曹建钦　20375177　201411　数理统计考试

一、

1. C　2. C　3. D　4. C　5. A

二、

1. $\frac{1}{\sigma^2}$　$\frac{n-1}{\sigma^2}$

2. 先验信息、总体信息和样本信息

3. $X_{(1)}$

4. $n-1$　$p-1$　$n-p$

5. $2\bar{x}$

三、

(1) 证明：

$\bar{x} \sim N(\mu, \frac{1}{m})$　$\bar{y} \sim N(2\mu, \frac{1}{n})$

$\Rightarrow E\bar{x} = \mu$　$E\bar{y} = 2\mu$

故 $ET_1 = E[\frac{1}{2}(\bar{x} + \frac{\bar{y}}{2})] = \frac{1}{2}E\bar{x} + \frac{1}{4}E\bar{y} = \mu$

故 T_1 是 μ 的无偏估计

(2) 解：样本 $x_1, x_2 \cdots, x_m, y_1, y_2 \cdots y_n$ 的联合密度函数为

$f(x_1, x_2 \cdots, x_m, y_1, y_2 \cdots y_n; \mu)$

$= (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(m\mu^2 + 4n\mu^2)\} \exp\{-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2)\} \exp\{m\mu\bar{x} + 2n\mu\bar{y}\}$

令 $c(\mu) = (2\pi)^{-\frac{m+n}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(m\mu^2 + 4n\mu^2)\}$, $h(x_1, x_2 \cdots x_m, y_1, y_2 \cdots y_n) = \exp\{-\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^m x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2)\}$

$w(\mu) = \mu$，$T(x_1, x_2 \cdots x_m, y_1, y_2 \cdots y_n) = m\bar{x} + 2n\bar{y}$

由于 $w(\mu) = \mu$ 的值域有内点，故 $T = m\bar{x} + 2n\bar{y}$ 为完全充分统计量

又∵ $ET = (m+4n)\mu$　∴ $E(\frac{m\bar{x}+2n\bar{y}}{m+4n}) = \mu$

令 $T_2 = \frac{m\bar{x}+2n\bar{y}}{m+4n}$　根据 Lehmann-Schette 定理　T_2 为 T 的函数　$ET_2 = \mu$

故 $T_2 = \frac{m\bar{x}+2n\bar{y}}{m+4n}$ 为 μ 的一致最小方差无偏估计

(3) T_2 是 μ 的有效估计，证明如下：

$var_\mu(T_2) = (\frac{m}{m+4n})^2 \cdot \frac{1}{m} + (\frac{2n}{m+4n})^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{m+4n}{(m+4n)^2} = \frac{1}{m+4n}$

$g'(\theta) = 1$

$I_\mu(\theta) = E_\mu[\frac{\partial}{\partial\mu} \ln p(x_1, x_2 \cdots x_m, y_1, y_2 \cdots y_n; \mu)]^2 = -E_\mu[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} \ln p(x_1, x_2 \cdots x_m; y_1, y_2 \cdots y_n; \mu)] = m+4n$

有 $Var_\mu(T_2)=\frac{1}{I_{T_2}(\mu)}=\frac{1}{m+4n}$

故 T_2 是 μ 的有效估计

四.

解：由 N-P引理可知，MPT的检验函数具有形式

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \lambda(x)\geq k\\ 0, & \lambda(x)\leq k\end{cases}$$

似然比统计量为

$$\lambda(x)=\frac{p(x;\sigma_1^2)}{p(x;\sigma_0^2)}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \exp\left\{\left(-\frac{1}{2\times 8}+\frac{1}{2\times 4}\right)\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

$\lambda(x)$ 是 $\sum_{i=1}^n x_i^2$ 的严格单调增函数

故有 $\{(x_1,x_2\cdots,x_n):\lambda(x)\geq k\}=\{(x_1,x_2\cdots,x_n):\sum_{i=1}^n x_i^2\geq c\}$

当 H_0 成立时 $\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{4}\sim\chi^2(n)$，对给定的 α，有

$P_0(\lambda(x)\geq k)=P_0\{\sum_{i=1}^n x_i^2\geq c\}=P_0\{\sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{4}\geq\frac{c}{4}\}=1-\chi^2(\frac{c}{4})=\alpha$

$\Rightarrow\ c=4\chi^2_{1-\alpha}(n)$

故对给定的 α 求得的MPT的检验函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \sum_{i=1}^n x_i^2\geq 4\chi^2_{1-\alpha}(n)\\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i^2< k\chi^2_{1-\alpha}(n)\end{cases}$$

五.解：长度 $L\sim N(\mu,\sigma^2)$

$H_0:\mu=9\qquad H_1:\mu\neq 9$

利用t检验法，检验统计量 $T=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$

$$\frac{\bar{x}-9}{s/\sqrt{25}}=3.889>t_{0.975}(24)$$

因此在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，拒绝原假设，不认为这批产品长度为 9cm

试验号 \ 列号	A 1	B 2	A×B 3	C 4	A×C 5	D 6	7	实验数据
1	1	1	1	1	1	1	1	350
2	1	1	1	2	2	2	2	325
3	1	2	2	1	1	2	2	425
4	1	2	2	2	2	1	1	425
5	2	1	2	1	2	1	2	200
6	2	1	2	2	1	2	1	250
7	2	2	1	1	2	2	1	275
8	2	2	1	2	1	1	2	375
T_{1j}	1525	1125	1325	1250	1400	1350	1300	T=2625
T_{2j}	1100	1500	1300	1375	1225	1275	1325	
R_j	425	375	25	125	175	75	25	
因素主→次	A, B; A×C, C; D; A×B							
最优方案	$A_1B_2C_1D_1$							

因子主→次 A, B; A×C, C; D; A×B

考虑相互作用，A×C排在C之前，挑选C的最优水平从A×C入手.

其中 A取水平1： $A_1 \times C_1 = 350+425 = 775$

$A_1 \times C_2 = 325+425 = 750$

C取水平1

综上，最优方案为 $A_1B_2C_1D_1$

No.

Date. / /

b.

(1) $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$

求特征值有

$$|\lambda I - \Sigma| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-18 \end{vmatrix} = (\lambda-18)(\lambda^2-3\lambda+1)$$

有三个特征值 $\lambda_1 = 18$, λ_2, λ_3 ($\lambda_2+\lambda_3=3$)

$\because \frac{18}{3+18} = 0.857 > 85\%$

故应该选取一个主成分

(2) 求 $\lambda=18$ 下的特征向量

$(\lambda I - \Sigma)\alpha = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 17 & -1 & 0 \\ -1 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故主成分为 $y_1 = x_3$