20375177 曹建钦

1.解

因 $7^2=49$，故不超过48的合数必然是2，3，5的倍数，而且不超过48的合数的因子不可能超过7

设 A_1, A_2, A_3 分别为不超过48的2，3，5倍数集

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = 48-24-16-9+8+4+3-1=13$

素数个数应该为 $13+3-1=15$

2.解

设 A_1：1到300中被3整除 A_2：被5整除 A_3：被7整除

则 $|A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}| = |A_1\cap A_2| - |A_1\cap A_2\cap A_3| = 20-2=18$

即有18个

3.解 令 A_i 为第i对夫妻相邻而坐的集合 $(i=1,2,\cdots n)$，所求为 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cdots\cap\overline{A_n}|$

有 $|A_i| = 2(2n-2)!$

$|A_i\cap A_j| = 2^2(2n-3)!$

$\cdots$

$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| = 2^n(n-1)!$

则有 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cdots\cap\overline{A_n}| = (2n-1)! - 2C(n,1)(2n-2)! + 2^2C(n,2)(2n-3)!$

$+\cdots+(-1)^n 2^n C(n,n)(n-1)!$

4.

解法一：容斥原理

设 A_i 为数 i 在第 i 位上的全体排列，$i=1,2,\cdots,n$

有 $|A_i|=(n-1)!$ ，$i=1,2,\cdots n$

同理有 $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$ ，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots k$

$\cdots$

$|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n|=1$

则有 $D_n=n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!+\cdots\pm C(n,n)0!$

$=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\pm\frac{1}{n!})$

解法二：递推关系

$D_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$ ，$D_1=0$，$D_2=1$

可推得 $D_0=1$

又有 $D_n-nD_{n-1}=(-1)^{n-1}[D_1-D_0]=(-1)^n$

令 $G_e(x)=D_0+D_1x+\frac{D_2}{2!}x^2+\frac{D_3}{3!}x^2+\cdots$

x：$D_1=D_0+(-1)^1$

$\frac{x^2}{2!}$：$D_2=2D_1+(-1)^2$

$\frac{x^3}{3!}$：$D_3=3D_2+(-1)^3$

$\cdots$

相加有 $G_e(x)-xG_e(x)=e^{-x}\Rightarrow G_e(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$

则有 $D_n=(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots\pm\frac{1}{n!})n!$