3.5 棋盘多项式和有限制排列

如果C由相互分离的C_1，C_2组成，即C_1的任一格子所在的行和列中都没有C_2的格子。则有：

$$\boldsymbol{r_k(C) = \sum_{i=0}^{k} r_i(C_1) r_{k-i}(C_2)}$$

故 $R(C) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} [r_i(C_1) r_{k-i}(C_2)] x^k$

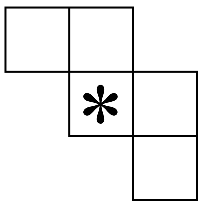
$= \left(\sum_{i=0}^{n} r_i(C_1) x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} r_j(C_2) x^j\right)$

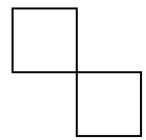
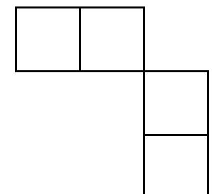
$\therefore\ R(C) = R(C_1) R(C_2)$ (■)

3.5 棋盘多项式和有限制排列

利用(*)和(■)，可以把一个比较复杂的棋盘逐步分解成相对比较简单的棋盘，从而得到其棋盘多项式。

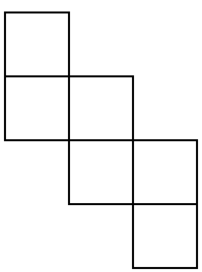
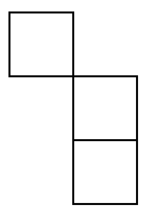
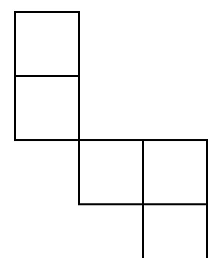
例

R (

) = xR()+R()

$$= x(1+x)^2 + (1+2x)^2$$

$$= 1 + 5x + 6x^2 + x^3$$

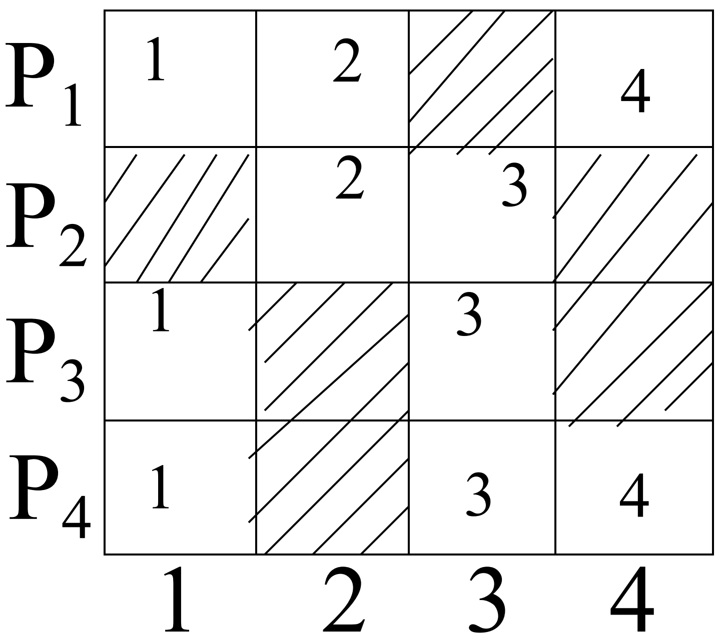
R() = xR() + R()

$$= 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

有禁区的排列

例 设对于排列$P = P_1P_2P_3P_4$，规定$P_1 \neq 3$，$P_2 \neq 1, 4$，$P_3 \neq 2, 4$，$P_4 \neq 2$。



这样的排列对应于有禁区的布子。如右图有影线的格子表示禁区。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

定理 设r_i为i个棋子布入禁区的方案数，$i=1,2,3,\cdots,n$。有禁区的布子方案数（即禁区内不布子的方案数）为：

$$r_0 n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! + \ldots + (-1)^n r_n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k r_k (n-k)!$$

证 设A_i 为第i个棋子布入禁区，其它棋子任意布的方案集，i =1 , 2 , 3, …,n。

3.5 棋盘多项式和有限制排列

则所有棋子都不布入禁区的方案数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$$

上式刻画了k个棋子布入禁区，其它n – k个棋子任意布的方案数。由假设可知等于r_k(n—k)！（注意：布入禁区的棋子也要遵守无对攻规则）

3.5 棋盘多项式和有限制排列

请给出上例的棋盘多项式，随之方案数为4!－6(4－1)!＋11(4－2)!－7(4－3)!

＋1(4－ 4)!＝4

【练习】 １，２，３，４四位工人，A，B，C，D四项任务。条件如下：

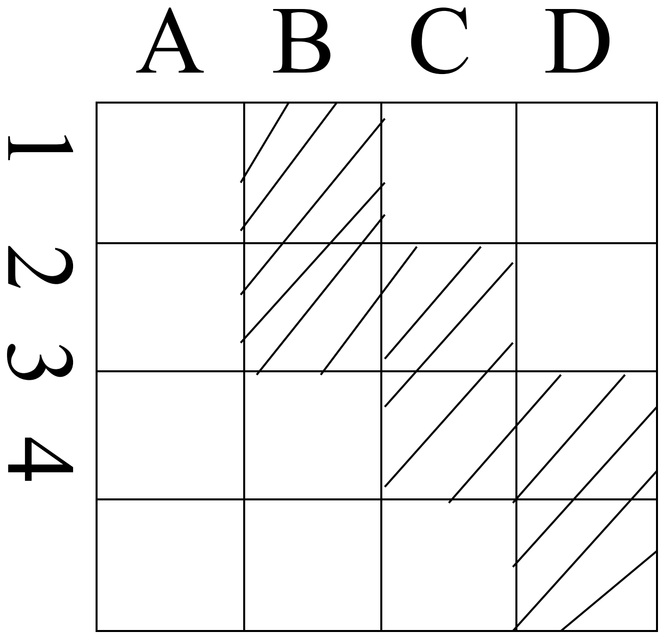
１不干B；２不干B、C；

３不干C、D；４不干D。

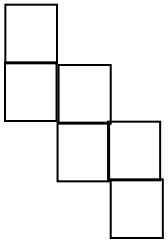
问有多少种可行方案?

3.5 棋盘多项式和有限制排列

解： 由题意，可得如下棋盘：



其中有影线的格子表示禁区。

R() $=1+6x+10x^2+4x^3$

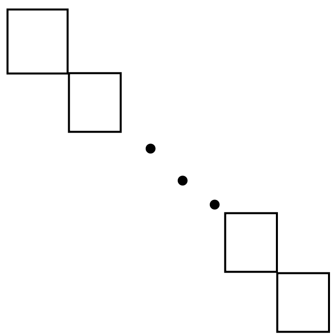
方案数 $=4!-6(4-1)!+10(4-2)!-4(4-3)!+0(4-4)!=4$

3.5 棋盘多项式和有限制排列

例 三论错排问题

错排问题对应的是n×n的棋盘的主对角线上的格子是禁区的布子问题。

$C =$



$R(C) = (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C(n,i)x^i$，即$r_i = C(n,i)$

故错排问题的方案数：

$$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + \dots \pm C(n,n)$$

3.6 一般公式

设$A_1, A_2, \ldots A_n$是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n|$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n|$$

容斥原理不只体现在学过的这两种情形中。更一般的公式可以帮助我们面对复杂的、多样的问题需求。

我们从简单示例开始。

2023-4-8

3.6 一般公式

【再看例2】某学校只有三门课程：数学、物理、化学。已知修这三门课的学生分别有170、130、120人；同时修数学、物理两门课的学生45人；同时修数学、化学的20人；同时修物理、化学的22人。同时修三门的3人。问只修数学一门课的学生数？只修数学和物理两门课的学生数？

解：令 M 为修数学的学生集合；

P 为修物理的学生集合；

C 为修化学的学生集合；

由题意可知

$$|\boldsymbol{M}\cap\overline{\boldsymbol{P}}\cap\overline{\boldsymbol{C}}| = |\boldsymbol{M}| - |\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{P}| - |\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{C}|$$
$$= \mathbf{170-45-20+3=108}$$

$$|\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{P}\cap\overline{\boldsymbol{C}}| = |\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{P}| - |\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{P}\cap\boldsymbol{C}| = \mathbf{45-3=42}$$

同学们从中观察到什么？（相对补集）

3.6 一般公式

进而，若将上例的问题改为 “只修一门课的学生有多少？” “只修两门课的学生有多少？”则相应的答案表示如下：

$$|M \cap \overline{P} \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap P \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap \overline{P} \cap C|$$

$$|M \cap P \cap \overline{C}| + |\overline{M} \cap P \cap C| + |M \cap \overline{P} \cap C|$$

设有与性质 1，2，⋯，n相关的元素N个，A_i为有第i种性质的元素的集合，$i = 1, 2, \ldots, n$。

P_k为至少有k种性质的元素的个数；

q_k为恰有k种性质的元素的个数。

$$q_k = p_k - C(k+1,1)p_{k+1} + C(k+2,2)p_{k+2} + \ldots$$

$$\pm C(n, n-k)p_n, \quad k = 0, 1, 2 \ldots n$$

3.6 一般公式

前例中只修一门课的学生为：

$$|M\cap\overline{P}\cap\overline{C}|+|\overline{M}\cap P\cap\overline{C}|+|\overline{M}\cap\overline{P}\cap C|=q_1$$
$$=p_1-C(2,1)p_2+C(3,2)p_3=p_1-2p_2+3p_3$$

在一般公式中，若令

$$P_0=N,\quad q_0=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|,$$

就得到原来的容斥原理。

【例13】某校有１２个教师，已知教数学的有８位，教物理的有６位，教化学的５位；数、理５位，数、化４位，理、化３位；数理化３位。问教其他课的有几位？只教一门的有几位？正好教两门的有几位？

3.6 一般公式

解：令教数学的教师属于A_1，教物理的属于A_2，教化学的属于A_3。则$P_0=12$，

$$P_1=|A_1|+|A_2|+|A_3|=8+6+5=19;$$

$$P_2=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|=12;$$

$$P_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|=3;$$

故 教其它课的老师数为：

$$q_0=P_0-P_1+P_2-P_3=2$$

恰好一门的教师数：

$$q_1=P_1-2P_2+3P_3=4$$

恰好教两门的老师数为：

$$q_2=P_2-3P_3=3$$

3.6 一般公式

【例14-1】设 n 对夫妻围圈而坐，每对夫妻都相邻的方案有多少？

解：

将每对夫妻看作一个整体，则n对夫妻围圆桌而夫妻相邻（夫妻可以交换位置）的方案数为$(n-1)!\,2^n$

【例14-2】设 n 对夫妻围圈而坐，每个男人都不和他的妻子相邻，有多少种可能的方案？

解：

不妨设n个女人先围成一圈，方案数为$(n-1)!$ 。

且n对夫妻围圆桌而夫妻相邻的方案数为 $(n-1)!\,2^n$。

令A_i为第i对夫妻相邻而坐的集合（$i=1,2\ldots n$），所求问题即为$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\ldots\cap\overline{A_n}|$

3.6 一般公式

此时，

$$|A_i| = 2(2n-2)!\ (\text{夫妻看作1个元素})$$
$$|A_i \cap A_j| = 2^2(2n-3)!$$

....

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 2^n(n-1)!$$

故， $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}| = (2n-1)! - 2C(n,1)(2n-2)! + 2^2C(n,2)(2n-3)! + \ldots + (-1)^n 2^n C(n,n)(n-1)!$

【例14-3】设 n 对夫妻围圈而坐，男女相间，每个男人都不和他的妻子相邻，有多少种可能的方案？

3.6 一般公式

解：

不妨设n个女人先围成一圈，方案数为$(n-1)!$。对任一这样的给定方案，顺时针给每个女人以编号$1, 2, \cdots, n$。设第i号与第$i+1$号女人之间的位置为第i号位置，$1 \le i \le n-1$。第n号女人与第1号之间的位置为第n号位置。设第i号女人的丈夫的编号也为第i号，$1 \le i \le n$。让n个男人坐到上述编号的n个位置上。设a_i是坐在第i号位置上的男人，则$a_i \ne i$，$i+1$，$1 \le i \le n-1$; $a_n \ne n$，1。这样的限制也即要求在下面3行n列的排列中

1	2	3	…	…	n－1	n
2	3	4	…	…	n	1
a_1	a_2	a_3	…	…	a_{n-1}	a_n

3.6 一般公式

每列中都无相同元素。满足这样的限制的排列 $a_1a_2\ldots a_n$称为二重错排。

设二重错排的个数为U_n，原问题所求的方案数就是 $U_n\ (n-1)!$ 。

设A_i为$a_i = i$或 $i+1\,(1 \le i \le n-1)$，$a_n = n$或1的排列$a_1\, a_2 \ldots a_n$的集合。则$|A_i| = 2\,(n-1)!$，关键是计算满足任取k个性质的排列个数。

也就是从$(1,2)(2,3)\cdots(n-1,n)(n,1)$这$n$对数的$k$对中各取一数，且互不相同的取法的计数。

3.6 一般公式

这相当于从$1, 2, 2, 3, 3, 4, \cdots, n-1, n-1, n, n, 1$中取$k$个互不相邻数的组合、但首尾的1不能同时取的计数。回想无重复不相邻组合的计数：

$$C'(n, r) = C(n-r+1, r),$$

因此，这里所求的组合个数为：

$$C(2n-k+1, k) - C(2n-4-(k-2)+1, k-2) =$$

$$\frac{2n}{2n-k}C(2n-k, k)$$

故：

$$U_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \dots \cap \overline{A_n}| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}C(2n-k, k)(n-k)!$$

3.6 一般公式

【例15】对于线性方程$x_1+x_2+x_3=15$，满足$0\le x_1\le 5, 0\le x_2\le 6, 0\le x_3\le 7$,求非负整数解数目。

解：若无限制条件，则问题相当于15个无区别的球放到3个有标志的盒子允许重复的方案数，计：

$$C(3+15-1,15)$$

此时，
只要做一个变换

$$\alpha=5-x_1,$$
$$\beta=6-x_2,$$
$$\gamma=7-x_3$$

则 $\alpha+\beta+\gamma=3$

故非负整数解数目为：3个无区别的球放到3个有标志的盒子允许重复的方案数，计：

$$C(3+3-1,3)=10$$

3.6 一般公式

再用容斥原理，令A_i为变量x_i不满足限制条件的解集，则问题转化为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = C(3+15-1,15) - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

这里，$|A_1| = C(3+9-1,9) = 55$

$(y_1 + 6 + x_2 + x_3 = 15)$

同理可以求出其它情形。

3.7 *Möbius*反演

基本想法：$\{a_n\}$ 易算，$\{b_n\}$难算，$\{a_n\}$可用 $\{b_n\}$ 表示，利用反演，将$\{b_n\}$用$\{a_n\}$表示。

1、二项式反演

引理：$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{m+k}C(n,k)C(k,m)=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m<n\end{cases}$

证明：左边$=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}C(n,m)C(n-m,k-m)=C(n,m)\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^{i}C(n-m,i)=\begin{cases}1, m=n\\ 0, m<n\end{cases}$

定理：$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C(n,k)b_k \Leftrightarrow b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C(n,k)a_k$

3.7 Möbius反演

证明： $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C(n,k)a_k$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C(n,k)\sum_{l=0}^{k}(-1)^l C(k,l)b_l$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k+l}C(n,k)C(k,l)b_l$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}(-1)^{k+l}C(n,k)C(k,l)b_l$$

$$= \sum_{l=0}^{n}b_l\sum_{k=l}^{n}(-1)^{k+l}C(n,k)C(k,l)$$

由引理可知，

上式$= b_n$

由对称性反之亦然。

以上是代数证明，用容斥原理也可以证明。设集合 S中具有n种性质对应的集合分别为：$A_1, A_2 \ldots A_n$。那么，不具有这些性质的对象集合大小为：

3.7 Möbius反演

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}|$，考虑这样一种特殊情况，对于集簇 $\{A_1, A_2 \ldots A_n\}$中的任意i个集合的交集大小都是b_i。即：$b_i = |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_i|$，这样的交集一共有$C(n, i)$个，此时不难理解，$b_0 = |S|$

则由容斥原理可得，$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_n}| = b_0 - C(n,1)b_1 + \ldots + (-1)^n C(n,n)b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)b_k = a_n$

现在取$a_i = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \ldots \cap \overline{A_i}|$, 此时$a_0$亦为$|S|$。则 $b_n = |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n| = a_0 - C(n,1)a_1 + \ldots + (-1)^n C(n,n)a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)a_k$

3.7 Möbius反演

推论： $a_n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) b_k \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C(n,k) a_k$

证明： 在定理中b_k处用$(-1)^k b_k$代入，即可。

【例16】错排问题（第四次）

求有多少长度为n的排列$a_1 a_2 \ldots a_n$，满足$a_i \neq i, (i = 1, 2, \ldots n)$。

解： 只须令A_k表示恰好k个位置保持不变（$k = 0, 1 \ldots n$）

则全排列

$$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)|A_k| = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) D_{n-k}$$

3.7 Möbius反演

令$n-k=l$，则上式变成

$$n! = \sum_{l=0}^{n} C(n,l) D_l$$

由推论可知

$$D_n = \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} C(n,l) l!$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \frac{n!}{(n-l)!\, l!} l! = n! \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3.7 $\boldsymbol{M\ddot{o}bius}$反演

2、$\boldsymbol{M\ddot{o}bius}$反演

每一个大于1的整数n可以唯一分解为素数幂的乘积，即 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$，这里$p_1, p_2 \ldots p_k$是不同的素数，$\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2 \ldots k$。

定义：$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{如果} n = 1 \\ 0, & \text{如果存在} i, \text{使得} \alpha_i > 1 \\ (-1)^k, & \text{如果} \alpha_i = 1, \ i = 1, 2, \ldots k \end{cases}$$

例如：30=2× 3 × 5，121=11× 11

则 $\mu(30) = (-1)^3 = -1$，$\mu(121) = 0$

$$\mu(12) = ?, \mu(21) = ?$$

3.7 *Möbius*反演

【定理3-7-1】对于任意正整数n，有

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, 如果n=1\\0, 如果n>1\end{cases}$$

证明：$n=1$时，成立

$n>1$时，此时

$$n={p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\ldots{p_k}^{\alpha_k}，n_1=p_1p_2\ldots p_k$$

若$T(k,j)$表示$\{1，2，\ldots k\}$的j元子集的集合。

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n_1}\mu(d)=\mu(1)+\sum_{j=1}^{k}\sum_{l\in T(k,j)}\mu\left(\prod_{i\in l}p_i\right)$$

3.7 Möbius反演

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} C(k,j)(-1)^j = (1-1)^k = 0$$

推论：$\varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$

证明：$n = 1$时，成立

$n > 1$时，此时

$n = p_1{}^{\alpha_1}p_2{}^{\alpha_2}\ldots p_k{}^{\alpha_k}$，$n_1 = p_1p_2\ldots p_k$

$$n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} = n\sum_{d|n_1}\frac{\mu(d)}{d}$$

$$= n\{1 + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{l\in T(k,j)}\left(\prod_{i\in l} p_i\right)^{-1}\}$$

3.7 Möbius反演

$$= n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = \varphi(n)$$

【定理3-7-2】Möbius反演定理

设$f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数，若$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$，则$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$，反之亦然。

证明：$\xrightarrow{\text{必要性}}$ 首先，$f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1)$，因为 $d_1|\frac{n}{d}$，故$d_1 dm = n$，从而$d|\frac{n}{d_1}$。这样，

3.7 Möbius反演

$$\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d_1|\frac{n}{d}}g(d_1)=\sum_{d|n}\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu(d)g(d_1)$$

$$=\sum_{d_1|n}\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)g(d_1)=\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)$$

由前定理可知：

$\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=d_1\\ 0, & n>d_1\end{cases}$，即有

$$\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=g(n)$$

3.7 Möbius反演

充分性 $\Longleftarrow$ **首先有：** $g\left(\frac{n}{d}\right) =$

$$\sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu(d_1) f\left(\frac{n}{dd_1}\right) = \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1)$$

这样，

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1)$$

$$= \sum_{d_1|n} \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1) =$$

$$\sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) = f(n)$$

3.7 Möbius反演

【练习1】再看$\varphi(n) = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)n}{d}$, 很容易看出：

$$f\left(\frac{n}{d}\right) = \frac{n}{d}$$

故，$n = f(n) = \sum_{d|n}\varphi(d) = \sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$

【练习2】$f(n) = \sum_{d|n} d$；$f(n) = \sum_{d|n} 1$

3.8 鸽巢原理

鸽巢原理是组合数学中最简单也是最基本的原理，也叫抽屉原理。即

“若有n个鸽子巢，n+1个鸽子，则至少有一个巢内有至少有两个鸽子。”

【例17-1】367人中至少有２人的生日相同。

【例17-2】10双手套中任取11只，其中至少有两只是完整配对的。

【例17-3】参加会议的n人中至少有２人认识的别的参会者的人数相等。

【例17-4】给定5个不同的正整数，其中至少有3个数的和被3整除。

3.8 鸽巢原理

【例17-5】从1到2n的正整数中任取n+1个，则这n+1个数中，至少有一对数，其中一个是另一个的倍数。

证明：设$n+1$个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$。每个数去掉一切2的因子，直至剩下一个奇数为止。组成序列 $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$。这$n+1$个数仍在$[1, 2n]$中，且都是奇数。而$[1, 2n]$中只有$n$个奇数。故必有$r_i = r_j = r$，则$a_i = 2^{\alpha i} r$，$a_j = 2^{\alpha j} r$，若$a_i > a_j$，则 a_i是aj的倍数。

【例17-6】设 $a_1, a_2, \cdots, am$是正整数序列，则至少存在k和l，$1 \le k \le l \le m$，使得和$a_{k+1} + \cdots + al$是m的倍数。

证明：设$S_k = \sum a_i$，$S_h \equiv r_h \pmod m$，$0 \leqslant r_h \leqslant m-1$，$h = 1, 2, \cdots, m$。若存在l，$S_l \equiv 0 \pmod m$则命题成立．否则，$1 \leqslant r_h \leqslant m-1$．但$h = 1, 2, \cdots, m$．由鸽巢原理，故存在$r_k = rh$，即$S_k \equiv S_h$，不妨设$h > k$．则 $S_h - Sk = ak_{+1} + ak_{+2} + \ldots + ah_{\equiv} 0 \bmod m$

3.8 鸽巢原理

【例17-7】设a_1, a_2, a_3为任意３个整数，$b_1b_2b_3$为a_1, a_2, a_3的任一排列，则$a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$中至少有一个是偶数。

证明：

由鸽巢原理，a_1, a_2, a_3必有两个同奇偶．设这３个数被２除的余数为xxy，于是b_1, b_2, b_3中被２除的余数有２个x，一个y．这样$a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$被２除的余数必有一个为0。

【例17-8】设$a_1, a_2, \cdots, a_{100}$是由1和２组成的序列，已知从其任一数开始的顺序10个数的和不超过16．即$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9} \leqslant 16$，$1 \leqslant i \leqslant 91$。则至少存在h和k，k ＞ h，使得$a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$。

3.8 鸽巢原理

证明：

令 $S_j = \sum a_i$， j =1 ， 2 ， … ，100 显然 $S_1 < S_2 < \cdots < S_{100}$， 且 $S_{100} = (a_1 + \cdots + a_{10}) + (a_{11} + \cdots + a_{20}) + \cdots + (a_{91} + \cdots + a_{100})$

根据假定有 $S_{100} \leqslant 10 \times 16 = 160$ 作序列 S_1，S_2，…，S_{100}，$S_1 + 39$，…，$S_{100} + 39$ 共200项．其中最大项 $S_{100} + 39 \leqslant 160 + 39$ 由鸽巢原理，必有两项相等．而且必是前段中某项与后段中某项相等．设 $S_k = S_h + 39$，$k > h$ $S_k - S_h = 39$ 即 $a_h + a_{h+1} + \cdots + a_k = 39$。

【练习】把5个顶点放入边长为2的正方形，则至少有两个点之间的距离小于等于$\sqrt{2}$。