组 合 数 学

北京航空航天大学
数学科学学院

2023年3月4日

绪论（好奇与问题）

1. 如果有人问你，整数1000！后面有多少个0?
2. 8名同学圆桌聚餐，有两位同学不愿意坐到一起，你知道有多少种就座方式吗?
3. 253位网球选手通过淘汰赛产生一位最终优胜者（冠军），需要进行多少场比赛?
4. 哥尼斯堡七桥问题

凡此问题，都是组合与图论研究的内容。

绪论（研究内容）

研究的中心问题 如何按照给定的要求（限定条件）来安排有限多个对象（组态）。具体分为四个层次：

1. 证明（证否）符合要求的安排的存在性；
2. 符合要求的安排有多少种可能，如何对安排的方案分类（计数问题，本次教学重点）；
3. 组合问题有解，能否给出某种特定解的算法，这是构造性问题；
4. 如果解的算法很多，需要在一定条件下找出最优方案。这是优化问题。

绪论（背景与现状）

- 1666年莱布尼兹所著《组合学论文》一书问世，这是组合数学的第一部专著，首次使用组合（Combinatorics）一词。20世纪初英国数学家**MacMahon**出版《组合数学分析》拉开现代组合数学序幕。
- 美国数学会于2010分类中将组合数学（05分类号）细化为计数、设计、图论、极值和代数组合学五个子领域。
- 组合数学的蓬勃发展是在计算机科学问世和普遍应用之后。在算法设计与分析、图论、优化和密码等领域有广泛应用。

绪论（建议教材）

使用教材：1.《组合数学》（第5版），卢开澄 卢华明，清华大学出版社

参考教材：2.《组合数学》，孙淑玲，中国科技大学出版社

先导课程：数学分析、线性代数

后继课程：数据结构与算法、算法分析与设计、图论、编码理论、密码学、最优化理论等等

绪论（教学安排，组合部分48学时）

第一章 排列与组合（4课时）

第二章 递推关系与母函数（12课时）

第三章 容斥原理与鸽巢原理（12课时）

第四章 Polya定理（8课时）

第五章 组合算法与应用（8课时）

教学最后一周期末考试

绪论（课程要求）

1. 学好组合数学既需要不断的思考总结，也要进行相当的训练；
2. 课堂交流（腾讯会议）+QQ群（1061354179）；
3. 考试采用闭卷方式（60%）,平时每章结束后有测试（4次，合计40%）。

绪论（学习建议）

1. 如果认为计算机科学是研究算法的科学，那么组合数学是算法的理论基础，未来可以结合具体算法设计与分析理解课程；
2. 组合数学来源于实际问题（有趣、挑战性），学习过程中既要关注实例分析，也要注意发现存在其中的规律性；
3. 注重学习交流和讨论。

绪论（简单的集合论知识）

- 集合A与元素a, A={a∈A|ϕ(a)}
- 基数|A|，子集合，幂集P(A)
- 多重集（Multiset）
- 集合上的运算：∩、∪、-
- 卡氏积(×)、关系(R)、函数(f)
- 单射、满射、双射
- 偏序、全序、等价关系

第一章　　排列与组合

1.1　加法法则与乘法法则

1.2　一一对应

1.3　排列与组合

1.4　圆周排列与重排列

1.5　允许重复的组合与不相邻的组合

1.1 加法法则与乘法法则

【加法法则】 设事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则事件A或B之一有m+n种产生方式。

集合论语言：

若 $|A| = m$, $|B| = n$, $A \cap B = \varnothing$, 则 $|A \cup B| = m + n$ 。

可以推广至有限多集合情形

1.1 加法法则与乘法法则

【例 1】 选修《组合与图论》的男同学有42人，女同学有19人，则该教学班共有多少人？

（能否使用加法法则）

【例 2】选修《组合与图论》的同学有61人，选修《概率论》的同学有55人，则选修《组合与图论》或《概率论》的同学共有多少人？

（能否使用加法法则）

1.1 加法法则与乘法法则

【乘法法则】设事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则事件A与B有 $m \cdot n$ 种产生方式。

集合论语言：

若 $|A| = m$, $|B| = n$, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$,

则 $|A \times B| = m \cdot n$ 。

亦可推广至有限多集合情形

1.1 加法法则与乘法法则

【例3】若字符串由两个字符组成，第一个字符可选自{a，b，c，d，e}，第二个字符可选自{0，1，2，3}，则此字符串共有多少个？

【例4】由数字{1，2，3，4，5}可以构成多少个所有数字互不相同的四位偶数？

1.1 加法法则与乘法法则

【例5】 某种样式的运动服的着色由底色和装饰条纹的颜色配成。底色可选红、蓝、橙、黄，条纹色可选黑、白，则共有$4\times2=8$种着色方案。

注意：若此例改成底色和条纹都用红、蓝、橙、黄四种颜色的话，则方案数并不是$4 \times 4 = 16$，而只有 $4 \times 3 = 12$ 种。

1.1 加法法则与乘法法则

【例6】求小于10000的正整数中含有数字1的数的个数。

解：小于10000的不含1的正整数可看做4位数，但0000除外。故有9×9×9×9－1＝6560个。

含1的有：9999－6560=3439个

思考题1：求小于10000的正整数中含有数字0的数的个数。（与上题区别在哪里？）

【例7】n元布尔函数f(x1, x2, ... , xn)的数目。

分析：所谓n元布尔函数f(x1, x2, ... , xn)是指n个布尔变元均取{T，F}为指派，布尔函数亦取值{T，F}的一类函数。

首先，确定这样的指派数有多少（函数的定义域），然后根据函数值来决定不同布尔函数的个数。

请尝试以二元布尔函数为例，列出真值表即可。

1.2 一一对应

一一对应概念是一个在计数中极为重要的概念，一一对应既是单射又是满射。

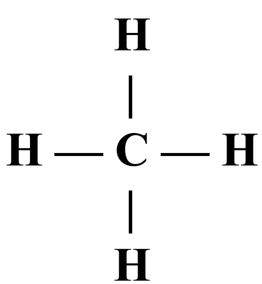
我们说A集合有n个元素 |A|=n，无非是将A中元素与自然数集合建立一一对应的关系。

在组合计数时往往借助于一一对应实现模型转换。

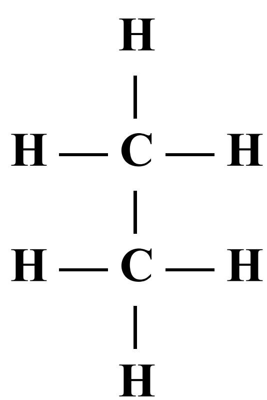
对A集合计数，但直接计数有困难，于是可设法构造一易于计数的B，使得A与B一一对应。（记票）

1.2 一一对应

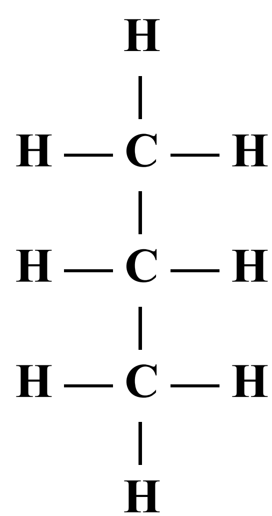
【例8】 CnH2n+2是碳氢化合物，随着n的不同有下列不同的枝链：



n=1 甲烷

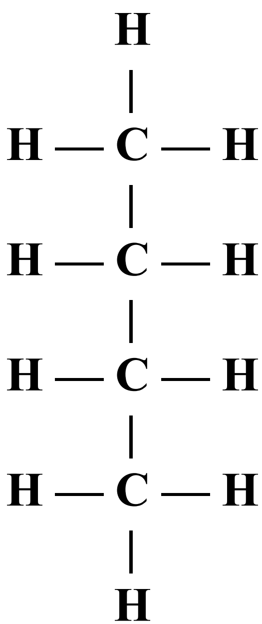


n=2 乙烷

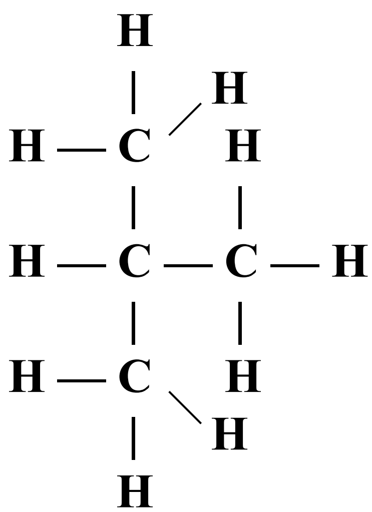


n=3 丙烷

1.2 一一对应



n=4 丁烷



n=4异丁烷

这说明对应C_nH_{2n+2}的枝链是有3n+2个顶点的一棵树，其中n个顶点与之关联的边数为4；其它2n+2个顶点是叶子。对于这样结构的每一棵树，就对应有一种特定的化合物。

从而可以通过研究具有上述性质的树找到不同的碳氢化合物C_nH_{2n+2}.（**图论：**树与碳氢化合物一一对应，同构就是相同碳氢化合物）

1.2　一一对应

【**重温**】：**253**位网球选手通过淘汰赛产生一位最终优胜者（冠军），需要进行多少场比赛?

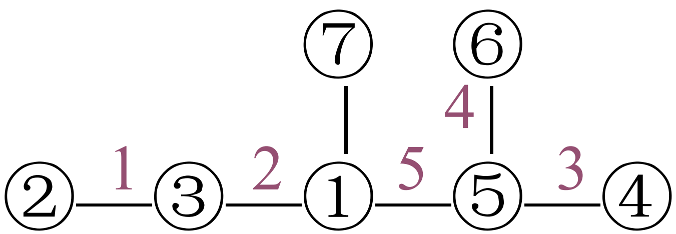
思考其中的一一对应关系

Cayley定理：　n个有标号的顶点的树的数目等于n^{n-2}。

分析：**生长点不是叶子,每个生长点是1到n中的任一自然数，有n种选择。两个顶点的树是唯一的。**

1.2 一一对应

给定一棵有标号的树



边上的标号表示摘去叶的顺序。(摘去一个叶子相应去掉一条边)

逐个摘去标号最小的叶子，叶子的相邻顶点(不是叶子，是非终端点)形成一个序列，序列的长度为n-2。

以此类推，得到序列31551，长度为7—2 = 5

这是由树形成序列的过程。

如何从序列得到有标号树呢？

1.3 排列与组合

排列定义　从n个不同元素中，取r个不重复的元素，按次序排列，称为从n个中取r个的无重排列。排列个数用 P(n, r)表示。当r=n时称为全排列（线排列）。一般不说可重排列即为无重排列。

组合定义　从n个不同元素中，取r个不重复的元素组成一个子集，而不考虑其元素的顺序，称为从n个中取r个的无重组合。组合个数用C(n, r)表示。

1.3 排列与组合

分析：从n个球中取r个的排列的典型例子是从n个不同的球中，取出r个，放入r个不同的盒子里，每盒1个。第1个盒子有n种选择，第2个有n-1种选择，⋯ 第r个有n-r+1种选择。

故：

$$P(n,r)=n(n-1)\cdot\cdot\cdot(n-r+1)$$

容易知道：全排列个数是n!

1.3 排列与组合

分析：若球不同，盒子相同，则是从n个中取r个的组合的模型。若放入盒子后再将盒子标号加以区分，则又回到排列模型。每一个组合可有r!个标号方案。

故有：

$$C(n,r)\cdot r!=P(n,r),$$

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1.3 排列与组合

【例9】有5本不同的日文书，7本不同的英文书，10本不同的中文书。

1）取2本不同文字的书；

2）取2本相同文字的书；

3）任取两本书

解：1） $5\times7+5\times10+7\times10=155$；

2） $C(5,2)+C(7,2)+C(10,2)$

$=10+21+45=76$；

3） $155+76=231$

1.3 排列与组合

【例10】从1到300中取3个不同的整数，使这3个数的和能被3整除，有多少种方案？

解：将1到300的整数分成3类：

$A=\{i \mid i\equiv 1 \pmod 3\}=\{1,4,7,\cdots,298\}$,

$B=\{i \mid i\equiv 2 \pmod 3\}=\{2,5,8,\cdots,299\}$,

$C=\{i \mid i\equiv 3 \pmod 3\}=\{3,6,9,\cdots,300\}$.

要满足条件，有四种解法：

1)3个数同属于A;2)3个数同属于B

3)3个数同属于C;4)A,B,C各取一数.

故：共有$3C(100,3)+100^3=485100+1000000=1485100$

1.3 排列与组合

【例11】 某车站有6个入口处，每个入口处每次只能进一人，一组9个人进站的方案有多少？

解： **分析：**

一进站方案表示成：00011001010100，

其中“0”表示人，“1”表示门框，其中“0”是不同元，“1”是相同元。给“1”n个门只用n-1个门框。任意进站方案可表示成上面14个元素的一个排列。

1.3 排列与组合

[解法1]标号可产生5!重复的14个元的全排列。

故若设x为所求方案，则 $x \cdot 5!=14!$

$$\therefore x=14!/5!=726485760$$

[解法2]在14个元的排列中先确定“1”的位置，有C(14,5)种选择，再确定人的位置，有9！种选择。

故 $C(14,5)\cdot 9!$ 即所求解。

1.4 圆周排列与重排列

圆周排列定义　从n个不同元素中取r个按照某种顺序（比如**逆时针**）排成一个圆圈，称之为圆周排列。

分析： 圆周排列会使得线排列中**某些不同的排列表现出相同的本质**，这样本质相同的线排列正好有r个，因此，圆周排列Q(n, r)=P(n, r)/r。

【**重温**】8名同学圆桌聚餐，有两位同学不愿意坐到一起，你知道有多少种就座方式吗？

1.4 圆周排列与重排列

【例12】 有4男4女围圆桌就餐，若要求男女交替就座，一共有多少种就座方式？

分析： 可以让4男先围圆桌就坐，坐定后，两两男士之间的间隔空位为女士就座位置，此时因为有男士作为参照，因此女士就座就是一个线排列。

【例13】 有n对夫妻围圆桌就餐，若要求夫妻相邻就座，一共有多少种就座方式？

分析： 既有圆周排列，也要用到乘法法则。

1.4 圆周排列与重排列

重排列定义　从n个不同元素中，可以重复选取r个按照一定顺序排列起来，称之为重排列。

提示：这里会用到**多重集**的概念。问题的关键在于多重集中的每个元素的**重数**，如果重数不限，那么重排列数就为 n^r

如果重数有限制，就要考虑具体情况。

【**定理1**】多重集B={n1*b1, n2*b2, …, nk*bk}，它的全排列个数为：n!/(n1!n2!...nk!)，这里n是诸ni之和。

1.4 圆周排列与重排列

分析： 先将ni个bi（i=1,2,…k）看作不同元素，容易知道全排列是n!，且每一个bi，ni个相同相同元素产生了ni!那么多情形，消除这种影响，就得到所证情形。

【例14】4面红旗，3面蓝旗，2面黄旗，5面绿旗可以组成多少种由14面旗子排成的彩旗列？

思考 用字母A、B、C组成的5字母单词，要求A至多出现2次，B至多出现1次，C至多出现3次，求此类单词的个数？**多重集**{2*A，1*B，3*C}

1.5 允许重复的组合与不相邻的组合

【新问题】r个无差别的小球，放入n个有标志的小盒，每个盒子允许多于1个小球，共有多少种方案？

分析：这个问题等同于从n个不同元素中取r个允许重复的组合。相当于从多重集上取元素。

【定理2】从n个不同元素中取r个允许重复的组合，其组合数为C(n+r-1, r).

证明：说明与从n+r-1个不同元素中选取r个不允许重复的组合一一对应即可。

1.5 允许重复的组合与不相邻的组合

不失一般性，取r个允许重复的组合{a1, a2…ar}，假定a1≦a2≦… ≦ar，则有a1＜a2+1＜a3+2…＜ar+r-1≦n+r-1，这说明任一个可重复组合对应一个从n+r-1个不同元素中取r个不重复组合；

同时，每一个从n+r-1个不同元素中取r个不重复组合{b1, b2…br}，对应于一个b1≦b2-1≦b3-2…≦br-r+1≦n，这恰恰是n个不同元素中取r个允许重复的组合。

综上所述，定理得证。

1.5 允许重复的组合与不相邻的组合

【练习】1. 二项式$(x+y)^n$展开有多少项？

2. $(x+y+z)^4$ 展开有多少项？

3. 已知线性方程x1+x2+⋯+xn=b，n和b都是正整数，求此方程的非负整数解的个数。

提示：每个非负整数解（a1, a2, ⋯an）对应于将b个无区别小球放进n个有标志的小盒，允许每个小盒多于一个球。

1.5 允许重复的组合与不相邻的组合

【定理3】从n个不同元素中取r个作不相邻的组合，其组合数为C(n-r+1, r).

证明：若{b1, b2, …br}是一组不相邻的组合，令b1＜b2＜b3…＜br，取c1=b1，c2=b2-1，c3=b3-2… cr=br-r+1≦n-r+1。

则{c1, c2…cr}是r个不重复的组合（从n-r+1个不同元素中选取，故0≦r≦n-r+1）。

反之，若从n-r+1个不同元素中选r个不重复组合{d1, d2, …dr}，令d1＜d2＜d3…＜dr，则有

1.5 允许重复的组合与不相邻的组合

$c_1=d_1$，$c_2=d_2+1$，$c_3=d_3+2\cdots$ $c_r=d_r+r-1\leq n$。

此时任意两个c_i, c_j不相邻，即$\{c_1, c_2, \cdots c_r\}$是从n个不同元素中选取的不相邻组合。

由一一对应，可知定理得证。

思考 若$r>n-r+1$，为什么不相邻组合不存在？

本章最后我们一齐来看

【重温】整数1000！后面有多少个0？

本章测试题目

【今日习题】

1. 有多少个5位数(十进制)，每位数字都不相同，也不为0，且数字7和9不能相邻?
2. 求能除尽1400的正整数数目（1除外），其中包含多少个奇数?
3. $S=\{1,2,\cdots,1000\}$，$a,b\in S$，使得ab是5的倍数，求序偶（a, b）的数目。