组合数学

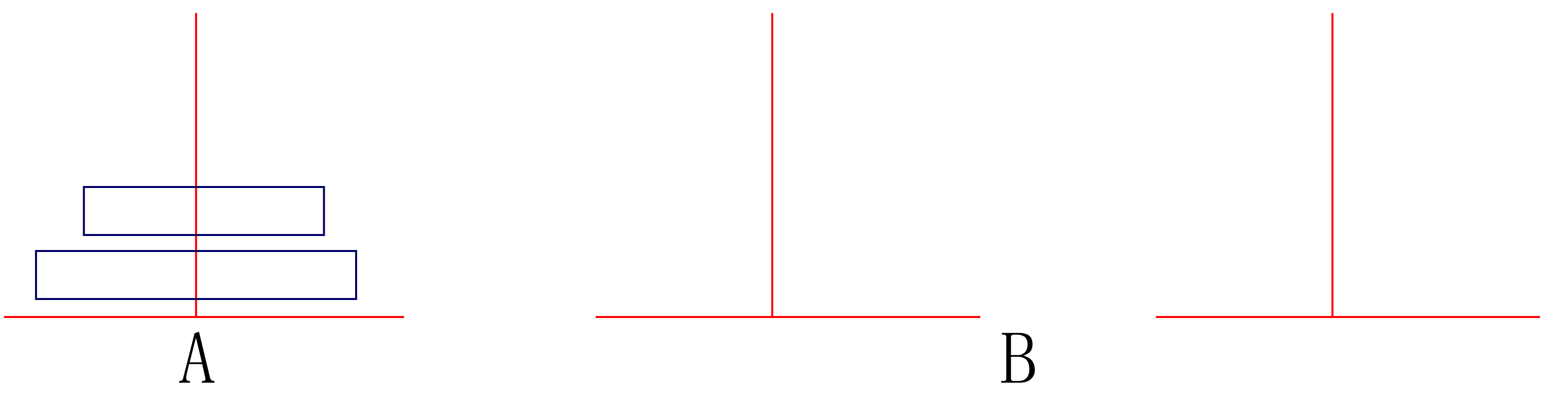
第二章　递推关系与母函数

第二章　递推关系与母函数

2.1递推关系

递推（递归）

【例2.1】Hanoi问题：这是个组合数学中的著名问题。N个圆盘依其半径大小，从下而上套在A柱上，如下图。每次只允许取一个移到柱B或C上，而且不允许大盘放在小盘上方。若要求把柱A上的n个盘移到C柱上请设计一种方法来，并估计要移动多少盘次（只有A、B、C三根柱子可用）。



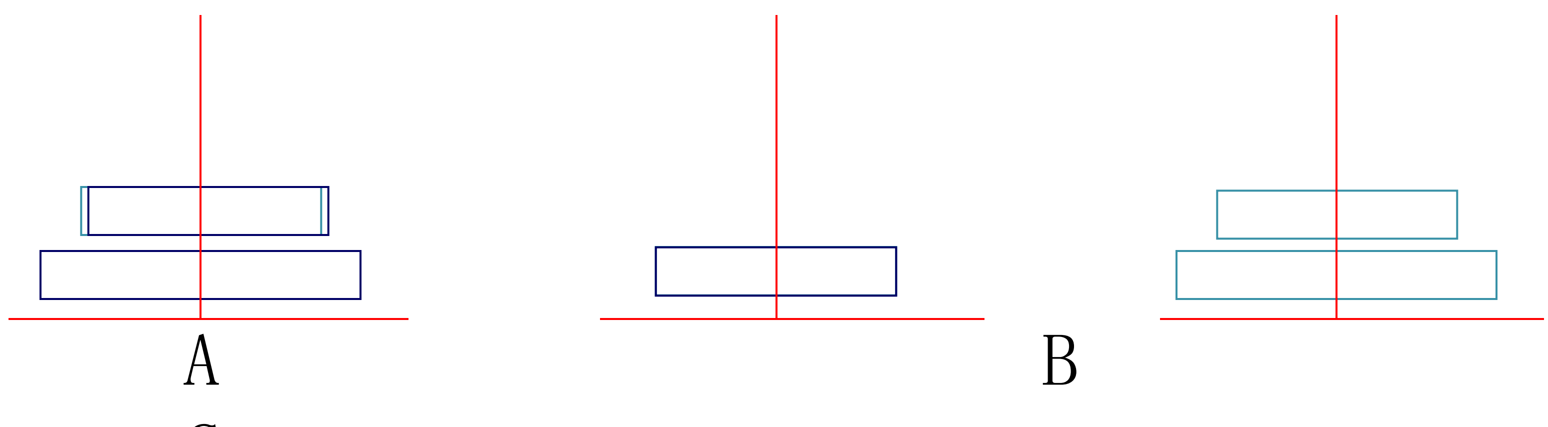
2.1递推关系

Hanoi问题是个典型的问题，第一步要设计算法，进而估计它的复杂性，即估计工作量。

算法： N=2时

最后把B上的圆盘移到C上

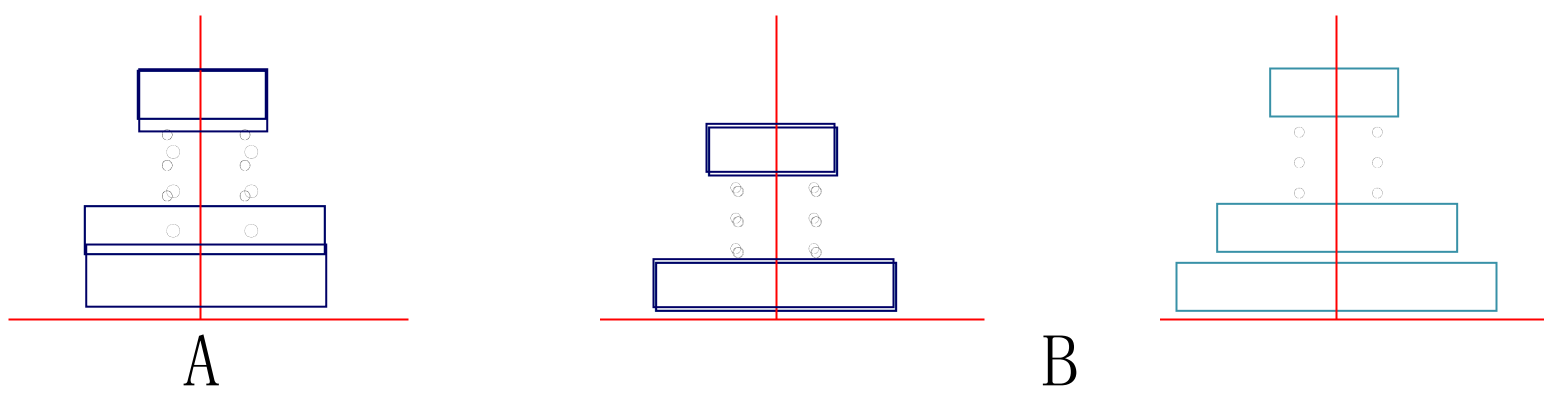
到此转移完毕



2.1递推关系

假定n-1个盘子的转移算法已经确定。

- 对于一般n个圆盘的问题，
- 先把A上面的n-1个圆盘经过C转移到B。
- 第二步把A下面一个圆盘移到C上
- 最后再把B上的n-1个圆盘经过A转移到C上



2.1递推关系

上述算法是递归的运用。n=2时已给出算法；n=3时，第一步便利用算法把上面两个盘移到B上，第二步再把第三个圆盘转移到柱C上；最后把柱B上两个圆盘转移到柱C上。N=4，5，…以此类推。

算法分析：令h(n)表示n个圆盘所需要的转移盘次。根据算法先把前面n-1个盘子转移到B上；然后把第n个盘子转到C上；最后再一次将B上的n-1个盘子转移到C上。

n=2时，算法是对的，据此，n=3算法也是对的。以此类推，有

2.1递推关系

$$H(n) = 2H(n-1)+1, \quad H(1)=1$$

H(1)=1是以上递推关系的初始条件，依次可得：H(2)=2+1= 2^2-1；

H(3)=2(2^2-1)+1= 2^3-1

H(4)=2(2^3-1)+1= 2^4-1

可通过数学归纳法证 H(n)= 2^n-1

Hanoi问题是64个圆盘，则其移动次数为：

2.1递推关系

H(64)= $2^{64}-1$≈1.8447× 10^{19}

按照教材上的假设，每秒可移动1千万次，

每年按照365天，即3.1536×10^{7} 秒，

那么完成移动共需要（约）：58494年

这个结果令你吃惊吧！

Fibonacci数列是递推关系的又一典型问题

2.1递推关系

【例2.2】有雌雄兔子一对，假定过两月便可繁殖雌雄各一的一对小兔。问过了n个月后共有多少对兔子?

分析：设满n个月时兔子对数为F(n)，其中当月新生兔对数为N(n)对，第n-1个月留下的兔子对数为O(n)对，则有

$$F(n)=N(n)+O(n)$$

根据假定，N(n)=F(n-2)，即第n-2个月的兔子对数到第n个月都有繁殖能力。O(n)=F(n-1)，即上个月原本的兔子对数。故

2.1递推关系

$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，　$F(1)=F(2)=1$

序列：

1，1，2，3，5，8，13，21，…

但递推关系H(n)如何给出，下一节就会有办法。

递推关系是计数的一个强有力的工具，特别是在做算法分析时是必需的。递推关系的求解主要是利用母函数（组合数学用的最多的工具）。

本课程主要讨论母函数在递推关系上的应用。

2.2 母函数

首先观察： $(1+a_1x)(1+a_2x)\ldots(1+a_nx)$ =1+

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)x + (a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^2 +$$

$$\cdots+ a_1a_2\ldots a_nx^n$$

不难理解： x^k **的系数是** $a_1,a_2,\ldots,a_n$ **中取k个组合的全体之和。**

令： $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$，**即得**

$$(1+x)^n = 1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots+C(n,n)x^n$$

2.2 母函数

另一方面：

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$ **故**

$$[C(m,0)+C(m,1)x+\ldots+C(m,m)x^m]\times$$

$$[C(n,0)+C(n,1)x+\ldots+C(n,n)x^n]=$$

$$[C(m+n,0)+C(m+n,1)x+\ldots+C(m+n,m+n)x^{m+n}]$$

比较以上等式两边x^k的系数，可以得到

2.2 母函数

$C(m,0)C(n,k)+C(m,1)C(n,k-1)+\ldots+C(m,k)C(n,0)=C(m+n,k)$, $k=0,1,2,\ldots\min(m,n)$

这个等式上一章有组合意义的解释，以上算是正式证明。

【思考】利用$(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{m}}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}$

可以证明： $C(n,0)C(m,0)+C(n,1)C(m,1)+\ldots+C(n,m)C(m,m)=C(m+n,m)$

注意：此时$\boldsymbol{m}\le\boldsymbol{n}$

2.2 母函数

$(1+x)^n = C(n,0) + C(n,1)x + \dots + C(n,n)x^n$

令$x=1$，就有

$2^n = C(n,0) + C(n,1) + \dots + C(n,n)$

然而，若 $\frac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2)x \dots + nC(n,n)x^{n-1}$

再令$x=1$，就有

$$n2^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2) + \dots + nC(n,n)$$

用类似的方法还可以得到:

2.2 母函数

$$nx(1+x)^{n-1} = C(n,1)x + 2C(n,2)x^2 \ldots + nC(n,n)x^n$$

对于等式两端求导函数：

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = C(n,1) + 2^2C(n,2)x \ldots + n^2C(n,n)x^{n-1}$$

还令$x=1$，则上式化作：

$$n(n+1)2^{n-2} = C(n,1) + 2^2C(n,2) \ldots + n^2C(n,n)$$

2.2 母函数

以上一类等式的证明，发现$(1+x)^n$在研究序列

$$C(n,0),\ C(n,1),\ \ldots,\ C(n,n)$$

的关系时作用非凡，现引进母函数概念如下：

【定义2.1】对于序列C_0，C_1，$C_2\ldots$，构造一函数 $G(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots$，称$G(x)$是序列$C_0$，$C_1$，$C_2\ldots$的母函数。

很容易理解，$(1+x)^n$是序列$C(n,0)$，$C(n,1)$，…，$C(n,n)$的母函数。

序列和母函数一一对应。

2.2 母函数

还是以Hanoi问题为例，了解母函数的作用。

已知：$H(n) = 2H(n-1) + 1,\ H(1) = 1$

令序列$H(n)$的母函数为：

$$G(x) = H(0) + H(1)x + H(2)x^2 + \dots$$

但发现$H(0)$需要补充定义$H(0) = 0$，则

$$x: H(1) = 2H(0) + 1$$

$$x^2: H(2) = 2H(1) + 1$$

$$x^3: H(3) = 2H(2) + 1$$

… … …

相加容易得：

2.2 母函数

$$G(x) = 2x[H(0)+H(1)x+H(2)x^2+\ldots]+[x+x^2+x^3+\ldots]$$

继续变形：$G(x) = 2xG(x)+[x+x^2+x^3+\ldots]$

又因为：$x+x^2+x^3+\ldots = x(1+x+x^2+x^3+\ldots) = \frac{x}{1-x}$

故解得：

$$G(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

2.2 母函数

使用待定系数法确定序列$H(n)$

$$G(x)=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1-x}$$

关于系数A，B的联立方程组：

$$\frac{(A+B)-x(A+2B)}{(1-2x)(1-x)}=\frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

不难得到：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=-1 \end{cases}$$

解得：

$$A=1,\quad B=-1$$

2.2 母函数

使用A, B代入：

$$G(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=(1+2x+2^2x^2+\ldots)-(1+x+x^2+\ldots)=(2-1)x+(2^2-1)x^2+\ldots$$

容易看出序列：$H(n)=2^n-1,\ n=1,2,\ldots$

趁热打铁，我们使用母函数方法对Fibonacci序列求递推关系。

2.3 Fibonacci序列

已知Fibonacci序列的递归公式：

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2),\ F(1) = F(2) = 1$$

母函数$G(x) = F(1)x + F(2)x^2 + F(3)x^3 + \dots$

- 则有：x: $F(1) = 1$
- x^2: $F(2) = 1$
- x^3: $F(3) = F(2) + F(1)$
- … … …
- 相加容易得：

2.3 Fibonacci序列

母函数$G(x)-x^2-x=x[G(x)-x]+x^2G(x)$

解得：

$$G(x)=\frac{x}{(1-x-x^2)}$$

$$=\frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

不难得到：

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B)=1 \end{cases}$$

解得：

2.3 Fibonacci序列

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

解得：

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)$$

此时令：$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

故：$G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha-\beta)x+(\alpha^2-\beta^2)x^2+\ldots]$

容易得序列：

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$$

2.3 Fibonacci序列

讨论：当n足够大时，β^n趋于0.

故： $F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$

继而，$\frac{F(n)}{F(n-1)}=\alpha=1.618$

当然，$F(n-2)=F(n)-F(n-1)$

$=0.618F(n-1)$

关于Fibonacci序列的几个等式

（1）$F(1)+F(2)+\ldots+F(n)=F(n+2)-1$

证明：只要简单列出序列就可以证明。

2.3 Fibonacci序列

$$F(1) = F(3) - F(2)$$
$$F(2) = F(4) - F(3)$$
$$F(3) = F(5) - F(4)$$

… … …

$$F(n) = F(n+2) - F(n+1)$$

上述等式相加，即有：

$$F(1) + F(2) + \dots + F(n) = F(n+2) - F(2)$$

（2） $F(1) + F(3) + \dots + F(2n-1) = F(2n)$

证明：列出序列奇数项即可

2.3 Fibonacci序列

$$F(1)=F(2)$$
$$F(3)=F(4)-F(2)$$
$$F(5)=F(6)-F(4)$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$F(2n-1)=F(2n)-F(2n-2)$$

上述等式相加，即有：

$$F(1)+F(3)+\dots+F(2n-1)=F(2n)$$

(3) $F^2(1)+F^2(2)+\dots+F^2(n)=F(n)F(n+1)$

证明：列出序列项的平方即可

2.3 Fibonacci序列

$$F^2(1) = F(2)F(1)$$
$$F^2(2) = (F(3) - F(1))F(2)$$
$$F^2(3) = (F(4) - F(2))F(3)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$F^2(n) = (F(n+1) - F(n-1))F(n)$$

上述等式相加，即有：

$$F^2(1) + F^2(2) + \dots + F^2(n) = F(n+1)F(n)$$

以下讨论母函数的应用。

2.4 母函数的性质

一个序列和它的母函数一一对应。这种关系颇像数学中的积分变换，特别酷似离散序列的Z变换。往往为了求满足某种递推关系的序列，可把它转换为求对应的母函数$G(x)$，可能满足代数方程，或代数方程组，甚至是微分方程。

最后求逆变换，即从已求得的母函数$G(x)$得到序列$H(n)$。关键在于要搭起从序列到母函数，从母函数到序列这两座桥。这一节便是以此为目的的。不特别说明下面假设$\{a_k\}$、$\{b_k\}$两个序列对应的母函数分别为$A(x)$、$B(x)$。

2.4 母函数的性质

【性质1】若$b_k = \begin{cases} 0 & k < l \\ a_{k-l} & k \geq l \end{cases}$，则$B(x) = x^l A(x)$

证明：$B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_l x^l + b_{l+1} x^{l+1} + \ldots = a_0 x^l + a_1 x^{l+1} + a_2 x^{l+2} + \cdots = x^l (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = x^l A(x)$

【例1】已知$A(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x - 1$

则：$B(x) = \frac{x^m}{1!} + \frac{x^{m+1}}{2!} + \frac{x^{m+2}}{3!} + \ldots = x^{m-1}(e^x - 1)$

2.4 母函数的性质

【性质2】若$b_k = a_{k+l}$, 则

$$B(x) = \left[A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k\right] / x^l$$

证明：$B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_l x^l + \dots$

$$= \frac{1}{x^l}(a_l x^l + a_{l+1}x^{l+1} + a_{l+2}x^{l+2} + \cdots) =$$

$$\frac{1}{x^l}\left(A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_{l-1}x^{l-1}\right) =$$

$$\left[A(x) - \sum_{k=0}^{l-1} a_k x^k\right] / x^l$$

2.4 母函数的性质

【例2】已知$A(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=sinx$

则： $B(x)=-\frac{x}{7!}+\frac{x^3}{9!}-\frac{x^5}{11!}+\ldots=$

$$[sinx-\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}]/x^6$$

【性质3】若$b_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$，则$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$

证明：

$$1: b_0=a_0$$

$$x: b_1=a_0+a_1$$

$$x^2: b_2=a_0+a_1+a_2$$

… … …

相加容易得：

2.4 母函数的性质

$$B(x)=\frac{a_0}{1-x}+\frac{a_1x}{1-x}+\ldots=\frac{1}{1-x}(a_0+a_1x+\ldots)$$

$$=\frac{A(x)}{1-x}$$

【例3】已知$A(x)=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$

则：$B(x)=1+2x+3x^2+\ldots=$

$$\frac{A(x)}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$C(x)=1+3x+6x^2+\ldots=$

$$\frac{B(x)}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^3}=A(x)B(x)$$

2.4 母函数的性质

【性质4】若$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$收敛, $b_k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i$, 则

$$B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1 - x}$$

证明：由于$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$收敛，所以b_k存在

$$1: b_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = A(1)$$

$$x: b_1 = a_1 + a_2 + \ldots = A(1) - a_0$$

$$x^2: b_2 = a_2 + \ldots = A(1) - a_0 - a_1$$

… … …

相加容易得：

$$B(x) = A(1)(1 + x + x^2 + \ldots) - a_0 x(1 + x + x^2 + \ldots) - a_1 x^2(1 + x + x^2 + \ldots) - \cdots$$

2.4 母函数的性质

$$= \frac{A(1)}{1-x} - (a_0 + a_1x + \ldots)\frac{x}{1-x} =$$

$$\frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$$

【性质5】若$b_k = ka_k$, 则$B(x) = xA'(x)$

证明：$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$

$= a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 \cdots$

$= x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots)$

$= xA'(x)$

2.4 母函数的性质

【例5】已知$A(x)=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$

则：$B(x)=x+2x^2+3x^3+\ldots=$

$$\frac{x}{(1-x)^2}$$

【性质6】若$b_k=\frac{a_k}{1+k}$，则$B(x)=\frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$

证明：$B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$

$$=a_0+\frac{a_1}{2}x+\frac{a_2}{3}x^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{x}\left(a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots\right)=\frac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$$

2.4 母函数的性质

【性质7】若$c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$，则$C(x)=A(x)B(x)$

证明：

$1: c_0 = a_0 b_0$

$x: c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$x^2: c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

…… …… ……

相加容易得：

$C(x)=a_0(b_0+b_1x+\ldots)+a_1x(b_0+b_1x+\ldots)+a_2x^2(b_0+b_1x+\ldots)+\ldots=(a_0+a_1x+\ldots)(b_0+b_1x+\ldots)=A(x)B(x)$

2.4 母函数的性质

【例6】已知$A(x)=1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$

$$B(x)=x+2x^2+3x^3+\ldots=\frac{\mathrm{x}}{(1-\mathrm{x})^2}$$

$$c_k=1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

则：$C(x)=A(x)B(x)=\frac{x}{(1-x)^3}$

分析：

$$c_0=a_0b_0$$

$$c_1=a_0b_1+a_1b_0$$

$$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$$

… … …

2.4 母函数的性质

【练习】1. 求序列0，$1\times2\times3$，$2\times3\times4$，$\cdots n(n+1)(n+2),\cdots$的母函数。

[参考答案：$\frac{6x}{(1-x)^4}$]

2. 求n位十进制数中出现偶数个5的数的个数。

分析：

令 $a_n = n$位十进制数中出现偶数个5的数的个数

$b_n = n$位十进制数中出现奇数个5的数的个数

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1} \end{cases}, \quad a_1 = 8,\ b_1 = 1$$

2.4 母函数的性质

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots$$

$$-9xA(x) = \qquad -9a_1x - 9a_2x^2 - \dots$$

$$-xB(x) = \qquad -b_1x - b_2x^2 - \dots$$

以上各式相加：

$$(1-9x)A(x) - xB(x) = 8$$

$$B(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \dots$$

$$-9xB(x) = \qquad -9b_1x - 9b_2x^2 - \dots$$

$$-xA(x) = \qquad -a_1x - a_2x^2 - \dots$$

以上各式相加：

$$(1-9x)B(x) - xA(x) = 1$$

2.4 母函数的性质

解关于$A(x)$、$B(x)$的线性方程组，继而获得关于$\{a_k\}$的递推关系。