20375177　　201411　　曹建鈥

4.2作业：　P93. 10.

解：
$$\begin{cases} e^{-x_1}+2x_2=1.97 \\ x_1+e^{-2x_2}=1.2 \end{cases}$$
把方程组写成等价形式：
$$\begin{cases} x_1=1.2-e^{-2x_2} \\ x_2=\dfrac{1.97-e^{-x_1}}{2} \end{cases}$$

则有
$$G(x)=\begin{bmatrix} 1.2-e^{-2x_2} \\ \dfrac{1.97-e^{-x_1}}{2} \end{bmatrix} \qquad J_G(x)=\begin{bmatrix} 0 & 2e^{-2x_2} \\ \dfrac{e^{-x_1}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

当 $x_1\geq 0.5$　$x_2\geq 0.5$时　$\|J_G(x)\|_F=\sqrt{(2e^{-2x_2})^2+(e^{-x_1}/2)^2}\leq 0.633$

即有　$\|G(x)-G(y)\|_2\leq 0.633\|x-y\|_2$

因此，对 $x_1\geq 0.5$，$x_2\geq 0.5$，迭代公式：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1.2-e^{-2x_2^{(k)}} \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1.97-e^{-x_1^{(k)}}}{2} \end{cases} \quad (k=0,1,\dots)$$
产生的序列 $\{x^{(k)}\}$ 必收敛于唯一解

取　$x_1^{(0)}=0.5$　$x_2^{(0)}=0.5$，则当 $k=7$ 时，满足精度要求，得

$x_1\approx 0.9983359878819449$　　$x_2\approx 0.8007108649475528$

11. 解　Newton法：
$$\begin{cases} f_1(x,y)=x-\sin(x+y)-1.2=0 \\ f_2(x,y)=y+\cos(x+y)-0.5=0 \end{cases}$$

$$F'(x,y)=\begin{bmatrix} 1-\cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & 1-\sin(x+y) \end{bmatrix}$$

$$F'(x,y)^{-1}=\frac{1}{1-\sin(x+y)-\cos(x+y)}\begin{bmatrix} 1-\sin(x+y) & \cos(x+y) \\ \sin(x+y) & 1-\cos(x+y) \end{bmatrix}$$

可以看出 $F(X)$ 连续可微，且 $F'(X^*)$ 非奇异，故牛顿法生成的序列收敛于 X^*

当迭代次数 $k=5$ 时 $x=1.43353367$ $y=1.47234872$

此时 $\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\|_\infty / \|X^{(k)}\| \le 10^{-4}$

5-1-1 作业: 2、4、6、8、9、11、13

2、证明

$$\varphi_1=\left\{\frac{1}{x_1^0},\frac{1}{x_2^0}\cdots\frac{1}{x_m^0}\right\}=(1,1,\cdots 1)_{1\times m}$$

$$\varphi_2=\left\{\frac{1}{x_1^1},\frac{1}{x_2^1}\cdots\frac{1}{x_m^1}\right\}=\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_m}\right)_{1\times m}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n+1}=\left\{\frac{1}{x_1^n},\frac{1}{x_2^n}\cdots\frac{1}{x_m^n}\right\}=\left(\frac{1}{x_1^n},\frac{1}{x_2^n}\cdots\frac{1}{x_m^n}\right)_{1\times m}$$

$k_0\varphi_1+k_1\varphi_2\cdots k_n\varphi_{n+1}=0 \iff k_0=k_1=\cdots=k_n=0$

则函数系在任何点集上线性无关

解: 基函数分别为

$$l_0(x)=\frac{(x-11)(x-12)(x-13)(x-14)}{(10-11)(10-12)(10-13)(10-14)}=\frac{1}{24}(x-11)(x-12)(x-13)(x-14)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-10)(x-12)(x-13)(x-14)}{(11-10)(11-12)(11-13)(11-14)}=-\frac{1}{6}(x-10)(x-12)(x-13)(x-14)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-13)(x-11)(x-13)(x-14)}{(12-10)(12-11)(12-13)(12-14)}=\frac{1}{4}(x-10)(x-11)(x-13)(x-14)$$

$$l_3(x)=\frac{(x-10)(x-11)(x-12)(x-14)}{(13-10)(13-11)(13-12)(13-14)}=-\frac{1}{6}(x-10)(x-11)(x-12)(x-14)$$

$$l_4(x)=\frac{(x-10)(x-11)(x-12)(x-13)}{(14-10)(14-11)(14-12)(14-13)}=\frac{1}{24}(x-10)(x-11)(x-12)(x-13)$$

则拉格朗日的四次插值多项式为

$$L_4(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+y_3l_3(x)+y_4l_4(x)$$

$$=0.83x^4-39.17x^3+681.67x^2-5198.33x+14860$$

6. 证明：插值多项式的插值余项为 $R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)$

而 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，则 $f^{n+1}(\xi)=0$

即 $R_n(x)=0$ 故 $f(x)=P_n(x)$

则有原命题得证

8. 解：差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
-2	21				
-1.5	23	4	[illegible]		
0.5	22	-0.5	-1.8		
1	21	-2	-0.6	0.4	
1.5	20	-2	0	0.2	-0.05714286

则有 $N_4(x)=21+4(x+2)-1.8(x+2)(x+1.5)+0.4(x+2)(x+1.5)(x-0.5)$

$-0.05714286(x+2)(x+1.5)(x-0.5)(x-1)$

9. 证明：

(1) $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{F(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}=c\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

(2) $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{F(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)+g(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}$

$=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}+\sum_{i=0}^{n}\frac{g(x_i)}{w'_{n+1}(x_i)}=f[x_0,x_1,\cdots x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

证明:

$$f[x_0,x]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sum_{j=0}^{n}a_jx^j-\sum_{j=0}^{n}a_jx_0^j}{x-x_0}=\frac{a_j\sum_{j=0}^{n}(x^j-x_0^j)}{x-x_0}$$

根据 $x^j-x_0^j=(x-x_0)(x^{j-1}+x^{j-2}x_0+x^{j-3}x_0^2+\cdots+x\,x_0^{j-2}+x_0^{j-1})$

可知 $f[x_0,x]$ 是 x 的 $n-1$ 次多项式

解: 计算 $f(-1)$ 时. $N_2(x)=21+4(x+2)-1.8(x+2)(x+1.5)$

$\Rightarrow N_2(-1)=24.1$

计算 $f(0.8)$ 时 $N_2(x)=23-0.5(x+1.5)-0.6(x+1.5)(x-0.5)$

$\Rightarrow N_2(0.5)=22$ $\quad N_2(0.8)=21.436$

计算 $f(0)$ 时 $N_3(x)=21+4(x+2)-1.8(x+2)(x+1.5)+0.4(x+2)(x+1.5)(x-0.5)$

$\Rightarrow N_3(0)=23$