数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第五章 插值与逼近

5.1.2 代数插值 —分段插值

学习了 Lagrange 插值、Newton插值

利用插值多项式计算函数$f(x)$在一点的近似值时，希望能得到精确解或足够精确的解,即截断误差的绝对值足够小.

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$f(x)$, $x \in I$

节分 $I \to x_i$

影响$|R_n(x)|$的主要因素是插值多项式的次数n和插值节点的选择.

是否插值多项式的次数越高，越能够达到这个目的呢?

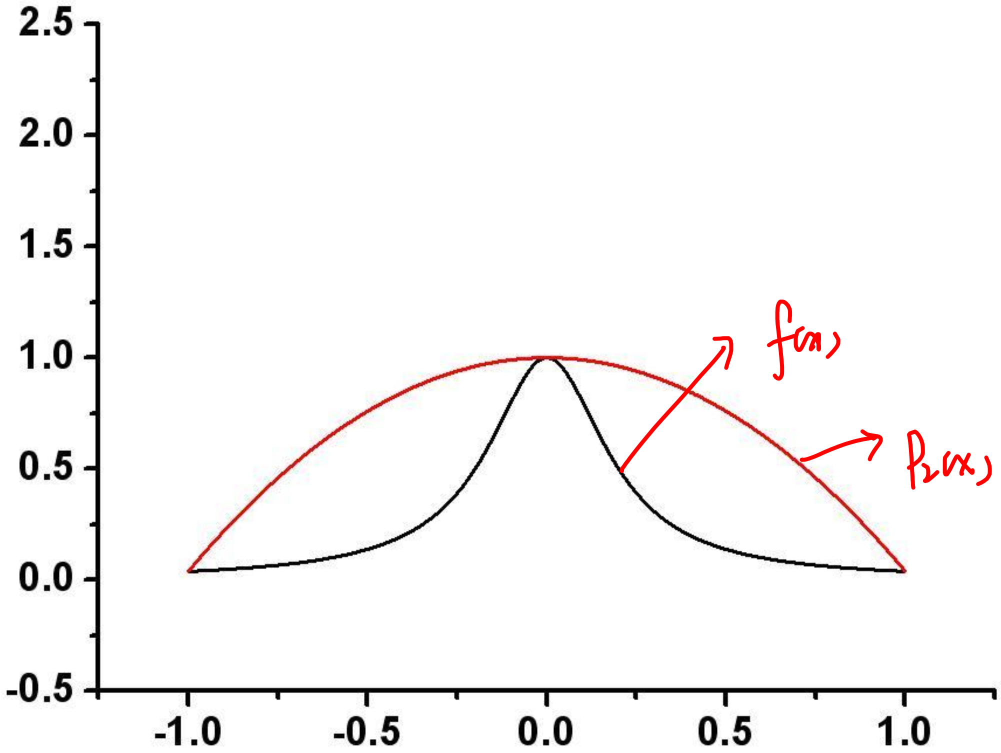
一、龙格(Runge)现象

例:1901年龙格(Runge) 给出一个例子:

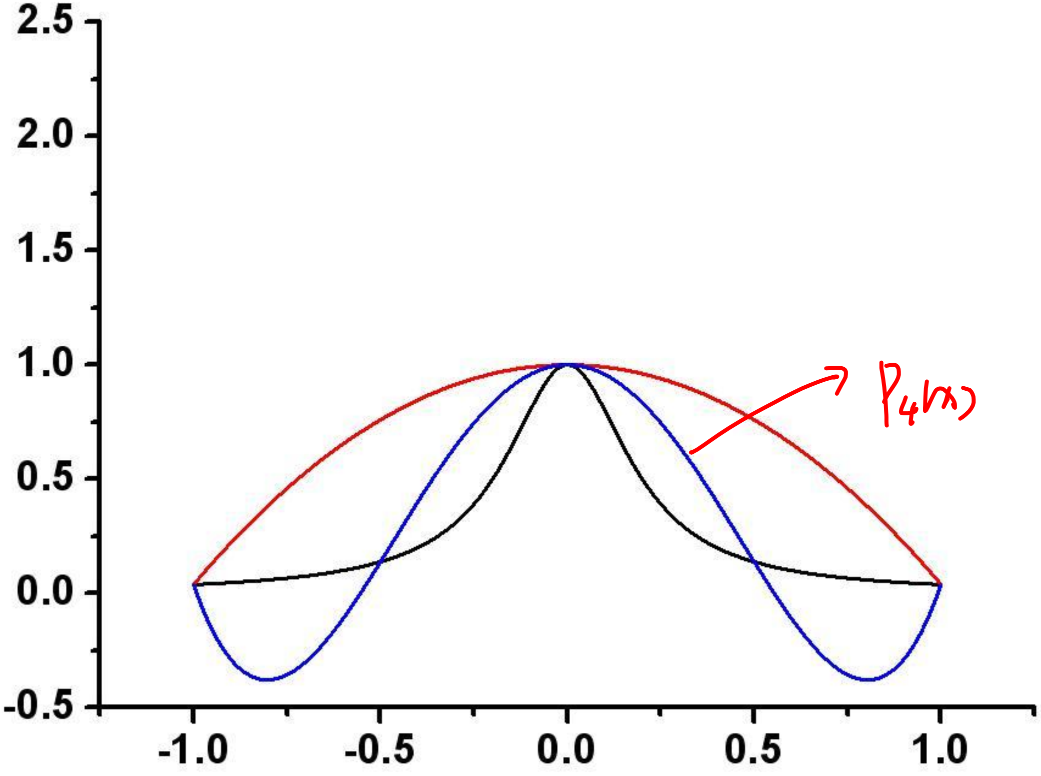
对于函数$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}(-1\le x\le 1)$,取等距节点

$x_k=-1+\dfrac{k}{n}$(即将区间$[-1,1]$进行n等分),得到 $P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)y_j$

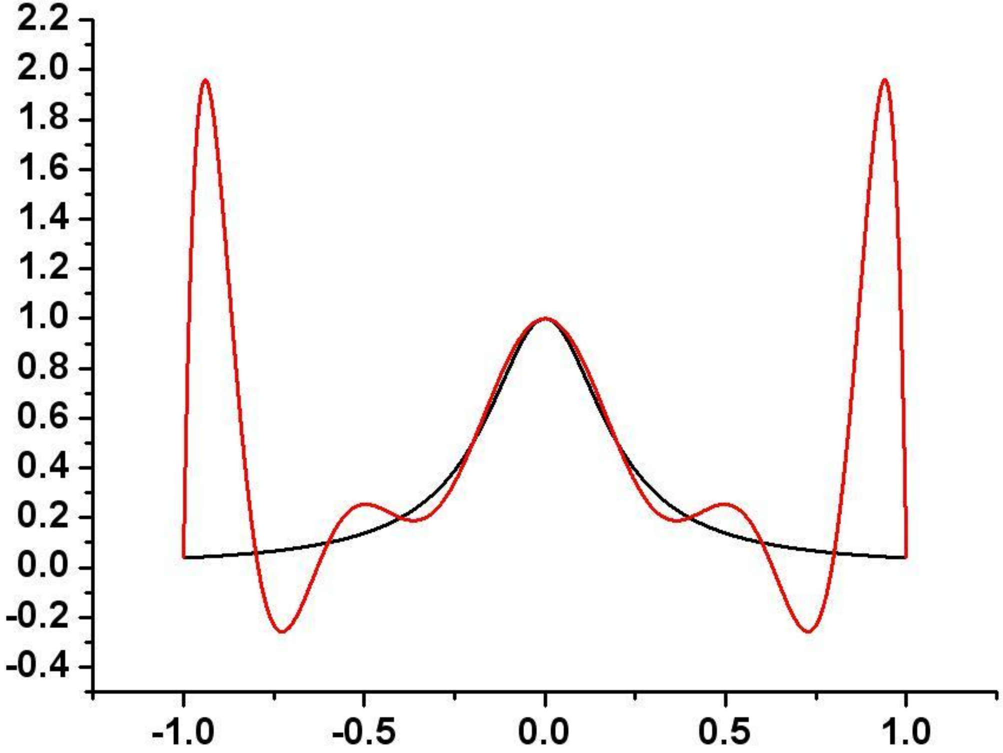
两等分，三节点

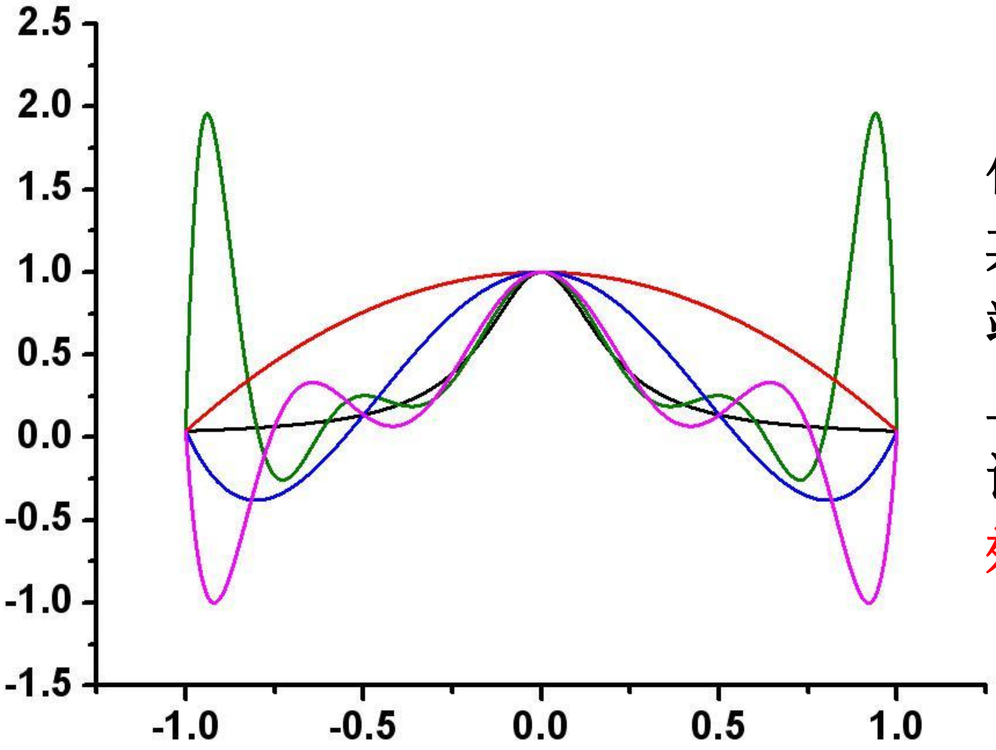


四等分，5节点



10等分11节点





仅在中间部位能较好地逼近$f(x)$，其他部位差异很大，而且越逼近端点，逼近效果越差(虽然在节点上没有误差，但在节点之外插值误差变大.即**高次插值的整体逼近效果不理想**.)

事实上，对$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$这个函数在[-1,1]区间内用n+1个等距节点作插值多项式，当 n 趋于无穷大时，插值多项式只能在$|x|$<0.36内收敛，而在这个区间边界附近发生剧烈震荡,这样的现象称为Runge现象.这表明高次插值多项式序列不收敛

实际应用中常采用分段低次插值。

（1）分段线性插值

（2）分段二次插值与分段三次插值

（3）分段Hermite插值

(4) 分段三次样条插值

二、分段线性插值

定义 设 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的函数，在节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b,$$

的函数值为 $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ ，若函数 $\varphi(x)$ 满足条件

(1) $\varphi(x)$在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$($i=0,1,2,\cdots,n-1$)上是线性插值多项式;

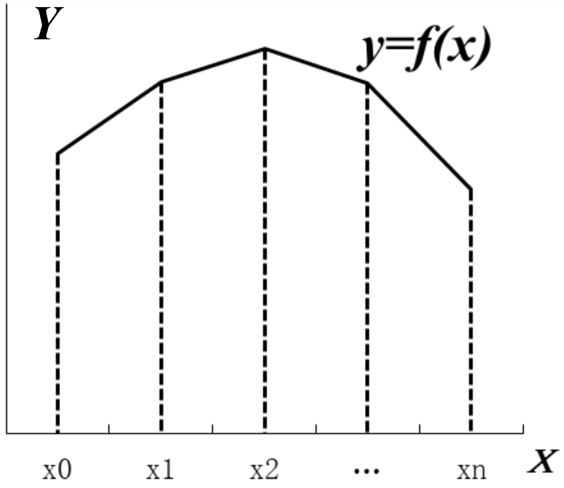
(2) $\varphi(x_i)=y_i$, $i=0,1,2,\ldots,n$

(3) $\varphi(x)$在区间$[a, b]$上连续;

则称 $\varphi(x)$是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的分段线性插值多项式。

结论：分段线性插值问题的解存在唯一.

分段线性插值曲线图：

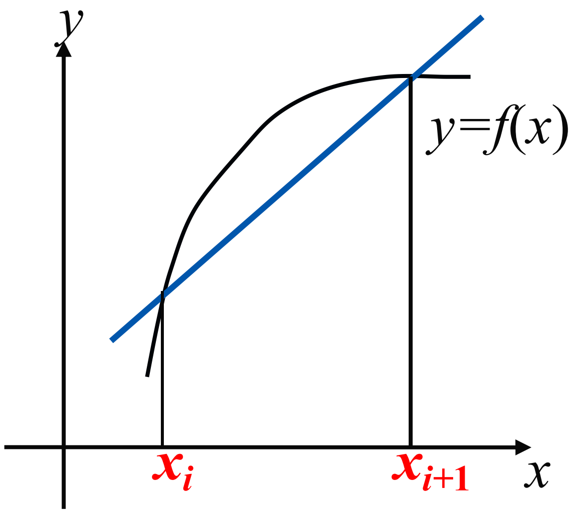


通过插值节点用**折线段**连起来逼近函数

2.分段线性插值函数的表达式

线性插值(n=1) 求 分段线性函数$L_1(x)$逼近$f(x)$，满足

$$L_1(x_i)=y_i,L_1(x_{i+1})=y_{i+1}$$



点向式 $$L_1^i(x)=y_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)$$

对称式 $$L_1^i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}$$

记 $$l_1^i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}},\qquad l_1^{i+1}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

在子区间$[x_i,x_{i+1}]$上

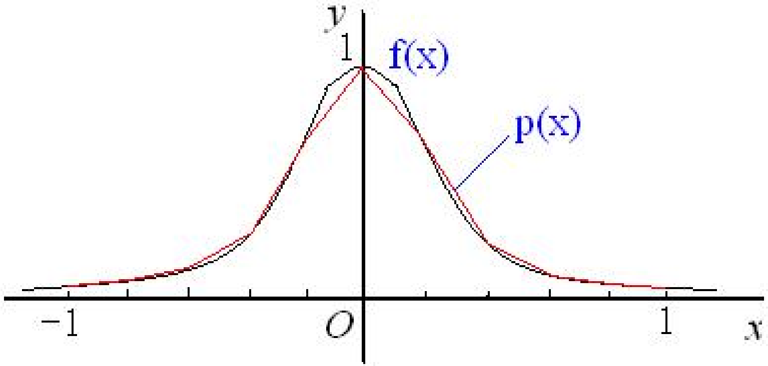
$$L_1^i(x)=l_1^i(x)y_i+l_1^{i+1}(x)y_{i+1}$$

分段线性插值函数可分段表示为

$$L_1(x) = L_1^i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$= \begin{cases} y_0 \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ y_1 \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \qquad \cdots\cdots \\ y_{n-1} \dfrac{x - x_{n1}}{x_{n-1} - x_n} + y_n \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \end{cases} = \begin{cases} y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), & x \in [x_1, x_2] \\ \qquad \cdots\cdots \\ y_{n-1} + \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2},\quad x\in[-1,1]$$



用分段线性插值逼近上述例子的效果，取 n =10。

3 分段插值函数的收敛性

定理： 当$f(x)\in C^2[a,b]$ 时，记$M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$，得到误差估计

$$\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|f(x)-L_1(x)|\le\frac{M_2}{2}\max_{x_k\le x\le x_{k+1}}|(x-x_k)(x-x_{k+1})|,$$

或 $$\max_{a\le x\le b}|f(x)-L_1(x)|=\frac{M_2}{8}h^2.$$

其中，$h=\max\limits_k\{h_k\}$称为**最大步长**,$h_k=x_{k+1}-x_k$称为**步长**.

并且 $\lim\limits_{h\to 0}L_1(x)=f(x)$ 在$[a,b]$上一致成立，

即$L_1(x)$在$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$.

例： 考虑构造函数$f(x)=\cos x$在$[a,b]$的等距节点函数表,要使分段线性插值的误差不大于$\frac{1}{2}\times10^{-4}$，最大步长h应取多大?

解: $|R|\le\frac{h^2}{8}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$

$$f''(x)=-\cos x,\qquad |f''(x)|\le 1$$

$$|R|\le\frac{h^2}{8}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}\qquad h\le 2\times10^{-2}$$

最大步长h应取0.02.

三、分段二次插值与分段三次插值

定义 设 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的函数，在节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b,$$

的函数值为 $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ ，若函数 $\varphi(x)$ 满足条件

(1) $\varphi(x)$在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$上是二次(三次)插值多项式;

(2) $\varphi(x_i)=y_i,\ i=0,1,2,\dots,n$

(3) $\varphi(x)$在区间$[a, b]$上连续;

则称 $\varphi(x)$是 $f(x)$ 在$[a, b]$上的**分段二次(三次)插值多项式。**

结论：分段分段二次(三次)插值问题的解存在唯一.

例: 已知等距节点数据表

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

用分段二次插值求$f(x_t)$的近似值。

解: 设$x_3 < x_t < x_4$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\cdots$	y_n

x_t

取三点，

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}|x_t - x_3| < \dfrac{|x_4 - x_3|}{2}\text{时，取}x_2, x_3, x_4 \\ \text{当}|x_t - x_3| > \dfrac{|x_4 - x_3|}{2}\text{时，取}x_3, x_4, x_5\end{array}\right\rangle \Rightarrow L_2(x)$$

$$f(x_t) \approx L_2(x_t)$$

误差 $|R(x_t)| = |f(x_t) - L_2(x_t)| \le \dfrac{1}{24} M_3 h^3$

二次插值（n=2）　求次数≤2 的多项式$L_2(x)$，$= \underline{a}x^2+\underline{b}x+\underline{c}$

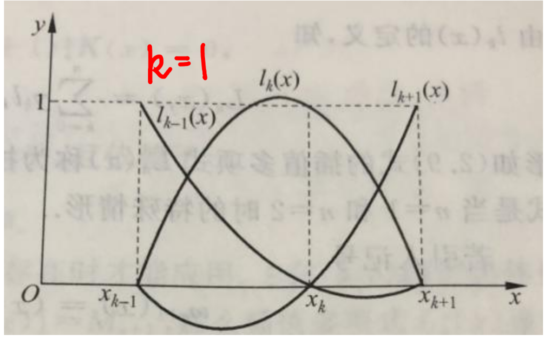
使其满足条件 $L_2(x_0)=y_0$，$L_2(x_1)=y_1$，　$L_2(x_2)=y_2$

令 $L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$



几何上看.

$L_2(x)$ 是过 (x_0,y_0)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 三点的抛物线

例: 已知等距节点数据表

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

用分段二次插值求$f(x_t)$的近似值。

解: 设$x_3 < x_t < x_4$,

取三点,

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\ |x_t - x_3| < \dfrac{|x_4 - x_3|}{2}\ \text{时，取}\ x_2, x_3, x_4 \\ \text{当}\ |x_t - x_3| > \dfrac{|x_4 - x_3|}{2}\ \text{时，取}\ x_3, x_4, x_5 \end{array}\right\rangle \Rightarrow L_2(x)$$

$f'''(\xi)$

$M_3 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'''(x)|$

$f(x_t) \approx L_2(x_t)$ **误差** $|R(x_t)| = |f(x_t) - L_2(x_t)| \le \dfrac{1}{24} M_3 h^3$

例: 已知等距节点数据表

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

用分段三次插值求$f(x_t)$的近似值。

解: 设$x_3 < x_t < x_4$　　$L_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	x_n
y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\cdots$	y_n

x_t

取四点 x_2, x_3, x_4, x_5构造$L_3(x)$

$$f(x_t) \approx L_3(x_t)$$

误差 $|R(x_t)| = |f(x_t) - L_3(x_t)| \le \frac{9}{16}\frac{M_4}{4!}h^4 \xrightarrow{h\to 0} 0$

分段低次插值优点：计算简便，收敛性有保证，数值稳定性又好且易在计算机上实现等优点

不足：不能保证整条曲线的光滑性，从而不能满足某些工程技术上的要求。

样条插值：从六十年代开始，首先由于航空、造船等工程设计的需要而发展起来的样条插值（spline)方法，既保留了分段低次插值的各种优点，又提高了插值函数的光滑性，在许多领域有越来越广泛的应用。

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院

作　　业

- 课后习题：2、4、8、9、11、13