北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第六章 数值积分

6.6 龙贝格积分法

（Romberg积分法）

回顾：区间逐次分半法

例：计算π的近似值.

由函数$\sin h$的Taylor展开式有 $\sin h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots$

$$= h(1 - \frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{120}h^4 - \cdots)$$

$$h = \frac{\pi}{n}, \quad \sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}(1 - \frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{120}h^4 - \cdots)$$

$$\Rightarrow n\sin\frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{6}h^2 + \frac{\pi}{120}h^4 - \cdots$$

$h = \frac{\pi}{n}, F(h) = n\sin h,$则有

$$F(h) = \pi - \frac{\pi}{6}h^2 + \frac{\pi}{120}h^4 - \cdots$$

$$F(\frac{h}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6}\frac{h^2}{4} + \frac{\pi}{120}\frac{h^4}{16} - \cdots$$

$$F(h)=\pi-\frac{\pi}{6}h^2+\frac{\pi}{120}h^4-\cdots$$

$$F(\frac{h}{2})=\pi-\frac{\pi}{6}\frac{h^2}{4}+\frac{\pi}{120}\frac{h^4}{16}-\cdots$$

由此构造新的表达式 $F_1(h)=\dfrac{4F(\frac{h}{2})-F(h)}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{120}\dfrac{1}{4}h^4+\cdots$

用$F_1(h)$近似表示π，精度由 2阶 提高到 4阶.

一、Richardson外推算法

理查逊外推法是数值方法中常用的一种加速收敛技术

设用步长为h的算法$F(h)$去逼近某个量F^*，若F^*和$F(h)$之间的截断误差有渐近展开式：

$$F^* - F(h) = a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_k h^{p_k} + \cdots, \quad (1)$$

其中$p_k > p_{k-1} > \cdots > p_1 > 0$,

将展开式中的h用qh代替，$q(\neq 1)$满足$1 - q^{p_1} \neq 0$,则

$$F^* - F(qh) = a_1 (\cancel{qh})^{p_1} + a_2 (qh)^{p_2} + \cdots + a_k (qh)^{p_k} + \cdots \qquad (2)$$

$$q^{p_1} \cdot (1) \Rightarrow q^{p_1} \mathrm{F}^* - q^{p_1} F(h) = q^{p_1} [a_1 \cancel{h}^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_k h^{p_k} + \cdots] \qquad (3)$$

$(2)-(3)$ 相减得到：

$$(1 - q^{p_1})\ \mathrm{F}^* - (F(qh) - q^{p_1} F(h)) = a_2 (q^{p_2} - q^{p_1}) h^{p_2} + \cdots + a_k (q^{p_k} - q^{p_1}) h^{p_k} + \cdots$$

$$(1-q^{p_1})F^* - (F(qh) - q^{p_1}F(h)) = a_2(q^{p_2} - q^{p_1})h^{p_2} + \cdots + a_k(q^{p_k} - q^{p_1})h^{p_k} + \cdots$$

整理后得到：

$$F^* - \frac{F(qh) - q^{p_1}F(h)}{1 - q^{p_1}} = \boxed{a_2\left(\frac{q^{p_2} - q^{p_1}}{1 - q^{p_1}}\right)} h^{p_2} + \cdots + \boxed{a_k\left(\frac{q^{p_k} - q^{p_1}}{1 - q^{p_1}}\right)} h^{p_k} + \cdots = O(h^{p_2})$$

这个过程我们称为用$F(h)$和$F(qh)$做了一次外推,得到的新公式,记为$F_1(h)$:

$$F_1(h) = \frac{F(qh) - q^{p_1}F(h)}{1 - q^{p_1}}$$

显然有， $F^* - F_1(h) = \bar{a}_2 h^{p_2} + \bar{a}_3 h^{p_3} + \cdots + \bar{a}_k h^{p_k} + \cdots = O(h^{p_2})$

则$F_1(h)$逼近F^*的精度提高到了p_2.

类似可定义$F_2(h)=\dfrac{F_1(qh)-q^{p_2}F_1(h)}{1-q^{p_2}}$,则$\mathrm{F}_2(h)$逼近$F^*$的精度提高到了$p_3$.

$$\text{定义}F_j(h):\begin{cases} F_0(h)=F(h) \\ F_j(h)=\dfrac{F_{j-1}(qh)-q^{p_j}F_{j-1}(h)}{1-q^{p_j}}, j=1,\cdots,m. \end{cases}$$

定理6.4，如果$F(h)$逼近F^*的误差由

$$F^*-F(h)=a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+a_3h^{p_3}+\cdots+a_kh^{p_k}+\cdots=O(h^{p_1})$$

给出，则$F_j(h)$逼近F^*的截断误差为

$$F^*-F(h)=a_{j+1}^{(j)}h^{p_{j+1}}+a_{j+2}^{(j)}h^{p_{j+2}}+\cdots$$

其中$a_k^{(j)}(k\geq j+1)$是与h无关的常数.

(6.19) $F_j(h):\begin{cases} F_0(h)=F(h) \\ F_j(h)=\dfrac{F_{j-1}(qh)-q^{p_j}F_{j-1}(h)}{1-q^{p_j}}, j=1,\cdots,m. \end{cases}$

式(6.19)被称为 Richardson(李查逊)外推技术或外推算法。实际上,这种外推技术是由已知的序列

$$F(h),\ F(qh),\ F(q^2h),\ \cdots$$

通过式(6.19)产生第二个序列

$$F_1(h),F_1(qh),F_1(q^2h),\cdots$$

又通过式(6.19)产生第三个序列

$$F_2(h),F_2(qh),F_2(q^2h),\cdots$$

理查逊外推算法流程

令 $F_0(h)=F(h)$

(1) $F_0(q^m h)=F(q^m h),\ m=1,2,\cdots$

(2) $$F_j(h)=\frac{F_{j-1}(q^{m-j+1}h)-q^{p_j}F_{j-1}(q^{m-j}h)}{1-q^{p_j}},\ j=1,\cdots,m.$$

$q=\frac{1}{2}$

$F_0=F$

$$
\begin{tikzcd}
F_0(h) \arrow[d] & & & \\
F_0(qh) \arrow[r] & F_1(h) \arrow[dl] & & \\
F_0(q^2h) \arrow[r] & F_1(qh) \arrow[r] & F_2(h) \arrow[dll] & \ddots \\
F_0(q^3h) \arrow[r] & F_1(q^2h) \arrow[r] & F_2(qh) \arrow[r] & F_3(h) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

如果$f(x)$二阶可导，则得到复化梯形公式的截断误差是：

$$R(T_n) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta) = O(h^2)$$

定理 设$f(x)\in C^{\infty}[a, b]$，则有

$$T(h) = I + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \cdots + \alpha_l h^{2l} + \cdots,$$

式中 I 为积分值，系数α_k与h 无关.误差量级为$O(h^2)$.

注： 此定理可利用$f(x)$的泰勒展开推导得到.

二、龙贝格(Romberg)方法

龙贝格(Romberg)算法是将理查逊(Richardson)外推法应用于数值积分，由低精度求积公式推出高精度求积公式的算法.

由R外推可得**龙贝格积分法**(逐次分半加倍法或梯形公式外推法)

复化梯形公式的截断误差有展开式

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = a_2h^2 + a_4h^4 + \cdots + a_{2k-2}h^{2k-2} + \cdots$$

a_i是与h无关的常数.即：$R(T_n) = I(f) - T_n = a_2h^2 + a_4h^4 + \cdots$

在R外推法中,令$q = \dfrac{1}{2}$,即步长**h半分**后,误差将减至原有误差的$\dfrac{1}{4}$,

即有: $\dfrac{I(f)-T_{2n}}{I(f)-T_n} \approx \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow I(f)-T_{2n} \approx \dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$

所以,只要二分前后的两个积分值T_{2n}与T_n相当接近,就可以保证T_{2n}计算结果的误差很小.

这种直接用计算结果来估计误差的方法称为误差的事后估计.

积分值T_{2n}的误差大致是$\dfrac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$,如果用这个误差值作为T_{2n}的**一种补偿，**可能会得到更好的结果:

$$I(f) \approx \overline{T}_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n}-T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)],\ h = \frac{b-a}{n}$$

$$T_{2n} = \frac{h'}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{2n-1} f(a+kh')],\ h' = \frac{b-a}{2n}$$

$$= \frac{h}{4}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{2n-1} f(a+k\frac{h}{2})],$$

$$= \frac{h}{4}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 2\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})],$$

$$S_n = \frac{h'}{3}[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})] \qquad \boxed{x_{2k} = a + kh}$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})]$$

$$\boxed{\bar{T}_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)}$$

$\frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \doteq S_n$

可以验证 $\bar{T}_n = S_n$，辛普森序列值.

$$\frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{h}{3}\Big\{ \ [2f(a) + 2f(b) + 4\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})]$$

$$- \frac{1}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh)] \ \Big\}$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})] = S_n.$$

即： $S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{3} = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1}$

在收敛较慢的梯形数列$\{T_n\}$的基础上,将T_{2n}与T_n做上述线性组合,就可以产生收敛速度较快的Simpson序列:$\{S_n\}$

同理，因为Simpson序列是4阶收敛的,所以当步长h半分后，

$$\frac{I(f)-S_{2n}}{I(f)-S_n}\approx\frac{1}{16}\qquad I(f)\approx S_{2n}+\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$$

用C_n表示Cotes序列,它是6阶收敛的.验证可得

$$C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n.$$

即将Simpson序列$\{S_{2^k}\}$做上述线性组合,就可以产生收敛速度更快的Cotes序列:$\{C_{2^k}\}$

因为$Cotes$序列是6阶收敛的,所以当步长h半分后,

$$\frac{I(f)-C_{2n}}{I(f)-C_n}\approx\frac{1}{64}\qquad I(f)\approx C_{2n}+\frac{1}{63}(C_{2n}-C_n)=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

R_n表示龙贝格序列,它是8阶收敛的，则有

$$R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n$$

我们在变步长的过程中运用了三个公式，就能

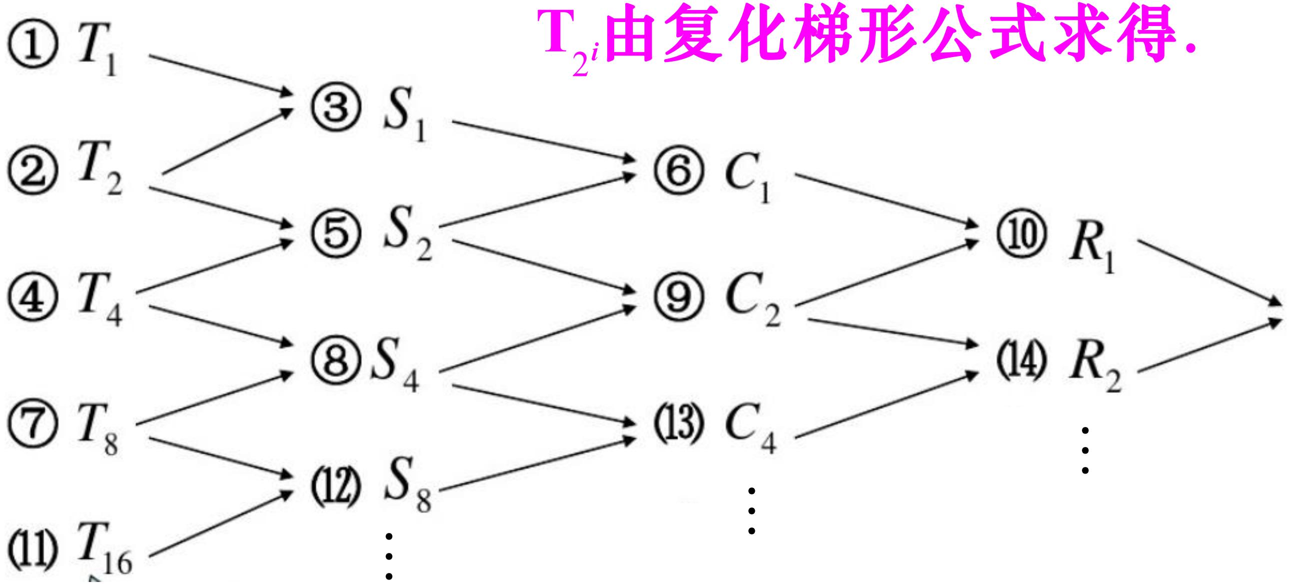
将粗糙的梯形值T_n逐步加工成精度较高的辛普森值

S_n、柯特斯值C_n和龙贝格值R_n.

当然，还可以继续对R_n做下去，但由于在新的求积公式中，当时$m \geq 4$，其线性组合系数$\frac{4^m}{4^m-1} \approx 1$与$\frac{1}{4^m-1} \approx 0$，对积分修正效果不大，因此，一般不再继续下去。

其中圆圈中号码表示计算顺序。

T_{2^i}由复化梯形公式求得.



$$S_n = \frac{4T_{2n} - T_n}{4-1} \quad C_n = \frac{4^2 S_{2n} - S_n}{4^2 - 1} \quad R_n = \frac{4^3 C_{2n} - C_n}{4^3 - 1}$$

2阶收敛 $\boxed{\text{4阶收敛}}$ 6阶收敛 8阶收敛

龙贝格公式计算步骤：

(1) 计算积分区间两端点函数值$f(a)$和$f(b)$，计算T_1；

$=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{a+b}{2})$

(2) 将区间$[a,b]$分半，计算$f(\frac{a+b}{2})$，T_2，S_1；

(3) 再将区间分半，算出$f(a+\frac{b-a}{2})$和$f(a+3\cdot\frac{b-a}{4})$，由此计算T_4，S_2，C_1；

(4) 将区间再分半，计算T_8，S_4，C_2，进而计算R_1；

(5) 将区间再分半，重复第四步的过程，计算T_{16}，S_8，C_4，R_2，反复进行这一过程，可计算得到R_1，R_2，R_4,……，直到前后精度要求为止.

【例1】利用龙贝格积分计算$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$，计算到$R_1$.

【解】 由题意 $a=0, b=1, f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$

$0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad 1$

$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=\frac{1}{2}(4+2)=3$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}=3.1$$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=3.133333$$

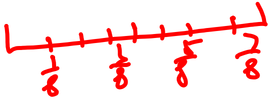
$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{3}{4})\right]=\frac{1}{2}\times 3.1+\frac{1}{4}(3.764706+2.56)=3.131177$$

$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=3.141569$$

$$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=3.142118$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}\left[f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\times 3.1 + \frac{1}{4}(3.764706 + 2.56) = 3.131177$$

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}\left[f\left(\tfrac{1}{8}\right) + f\left(\tfrac{3}{8}\right) + f\left(\tfrac{5}{8}\right) + f\left(\tfrac{7}{8}\right)\right] = 3.138989$$



$$S_4 = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 = 3.141593$$

$$\boxed{\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx}$$

$$C_2 = \frac{16}{15}S_4 - \frac{1}{15}S_2 = 3.1415946$$

$$R_1 = \frac{64}{63}C_2 - \frac{1}{63}C_1 = 3.141586292$$

龙贝格求积算法也可用下表来表示：

k	区间等分数 2^k	梯形序列 T_{2^k}	辛普森序列 $S_{2^{k-1}}$	柯特斯序列 $C_{2^{k-2}}$	龙贝格序列 $R_{2^{k-3}}$
0	$2^0=1$	T_1	$<\varepsilon$	$<\varepsilon$	
1	$2^1=2$	T_2	S_1		$\lvert R_1-S_1\rvert<\varepsilon$
2	$2^2=4$	T_4	S_2	C_1	
3	$2^3=8$	T_8	S_4	C_2	R_1
4	$2^4=16$	T_{16}	S_8	C_4	R_2
5	$2^5=32$	T_{32}	S_{16}	C_8	R_4
	…	…2	…4	…6	…8

1）同一行每个公式都是节点数目相同的求积公式；
2）同一列求积公式的代数精度相同；
3）表中对角线上相邻元素之差小于允许误差时，停止计算

【例2】 利用龙贝格积分计算 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，使误差不超过0.0001.

$|C_1-S_1| = 0.00127 > 0.0001$

【解】 已知 $a=1, b=2, f(x)=\dfrac{1}{x}$,

$$\boxed{S_i = \frac{4}{3}T_{2i} - \frac{1}{3}T_i}$$

$$C_1 = \frac{16}{15}S_2 - \frac{1}{15}S_1 = 0.69317$$

$\frac{3}{8}$

$1 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{4} \quad 2$

$$T_1 = \frac{1}{2}[f(1)+f(2)] = 0.75000,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}f(\frac{3}{2}) = 0.70833,$$

$$S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 = 0.69444,$$

317

0.00127

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{4}[f(\frac{5}{4}) + f(\frac{7}{4})] = 0.69702,$$

$$S_2 = \frac{4}{3}T_4 - \frac{1}{3}T_2 = 0.69325,$$

C_1 R_1

C_2

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}[f(\frac{9}{8}) + f(\frac{11}{8}) + f(\frac{13}{8}) + f(\frac{15}{8})] = 0.69412,$$

$$S_4 = 0.69315,$$

$$C_2 = \frac{16}{15}S_4 - \frac{1}{15}S_2 = 0.69315$$

$$R_1 = \frac{64}{63}C_2 - \frac{1}{63}C_1 = 0.69315$$

$$C_1 = \frac{16}{15}S_2 - \frac{1}{15}S_1 = 0.69317$$

$$R_1 = \frac{64}{63}C_2 - \frac{1}{63}C_1 \quad = 0.69315$$

由于 $|R_1 - C_1| = 0.00002 < 0.0001$,计算停止

T_1			
T_2	S_1		
T_4	S_2	C_1	
T_8	S_4	C_2	R_1
			R_2

七、龙贝格(Romberg)方法计算公式的简化

4个积分值序列:

梯形值序列 $\{T_{2^k}\}$

辛蒲生值序列 $\{S_{2^k}\}$

柯特斯值序列 $\{C_{2^k}\}$

龙贝格值序列 $\{R_{2^k}\}$

$$S_{2^k} = \frac{4T_{2^{k+1}} - T_{2^k}}{4-1}$$ 1

$$C_{2^k} = \frac{4^2 S_{2^{k+1}} - S_{2^k}}{4^2-1}$$ 2

$$R_{2^k} = \frac{4^3 C_{2^{k+1}} - C_{2^k}}{4^3-1}$$ 3

设$T_k^{(0)}$表示二分k次后求得的梯形值，

且以$T_k^{(m)}$表示序列$\{T_k^{(0)}\}$的m次加速值.

则有 $$T_k^{(m)}=\frac{2^{2m}T_{k+1}^{(m-1)}-T_k^{(m-1)}}{2^{2m}-1},k=1,2,\cdots$$

$T_k^{(1)}=S_k$

$T_k^{(2)}=C_k$

$T_k^{(3)}=R_k$

龙贝格外推算法流程

$$T_k^{(m)} = \frac{2^{2m} T_{k+1}^{(m-1)} - T_k^{(m-1)}}{2^{2m}-1}, k = 1, 2, \cdots$$

$\{T_m^{(0)}\}$是复化梯形值序列.

$\{T_m^{(1)}\}$是复化Simpson值序列.

$\{T_m^{(2)}\}$称为Cotes值序列.

$\{T_m^{(3)}\}$称为龙贝格值序列.

2阶收敛	4阶收敛	6阶收敛	8阶收敛	
$T_0^{(0)}$				
$T_1^{(0)}$	$T_0^{(1)}$			
$T_2^{(0)}$	$T_1^{(1)}$	$T_0^{(2)}$		
$T_3^{(0)}$	$T_2^{(1)}$	$T_1^{(2)}$	$T_0^{(3)}$	$\vdots$
$T_4^{(0)}$	$T_3^{(1)}$	$T_2^{(2)}$	$T_1^{(3)}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

龙贝格积分法是一个迭代过程,

结束的准则是 $\left|\frac{T_m^{(3)} - T_{m-1}^{(3)}}{T_m^{(3)}}\right| < \varepsilon$,

$\varepsilon > 0$是预先给定的精度水平.

【例3】用 Romberg 积分法计算积分 $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx$ 的近似值，要求 $|T_m^{(3)} - T_{m-1}^{(3)}| / |T_m^{(3)}| \leqslant 10^{-5}$.

【解】在算法公式(6.22)中，取 $a=1, b=2, f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，进行迭代，可得

k	$T_k^{(0)}$	$T_k^{(1)}$	$T_k^{(2)}$	$T_k^{(3)}$
1	2.183501550			
2	2.065617795	2.026323210		
3	2.031892868	2.020651226	2.020073094	
4	2.02349868	2.020102201	2.020065599	2.020062306
5	2.020808583	2.020061487	2.020058773	2.020058665

因 $|T_1^{(3)} - T_0^{(3)}| / |T_1^{(3)}| < 10^{-5}$，故得 $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx \approx T_1^{(3)} = 2.020\,058\,665$

作业

- 教材第177页习题：12、15、17、19、20

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院