数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第五章 插值与逼近

$P_n'(x_{i_k})=f'(x_{i_k})$

$\forall\ f(x)\in C[a,b]$，给定 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 个插值节点，求多项式 $P_n(x)$，s.t $P_n(x_i)=f(x_i)$

函数逼近

所谓函数逼近是求一个简单的函数 $y=P(x)$,不要求 $P(x)$ 通过已知的$n+1$个点,而是要求在整体上“尽量好”的逼近原函数。函数逼近就是从整体上使$P(x)$与$f(x)$的误差在某种意义下尽量的小一些。

为了在数学上描述更精确，先要介绍代数和分析中一些基本概念及预备知识.

5.5 正交多项式

一、线性空间

数学上常把在各种集合中引入某一些不同的确定关系称为赋予集合以某种空间结构，并将这样的集合**称为空间。**

例1 所有实n维向量集合，按向量的加法和数乘构成实数域R上的**线性空间---R^n**,称为**n维向量空间**.

例2 对次数不超过n的（n为正整数）实系数多项式全体，按多项式加法和数乘构成数域R上的多项式**线性空间--H_n**,称为**多项式空间**.

例3 所有定义在 [a,b] 集合上的连续函数全体，按函数的加法和数乘构成数域R上的连续函数**线性空间－ $C[a, b]$**,称为**连续函数空间**.
类似地记$C^p[a, b]$为**具有p阶连续导数的函数空间**.

二、内积和内积空间

在线性代数中，$\mathbf{R}^n$上的两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$与$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$的内积定义为

$$<x, y>= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \qquad (1.5)$$

若将它推广到一般的线性空间V，则有下面的定义.

定义3 向量空间V上的**内积**是一个双线性函数$\langle , \rangle : V \times V \to R$，满足

(1) 对称性：$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$;

(2) 正定性：$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$，且$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$当且仅当$\vec{v} = \vec{0}$.

(3)(**双线性**)$\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle.$$

定理1 设X为一个内积空间, 对任意$u, v \in X$有如下不等式成立

$$\langle u, v\rangle^2 \le \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle. \qquad (1.6)$$

它称为**柯西—施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式**.

证明：$\forall u, v \in X, \forall \lambda \in \mathrm{R}$,都有 $\langle \lambda u + v, \lambda u + v\rangle \ge 0,$

即 $\lambda^2\langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \ge 0,$

由一元二次方程的理论可知，判别式小于等于零，即

Cauchy-Schwarz不等式 $\langle u, v\rangle^2 \le \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle.$

定义1.4 定义了内积的向量空间称为***Euclid*空间(欧氏空间)**.

设$\vec{v},\vec{w}\in V$,且$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=\vec{0}$,则称$\vec{v}$与$\vec{w}$正交(记为$\vec{v}\perp\vec{w}$).

这是向量相互垂直概念的推广.

例 设函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上可积,则 $\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$,为$R([a,b])$上的内积.如果内积

$$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

则称函数$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上正交.

$$(k_1f_1+k_2f_2,\ l_1g_1+l_2g_2)=k_1l_1(f_1,g_1)+k_1l_2(f_1,g_2)$$
$$+k_2l_1(f_2,g_1)+k_2l_2(f_2,g_2)$$

三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \qquad (\text{其中} m, n = 1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 2\int_{0}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n} - \dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Big|_0^{\pi}, & m \neq n \\ \left(x - \dfrac{\sin 2mx}{2m}\right)\Big|_0^{\pi}, & m = n \end{cases} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

三角函数系中基函数在一个周期内的“长度”相等.

三、正交多项式概念

定义 1 若区间[a,b](有限或无限)上非负的函数$\rho(x)$满足

（1）对一切整数$n \geq 0, \int_a^b x^n \rho(x)dx$存在；

(2) 对区间[a,b]上的非负连续函数 $f(x)$, 若

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = 0 \text{便有在[a,b]上} f(x) \equiv 0;$$

这时称$\rho(x)$为区间[a,b]上的**权函数**。

常见的权函数有：

（1） $\rho(x) \equiv 1, a \le x \le b;$

（2） $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$

（3） $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \le x \le 1$

（4） $\rho(x) = e^{-x}, 0 \le x < \infty$

（5） $\rho(x) = e^{-x^2}, -\infty < x < \infty$

定义3：若内积$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx=0$，则称$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上带权正交.

如果函数系$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$满足

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0 & i\neq j\\ a_i>0 & i=j\end{cases} \qquad (1)$$

则称$\{\varphi_k(x)\}$是在$[a,b]$上带权的正交函数系.

如果$\varphi_k(x)$是k次多项式,且$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$满足(1)式,则称多项式序列$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交.

定义4：函数组的线性无关性

设$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_m(x)$在区间$[a,b]$上连续, 如果

$$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_m\varphi_m(x)=0,\quad \forall x\in[a,b],$$

成立当且近当$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_m=0$,就称$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),$ $\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)\}$在$[a,b]$上线性无关;否则称为线性相关.

如果函数系$\{\varphi_k(x)\}(k=0,1,\cdots)$中任何有限个函数在$[a,b]$上线性无关,则称它为在区间$[a,b]$上线性无关的函数系.

定义5：线性空间的基底

若线性空间S是由n个线性无关元素$x_1,\cdots,x_n$生成的，即对任意$x\in$S，都有

$$x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n ,$$

则$x_1,\ldots,x_n$称为空间S的一组基, 记为S=span$\{x_1,\ldots,x_n\}$,并称空间S为n维空间，系数$a_1,\ldots,a_n$为x在基$x_1,\ldots,x_n$下的坐标，记作$(a_1,\cdots,a_n)$.

如果S中有无限多个线性无关元素$x_1,\ldots,x_n,\ldots$，则称S为无限维线性空间.

例 次数不超过n的实系数多项式集合H_n，其元素$p(x)\in H_n$表示为

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \quad (1.2)$$

它由$n+1$个系数$(a_0, a_1,\cdots,a_n)$唯一确定. $1,x,\cdots,x^n$线性无关，它是H_n的一组基，故集合

$$H_n=\mathrm{span}\{1, x,\cdots,x^n\},$$

且$(a_0, a_1,\cdots,a_n)$是$p(x)$的坐标向量，H_n是$n+1$维的.

四、正交多项式的性质

定理1 设$\{\varphi_k(x)\},(k=0,1,2,\cdots)$是在$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系,则它在区间$[a,b]$上线性无关.

证明:$\{\varphi_k(x)\}(k=0,1,\cdots)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交,

$$\Rightarrow (\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}0 & i\neq j\\ a_i>0 & i=j\end{cases}$$

$\forall m>0$,设$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_m\varphi_m(x)=0$,

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\left[a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_m\varphi_m(x)\right]\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_a^b\left[\sum_{i=0}^m a_i\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\right]\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^m a_i\int_a^b\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_a^b \left[\sum_{i=0}^{m} a_i \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right] = \sum_{i=0}^{m} a_i \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x = (\varphi_j(x),\varphi_i(x)) = 0, \ i \neq j,$$

$$\Rightarrow a_j \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \le j \le m$$

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x > 0, \quad \Rightarrow a_j = 0, \quad 0 \le j \le m$$

$\therefore$ 正交多项式系$\{\varphi_k(x)\}(k = 0,1,\cdots)$是$[a,b]$上**线性无关的.**

定理2 设$\{\varphi_k(x)\},(k=0,1,2,\cdots)$是最高次项系数不为零的$k$次多项式，则多项式系$\{\varphi_k(x)\}$是在$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系的充分必要条件是对任何次数不高于$k-1$的多项式$q(x)$,总有

$q(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$

$$\int_a^b \rho(x)q(x)\varphi_k(x)dx = 0, k = 1,2,\cdots$$

成立。

必要性　任何次数不高于 $k-1$ 的多项式 $q(x)(k\geqslant 1)$ 总可表示为某一组 0 次，1 次，…，$k-1$次多项式的线性组合，特别地，可表示为 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{k-1}(x)$的线性组合

$$q(x)=\sum_{j=0}^{k-1}c_j\varphi_j(x)$$

因而有

$$\int_a^b\rho(x)q(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=0}^{k-1}c_j\int_a^b\rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x$$

因 $j\neq k$，故上式右端每个积分皆等于零，所以式(5.72)成立。

充分性　因对任何次数不高于 $k-1$ 的多项式 $q(x)$，式(5.72)成立，所以，对于 $\varphi_j(x)$ $(j=0,1,\cdots,k-1)$应有

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

即

$$(\varphi_j,\varphi_k)=0, \quad j\neq k$$

又因 $\varphi_k(x)(k=0,1,\cdots)$是最高次项系数不为零的 k 次多项式，故 $\varphi_k(x)\not\equiv 0(x\in[a,b])$，因而有

$$(\varphi_k,\varphi_k)>0 \quad (k=0,1,\cdots)$$

根据定义，$\{\varphi_k(x)\}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系。

性质 1 设$\{\varphi_k(x)\}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系，则 $\{c_k\varphi_k(x)\}$也是 $[a,b]$ 上带权$\rho(x)$的正交多项式系，其中$c_k(k=0,1,\cdots)$是非零常数。

性质 2 区间[a,b] 上带权$\rho(x)$的正交多项式系，在各个多项式的最高次项系数为 1 的情形下是唯一的。

证明： 设$\{\varphi_k(x)\},\{g_k(x)\}$都是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系，且最高次项系数为1. $\varphi_0(x)=g_0(x)=1.$

$k\geq 1$时,$\varphi_k(x)-g_k(x)$是次数不高于$k-1$的多项式,所以

$$(\varphi_k-g_k,g_k)=(\varphi_k-g_k,\varphi_k)=0\ \Rightarrow(\varphi_k-g_k,\varphi_k-g_k)=0$$

$$\because\ \varphi_k(x),g_k(x)\in C[a,b],\therefore\ \varphi_k(x)\equiv g_k(x).$$

性质3 设$\{\varphi_k(x)\}$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系,则当$k \geq 1$时,k次正交多项式$\varphi_k(x)$有k个互异的零点,且全部位于开区间(a,b)内.

证明: 假定$\varphi_k(x)$在(a, b)内的零点都是偶数重的，则$\varphi_n(x)$在$[a, b]$上符号保持不变，这与

$$(\varphi_k, \varphi_0) = \int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_0(x)dx = 0$$

矛盾.

故$\varphi_k(x)$在(a, b)内的零点不可能全是偶重的，现设$\varphi_k(x)$在(a,b)内有m个奇重零点,记为 $a<\xi_1<\cdots<\xi_m < b.$

则$\varphi_k(x)$在ξ_i处变号,令

$$g(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_m).$$

则$\varphi_k(x)g(x)$在$[a,b]$上不变号,因此

$$(\varphi_k(x),g(x))=\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)g(x)\mathrm{d}x\neq 0$$

则$m\geq k$.

否则如果$m<k$,则由定理2可知 $\int_a^b \rho(x)\varphi_k(x)g(x)\mathrm{d}x=0$

与上式矛盾,所以$m\geq k$.

又因为φ_k是k次多项式,最多有k个根,所以$m=k$.

即k个零点都是单重的.

性质4 设$\{\varphi_k(x)\}$是[a,b]上带权$\rho(x)$的正交多项式系，则当$k\geq 1$时,相邻三项由如下递推关系式

$$\varphi_{k+1}(x)=\frac{a_{k+1}}{a_k}(x-\beta_k)\varphi_k(x)-\frac{a_{k+1}a_{k-1}}{a_k^2}\lambda_{k-1}\varphi_{k-1}$$

其中a_k是正交多项式$\varphi_k(x)$的最高次的系数.

$$\beta_k=\frac{(x\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)},\quad \lambda_{k-1}=\frac{(\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_{k-1},\varphi_{k-1})}$$

五、Gram-Schmidt正交化

给定区间$[a,b]$和权函数$\rho(x)$，均可由幂函数$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$，采用$Gram-Schmidt$（克莱姆-施密特）正交化方法得到$[a,b]$上带权正交的多项式序列

$$\varphi_0(x) \equiv 1$$

$\varphi_1(x) = x - \frac{(x,1)}{(1,1)} \cdot 1$，$\varphi_1(x) = x -$ x在 $\varphi_0(x)$上的投影.

$$\varphi_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \frac{(x^{k+1}, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \varphi_j(x) \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\varphi_2 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} \cdot x$$

例1：利用 Gram-schmidt 方法构造 [0,1] 上带权 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 的前3个正交多项式 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$.

解：利用正交化公式来求

$$\varphi_{k+1}(x)=x^{k+1}-\sum_{j=0}^{k}\frac{(x^{k+1},\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)}\varphi_j(x)$$

$$\because\quad \rho(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$$

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=x-\frac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0$$

$$\varphi_2(x)=x^2-\frac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0-\frac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 \ln\frac{1}{x}dx=-\int_0^1 \ln x dx=1 \qquad (x,\varphi_0)=-\int_0^1 x\ln x dx=\frac{1}{4}$$

于是 $\varphi_1(x)=x-\dfrac{1}{4}$ $\qquad \varphi_2(x)=x^2-\dfrac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0-\dfrac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)$

$$(x^2,\varphi_0)=-\int_0^1 x^2\ln x dx=\frac{1}{9}$$

$$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1(-\ln x)(x-\frac{1}{4})^2dx=-\int_0^1(\ln x)(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16})dx=\frac{7}{144}$$

$$(x^2,\varphi_1)=\int_0^1(-\ln x)x^2(x-\frac{1}{4})dx=\frac{5}{144}$$

于是 $\varphi_2(x)=x^2-\dfrac{1}{9}-\dfrac{5}{7}(x-\dfrac{1}{4})=x^2-\dfrac{5}{7}x+\dfrac{17}{252}$

六、工程上常用的四种正交多项式

例1 求区间$[-1,1]$，权函数$\rho(x)=1$的正交多项式

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}\times 1=x-\frac{\int_{-1}^{1}x\,dx}{\int_{-1}^{1}dx}=x$$

$$\varphi_2(x)=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}\times 1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}\cdot x$$

$$\varphi_0(x)\equiv 1$$

$$=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}{\int_{-1}^{1}dx}-\frac{\int_{-1}^{1}x^3\,dx}{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}x=x^2-\frac{1}{3}$$

$$\varphi_{k+1}(x)=x^{k+1}-\sum_{j=0}^{k}\frac{(x^{k+1},\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)}\varphi_j(x)\qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{(x^3,1)}{(1,1)} \times 1 - \frac{(x^3,x)}{(x,x)} \cdot x - \frac{(x^3,x^2)}{(x^2,x^2)} \cdot x^2$$

$$= x^3 - \frac{\overset{0}{\int_{-1}^{1} x^3 dx}}{\int_{-1}^{1} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} x^4 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} x - \frac{\overset{0}{\int_{-1}^{1} x^5 dx}}{\int_{-1}^{1} x^4 dx} x^2 = x^3 - \frac{3}{5} x$$

$$\boxed{\varphi_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2-1)^n.}$$

正交，$x^n \to a_n = 1$

1. 勒让德多项式(Legendre),

$$L_0(x)=1,\ \ L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, n=1,2,\cdots.$$

由于$(x^2-1)^n$是$2n$次多项式，求n阶导数后得

$$L_n^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n n!}(2n)(2n-1)\cdots(n+1)x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

于是得$L_n(x)$的首项x^n的系数为$a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

显然得到最高项系数为1的勒让德多项式为

$$\varphi_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

勒让德多项式的性质

性质1（正交关系）

$$\int_{-1}^{1} L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

性质2(奇偶性) $L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$

由于$\varphi(x)=(x^2-1)^n$是偶次多项式，经过偶次求导仍为偶次多项式，经过奇次求导仍为奇次多项式，故n为偶数时$L_n(x)$为偶函数，n为奇数时$L_n(x)$为奇函数，于是性质2成立.

性质3(三项递推关系)

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), n = 1, 2, 3\ldots$$

证明：考虑$n+1$次多项式 $xL_n(x)$，它可表示为

$$L_k(x)xL_n(x)=[a_0L_0(x)+a_1L_1(x)+\cdots+a_{n+1}L_{n+1}(x)]L_k(x)$$

$$\int_{-1}^{1}xL_n(x)L_k(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\Big[\sum_{i=0}^{n+1}a_iL_i(x)L_k(x)\Big]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}a_kL_k(x)L_k(x)\mathrm{d}x$$

当$k\le n-2$时，$xL_k(x)$最高次数$\le n-1$,由定理2 $\Rightarrow\int_{-1}^{1}xL_n(x)L_k(x)\mathrm{d}x=0$,

$\therefore$当$k\le n-2$时，$a_k=0$.

$\therefore$当$k=n$时，$xL_n^2(x)$是奇函数,所以左端积分仍为0,故$a_n=0$.

$$xL_n(x)=a_{n-1}L_{n-1}(x)+a_{n+1}L_{n+1}(x)$$

$$xL_n(x)=a_{n-1}L_{n-1}(x)+a_{n+1}L_{n+1}(x)$$

其中 $$a_{n-1}=\frac{2n-1}{2}\int_{-1}^{1}xL_n(x)L_{n-1}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2n-1}{2}\frac{2n}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$$

$$a_{n+1}=\frac{2n+3}{2}\int_{-1}^{1}xL_n(x)L_{n+1}(x)dx$$

$$=\frac{2n+3}{2}\cdot\frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+1}$$

代入上式整理即得递推公式.

性质3(三项递推关系)

$$L_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xL_n(x)-\frac{n}{n+1}L_{n-1}(x),n=1,2,3\ldots$$

前几项:

$L_0(x)=1,\qquad L_1(x)=x$

$L_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\qquad L_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$L_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\qquad L_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

性质4 $L_n(x)$在$[-1,1]$内有n个不同的零点.

2. 切比雪夫多项式(Chebyshev)

当权函数$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,区间为$[-1,1]$时,序列$\{1,x,x^2,\cdots\}$正交化

得到的正交多项式就是切比雪夫多项式.

常用的切比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, $|x|\le 1$.

广义积分 $$\int_{-1}^{1}\rho(x)dx=\lim_{\varepsilon\to -1^+}\int_{\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\lim_{\beta\to 1^-}\int_{0}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to -1^+}\arcsin x\Big|_{\varepsilon}^{0}+\lim_{\beta\to 1^-}\arcsin x\Big|_{0}^{\beta}$$

$$=-\arcsin(-1)+\arcsin 1=\pi$$

切比雪夫多项式的性质

性质1： $T_n(x)$在$[-1,1]$上有n个零点 $x_k=\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi,\quad k=1,2,\cdots,n.$

性质2　（正交关系）

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\end{cases}$$

证明： 令$x=\cos\theta, dx=-\sin\theta d\theta,$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\end{cases}$$

性质3(三项递推关系) $T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad |x|\le 1.$

$$\begin{cases} T_0(x)=1, T_1(x)=x \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n=1,2,3\ldots \end{cases}$$

证明： 令$x=\cos\theta$, 则$T_n(x)=\cos n\theta, 0\le\theta\le\pi.$

$$\cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos\frac{(n+1)+(n-1)}{2}\theta\cos\frac{(n+1)-(n-1)}{2}\theta$$

$$=2\cos n\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n=1,2,3\ldots$$

由递推公式可得，前几项为

$$T_0(x)=1,$$
$$T_1(x)=x,$$
$$T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,$$
$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$
$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$$

性质4　$T_n(x)$的首项x^n系数为2^{n-1}.

性质5　$T_{2k}(x)$只含x的偶次幂，$T_{2k+1}(x)$只含x的奇次幂.

如果令 $\tilde{T}_0(x)=1, \tilde{T}_n(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x), n=1,2,\cdots,n$

则多项式 $\tilde{T}_n(x)$是首 项首项系 1的切比雪夫多 项式

若记 $\tilde{H}_n$ 为所有次数小于等于n的首项系数为 1 的多项式集合

则$\tilde{T}_n(x)$具有如下性质:

定理6 设$\tilde{T}_n(x)$是首项系数为 1 的切比雪夫多项式，则

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| \le \max_{-1\le x\le 1}\left|P(x)\right|, \quad \forall P(x)\in \tilde{H}_n,$$

且
$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

定理6表明在所有首项系数为1的n次多项式集合$\widetilde{H}_n$中

$$\left\|\widetilde{T}_n(x)\right\|_\infty=\min_{P\in\widetilde{H}_n}\left\|P(x)\right\|_\infty.$$

所以 $\widetilde{T}_n(x)$ 是 $\widetilde{H}_n$ 中最大值最小的多项式，即

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\widetilde{T}_n(x)\right|=\min_{P\in\widetilde{H}_n}\max_{-1\le x\le 1}\left|P(x)\right|=\frac{1}{2^{n-1}}. \tag{2.13}$$

3 拉盖尔多项式(Laguerre)

取权函数 $\rho(x)=e^{-x}$，区间为[0, +∞)时，

由序列$\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$正交化得到的多项式就称为**拉盖尔(Laguerre)多项式**，其表达式为

$$U_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \qquad (2.17)$$

它也具有正交性质 $\int_0^{\infty}e^{-x}U_n(x)U_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ (n!)^2, & m=n,\end{cases}$

和递推关系式

$$U_0(x)=1, \qquad U_1(x)=1-x,$$

$$U_{n+1}(x)=(1+2n-x)U_n(x)-n^2U_{n-1}(x) \quad (n=1,2,\cdots).$$

4 埃尔米特多项式（Hermite)

取权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$，区间为(-∞,+∞)时，

由序列$\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$正交化得到的多项式就称为**埃尔米特(Hermite)多项式**，其表达式为

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \qquad (2.18)$$

它也具有正交性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n;\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n,\end{cases}$

和递推关系式

$$H_0(x)=1,\qquad H_1(x)=2x,$$

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\quad (n=1,2,\cdots).$$

北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院

作业

- 教材第146页习题：30,32