传统的西方微观经济学对消费者行为的构建，是建立在消费者效用最大化的假定前提下的。而对于消费理论研究的发展，正因源于对这前提假定条件的反思。新消费理论肯定了市场存在着大量风险和不确定性，为了研究在风险条件下如何做出选择的问题，效用函数理论引入了“风险厌恶”来衡量一个人通过付钱来降低风险的意愿，同时为了研究不确定条件下的行为准则，引入了期望效用函数的概念。下面对其进行介绍。

（一）、不确定情况下的效用函数理论

1、不确定性下的行为准则

奈特认为，风险指的是概率分布已知的不确定性，而真正意义上的不确定性是概率分布都不确定。为了讨论的方便，本文这两者不加以区分。

2、不确定性下的理论决策的两种原则

2.1、数学期望最大化原则

手段：对各种可能的行为带来的结果求数学期望，选取期望最大下的行为。

但这个原则存在不合理的地方，考虑一个投币游戏（圣彼得堡悖论），你不断投掷一枚硬币直到出现正面，记你投掷次数为k，给你2^{k-1}元，你愿意花多少钱参与这个游戏？试验表明，大多数人只愿意花 2-3 元参与这个游戏，但是计算收益的数学期望，是无穷大！

面对效益期望无穷的赌博，为何人们只愿意花有限的钱参与？面对这个问题，经济学家提出了期望效用最大化原则。

2.2、期望效用最大化原则

伯努利指出，人们在投资决策时使用的并不是“钱的数学期望”而是“道德期望”。而道德期望不单单和钱的多少有关，还与初始财富有关。穷人和富人对财富的边际效用是不一样的，伯努利选取的道德期望函数是对数函数，并对圣彼得堡悖论进行了分析得到：

$$E(.) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \alpha log 2^n \approx 1.39\alpha$$（其中α为一个大于零的常数）

此外 Crammer 采用幂函数形式的效用函数，对圣彼得堡悖论进行了分析，他假定效用函数为$U(x) = \sqrt{x}$，得到：

$$E[U(x)] = \sum_{x=1}^{\infty} p(x)u(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x}\sqrt{2^{x-1}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

最终得到的期望效用收益为$x = (E[U(x)])^2 = 2.914$，符合大多数人的预期。

因此用期望效用代替期望收益，可能为我们的不确定情形下投资选择问题提供更好的解决方案。且根据期望效用，20%的收益未必同 2 个 10%的收益一样好，20%的亏损未必同 2 个 10%的亏损一样糟，这是比较符合实际的。

2.3、期望效用函数

所谓期望效用函数，是定义在一个随机变量集合上的函数。它在一个随机变量上的取值等于它作为数值函数在该随机变量上取值的数学期望。直观上看就是“钱的函数的数学期望”而不是“钱的数学期望”。而期望效用函数以冯·纽曼—摩根斯坦效用函数（VNM效用函数）为典型：

如果某个随机变量 X 以概率p_i取值$x_i, i = 1,2, \dots, n$，而某人在确定地得到x_i时的效用为$U(x_i)$, 那么，该随机变量给他的效用便是：

$$U(X) = E = p_1U(x_1) + p_2U(x_2) + \cdots + p_nU(x_n)$$

其中 E 表示关于随机变量 X 的期望效用，因此 U(X)称为期望效用函数，又叫做冯·诺依曼—摩根斯坦效用函数（VUM函数）。这一函数表示决策人为随机事件的每种可能的结果所赋予的效用，它说明了决策者对风险的偏好。

2.3、期望效用函数的不足和发展

下来我们介绍期望效用准则的一些缺点，但是要需要说明的是，尽管它某些方面不尽如人意，但目前还没有一个准则在各个方面都比它好的。

① 在研究 Allais 悖论时发现期望效用理论忽略了人的心理因素对概率分布的影响

② 在研究 Ellsberg 悖论时发现人们判断主观概率的时候，偏重于较为清晰的概率，而对于模糊的概率会采用保守的估计，即人们不喜欢复杂的选择， 从中会得出违背概率论的基本规则（概率和为 1）的结果

为了解决期望效用理论的问题，许多学者都各自给出了解决方案：Karmarkar 提出主观权重效用；Loomes 和 Sugden 提出“后悔理论”——破坏效用在不同时间的独立性；彭实戈通过倒向随机微分方程引入了 g-期望。其中最著名的要数 Kahneman 和 Tversky 提出的前景理论，由此引入了一门全新的学科——行为金融学，在分析过程中涉及了当代心理学。

（二）、投资下的风险类型及效用函数理论

1、投资者的风险类型

首先给出下面三个假设：

假设 1：考虑一项随机计划（如抽奖），只有两种情况$\{h_1, h_2\}$，并且期望收益为 0，即$ph_1+(1-p)h_2=0$，表明这是公平赌博。

假设 2：投资者初始财富为W_0

假设 3：投资者的VNM效用函数为$V(W)$

根据假设，投资者参加这项赌博的期望效用为:

$$pV(W_0+h_1)+(1-p)V(W_0+h_2)$$

而不参加的期望效用为$V(W_0)$，这样就可以根据投资者对于风险的态度将其划分为三类:

(1) 风险厌恶型

如果

$$V(\omega_0)=V\big(p(\omega_0+h_1)+(1-p)(\omega_0+h_2)\big)$$
$$\geq pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2)$$

即投资者不参加赌博的效用大于参加赌博的效用，此时效用函数为凹函数$V''(W)\leq 0$，常见的风险厌恶型效用函数有$lnW,\sqrt{W}$。

(2) 风险偏好性

如果

$$V(\omega_0)=V\big(p(\omega_0+h_1)+(1-p)(\omega_0+h_2)\big)$$
$$\leq pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2)$$

即投资者不参加赌博的效用小于参加赌博的效用，此时效用函数为凸函数$V''(W)\geq 0$。

(3) 风险中性型

如果

$$V(\omega_0)=V\big(p(\omega_0+h_1)+(1-p)(\omega_0+h_2)\big)$$
$$=pV(\omega_0+h_1)+(1-p)V(\omega_0+h_2)$$

即投资者不参加赌博的效用等于参加赌博的效用，此时效用函数为线性函数$V''(W)=0$。

事实上，我们通常假设消费者都是风险厌恶类型的，因此非常有必要研究风险厌恶程度的度量，接下来介绍 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶函数和双曲绝对风险厌恶（HARA）函数。

2、Arrow-Pratt 绝对风险厌恶函数

(1)绝对风险厌恶

称$A(W)=-\frac{V''(W)}{V'(W)}$为 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶函数。

(2)相对风险厌恶

称$T(W)=A(W)^{-1}$为风险容忍函数，$R(W)=WA(W)$为相对风险函数。其中

$$R(W)=WA(W)=-\frac{WV''(W)}{V'(W)}=-\frac{dW'}{W'}\Big/\frac{dW}{W}$$

即$R(W)$为效用函数的变化率V'相对于财富W的负弹性，即W变化一个百分

点，V'变化$-R(W)$个百分点。

3、双曲绝对风险厌恶（HARA）函数

称形如：（为了数学方便，这里用 x 代表财富水平 W）

$$V(x)=\frac{1-r}{r}(\frac{ax}{1-r}+b)^r, b>0, \frac{ax}{1-r}+b>0$$

为双曲绝对风险厌恶函数。计算一下它的绝对风险厌恶函数：

$$V'(x)=a(\frac{ax}{1-r}+b)^{r-1}$$

$$V''(x)=-a^2(\frac{ax}{1-r}+b)^{r-2}$$

$$A(x)=-\frac{V''(x)}{V'(x)}=(\frac{x}{1-r}+\frac{b}{a})^{-1}$$

可以看出它形式上是双曲线，这也就是双曲绝对风险厌恶函数的名称由来，对应的有风险容忍函数:$T(x)=\left(\frac{1}{r-1}\right)x+\frac{b}{a}$

常用的变式如下：

(1)$r=1$：线性效用函数

$V(x)=ax$，为风险中性者的效用函数

(2)$r=2$：二次效用函数

$V(x)=-\frac{1}{2}(b-ax)^2$，一般可写成$V(x)=x+ax^2$

(3)$b=1, r$趋近于无穷大：指数效用函数

$$V(x)=-e^{-\alpha x}, A(x)=a, R(x)=ax$$

它具有常绝对风险厌恶系数（CARA）

(4)$r<1, b=0$：幂效用函数

$$V(x)=\frac{x^r}{r}, A(x)=\frac{1-r}{x}, R(x)=1-r$$

它具有常相对风险厌恶（CRRA）和递减绝对风险厌恶（DARA）

(5)$a=1, b=0, r$趋近于 0：对数效用函数

$$V(x)\to lnx, A(x)\to\frac{1}{x}, R(x)\to 1$$

它也具有常相对风险厌恶和递减绝对风险厌恶

三、发展中的效用函数

随着效用函数理论的进一步成熟，其在经济学、管理学、博弈论等领域大放异彩，同时，在这些领域中效用函数理论不断推陈出新，近来也产生了许多理论成果，下面举一些例子进行说明。

在数理经济学领域中，通过对偏好概念以及偏好序数公理化体系的研究，提出了理念偏好与理念效用函数的概念；在国际政治经济学领域中，构建了一个基于相对利益的国家效用函数用以解决短期策略选择问题；在管理科学领域中，由 Wundt 曲线引入信息效用的概念,给出了信息效用函数的定量表示,构建了基于信息效用的决策行为模型；在群体决策领域中，考虑了个体效用函数的相互影响并提出了一种计算事先公平性和事后公平性的群体效用函数模型；在灰色系统理论中，提出了灰效用函数的概念，并用来探讨灰靶决策的决策准则和内在机理。

参考文献

[1]李仲飞,梅琳.CRRA、LA 和 DA 三种效用模型的比较分析——资产配置理论的进化和发展[J].管理评论,2004(11):10-15+27-63.

[2]丁小东,庄河,黄修莉,蒋葛夫,李涛.基于 CARA 效用函数的报童决策偏差形成机理[J].控制与决策,2016,31(02):287-296.DOI:10.13195/j.kzyjc.2014.1848.

[3]侯万春.理念偏好与理念效用函数及其对 Alliass 预期效用悖论的解决[J].数量经济技术经济研究,2001(01):79-81.

[4]戴昌钧,刘广.信息效用及其在决策行为中的应用[C]//.中国信息经济学会 2007 年学术年会论文集.,2007:16-18.

[5]王明涛.一种反映群体决策公平性的群体效用函数研究[J].郑州工业大学学报(社会科学版),2000(01):58-61.

[6]夏广涛,张宇燕.理解国家行为：一个基于相对利益的国家效用函数[J].世界经济与政治,2021(11):67-94+157-158.

[7]王文平.灰靶决策的灰效用理论研究[J].华中理工大学学报,1997(S1):90-92.