《抽象代数》
第六次作业

姓名：姜岚曦 学号：19375233
姓名：魏来 学号：20374104
姓名：曹建钦 学号：20375177
姓名：李璞 学号：20376164
姓名：刘灵 学号：21374261

$3.1：加群、环的定义

1. 解：

由第二章 $.8 子群定理 1 知子群充要条件：一个群 G 不空子集 H 是子群 $\Leftrightarrow 1)a, b \in H \Rightarrow ab \in H \quad 2)a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

与加群与其非空子集间的关系一致，故充分必要.

2. 解：

$R = \{0, a, b, c\}$. 首先验证交换性，由 "+" 的运算表，其沿主对角线对称，知其有交换性.

易验证其结合律等群的性质，R 对 "+" 作成一个交换群.

易验证 R 对 "×" 有结合律.

x	y	z	x(y+z)	xy+xz
0	a	a	0	0
0	a	b	0	0
a	a	a	0	0
a	a	b	0	0
c	c	b	a	a

上表只给出部分验证，但遍历 $x, y, z \in R$ 的任意取值组合可知有.

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yx + zx$$

成立，即 R 对 "×" 和 "+" 满足分配率. 由环的定义，知 R 作为一个环.

$3.2：交换律、单位元、零因子、整环

1. 解：

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + b^n$.

数学归纳法：$n = 1$ 时，$a + b = a + b$ 成立.

假设 $n = k$ 时成立 $(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + b^k$.

则 $n = k+1$ 时, $(a+b) = a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + ab^k + a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + b^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + b^{k+1}$

故原式成立.

2. 解:

设 R 作为加群时是 (a).

对于 R 中任意两元 xy. 有 $x=ma, y=ha$，m,n 是整数.

$xy=(ma)(na)=mna^2=(na)(ma)=yx$

故 R 是交换环.

3. 解:

$(a+b)(1+1)=(a+b)1+(a+b)1=a+b+a+b$

$(a+b)(1+1)=a(1+1)+b(1+1)=a+a+b+b$

由消去律 $b+a=a+b$ 得知符合交换律.

4. 解:

$R=\{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

x	0	1
0	0	0
1	0	0

R 是一个环，1 是零因子

5. 解:

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$

对于运算 $"x""$ 来说闭. 分配率，$"x"$ 结合律显然成立.

故首先 $\{a+b\sqrt{2}\}$ 是一个环.

(1).$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}=(c+d\sqrt{2})(a+b\sqrt{2})$

符合交换律

(2).$|(a+b\sqrt{2})=(a+b\sqrt{2})|=a+b\sqrt{2}$ 有单位元 1

(3).$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=0 \Rightarrow a=b=0$ 或 $c=d=0$ 没有零因子

故该环是一个整环

$3.3：除环、域

1. 解:

F 是交换环，因为普通乘法符合交换律

显然 F 包含一个非零元

F 有一个单位元 1)

对于 $\forall a+bi \in F, a, b$ 不同时为 0. $\exists c+di \in F, s.t. (a+bi)(c+di)=1$

$c+di=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$c=\frac{a}{a^2+b^2} \qquad d=-\frac{b}{a^2+b^2}$

即 F 的任意非零元存在一个逆元.

故 F 对普通加法和乘法构成一个域.

2. 解:

F 是交换环.

F 存在非零元,F 有单位元 1.

对于 $\forall a+b\sqrt{3} \in F, a, b$ 不同时为 0.

$\exists c+d\sqrt{3} \in F, s.t. (a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=1$

$c+d\sqrt{3}=\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}$

故 $c=\frac{a}{a^2-3b^2} \qquad d=-\frac{b}{a^2-3b^2}$

故 F 内任意非零元存在一个逆元，故 F 作成一个域.

3. 解:

R 至少包含 1 个非零元，考虑由 R 中非零元构成的集合 R*.

k* 中无零元,R 中无零因子, 故 R* 对乘法来说闭.

R 是一个环, 乘法满足结合率, 同样适合 R*.

由于 R 无零因子, 故 R* 满足消去率.

由有限群定义知 R* 是个乘群.

故 R* 存在一个单位元 1. 其也是 R 的单位元.

R* 中的元均有一个逆元, 即 R 中非零元均有逆元.

故 R 作成一个除环.

4. 解:

对于 $\forall (\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3) \in R$. 有:

$$\begin{aligned}
[(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)](\alpha_3,\beta_3) &= (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta_2}, \alpha_1\beta_2+\beta_1\bar{\alpha_2})(\alpha_3,\beta_3) \\
&= ((\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta_2})\alpha_3-(\alpha_1\beta_2+\beta_1\bar{\alpha_2})\bar{\alpha_3}, (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta_2})\beta_3+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\bar{\alpha_2})\bar{\alpha_3})
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
(\alpha_1,\beta_1)[(\alpha_2,\beta_2)(\alpha_3,\beta_3)] &= (\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2\alpha_3-\beta_2\bar{\beta_3}, \alpha_2\beta_3+\beta_2\bar{\alpha_3}) \\
&= (\alpha_1(\alpha_2\alpha_3-\beta_2\bar{\beta_3})-\beta_1\overline{(\alpha_2\beta_3+\beta_2\bar{\alpha_3})}, \alpha_1(\alpha_2\beta_3+\beta_2\bar{\alpha_3})+\beta_1\overline{(\alpha_2\alpha_3-\beta_2\bar{\beta_3})}) \\
&= ((\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta_2})\alpha_3-(\alpha_1\beta_2+\beta_1\bar{\alpha_2})\bar{\beta_3}, (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\bar{\beta_2})\beta_3+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\bar{\alpha_2})\bar{\alpha_3})
\end{aligned}$$

故有 $[(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)](\alpha_3,\beta_3)=(\alpha_1,\beta_1)[(\alpha_2,\beta_2)(\alpha_3,\beta_3)]$ 成立

5. 解：

$(a,0)+(b,0)(i,0)+(c,0)(0,1)+(d,0)(0,i)=(a,0)+(bi,0)+(0,c)+(0,di)=(a+bi,c+di)$

故四元数可写成该形式

\$3.4：无零因子环的特征

1. 解：

F 中无零因子，且有四个元；F 作成加群的阶为 4. 而其特征是其因数.

a)F 的特征必为素数，4 的质因子只有 2. 故 F 特征为 2.

b)F 中的非零元 F* 构成一个乘群，阶为 3，故为一生成群 (a). 其中元为 $F^*=\{1,a,a^2\}$.

故有 $a^2+1=a=a^4=(a^2)^2 \qquad a+1=a^2$ 成立.

2*. 解：

设 $b=kn+a \qquad kn=b-a \qquad n/b-a$

若 $(b,n)\neq 1$，设 $(b,n)=p>1$

则 $b/p=kn/p+a/p$ 成立. $\Rightarrow p/a$，故 $(a,n)=p$ 矛盾，故 b 与 n 也互质.

3*. 解：

显然乘法对剩余类符合结合律.

如果 $[a]\in G,[b]\in G$. 显然 ab 也与 n 互素,$[ab]\in G$. 故闭.

由于 $(1,n)=1,[1]\in G$，是 G 的单位元

由裴蜀定理，设 $[a]\in G,(a,n)=1\Leftrightarrow\exists$ 整数 $x,y,s.t.ax+ny=1$

$[a][x]+[n][y]=[1]$，而 $[n]=0$

故 $[a][x]=[1]$. 故 $\forall[a]\in G$ 存在逆元.

故 G 作成一个群.

4*. 解：

G 的阶是 $\phi(n)$,$[a]\in G$,$[a]$ 的阶是 $\phi(n)$ 的因数.

故 $[a]^{\phi(n)}=[a^{\phi(n)}]=[1]$.

故有 $a^{\phi(n)}\equiv 1(modn)$ 得证.