北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数学建模（三）

——效用函数综述

学院：可靠性与系统工程学院

姓名：曹建钬

学号：20375177

摘要

效用函数诞生于经济学中的最优化原理，把对商品主观、感性的偏爱提升为满足生理、心理需求的效率,将效用转化为经济行为，旨在通过效用函数这个数学模型帮助决定商品的选择，是具有现实意义的。本文搜集并整理了常用的效用函数理论和一些适用于特定场景的效用函数供参考。

关键词：效用函数

引言

效用函数通常表示消费者在消费中所获得的效用与所消费的商品组合之间数量关系的函数。它被用以衡量消费者从消费既定的商品组合中所获得满足的程度。运用无差异曲线可以分析两种商品的组合,而运用效用函数则能分析更多种商品的组合。其表达式是:$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots)$，式中$q_1, q_2, q_3, \dots$分别代表消费者所拥有或消费的各种商品的数量。下面介绍了$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots)$的具体形式及应用场景。

一、微观经济学领域中常用效用函数的形式

效用函数的存在立足于两个假设：①假定消费者偏好具有完备性、自返性、传递性、连续性和强单调性，那么，存在着一个能代表该偏好的连续效用函数②效用随着单个商品数量递增而增长,且单个商品的边际效用递减。

事实上西方经济学仅仅“证明”了效用函数的存在性，并没有求出具体的效用函数，这就给予了极大地自由去根据实际情景（对各商品之间的偏好关系）去选择已有的效用函数，或从上面的两个假设中构造出新的效用函数，下面提供了微观经济学领域经典且常用的四种效用函数的形式以供使用。

（一）、柯布—道格拉斯效用函数

1、基本形式（两件商品）

$$U(q_1, q_2) = a{q_1}^{\alpha}{q_2}^{\beta}(a > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$$

同时能得到无差别曲线（曲线上的点代表效用相等）如图 1：

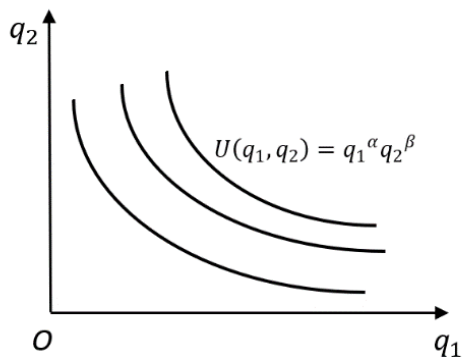

图 1：柯布—道格拉斯效用函数无差别曲线

2、对应效用最大化模型

$$\max U(q_1, q_2)$$

$$s.t.\, p_1 q_1 + p_2 q_2 = s$$

其中q_1, q_2分别代表甲乙商品购买的数量，效用函数使用柯布—道格拉斯效用函数形式：$U(q_1, q_2) = a q_1{}^{\alpha} q_2{}^{\beta} (a > 0, 0 < \alpha, \beta < 1)$。

p_1, p_2分别代表甲乙商品的单价，s即准备付出的金额。

求解得到

$$\frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

可以看出购买两种商品所用费用之比等于参数 α 与 β 之比，与商品价格无关，其中α, β分别代表了对甲乙商品的偏爱程度，从理论上来讲,其可以通过一系列心理测试来逼近。

3、推广至多件商品

假如推广到 n 种商品，则效用函数可以推广到$U = U(q_1, q_2, \dots q_n)$。

构建效用最大化模型：

$$\max U(q_1, q_2, \dots q_n)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = s$$

其中$q_1, q_2, \dots q_n$分别代表购买的各种商品的数量，效用函数可使用柯布—道格拉斯效用函数推广形式：$U(q_1, q_2, \dots q_n) = a q_1{}^{\alpha} q_2{}^{\beta} \dots q_n{}^{\gamma} (a > 0, 0 < \alpha, \beta \dots \gamma < 1)$。

$p_1, p_2, \dots p_n$代表 n 种商品单价，s 即准备付出的金额。

根据各种商品单位金额的边际效用相等时效用函数最大：

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{p_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_n}}{p_n}$$

求解得到

$$p_1 q_1 : p_2 q_2 : \dots : p_n q_n = \alpha : \beta : \dots : \gamma$$

可以看出购买各个商品所用费用之比等于参数$\alpha, \beta \dots \gamma$之比，与商品价格无关，而$U(q_1, q_2, \dots q_n)$中的参数$\alpha, \beta \dots \gamma$即代表着对各商品的偏爱程度。

（二）、完全替代效用函数

1、基本形式（两件商品）

$$U(q_1, q_2) = \alpha q_1 + \beta q_2$$

无差别曲线如图 2：

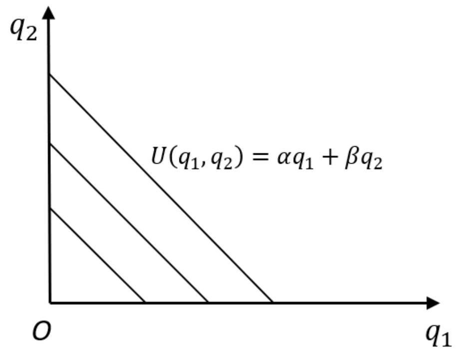

图 2：完全替代效用函数无差别曲线

2、对应效用最大化模型

$$max\, U(q_1, q_2)$$
$$s.t. p_1 q_1 + p_2 q_2 = s$$

完全替代效用函数$U(q_1, q_2) = \alpha q_1 + \beta q_2$，此时的$\alpha, \beta$表示消费者愿意用$\beta$单位的$q_1$替代$\alpha$单位的$q_2$，表示甲乙商品间存在完全替代关系，特别地，当$\alpha / \beta = 1$时，甲乙商品以固定比例$1:1$替代，消费者只关心$s$金额下能购买的甲乙商品总数。

最优化模型求解得到

$$\begin{cases} if\ \dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{p_1}{p_2}, p_1 q_1 = s \\ if\ \dfrac{\alpha}{\beta} \le \dfrac{p_1}{p_2}, p_2 q_2 = s \end{cases}$$

在完全替代效应函数模型下，全部预算将会用来购买一种商品。

3、推广至多件商品

构建效用最大化模型：

$$max\, U(q_1, q_2, \dots q_n)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = s$$

效用函数可以推广到$U = U(q_1, q_2, \dots q_n) = \alpha q_1 + \beta q_2 + \cdots + \gamma q_n$

最优化模型求解得到

$$\text{if}\max\left(\frac{\alpha}{p_1}, \frac{\beta}{p_2}, \dots, \frac{\gamma}{p_n}\right) = \frac{\theta}{p_i}, p_i q_i = s$$

同样地，由于各种商品单位金额的边际效用相等为常数，只要将预算全部用来购买单位金额的边际效用最大的商品即可得到最大效用。

（三）、里昂惕夫效用函数

1、基本形式（两件商品）

$$U(q_1, q_2) = Min(\alpha q_1, \beta q_2)$$

无差别曲线如图 2：

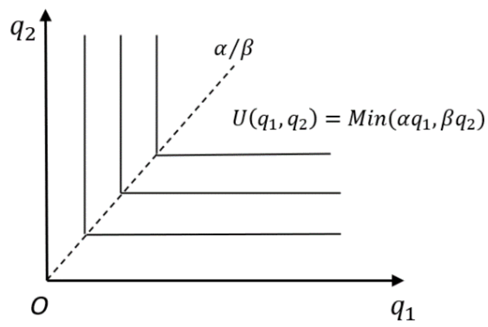

图 3：里昂惕夫效用函数无差别曲线

2、对应效用最大化模型

$$max\, U(q_1,q_2)$$

$$s.t.\, p_1q_1+p_2q_2=s$$

里昂惕夫效用函数$U(q_1,q_2)=Min(\alpha q_1,\beta q_2)$，此时的效用函数表示的是一种完全互补型偏好关系，消费者在这种偏好关系下做出的效用最大化选择一定落在直线$q_2/q_1=\alpha/\beta$上，即消费者始终以固定的比例购买甲乙两种商品。

3、推广至多件商品

构建效用最大化模型：

$$max\, U(q_1,q_2,\ldots q_n)$$

$$s.t.\sum_{i=1}^{n}p_iq_i=s$$

效用函数可以推广到$U=U(q_1,q_2,\ldots q_n)=Min(\alpha q_1,\beta q_2,\ldots,\gamma q_n)$

最优化模型求解得到：

$$q_1:q_2:\ldots:q_n=\frac{1}{\alpha}:\frac{1}{\beta}:\ldots:\frac{1}{\gamma}$$

结果表明购买的各商品数量仅由效用函数中的$\alpha,\beta,\ldots,\gamma$参数确定，和各商品价格无关。

这就和“木桶效应”很相似，消费者的里昂惕夫效用函数下的效用只取决于购买的不同种类商品各自提供的效用的最小值，因此在一定预算s下应该力求“均衡”，而效用函数中的参数即反映这种“均衡”关系。

（四）、常替代弹性效用函数（CES）

1、替代弹性

经济学中弹性概念关注一个变量的相对变化dx/x对另一个变量的相对变化dy/y的影响，因此弹性通常指变量x变动百分之一个单位，变量y变动多少个百分比单位。

效用函数中的替代弹性衡量两种商品相对边际替代率MRS的百分比变动将如何引起消费者对两种商品的相对消费数量Q的百分比变动，公式表示为：

$$\sigma = \frac{d\frac{Q_b}{Q_a}/\frac{Q_b}{Q_a}}{dMRS/MRS} = \frac{dIn(\frac{Q_b}{Q_a})}{dIn(MRS)}$$

其中MRS为商品 A 对商品 B 的边际替代率（无差异曲线斜率），在市场均衡时边际替代率等于两者价格之比。

2、CES 效用函数形式

CES 效用函数建立于替代弹性为常数的基础上。

其效用函数通式为：

$$U(q_1, q_2, \dots q_n) = (\sum_i^n \alpha_i {x_i}^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

常见二元形式为：

$$U(q_1, q_2) = (\alpha {q_1}^{\rho} + \beta {q_2}^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}\text{其中}\alpha + \beta = 1$$

3、CES 效用函数替代弹性

$$MRS_{12} = \frac{\partial U}{q_1}\Big/\frac{\partial U}{q_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{{q_1}^{\rho-1}}{{q_2}^{\rho-1}}$$

$$\sigma = \frac{dIn(\frac{q_2}{q_1})}{dIn(MRS_{12})} = \frac{1}{\rho - 1}$$

因此在模型设定下，两种消费品的替代效用为常数。

4、CES 效用函数的性质

CES 效用函数不过是量化效用的一种函数形式，通过对ρ的不同设定，可以得到具有不同替代弹性的效用函数。特别的，有如下几种情况：

① $\rho = 0$时，它表示柯布—道格拉斯效用函数

② $\rho = 1$时，它表示完全替代的线性效用函数

③ $\rho \rightarrow \infty$时,它是表示完全互补的里昂惕夫效用函数

（五）、四种效用函数的联系

从 CES 效用函数的性质可以看出前面介绍的柯布—道格拉斯效用函数、完全替代的线性效用函数和完全互补的里昂惕夫效用函数都是 CES 效用函数的特

例，自然他们都建立在替代弹性的基础上。商品之间的替代关系及个人经济单位的经济行为正是微观经济学的研究领域，可以说，上面的四种效用函数理论极大地推动了微观经济学向数学化、模型化的发展。

二、“新”效用函数

传统的西方微观经济学对消费者行为的构建，是建立在消费者效用最大化的假定前提下的。而对于消费理论研究的发展，正因源于对这前提假定条件的反思。新消费理论肯定了市场存在着大量风险和不确定性，为了研究在风险条件下如何做出选择的问题，效用函数理论引入了“风险厌恶”来衡量一个人通过付钱来降低风险的意愿，同时为了研究不确定条件下的行为准则，引入了期望效用函数的概念。下面对其进行介绍。

（一）、不确定情况下的效用函数理论

1、不确定性下的行为准则

奈特认为，风险指的是概率分布已知的不确定性，而真正意义上的不确定性是概率分布都不确定。为了讨论的方便，本文这两者不加以区分。

2、不确定性下的理论决策的两种原则

2.1、数学期望最大化原则

手段：对各种可能的行为带来的结果求数学期望，选取期望最大下的行为。

但这个原则存在不合理的地方，考虑一个投币游戏（圣彼得堡悖论），你不断投掷一枚硬币直到出现正面，记你投掷次数为k，给你2^{k-1}元，你愿意花多少钱参与这个游戏？试验表明，大多数人只愿意花 2-3 元参与这个游戏，但是计算收益的数学期望，是无穷大！

面对效益期望无穷的赌博，为何人们只愿意花有限的钱参与？面对这个问题，经济学家提出了期望效用最大化原则。

2.2、期望效用最大化原则

伯努利指出，人们在投资决策时使用的并不是“钱的数学期望”而是“道德期望”。而道德期望不单单和钱的多少有关，还与初始财富有关。穷人和富人对财富的边际效用是不一样的，伯努利选取的道德期望函数是对数函数，并对圣彼得堡悖论进行了分析得到：

$$E(.)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\alpha log2^n\approx 1.39\alpha\text{（其中}\alpha\text{为一个大于零的常数）}$$

此外 Crammer 采用幂函数形式的效用函数，对圣彼得堡悖论进行了分析，他假定效用函数为$U(x)=\sqrt{x}$，得到：

$$E[U(x)]=\sum_{x=1}^{\infty}p(x)u(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2^x}\sqrt{2^{x-1}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

最终得到的期望效用收益为$x=(E[U(x)])^2=2.914$，符合大多数人的预期。

因此用期望效用代替期望收益，可能为我们的不确定情形下投资选择问题提供更好的解决方案。且根据期望效用，20%的收益未必同 2 个 10%的收益一样好，20%的亏损未必同 2 个 10%的亏损一样糟，这是比较符合实际的。

2.3、期望效用函数

所谓期望效用函数，是定义在一个随机变量集合上的函数。它在一个随机变量上的取值等于它作为数值函数在该随机变量上取值的数学期望。直观上看就是“钱的函数的数学期望”而不是“钱的数学期望”。而期望效用函数以冯・纽曼—摩根斯坦效用函数（VNM效用函数）为典型：

如果某个随机变量 X 以概率p_i取值$x_i, i=1,2,\dots,n$，而某人在确定地得到x_i时的效用为$U(x_i)$, 那么，该随机变量给他的效用便是：

$$U(X)=E=p_1U(x_1)+p_2U(x_2)+\cdots+p_nU(x_n)$$

其中 E 表示关于随机变量 X 的期望效用，因此 U(X)称为期望效用函数，又叫做冯·诺依曼—摩根斯坦效用函数（VUM函数）。这一函数表示决策人为随机事件的每种可能的结果所赋予的效用，它说明了决策者对风险的偏好。

2.3、期望效用函数的不足和发展

下来我们介绍期望效用准则的一些缺点，但是要需要说明的是，尽管它某些方面不尽如人意，但目前还没有一个准则在各个方面都比它好的。

① 在研究 Allais 悖论时发现期望效用理论忽略了人的心理因素对概率分布的影响

② 在研究 Ellsberg 悖论时发现人们判断主观概率的时候，偏重于较为清晰的概率，而对于模糊的概率会采用保守的估计，即人们不喜欢复杂的选择， 从中会得出违背概率论的基本规则（概率和为 1）的结果

为了解决期望效用理论的问题，许多学者都各自给出了解决方案：Karmarkar 提出主观权重效用；Loomes 和 Sugden 提出“后悔理论”——破坏效用在不同时间的独立性；彭实戈通过倒向随机微分方程引入了 g-期望。其中最著名的要数 Kahneman 和 Tversky 提出的前景理论，由此引入了一门全新的学科——行为金融学，在分析过程中涉及了当代心理学。

（二）、投资下的风险类型及效用函数理论

1、投资者的风险类型

首先给出下面三个假设：

假设 1：考虑一项随机计划（如抽奖），只有两种情况$\{h_1,h_2\}$，并且期望收益为 0，即$ph_1+(1-p)h_2=0$，表明这是公平赌博。

假设 2：投资者初始财富为W_0

假设 3：投资者的VNM效用函数为$V(W)$

根据假设，投资者参加这项赌博的期望效用为:

$$pV(W_0+h_1)+(1-p)V(W_0+h_2)$$

而不参加的期望效用为$V(W_0)$, 这样就可以根据投资者对于风险的态度将其划分为三类:

(1) 风险厌恶型

如果

$$V(\omega_0) = V\big(p(\omega_0 + h_1) + (1-p)(\omega_0 + h_2)\big)$$
$$\geq pV(\omega_0 + h_1) + (1-p)V(\omega_0 + h_2)$$

即投资者不参加赌博的效用大于参加赌博的效用，此时效用函数为凹函数$V''(W) \leq 0$，常见的风险厌恶型效用函数有$lnW, \sqrt{W}$。

(2) 风险偏好性

如果

$$V(\omega_0) = V\big(p(\omega_0 + h_1) + (1-p)(\omega_0 + h_2)\big)$$
$$\leq pV(\omega_0 + h_1) + (1-p)V(\omega_0 + h_2)$$

即投资者不参加赌博的效用小于参加赌博的效用，此时效用函数为凸函数$V''(W) \geq 0$。

(3) 风险中性型

如果

$$V(\omega_0) = V\big(p(\omega_0 + h_1) + (1-p)(\omega_0 + h_2)\big)$$
$$= pV(\omega_0 + h_1) + (1-p)V(\omega_0 + h_2)$$

即投资者不参加赌博的效用等于参加赌博的效用，此时效用函数为线性函数$V''(W) = 0$。

事实上，我们通常假设消费者都是风险厌恶类型的，因此非常有必要研究风险厌恶程度的度量，接下来介绍 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶函数和双曲绝对风险厌恶（HARA）函数。

2、Arrow-Pratt 绝对风险厌恶函数

(1)绝对风险厌恶

称$A(W) = -\frac{V''(W)}{V'(W)}$为 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶函数。

(2)相对风险厌恶

称$T(W) = A(W)^{-1}$为风险容忍函数，$R(W) = WA(W)$为相对风险函数。其中

$$R(W) = WA(W) = -\frac{WV''(W)}{V'(W)} = -\frac{dW'}{W'}\Big/\frac{dW}{W}$$

即$R(W)$为效用函数的变化率V'相对于财富W的负弹性，即W变化一个百分

点，V'变化$-R(W)$个百分点。

3、双曲绝对风险厌恶（HARA）函数

称形如：（为了数学方便，这里用 x 代表财富水平 W）

$$V(x)=\frac{1-r}{r}(\frac{ax}{1-r}+b)^r, b>0, \frac{ax}{1-r}+b>0$$

为双曲绝对风险厌恶函数。计算一下它的绝对风险厌恶函数:

$$V'(x)=a(\frac{ax}{1-r}+b)^{r-1}$$

$$V''(x)=-a^2(\frac{ax}{1-r}+b)^{r-2}$$

$$A(x)=-\frac{V''(x)}{V'(x)}=(\frac{x}{1-r}+\frac{b}{a})^{-1}$$

可以看出它形式上是双曲线，这也就是双曲绝对风险厌恶函数的名称由来，对应的有风险容忍函数:$T(x)=\left(\frac{1}{r-1}\right)x+\frac{b}{a}$

常用的变式如下：

(1)$r=1$：线性效用函数

$V(x)=ax$，为风险中性者的效用函数

(2)$r=2$：二次效用函数

$V(x)=-\frac{1}{2}(b-ax)^2$，一般可写成$V(x)=x+ax^2$

(3)$b=1, r$趋近于无穷大：指数效用函数

$$V(x)=-e^{-\alpha x}, A(x)=a, R(x)=ax$$

它具有常绝对风险厌恶系数（CARA）

(4)$r<1, b=0$：幂效用函数

$$V(x)=\frac{x^r}{r}, A(x)=\frac{1-r}{x}, R(x)=1-r$$

它具有常相对风险厌恶（CRRA）和递减绝对风险厌恶（DARA）

(5)$a=1, b=0, r$趋近于 0：对数效用函数

$$V(x)\to lnx, A(x)\to\frac{1}{x}, R(x)\to 1$$

它也具有常相对风险厌恶和递减绝对风险厌恶

三、发展中的效用函数

随着效用函数理论的进一步成熟，其在经济学、管理学、博弈论等领域大放异彩，同时，在这些领域中效用函数理论不断推陈出新，近来也产生了许多理论成果，下面举一些例子进行说明。

在数理经济学领域中，通过对偏好概念以及偏好序数公理化体系的研究，提出了理念偏好与理念效用函数的概念；在国际政治经济学领域中，构建了一个基于相对利益的国家效用函数用以解决短期策略选择问题；在管理科学领域中，由 Wundt 曲线引入信息效用的概念，给出了信息效用函数的定量表示，构建了基于信息效用的决策行为模型；在群体决策领域中，考虑了个体效用函数的相互影响并提出了一种计算事先公平性和事后公平性的群体效用函数模型；在灰色系统理论中，提出了灰效用函数的概念，并用来探讨灰靶决策的决策准则和内在机理。

参考文献

[1]李仲飞,梅琳.CRRA、LA 和 DA 三种效用模型的比较分析——资产配置理论的进化和发展[J].管理评论,2004(11):10-15+27-63.

[2]丁小东,庄河,黄修莉,蒋葛夫,李涛.基于 CARA 效用函数的报童决策偏差形成机理[J].控制与决策,2016,31(02):287-296.DOI:10.13195/j.kzyjc.2014.1848.

[3]侯万春.理念偏好与理念效用函数及其对 Alliass 预期效用悖论的解决[J].数量经济技术经济研究,2001(01):79-81.

[4]戴昌钧,刘广.信息效用及其在决策行为中的应用[C]//.中国信息经济学会 2007 年学术年会论文集.,2007:16-18.

[5]王明涛.一种反映群体决策公平性的群体效用函数研究[J].郑州工业大学学报(社会科学版),2000(01):58-61.

[6]夏广涛,张宇燕.理解国家行为：一个基于相对利益的国家效用函数[J].世界经济与政治,2021(11):67-94+157-158.

[7]王文平.灰靶决策的灰效用理论研究[J].华中理工大学学报,1997(S1):90-92.