北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第四章 非线性方程（组）的迭代解法

4.1-1 非线性方程迭代法

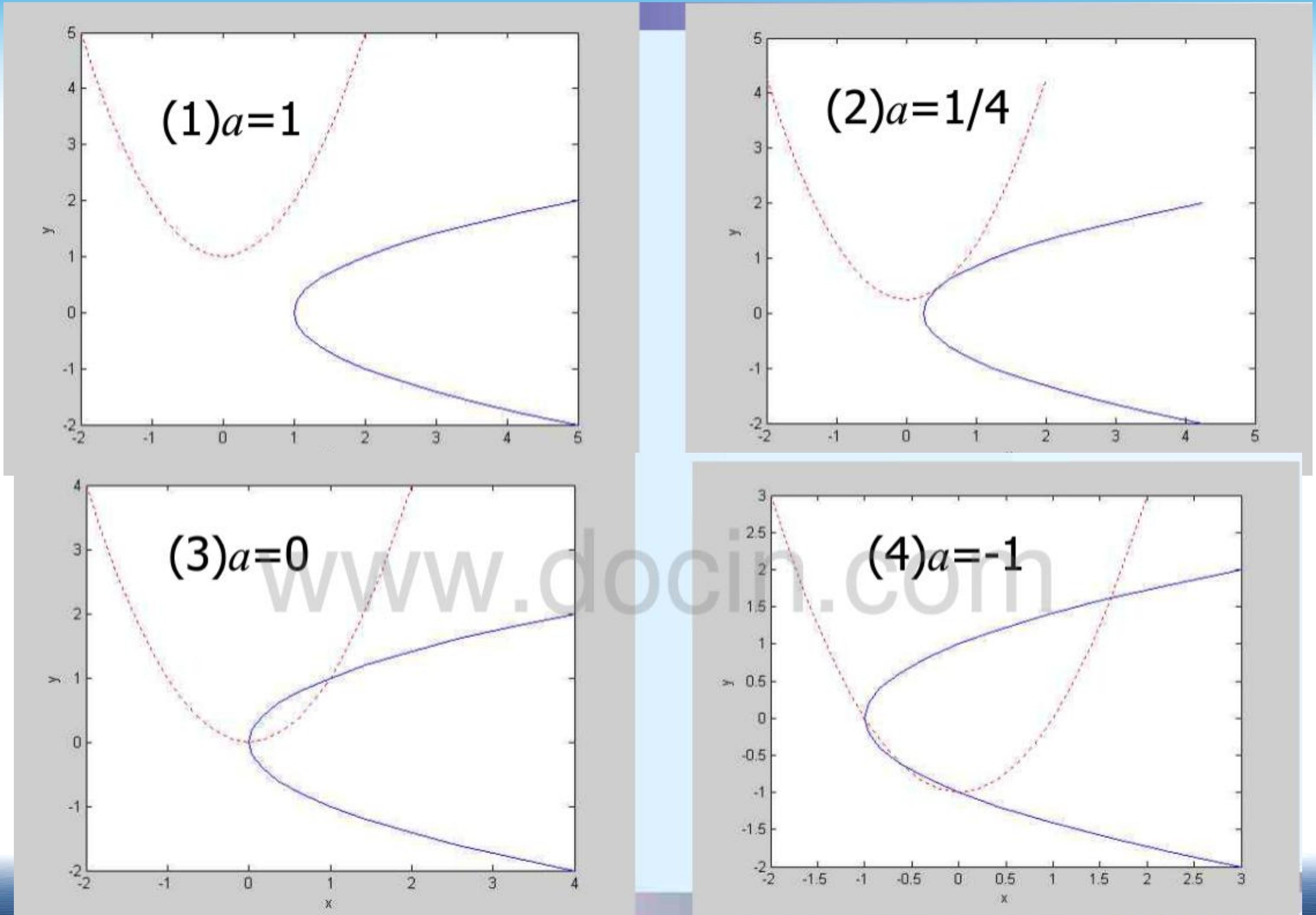
非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向，很多实际工程物理问题都归结为非线性方程（组）的求解。

非线性方程的求根非常复杂。

例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ **无穷组解**

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$


(1)a=1
(2)a=1/4
(3)a=0
(4)a=-1
y
x

根，重根的定义：

1. 根：如果存在常数s,使得 $f(s)=0$则称s是$f(x)=0$的根(零点）；

2. 重根：如果$f(s)=f'(s)=\ldots=f^{(m-1)}(s)=0, f^{(m)}(s)\neq 0$,则称$s$为$f(x)=0$的$m$重根.

此时有分解 $f(x)=(x-s)^m\varphi(x)$， $\varphi(s)\neq 0, m$是正整数.

这一部分的主要任务是解 $f(x)=0$

其中$f(x)$是一元**非线性**函数。

求根问题包括下面几个问题：

- 根的存在性：即$f(x)=0$有没有根？若有，有几个根?
- 哪儿有根？确定有根区间
- 根的近似求解

常用的求非线性方程根的方法

- 二分法（对分法、搜索法）
- 不动点法 （简单迭代法、压缩映象法）及其加速算法
- Newton方法及其变体

一、二分法（对分法）

【理论依据】闭区间上连续函数的零点定理

设函数 $f(x)\in C[a,b]$, $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$在区间$[a,b]$上有一实根s使 $f(s)=0$。

【二分法工作原理】均分根所在的区间

【例1】 求方程 $x^5+x^3+x^2-1=0$ 在区间 $[0,1]$内的根的位置.

解 设 $f(x)=x^5+x^3+x^2-1,$

由 $f(0)=-1$与$f(1)=2$ 知方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有根，设为 ξ.

为了进一步研究 ξ 的位置，作如下计算和推断：

$$f(\frac{1}{2})=-\frac{19}{32}<0, \quad 故\ \xi\in(\frac{1}{2},1);$$

在区间 $(\frac{1}{2},1)$中的点 $x=\frac{3}{4}$ 处 $f(\frac{3}{4})=\frac{227}{1024}>0$,

故$\xi\in(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$; 在区间$(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$中的点 $x=\frac{5}{8}$处

$f(\frac{5}{8})=-\frac{8843}{32768}<0$, 故 $\xi\in(\frac{5}{8},\frac{3}{4})$.

如果取 $\xi=\frac{11}{16}$(它是区间$(\frac{5}{8},\frac{3}{4})$ 的中点), 则误差

不超过$\frac{1}{16}$ (它是区间 $(\frac{5}{8},\frac{3}{4})$的长度的一半).

称为二分法.

某个雷电交加的夜晚，医院的医生正在抢救一个危重病人，忽然电停了。据了解原因是供电站到医院的某处线路出现了故障，维修工，如何迅速查出故障所在？(线路长10km，每50m一棵电线杆）

身临其境　体验生活

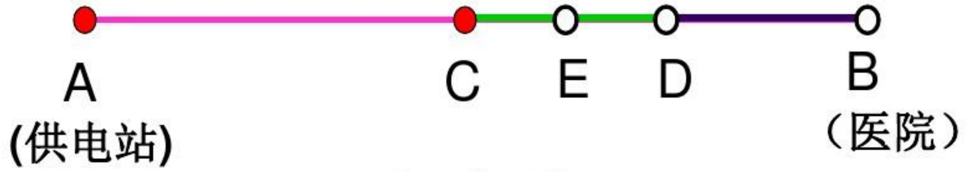
如果沿着线路一小段一小段查找，**困难很多**。

每查一个点要爬一次电线杆子，10km长，大约有200根电线杆子。

想一想，维修线路的工人师傅怎样工作最合理？

探索问题　提取原理

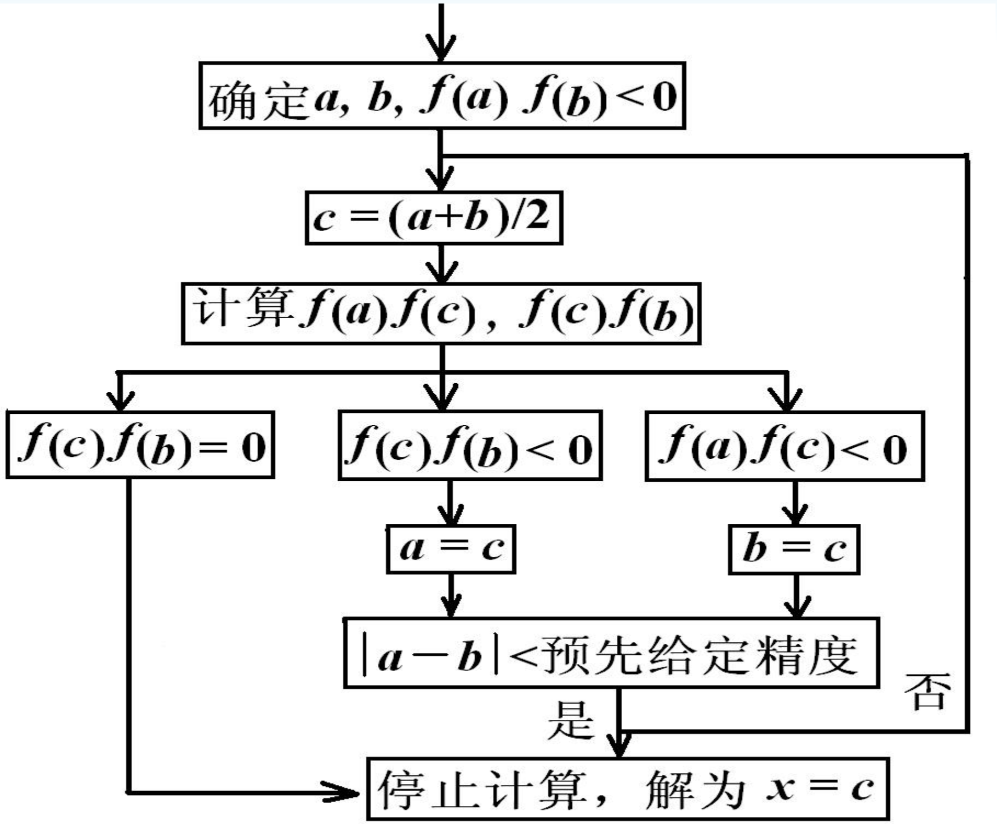
如图，设供电站和医院的所在处分别为点A、B



取中点

这样每查一次，就可以把待查的线路长度**缩减一半**，算一算，要把故障可能发生的范围缩小到50m～100m左右，即一两根电杆附近，查7次就可以了.

二分法计算框图：



优点：算法简单，且总是收敛的.

缺点：收敛速度太慢.

二、简单迭代法及其收敛定理

等价恒等变形

迭代法的构想 $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\underline{\varphi(x)}$ $\quad (Ax=b \Leftrightarrow x=Gx+d)$

不唯一

从一个初值x_0出发，计算

$$x_1=\varphi(x_0),\ x_2=\varphi(x_1),\cdots,\ x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

如果 $\{x_k\}$收敛，即存在x^*, 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x^*$

则由 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(x_k)$ 得 $x^*=\varphi(x^*)$ 不动点

即 x^*是 $\varphi(x)$的不动点，也就是 $f(x)$ 的根。

问题： $\{x_k\}$ 收敛吗？怎样实现$\varphi(x)$

【例2】 用迭代法求方程$x^4+2x^2-x-3=0$ 在区间$[1, 1.2]$内的实根.

解 对方程进行如下三种变形：

$$x^4+2x^2-x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\varphi_1(x)=(3+x-2x^2)^{\frac{1}{4}} \\ x=\varphi_2(x)=\sqrt{\sqrt{x+4}-1} \\ x=\varphi_3(x)=x^4+2x^2-3 \end{cases}$$

可构造多种简单迭代，为求同一个根，它们所产生的的序列$\{x_k\}$，有的可能收敛，有的可能不收敛，有的收敛的快，有的收敛的慢.

只有收敛的迭代过程才有意义，因此我们首先要研究$\varphi(x)$的不动点的**存在性**及**迭代法的收敛性**.

$\varphi: [a,b] \to [a,b]$

定理4.1：设函数$\varphi(x)\in C[a,b]$在(a,b)内可导，且满足如下条件

（1）当$x\in[a,b]$时，$\varphi(x)\in[a,b]$； 为保证 $x^{k+1}=\varphi(x^k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}\subset[a,b]$

（2）当$x\in(a,b)$时，$|\varphi'(x)|\le L<1$其中L是一常数。

则有如下结论：

（1）方程$x=\varphi(x)$在区间$[a,b]$上有唯一的根s；

（2）对任取的$x_0\in[a,b]$，简单迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}\subset[a,b]$且收敛于s；

（3）成立误差估计式$|s-x_k|\le\dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$，$|s-x_k|\le\dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$

注记：不满足定理的条件，也可能有不动点.

定理4.1说明：在一个固定的区间$[a,b]$,在此区间内任取一点x_0作为初值,迭代都收敛.----大范围收敛定理.

$$|s-x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_{k+1}-x_k|. \qquad (1)$$

1.实际计算中，可预先给定精度$\eta>0$，当$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \le \eta$时，迭代结束；

$$|s-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|. \qquad (2)$$

2.同时，可根据预先给定的绝对误差限ε，求出满足$|s-x_k| \le \varepsilon$的最低迭代次数N;

令$\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \le \varepsilon$，解出$k \ge \ln\frac{\varepsilon\cdot(1-L)}{|x_1-x_0|} / \ln L = d$，得到$N=[d]+1$。

例如，在前面例2中采用的三种迭代公式，在区间(1, 1.2)内，有

$$x=\varphi_1(x)=(3+x-2x^2)^{1/4}$$

$$\left|\varphi_1'(x)\right|=\left|\frac{x-0.25}{(3+x-2x^2)^{3/4}}\right|<\frac{1.2-0.25}{(3+1-2\times1.2^2)^{3/4}}<0.87<1$$

$$x=\varphi_2(x)=\sqrt{\sqrt{x+4}-1}$$

$$\left|\phi_2'(x)\right|=\left[4\sqrt{\sqrt{x+4}-1}\ \sqrt{x+4}\right]^{-1}<\left[4\sqrt{\sqrt{5}-1}\ \sqrt{5}\right]^{-1}<0.11$$

$$x=\varphi_3(x)=x^4+2x^2-3 \qquad \left|\phi_3'(x)\right|=\left|4x^3+4x\right|>8$$

故前两个迭代公式收敛，第三个迭代公式不收敛.

定义4.2：设$\varphi(x)$有不动点s，如果存在 s 的某个邻域$R:|x-s|\le\delta$，对任何$x_0\in R$,迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}\subset[s-\delta,s+\delta]$且收敛于$s$.则称迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$**局部收敛**.

定理4.2：设$s=\varphi(s)$，$\varphi'(x)$在包含s的某个开区间内连续，如果$|\varphi'(s)|<1$，则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$**局部收敛**.

Thm4.2并没有指出S的值，仅强调邻域的存在性

因此满足Thm条件时只要x_0足够接近S

$x_{k+1}=\varphi(x_k)\Rightarrow\{x_k\}\xrightarrow{k\to\infty}S$

局部收敛定理条件比较宽松，仅仅要求**导函数在s点**绝对值小于1即可.

证明 由连续函数的性质，存在不动点s的某个邻域U_δ: $|x-s|\le\delta$，使对于任意 $x\in R$成立

$$|\varphi'(x)|\le L<1.$$

此外，对于任意$x\in R$，总有$\varphi(x)\in R$，这时因为

$$|\varphi(x)-s|=|\varphi(x)-\varphi(s)|=|\varphi'(\xi)||x-s|$$
$$\le L|x-s|\le|x-s|.$$

于是依据定理4.1可以断定迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$对于任意初值$x_0\in R$均收敛． 证毕.

【例3】 用不同的方法求方程$\mathbf{x}^2-3=0$的根$x^*=\sqrt{3}$.

【解】 (1) $\mathbf{x}_{k+1}=x_k^{\ 2}+x_k-3, \varphi(x)=x^2+x-3,$

$\varphi'(x)=2x+1,\quad \varphi'(x^*)=\varphi'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}+1>1.$

(2) $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k},\quad \varphi(x)=\dfrac{3}{x},\quad \varphi'(x)=-\dfrac{3}{x^2},\quad \varphi'(x^*)=-1.$

由局部收敛定理，得不到迭代(1),(2)是否收敛.

(3) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}(x_k^2-3),\quad \varphi(x)=x-\dfrac{1}{4}(x^2-3),$

$\varphi'(x)=1-\dfrac{x}{2},\quad \varphi'(x^*)=\varphi'(\sqrt{3})\approx 0.134.$

迭代(3),(4)一定收敛.

(4) $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{3}{x_k}),\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{3}{x}),\quad \varphi'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{3}{x^2}),\quad \varphi'(x^*)=0.$

取$x_0=2$,对上述四种迭代法，计算三步所得结果如下：

k	x_k	迭代法(1)	迭代法(2)	迭代法(3)	迭代法(4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.73475	1.73214
3	x_3	87	1.5	1.73236	1.73205
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$，从迭代结果看，迭代法(1),(2)均不收敛，迭代法(3),(4)收敛，且迭代法(4)比迭代法(3)收敛的快.

用什么手段能衡量$x_k \to s$的速度?

二、简单迭代法及其收敛定理

等价恒等变形

迭代法的构想 $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$ $\quad (Ax=b \Leftrightarrow x=Gx+d)$

不唯一

从一个初值x_0出发，计算

$$x_1=\varphi(x_0),\quad x_2=\varphi(x_1),\cdots,\quad x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

如果 $\{x_k\}$收敛，即存在x^*, 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x^*$

则由 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(x_k)$ 得 $x^*=\varphi(x^*)$ 不动点

即 x^*是 $\varphi(x)$的不动点，也就是 $f(x)$ 的根。

$\varphi: [a,b] \to [a,b]$

定理4.1：设函数$\varphi(x)\in C[a,b]$在(a,b)内可导，且满足如下条件

（1）当$x\in[a,b]$时，$\varphi(x)\in[a,b]$； 为保证 $x^{k+1}=\varphi(x^k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\}\subset[a,b]$

（2）当$x\in(a,b)$时，$|\varphi'(x)|\le L<1$其中L是一常数。

则有如下结论：

（1）方程$x=\varphi(x)$在区间$[a,b]$上有唯一的根s；

（2）对任取的$x_0\in[a,b]$，简单迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}\subset[a,b]$且收敛于s；

（3）成立误差估计式$|s-x_k|\le\dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$，$|s-x_k|\le\dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$

注记：不满足定理的条件，也可能有不动点.

定理4.1说明：在一个固定的区间$[a,b]$,在此区间内任取一点x_0作为初值,迭代都收敛.----大范围收敛定理.

$$|s-x_k| \le \frac{L}{1-L}|x_{k+1}-x_k|. \quad (1)$$

1.实际计算中，可预先给定精度$\eta>0$，当$\frac{|x_k-x_{k-1}|}{|x_k|}\le\eta$时，迭代结束；

$$|s-x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|. \quad (2)$$

2.同时，可根据预先给定的绝对误差限ε，求出满足$|s-x_k|\le\varepsilon$的最低迭代次数N;

令$\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|\le\varepsilon$，解出$k\ge\ln\frac{\varepsilon\cdot(1-L)}{|x_1-x_0|}/\ln L=d$，得到$N=[d]+1$。

定义4.2：设$\varphi(x)$有不动点s，如果存在 **s** 的某个邻域$R:|x-s|\le\delta$，对任何$x_0\in R$，迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}\subset[s-\delta,s+\delta]$且收敛于$s$.则称迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$**局部收敛.**

定理4.2：设$s=\varphi(s)$，$\varphi'(x)$在包含s的某个开区间内连续，如果$|\varphi'(s)|<1$，则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$**局部收敛.**

局部收敛定理条件比较宽松，

仅仅要求**导函数在s点**绝对值小于1即可.

【例3】 用不同的方法求方程$x^2-3=0$的根$x^*=\sqrt{3}$.

【解】 (1) $\mathbf{x}_{k+1}=x_k^{\ 2}+x_k-3, \varphi(x)=x^2+x-3,$

$\varphi'(x)=2x+1,\quad \varphi'(x^*)=\varphi'(\sqrt{3})=2\sqrt{3}+1>1.$

(2) $x_{k+1}=\dfrac{3}{x_k},\quad \varphi(x)=\dfrac{3}{x},\quad \varphi'(x)=-\dfrac{3}{x^2},\quad \varphi'(x^*)=-1.$

由局部收敛定理，得不到迭代(1),(2)是否收敛.

(3) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{1}{4}(x_k^2-3),\quad \varphi(x)=x-\dfrac{1}{4}(x^2-3),$

$\varphi'(x)=1-\dfrac{x}{2},\quad \varphi'(x^*)=\varphi'(\sqrt{3})\approx 0.134.$

迭代(3),(4)一定收敛.

(4) $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{3}{x_k}),\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{3}{x}),\quad \varphi'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{3}{x^2}),\quad \varphi'(x^*)=0.$

取$x_0=2$,对上述四种迭代法，计算三步所得结果如下：

k	x_k	迭代法(1)	迭代法(2)	迭代法(3)	迭代法(4)
0	x_0	2	2	2	2
1	x_1	3	1.5	1.75	1.75
2	x_2	9	2	1.73475	1.73214
3	x_3	87	1.5	1.73236	1.73205
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\sqrt{3}=1.7320508\cdots$，从迭代结果看，迭代法(1),(2)均不收敛，迭代法(3),(4)收敛，且迭代法(4)比迭代法(3)收敛的快.

用什么手段能衡量$x_k \to s$的速度?

三、简单迭代法的收敛速度

在第k步迭代时，理论上可得到$e_k=s-x_k$，

在第$k+1$步迭代时，理论上可得到$e_{k+1}=s-x_{k+1}$，

我们可以通过这两个量给出收敛快慢的描述。

定义：设序列x_k收敛于s，并且$e_k=s-x_k\neq 0\quad(k=0,1,\ldots)$，

如果存在常数 $p\geq 1$和常数 $C>0$，使得极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C$ 成立，

或者使得当$k\geq K$（某个正数）时，$\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}\leq C$ 成立，

则称序列$\{x_k\}$收敛于 s 具有 p阶收敛速度，简称x_k是 p阶收敛的。

C 称作渐近收敛常数或收敛因子.

$p=1$(此时必有$0<C\le 1$)时称 x_k 为**线性收敛**的，

$p>1$时称 x_k为**超线性收敛**的，

$p=2$时称 x_k 为**平方收敛**的.

定理4.3: 设函数$\varphi(x)\in C[a,b],\varphi'(x)\in C(a,b)$内可导，且满足如下条件

（1）当$x\in[a,b]$时，$\varphi(x)\in[a,b]$;

（2）当$x\in(a,b)$时，$\varphi'(x)\neq 0,|\varphi'(x)|\le L<1$，其中$L$是一常数。

则对任取的$x_0\in[a,b]$，简单迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列

收敛于$x=\varphi(x)$在$[a,b]$内的$\boxed{\text{唯一根}s,}$ 并且当$x_0\neq s$时x_k是线性收敛的。

Thm 4.1 保证

由于当 $x\in(a,b)$ 时 $\varphi'(x)\neq 0$，所以，只要 $x_0\neq s$ 就必有 $x_k\neq s(k=1,2,\cdots)$。由 Taylor 公式，有

$$\varphi(x_k)=\varphi(s)+\varphi'(s+\theta(x_k-s))(x_k-s),\quad 0<\theta<1$$

记 $e_k=s-x_k$，由上式得 $\varphi(x_k)-\varphi(s)=x_{k+1}-s=-e_{k+1}$

$$e_{k+1}=\varphi'(s-\theta e_k)e_k$$

因 $\lim\limits_{k\to\infty}e_k=0$ 和 $\varphi'(x)$ 的连续性，故得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=\lim_{k\to\infty}|\varphi'(s-\theta e_k)|=|\varphi'(s)|$$

因为 $|\varphi'(s)|>0$，所以由上式可知，序列 $\{x_k\}$ 是线性收敛的。

由定理 4.3 看到，迭代函数 $\varphi(x)$ 在方程的根 s 处的一阶导数不等于零，相应的简单迭代法只是线性收敛的，也就是说，只有一阶收敛速度。要想获得高阶收敛速度，迭代函数 $\varphi(x)$ 就要满足更多的条件。

定理4.4：设 $\varphi^{(m)}(x)$ 在包含 s 的某个区间内连续 $(m \geq 2)$，$s = \varphi(s)$.并且

$$\varphi'(s) = \varphi''(s) = \cdots = \varphi^{(m-1)}(s) = 0, \qquad \varphi^{(m)}(s) \neq 0$$

则存在 $\delta > 0$，当 $x_0 \in [s-\delta, s+\delta]$ 但 $x_0 \neq s$ 时，由简单迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 以 m 阶收敛速度收敛于 s. $\Leftrightarrow$ 迭代局部 m 阶收敛

迭代法的收敛速度 依赖于迭代函数的选取.

【例2】 用不同的方法求方程$\mathbf{x}^2 = 3 = 0$的根$x^* = \sqrt{3}$.

【解】 (1) $\mathbf{x}_{k+1} = x_k^{\,2} + x_k - 3, \varphi(x) = x^2 + x - 3,$

$\varphi'(x) = 2x+1, \quad \varphi'(x^*) = \varphi'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 1 > 1.$

(2) $x_{k+1} = \dfrac{3}{x_k}, \quad \varphi(x) = \dfrac{3}{x}, \quad \varphi'(x) = -\dfrac{3}{x^2}, \quad \varphi'(x^*) = -1.$

(3) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{1}{4}(x_k^2 - 3), \quad \varphi(x) = x - \dfrac{1}{4}(x^2 - 3),$

$\varphi'(x) = 1 - \dfrac{x}{2}, \quad \varphi'(x^*) = \varphi'(\sqrt{3}) \approx 0.134.$ 线性收敛

(4) $x_{k+1} = \dfrac{1}{2}(x_k + \dfrac{3}{x_k}), \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{3}{x}), \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{3}{x^2}), \quad \varphi'(x^*) = 0.$

定理4.4： 设$\varphi^{(m)}(x)$在包含s的某个区间内连续$(m\geq 2)$，$s=\varphi(s)$.并且

$$\varphi'(s)=\varphi''(s)=\cdots=\varphi^{(m-1)}(s)=0, \qquad \varphi^{(m)}(s)\neq 0$$

则存在$\delta>0$，当$x_0\in[s-\delta,s+\delta]$但$x_0\neq s$时，由简单迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}$以$m$阶收敛速度收敛于$s$.

迭代法的收敛速度 依赖于迭代函数的选取.

(4) $\quad x_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{3}{x_k})$, $\quad \varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{3}{x})$, $\quad \varphi'(x)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{3}{x^2})$, $\varphi'(x^*)=0$.

$\varphi''(x)=\dfrac{3}{x^3}, \varphi''(\sqrt{3})=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$, 即该迭代过程至少是二 阶收敛的.

四、Steffensen加速收敛方法

设由算法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$计算出x_k, x_{k+1}, x_{k+2}三个迭代值，由微分中值定理得：

$$x_{k+1}-s=\varphi(x_k)-\varphi(s)=\varphi'(\xi_k)(x_k-s)$$

$$x_{k+2}-s=\varphi(x_{k+1})-\varphi(s)=\varphi'(\xi_{k+1})(x_{k+1}-s)$$

假设x在s附近，$\varphi'(x)$的值变化不大，则有$\varphi'(\xi_k)\approx\varphi'(\xi_{k+1})$

即$\dfrac{x_{k+1}-s}{x_k-s}\approx\dfrac{x_{k+2}-s}{x_{k+1}-s}$，由此解得

$$s\approx\frac{x_{k+2}x_k-x_{k+1}^{\ 2}}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}.$$

$$=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}.$$

$$s \approx x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

将x_{k+1}, x_{k+2}看成中间值，分别把他们记为y_k z_k，于是得到加速后的算法：

斯特芬森迭代法

$$(1)\begin{cases} y_k = \varphi(x_k), z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, k = 0,1,\ldots \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_{k+1} = \psi(x_k),, k = 0,1,\ldots \\ \psi(x) = x - \dfrac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \end{cases}$$

定理4.5: 如果s是(2)式定义的迭代函数$\psi(x)$的不动点，则s也是$\varphi(x)$的不动点；反之,如果s是$\varphi(x)$的不动点,设$\varphi''(x)$存在,并且$\boxed{\varphi'(s)\neq 1,}$则$s$也是$\psi(x)$的不动点.并且斯特芬森迭代法至少是二阶收敛的.

【例3】试分别采用 $\varphi(x)=2+\ln x$ 和 $\varphi(x)=e^{x-2}$ 的 Steffensen 迭代法求方程 $x-\ln x=2$ 在区间 $(2,\infty)$ 内的根 s，要求 $\dfrac{|x_k-x_{k-1}|}{|x_k|}\leqslant 10^{-8}$。

解 对于 $\varphi(x)=2+\ln x$，$\varphi'(s)=\dfrac{1}{s}\neq 1$，对于 $\varphi(x)=e^{x-2}$，$\varphi'(s)=e^{s-2}\neq 1$，故当 x_0 足够接近 s 时，迭代公式

$$\begin{cases} y_k = 2+\ln x_k \\ z_k = 2+\ln y_k \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \\ \qquad (k=0,1,\cdots) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_k = e^{x_k-2} \\ z_k = e^{y_k-2} \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \\ \qquad (k=0,1,\cdots) \end{cases}$$

都能平方收敛于 s。现取 $x_0=3$，

方法一的迭代过程见表(1),方法二的迭代过程见表(2).

表(1)

k	x_k
0	3.000 000 000
1	3.146 738 373
2	3.146 245 819
3	3.146 193 220
4	3.146 193 220

表(2)

k	x_k
0	3.000 000 000
1	3.205 791 857
2	3.153 859 280
3	3.146 327 554
4	3.146 193 262
5	3.146 193 262

$\varphi(x)=e^{x-2}$

由表格可知第一种迭代　$s\approx 3.14193220$已满足精度要求，

第二种迭代　$s\approx 3.14193262$已满足精度要求。

注记：1 第二种迭代法　$\varphi(x)=e^{x-2}$不收敛,用斯特芬森迭代法仍可能收敛;

2　简单迭代法和斯特芬森迭代法也可以求方程的复数根.

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院

数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第四章 非线性方程（组）的迭代解法

4.1.5 Newton迭代法

一、Newton 迭代法

微分　$\Delta y \approx df \Leftrightarrow f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0)$

非线性问题的最简单解法是线性近似.

Newton法的基本思想：把非线性方程线性化。

设$f(x)=0$有近似根x_0,$f'(x_0)\neq 0$,则$f(x)$在x_0点附近展开，可得

$$f(x) \approx \underline{f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)} = 0$$

于是 $f(x)=0$ 可近似表示为

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$$

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

解出x作为近似根x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (f'(x_0)\neq 0)$$

依次产生迭代格式，称 Newton 法：

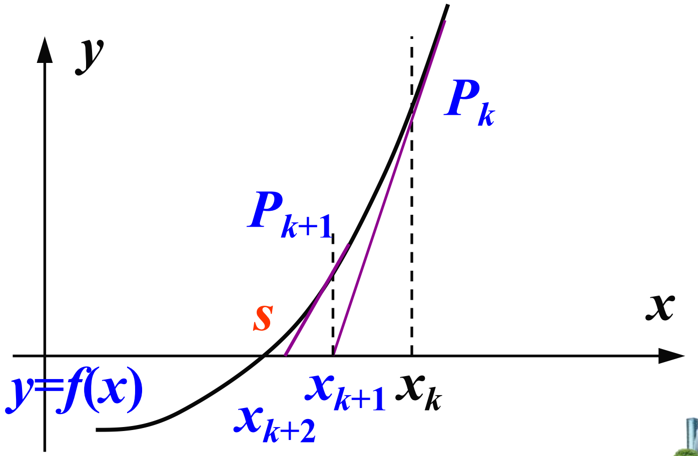
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

此式称为牛顿(Newton)迭代公式.（也是牛顿法）

牛顿法有显然的几何意义，方程$f(x)=0$的根 s可解释为曲线$y=f(x)$与x轴交点的横坐标．设x_k是根 s的某个近似值，过曲线$y=f(x)$上横坐标为x_k的点P_k引切线，并将该切线与x轴交点的横坐标x_{k+1}作为 s 的新的近似值．注意到切线方程为

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k).$$

由于这种几何背景，所以牛顿迭代法也称切线法.



定理4.6　设s是方程$f(x)=0$的根，在包含s的某个开区间内$f''(x)$连续且$f'(x)\neq 0$，则存在$\delta>0$，当$x_0\in[s-\delta,s+\delta]$时，由Newton法产生的序列$\{x_k\}$收敛于$s$；若$f''(s)\neq 0$，且$x_0\neq s$，则序列$\{x_k\}$是平方收敛的。

证明： 牛顿迭代法的迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

设s是$f(x)$的一个单根，即$f(s)=0$，$f'(s)\neq 0$，有

$$\varphi'(s)=1-\frac{(f')^2-ff''}{[f']^2}\Big|_{x=s}=\frac{f(s)f''(s)}{[f'(s)]^2}=0,\quad \varphi''(s)=\frac{f''(s)}{f'(s)}\neq 0.$$

所以由Newton法产生的序列$\{x_k\}$在$[a,b]$上收敛于s.

定理4.2 设$s=\varphi(s)$，$\varphi'(x)$在包含s的某个开区间连续，如果$|\varphi'(s)|<1$，则迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$局部收敛.

由Taylor公式，在 x_k 点把 $f(x)$ Taylor展开 $f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x-x_k)^2$

当 $x=s$ 时，$f(s)=0$ 有 $f(s)=f(x_k)+f'(x_k)(s-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(s-x_k)^2=0$ ξ_k 是介于 x, x_k 之间的量

$f'(x_k)\neq 0$， $\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}+s-x_k+\frac{f''(\xi_k)}{2!f'(x_k)}(s-x_k)^2=0$

$$x_{k+1}-s=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-s=\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}(s-x_k)^2$$

又因为 $f''(s)\neq 0$，$f''(x)$ 连续，由连续函数的局部保号性可知 $\exists B_\delta(s)$，s.t $\forall x\in B_\delta(s)$，$f''(x)\neq 0$，

所以当 $x_0\in B_\delta(s)$ 且 $x_0\neq s$ 时，$x_k\neq s(k=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}-s}{(x_k-s)^2}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{|f''(\xi_k)|}{2!|f(x_k)|}=\frac{|f''(s)|}{2|f'(s)|}\neq 0.$$

$\Rightarrow \{x_k\}$ 平方收敛

Newton法的收敛性依赖于x_0的选取。

定理4.6为局部收敛定理，接下来给出大范围收敛定理。

定理4.7 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶连续导数，且满足条件：

（1）$f(a)f(b)<0$; （保证有根）

（2）$f''(x)$在区间$[a,b]$上不变号; （凸凹性不变）

（3）当$x\in[a,b]$时，$f'(x)\neq 0$; （不存在极值的情况）

（4）$x_0\in[a,b]$, $f(x_0)f''(x_0)>0$,（对初值迭代后,不会溢出或超出定义域）

则由Newton法产生的序列$\{x_k\}$收敛于方程$f(x)=0$在$[a,b]$上的唯一的根s，并且至少是平方收敛的。

【例1】证明方程$x^5+5x+1=0$在区间$(-1,0)$ 内有唯一的实根，并用牛顿迭代法求这个根的近似值，使误差不超过0.01 。

解　令$f(x)=x^5+5x+1$，则$f(x)$ 在$[-1,0]$ 上连续，又

$$f(-1)=-5<0, f(0)=1>0$$

故由介值定理知至少存在一个$x^*\in(-1,0)$ 使$f(x^*)=0$ ，又由

$f'(x)=5x^4+5>0$，知$f(x)$ 在$[-1,0]$ 上单调增加，因而方程

$x^5+5x+1=0$在区间$(-1,0)$ 内有唯一实根。

下面用牛顿迭代法求这个根的近似值。

因为 $f''(x)=20x^3<0$ 取 $x_0=-1$ $\quad (f(x_0)f''(x)>0)$，代入牛顿迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_1=-1-\frac{-5}{5+5}=-0.5 \qquad x_2=-0.5-\frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)}=-0.2474$$

$$x_3=-0.2474-\frac{f(-0.2474)}{f'(-0.2474)}\approx -0.20$$

$$x_4=-0.20-\frac{f(-0.20)}{f'(-0.20)}\approx -0.20$$

所以 $x^*\approx -0.20$。

【例2】造平方根表。用牛顿迭代法计算 $\sqrt{a}$ （其中 $a>0$）

解 令 $x=\sqrt{a}$，则 $x^2-a=0$，求 $\sqrt{a}$ 等价于求方程 $f(x)=x^2-a=0$ 的正实根。因为 $f'(x)=2x$，由牛顿迭代公式得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-a}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right),\quad k=0,1,2,\cdots$$

例如：求 $\sqrt{115}$，精确到 10^{-6}.

取初始值 $x_0=10$，

$\sqrt{115}\approx 10.723805$

计算结果

k	x_k
0	10
1	10.750000
2	10.723837
3	10.723805
4	10.723805

牛顿法的计算步骤:

步骤1　准备　选定初始近似值x_0，计算$f_0=f(x_0)$，$f'_0=f'(x_0)$.

步骤2　迭代　按公式 $x_1=x_0-f_0/f'_0$，迭代一次，得新的近似值x_1，计算

$f_1=f(x_1)$，$f'_1=f'(x_1)$.

步骤3　控制　如果x_1满足$|\delta|<\varepsilon_1$或$|f_1|<\varepsilon_2$，则终止迭代，以x_1作为所求的根；否则转步骤4．此处ε_1，ε_2是允许误差，而

$$\delta=\begin{cases}|x_1-x_0|, & |x_1|<C,\\ \dfrac{|x_1-x_0|}{|x_1|}, & |x_1|\geq C.\end{cases}$$

其中C是取绝对误差或相对误差的控制常数，一般可取$C=1$.

步骤4　修改　如果迭代次数达到预先指定的次数N.或者$f'_1=0$，则方法失败；否则以(x_1,f_1,f'_1)代替(x_0,f_0,f'_0)转步骤2继续迭代.

Newton法优点：收敛快，稳定性好，精度高；

Newton法缺点：

1.每步迭代都要计算$f(x_k)$及$f'(x_k)$,计算量较大，且有时$f'(x_k)$计算比较困难；

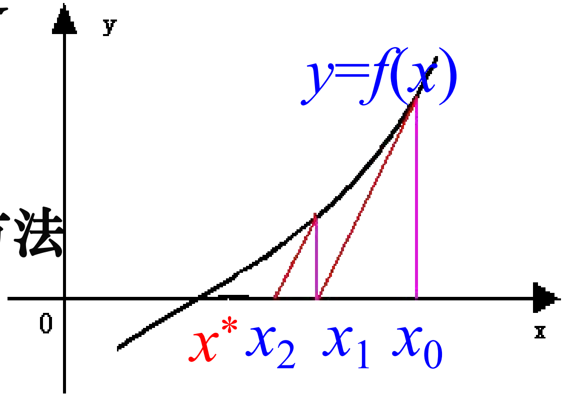
2.初始值x_0只有在根s的附近才能保证收敛.

(1) **简化牛顿法**，也称**平行弦法**，其迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - Cf(x_k) \quad C \neq 0, k = 0,1,\cdots. \qquad (4.7)$$

迭代函数为 $\varphi(x)=x-Cf(x)$.

若$|\varphi'(x_k)|=|1-Cf'(x)|<1$，即取$0<Cf'(x)<2$. 在根$x^*$附近成立，则迭代法(4.7)局部收敛.

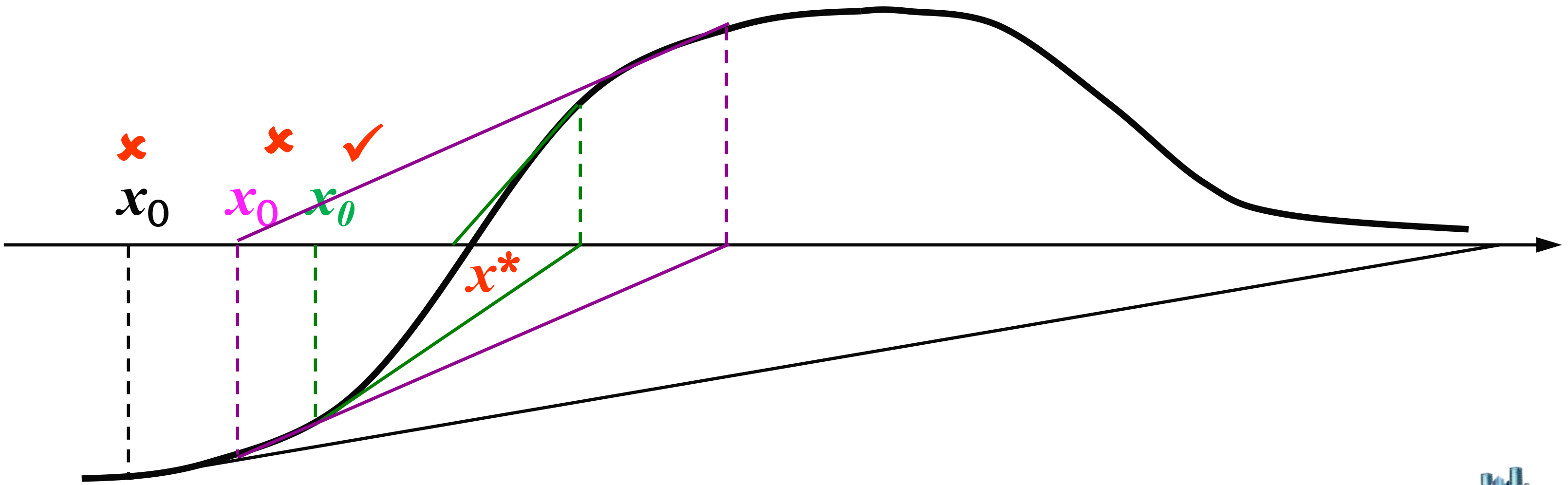


在(4.7)中取$C=1/f'(x_0)$，则称为简化牛顿法，这类方法计算量省，但只有**线性收敛**.

其**几何意义**是用平行弦与x轴交点作为x^*的近似，见右图.

(2) 牛顿下山法，牛顿法收敛性依赖初值x_0的选取，如果x_0偏离所求根x^*较远，则牛顿法可能发散.

注：Newton’s Method收敛性依赖于x_0的选取.



牛顿下山法：目的是解决初值的选取范围太小这一困难

例如:用牛顿法求解方程 $x^3-x-1=0$. 此方程在$x=1.5$附近的一个根x^*.

解：设取迭代初值$x_0=1.5$，用牛顿迭代法公式

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1}. \qquad (1)$$

计算得 $x_1=1.34783$, $x_2=1.32520$, $x_3=1.32472$.

迭代3次得到的结果x_3有6位有效数字.

但是，如取$x_0=0.6$，用(1)式迭代1次得 $x_1=17.9$.

这个结果反而比$x_0=0.6$更偏离了所求的根$x^*=1.32472$.

为了防止迭代发散，对迭代过程再附加一项要求，即具有单调性.

$$\left|f(x_{k+1})\right| < \left|f(x_k)\right|. \qquad (2)$$

满足这项要求的算法称为**下山法**.

将牛顿法与下山法结合起来使用，即在下山法保证函数值稳定下降的前提下，用牛顿法加快收敛速度. 为此，我们将牛顿法的结果

$$\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

与前一项的近似值x_k适当加权平均作为新的改进值

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k, \qquad (3)$$

构造迭代格式为：$x_{k+1} = x_k - \lambda \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 称为**牛顿下山法**.

构造迭代格式为：$x_{k+1} = x_k - \lambda \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

其中的参数满足:$\left|f(x_{k+1})\right| < \left|f(x_k)\right|$

这个方法称为**牛顿下山法**。其中的参数称为下山因子:$0 < \varepsilon_\lambda \le \lambda \le 1$

选择下山因子时从 $\lambda=1$开始，逐次将 λ 减半进行试算，直到能使下降条件(2)成立为止.

牛顿下山法当 $\lambda \neq 1$ 时，只有线性收敛速度，但对初值的选取却放的相当宽。

例如，前面的方程$f(x)=x^3-x-1=0$的一个根为$x^*=1.32472$，若取初值

$x_0=0.6$,用牛顿法$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=17.9$，反而比$x_0=0.6$更偏离根$x^*$。

若改用牛顿下山法
$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

计算，仍取$x_0=0.6$,试算求出下降条件

x_0 $0.6 \xrightarrow{\lambda=1} x_1' \xrightarrow{\lambda=\frac{1}{2}} x_2' \rightarrow \cdots \rightarrow \dfrac{1.14063}{x_1}$

$\boxed{f(0.6)}$ $f(x_1')$ $f(x_2')$

k	λ	x_k
0	0	0.6
1	$1/2^5$	1.14063
2	1	1.36681
3	1	1.32628
4	1	1.32472

$f(0.6)=-1.384$

$f(1.14063)\approx-0.656643$

由此可见，牛顿下山法使迭代过程收敛加速。

一般情况下，只要能使条件选择 $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$成立，则可得到极限

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0,$$

从而使数列$\{x_k\}$收敛.

二、求方程m重根的Newton迭代法

$$f(s)=f'(s)=\ldots=f^{(m-1)}(s)=0,\quad f^{(m)}(s)\neq 0$$

$f(x), f'(x), f''(x)$在s点Taylor展开.

$$f(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{m!}(x-s)^m,\ f'(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_2)}{(m-1)!}(x-s)^{m-1},\ f''(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_3)}{(m-2)!}(x-s)^{m-2}$$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\qquad \varphi(s)=\lim_{x\to s}\varphi(x)=\lim_{x\to s}[x-\frac{(x-s)f^{(m)}(\xi_1)}{mf^{(m)}(\xi_2)}]=s$$

1. $\varphi(x)\in C(B_\delta(s))$,
2. $\varphi(s)=s$,
3. $|\varphi'(s)|<1$,

$$\varphi'(s)=\lim_{x\to s}\varphi'(x)=\lim_{x\to s}\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\lim_{x\to s}\frac{(m-1)f^{(m)}(\xi_1)f^{(m)}(\xi_3)}{m[f^{(m)}(\xi_2)]^2}=1-\frac{1}{m}$$

所以只要x_0充分接近s，牛顿迭代法就收敛，Newton迭代法降为一阶！

改进办法一

?

$$\tilde{\varphi}(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)} \in C(B_\delta(s))$$

$$\tilde{\varphi}(s) = \lim_{x\to s} \tilde{\varphi}(x) = \lim_{x\to s}[x - \frac{(x-s)f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)}] = s$$

$$\tilde{\varphi}'(s) = \lim_{x\to s} \tilde{\varphi}'(x) = \lim_{x\to s}[1 - m + \frac{mf(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}] = 0$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}}$$

为二阶收敛

改进办法二

在重根时，一般m我们是不知道的，此时考虑函数 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

这是，$f(x)$的m重零点转化为u的单零点；对$u(x)$实施Newton法：

迭代函数为 $$\varphi(x)=x-\frac{u(x)}{u'(x)}=x-\frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}$$

于是得到迭代公式： $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

此方法不管根的重数，至少二阶收敛！

【例3】已知方程

$$f(x) = x^4 - 1.4x^3 - 0.48x^2 + 1.408x - 0.512 = 0$$

有一个三重根 $s=0.8$，这里

$$f'(x) = 4x^3 - 4.2x^2 - 0.96x + 1.408$$

$$f''(x) = 12x^2 - 8.4x - 0.96$$

如果使用 Newton 法(4.7)进行迭代，并取初始值 $x_0=1$，则有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_1 = 0.935\,483\,871,\quad x_2 = 0.891\,352\,317$$

$$x_3 = 0.861\,384\,032,\quad x_4 = 0.841\,145\,162$$

$$x_5 = 0.827\,531\,520,\quad x_6 = 0.818\,400\,189$$

$$x_7 = 0.812\,287\,422,\quad x_8 = 0.808\,200\,827$$

$$x_9 = 0.805\,471\,387,\quad x_{10} = 0.803\,649\,381$$

越往后收敛越慢。如果使用迭代公式(4.9)，也取初始值 $x_0=1$，则有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

$$x_1 = 0.794\,019\,933$$

$$x_2 = 0.799\,962\,734$$

$$x_3 = 0.800\,019\,389$$

收敛得非常快。

三、割线法

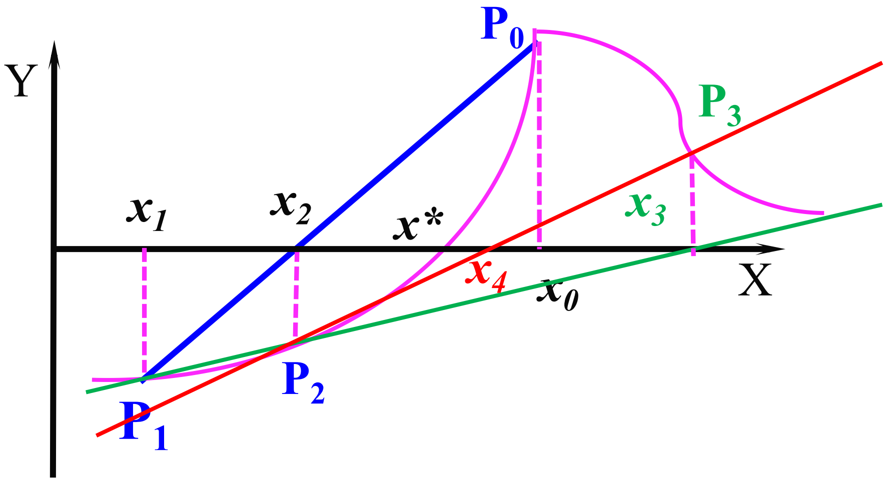
Newton迭代法需要计算f(x)的一阶导数，对复杂的函数，特别是多元隐函数，求导数或偏导数是一个相对繁琐和复杂的，往往采用近似计算的办法！

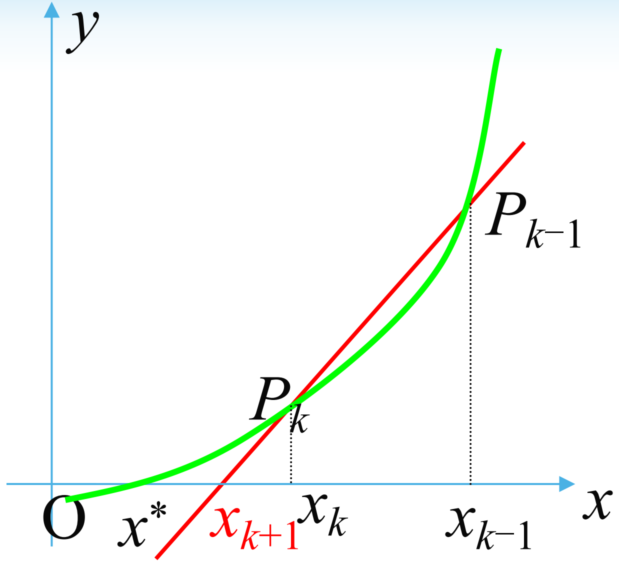
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

在Newton迭代法中用$\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$来近似f(x)在$x_k$处的一阶导数，由此得到的算法叫**割线法**。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

割线法的几何表示





割线法在求x_{k+1}时要用到前面两步的结果x_k, x_{k-1}.需两个初值x_0, x_1，而牛顿切线法在计算x_{k+1}时，只用到前一步x_k的值。

四、割线法的收敛性

引理： 设$f(s)=0$，在s的某领域$[s-\delta, s+\delta]$内$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$，又设x_{k-1}，$x_k\in[s-\delta, s+\delta]$且$x_{k-1}, x_k, s$互异，记$e_k=s-x_k$，则有

$$e_{k+1}=s-x_{k+1}=e_k e_{k-1}\left[-\frac{f''(\eta_k)}{2f'(\xi_k)}\right]$$

其中x_{k+1}是由割线法产生,η_k, ξ_k在$min(x_{k-1}, x_k, s)$与$max(x_{k-1}, x_k, s)$之间。

定理： 设$f(s)=0$,在s的某领域内$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$，则存在$\delta>0$，当$x_{-1}, x_0\in I_\delta=[s-\delta, s+\delta]$时，则由割线法产生的序列$\{x_k\}$收敛于$s$，且收敛速度的阶至少为1.618。

例 4 用割线法求方程 $x-\ln x=2$ 在区间$(2,\infty)$内的根，要求$\dfrac{|x_k-x_{k-1}|}{|x_k|}<10^{-8}$。

解 前已分析，所求根位于区间(2,4)内。迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)\quad(k=0,1,\cdots)$$

其中 $f(x)=x-\ln x-2$。取 $x_{-1}=2$，$x_0=4$，迭代结果见表 4-5。x_5 已达到精度要求，故方程的根 $s\approx3.146\ 193\ 221$。

表 4-5 例 4 计算结果

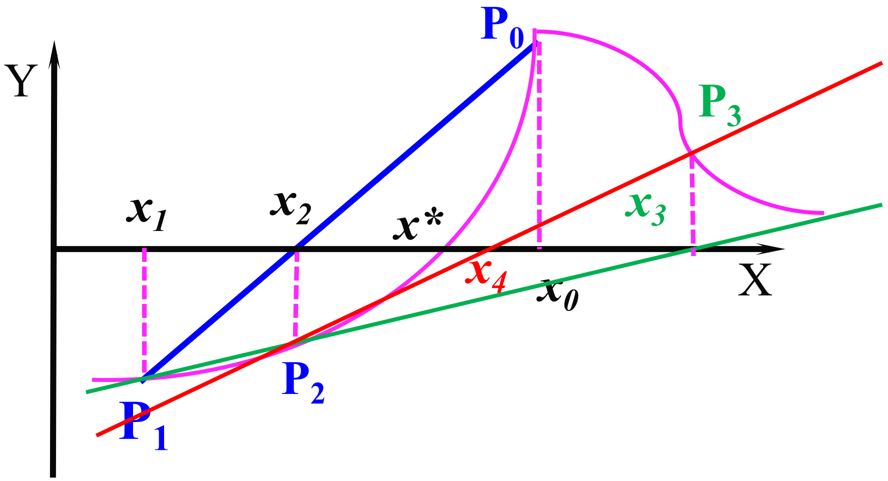
k	x_k	$f(x_k)$
−1	2.000 000 000	−0.693 147 180
0	4.000 000 000	0.613 705 638
1	3.060 788 438	−0.057 884 104
2	3.141 738 781	−0.003 037 617
3	3.146 222 134	0.000 019 723
4	3.146 193 211	-0.6×10^{-8}
5	3.146 193 221	0.0

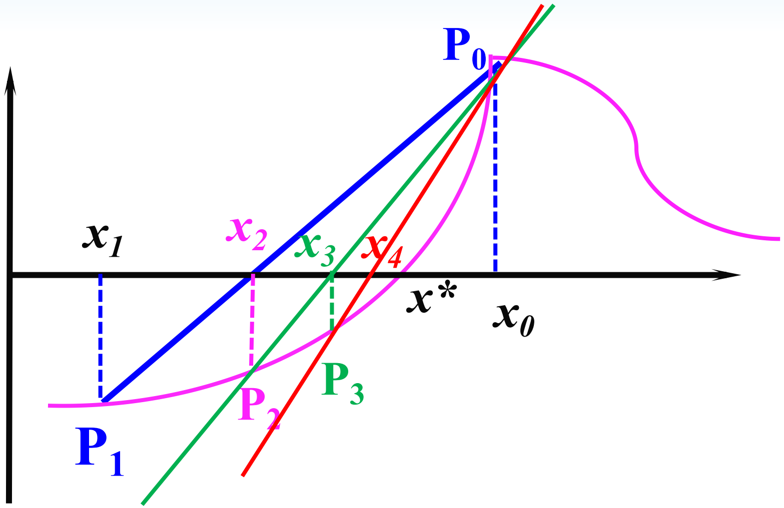
简单迭代法：线性收敛(15次)

☆牛顿迭代法：平方收敛(4次)

割线迭代法：$p=1.618$ (5次)

五、单点割线法 在割线法中，用固定点$(x_0, f(x_0))$代替$(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$





在Newton迭代法中用$\dfrac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$来近似$f(x)$在$x_k$处的一阶导数，由此得到的算法叫单点割线法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_0)}{f(x_k)-f(x_0)}$$

定理4.9　设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上存在二阶连续导数，且满足条件：

（1）$f(a)f(b)<0$;　　（保证有根）

（2）$f''(x)$在区间$[a,b]$上不变号;　　（凸凹性不变）

（3）当$x\in[a,b]$时，$f'(x)\neq 0$;　　（不存在极值的情况）

（4）$x_0,x_1\in[a,b]$, $f(x_0)f''(x_0)>0$，$f(x_0)f(x_1)<0$，

（对初值迭代后,不会溢出或超出定义域,根要介于x_0,x_1之间）

则由单点割线法产生的序列$\{x_k\}$收敛于方程$f(x)=0$在$[a,b]$上的唯一的根s，并且收敛速度是一阶的。

例 5 用单点割线法求方程 $x-\ln x=2$ 在区间$(2,\infty)$内的根，要求$\dfrac{|x_k-x_{k-1}|}{|x_k|}<10^{-8}$。

解 $f(x)=x-\ln x-2$ 满足

$\cancel{x_0=2}$

$f(2)=2-\ln 2-2=-\ln 2$

(1) $f(2)f(4)<0$;

(2) 当 $x\in[2,4]$时，$f''(x)>0$;

$f'=1-\frac{1}{x}$, $f''=\frac{1}{x^2}$

(3) 在区间$[2,4]$上 $f'(x)\neq 0$;

$f''(2)=\frac{1}{4}$

(4) $f(4)f''(4)>0$。

所以，选 $x_0=4$，$x_1=2$，由单点割线法(4.13)产生的序列$\{x_k\}$必收敛于方程在$[2,4]$内的根 s。迭代结果见表 4-6。x_8 已满足精度要求，故方程的根为 $s\approx3.146\ 193\ 219$。

表 4-6 例 5 计算结果

k	x_k	$f(x_k)$
0	4.000 000 000	0.613 705 638
1	2.000 000 000	−0.693 147 180
2	3.060 788 439	−0.057 884 103
3	3.141 738 781	−0.003 037 617
4	3.145 965 936	−0.000 155 040
5	3.146 181 637	$-0.790\ 2\times10^{-5}$
6	3.146 192 630	-0.402×10^{-6}
7	3.146 193 191	-0.20×10^{-7}
8	3.146 193 219	-0.1×10^{-8}

作　　业

- 课后习题1、2、4、5、7、9

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院