第四章 Pólya定理

- 群的概念
- 置换群
- 循环、奇循环与偶循环
- Burnside引理
- Pólya定理
- 示例
- 母函数型的Pólya定理
- 图的计数

4.1 群的概念

【定义1】给定集合G和G上的二元运算$\cdot$，满足下列条件则称为群。

(a)封闭性：若$a, b \in G$, 则存在$c \in G$, 使得$a \cdot b = c$。

(b)结合律：任意$a, b, c \in G$,有$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$。

(c)单位元：存在$e \in G$, 任意$a \in G$. $a \cdot e = e \cdot a = a$。

(d)有逆元：任意$a \in G$, 存在$b \in G$, $a \cdot b = b \cdot a = e$,

$b = a^{-1}$。

由于结合律成立，$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$可记做$a \cdot b \cdot c$。

证明:对于$a_1, a_2, \ldots a_n$的乘积，结合律成立。

特别地，记：$a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$（共$n$个$a$相乘）。

4.1 群的概念

【例4-1】$G=\{1,-1\}$在普通乘法下是群。

【例4-2】$G=\{0,1,2,\ldots,n-1\}$在$mod\ n$的加法下是群。

【例4-3】二维欧氏空间所有刚体旋转$T=\{T_\alpha\}$构成群。其中：

$$T_\alpha=\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$T_\beta T_\alpha=\begin{pmatrix} cos\beta & sin\beta \\ -sin\beta & cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

4.1 群的概念

$$=\begin{pmatrix} cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta & sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta \\ -sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta & cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} cos(\alpha+\beta) & sin(\alpha+\beta) \\ -sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = T_{\alpha+\beta}$$

故而，封闭性成立。

又有，$(T_\alpha T_\beta)T_\gamma = T_\alpha(T_\beta T_\gamma)$，结合律成立。

且有，$T_0 = \begin{pmatrix} cos0 & sin0 \\ -sin0 & cos0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，单位元。

不难理解，T_α的逆元是$T_{-\alpha}$。得证。

4.1 群的概念

前两个示例群元素的个数是有限的，所以是有限群。最后一例群元素的个数是无限的，所以是无限群。

有限群G的元素个数叫做群的阶，记做$|G|$。

若群G的任意二元素a,b恒满足$ab=ba$。则称G为交换群，或$Abel$群。

设G是群，H是G的子集，若H在G原有的运算之下也是一个群，则称为G的一个子群。

以下一起讨论群的几个性质。

4.1 群的概念

性质1、单位元唯一

$$e_1 e_2 = e_1 = e_2$$

性质2、消去律成立

$ab = ac \xRightarrow{\text{左消去律}} b = c$，$ba = ca \xRightarrow{\text{右消去律}} b = c$

性质3、逆元唯一

$\boldsymbol{aa^{-1} = a^{-1}a = e}$，$\boldsymbol{ab = ba = e}$，$\boldsymbol{aa^{-1} = ab}$，$\boldsymbol{b = a^{-1}}$

性质4、 $(ab...c)^{-1} = c^{-1}...b^{-1}a^{-1}$，

由$(c^{-1}...b^{-1}a^{-1})(ab...c) = e$ **可证**。

4.1 群的概念

性质5、G是有限群，$g=|G|$，$G=\{a_1,a_2,\ldots a_g\}$，对于任意$a\in G$，必存在一个最小常数$r(a)$，使得$a^{r(a)}=e$，且$a^{-1}=a^{r(a)-1}$。

证明：构造序列$a,a^2,\ldots a^g,a^{g+1}$，由封闭性可知这$g+1$项都属于G，根据鸽巢原理，至少有两项相同，不妨设$a^l=a^m,1\le m<l\le g$，则有：

$a^{l-m}=e$，取$r=l-m$即可。此时，$aa^{r-1}=e$，即：$a^{-1}=a^{r-1}$。

因为存在这样的r，所以一定有最小的正整数$r(a)$，$r(a)$称之为元素a的阶。不难证明$H=\{a,a^2,\ldots a^{r-1},a^r\}$在原来运算下也构成群。

4.2 置换群

置换群是最重要的有限群，所有的有限群都可以用之表示。

置换：$[1,n]$到自身的1−1变换，n阶置换。

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \cdots n\\ a_1 & a_2 & a_3\cdots a_n\end{pmatrix}$$

这里容易看出，$a_1a_2\ldots a_n$是$[1,n]$的一个排列，因此，n阶置换共有$n!$个。

同一置换用这样的表示方法有$n!$种，例如：某个4阶置换，$p_1=\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3142\\2341\end{pmatrix}$。

n阶置换可以看作$[1,n]$上的一元运算。

4.2　置换群

对于$p_1=\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$

置换的运算定义为：$p_1p_2=\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3124\\2431\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$。

注意：置换之间的运算p_1p_2规定为先做p_1，再做p_2。这与一般习惯的前置不一样。

且，$p_2p_1=\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4321\\4213\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}$，可见$p_1p_2\neq p_2p_1$。

4.2 置换群

可以证明n阶置换全体集合，在置换运算下构成群。

（1）封闭性

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$

（2）结合律

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

4.2 置换群

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \cdots a_n \\ c_1 c_2 \cdots c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

故，结合律成立

（3）单位元e为

$$\begin{pmatrix} 12 \cdots n \\ 12 \cdots n \end{pmatrix}$$

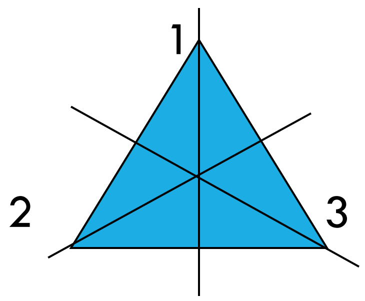
（4）逆元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdots n \\ 12 \cdots n \end{pmatrix}$$

4.2 置换群

【例4-4】等边三角形的运动群



绕中心逆时针转动120度、240度，

绕对称轴翻转。

相应写出置换(只此6个)

$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

$$p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ p_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

4.2　置换群

不难验证，以上与运动有关的置换在置换运算下构成置换群。

因此有，$[1,n]$上的所有置换（$n!$ 个）构成一个群，称为n个文字的对称群，记作S_n。

注意：一般说$[1,n]$上的一个置换群，不一定是指S_n但一定是S_n的某一个子群。

任一n阶有限群同构于一个n个文字的置换群。

证明：建立有限群$G=\{a_1,a_2\ldots a_n\}$的元素a_i和某一置换群的某一置换一一对应，并且同构。

具体地，可令a_i对应序列$a_1a_i,a_2a_i,\ldots a_na_i$，序列中元素互不相同，否则

4.2 置换群

存在两项相等，$a_l a_i = a_m a_i$

由消去律即可知道：$a_l = a_m$，这不可能。

此时如果令$a_{i_l} = a_l a_i, l = 1, 2, \ldots n$，即元素$a_i$对应于排列$a_1 a_i, a_2 a_i, \ldots a_n a_i$，也就是置换

$$p_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \cdots & a_n a_i \end{pmatrix}$$

再证运算保持，

$$a_i a_j \text{对应} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 a_i a_j & a_2 a_i a_j & \ldots & a_n a_i a_j \end{pmatrix}$$

另一方面，

4.2 置换群

$p_i p_j$对应于如下**置换运算**：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \cdots & a_n a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 a_j & a_2 a_j & \cdots & a_n a_j \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 a_i & a_2 a_i & \cdots & a_n a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 a_i & a_2 a_i & \cdots & a_n a_i \\ a_1 a_i a_j & a_2 a_i a_j & \cdots & a_n a_i a_j \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 a_i a_j & a_2 a_i a_j & \cdots & a_n a_i a_j \end{pmatrix}$$

得证

故有限群和某一置换群同构。

以下介绍循环群。

4.3 循环、奇循环与偶循环

介绍一种简单的表示置换的方法，约定记号

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_m & a_1 \end{pmatrix} = (a_1\, a_2 \ldots a_m)$$

称为m阶循环。

【例4-5】5个文字{1，2，3，4，5}的置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5\ 2\ 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\,5\,4)(2)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)(4\,5)$$

4.3 循环、奇循环与偶循环

注意：

① 第2例中，2，3可以不出现，因为其保持不变；

② 置换只与其元素的相邻状况有关，与哪个元素为首无关；（1 2 3）=（2 3 1）

③ 两个循环没有相同的文字，则说是无相关的，不相关的循环的乘积可交换。

（1 2 3）（4 5）=（4 5）（1 2 3）

④ 若$p=(a_1\ a_2\ \dots a_n)$，则$p^n=(1)(2)\dots(n)=e$

4.3 循环、奇循环与偶循环

【例4-6】 $p=(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

$$p^2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)$$

$$p^3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1)(2)(3)=e$$

【定理4-1】任何一个置换都可以表示成若干循环的乘积。

证明：对于$p=\begin{pmatrix}1&2&3\cdots n\\a_1&a_2&a_3\cdots a_n\end{pmatrix}$给出搜索算法。

4.3 循环、奇循环与偶循环

【定义4-1】2阶循环$(i\ j)$叫作i和j的对换或换位。

【定理4-2】任一循环都可以表示成对换的积。

证明：这里只要给出一个分解的方法就可以。

$$(1\ 2\ 3\ \ldots n)=(1\ 2)(1\ 3)\ldots(1\ n)$$

使用数学归纳法。

$$(1\ 2)(1\ 3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$
$$=(1\ 2\ 3)$$

假设 $(1\ 2\ 3\ \ldots n-1)=(1\ 2)(1\ 3)\ldots(1\ n-1)$

4.3 循环、奇循环与偶循环

$(1\ 2\ 3\ \dots n-1)(1\ n) =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots\ \ 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n-1 & n \\ n & 2 & \cdots n-1 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots\ \ n & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3 \dots n)$，得证

当然，这种分解并不唯一，换位的数目都可以不同。例如：

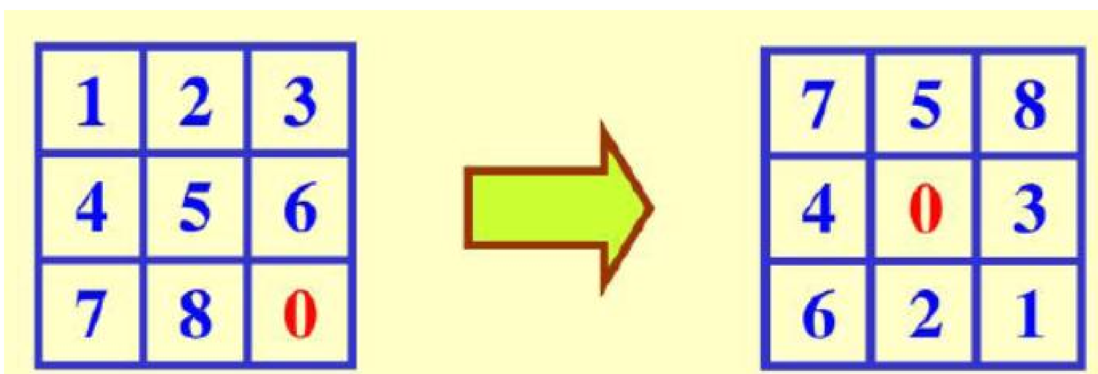
$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)(3\ 1)(1\ 3)$$

但有个性质不变，就是换位奇偶性不变。

4.3 循环、奇循环与偶循环

【定义4-2】若一个置换可分解为奇数个换位之积，叫作**奇置换**；若可分解为偶数个换位之积，叫作**偶置换**。

【例4-7】下图是3× 3格的棋盘，空格标以0，其余标注棋子编号。给出的格局变化如下图：



给出置换

$$p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&0\\7&5&8&4&0&3&6&2&1\end{pmatrix}=(1\ 7\ 6\ 3\ 8\ 2\ 5\ 0)(4)$$

4.3 循环、奇循环与偶循环

【定理4-3】S_n中偶置换的全体构成一个$\frac{1}{2}(n!)$阶的子群，记作A_n，称为交代群。

证明：先证明A_n是S_n的子群，首先单位元

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)(2)(3)\ldots(n)$，这是偶置换

A_n非空。

（1）封闭性：若p_1, p_2是偶置换，$p_1 p_2$当然也是偶置换。

（2）结合律：置换群具有结合律。

4.3 循环、奇循环与偶循环

（3）单位元：置换群的单位元在其中。

（4）逆元：$(i\ j)$的逆元是$(i\ j)$，容易说明

偶置换$p=(i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\dots(i_k\ j_k)$的逆元

$p^{-1}=(i_k\ j_k)\dots(i_2\ j_2)(i_1\ j_1)$。验证，$pp^{-1}=$
$(i_1\ j_1)(i_2\ j_2)\dots(i_k\ j_k)(i_k\ j_k)\dots(i_2\ j_2)(i_1\ j_1)$

由置换群结合律可得：$(1)(2)\dots(n)=e$

再证偶置换的个数$|A_n|$等于奇置换的个数$|B_n|$，这里$B_n=S_n/A_n$。

4.3 循环、奇循环与偶循环

任取换位$(i\ j)$，对于A_n中任一置换p，都有$(i\ j)p$是奇置换，即$(i\ j)p \in B_n$。所以，

$$|A_n| \le |B_n|$$

同理可以得到，$|B_n| \le |A_n|$

即有：$|A_n| = |B_n|$，又因为$|A_n| + |B_n| = n!$，

可得

$$|A_n| = \frac{1}{2}(n!)$$

有了以上的群理论准备，马上进入实质内容。

4.4 Burnside引理

1、共轭类

一般可以把S_n中任一个置换p分解为若干互不相交的循环乘积。

$$p=(a_1a_2\ldots a_{k_1})(b_1b_2\ldots b_{k_2})\ldots(h_1h_2\ldots h_{k_l})$$

其中：$k_1+k_2+\ldots+k_l=n$，设其中k阶循环出现的次数为c_k，$k=1,2,\ldots,n$。k阶循环出现c_k次，用$(k)^{c_k}$表示。

S_n中的置换可按分解成的格式

$$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$$

的不同而分类。显然有：$\sum_{k=1}^{n}kc_k=n$

4.4 *Burnside*引理

【练习】写出以下置换分解成的格式

(1)(2 3)(4 5 6 7)；(1 2 3 4)(5)(6 7)

S_n中具有**相同格式的置换全体，称为与该格式相应的共轭类**。

【定理4-4】 S_n中属于$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$共轭类的元素个数为

$$\frac{n!}{c_1!\,c_2!\ldots c_n!\,1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}}$$

证明：在$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$格式中，长度为$k$的循环可以重复$k$次，$c_k$个$k$阶循环共重复了$k^{c_k}$次。

4.4 Burnside引理

证明：在$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$格式中，长度为$k$的循环可以重复$k$次，$c_k$个$k$阶循环共重复了$c_k!\,k^{c_k}$次。

因此，共轭类的元素个数为

$$\frac{n!}{c_1!\,c_2!\ldots c_n!\,1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}}$$

【例4-8】求S_4中不同循环格式的共轭类中置换个数。

解：$(1)^4$共轭类置换个数为：$\frac{4!}{4!1^4}=1$

$(1)^2(2)^1$共轭类置换个数为：$\frac{4!}{2!1^2 1!2^1}=6$

4.4 $Burnside$引理

$(1)^1(3)^1$共轭类置换个数为：$\frac{4\,!}{1!1^1 1!3^1} = 8$

$(4)^1$共轭类置换个数为：$\frac{4\,!}{1!4^1} = 6$

$(2)^2$共轭类置换个数为：$\frac{4\,!}{2!2^2} = 3$

2、k不动置换类

设G是$\{1, 2, \ldots n\}$的置换群，也是S_n的子群，G中使k保持不变的置换全体，记作Z_k，称为使k保持不动的置换类。

对于$G = \{e, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$，给出不同$Z_k$。

4.4 Burnside引理

可以发现，Z_k是G中有因子(k)的置换全体。

【定理4-5】群G中关于k的不动置换类Z_k是G的一个子群。

证明：（1）封闭性：若p_1, p_2是使k不动的两个置换，那么$p_1 p_2$也必然使k不动。

（2）结合律：从群G中继承。

（3）单位元：从群G中继承单位元。

（4）逆元：在群G中置换的逆元含有因子(k)

得证

4.4 $\boldsymbol{Burnside}$引理

3、等价类

【定义4-3】由G定义的关系R：若存在$p \in G$，使得$k \xrightarrow{p} j$，则称kRj。如果R满足自反性、对称性和传递性，则称R是等价关系。

这样，G上的等价关系将$[1, n]$划分为若干等价类。元素k所属的等价类记作E_k。

【例4-9】$G = \{e, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$, 1和2是一个等价类，3和4是另一个等价类。

4.4 Burnside引理

【定理4-6】$|E_k||Z_k| = |G|,\ k = 1, 2, \dots n$

证明：若$|E_k| = l$，不失一般性，设$E_k = \{a_1(= k), a_2, \dots a_l\}$，$a_1, a_2, \dots a_l$是$l$个不超过$n$的正整数，且各不相同。既然$a_1, a_2, \dots a_l$属于同一等价类，故存在属于$G$的置换$p_i$，使得

$$k \xrightarrow{p_i} a_i,\ i = 1, 2, \dots l,$$

置换p_i使数k变为等价类中的a_i。

$P = \{p_1, p_2, \dots p_l\}$是属于群$G$的置换的集合，但未必是一个群。作$G_j = Z_k p_j,\ j = 1, 2, \dots l$。由于

$$k \xrightarrow{p \in Z_k} k \xrightarrow{p_j} a_j,$$

Z_k是k置换不动类

4.4 Burnside引理

就有，$k \xrightarrow{pp_j=p_j'\in Z_k p_j} a_j$，$j=1,2,\ldots l$，数$k$在$p_j' \in Z_k p_j$的作用下变成$a_j$。

$G_j = Z_k p_j$的元素属于G，且当$i \neq j$时，$G_i \cap G_j = \emptyset$, 故：

$G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \ldots \dot{+} G_l \subseteq G$，或者

$Z_k p_1 \dot{+} Z_k p_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_k p_l \subseteq G$， $\dot{+}$表示不相交集合的并。

另一方面，凡属于G的任意置换 p, 有

4.4 Burnside引理

$k\xrightarrow{p}a_j$，即在p的作用下变成元素a_j，依据元素k的等价类，存在

$$p_j \in G，使得 k\xrightarrow{p_j}a_j。$$

故有：$k\xrightarrow{p}a_j\xrightarrow{p_j^{-1}}k$，即$k\xrightarrow{pp_j^{-1}}k$。

依据Z_k的定义，$pp_j^{-1} \in Z_k$，$p \in Z_k p_j$。所以

$$G \subseteq Z_k p_1 \dot{+} Z_k p_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_k p_l$$

因此可得

$$G = Z_k p_1 \dot{+} Z_k p_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_k p_l$$

由于当$i \neq j$时，$G_i \cap G_j = \emptyset$，当然就有

$$|G| = |Z_k p_1| + |Z_k p_2| + \ldots + |Z_k p_l| =$$

4.4 *Burnside*引理

$$|Z_k|+|Z_k|+\ldots+|Z_k|=l|Z_k|=|E_k||Z_k|$$

【例4-10】$G=A_4, E_1=\{1,2,3,4\}, Z_1=\{e,(234),(243)\}$。

解析：A_4中有单位元$e=p_1$，使得$1\xrightarrow{e}1$;

存在置换$p_2=(12)(34)$，使得$1\xrightarrow{p_2}2$;

存在置换$p_3=(13)(24)$，使得$1\xrightarrow{p_3}3$;

存在置换$p_4=(14)(23)$，使得$1\xrightarrow{p_4}4$;

相应地，

4.4 Burnside引理

$$Z_1p_1 = \{e, (234), (243)\}$$
$$Z_1p_2 = \{(12)(34), (124), (123)\}$$
$$Z_1p_3 = \{(13)(24), (132), (134)\}$$
$$Z_1p_4 = \{(14)(23), (143), (142)\}$$

不难看出，

$$G = Z_kp_1 \dot{+} Z_kp_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Z_kp_l$$

4、Burnside 引理

设$G = \{a_1, a_2, \ldots a_g\}$，其中$a_1 = e$，若把$a_k$分解成不相交的循环的乘积，$k = 1, 2, \ldots g$。

4.4 $Burnside$引理

记$c_1(a_k)$为置换a_k中1阶循环的个数，即在a_k作用下保持不变的元素的个数。例如：

$$G = \{e, (12), (34), (12)(34)\}$$

$$a_1 = e = (1)(2)(3)(4), \quad c_1(a_1) = 4$$

$$a_2 = (12) = (12)(3)(4), \quad c_1(a_2) = 2$$

$$a_3 = (34) = (1)(2)(34), \quad c_1(a_3) = 2$$

$$a_4 = (12)(34), \quad c_1(a_4) = 0$$

在此基础上，我们学习$Burnside$引理。

4.4 Burnside引理

【Burnside引理】设G是$N=\{1,2,\ldots n\}$上的置换群，G在N上可引出不同的等价类，其等价类的个数为：

$$l=\frac{1}{|G|}[c_1(a_1)+c_1(a_2)+\ldots+c_1(a_g)]$$

证明：先举个简单实例，给大家一个直觉印象。取$G=\{e,(12),(34),(12)(34)\}$，定义

$$s_{jk}=\begin{cases}1, & \text{若数}k\text{在置换}a_j\text{作用下不改变，即}k\xrightarrow{a_j}k\\ 0, & k\xrightarrow{a_j}l\neq k\end{cases}$$

故第j行求和就等于$c_1(a_j)$，第k列求和就是$|Z_k|$。所以表中元素的总和$=\sum_{i=1}^{g}\sum_{k=1}^{n}s_{jk}=\sum_{k=1}^{n}|Z_k|=\sum_{j=1}^{g}c_1(a_j)$

4.4 *Burnside*引理

证明过程，对于一般情况，有表如下：

G的元素	1	2	…	n	$\sum$
a_1	s_{11}	s_{12}	…	s_{1n}	$c_1(a_1)$
a_2	s_{21}	s_{22}	…	s_{2n}	$c_1(a_2)$
…	…	…	…	…	….
a_g	s_{g1}	s_{g2}	…	s_{gn}	$c_1(a_g)$
$\sum$	$\lvert Z_1\rvert$	$\lvert Z_2\rvert$	…	$\lvert Z_n\rvert$	

$$s_{jk}=\begin{cases}1,\ 若a_j\in Z_k，即k\xrightarrow{a_j}k\\ 0,若a_j\notin Z_k，即k\xrightarrow{a_j}l(\neq k)\end{cases}$$

4.4 Burnside引理

由于$\sum_{k=1}^{n} s_{jk} = c_1(a_j)$； $\sum_{j=1}^{g} s_{jk} = |Z_k|$

所以$\sum_{j=1}^{g}\sum_{k=1}^{n} s_{jk} = \sum_{j=1}^{g} c_1(a_j) = \sum_{k=1}^{n} |Z_k|$

若$N = \{1, 2, \ldots n\}$分解成l个等价类，

$$N = E_1 \dotplus E_2 \dotplus \cdots \dotplus E_l \text{ ,}$$

当j和k属于同一等价类时，据$|E_k||Z_k| = |G|$，$|E_j| = |E_k|$，有$|Z_j| = |Z_k|$。

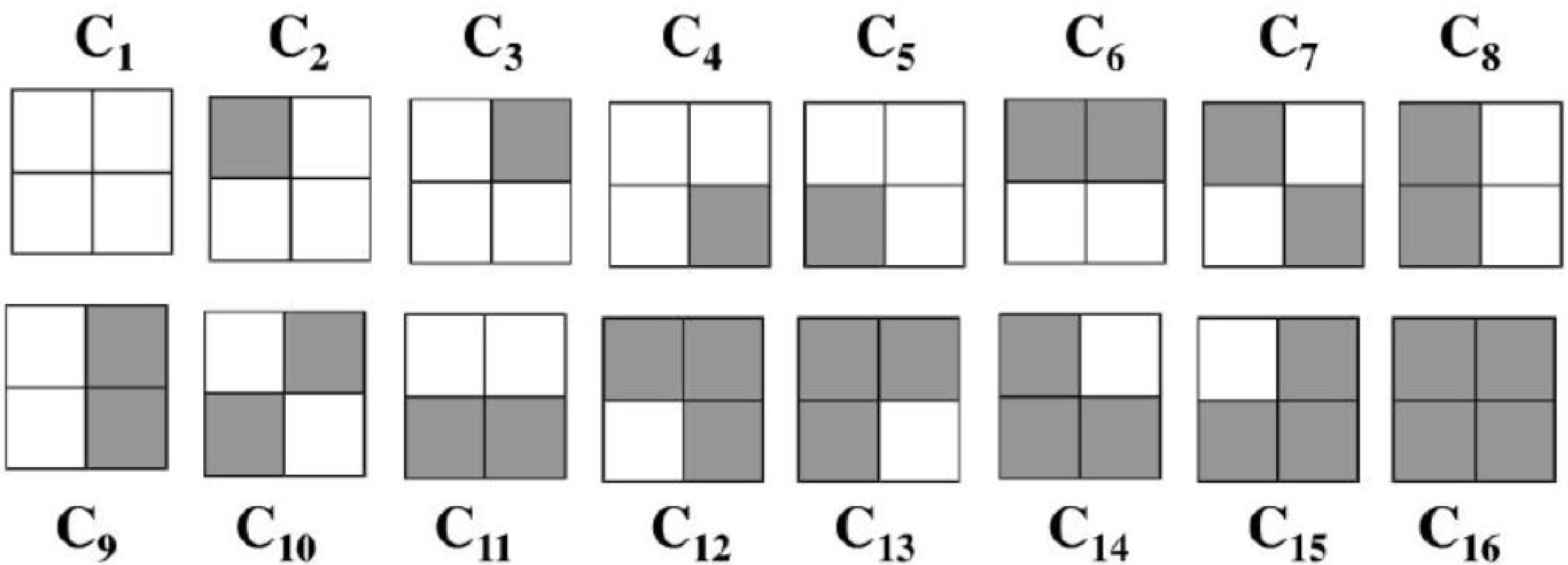
此时，$\sum_{k=1}^{n} |Z_k| = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k\in E_i} |Z_k| = \sum_{i=1}^{l} |E_i||Z_i|$

因为$|E_i||Z_i| = |G|,\ i = 1, 2, \ldots l$

即，$\sum_{k=1}^{n} |Z_k| = l|G|$，$l = \frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{n} |Z_k| = \frac{1}{|G|}\sum_{j=1}^{g} c_1(a_j)$

4.4 *Burnside*引理

- 问题：用黑、白两种颜色对2×2棋盘的格子着色，问有几种不同的着色方案？



4.4 Burnside引理

$S=\{C_1,C_2,\ldots,C_{16}\}$, S上的置换群为$G=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$,其中$p_1,p_2,p_3,p_4$分别为正方形绕中心顺时针旋转$0^\circ,90^\circ,180^\circ,270^\circ$ 所得到着色方案的置换. 即有

$$p_1=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \end{pmatrix}$$

$$p_2=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_3C_4C_5C_2C_9C_{10}C_6C_{11}C_7C_8C_{15}C_{12}C_{13}C_{14}C_{16} \end{pmatrix}$$

$$p_3=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_4C_5C_2C_3C_{11}C_7C_9C_8C_{10}C_6C_{14}C_{15}C_{12}C_{13}C_{16} \end{pmatrix}$$

4.4 Burnside引理

$$p_4=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_5C_2C_3C_4C_8C_{10}C_{11}C_6C_7C_9C_{13}C_{14}C_{15}C_{12}C_{16} \end{pmatrix}$$

则，$p_1=(c_1)(c_2)(c_3)(c_4)(c_5)(c_6)(c_7)(c_8)(c_9)(c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13})(c_{14})(c_{15})(c_{16})$

$p_2=(c_1)(c_2c_3c_4c_5)(c_6c_9c_{11}c_8)(c_7c_{10})(c_{12}c_{15}c_{14}c_{13})(c_{16})$

$p_3=(c_1)(c_2c_4)(c_3c_5)(c_6c_{11})(c_7)(c_8c_9)(c_{10})(c_{12}c_{14})(c_{13}c_{15})(c_{16})$

$p_4=(c_1)(c_2c_5c_4c_3)(c_6c_8c_{11}c_9)(c_7c_{10})(c_{12}c_{13}c_{14}c_{15})(c_{16})$

着色方案：$l=\frac{1}{4}(16+2+4+2)=6$

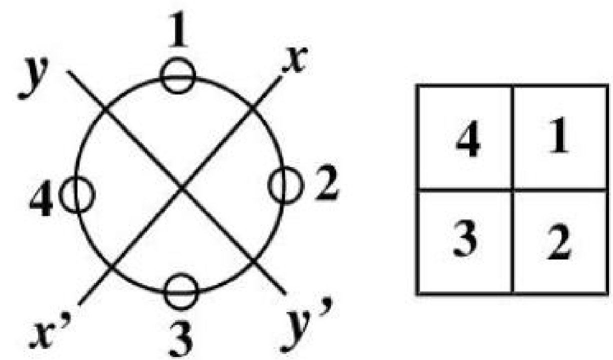
4.4 Burnside引理

问题:一个圆环,按顺时针方向 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$位置上装一红或蓝的珠子,问有多少种不同的方案?刚体运动使之吻合的算一种方案.

解 对应的置换群除了

p_1, p_2, p_3, p_4 ,还包括

(1) 沿轴 xx' 翻转



$$p_5 = \begin{pmatrix} C_1 C_2 C_3 C_4 C_5\ C_6\ C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12} C_{13} C_{14} C_{15} C_{16} \\ C_1 C_5 C_4 C_3 C_2 C_{11} C_{10} C_8 C_9\ C_7\ C_6\ C_{15} C_{14} C_{13} C_{12} C_{16} \end{pmatrix}$$

$c_1(p_5) = 4$

4.4 Burnside引理

(2) 沿轴 yy' 翻转

$$p_6=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_3C_3C_5C_4C_6C_{10}C_9C_8\ C_7C_{11}C_{13}C_{12}C_{15}C_{14}C_{16} \end{pmatrix}$$

$$c_1(p_6)=4$$

(3) 沿轴1-3翻转

$$p_7=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_4C_3C_2C_5C_9C_7C_{11}C_6C_{10}C_8C_{12}C_{15}C_{14}C_{13}C_{16} \end{pmatrix}$$

$$c_1(p_7)=8$$

4.4 Burnside引理

(4) 沿轴2-4翻转

$$p_8=\begin{pmatrix} C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16} \\ C_1C_2C_5C_4C_3C_8C_7C_6C_{11}C_{10}C_9C_{14}C_{13}C_{12}C_{15}C_{16} \end{pmatrix}$$

$$c_1(p_8)=8$$

所求方案数为

$$\frac{1}{8}[c_1(p_1)+\cdots+c_1(p_8)]$$

$$=\frac{1}{8}[16+2+4+2+4+4+8+8]=6$$

4.5 Pólya定理

不难看出，用Burnside引理也可以研究m种颜色的着色方案问题，但会很复杂。我们接着学习Pólya定理。

设有n个对象，$\overline{G}$是这n个对象上的置换群，用m种颜色涂染这n个对象，每个对象一种颜色

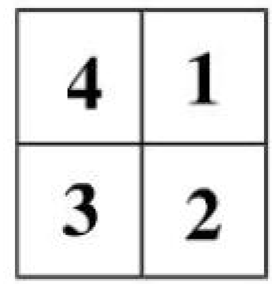
【Pólya定理】设$\overline{G}$是这n个对象上的置换群，用m种颜色涂染这n个对象，则不同染色方案数为：$l=\frac{1}{|\overline{G}|}[m^{C(\overline{a_1})}+m^{C(\overline{a_2})}+\ldots+m^{C(\overline{a_g})}]$

其中，$\overline{G}=\{\overline{a_1},\overline{a_2},\ldots\overline{a_g}\}$，$C(\overline{a_k})$是置换$\overline{a_k}$的循环节数。

4.5 Pólya定理

分析： $\overline{G}$是置换群，作用于n个对象上，不同于$Burnside$引理中的G群(作用于方案集合上)，二者之间的联系如下：

$\overline{G}$的元素$\overline{p}$，相应地在染色方案集合上也诱导出一个属于G的置换p，只要证明$c_1(p) = m^{c(\overline{p})}$即可。



对于右图，其置换群（逆时针）为：

$\overline{p_1} = (1)(2)(3)(4)$，$\overline{p_2} = (1234)$

$\overline{p_3} = (13)(24)$，$\overline{p_4} = (4321)$

其分别对应如下方案集合上的置换。

4.5 Pólya定理

$p_1 = (c_1)(c_2)(c_3)(c_4)(c_5)(c_6)(c_7)(c_8)(c_9)(c_{10})(c_{11})(c_{12})(c_{13})(c_{14})(c_{15})(c_{16})$

$p_2 = (c_1)(c_2c_3c_4c_5)(c_6c_9c_{11}c_8)(c_7c_{10})(c_{12}c_{15}c_{14}c_{13})(c_{16})$

$p_3 = (c_1)(c_2c_4)(c_3c_5)(c_6c_{11})(c_7)(c_8c_9)(c_{10})(c_{12}c_{14})(c_{13}c_{15})(c_{16})$

$p_4 = (c_1)(c_2c_5c_4c_3)(c_6c_8c_{11}c_9)(c_7c_{10})(c_{12}c_{13}c_{14}c_{15})(c_{16})$

通过观察，容易发现：$c(\overline{p_1}) = 4,\ c_1(p_1) = 16$

$$c(\overline{p_2}) = 1,\ c_1(p_2) = 2$$

4.5 Pólya定理

$$c(\overline{p_3}) = 2,\ c_1(p_3) = 4$$
$$c(\overline{p_4}) = 1,\ c_1(p_4) = 2$$

p_i作用下不变的图像，正好是对应的$\overline{p_i}$的循环节中的对象染以相同的颜色所得的图像。

定理证明，n个对象用m种颜色进行涂色所得的方案集合为S，$|S| = m^n$。

$\overline{G}$中的每个置换$\overline{a_j}$对应n个对象的一个排列，也对应了S中m^n个涂色方案中的一个排列，记作a_j。因此，有$|G| = |\overline{G}|$。

又因为，$c_1(a_j) = m^{c(\overline{a_j})}$，由*Burnside*引理可证。

4.6 示例

【例4-11】将等边三角形的三个顶点用红、蓝、绿三种颜色进行着色,问有多少种不同的着色方案? 如果

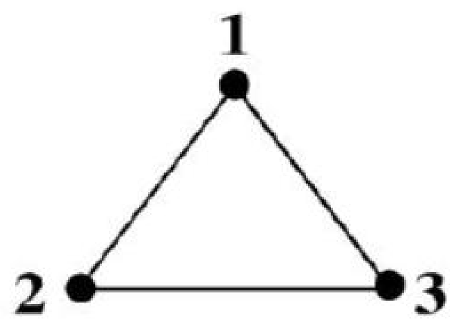
(1) 经旋转能重合的方案认为是相同的?

(2) 经旋转和翻转能重合的方案认为是相同的?

解 (1) 如图所示, 等边三角形的三个顶点分别标记为1,2,3.

{1,2,3}上的置换群为

$$G=\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$



4.6 示例

由*Pólya*定理可得：

$$l = \frac{1}{|\overline{G}|}\left[m^{C(\overline{a_1})} + m^{C(\overline{a_2})} + m^{C(\overline{a_3})}\right]$$

$$= \frac{1}{3}[3^3 + 3^1 + 3^1] = 11$$

(2) 只是将(1)中的置换群变成

G={e, (1 2 3), (1 3 2), (1)(2 3), (2)(1 3), (3)(1 2)}

$$l = \frac{1}{|\overline{G}|}\left[m^{C(\overline{a_1})} + m^{C(\overline{a_2})} + m^{C(\overline{a_3})}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[3^3 + 2 \times 3^1 + 3 \times 3^2] = 10$$

4.6 示例

【例4-12】长为6的透明的方格，用红、蓝、黄、绿四种颜色进行涂色，问有多少种方案？

解：因为透明，所以从左到右和从右到左看作相同。这样，

群G中只有两个置换，

$$\overline{p_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1)^6$$

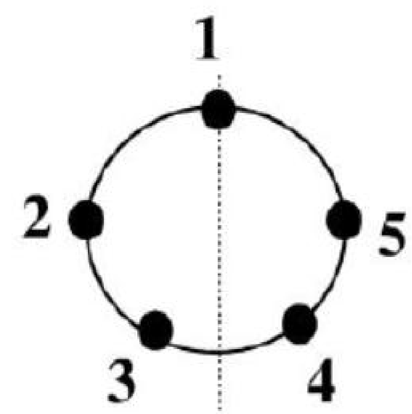
$$\overline{p_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (16)(34)(25)$$

由$P\acute{o}lya$定理可得：

$$l = \frac{1}{|\overline{G}|}\left[m^{C(\overline{a_1})} + m^{C(\overline{a_2})}\right] = \frac{1}{2}[4^6 + 4^3] = 2080$$

4.6 示例

【例4-13】由 b,r,g 三种颜色的5颗珠子镶成的圆环，共有几种不同的方案？又问由两个b色和三个r 色珠子镶成的圆环有多少个？



解 如图所示，将5颗珠子分别标记为为1,2,3,4,5. 使5颗珠子重合的置换群G中有10个置换. 其中有5个旋转和5个反射：

$$G=\{e,(1\,2\,3\,4\,5),(1\,3\,5\,2\,4),(1\,4\,2\,5\,3),(1\,5\,4\,3\,2),$$
$$(2\,5)(3\,4),(1\,3)(4\,5),(1\,5)(2\,4),(1\,2)\,(3\,5),(1\,4)(2\,3)\}$$

4.6 示例

由*Pólya*定理可得：

$$l = \frac{1}{|\overline{G}|}\left[m^{C(\overline{a_1})} + m^{C(\overline{a_2})} + \dots + m^{C(\overline{a_{10}})}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[3^5 + 4 \times 3^1 + 5 \times 3^3\right] = 39$$

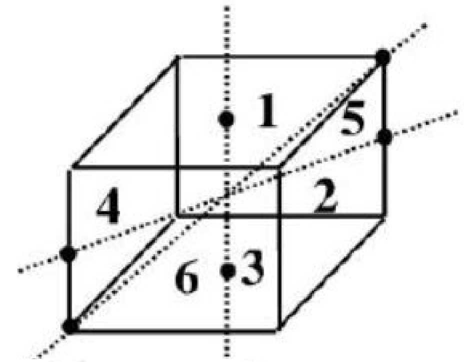
对于置换$(1)(2)(3)(4)(5)$，用两蓝三红镶嵌有$C(5,2) = 10$种方案，置换下不变；

对于四个置换格式$(5)^1$，方案数0；对于五个置换格式$(1)^1(2)^2$，方案数2。

所以，$l = \frac{1}{10}[10 + 0 + 5 \times 2] = 2$

4.6 示例

【练习】对正立方体的6个面用红、蓝、绿三种颜色进行着色，问有多少种不同的着色方案?



解 使正立方体重合的置换群中有24个置换，它们是：

(1) 不动置换，型为1^6，有1个；

(2) 相对两面中心轴旋转$90^0, 270^0$的置换，型为$1^2 4^1$，有6个；旋转180^0的置换，型为$1^2 2^2$，有3个；

(3) 绕相对两顶点连线旋转$120^0, 240^0$的置换，型为3^2，有8个；

(4) 绕相对两边中点连线旋转180^0的置换，型为2^3，有6个.

4.7 母函数型Pólya定理

Pólya定理主要用于计数，其母函数型不仅可以计数，还可以对状态进行列举。

设$G=\{a_1,a_2\ldots a_g\}$是对象$1,2,\ldots n$上的置换群，每个置换都写成不相交循环的乘积，$c(a_k)$是置换a_k的循环节数，$c_i(a_k)$是置换a_k中i阶循环因子的节数。用m种颜色$b_1,b_2,\ldots b_m$对$1,2,\ldots n$中的元素涂色。

由Pólya定理可知，着色方案数有：

$$l=\frac{1}{|G|}\left[m^{C(a_1)}+m^{C(a_2)}+\ldots+m^{C(a_g)}\right]$$

4.7 母函数型$\boldsymbol{Pólya}$定理

因为k阶循环因子，其中k个对象，同一种颜色用了k次，故，

$$m^{c(a_i)}$$
$$=(b_1+b_2+\ldots b_m)^{c_1(a_i)}(b_1^2+b_2^2+\ldots b_m^2)^{c_2(a_i)}\ldots$$
$$(b_1^n+b_2^n+\ldots b_m^n)^{c_n(a_i)}$$

代入

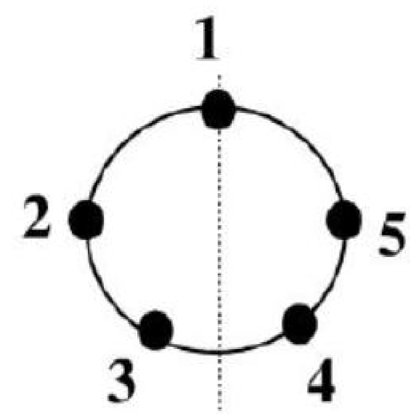
$l=\frac{1}{|G|}\left[m^{C(a_1)}+m^{C(a_2)}+\ldots+m^{C(a_g)}\right]$就可以得到$b_1,b_2,\ldots b_m$为变元的循环指数多项式

$$P(b_1,b_2,\ldots b_m)$$

4.7 母函数型$Pólya$定理

【例4-13】由b,r,g 三种颜色的5颗珠子镶成的圆环, 共有几种不同的方案? 又问由两个b色和三个r 色珠子镶成的圆环有多少个?

解 如图所示, 将5颗珠子分别标记为为1,2,3,4,5. 使5颗珠子重合的置换群G中有10个置换. 其中有5个旋转和5个反射:



$$G=\{e,(1\,2\,3\,4\,5),(1\,3\,5\,2\,4),(1\,4\,2\,5\,3),(1\,5\,4\,3\,2),$$
$$(2\,5)(3\,4),(1\,3)(4\,5),(1\,5)(2\,4),(1\,2)\,(3\,5),(1\,4)(2\,3)\}$$

4.7 母函数型Pólya定理

由Pólya定理可得：

$$l=\frac{1}{|\overline{G}|}\left[m^{C(\overline{a_1})}+m^{C(\overline{a_2})}+\ldots+m^{C(\overline{a_{10}})}\right]$$

$$=\frac{1}{10}\left[3^5+4\times 3^1+5\times 3^3\right]=39$$

由两个b色和三个r 色珠子镶成的圆环的个数为

$$P=\frac{1}{10}[(b+r+g)^5+4(b^5+r^5+g^5)+5(b+r+g)(b^2+r^2+g^2)^2]$$

此时，两蓝三红方案数即为：

4.7 母函数型Pólya定理

中项 b^2r^3 的系数. 其为

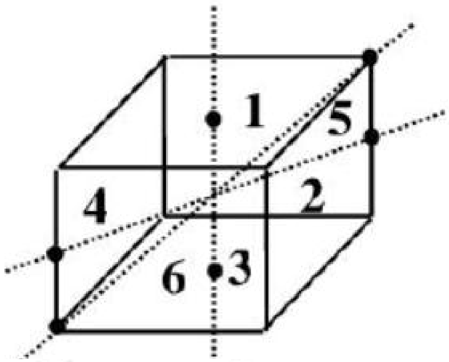
$$\frac{1}{10}\left(\frac{5!}{2!3!}+5\cdot\frac{2!}{1!1!}\right)=\frac{1}{10}(10+10)=2$$

注: 多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式中项 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 的系数为

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$$

4.7 母函数型*Pólya*定理

【例4-14】对正立方体的6个面用红、蓝、绿三种颜色进行着色，问有多少种不同的着色方案？



解 使正立方体重合的置换群中有24个置换，它们是：

(1) 不动置换，型为1^6，有1个；

(2) 相对两面中心轴旋转$90^0, 270^0$的置换，型为$1^2 4^1$，有6个；旋转180^0的置换，型为$1^2 2^2$，有3个；

(3) 绕相对两顶点连线旋转$120^0, 240^0$的置换，型为3^2，有8个；

(4) 绕相对两边中点连线旋转180^0的置换，型为2^3，有6个.

4.7 母函数型*Pólya*定理

所求着色方案数为:

$$l=\frac{1}{24}(3^6+6\cdot 3^3+3\cdot 3^4+8\cdot 3^2+6\cdot 3^3)=57$$

着色方案为

$$P=\frac{1}{24}[(r+b+g)^6+6(r+b+g)^2(r^4+b^4+g^4)$$
$$+3(r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2)^2$$
$$+8(r^3+b^3+g^3)^2+6(r^2+b^2+g^2)^3]$$

其中红、蓝、绿色各出现2次的方案数为上述展开式中$r^2b^2g^2$的系数，为

$$\frac{1}{24}\left(\frac{6!}{2!2!2!}+3\cdot 6+6\cdot\frac{3!}{1!1!1!}\right)=6$$

4.8 图的计数

本节讨论用$Pólya$定理对图进行计数。

【问题】n个顶点简单图有多少个？

注意：同形的图形算一个。

简单图指的是过两个顶点没有多于一条的边，而且不存在圈的图形。

问题即为：对n个无标志顶点的完全图的$C(n,2)=\frac{n}{2}(n-1)$条边，用两种颜色x,y着色，这里上色y的边相当于无边，可得一简单图。

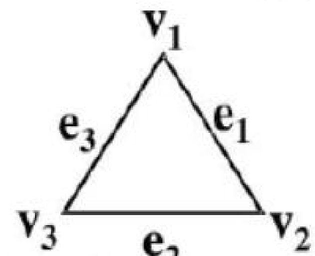
这个问题就成了对n个顶点完全图进行2-着色的方案数问题。

4.8 图的计数

两个n顶点简单图是相同的当且仅当这两个图是同构的. 而两个图是同构的当且仅当存在$V=\{1,2,\ldots,n\}$上的一个置换p, 使得当(i, j)为一个图中的边时, $(p(i),p(j))$ 为另一个图的边.

当n=3时, 顶点集V={1,2,3}上的每一个置换p, 利用规则

$$\{i,j\}\to\{p(i),p(j)\}$$



都得到边集 $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}=\{e_1,e_2,e_3\}$ 上的一个置换。

4.8 图的计数

例如 若

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

则p置换E中的边如下：

$$\begin{pmatrix}\{1,2\} & \{2,3\} & \{1,3\}\\ \{2,3\} & \{1,2\} & \{1,3\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ e_2 & e_1 & e_3\end{pmatrix}$$

令G为这样得到的边集E上的置换的集合所构成的置换群，那么K_3中两个图是同构的当且仅当对这两个图的边的着色是等价的. 于是问题成为在置换群G下，对E中边着色的不同等价类的个数问题.

由下表可得G中所有的置换

4.8 图的计数

$V=\{v_1,v_2,v_3\}$上的置换	$E=\{e_1, e_2, e_3\}$上的置换
$(v_1)(v_2)(v_3)$	$(e_1)(e_2)(e_3)$
$(v_1v_2v_3)$	$(e_1e_2e_3)$
$(v_1v_3v_2)$	$(e_1e_3e_2)$
$(v_1)(v_2\ v_3)$	$(e_2)(e_1\ e_3)$
$(v_2)(v_1\ v_3)$	$(e_3)(e_1\ e_2)$
$(v_3)(v_1\ v_2)$	$(e_1)(e_2\ e_3)$

4.8 图的计数

三个顶点的不同简单图个数为：

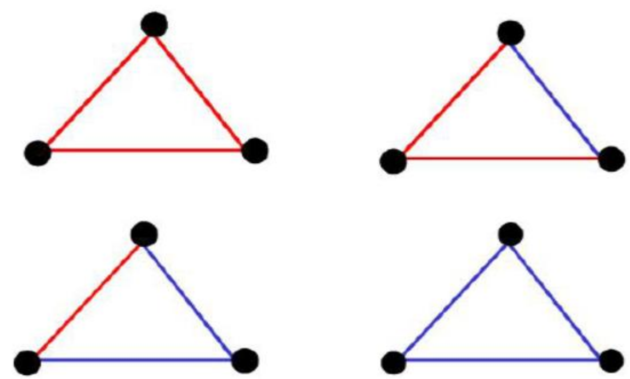
$$l=\frac{1}{6}(2^3+2\times2^1+3\times2^2)=4$$

简单图方案为：

$$=\frac{1}{6}[(r+b)^3+2(r^3+b^3)+3(r+b)(r^2+b^2)]$$

$$=r^3+r^2b+rb^2+b^3$$

具体四种简单图见右图。



4.8 图的计数

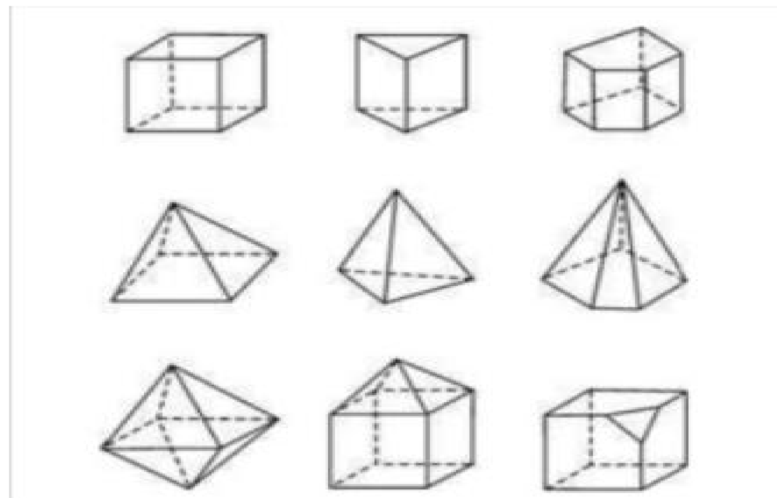
正 n 面体只有 5 个：正 4 面体，正 6 面体，正 8 面体，正 12 面体，正 20 面体。没有其他的正多面体。

面	棱	顶点
4	6	4
6	12	8
8	12	6
12	30	20
20	30	12

欧拉公式:$v + f - e = 2$（v点，f面，棱）

4.8 图的计数

【定义4-4】凸多面体中与一个顶点有关的面角之和，与360度的差称为该顶点的欠角。



【定理4-7】凸多面体各顶点欠角之和是720度。

证明：设V, S, E分别为顶点集，面集和边集。

由欧拉定理：

$$|V| + |S| - |E| = 2$$

凸多面体：多面体在任何一个面的同侧。

4.8 图的计数

设a_{ij}为与顶点V_i面S_j相关的面角，e_j为S_j的边数，给定S_j则：

$$\sum_{V_i \in V} a_{ij} = (e_j - 2)180^{\circ}$$

$$\sum_{V_i \in V}\left(360^{\circ} - \sum_{S_j \in S} a_{ij}\right) = |V|360^{\circ} - \sum_{V_i \in V}\sum_{S_j \in S} a_{ij} =$$

$$|V|360^{\circ} - \sum_{S_j \in S}(e_j - 2)180^{\circ} = 2|V|180^{\circ} - \sum_{S_j \in S} e_j 180^{\circ} + 2|S|180^{\circ}$$

$$= 2|V|180^{\circ} + 2|S|180^{\circ} - 2|\mathrm{E}|180^{\circ} = 360^{\circ}(|V| + |S| - |E|)$$

$$= 720^{\circ}$$

4.8 图的计数

【练习】足球由正五边形和正六边形相嵌组成，问一个足球由多少块正五边形与正六边形组成？

解：从右图可以看出，

足球每一个顶点都与两个正六边形和一个正五边形组成。

其欠角$=360^{\circ}-(108^{\circ}+2\times 120^{\circ})=12^{\circ}$

因此，共有$\frac{720^{\circ}}{12^{\circ}}=60$(个)顶点。

4.8 图的计数

通过观察可以发现：一个顶点对应3条棱，但是每一条棱被复用2次（与两个顶点有关）。因此，共有60× 3/2=90（条）

又因为：每个顶点都是正五边形的顶点，所以只能有60/5=12（个）正五边形。

由欧拉公式可知： $|V| + |S| - |E| = 2$

所以，$|S| = 90 - 60 + 2 = 32$，正六边形为32-12=20（个）

本章练习

【练习1】用4颗红色的珠嵌在正六面体的四个角，问有多少种方案？

解 问题相当于用两种颜色r,b对正立方体的8个顶点着色，两种颜色相等的方案数.

具体方案可表示为

$$P=\frac{1}{24}[(b+r)^8+6(b^4+r^4)^2+9(b^2+r^2)^4+8(b+r)^2(b^3+r^3)^2]$$

所求方案数为该展开式中b^4r^4的系数，即为

$$\frac{1}{24}(C(8,4)+6\cdot 2+9\cdot C(4,2)+8\cdot 2\cdot 2)=7$$

本章练习

【练习1】骰子的六个面分别有1,2,3,4,5,6个点，问有多少种不同的骰子？

解 问题相当于用6种不同的颜色对正立方体的6个面进行着色，并且每种颜色出现且仅出现一次.

着色方案为

$$P=\frac{1}{24}[(b_1+\cdots+b_6)^6+6(b_1+\cdots+b_6)^2(b_1^4+\cdots+b_6^4)$$
$$+3(b_1+\cdots+b_6)^2(b_1^2+\cdots+b_6^2)^2+8(b_1^3+\cdots+b_6^3)^2$$
$$+6(b_1^2+\cdots+b_6^2)^3]$$

所求的不同的骰子数为

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{6!}{1!1!1!1!1!1!}=30$$

小练习

1. 试证下列函数对于运算$f\cdot g=f\big(g(x)\big)$是一个群。

$f_1(x)=x$，$f_2(x)=\frac{1}{x}$， $f_3(x)=1-x$，

$f_4(x)=\frac{1}{1-x}$， $f_5(x)=\frac{x-1}{x}$， $f_6(x)=\frac{x}{x-1}$

2. 给出4个文字{1，2，3，4}的所有置换。

3. 用黑白两色对2×2棋盘的格子着色，问有多少种不同的着色方案？

小练习

4. 求用正五边形搭成的凸多面体的面数。

5. S_n中属于$(1)^{c_1}(2)^{c_2}\ldots(n)^{c_n}$共轭类的元素个数为

$$\frac{n!}{c_1!\,c_2!\ldots c_k!\,1^{c_1}2^{c_2}\ldots n^{c_n}}$$