北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第五章 插值与逼近

5.2 代数插值 —Hermite插值

埃尔米特(Hermite)

埃尔米特(Charles Hermite，1822—1901) 法国数学家，1822年12月24日出生在洛林的小村庄Dieuge。巴黎综合工科学校毕业，曾任法兰西学院、巴黎高等师范学校、巴黎大学教授。法兰西科学院院士。

Hermite

法1822 -1901

在函数论、高等代数、微分方程等方面都有重要发现。1858年利用椭圆函数首先得出五次方程的解。1873年证明了自然对数的底e的超越性。在现代数学各分支中以他姓氏命名的概念（表示某种对称性）很多，如“埃尔米特二次型”、“埃尔米特算子”等。

一、Hermite插值

不少实际问题不但要求在节点上函数值相等，而且还要求它的导数值也相等（即要求在节点上具有一阶光滑度),甚至要求高阶导数也相等，满足这种要求的插值多项式就是埃尔米特（Hermite）插值多项式。

Hermite 插值：给定$n+1$个互异的节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$,并已知函数值$y_i=f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$以及导数值$y'_{i_k}=f'(x_{i_k})(k=0,1,\cdots,m)$，其中$0\le i_k\le n,m\le n$,在次数不高于$m+n+1$的多项式集合$N_{m+n+1}$中求一多项式$H_{m+n+1}(x)$，使其满足

$$\begin{cases} H_{m+n+1}(x_i)=y_i, & i=0,1,\cdots,n \\ H'_{m+n+1}(x_{i_k})=y'_{i_k}, & k=0,1,\cdots,m \end{cases}$$

定理 1 设$n+1$个节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$互异，则多项式集N_{m+n+1}中存在唯一的多项式$H_{m+n+1}(x)$，使它满足

$$\begin{cases} H_{m+n+1}(x_i)=y_i, & i=0,1,\cdots,n \\ H'_{m+n+1}(x_{i_k})=y'_{i_k}, & k=0,1,\cdots,m \end{cases}$$

二、Hermite插值多项式的构造

(1) 待定系数法

设$H_{2n+1}(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\ldots+a_1x+a_0$

由插值条件

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i)=y_i \\ H'_{2n+1}(x_i)=y'_i \end{cases} \qquad i=0,1,2,\cdots n$$

共$2n+2$个方程，可求出$2n+2$个系数$a_0,a_1,\ldots,a_{2n},a_{2n+1}$.

(2)用牛顿插值法确定Hermite插值

定理 设$n+1$个节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$互异，则多项式集合N_{m+n+1}中唯一的存在牛顿插值多项式$H_{m+n+1}(x)$,满足

$$\begin{cases} H_{m+n+1}(x_i)=y_i, & i=0,1,\cdots,n \\ H'_{m+n+1}(x_{i_k})=y'_{i_k}, & k=0,1,\cdots,m \end{cases}$$

$P_n(x_i)=y_i,$

分析：$H_{m+n+1}(x)$与牛顿插值多项式$p_n(x)$在插值节点$(x_0,x_1,\cdots,x_n)$上函数值相等，

$H_{m+n+1}(x_i)-p_n(x_i)=0,$

所以有： $$H_{m+n+1}(x)-p_n(x)=q_m(x)\omega_{n+1}(x)$$

$\omega_{n+1}(x)=\cdots(x-x_n),$

即 $$\boxed{H_{m+n+1}(x)=p_n(x)+q_m(x)\omega_{n+1}(x)}$$

只要证明$q_m(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$存在且唯一就可以

即 $$\boxed{H_{m+n+1}(x)=p_n(x)+q_m(x)\omega_{n+1}(x)}$$

$$H'_{m+n+1}(x_{i_k})=p'_n(x_{i_k})+q_m(x_{i_k})\omega(x_{i_k})=y_{i_k},$$

$$q_m(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i x^i,$$

$$q_m(x_{i_k})=\boxed{\frac{y_{i_k}-p'_n(x_{i_k})}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i_k}}^{n}(x_{i_k}-x_j)}},\quad k=0,1,\cdots,m.$$

b_{i_k}

$$\boxed{\Leftrightarrow\sum_{i=0}^{m}a_i(x_{i_k})^i=b_{i_k},}$$

右式是一个线性方程组，未知量为$a_0,a_1,\cdots,a_m$.

因为函数组$\{1,x,x^2,\cdots,x^m\}$在点集$\{x_{i_k},k=0,1,\cdots,m\}$上线性无关,

所以方程组存在唯一解$a_0,a_1,\cdots,a_m$.

再证唯一性。设存在两个多项式 $H(x)$，$\tilde{H}(x)\in\mathscr{D}_{m+n+1}$，它们都满足条件(5.19)和(5.20)。记 $r(x)=H(x)-\tilde{H}(x)$，则有

$$r(x_i)=0 \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$r'(x_{i_k})=0 \quad (k=0,1,\cdots,m)$$

因而 $r(x)$有 $m+1$ 个二重零点和 $n-m$ 个单零点。由于 $2(m+1)+n-m=m+n+2$，而 $r(x)\in\mathscr{D}_{m+n+1}$，所以只能 $r(x)\equiv 0$，即 $H(x)\equiv\tilde{H}(x)$。

证毕。

Hermite插值多项式

$$H_{m+n+1}(x)=p_n(x)+q_m(x)\omega_{n+1}(x)$$

其中$\mathrm{p}_n(x)$是n次牛顿插值多项式，$q_m(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$

【例2】 给定数表

x	-1	0	1	2
$f(x)$	10	14	16	15
$f'(x)$	1		0.1	

求次数不高于5的多项式$H_5(x)$，使其满足条件

$$\begin{cases} H_5(x_i)=f(x_i), & (i=0,1,2,3) \\ H_5'(x_i)=f'(x_i), & (i=0,2,) \end{cases}$$

$n=3, m=1,$

【解】 有四个插值节点，所以可以建立满足条件$p_3(x_i)=f(x_i)\quad(i=0,1,2,3)$的三次插值多项式，现采用Newton插值多项式.

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	10			
0	14	4 $f[-1,0]$		
1	16	$f[0,1]$	$f[-1,0,1]$ -1	
2	15	$f[1,2]$	$f[0,1,2]$	$f[-1,0,1,2]$

$$f[-1,0]=\frac{f(0)-f(-1)}{0+1}=4,\quad f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=2,\quad f[1,2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=-1$$

$$f[-1,0,1]=\frac{f[-1,1]-f[-1,0]}{1-0}=-1\qquad f[-1,1]=\frac{f(1)-f(-1)}{1+1}=3$$

$$f[-1,2]=\frac{f(2)-f(-1)}{2+1}=\frac{5}{3}$$

$$f[0,1,2]=\frac{f[0,2]-f[0,1]}{2-1}=-1.5$$

$$f[0,2]=\frac{f(2)-f(0)}{1+1}=0.5$$

$$f[-1,0,1,2]=\frac{f[-1,0,2]-f[-1,0,1]}{2-1}=-\frac{1}{6}$$

$$f[-1,0,2]=\frac{f[-1,2]-f[-1,0]}{2-0}=-\frac{7}{6}$$

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	10			
0	14	4		
1	16	2	-1	
2	15	-1	-1.5	$-\frac{1}{6}$

$$p_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= 10 + 4(x+1) - (x+1)x - \frac{1}{6}(x+1)x(x-1) \quad = 14 + \frac{19}{6}x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

再设 $H_5(x) = p_3(x) + (ax+b)\omega_4(x) = p_3(x) + (ax+b)(x+1)x(x-1)(x-2)$

$$\begin{cases} H_5'(-1) = p_3'(-1) + (-a+b)(-6) = 1 \\ H_5'(1) = p_3'(1) + (a+b)(-2) = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b = \dfrac{11}{18} \\ a+b = \dfrac{17}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{59}{360} \\ b = \dfrac{161}{360} \end{cases}$$

所以 $H_5(x) = 14 + \frac{19}{6}x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{360}(161 - 59x)x(x^2-1)(x-2)$

小　结

定理 1 设$n+1$个节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$互异，则多项式集N_{m+n+1}中唯一的存在多项式$H_{m+n+1}(x)$，使它满足

$$\begin{cases} H_{m+n+1}(x_i) = y_i, & i = 0,1,\cdots,n \\ H'_{m+n+1}(x_{i_k}) = y'_{i_k}, & k = 0,1,\cdots,m \end{cases}$$

1. $\{\varphi_k(x) = x^k,\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 2n, 2n+1\}$

2. *Lagrange*型基函数构造法

3. Newton插值法构造：$\mathrm{H}_{n+m+1} = p_n(x) + q_m(x)\omega_{n+1}(x)$

作业

- 课后习题：17、19

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院