数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

北京航空航天大学 数学科学学院

欢迎选修
数值分析

贺慧霞

第一章　绪论

这一讲要讨论的问题

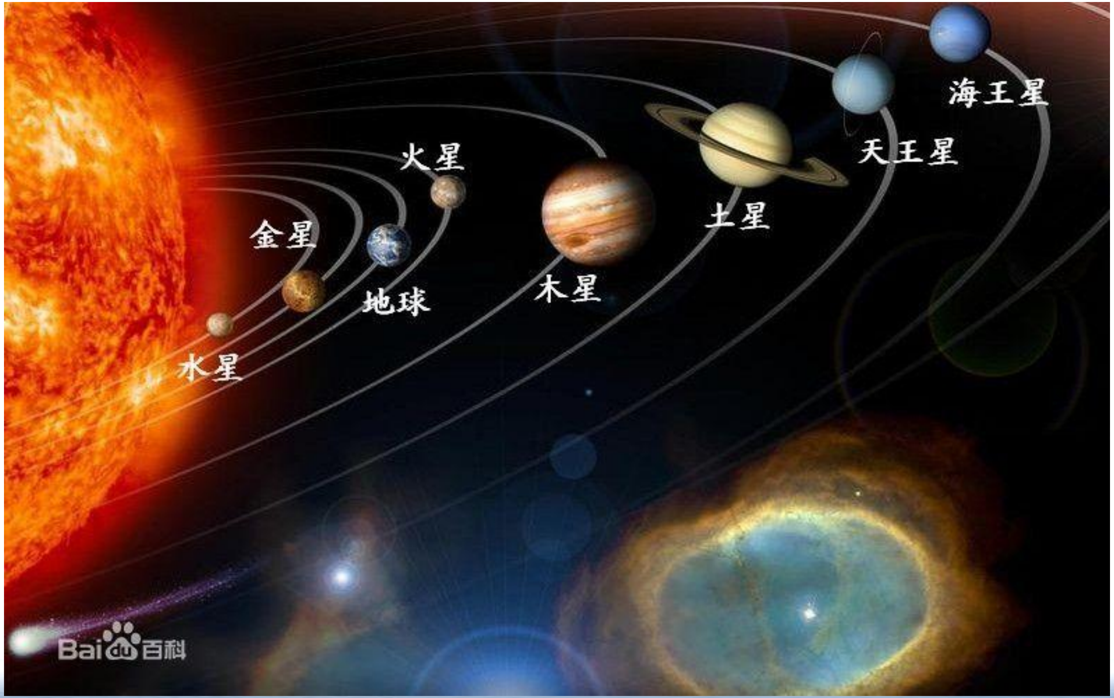
- 数值分析是做什么的?
- 在这门课上，将要学习哪些内容?
- 如何才能学好这门课程?

一、数值分析是做什么的？

1、天体力学中的Kepler方程

$$x-\varepsilon\sin x-t=0, 0<\varepsilon<1$$

x是行星运动的轨道，它是时间t的函数。



Kepler方程 $x - \varepsilon \sin x - t = 0, 0 < \varepsilon < 1$

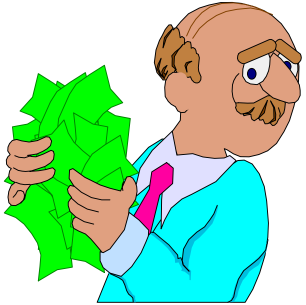
超越方程，无法获得解析解!

非线性方程的数值解法!

2、已经测得某处海洋不同深度处水温如下：

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（°C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

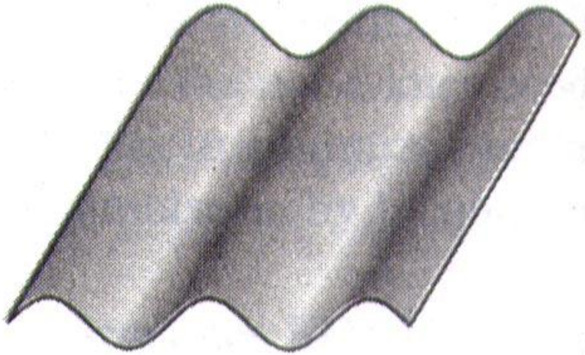
根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温



插值法！

3、铝制波纹瓦的长度问题

建筑上用的一种铝制波纹瓦是用一种机器将一块平整的铝板压制而成的.



假若要求波纹瓦长4英尺,每个波纹的高度(从中心线)为1/2英寸,且每个波纹以2π英寸为一个周期. 求制做一块波纹瓦所需铝板的长度L.

1英尺=12英寸

这个问题就是要求由函数f(x) = sin(x)/2给定

曲线从$x = 0$到$x = 48$英寸间的弧长L。

由微积分学我们知道，所求的弧长可表示为:

$$L = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2 / 4}\, dx$$

上述积分称为第二类椭圆积分,它不能用初等函数表示出来，只能通过无穷级数表示.

数值积分!

数值计算方法的主要特点

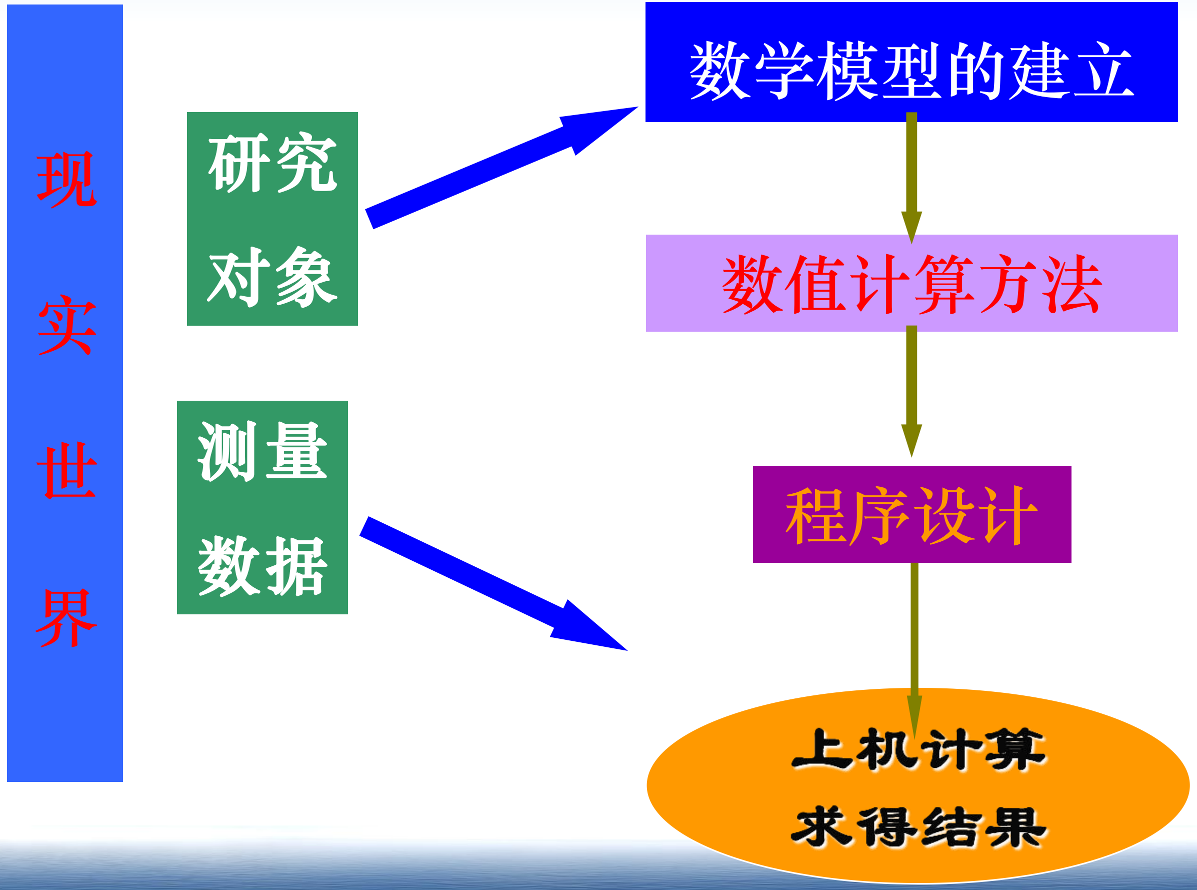
借助计算机提供切实可行的数学算法.

所提出的算法必须具有：可靠的理论分析；理想的精确度；收敛且稳定；误差可以分析或估计.

计算复杂性好 $\begin{cases} \text{时间复杂性好--指节省时间；} \\ \text{空间复杂性好--指节省存储量。} \end{cases}$

通过数值实验证明算法行之有效.

二、数值计算的基本流程



数值分析是:

- 构造求解科学与工程计算问题的数值方法
- 在计算机上实现所构造的算法并求得数值解
- 对构造的数值方法进行评估（误差，稳定性）

三、在这门课上，将要学习哪些内容?

- 误差（第1章)
- 线性方程组的解法（第2章)
- 矩阵特征值和特征向量的计算（第3章)
- 非线性方程和方程组的求解（第4章)
- 函数插值、逼近，正交多项式（第5章)
- 数值积分（第6章)
- 数值微分和常微分方程数值解差分法（第7章)
- 偏微分方程数值解简介（第8章—选讲内容)

  （冯仁忠 偏微分方程数值解）

参考资料

1.　主要教材：颜庆津，数值分析，北京航空航天大学出版社

2.　一般参考书

(1) 邓建中、刘之行,《计算方法》(第二版),西安交通大学出版社，2007年

(2)王能超，《数值分析简明教程》(修订版),华中科技大学出版社，2009年

(3)易大义、陈道琦，《数值分析引论》，浙江大学出版社，1998年

(4) Richard L. Burden & J. Douglas Faires，数值分析（第七版 影印版），高等教育出版社 & Thomson Learning, Inc.，2010年

(5) 文世鹏，《应用数值分析》（第三版），石油工业出版社，2005 年

3.综合类（数值分析与科学计算、习题、实验等）参考书

① 徐士良、马尔妮，常用算法程序集，清华大学出版社，2013

② Numerical Recipes(数值方法库） in C/Matlab/Fortran/C++

本门课程的特点

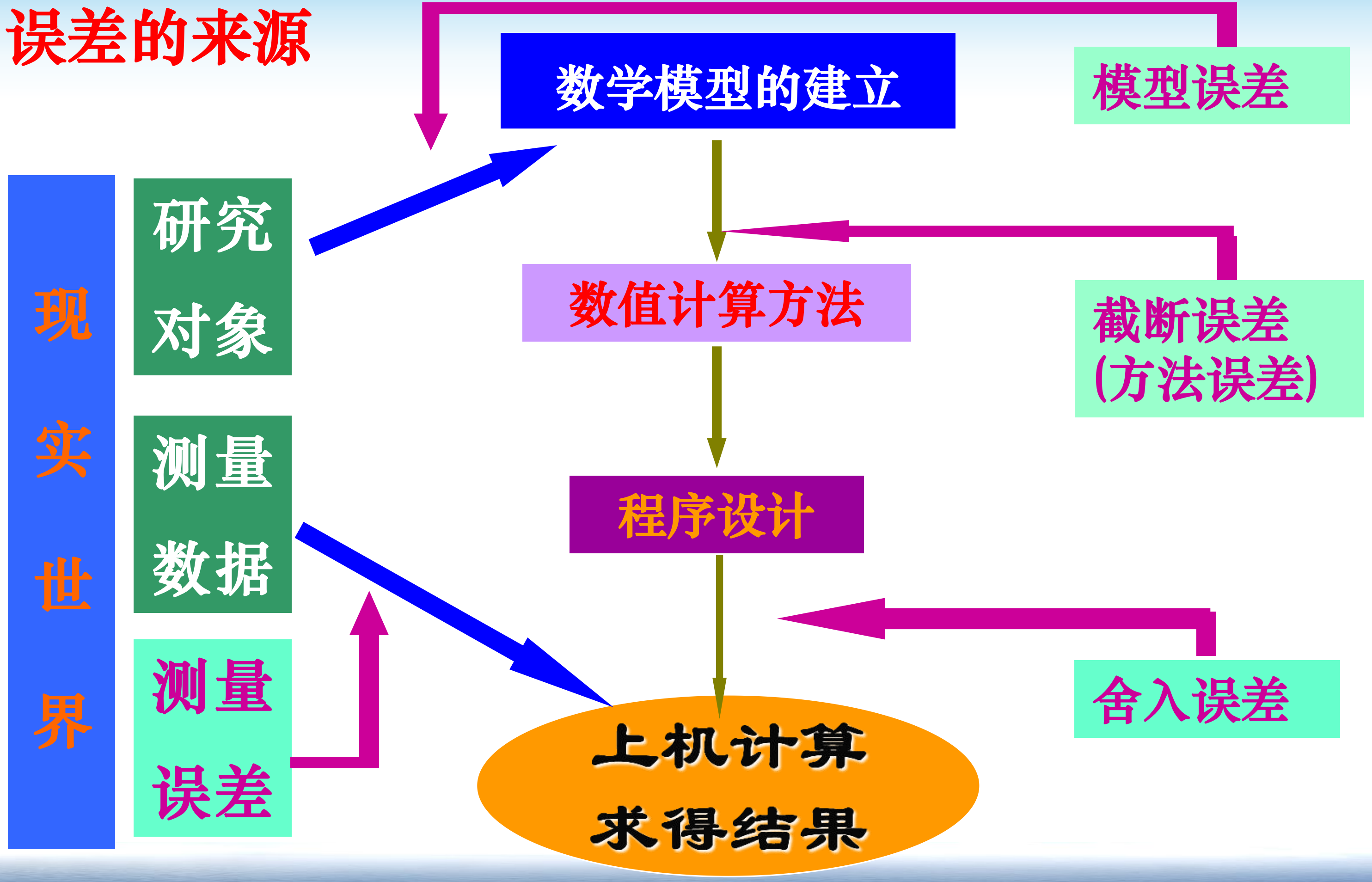
- 既有数学类课程中理论上的抽象性和严谨性，又有实用性和实验性的技术特征
- 各部分内容相对独立

学习要求

- 掌握各种数值方法的基本原理与构造方法
- 掌握经典方法的程序代码
- 掌握各种方法的误差分析

1.2 误　差

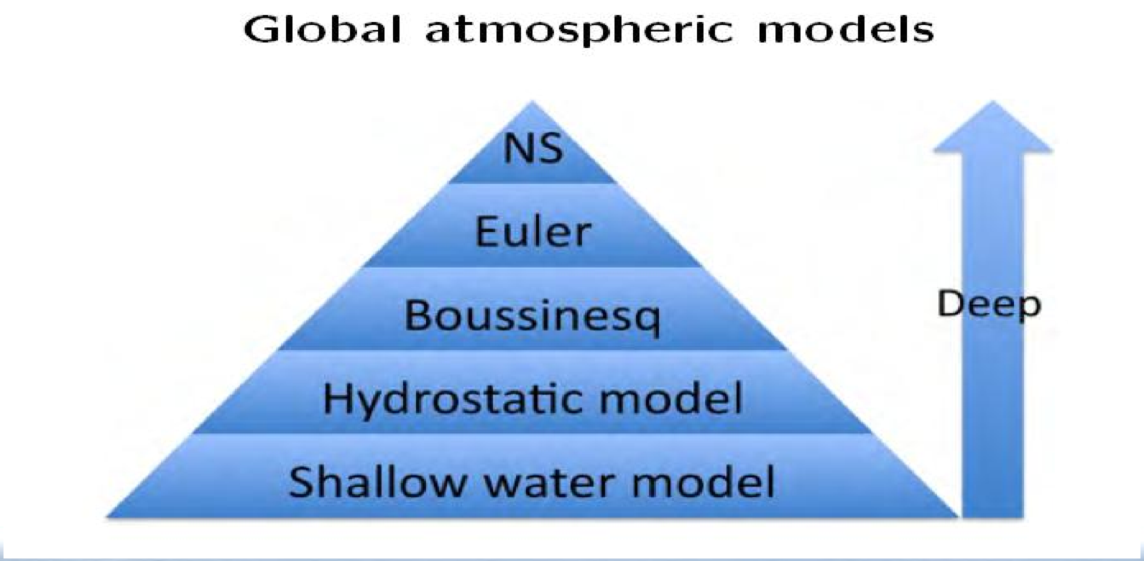
1. 误差的来源


现实世界
研究对象
测量数据
测量误差
数学模型的建立
模型误差
数值计算方法
截断误差(方法误差)
程序设计
舍入误差
上机计算求得结果

2. 误差的分类:

(1) 模型误差

通过对实际问题进行抽象、简化得到的数学模型，与实际现象之间必然存在误差，这种误差称之为模型误差。



2.误差的分类:

(2)观测误差

一般数学问题包含若干参量，他们的值往往通过观测得到，而观测难免不带误差，这种误差称之为**观测误差**。

例、已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下:

深度（M）	466	741	950	1422	1634
水温（°C）	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米…）处的水温

2. 误差的分类:

(3)舍入误差

用计算机、计算器或者笔算时，只能用有限位小数来代替无穷小数或用位数较少的小数代替位数较多的有限小数，例如:

$$\pi = 3.14159265\cdots \qquad \pi \approx 3.1415927$$

$$\frac{1}{6} = 0.16666666\cdots \qquad \frac{1}{6} \approx 0.1666667$$

$$\sqrt{3} = 1.73205080756\cdots \qquad \sqrt{3} \approx 1.732051$$

四舍五入之后

$$\varepsilon_1 = \pi - 3.1416 = 0.0000074\cdots$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{6} - 0.16667 = -0.00004\cdots$$

2. 误差的分类：(4)截断误差(Truncation error)

求解数学模型所用的数值计算方法如果是一种近似的方法，那么只能得到近似解，由此产生的误差称为**截断误差或方法误差**

例：近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

将e^{-x^2}做Taylor展开： $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9}-\cdots$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2\,!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots\right)dx$$

$$= \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\times\frac{1}{5} - \frac{1}{3!}\times\frac{1}{7} + \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9}}_{S_4}\ \underbrace{-\ \cdots}_{R_4\ \text{(Reminder)}}$$

取 $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx S_4$,则 $R_4 = \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} - \frac{1}{5!}\times\frac{1}{11} + \cdots$ 称为截断误差

这里 $|R_4| < \frac{1}{4!}\times\frac{1}{9} < 0.005$

截断误差的大小直接影响计算结果的精度和计算工作量，是数值计算中必须考虑的一类误差.

在数值计算方法中,主要考虑截断误差和舍入误差（包括初始数据的误差）对计算结果的影响.

3. 误差与有效数字（Error & Significant Digits）

- **绝对误差（Absolute error）**

设 x 为精确值，x^* 为 x 的近似值,则称 $e(x)= x - x^*$

为近似值 x^*的绝对误差，简称误差.

如果以0.01秒为单位,测量某人的百米速度大约为13.25秒，

求13.25秒的绝对误差.

不知道！

一般来说,不能准确知道 $e(x)$的大小,但实际问题往往可以

估计出 $|e(x)|$的一个上界ε. 即

$|x - x^*| \le \varepsilon$, 则称$\varepsilon$为绝对误差限（accuracy),简称误差限

可知 x 的范围为 $x^* - \varepsilon \le x \le x^* + \varepsilon$

工程上常记为$x=x^*\pm\varepsilon$，例如：$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0.743 \pm 0.006$

例 1 设$x=\pi=3.1415926\cdots$，近似值 $x^*=3.14$，它的绝对误差是 $0.0015926\cdots$，有

$$\varepsilon(3.14)=\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

$$|x-x^*|=0.0015926\cdots\le 0.002=0.2\times10^{-2}.$$

如果取近似值 $x^*=3.1416$，它的绝对误差是 $-0.0000074\cdots$，有

$$|x-x^*|=0.0000074\cdots\le 0.000008=0.8\times10^{-5}.\quad \varepsilon(3.1416)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

所以绝对误差限 ε 不是唯一的，但一般 ε 越小越好.

凡是精确值经过四舍五入得到的近似值，它的绝对误差限 ε 定义为x^*末位的半个单位.

只用绝对误差还不能说明数的近似程度,例如甲打字每100个错一个,乙打字每1000个错一个,他们的误差都是错一个,但显然乙要准确些,这就启发我们除了要看绝对误差外,还必须顾及量的本身。

➢ **相对误差** $e_r(x)=\dfrac{e(x)}{x}$

精确解往往无法得到！

实际应用中：$e_r(x)\approx\dfrac{e(x)}{x^*}=\dfrac{x^*-x}{x^*}$

当 $\dfrac{e(x)}{x^*}=\dfrac{e}{x^*}$ 非常小时，

$$\frac{e}{x}-\frac{e}{x^*}=\frac{e(x^*-x)}{xx^*}=\frac{e^2}{x^*(x^*+e)}=\frac{(e/x^*)^2}{(1+e/x^*)}$$

即两者相差是 $\dfrac{e}{x^*}$ 的二次方项，故可忽略不计．

相对误差上限 $\varepsilon_r=\dfrac{\varepsilon(x)}{x^*}$

- 绝对误差（Absolute error）　$\mathrm{e}(x) = x - x^*$

$|x^* - x| \le \varepsilon$, 则称 ε 为绝对误差限（accuracy）

- 相对误差　$e_r(x) = \dfrac{e(x)}{x}$

- x的相对误差限　$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon(x)}{|x^*|}$

例 1 用最小刻度为毫米的卡尺测量直杆甲和直杆乙，分别读出长度 $a=312$ mm 和 $b=24$ mm，问：$\varepsilon(a)$，$\varepsilon(b)$，$\varepsilon_r(a)$，$\varepsilon_r(b)$各是多少？两直杆实际长度 x 和 y 在什么范围内？

解： $\varepsilon(a)=\varepsilon(b)=0.5mm$

$$\varepsilon_r(a)=\frac{\varepsilon(a)}{|a|}=\frac{0.5}{312}\approx 0.16\%$$

$$\varepsilon_r(b)=\frac{\varepsilon(b)}{|b|}=\frac{0.5}{24}\approx 2.08\%$$

$$311.5=312-0.5\le x\le 312+0.5=312.5$$

$$23.5=24-0.5\le y\le 24+0.5=24.5$$

例 2 设 $a=-2.18$ 和 $b=2.1200$ 是分别由准确值 x 和 y 经过四舍五入而得到的近似值，问：$\varepsilon(a)$，$\varepsilon(b)$，$\varepsilon_r(a)$，$\varepsilon_r(b)$各是多少？

解：

$$\varepsilon(a)=0.005 \qquad \varepsilon(b)=\frac{1}{2}\times10^{-4}=0.00005$$

$$\varepsilon_r(a)=\frac{\varepsilon(a)}{|a|}=\frac{0.005}{2.18}\approx0.23\%$$

$$\varepsilon_r(b)=\frac{\varepsilon(b)}{|b|}$$

$$=\frac{0.00005}{2.1200}\approx0.0024\%$$

➢ 有效数字（significant figure）

定义 如果 $|x-x^*|\le\frac{1}{2}\times10^{-n}$，则说 x^* 近似表示 x 精确到小数后第 n 位，并从这第 n 位起直到最左边的非零数字之间的一切数字都称为**有效数字**，并把有效数字的位数称为**有效位数**.

例：$|\pi-3.141|=0.0005926\cdots<0.0006\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$，

3.141　有效数字为3，1，4.

左边第一个非零数

精确到的位数

有效位数n=3.

例：$|\pi - 3.142| = 0.0004074\cdots < 0.0005 \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$,

3.142　　有效数字为3，1，4，2．

左边第一个非零数

精确到的位数

有效位数n=4.

例：$|\pi - 3.1416| = 0.0000074\cdots < 0.00005 \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$,

有效数字为：3，1，4,1,6．有效位数n=5.

例 3 下列近似值的绝对误差限都是 0.005，

$a=1.38$， $b=-0.0312$， $c=0.86\times10^{-4}$

问：各个近似值有几位有效数字？

$a=1.38$

解： 绝对误差限为 $\frac{1}{2}\times10^{-2}=0.005$ 精确到小数点后 2位。

1.38

左边第一个非零数

精确到的位数

有效数字为 1, 3, 8.

有效位数 n=3.

- 0.0312

左边第一个非零数

精确到的位数

有效数字为3.

有效位数n=1.

c没有有效数字。

➢ 函数求值的误差估计

问题： 对于$y = f(x), u=f(x^*)$，若用 x^* 取代 x，将对 y 产生什么影响?

中值定理

1. 设$f'(x^*) \neq 0$,

分析： $e(y) = f(x) - f(x^*) \quad = f'(\xi)(x - x^*) \qquad e(x) = x - x^*$

x^* 与 x 非常接近时，可认为$f'(\xi) \approx f'(x^*)$，则有：

$$|e(y)| \approx |f'(x^*)| \cdot |e(x)|, \qquad \varepsilon(y) \approx |f'(x^*)| \cdot \varepsilon(x)$$

即：x^* 产生的误差经过f作用后被放大/缩小了$|f'(x^*)|$倍。

故称$|f'(x^*)|$为**放大因子** 或 **绝对条件数**。

$$\varepsilon_r(y) = \frac{\varepsilon(y)}{|f(x^*)|} = \left|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right| . \varepsilon(x)$$

2. 如果$f'(x^*)=f''(x^*)=\cdots=f^{(k-1)}(x^*)=0, f^{(k)}(x^*)\neq 0$,

$$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)$$

$$+\cdots+\frac{f^{(k-1)}(x^*)}{(k-1)!}(x-x^*)^{k-1}+\frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}(x-x^*)^{k}+o((x-x^*)^{k})$$

$$e(y)\approx\frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}(x-x^*)^{k}=\frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}[e(x)]^{k}$$

$$\varepsilon(y)\approx\frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}[\varepsilon(x)]^{k}$$

➢ 函数求值的误差估计---多元函数

问题：对于多元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$充分可微,

a_i表示x_i的近似值，则$u=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是函数$y=f(x)$的近似值,

$$e(y)\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(a_1,\cdots,a_n)}{\partial x_i}e(x_i),$$

$$\varepsilon(y)\approx\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(a_1,\cdots,a_n)}{\partial x_i}\right|\varepsilon(x_i),$$

误差的四则运算

$$
\text{绝对误差限}\begin{cases}
\varepsilon(a \pm b) = \varepsilon(a) + \varepsilon(b) \\
\varepsilon(ab) \approx |a|\varepsilon(b) + |b|\varepsilon(a) \\
\varepsilon\left(\dfrac{a}{b}\right) \approx \dfrac{|a|\varepsilon(b) + |b|\varepsilon(a)}{b^2}
\end{cases}
$$

$$
\text{相对误差限}\begin{cases}
\varepsilon_r(a \pm b) = \dfrac{\varepsilon(a) + \varepsilon(b)}{|a \pm b|} \\
\varepsilon_r(ab) \approx \varepsilon_r(a) + \varepsilon_r(b) \\
\varepsilon_r(a/b) \approx \varepsilon_r(a) + \varepsilon_r(b)
\end{cases}
$$

例：设有三位近似数 $a \approx 2.31, b \approx 1.93, c \approx 2.24$,都有三位有效数字.
试计算$p = a + bc, \varepsilon(p)$和$\varepsilon_r(p)$.并问$p$的计算结果有几位有效数字？

解：

$$p = 2.31 + 1.93 \times 2.24 = 6.633\,2$$

$$\boxed{\varepsilon(a) = \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.005}$$

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(a) + \varepsilon(bc) \approx$$

$$\varepsilon(a) + |b|\varepsilon(c) + |c|\varepsilon(b) =$$

$$\boxed{= \varepsilon(b) = \varepsilon(c)}$$

$$0.005 + 0.005(1.93 + 2.24) = 0.025\,85$$

$$\varepsilon_r(p) = \frac{\varepsilon(p)}{|p|} \approx \frac{0.025\,85}{6.633\,2} \approx 0.39\%$$

$\varepsilon(p) \approx 0.02585 < 0.05 = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$ 所以p能有两位有效数字.

例 5 设 $f(x,y)=\frac{\cos y}{x}$，$x=1.30\pm0.005$，$y=0.871\pm0.0005$。如果用 $\tilde{u}=f(1.30,0.871)$作为 $f(x,y)$的近似值，则 $\tilde{u}$ 能有几位有效数字？

解：$\varepsilon(x)=0.005,\quad \varepsilon(y)=0.0005$

$$\tilde{u}=f(1.30,0.871)\approx 0.49543$$

$$f_x=-\frac{\cos y}{x^2},\ f_y=-\frac{\sin y}{x}$$

$$\varepsilon(y)\approx\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(a_1,\cdots,a_n)}{\partial x_i}\right|\varepsilon(x_i),$$

$$\varepsilon(\tilde{u})=|f_x(1.30,0.871)|\varepsilon(x)+|f_y(1.30,0.871)|\varepsilon(y)$$

$$\approx 0.0022<0.005=\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

$\tilde{u}$有两位有效数字.

➢ 误差分析的重要性

例 求积分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx \quad n = 0,1,2.....8$

由 $I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{(x+5)x^{n-1}}{x+5} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$ 可得

算法1： $I_n = \frac{1}{n} - 5I_{n-1} \qquad n = 1,2,...8$

算法2： $I_{n-1} = \frac{1}{5}(\frac{1}{n} - I_n) \qquad n = 8,7....1$

首先给出两种算法的初始值：

$I_0 = 0.1823215 \qquad I_8 = 0.01883692$

两种算法与真实值的比较

n	$I_n^{(1)}$	$I_n^{(2)}$	I_n
0	0.1823	0.1823	0.182322
1	0.08850	0.08839	0.0883922
2	0.05750	0.05804	0.0580389
3	0.04583	0.04314	0.0431387
4	0.02085	0.03431	0.0343069
5	0.09575	0.02847	0.0284684
6	-0.3121	0.02433	0.0243249
7	1.703	0.02123	0.0212326
8	-8.392	0.01881	0.0188369

说明 在上表中 $I_n^{(1)}$ 是算法1计算的值， $I_n^{(2)}$ 是算法2计算的值，

而 I_n 是真实值的一个近似。从上表我们不难直观的得出结论：随着n的增大，算法一的出来的值是越来越偏离真实值，我们可以说，算法1是不稳定的。

定义： 对于某个算法，若输入数据的误差在计算过程中迅速增长而得不到控制，则称该算法是**数值不稳定**的，否则是数值稳定的。

在我们今后的讨论中，误差将不可回避，

算法的稳定性会是一个非常重要的话题。

五、设计数值算法时的几个原则

由于运算是在计算机上进行的，而计算机的字长有限，因而产生舍入误差。为减小舍入误差的影响，设计算法时应遵循以下一些原则：

1. 要避免两相近数相减

2. 要避免除数绝对值远远小于被除数的绝对值的除法

3. 要防止大数“吃掉”小数

4. 注意简化计算步骤，减少运算次数

1. 避免相近的两数相减

(会耗失许多有效数字,可以用数学公式化简后再做).

例 当 x 较大时,计算 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

当$x=1000$时,

(1) 直接相减 $y=\sqrt{1001}-\sqrt{1000}=31.64-31.62=0.02$

(2) 化成 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.01581$

0.02只有 1 位有效数字,有效数字的耗失,说明准确度减小,因此, 在计算时需要加工计算公式,以免这种情况发生.

2. 避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值

例： $\frac{3.6252}{0.001} = 3625.2$，

当分母做微小改变：0.0001时， $\frac{3.6252}{0.0011} \approx 3295.6$，

$3625.2 - 3295.6 = 329.6$

- 在这种情况下，计算结果对分母的扰动很敏感，而分母通常是近似值，所以计算结果不可靠；

- 很小的数作除数，有时会造成计算机的溢出而停机。

3. 防止“大数”吃“小数”

当两个绝对值相差很大的数进行加法或减法运算时,绝对值小的数有可能被绝对值大的数"吃掉"从而引起计算结果很不可靠.

$$10^4\times0.1234+0.4987+0.4896+0.4697+0.4012$$

$$=10^4\times0.1234$$

大数$10^4\times0.1234$将小数$0.4987,0.4896,0.4697$"吃了"

而如果将小数放在前面计算

$$0.4987+0.4896+0.4697+0.4012+10^4\times0.1234$$

$$=10^4\times0.1236$$

在作连加时，为防止大数吃小数，**应从小到大**进行相加，如此，精度将得到适当改善. 当然也可采取别的方法.

大数吃小数导致严重后果!

例：用单精度计算 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根 $x_1=10^9$，$x_2=1$

算法1： 利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

在计算机内，10^9存为0.1×10^{10}，1存为0.1×10^{1}。

做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。

即1 的指数部分须变为10^{10}，则：

$1 = 0.0000000001 \times 10^{10}$，取单精度时就成为：

$-b=10^9+1=0.10000000\times10^{10}+0.0000000001\times10^{10}$

$\sim 0.10000000\times10^{10}$

$$\sqrt{b^2-4ac} \approx \sqrt{(-0.1\times 10^{10})^2-4\times 1\times 10^9} \approx 10^9$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \approx \frac{10^9+10^9}{2}=10^9$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \approx \frac{10^9-10^9}{2}=0.$$

算法2：先解出 $x_1=\dfrac{-b-sign(b)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9$

再利用 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \Rightarrow x_2=\dfrac{c}{a\cdot x_1}=\dfrac{10^9}{10^9}=1$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

4. 注意简化计算步骤，减少运算次数

计算机处理运算的速度为：$(+,-) > (\times,\div) > \exp$.

例　计算多项式：$f(x) = 5x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x + 1$

当 x=2 时的算法.

程序：
```
x=2
f=5*x^5+3*x^4+x*3+4*x^2+2*x+1
PRINT f
END
```

共运行15次乘法和 5 次 加法.

优点：简单、易懂.　缺点：不通用，计算效率不高.

例　计算多项式：$f(x)=5x^5+3x^4+x^3+4x^2+2x+1$

当 x=2 时的算法.　$=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$$
\begin{aligned}
f(x)&=5x^5+3x^4+x^3+4x^2+2x+1\\
&=(5x^4+3x^3+x^2+4x+2)x+1\\
&=((5x^3+3x^2+x+4)x+2)x+1\\
&=(((5x^2+3x+1)x+4)x+2)x+1\\
&=((((\underline{5x+3})x+1)x+4)x+2)x+1
\end{aligned}
$$

$v_0=5=a_5$

$v_1=v_0x+a_4=5x+3=13$

$v_2=v_1x+a_3=13x+1=27$

$v_3=v_2x+a_2=27x+4=58$

$v_4=v_3x+a_1$

$=58x+2=118$

$v_5=v_4x+a_0$

$=118x+1=237$

由内向外逐次计算一次多项的值.

优点：计算效率高.

共运行5次乘法和 5 次 加法.

秦九韶算法（1247年）：

已知 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0, x$ 计算 n 次多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= (\cdots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

求多项式的值时，首先计算最内层括号内一次多项式的值，

即 $v_1 = a_n x + a_{n-1}$

然后由内向外逐层计算一次多项式的值，即

$$v_2 = v_1 x + a_{n-2}, \quad v_3 = v_2 x + a_{n-3}, \cdots, v_n = v_{n-1} x + a_0.$$

特点：计算 n 次多项式的值就转化为求 n 个一次多项式的值.

这种算法叫做秦九韶算法.

观察上述秦九韶算法中的 n个一次多项式，可见计算

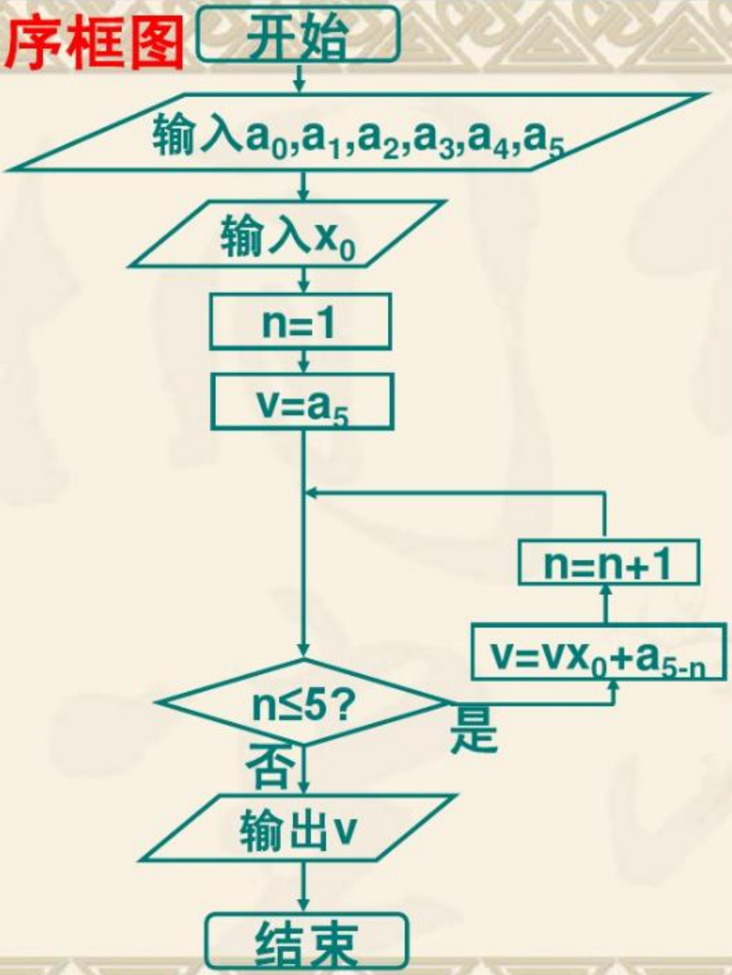
v_k的值要用到 v_{k-1}的值.如果令 $v_0 = a_n$,得

$$\begin{cases} v_0 = a_n \\ v_k = v_{k-1}x + a_{n-k}, (k = 1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

这是一个在秦九韶算法 中反复执行得步骤，可 以用循环构造来实现 .

例：画出程序框图，表 示用秦九韶算法求 5次多项式 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 当$x = x_0$时的值得过程，然后写出程 序.

程序框图



程序

```
INPUT a0,a1,a2,a3,a4,a5
INPUT x0
n=1
v=a5
WHILE  n<=5
 v=vx0+a5-n
 n=n+1
WEND
PRINT  v
END
```

算法的递推性

计算机上使用的算法常采用递推化的形式，递推化的基本思想是把一个复杂的计算过程归结为简单过程的多次重复。这种重复在程序上表现为循环。递推化的优点是简化结构和节省计算量。

谢谢大家！

北京航空航天大学数学科学学院