《抽象代数》
第三、四次作业

姓名：姜岚曦　学号：19375233

姓名：魏来　学号：20374104

姓名：曹建钦　学号：20375177

姓名：李璞　学号：20376164

姓名：刘灵　学号：21374261

\$2.1：群的定义

1. 解:

$A = \{$ 全体整数 $\}$

I. 两个整数相减还是一个整数

II.$a-(b-c)=a-b+c \neq (a-b)-c$

故不满足结合律，A 不是一个群

2. 解:

$A=\{0,1\}$，定义运算 $R: 01=1 \quad 10=1 \quad 00=0 \quad 11=0$

I.A 对 R 而言是闭的

II.

$0(00)=00=0=00=(00)0 \quad 1(00)=10=1=10=(10)0$

$0(01)=01=1=01=(00)1 \quad 1(01)=11=0=11=(10)1$

$0(10)=01=1=10=(01)0 \quad 1(10)=11=0=00=(11)0$

$0(11)=00=0=11=(01)1 \quad 1(11)=10=1=01=(11)1$

说明结合律成立

III.

$1x=0 \Rightarrow x=1 \quad y0=0 \Rightarrow y=0$

$0x=1 \Rightarrow x=1 \quad y0=1 \Rightarrow y=1$

$0x=0 \Rightarrow x=0 \quad y1=0 \Rightarrow y=1$

$1x=1 \Rightarrow x=0 \quad y1=1 \Rightarrow y=0$

说明方程 $ax=b, ya=b$ 都在 A 中有解

故 A 符合群的第一定义，是一个群

3. 解:

由群的定义 III，方程 $ax=a$ 存在群 A 内的一解设为 e，即 $ae=a$

对于 $\forall b \in A, ya=b$. 存在一解 c，即 $ca=b$.

则对于 $\forall b \in A$，有 $be=cae=c(ae)=ca=b$ 成立. 故 IV' 成立

由于 $e \in A$，故 $ax=e$ 有解. 故 V' 成立

$a=ae=a(a^{-1}a)=(aa^{-1})a=ea$ 对 $\forall a \in A$ 成立.

对于方程 $ax=b$，取 $x=a^{-1}b$，有 $a(a^{-1}b)=eb=b$ 成立.

对于方程 $ya=b$，取 $y=ba^{-1}$，有 $(ba)^{-1}a=b(a^{-1}a)=be=b$ 成立.

故 IV' 与 V' 和 III 等价，即 I、II、IV'、V' 可作为群的定义.

$2.2：单位元，逆元，消去律

1*. 解:

若对 VxeG，有 xie 成立根据定理 2, 有 x=X 对 VXGG 度立由题设有 (ab)(ab)=e 即成立另面, 有 (ba)(ab)= b(aa)b = beb =hb=C 感故 (ab)(ab)=(ba)(ab) 等式两边在乘 (ab) 有 (ab)(ab)(ab)7=(ba)(ab)(ab) 即 pabe=bae 得到 a=ba 对 Va;beC 成立. 救 G 是交换群证牛

2. 假定 A 和 $\bar{A}$ 对于代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\circ}$ 来说同态，$\bar{A}$ 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于代数运算 $\bar{\circ}$ 和 $\bar{\bar{\circ}}$ 来说同态. 证明，A 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于代数运算 $\circ$ 和 $\bar{\bar{\circ}}$ 来说同态.

证明:

对于 $\forall a \in A, \exists \phi_1: \quad a \to \bar{a}, \bar{a} \in \bar{A}.$

对于 $\forall \bar{b} \in \bar{A}, \exists \phi_2: \quad \bar{b} \to \bar{\bar{b}}, \bar{\bar{b}} \in \bar{\bar{A}}.$

且有 $\forall a, b \in A$，有 $\phi_1(a \circ b) = \phi_1 a \mathbin{\bar{\circ}} \phi_1 b$

$\forall c, d \in \bar{A}$，有 $\phi_2(c \mathbin{\bar{\circ}} d) = \phi_2 c \mathbin{\bar{\bar{\circ}}} \phi_2 d.$

令 $c = \phi_1 a, d = \phi_1 b$，有 $\phi_1(a \circ b) = c \bar{\circ} d$

即有 $\phi_2(\phi_1(a \circ b)) = \phi_2(\phi_1 a) \bar{\bar{\circ}} \phi_2(\phi_1 b)$

定义从 A 到 $\bar{\bar{A}}$ 的映射 $\phi_3: \quad a \to \phi_2(\phi_1(a)).$

则可知 A 和 $\bar{\bar{A}}$ 对于 $\circ$ 和 $\bar{\bar{\circ}}$ 同态.

$1.9：同构、自同构

1. $A = \{a, b, c\}$. 代数运算 $\circ$ 由下表给定

	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

找出所有 A 的一一变换，对于代数运算 $\circ$ 来说，这些一一变换是否都是 A 的自同构?

解:

$$\phi_1: \ a \to b, \ b \to c, \ c \to a$$

$$\phi_2: \ a \to a, \ b \to b, \ c \to c$$

$$\phi_3: \ a \to a, \ b \to c, \ c \to b$$

$$\phi_4: \ a \to b, \ b \to a, \ c \to c$$

$$\phi_5: \ a \to c, \ b \to a, \ c \to b$$

$$\phi_6: \ a \to c, \ b \to b, \ c \to a$$

A 的任意一一变换对于 $\circ$ 而言均是 A 的自同构.

2. $A = \{$ 所有有理数 $\}$. 找一个 A 的对于普通加法来说的自同构 (映射 $x \leftrightarrow x$ 除外).

解:

设 $\{\phi_k\}$ 是 $A \to A$ 的一系列映射.

考虑映射 ϕ_k： $a \to \bar{a} = ka$，其中 k 是任意不等于 1 的有理数.

对于 $\forall a, b \in A, a \circ b = a + b, \bar{a} = ka, \bar{b} = kb$.

$\phi_k(a \circ b) = k(a + b) = \phi_k(a) \circ \phi_k(b) = ka + kb$

显然，任何形如 ϕ_k 的映射均是一一映射，故都是 A 的自同构.

3*.

解:

假设存在一个一一映射 ϕ： $A \to \bar{A}$. 使得其为 A 到 $\bar{A}$ 的同构映射.

令 $a \in A, \phi(a) = \bar{a} \in \bar{A}$.

由同构映射, 有 $\phi(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}) = \phi(\frac{a}{2}) \cdot \phi(\frac{a}{2})$ 成立.

即 $\phi(a) = \phi^2(\frac{a}{2})$

由于 $\bar{A}$ 是有理数集的子集，故 $\phi^2(\frac{a}{2}) > 0$，即 $\phi(a) > 0$ 对任意 $a \in A$ 成立.

意味着任意 $\bar{b} < 0$，且 $\bar{b} \in \bar{A}$ 将找不到 ϕ^{-1} 对应的 A 中原象，与 ϕ 是一一映射矛盾，放 ϕ 不存在.

$1.10：等价关系与集合的分类

1. $A = \{$ 所有实数 $\}$. A 的元间的关系 $>$ 以及 $\geq$ 是不是等价关系?

解:

对于关系 $>$，显然不符合反射律，$\forall a \in A$, 不存在 $a > a$. 故非等价关系

对于关系 $\geq$, 符合反射律: $\forall a \in A$, 有 $a \geq a$ 成立. 不符合对称律: $\forall a, b \in A$ 且 $a \neq b$，$a \geq b$ 与 $b \geq a$ 只能成立其一.

故非等价关系.

2*.

解:

即便满足对称律与推移律. 对于 a 而言，假如不存在一个使得 aRb 成立的 b, 就无法得到 aRa.

反由对称律与推移律的存在无法确保如是的 b 存在.

3. 仿照例 3 规定整数间的关系：

$$a \equiv b(-5)$$

证明你所规定的是一个等价关系，并且找出模 -5 的剩余类.

证明:

反射律：$a \equiv a(-5)$ 显然成立.

对称律：$a \equiv b(-5) \Rightarrow b \equiv a(-5)$ 显然成立.

推移律：$a \equiv b(-5), b \equiv c(-5) \Rightarrow a \equiv c(-5)$，显然成应.

定义 -5 的剩余类 $\{0,1,2,3,4\}$

$2.6：置换群

1. 解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

3. 解:

(i)

对于不相挥的置换工,t 最字 Q 如果出现在工工中则只能出现在 2 看之-, 不妨设为工 tb@am=(abbaut -lnj7$_O at = b \quad ; \quad t\ , \quad a \quad at.azz - a \quad (ii)$ $a; i-1)()(A@ = a\ (in-)(HH-) = E$

4. 解:

5. 解:

$2.7：循环群

1. 解:

设有循环群 $G(a)$

$\forall a^{m_1}, a^{m_2} \in G(a)$

$a^{m_1}a^{m_2} = a^{m_1+m_2} = a^{m_2}a^{m_1}$

故有交换律.

2. 解:

$a^n = e$，设 $(a^r)^m = e$

$a^{rm} = e \quad rm = kn$，k 为正整数.

显然使 $rm = kn$ 成立的最小 $m = \frac{n}{d}$ 为 a^r 的阶.

3. 解:

考虑 a^r 的阶即可，设为 m，则 $(a^r)^m = e$

已知 $a^n = e$，故有 $rm = kn$，k 是正整数

由于 $rm = o(r)$，故 $kn \equiv o(r)$

若 $(r, n) = 1$，则 $k \equiv o(r)$

故 $m = \frac{kn}{r}$ 最小值为 n，当 $k = r$ 时成立.

即 a^r 的阶为 n. 其生成群与 n 的剩余类加群同构，即与 G 同构，显然 a^r 也生成 G

4. 解:

存在 G 到 $\bar{G}$ 的变换 ϕ 满射，设 $G = (a)$.

$\phi: \quad a \to \bar{a}$

对于 $\bar{G}$ 中 $\forall \bar{g}$，$\exists a^m \in G$ 使得 $\phi(a^m) = \bar{g}$.

$\phi(a^m) = (\phi(a))^m = \bar{a}^m = \bar{g}$

所以 $\bar{G} = (\bar{a})$

5. 解:

G 与整数加群同构，整数加群与任意模 n 的剩余类加群同态

模 n 的剩余类加群与 n 阶循环群 $\bar{G}$ 同构 (若 $\bar{G}$ 有限阶). 故 G 与 $\bar{G}$ 同态.

若 $\bar{G}$ 无限阶，显然有 G 与 $\bar{G}$ 同态 (同与整数加群同构)