数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第三章 矩阵特征值与特征向量的算法

----3.3.3 QR方法

主要用来计算:

$\forall A \to$ 拟上三角化 $\to$ **(1)上Hessenberg矩阵的全部特征值;**

(2)对称三对角矩阵的全部特征值.

一、QR方法的一般形式

正交 上三角

$R_1 = Q_1^T A_1,$

$\forall A_1 \in R^{n\times n}$,对$A_1$做$QR$分解，即$A_1 = Q_1 R_1, \longrightarrow A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^T A_1 Q_1,$

对A_2做QR分解，得$A_2 = Q_2 R_2, \longrightarrow A_3 = R_2 Q_2 = Q_2^T A_2 Q_2, \cdots\cdots$

由于 $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$ ，所以产生的矩阵序列$\{A_k\}$中的每一个矩阵都与A_1有相同的特征值。

只要A非奇异，则QR算法就完全确定$\{A_k\}$.

QR方法的关键是如何计算矩阵A的QR分解

定理(基本QR方法)：设$A = A_1 \in \mathrm{R}^{n\times n}$,构造$QR$算法：

$$\begin{cases} A_k = Q_k R_k & \text{其中} Q_k^T Q_k = I, R_k \text{为上三角阵;} \\ A_{k+1} = R_k Q_k & (k = 1,2,\ldots) \end{cases}$$

记$\tilde{Q}_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k, \tilde{R}_k = R_k \cdots R_2 R_1$,则有

(1)A_{k+1}相似于A_k,即$A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$;

(2)$A_{k+1} = \left(Q_1 Q_2 \cdots Q_k\right)^T A_1 \left(Q_1 Q_2 \cdots Q_k\right) = \tilde{Q}_k{}^T A_1 \tilde{Q}_k$;

(3)A_k的QR分解式为$A_k = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$.

定理(QR方法的收敛性)：设$A=(a_{ij})\in \mathrm{R}^{n\times n}$，

(1) 如果A的特征值满足：$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots|\lambda_n|>0$;

(2) A有标准型$A=XDX^{-1}$,其中$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,且设$X^{-1}$有三角分解$X^{-1}=LU$($L$为单位下三角阵，$U$为上三角阵),则由$QR$算法得到的$\{A_k\}$本质上收敛于上三角矩阵，即

$$A_k \xrightarrow{k\to\infty} R=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

若记$A_k=(a_{ij}^{(k)})$,则有

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ii}^{(k)}=\lambda_i$;

(2) 当$i>j$时,$\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=0$,

当$i<j$时,$a_{ij}^{(k)}$极限不一定存在.

推论：如果A对称,则$\{A_k\}$收敛于对角阵$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

为了减少计算量，一般先利用 Householder 矩阵对矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 作相似变换，把 A 化为拟上三角矩阵 $A^{(n-1)}$，然后用 QR 方法计算 $A^{(n-1)}$ 的全部特征值，而 $A^{(n-1)}$ 的特征值就是 A 的特征值。

QR 方法步骤：

第一步

$$A \xrightarrow[\text{作正交相似变换}]{\text{用}Householder\text{阵}} \text{上}Hessenberg\text{阵}B = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & & & & \vdots \\ & \ddots & * & & & \vdots \\ & & * & * & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & * & * \end{pmatrix}$$

拟上三阵

第二步

$U_{pq}(\theta)$

$\{B_k\}$

$$B \xrightarrow[\text{造迭代序列.}]{\text{用平面旋转矩阵构}} \begin{cases} B_k = Q_k R_k \\ B_{k+1} = R_k Q_k \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

平面旋转矩阵

$u_{pp}=u_{qq}=\cos\varphi$ $u_{ii}=1, i\neq p,q$

$u_{pq}=-\sin\varphi$ $u_{qp}=\sin\varphi$

$u_{ij}=0, i\neq j, i,j\neq p,q$

$$U(p,q,\varphi)=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \cos\varphi & & & & -\sin\varphi & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & \sin\varphi & & & & \cos\varphi & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (p) \\ \\ \\ \\ (q) \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} \quad & \quad & (p) & \quad & \quad & \quad & (q) & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

旋转矩阵U_{pq} 的计算方法

$$\tan 2\varphi = \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}},$$

(1) 当$a_{pp} = a_{qq}$时, $\tan 2\varphi=\infty$, $\varphi = \frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}(a_{pq})$.

(2) 当$a_{pp} \neq a_{qq}$时, $\tan 2\varphi= \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{1}{c},$

限定$|\varphi| \le \frac{\pi}{4},$

$|\tan\varphi| \le 1,$

$$\tan^2\varphi + 2c\tan\varphi - 1 = 0,$$

$$\tan\varphi = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2+4}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2+1} = \frac{1}{c \pm \sqrt{c^2+1}},$$

故可取 $\tan\varphi= \frac{\mathrm{sgn}(c)}{|c| + \sqrt{c^2+1}} = t,$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin\varphi = t\cdot\cos\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

上**Hessenberg**矩阵**(拟上三角矩阵)**,

$$H=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}} & \begin{matrix} h_{13} \\ h_{23} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} h_{1,n-2} \\ h_{2,n-2} \end{matrix} & \begin{matrix} h_{1,n-1} \\ h_{2,n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} h_{1,n} \\ h_{2,n} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & h_{32} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} h_{33} \\ h_{43} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} h_{3,n-2} \\ h_{4,n-2} \\ \vdots \\ h_{n-1,n-2} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} h_{3,n-1} \\ h_{4,n-1} \\ \vdots \\ h_{n-1,n-1} \\ h_{n,n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} h_{3,n} \\ h_{4,n} \\ \vdots \\ h_{n-1,n} \\ h_{n,n} \end{matrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & C_{1,n-2} \\ h_{21} & h_{22} & D_{1,n-2} \\ 0 & S_{n-2,1} & B_{n-1,n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & B \end{pmatrix}$$

选取$U_{12}=U(1,2,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$,使得$h_{21}$变为0.

$$U_{12}H=\begin{pmatrix} CS & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} CSH_1 & CSH_2 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$CSH_1=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ h_{11}\sin\theta+h_{21}\cos\theta & * \end{pmatrix}$$

$$h_{11}\sin\theta+h_{21}\cos\theta=0, \quad \tan\theta=-\frac{h_{21}}{h_{11}},$$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{h_{11}}{\sqrt{h_{11}^2+h_{21}^2}}}, \quad \boxed{\sin\theta=-\frac{h_{21}}{h_{11}}\frac{h_{11}}{\sqrt{h_{11}^2+h_{21}^2}}=-\frac{h_{21}}{\sqrt{h_{11}^2+h_{21}^2}}},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin\varphi=t\cdot\cos\varphi=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

【例】试用QR方法求A的全部特征值 $A=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ \boxed{6} & -4 & 4 \\ \boxed{4} & -4 & 5 \end{bmatrix}$

w 列向量(单位)

$H=I-2ww^T$

$=\begin{pmatrix} 1 & \\ & w_1 \end{pmatrix}$

$s=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H} Hs \parallel (1,0,0)^T$

【解】首先将A化为上Hessenberg矩阵

取$y_1=(6,4)^T$,则 $\|y_1\|_2=\sqrt{52}$, $c_1=-\mathrm{sign}(a_{21})\|y_1\|_2=-\sqrt{52}$,

$u_1=y_1-c_1e_1=(6+\sqrt{52},4)^T$, $h_1=\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2=52+6\sqrt{52}$,

$$W_1=I-h_1^{-1}u_1u_1^T=\begin{pmatrix} -0.832050 & -0.554700 \\ -0.554700 & 0.832050 \end{pmatrix}.$$

$$H_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.832050 & -0.554700 \\ 0 & -0.554700 & 0.832050 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = H_1 A H_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1.386750 & 3.328200 \\ -7.211102 & -1.230768 & -8.153840 \\ 0 & -0.153846 & 2.230767 \end{bmatrix}$$

b_{21}

对 $A_{3\times3}$ 找上三角化

$n-2=3-2$ 个 ~~Hessen~~ Householder

A_2是与A相似的上Hessenberg矩阵，对A_2进行QR分解.

$U(p,q,\theta)=U_{pq}$

$$\text{记} B_1 = A_2, r_1 = \sqrt{(b_{11})^2 + (b_{21})^2} = 8.774964$$

$U(1,2)$ s.t. $b_{21}=0$

$$\cos\theta_1 = \frac{b_{11}}{r_1} = 0.56980, \sin\theta_1 = -\frac{b_{21}}{r_1} = 0.821781,$$

$$U_{12} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.569803 & -0.821781 & 0 \\ 0.821781 & 0.569803 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{12}B_1 = \begin{bmatrix} 8.774964 & 1.801596 & 8.597089 \\ 0 & \boxed{0.438310} & -1.911030 \\ 0 & \boxed{-0.153846} & 2.230767 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = \sqrt{(b_{22})^2 + (b_{23})^2} = 0.464526$$

$$\cos\theta_2 = \frac{b_{22}}{r_2} = 0.943564, \sin\theta_2 = -\frac{b_{32}}{r_2} = 0.331189,$$

$$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.943564 & -0.331189 \\ 0 & 0.331189 & 0.943564 \end{pmatrix}$$

$$U_{23}U_{12}B_1 = \begin{bmatrix} 8.774964 & 1.801596 & 8.597089 \\ 0 & 0.464526 & -2.541982 \\ 0 & 0 & 1.471593 \end{bmatrix} = R_1$$

$$Q_1 = U_{12}^T U_{23}^T = \begin{bmatrix} 0.569803 & 0.775403 & 0.272165 \\ -0.821781 & 0.537643 & 0.188712 \\ 0 & -0.331189 & 0.943564 \end{bmatrix}$$

第一次迭代得$B_2 = R_1Q_1 = \begin{bmatrix} 3.519482 & 4.925491 & 10.840117 \\ -0.381739 & 1.091627 & -2.310653 \\ 0 & -0.487495 & 1.388883 \end{bmatrix}$

B_2与B_1正交相似

迭代$\to 0$

迭代$\to 0$

b_{33}

$A \to H$

$U_{k-1,k} U_{k-2,k-1} \cdots U_{12} H$

$= \underline{H_1}$

重复上述过程,迭代11次得

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 2.992032 & -1.0003853 & 12.013392 \\ -0.007496 & 2.004695 & 1.941971 \\ 0 & -0.000325 & 0.999895 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \approx 2.992032, \lambda_2 \approx 2.004695, \lambda_3 \approx 0.999895$ 精确值3,2,1.

随着n的增加,H_n将收敛到矩阵精确特征值组成的上三角阵.

数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第三章 矩阵特征值与特征向量的算法

----3.3.3 带位移的QR方法

QR算法收敛性的进一步结果：

设$A\in R^{n\times n}$，且A有完备的特征向量集合，如果A的等模特征值中只有实重特征值或多重共轭复特征值，则由QR算法产生的$\{A_k\}$本质收敛于分块上三角矩阵(对角块为一阶和二阶子块)，且对角块中每一个2×2子块给出A的一对共轭复特征值，每一个一阶对角子块给出A的实特征值，即

$$A_k \to \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda_m & * & \cdots & * \\ & & & B_1 & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & B_l \end{pmatrix}.$$

其中$m+2l=n$, B_i为2×2子块，它给出A一对共轭复特征值.

关于 QR 方法的收敛性有这样的结论：如果矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的等模特征值中只有实特征值或复共轭特征值，则由 QR 方法(3.22)产生的矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$本质上收敛于分块上三角矩阵(对角块以上的元素可能不收敛)，其对角块均为一阶和二阶子块，并且对角块中每一个一阶子块给出 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值，每一个二阶子块给出 $\boldsymbol{A}$ 的一对复共轭特征值。特别是，当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵时，QR 方法(3.22)产生的矩阵序列$\{\boldsymbol{A}_k\}$收敛于对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值。

为了减少计算量，一般先利用 Householder 矩阵对矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$作相似变换，把 $\boldsymbol{A}$ 化为拟上三角矩阵 $\boldsymbol{A}^{(n-1)}$，然后用 QR 方法计算 $\boldsymbol{A}^{(n-1)}$ 的全部特征值，而 $\boldsymbol{A}^{(n-1)}$ 的特征值就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

三、QR方法的加速1－带原点位移的QR 方法

定理中的$\lim\limits_{k\to\infty} a_{nn}^{(k)} = \lambda_n$的速度取决于比值$r_n = \left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$，当$r_n$很小时，收敛速度较快，

→ 近似值

如果s是λ_n的一个估计，且对$A - sI$运用QR算法，则可以加快收敛速度.

$\forall A_1 \in R^{n\times n}$，对$A_1 - s_1 I$做QR分解，即$A_1 - s_1 I = Q_1 R_1$，　$Q_1^T(A_1 - s_1 I) = Q_1^T Q_1 R_1 = R_1$

$$\longrightarrow A_2 = R_1 Q_1 + s_1 I = Q_1^T(A_1 - s_1 I)Q_1 + s_1 I = Q_1^T A_1 Q_1,$$

显然A_2与A_1正交相似，所以A_1, A_2有相同的特征值.

对$A_2 - s_2 I$做QR分解，即$A_2 - s_2 I = Q_2 R_2$，

$$\longrightarrow A_3 = R_2 Q_2 + s_2 I = Q_2^T A_2 Q_2, \cdots\cdots$$

对$A_k - s_k I$做QR分解，即$A_k - s_k I = Q_k R_k$，　$A_{k+1} = R_k Q_k + s_k I = Q_k{}^T A_k Q_k$

即：$\begin{cases} A_k - s_k I = Q_k R_k & \text{对} A_k - s_k I \text{做} QR \text{分解} \\ A_{k+1} = R_k Q_k + s_k I & (k = 1, 2, \cdots) \end{cases}$

该矩阵序列有如下性质：

(1)　A_{k+1}相似于A_k，

(2) 如A_k为拟上三角，则A_{k+1}也为拟上三角矩阵，

(3) 如取位移s_k为$a_{nn}^{(k)}$，则A_k最后一行非对角元二阶收敛于零(特别对于对称矩阵，能达到三阶收敛),其余次对角元收敛于零的速度会慢一些。

带原点位移的QR方法：

（1）利用Householder矩阵，将矩阵 A 相似于拟上三角矩阵（尤其，对于对称矩阵可以化为三对角矩阵）

（2）利用带原点位移的QR方法构造矩阵序列A_k

（3）对矩阵 A_k 取加速因子 $a_{nn}^{(k)}$ 进行加速

（4）判断矩阵 A_k 的最后一行非对角元素（由于是拟上三角矩阵，只有一个元素 $a_{nn-1}^{(k)}$ ）是否小于要求的精度

$\xrightarrow{k\to\infty} 0$

（5）如已经小于精度，停止计算，并划掉矩阵的最后一行和最后一列，产生一个子矩阵，对子矩阵重复进行上面的加速计算。

$(n-1)\times(n-1)$

$\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \quad ,\lambda_1$

【例】用带位移的QR方法计算矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$的全部特征值.

【解】 (1)记$A_1=A$,取$s_k=a_{nn}^{(k)}$做平移因子来计算A的所有特征值.

$s_1=3$,

$$U_{23}U_{12}(A_1-s_1I)=R_1=\begin{pmatrix}\underline{2.828427}124 >0 & -4.242604686 & 0.707106781\\ 0 & 1.732050806 >0 & -0.577350268\\ 0 & 0 & 0.408248245 >0\end{pmatrix}$$

```
In[82]:= M = {{-2, 2, 0}, {2, -4, 1}, {0, 1, 0}}; {q, r} = QRDecomposition[M]
```

$$\text{Out[82]=}\ \left\{\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right\},\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right\},\left\{\left\{2\sqrt{2},-3\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\left\{0,\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\left\{0,0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right\}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&1\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[s_1=3]{\text{QR分解求特征值}}\text{找 } U_{23}U_{12}(A-3I)=R\ (\text{上}\Delta\text{阵})$$

$$B=\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$U_{12}=\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1&0\\\sin\theta_1&\cos\theta_1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$U_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_2&-\sin\theta_2\\0&\sin\theta_2&\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

θ_1,θ_2 怎么取？

取 θ_1, s.t. $b_{21}=0$

$$\cos\theta_1=\frac{b_{11}}{\sqrt{b_{11}^2+b_{21}^2}}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\sin\theta_1=-\frac{b_{21}}{\sqrt{b_{11}^2+b_{21}^2}}=-\frac{\sqrt2}{2}$$

$$U_{12}B=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\-\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt2&-3\sqrt2&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\boxed{\sqrt2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&\boxed{1}&0\end{pmatrix}\triangleq C,$$

取 θ_2 s.t. $c_{32}=0$

$$\sin\theta_2=\frac{-c_{32}}{\sqrt{c_{22}^2+c_{32}^2}}=-\frac{1}{\sqrt3}$$

$$\cos\theta_2=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}=\frac{\sqrt6}{3}$$

$$U_{23}U_{12}B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\\0&-\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt2&-3\sqrt2&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\sqrt2&-\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt2&-3\sqrt2&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\sqrt3&-\frac{\sqrt3}{3}\\0&0&\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}=R_1$$

$$A_2=R_1U_{12}^TU_{23}^T+3I$$

$$A_1\xrightarrow{\text{迭代一次}}A_2$$

拟上Δ阵

$$A_2 = RU_{12}^T U_{23}^T + 3I = \begin{pmatrix} -2.0 & 1.22474487 & 0 \\ 1.22474487 & 1.6666667 & 0.23570226 \\ 0 & 0.23570226 & 3.3333333 \end{pmatrix}.$$

$$s_2 = 3.333333,$$

θ_1

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$U_{23}^{(\theta_2)} U_{12}^{(\theta_1)} (A_2 - s_2 I) = R = \begin{pmatrix} 5.472151717 & -1.5666989 & 0.052753495 \\ 0 & 1.370688834 & -0.266301 \\ 0 & 0 & 0.039502921 \end{pmatrix}$$

```
In[91]:= M = {{-5.33333333, 1.224744872, 0}, {1.224744872, -1.66666666667, 0.23570226}, {0, 0.23570226, 0}};
         {q, r} = QRDecomposition[M]

Out[91]= {{{-0.974632, 0.223814, 0.}, {-0.22048, -0.960114, 0.171959}, {0.0384869, 0.167597, 0.985104}},
          {{5.47215, -1.5667, 0.0527535}, {0., 1.37069, -0.226301}, {0., 0., 0.0395029}}}
```

$$A_3 = RU_{12}^T U_{23}^T + s_2 I = \begin{pmatrix} -2.350649345 & 0.306779526 & 0 \\ 0.306779526 & 1.978401822 & 0.006792831 \\ 0 & 0.006792831 & 3.372247822 \end{pmatrix}.$$

$$s_3 = 3.372247822,$$

$$U_{23}U_{12}(A_3 - s_3 I) = R = \begin{pmatrix} 5.731113823 & -0.380950572 & 0.000363611 \\ 0 & 1.375442892 & -0.000330107 \\ 0 & 0 & 0.000033499 \end{pmatrix}$$

```
In[92]:= M = {{-5.722897167, 0.306779562, 0}, {0.306779562, -5.038914489, 0.006792831}, {0, 0.006792831, 0}};
         {q, r} = QRDecomposition[M]

Out[92]= {{{-0.998566, 0.0535288, 0.}, {-0.0535287, -0.998565, 0.00135443}, {0.0000725009, 0.00135249, 0.999999}},
          {{5.73111, -0.576067, 0.000363612}, {0., 5.01527, -0.00678309}, {0., 0., 9.18722×10^-6}}}
```

$$A_4 = RU_{12}^T U_{23}^T + s_3 I = \begin{pmatrix} -2.371041162 & 0.073625778 & 0 \\ 0.073625778 & 1.998760145 & 0 \\ 0 & 0 & 3.37228132 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{A}_4$

故A有一个特征值　λ_1=**3.37228132.**

$\to \theta$

$$\text{对}A_4\text{的一个子矩阵}\tilde{A}_4 = \begin{pmatrix} -2.371041162 & 0.078625773 \\ 0.078625773 & 1.998760145 \end{pmatrix}$$

继续进行变换,取$s_4 = 1.998760145$,得

$$U_{12}^{(\theta)}(\tilde{A}_4 - s_4 I) = R = \begin{pmatrix} 4.370421512 & -0.073615329 \\ 0 & -0.001240327 \end{pmatrix}$$

$$U_{12}(\tilde{A}_4 - s_4 I) = R = \begin{pmatrix} 4.370421512 & -0.073615329 \\ 0 & -0.001240327 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = R U_{12}^T + s_4 I = \begin{pmatrix} -2.372281308 & -0.000020895 \\ -0.000020895 & 1.998760145 \end{pmatrix}$$

因此A的另外两个特征值为$-2.372281308, 1.998760145$.

$\boxed{\text{在实数中选择位移} s_k = h_{nn}^{(k)}, \text{不能逼近一个复特征值.}}$

矩阵特征值计算

- 幂法及反幂法
  - 幂法
    - 求按模最大的特征值
  - 反幂法
    - 求按模最小的特征值
    - 原点位移的反幂法
- Jacobi方法
  - 平面旋转矩阵
  - Jacobi算法
    - 求对称矩阵的全部特征值
- QR算法
  - Householder变换
  - QR分解及拟上三角分解
  - QR算法
    - 单步位移QR方法
      - 求上Hessenberg的全部特征值
    - 双步位移QR算法

作业

Page 66:

10， 12