第二章测试

1. 关于Fibonacci序列，有

$F(1)+F(2)+\ldots+F(n)=F(n+2)-1$

证明：

$F(1)=F(3)-F(2)$

$F(2)=F(4)-F(3)$

$F(3)=F(5)-F(4)$

$\ldots$

$F(n)=F(n+2)-F(n+1)$

上述等式相加，即有：

$F(1)+F(2)+\cdots+F(n)=F(n+2)-F(2)=F(n+2)-1$

2. 求序列$0, 1\times2\times3, 2\times3\times4, \ldots, n(n+1)(n+2), \ldots$的母函数。

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$$
$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots$$
$$\frac{2}{(1-x)^3}=2+2\times3x+3\times4x^2+\ldots$$
$$\frac{6}{(1-x)^4}=1\times2\times3+2\times3\times4x+\ldots$$
$$\frac{6x}{(1-x)^4}=0+1\times2\times3x+2\times3\times4x^2+\ldots$$

则母函数为$\frac{6x}{(1-x)^4}$

3. 求$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$中$x^n$的系数$a_n$

解：$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}$

其中$(1-x)^3$,三重根$\alpha=1$

$1+x=1-(-x), \alpha=-1$

$1+x+x^2=(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)$，有共轭复根$\alpha_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \alpha_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，其中$\rho=1, \theta=\frac{2\pi}{3}$

> 有$a_n=A(-1)^n+(B+Cn+Dn^2)1^n+(Ecos\frac{2n\pi}{3}+Fsin\frac{2n\pi}{3})$,但好像$a_0$、$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$、$a_5$不太好求得，因此换一种方法：

$G(x)=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}+\frac{C}{x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}+\frac{D}{1-x}+\frac{E}{(1-x)^2}+\frac{F}{(1-x)^3}$

求得$A=1/8, B=\frac{1-\sqrt{3}i}{18}, C=\frac{1+\sqrt{3}i}{18}, D=17/72, E=1/4, F=1/6$

则有

$a_n=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{9}(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n+\frac{1}{9}(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n+\frac{17}{72}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+1)(n+2)}{12}=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{17}{72}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+1)(n+2)}{12}$

4. 给出下列序列的母函数

(1)

$a_n=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{9}(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n+\frac{1}{9}(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n+\frac{17}{72}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+1)(n+2)}{12}=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{9}(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^n+\frac{1}{9}(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2})^n+\frac{17}{72}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+1)(n}{12}$

$G(x)=1+0x+1x^2+0x^3+1x^4+0x^5+1x^6+0x^7+\cdots$

故它的母函数为：$G(x)=1+x^2+x^4+x^6+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$

(2) $1,-1,1,-1,1,-1,1\cdots$

$G(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$

故它的母函数为：$G(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots=\frac{1}{1+x}$

5. 求序列$\{1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \cdots\}$的通项公式

解:

$G(x) = 1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \cdots = \frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)^2}$

则:$a_n = (An + B)(-1)^n + (Cn + D)$

根据$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0$

可得$A = 1/4, B = 1/2, C = 1/4, D = 1/2$

则通项公式为$a_n = \frac{1}{4}(n + 2)[1 + (-1)^n]$