曹建钦　　　2373177　　　数值分析

3.2　Jacobi方法　　P65-66　7.8

7.解　第一步　选非对角线元素中的主元素

$a_{12}=1\ (p=1,q=2)$　　$a_{11}=a_{22}$　　$\tan 2\varphi=\frac{-2a_{12}}{-(a_{11}-a_{22})}=\infty$

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(a_{12})=\frac{\pi}{4}$　　$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore U_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A_1=U_{12}^TAU_{12}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0.5303\\ 0 & 0 & -0.1768\\ 0.5303 & -0.1768 & 2\end{bmatrix}$$

第二步　选A_1非对角线元素中的主元素

$a_{13}=0.5303\ (p=1,q=3)$　　$a_{11}=a_{33}$　　$\tan 2\varphi=\infty$

$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(a_{13})=\frac{\pi}{4}$　　$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore U_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} \Rightarrow A_2=U_{13}^TA_1U_{13}=\begin{bmatrix}2.5295 & -0.1250 & 0\\ -0.1250 & 0 & -0.1250\\ 0 & -0.1250 & 1.4693\end{bmatrix}$$

第三步　选A_2非对角线元素中的主元素　$a_{12}=-0.1250\ (p=1,q=2)$

$a_{11}=2.5295$　　$a_{22}=0$　　$\Rightarrow \tan 2\varphi=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}=\frac{1}{c}=\frac{-0.25}{2.5295}$

则有 $c=-10.118$　　$\Rightarrow \tan\varphi=\frac{\mathrm{sgn}(c)}{|c|+\sqrt{c^2+1}}=\frac{-1}{10.118+\sqrt{10.118^2+1}}=t=-0.05$

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=0.9988$　　$\sin\varphi=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=-0.0499$

$$则\ U_3=\begin{bmatrix}0.9988 & 0.0499 & 0\\ -0.0499 & 0.9988 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A_3=U_{12}^TA_2U_{12}=\begin{bmatrix}2.5359 & 0.0017 & 0.0062\\ 0.0017 & -0.0062 & -0.1249\\ 0.0062 & -0.1249 & 1.4693\end{bmatrix}$$

第四步：选 A_3 非对角线元素中的主元素 $a_{23}=-0.1249$ $(p=2, q=3)$

$a_{22}=-0.0062$ $\quad a_{33}=1.4693$ $\quad \Rightarrow \tan 2\varphi=\frac{2a_{23}}{a_{22}-a_{33}}=\frac{1}{c}=\frac{-0.2498}{-0.0062-1.4693}$

则有 $c=5.9067$ $\quad \Rightarrow \tan\varphi=\frac{\mathrm{sgn}(c)}{|c|+\sqrt{c^2+1}}=\frac{1}{5.9067+\sqrt{5.9067^2+1}}=t=0.084$

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=0.9965$ $\quad \sin\varphi=0.0837$

则 $U_4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.9965&-0.0837\\0&0.0837&0.9965\end{bmatrix}$ $\Rightarrow A_4=U_3^TA_3U_3=\begin{bmatrix}2.5359&0.0022&0.0060\\0.0022&-0.0170&0\\0.0060&0&1.4798\end{bmatrix}$

则此时误差 $\varepsilon\approx10^{-5}$ 故 $\lambda_1\approx2.5359$ $\quad \lambda_2\approx-0.0170$ $\quad \lambda_3\approx1.4798$

$U=U_1U_2U_3U_4=\begin{bmatrix}0.5345&-0.7207&-0.4411\\0.4640&0.6867&-0.5593\\0.7062&0.0943&0.7016\end{bmatrix}$

故对应的一组特征向量为

$x_1=\begin{pmatrix}0.5345\\0.4640\\0.7062\end{pmatrix}$ $\quad x_2=\begin{pmatrix}-0.7207\\0.6867\\0.0943\end{pmatrix}$ $\quad x_3=\begin{pmatrix}-0.4411\\-0.5593\\0.7016\end{pmatrix}$

8. 解 λ_i 是 $P_{3\times3}$ 的一个特征值，则有 $P_{3\times3}(a_1,a_2,a_3)^T=\lambda_i(a_1,a_2,a_3)^T$

即 $\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\P_{21}&P_{22}&P_{23}\\P_{31}&P_{32}&P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\lambda_i\\a_2\lambda_i\\a_3\lambda_i\end{bmatrix}$

λ_j 是 $Q_{2\times2}$ 的一个特征值，有 $Q_{2\times2}(b_1,b_2)^T=\lambda_j(b_1,b_2)^T$

即 $\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\Q_{21}&Q_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\lambda_j\\b_2\lambda_j\end{bmatrix}$

可得 $T(a_1,a_2,a_3,0,0)^T=(a_1\lambda_i,a_2\lambda_i,a_3\lambda_i,0,0)^T$ 则 λ_i 是 T 特征值

相应特征向量为 $(a_1,a_2,a_3,0,0)^T$

$T(0,0,0,b_1,b_2)^T=(0,0,0,b_1\lambda_j,b_2\lambda_j)^T$ 则 λ_j 是 T 特征值

相应特征向量为 $(0,0,0,b_1,b_2)^T$

3.3.1 矩阵的QR分解

1. ① 设A是对称矩阵, λ 和 x ($\|x\|_2=1$) 是A的特征值及对应的特征向量. 又设H为一个正交矩阵, 使得 $Hx = e_1 = (1,0,\cdots,0)^T$

证明: $B = HAH^T$ 第一行第一列除了 λ 之外其余均为0

不太会这道题.

② 解 $x = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T \quad e_1 = (1,0,0)^T$

则 $u = x - e_1 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T \quad \rho = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 = \frac{1}{2}(\frac{6}{9}) = \frac{1}{3}$

即 $H = I - \frac{1}{\rho}uu^T = I - 3uu^T = \cancel{\begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

则 $B = HAH^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

2. 解 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

第一步: 将A的第一列变为与 e_1 平行的向量 $s_1 = (1,2,2)^T$

有 $d_1 = 3 \quad c_1 = -3 \quad u_1 = (4,2,2)^T \quad h_1 = 12$

则 $H_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad H_1A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

第 H_1A 第二列变换 $s_2 = (0,0,-3)^T$

$d_2 = 3 \quad c_2 = 3 \quad u_2 = (0,-3,-3)^T \quad h_2 = 9$

则 $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_2H_1A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

综上 $Q = H_1H_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3.3.2 矩阵的QR算法

P66 10. 解

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&-1\\1&2&0&3\\2&-1&3&1\end{bmatrix}$$

第一步约化: (1) 构造 $W_1=I-h_1^{-1}u_1u_1^T$ 使得 $W_1y_1=c_1e_1$

$c_1=-\operatorname{sgn}(a_{21})\|y_1\|_2=-3$ $\quad u_1=y_1-c_1e_1=(5,1,2)^T$ $\quad h_1=\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2=\frac{1}{2}(30)=15$

$$W_1=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-10&-5&-10\\-5&14&-2\\-10&-2&11\end{bmatrix}\qquad W_1y_1=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

(2) 约化计算: 令 $H_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&W_1\end{pmatrix}$

则 $$A^{(2)}=H_1AH_1=\begin{pmatrix}1&-3&0&0\\-3&20/9&-124/45&7/45\\0&-124/45&439/225&227/225\\0&7/45&227/225&389/225\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1&-3&0&0\\-3&2.2222&-2.7556&0.1556\\0&-2.7556&1.9511&1.0089\\0&0.1556&1.0089&1.7289\end{pmatrix}$$

第二步约化: 构造 $W_2=I-h_2^{-1}u_2u_2^T$ 使得 $W_2y_2=c_2e_1$

$c_2=-\operatorname{sgn}(a_{32})\|y_2\|_2=2.76$ $\quad u_2=y_2-c_2e_1=(-5.5156,\ 7/45)^T$

$h_2=\frac{1}{2}\|u_2\|_2^2=15.223$ $\quad W_2=I-h_2^{-1}u_2u_2^T=\begin{pmatrix}-0.9984&0.0564\\0.0564&0.9984\end{pmatrix}$

(2) 约化计算. 令 $H_2=\begin{pmatrix}I_2&0\\0&W_2\end{pmatrix}$

$$A^{(3)}=H_2A^{(2)}H_2=\begin{pmatrix}1&-3&0&0\\-3&2.2222&2.76&0\\0&2.76&1.8367&-1.015\\0&0&-1.015&1.8432\end{pmatrix}$$ 此即化为三对角矩阵

12. 解 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

A已经是上Hessenberg矩阵

对A进行QR分解: 记 $B_1=A$ $r_1=\sqrt{(b_{11})^2+(b_{21})^2}=\sqrt{10}$

$\cos\theta=\frac{b_{11}}{r_1}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\sin\theta=-\frac{b_{21}}{r_1}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

故 $U_{12}=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{10}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{10}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $U_{12}B_1=\begin{bmatrix}\sqrt{10}&\frac{5}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{10}}\\0&\frac{5}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{10}}\\0&1&1\end{bmatrix}$

$r_2=\sqrt{(b_{22})^2+(b_{32})^2}=1.871$ $\cos\theta_2=\frac{b_{22}}{r_2}=0.845$ $\sin\theta_2=-\frac{b_{32}}{r_2}=-0.534$

$U_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0.845&0.534\\0&-0.534&0.845\end{pmatrix}$ $U_{23}U_{12}B_1=\begin{pmatrix}\sqrt{10}&\frac{5}{\sqrt{10}}&\frac{1}{\sqrt{10}}\\0&1.87&1.34\\0&0&0.34\end{pmatrix}=R_1$

$Q_1=U_{12}^T U_{23}^T=\begin{bmatrix}0.95&-0.27&0.171\\0.32&0.80&-0.507\\0&0.534&0.845\end{bmatrix}$

第一次迭代得 $B_2=R_1Q_1=\begin{bmatrix}3.5076&0.5847&0.0088\\0.5984&2.2167&0.1836\\0&0.18156&0.2873\end{bmatrix}$

还可以继续迭代n次，迭代一次误差较大的特征值为 3.5076、2.2167 和 0.2873