班级：201411 姓名：曹建钦 编号：20375177 科目：数理统计

定理证明： 若 X 的二阶矩存在，则有

$$E(\bar{X})=\mu,\quad D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\quad E(S^2)=\sigma^2$$

证明.

(1) $E(\bar{X})=\mu$

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

(2) $D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

(3) $E(S^2)=\sigma^2$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n(\bar{X})^2\right]$$

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n(\bar{X})^2\right]=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}EX_i^2-nE(\bar{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n[DX+(EX)^2]-n[D\bar{X}+(E\bar{X})^2]\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}\left[\sigma^2+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}-\mu^2\right]=\sigma^2$$

2. 设 $(X_1, X_2 \cdots X_n)$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则

(1) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

证明：$\mu=0$ 时，令样本作正交变换

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k = \sqrt{n}\bar{X}$$

且 $Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 + n\bar{X}^2$

$\therefore \bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}(Y_2^2 + \cdots + Y_n^2)$

总体为正态分布 $\Rightarrow$ 正交变换后的 $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ 相互独立 且 $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$

$\therefore$ (1) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

又有 $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n) \Rightarrow$ (2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{Y_k^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

一般地，$\mu \neq 0$

令 $Z = X - \mu$，$Z_k = X_k - \mu$，$k = 1, 2, \cdots, n$，则有 $Z \sim N(0, \sigma^2)$

将 Z 看成来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单样本

根据 $\mu=0$ 情况

可得 $\bar{Z}$ 与 $\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \bar{Z})^2$ 相互独立

且 $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \bar{Z})^2 \sim \chi^2(n-1)$

$\Rightarrow \bar{X} = \bar{Z} + \mu \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \bar{Z})^2$

$\therefore$ (1) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

(2) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})^2 = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (Z_k - \bar{Z})^2 \sim \chi^2(n-1)$

3、设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，则有 $\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$

解：

$\because \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

且 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

$\therefore \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立

$\therefore$ 由 t 分布的定义有

$$\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$