北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

# 数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

# 第一章　绪论

## 1.3　向量范数与矩阵范数

### 1.3.1　向量范数

# 1.3.1 向量范数

**实数轴上距离的定义：**

$\forall\ x_1, x_2 \in R$ 则它们之间的距离为：$|x_1 - x_2|$

有了距离的定义，我们可以判断收敛性：

$$\{x_n\} \quad x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad \Leftrightarrow \quad |x_n - x| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

平面上的距离定义：

$$p_1(x_1,y_1), p_2(x_2,y_2), \| p_1 - p_2 \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

两点间的距离为$\|x - y\|$ $\|x-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\|$(距离的三角不等式)

## 向量范数的定义:

定义在$R^n$上的实值函数$\|\cdot\|$称为**向量范数**,如果$\forall x, y \in R^n$,
$k \in R$,满足

(1)正定性: $\|x\| \geq 0$;

(2)齐次性: $\|kx\| = |k| \|x\|$;

(3)满足三角不等式:$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

向量范数是一种度量，用来衡量一个向量的长度或它到原点（即零向量）的距离。

**常用范数** 设 $\vec{x}=[x_1,\dots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$,

$$\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\ (\text{列范数})$$

$$\|\vec{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\ (\text{欧氏范数})$$

$$\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|\quad(\text{行范数})$$

$$\|\vec{x}\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}\ (p\text{范数})$$

cauchy-schwarz不等式: $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$

Holder不等式: $\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

**证** 只证$\|\cdot\|_2$是向量范数，其余两个留给读者自己证明。

$\|\cdot\|_2$满足定义中的条件(1)是显然的。对任一数$k\in\mathbf{R}$，有

$$\|k\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(kx_i)^2}=\sqrt{k^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|k|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=|k|\,\|\boldsymbol{x}\|_2$$

因此，$\|\cdot\|_2$满足定义中的条件(2)。由$\|\boldsymbol{x}\|_2$的含义，可用内积表示$\|\boldsymbol{x}\|_2$，即

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

任取向量$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，则有

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}\|_2^2+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\|\boldsymbol{y}\|_2^2$$

根据 Cauchy - Schwarz(柯西-施瓦兹)不等式

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^2\leqslant(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})$$

可知

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_2^2+2\|\boldsymbol{x}\|_2\|\boldsymbol{y}\|_2+\|\boldsymbol{y}\|_2^2=(\|\boldsymbol{x}\|_2+\|\boldsymbol{y}\|_2)^2$$

因而$\|\cdot\|_2$满足定义中的条件(3)。

# 范数的连续性：

**定理1：**(向量范数的连续性 )设$N(x)=\|\cdot\|_A$是$R^n$上任一向量范数，则$N(x)$是$x$的连续函数.

**证明：** 设$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i,\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\vec{e}_i,\vec{e}_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)^T$,

只需证明当$\vec{x}\to\vec{y}$时,$N(\vec{x})\to N(\vec{y})$即可.

$$|N(\vec{x})-N(\vec{y})|=\left|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|\right|\le\|\vec{x}-\vec{y}\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\vec{e}_i\right\|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\,\|\vec{e}_i\|\ \le\|x_i-y_i\|_\infty\left(\sum_{i=1}^{n}\|\vec{e}_i\|\right)\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{y}}0.\qquad\square$$

# 范数的等价性:

$\boxed{\text{定理2:}}$(向量范数的等价性 )设$\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$是$R^n$上向量的任意两种范数，

则存在常数$c_1, c_2 > 0$,使得$\forall \vec{x} \in R^n$有

$$c_1\| x \|_B \le \| \vec{x} \|_A \le c_2\| \vec{x} \|_B .$$

证明：只需证明当 $\|\vec{x}\|_B = \|\vec{x}\|_\infty$ 时上式成立即可.

定理等价于证明：$\exists c_1, c_2 > 0$,使得$c_1 \le \dfrac{\|\vec{x}\|_A}{\|\vec{x}\|_\infty} \le c_2, \quad \forall 0 \ne \vec{x} \in R^n$.

考虑函数 $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_A \ge 0, \quad \vec{x} \in R^n$.

记$S = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|_\infty = 1, \vec{x} \in R^n\}$,则$S$是一个有界闭集.

$f(x)$是$S$上的连续函数.有最大最小值

即存在 $\vec{x}', \vec{x}'' \in S$,使得

$$f(\vec{x}') = \min f(x) = c_1, f(\vec{x}'') = \max f(x) = c_2,$$

设$\vec{x} \in R^n$且$\vec{x} \neq 0$,则$\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_\infty} \in S$,从而 $c_1 \leq f\left(\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_\infty}\right) \leq c_2$ $c_1, c_2 > 0,$

即$c_1 \leq \left\|\dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_\infty}\right\|_A \leq c_2 \Leftrightarrow c_1\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_A \leq c_2\|\vec{x}\|_\infty, \forall \vec{x} \in R^n.$

**定理3:** $R^n$上的所有向量范数都等 价.

**注记:定理的意义**

向量$x$的某种范数可以任意小(大)时,该向量的其他任意一种 范数也会任意小(大).如果在一种范数意义下向量序列收敛时,则在任何一种范数意义下该向量序列均收敛.

**定理4** $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^{(k)} - x^*\right\| = 0,$

其中‖·‖为向量的任一种范数.

**证明** 显然， $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = 0,$

而对于 $R^n$ 上任一种范数‖·‖，由定理2，存在常数 $c_1, c_2 > 0$ 使

$$c_1\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le c_2\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty,$$

于是又有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)} - x^*\right\| = 0.$$

## 1.3.2 矩阵范数(Norm of a Matrix)

**定义3：** 定义在$R^{n\times n}=R^{n^2}$上的实值函数 $\|\cdot\|$称为范数，如果对于$R^{n\times n}$中任意矩阵$A,B$，满足

1. $\|A\|\geq 0 \quad (\|A\|=0 \Leftrightarrow Ax=0)$ （正定条件），
2. $\|cA\|=|c|\cdot\|A\|,\quad \forall c\in \mathrm{R}^n$ （齐次条件）；
3. $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$ （三角不等式）；
4. $\|AB\|\leq\|A\|\cdot\|B\|.$

视 $R^{n\times n}$ 中的矩阵为 $R^{n^2}$ 中的向量，则由 $R^{n^2}$ 上的2范数可以得到 $R^{n\times n}$ 中矩阵的一种范数

$$F(A)=\|A\|_F=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

称为 $A$ 的Frobenius范数.

$F(A)$ 显然满足正定性、齐次性及三角不等式.

# 向量范数与矩阵范数的相容性

**定义4:** 给定向量范数 $\|\cdot\|$ 矩阵范数 $\|\cdot\|$,如果对任意的 $n$ 维向量 $\vec{x}$ 和任意的 $n\times n$ 矩阵 $A$,它们总满足

$$\|A\vec{x}\|\le\|A\|\cdot\|\vec{x}\|.$$

则称所给的矩阵范数与 向量范数是相容的 .

**定理2:** 设在 $R^n$ 中给定一种向量范数 ,对任意的 $n\times n$ 矩阵 $A$,则

$$\|A\|=\max_{\|\vec{x}\|=1}\|A\vec{x}\|$$

是一种矩阵范数 ,并且它与给定的向量范 数是相容的.

**证明** 先证相容性. 对任意的$n\times n$矩阵$A$和$n$维非零向量$y$. 由于

$$\max_{\|x\|=1}\|Ax\|\geq\left\|A\frac{y}{\|y\|}\right\|=\frac{1}{\|y\|}\cdot\|Ay\|.$$

所以有 $$\|Ay\|\leq\|y\|\cdot\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=\|y\|\cdot\|A\|,$$

此结果对 $y=0$ 也成立.

再证 (1.2) 式定义的矩阵函数为范数.

(1) 当$A=0$时，$\|A\|=0$; 当$A\neq 0$时，必有$x_0\in R^n$，$\|x_0\|=1$，满足 $Ax_0\neq 0$，因而必有 $\|A\|>0$.

(2) 对任意的数 $k\in R$，有

$$\|kA\|=\max_{\|x\|=1}\|kAx\|=|k|\cdot\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=|k|\cdot\|A\| \quad .$$

(3) 对任意的$n\times n$矩阵 $A$ 和 $B$, 有

$$\|A+B\| = \max_{\|x\|=1}\|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1}\|Ax+Bx\|$$

$$\le \max_{\|x\|=1}\left\{\|Ax\|+\|Bx\|\right\}$$ 向量范数满足三角不等式.

$$\le \max_{\|x\|=1}\|Ax\| + \max_{\|x\|=1}\|Bx\| = \|A\|+\|B\|$$

(4) 对任意的$n\times n$矩阵 $A$ 和 $B$, 有

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1}\|(AB)x\| \le \max_{\|x\|=1}\left\{\|A\|\cdot\|Bx\|\right\}$$

$$= \|A\|\cdot\max_{\|x\|=1}\left\{\|Bx\|\right\} = \|A\|\cdot\|B\|.$$

$$\|A\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

上式所定义的矩阵范数叫做从属于所给定向量范数的矩阵范数，又称为矩阵的算子范数.

设给定的向量范数为$\|\cdot\|_p$，则从属于向量范数的矩阵范数为:

$$\|A\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \ .$$

$$\|A\|_p = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \ .$$

上式中矩阵范数 $\|A\|_p$ 也叫 $A$的 $p$-范数. 矩阵的$p$-范数与向量的$p$-范数相容，即，

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p \ .$$

# 由相应的向量范数导出来的矩阵范数

1. 矩阵$A$的$p-$范数： $\|A\|_p = \max\limits_{\|\vec{x}\|_p=1} \|A\vec{x}\|_p$

2. 矩阵 A 的行范数： $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3. 矩阵 A 的列范数： $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

4. 矩阵$A$的谱范数： $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

其中$\lambda_{\max}(A^T A)$表示$A^T A$的最大特征值.

**证明：** 对于2范数，设$n$维向量$x$满足$\|x\|_2=1$. 因为

$$\|Ax\|_2^2=(Ax)^T(Ax)=x^TA^TAx\geq 0$$ 又$A^TA$对称，

$A^TA$是正定或者半正定矩阵，所以$A^TA$的特征值非负，设

$$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$$

设$u_1,u_2,\cdots,u_n$是对应于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征向量，且$(u_i,u_j)=\delta_{ij}$

则存在实数$c_i$，使得 $x=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$，且$\|x\|_2^2=x^Tx=\sum_{i=1}^{n}c_i^2=1.$

$$\|Ax\|_2^2=x^TA^TAx=(A^TAx,x)=(A^TA(\sum_{i=1}^{n}c_iu_i),\sum_{i=1}^{n}c_iu_i)$$

对任意对称正定矩阵$A$：

$\vec{x}^TA\vec{x}=(A\vec{x},\vec{x})\geq 0.$

$$\|Ax\|_2^2=(A^TA(\sum_{i=1}^{n}c_iu_i),\sum_{i=1}^{n}c_iu_i)=(\sum_{i=1}^{n}c_i[A^TA(u_i)],\sum_{i=1}^{n}c_iu_i)$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ic_iu_i,\sum_{i=1}^{n}c_iu_i)=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_ic_ic_j(u_i,u_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_ic_ic_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ic_i^2.\ \le\max_i\lambda_i.$$

取$\tilde{x}=u_1$,则$\|\tilde{x}\|_2=1$,

$$\|A\tilde{x}\|_2^2=u_1^TA^TAu_1=\lambda_{\max},$$

所以$\|A\|_2=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

☞ 还有一种常用的矩阵范数，

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

称为*Frobrnius*（佛罗贝尼乌斯）范数，又称为*Euclid* 范数。

注：$\|\bullet\|_F$ 不从属于任何向量范数，即 $\|\bullet\|_F$ 不是算子范数.

$\|\vec{x}\|_2$ 与$\|A\|_F$是相容的.

任何一种矩阵范数都存在与之相容的向量范数.

**定理：** 与矩阵范数相容的向量范数的存在性.

证明：设 $\|A\|_0$ 是给定的矩阵范数，$\vec{a}\neq\vec{0}$是一个$n$维列向量，对任意一个向量$\vec{x}\in R^n$,定义

$$\|\vec{x}\|_l=\|\vec{x}\vec{a}^T\|_0,$$

其中右端是矩阵范数.可验证$\|\cdot\|_l$是一个向量范数.

**先证明** $\|\vec{x}\|_l$ 与$\|A\|_0$相容.

$$\|A\vec{x}\|_l=\|(A\vec{x})\vec{a}^T\|_0=\|A(\vec{x}\vec{a}^T)\|_0\leq\|A\|_0\|\vec{x}\vec{a}^T\|_0=\|A\|_0\|\vec{x}\|_l\ .$$

下面证明$\|\cdot\|_l$是向量范数.

1)正定性：设$\vec{x}$是一个$n$维列向量,则

当$\vec{x}\neq 0$时$\Rightarrow \vec{x}\vec{a}^T\neq 0\Rightarrow \|\vec{x}\|_l=\|\vec{x}\vec{a}^T\|_0>0$;

当$\vec{x}=0$时$\Rightarrow \vec{x}\vec{a}^T=0\Rightarrow \|\vec{x}\|_l=\|\vec{x}\vec{a}^T\|_0=0$;

2)齐次性：$\forall\lambda\in R$,$\vec{x}$是一个$n$维列向量,则

$\|\lambda\vec{x}\|_l=\|(\lambda\vec{x})\vec{a}^T\|_0=|\lambda|\,\|\vec{x}\vec{a}^T\|_0=|\lambda|\,\|\vec{x}\|_l$;

3)三角不等式：$\forall\vec{x},\vec{y}\in R^n$,

$\|\vec{x}+\vec{y}\|_l=\|(\vec{x}+\vec{y})\vec{a}^T\|_0\leq\|\vec{x}\vec{a}^T\|_0+\|\vec{y}\vec{a}^T\|_0=\|\vec{x}\|_l+\|\vec{y}\|_l$.

# 矩阵范数的性质

1. 单位矩阵 $I$ 的任何一种算子范数都有

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = 1.$$

2. 如果矩阵$A$可逆，$AA^{-1} = I$，则 $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$.

证明：$AA^{-1} = I \Rightarrow 1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$,

$\Rightarrow \|A^{-1}\| \geq \dfrac{\|I\|}{\|A\|}$，对任意的矩阵范数；

$\Rightarrow \|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$，对任意的算子范数。

**定理** 如果$\|A\|<1$，则$I\pm A$为非奇异矩阵，且当$\|A\|$是算子范数时

$$\|(I\pm A)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|A\|},$$

**证明** 用反证法. 假定$(I\pm A)$奇异阵,则 $(I\pm A)x=0$ 有非零解,

即存在$x_0\neq 0$ ,使$x_0=\pm Ax_0$,

在等式两边取与矩阵范 数相容得向量范数 ,则

$$\|x_0\|=\|Ax_0\|\le\|A\|\cdot\|x_0\|$$

因为$\|x_0\|>0$,故由上式得$\|A\|\ge 1$.与已知矛盾.

所以$I\pm A$是非奇异矩阵.

由于 $(I-A)(I-A)^{-1}=I \Leftrightarrow (I-A)^{-1}-A(I-A)^{-1}=I,$

$$\Leftrightarrow (I-A)^{-1}=A(I-A)^{-1}+I,$$

两端取范数，得

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \|A\|\cdot\|(I-A)^{-1}\|+\|I\|$$

即 $(1-\|A\|)\|(I-A)^{-1}\| \le \|I\|=1$ (因为是算子范数 )

又因为 $\|A\|<1$,所以 $\left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}.$

同理可得 $\left\|(I+A)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}.$

**例** 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -3 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}, \vec{x}=(3,-2,2)^{T}$,

求 $\|\vec{x}\|_p, \|A\|_p\ (p=1,2,\infty)$ 以及 $\|A\|_F$ .

**解** $\|\vec{x}\|_1=|3|+|-2|+|2|=7, \quad \|\vec{x}\|_2=\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{17},$

$\|\vec{x}\|_\infty=\max\{|3|,|-2|,|2|\}=3,$

$$\|A\|_1=\max\left\{\begin{matrix}|0|+|-3|+|2|,\\ |1|+|3|+|2|,\\ |-1|+|3|+|0|\end{matrix}\right\}=6,$$

$$\| A \|_\infty = \max \left\{ \begin{array}{c} |0|+|1|+|-1|, \\ |-3|+|3|+|3| \\ |2|+|2|+|0| \end{array} \right\} = 9,$$

$$\| \mathrm{A} \|_F = \sqrt{0^2+1^2+1^2+3^2+3^2+3^2+2^2+2^2+0^2} = \sqrt{37}.$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 27 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

特征值多项式： $\det | A^T A - kI | = k(k-4)(k-27) = 0$

特征值为：$k = 0,\ k = 4,\ \ k = 27.$ $\quad \| A \|_2 = \sqrt{\max\{0,4,27\}} = \sqrt{27}.$

## 矩阵的误差：

设$A^*$为矩阵$A$的近似矩阵，则$\left\|A^* - A\right\|$和$\dfrac{\left\|A^* - A\right\|}{\left\|A\right\|}$分别

称为$A^*$关于范数$\|\cdot\|$的绝对误差和相对误差.

矩阵的谱半径：设A是一个n×n矩阵，它的所有特征值记为$\lambda_i$，

则$\rho(A) = \max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$称为矩阵A的谱半径。

**定理：** $\|A\| \ge \rho(A)$，$\|A\|$为$A$的任意范数。

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_v \cdot \|x\|_v.$$

**证明** 设$\lambda$是$A$的任意特征值，$x$为相应的特征向量，

则$Ax = \lambda x$，由相容性条件可得

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|,$$

注意到$\|x\| \ne 0$，即得 $|\lambda| \le \|A\|$

**定理** $\|\vec{x}\|_2$ 与$\|A\|_F$是相容的.

**证明**

$$\| AX \|_2^2 = \sqrt{\langle AX, AX \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} x_j |^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \cdot | x_j |^2 \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left[ \left( \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right) \left( \sum_{j=1}^{n} | x_j |^2 \right) \right]$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2 \right) \right\} \left( \sum_{j=1}^{n} | x_j |^2 \right)$$

$$= \| A \|_F^2 \| x \|_2^2 .$$

# 作　业

- 教材第13页：

  习题9，11，12，14.
- 证明定理1.2.

## 补充题：

1. 设$A, B \in R^{n^2}$，证明：$\|AB\|_F \le \min\{\|A\|_F\|B\|_2, \|A\|_2\|B\|_F\}$.

2. 设$A \in R^{n^2}$，$\lambda$是$A$的任意特征值，证明：$\|A\| \ge |\lambda|$，其中 $\|\cdot\|$是任意的矩阵范数

$\|Ax\|_v \le \|A\|_v \cdot \|x\|_v$.

**证明** 设$\lambda$是 $A$ 的任一特征值， $x$为相应的特征向量，

则$Ax = \lambda x$， 由相容性条件 得

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|,$$

注意到$\|x\| \ne 0$，即得 $|\lambda| \le \|A\|$

## 常用范数

设 $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]^T\in R^n$,

$$\|\vec{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\ \text{(列范数)}\qquad \|\vec{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\ \text{(欧氏范数)}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|\ \text{(行范数)}\qquad \|\vec{x}\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}\ \text{(}p\text{范数)}$$

1. 矩阵 A 的行范数： $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

2. 矩阵 A 的列范数： $\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

3. 矩阵 A 的谱范数： $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$