数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第五章 插值与逼近

插值和逼近是解决什么问题的？

- 用某个简单函数在满足一定条件下，在某个范围内近似代替另一个较为复杂或者解析表达式未给出的函数，以便于简化对后者的各种计算或揭示后者的某些性质。

插值问题

- 问题1：如何根据实验观测数据，在某个区间[a,b]上给出其他点的函数值。

- 问题2：如何求出函数，使其在“一定意义下”逼近实验观测数据。

曲线拟合问题

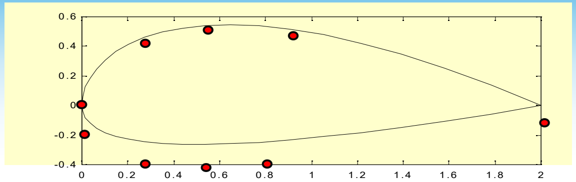
数值逼近

定义：

- 逼近理论是研究如何将函数利用一组简单函数近似表征，并定量分析逼近过程中产生的误差.（Approximation theory is concerned with how functions can best be approximated with simpler functions, and with quantitatively characterizing the errors introduced thereby.）

- 数值逼近包括两大类：插值和拟合

插值方法的应用:



(1)复杂函数的计算;

(2)函数表中非表格点计算;

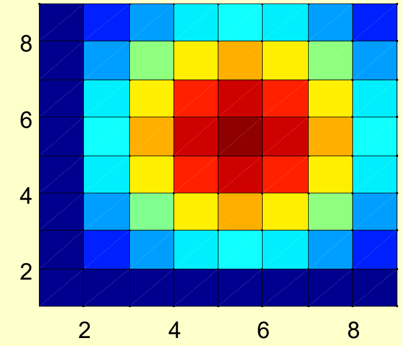
(3)光滑曲线的绘制;

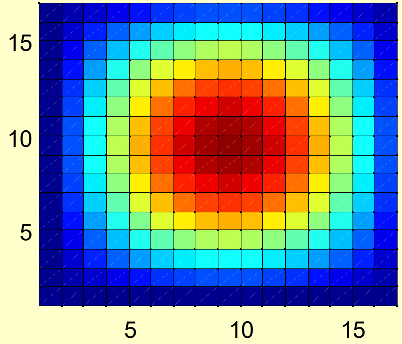
(4)提高照片分辨率算法;

(5)定积分的离散化处理;

(6)微分方程的离散化处理;

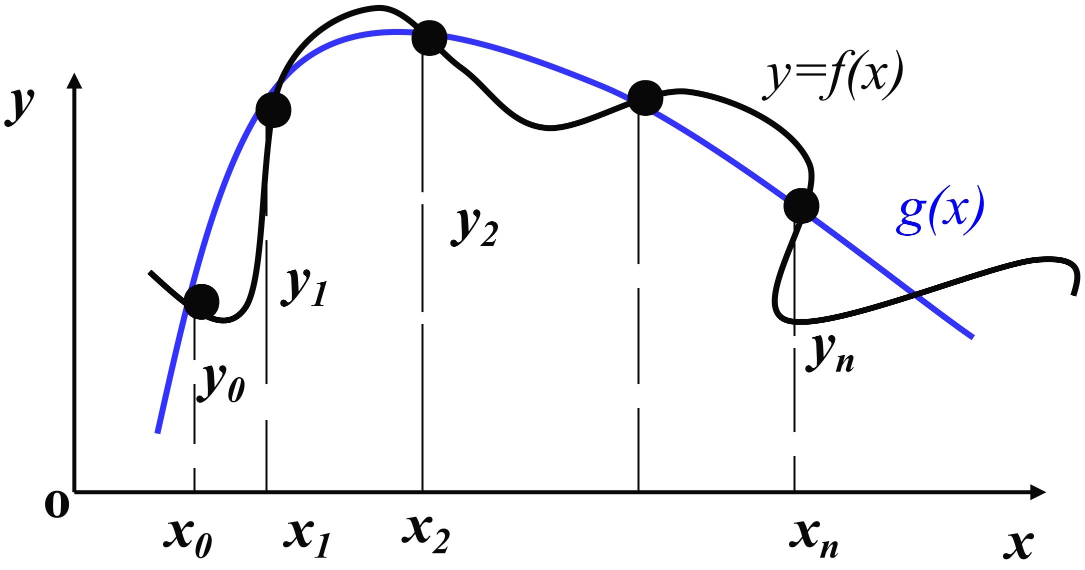
(7)积分方程的离散化处理;





5.1 代数插值 —一元函数插值

插值的任务就是由已知的观测点(x_i, y_i)为物理量(未知量)，建立一个简单的、连续的解析模型$g(x)$，以便能根据该模型推测该物理量在非观测点处的特性。



一、函数插值的基本问题

插值法: 由实验或测量的方法得到所求函数 $y=f(x)$ 在互异点 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 处的值 $y_0, y_1, \ldots, y_n$

构造一个简单函数 $g(x)$ 作为函数 $y=f(x)$ 的近似表达式

$$y=f(x)\approx g(x)$$

使 $$g(x_0)=y_0,\ g(x_1)=y_1,\ \ldots,\ g(x_n)=y_n \qquad (a)$$

这类问题称为**插值问题**。$f(x)$ 称为**被插值函数**，$g(x)$ 称为**插值函数**，$x_0, x_1, \ldots, x_n$ 称为**插值节点**。

(a)式称为**插值条件**。

定义： 函数组在点集上**线性无关**

设函数组$\{\varphi_k(x), k=0,1,2,\ldots,n\}$是实值函数，$x_0, x_1, \cdots, x_m$是$m+1$个互异实数$(n \le m)$.如果向量组

$$\psi_k = \left(\varphi_k(x_0), \varphi_k(x_1), \ldots, \varphi_k(x_m)\right)^T \quad k=0,1,\ldots,n$$

线性无关，则称函数组$\{\varphi_k(x), k=0,1,2,\ldots,n\}$在点集$\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m\}(n \le m)$上**线性无关**.否则就称为**线性相关**. $k_0\psi_0+k_1\psi_1+k_2\psi_2=0$

$\psi_1=(\varphi_1(1),\varphi_1(2),\varphi_1(3),\varphi_1(4))=(0,-1,-2,-3)$ $\Leftrightarrow k_0=k_1=k_2=0$

例如函数组$\{2+x, 1-x, x+x^2\}$在点集$\{1,2,3,4\}$上线性无关.

$R^4 \ni (\varphi_0(1),\varphi_0(2),\varphi_0(3),\varphi_0(4))=(3,4,5,6)$ $\psi_2=(\varphi_2(1),\cdots,\varphi_2(4))$

$=(2,6,12,20)$

$\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\}$在$\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$上线下相关.

给定n+1个互异的实数点$\{x_k,k=0,1,\ldots,n\}$，实值函数$f(x)$在包含$\{x_k,k=0,1,\ldots,n\}$的某个区间 $[a,b]$内有定义。 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

x_i

设函数组$\{\varphi_k(x),k=0,1,\ldots,n\}$ 是次数不高于n的多项式组，且在点集$\{x_k, k=0, 1, \ldots, n\}$ 上线性无关。

问题的严格数学提法:

在次数不高于n的多项式集合$D_n=Span\{\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$中寻求次数不高于$n$的多项式 $p_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)$，使其满足条件

$p_n(x_k)=f(x_k)$, $k=0, 1, 2, \ldots,n$,此问题称为一元代数插值问题。

$\{x_k,k=0,1,\ldots,n\}$ 称为**插值节点**；$f(x)$称为**被插值函数**；

$\{\varphi_k(x),k=0,1,\ldots,n\}$ 称为**插值基函数**；$p_n(x_k)=f(x_k)$，$k=0, 1, 2, \ldots,n$ 称为**插值条件**；满足插值条件的多项式称为**插值多项式**。

由于插值基函数$\{\varphi_k(x)$，$k=0$，1，...，$n\}$在点集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$上线性无关,所以满足插值条件的n次插值多项式$p_n(x)$是**存在唯一**的.

$=\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$

又由于插值基函数组限定为次数不高于n的多项式组,所以对于不同的插值基函数组,只要满足同一插值条件,则所得的n次插值多项式$p_n(x)$也是**存在唯一**的.

二、多项式插值　1. $\{\varphi_k(x)=x^k,\ k=0,1,\dots,n\}$

解法：设所求n次多项式为 $p_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$，由$p_n(x_k)=y_k$ 我们有

已知

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_nx_1^n=y_1 \\ \dots \\ a_0+a_1x_k+a_2x_k^2+\dots+a_nx_k^n=y_k \\ \dots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_nx_n^n=y_n \end{cases}$$

$a_i\,(i=0,1,\cdots,n)$的系数行列式是Vandermonde行列式

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j)^n$$

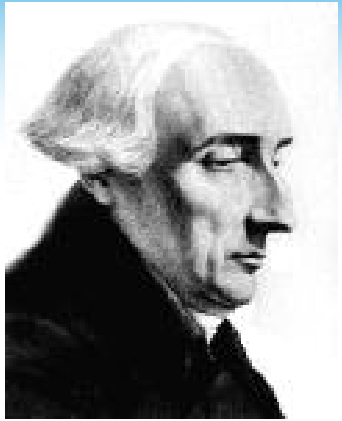
$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$

由于x_i互异，所以上式右端不为零，从而方程组的解 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 存在且唯一.进而，插值多项式是存在唯一的。

但遗憾的是方程组是病态方程组，阶数 n 越高，病态越严重。为此我们从另一途径寻求获得$P_n(x)$ 的方法----Lagrange插值和Newton插值。（这两种方法称为基函数法）。

拉格朗日插值

约瑟夫·拉格朗日，全名约瑟夫·路易斯·拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange 1735~1813）法国数学家、物理学家。



Lagrange
法1736-1813

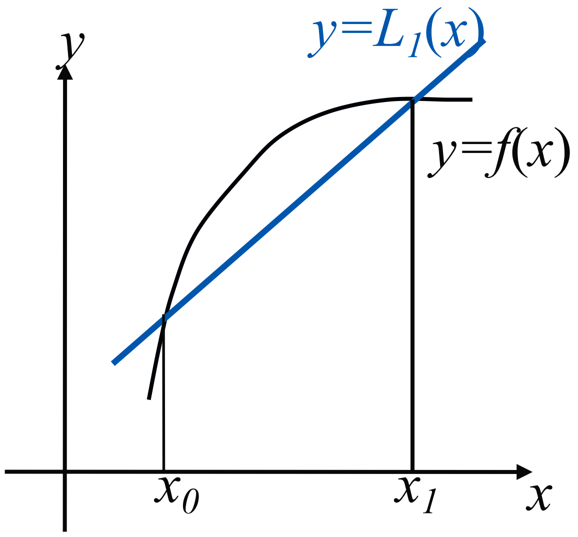
1736年1月25日生于意大利都灵，1813年4月10日卒于巴黎。他在数学、力学和天文学三个学科领域中都有历史性的贡献，其中尤以数学方面的成就最为突出。

三、Lagrange插值法

1. 线性插值(n=1)

求次数≤1 的多项式$L_1(x)$.

满足条件$L_1(x_0)=y_0$， $L_1(x_1)=y_1$，



点向式 $$L_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

对称式 $$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

记 $$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$L_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$L_1(x) = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1$$

$$l_0(x_0) = 1 \qquad l_0(x_1) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0 \qquad l_1(x_1) = 1$$

称$l_0(x)$和$l_1(x)$为以x_0, x_1为节点的插值基函数

2. 下面讨论$n=2$的情况，假定插值节点为x_{k-1}, x_k, x_{k+1}，要求二次插值多项式$L_2(x)$，使它满足 $L_2(x_{k-1})=y_{k-1}, L_2(x_k)=y_k, L_2(x_{k+1})=y_{k+1}$.

在几何上$y=L_2(x)$就是通过三点 $(x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$的抛物线，为了求出$L_2(x)$的表达式，可采用基函数方法，此时基函数$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$是二次函数，且在节点上分别满足条件

$$
\begin{aligned}
&l_{k-1}(x_{k-1})=1,\ l_{k-1}(x_j)=0,\ j=k,k+1;\\
&l_k(x_k)=1,\qquad l_k(x_j)=0,\quad j=k-1,k+1;\\
&l_{k+1}(x_{k+1})=1,\ l_{k+1}(x_j)=0,\ j=k-1,k;
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

满足条件(2.4)的插值基函数是很容易求出的，例如求$l_{k-1}(x)$，因它有两个零点x_k及x_{k+1}，故可表示为

$$l_{k-1}(x)=A(x-x_k)(x-x_{k+1}),$$

其中A为待定系数，可由条件$l_{k-1}(x_{k-1})=1$定出 $A=\dfrac{1}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}$，

于是

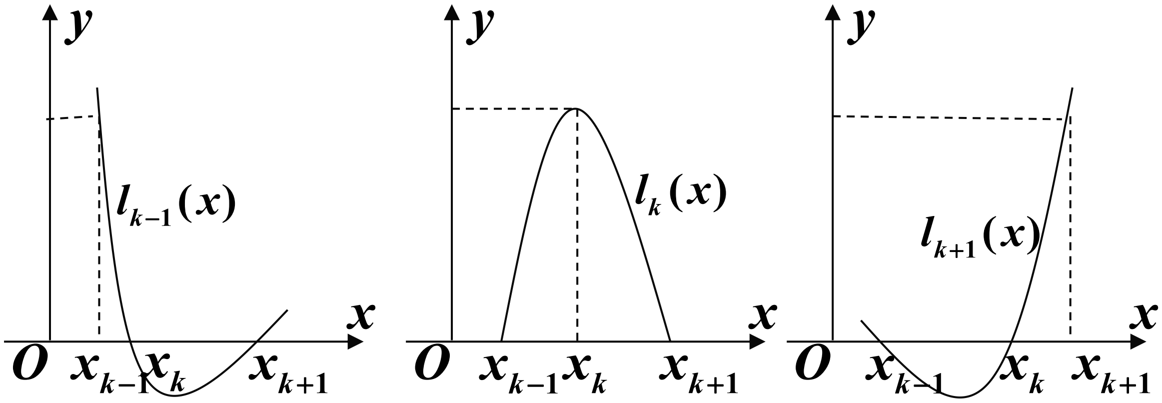
$$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})},$$

同理可得

$$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})},$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)},$$

二次插值基函数$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$在区间$[x_{k-1}, x_{k+1}]$上的图形见下图.



利用二次插值基函数$l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$，立即得到二次插值多项式

$$L_2(x) = y_{k-1}l_{k-1}(x) + y_k l_k(x) + y_{k+1}l_{k+1}(x). \qquad (2.5)$$

显然，它满足条件$L_2(x_j)=y_j$ $(j=k-1, k, k+1)$.

将上面求得的基函数$l_{k-1}(x)$, $l_k(x)$, $l_{k+1}(x)$代入(2.5)式，得

$$L_2(x) = y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_{k-1})(x_{k-1}-x_{k+1})} + y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})} + y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}$$

3.拉格朗日插值多项式

上面我们对n=1及n=2的情况，得到了一次与二次插值多项式$L_1(x)$及$L_2(x)$,它们分别由(2.3)式与(2.5)式表示，这种用插值基函数表示的方法容易推广到一般情形. 下面讨论如何构造通过n +1个节点$x_0<x_1<\ldots<x_n$的n次插值多项式$L_n(x)$，假设它满足条件

$$L_n(x_j)=y_j,\ j=0,1,\ \ldots,n. \qquad (2.6)$$

为了构造$L_n(x)$，我们先定义n次插值基函数.

定义1 若n次多项式$l_j(x)$ $(j=0,1,\ldots,n)$在$n+1$个节点$x_0<x_1<\ldots<x_n$上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}\quad (j,k=0,1,\cdots,n)\qquad (2.7)$$

就称这$n+1$个n次多项式$l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$在为节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$上的**$n$次插值基函数**.

对n=1及n=2时的情况前面已经讨论．用类似的推导方法，可得到n次插值基函数为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\qquad (2.8)$$

$k=0,1,2,\cdots,n.$

显然它满足条件(2.7). 于是，满足条件(2.6)的插值多项式$L_n(x)$可表示为

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x). \quad (2.9)$$

由$l_k(x)$的定义，知

$$L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j) = y_j, \quad j = 0,1,\cdots,n.$$

形如(2.9)式的插值多项式$L_n(x)$称为**拉格朗日(Lagrange)插值多项式**，而(2.3)式与(2.5)式是当n=1和n=2时的特殊情况.

若引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k), \quad (2.10)$$

容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n).$$

于是公式(2.9)可改写成 $$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}. \quad (2.11)$$

注意：$L_n(x)$通常是次数为n的多项式，特殊情况下次数可能小于n. 例如通过三点(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)的二次插值多项式$L_2(x)$，如果三点共线，则$y=L_2(x)$就是一直线，而不是抛物线，这时$L_2(x)$是一次多项式.

注意：

(1) 对于插值节点,只要求它们互异,与大小次序无关;

(2) 插值基函数$l_k(x)$ 仅由插值节点x_k (k=0,1, … ,n)确定,与被插函数 $f(x)$无关;

(3) 插值基函数$l_k(x)$ 的顺序与插值节点x_k (k=0,1, … ,n)的顺序一致.

例1 已知$y=\sqrt{x}, x_0=4, x_1=9$,用线性插值(即一次插值函数)求$\sqrt{7}$的近似值.

解 $y_0=2, y_1=3$,基函数分别为

$$l_0(x)=\frac{x-9}{4-9}=-\frac{1}{5}(x-9), l_1(x)=\frac{x-4}{9-4}=\frac{1}{5}(x-4)$$

插值多项式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=2\times\frac{-1}{5}(x-9)+3\times\frac{1}{5}(x-4)$$

$$=-\frac{2}{5}(x-9)+\frac{3}{5}(x-4) \quad =\frac{1}{5}(x+6)$$

所以 $\sqrt{7}\approx L_1(7)=\frac{13}{5}=2.6.$

例2 求过点(-1,-2), (1,0), (3,-6), (4,3)的抛物线插值(即三次插值多项式).

解 以 $x_0=-1, x_1=1, x_2=3, x_3=4$ 为节点的

基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1-1)(-1-3)(-1-4)}=-\frac{1}{40}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(1+1)(1-3)(1-4)}=\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(3+1)(3-1)(3-4)}=-\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$l_3(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(4+1)(4-1)(4-3)}=\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

则拉格朗日的三次插值多项式为

$$L_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$= (-2)\times\frac{-1}{40}(x-1)(x-3)(x-4) + 0\times\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$+ (-6)\times\frac{-1}{8}(x+1)(x-1)(x-4) + 3\times\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{1}{20}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{3}{4}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$+ \frac{1}{5}(x+1)(x-1)(x-3) \quad \left(= x^3 - 4x^2 + 3 \right)$$

4.拉格朗日插值余项与误差估计

定理2：设 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是n+1个互异的实数，对于给定的x，函数 $f(x)$ 有 n+1次导数，则Lagrange插值多项式的插值余项为：

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

证明：当所给的点x恰好是某个节点时，等式两边都是0,定理自然成立.

现在假设$x \neq x_i (i=0,1,\cdots,n)$,构造辅助函数

$$g(t)=f(t)-L_n(t)-\frac{f(x)-L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}\omega_{n+1}(t)$$

$f(t), L_n(t), \omega_{n+1}(t)$在$I_x$都n+1阶可导，所以$g(t)$也n+1次可导，

且$g(t)$有$n+2$个互异零点$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$. I_x表示 $x_0, \cdot, x_n$ 构成的最大闭区间.

x_0 x_n

由Rolle定理可知：$g'(t)$在I_x内至少有$n+1$个互异零点。

由Rolle定理可知：$g''(t)$在I_x内至少有n个互异零点。

$\vdots$

反复使用Rolle定理可知，至少存在一点$\xi \in \tilde{I}_x$，使得$g^{(n+1)}(\xi) = 0$.

$= I_x$

ξ显然与所给x有关.

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}(n+1)!$$

所以 $R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$，其中$\xi \in \tilde{I}_x$且依赖于$x$.

例3 设$f(x)\in C^2[a,b]$，设 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$.试证：

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2M_2,$$

证明 通过两点$(a,f(a))$及$(b,f(b))$的线性插值为

$$L_1(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

于是

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]\right|$$

$$=\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-L_1(x)\right|=\max_{a\le x\le b}\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\right|$$

$$\le\frac{M_2}{2}\max_{a\le x\le b}\left|(x-a)(x-b)\right|\le\frac{1}{8}(b-a)^2M_2.$$

特点：构造容易，L-型插值基函数理论上有意义，

但增加节点要重新计算，不适合编程计算。

实际应用：只用低次插值。

四 均差与牛顿插值多项式

牛顿（Issac Newton，1642—1727）是英国数学家、天文学家和物理学家，1642年12月25日出生于英国北部林肯郡埃尔斯索普村。

Newton
英1642-1727

27岁的牛顿当了数学教授，1703年任英国皇家学会会长，1706年受英国女王安娜封爵， 1727年3月31日，牛顿在伦敦病逝，享年84岁。

定义2 称$f[x_0, x_k] = \dfrac{f(x_0) - f(x_k)}{x_0 - x_k}$ 为函数$f(x)$关于点 x_0, x_k的**一阶差商(均差)**.

0－阶差商 $\quad f[x_0] = f(x_0)$

1－阶差商 $\quad f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

2－阶差商 $\quad f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$

k－阶差商 $\quad f[x_0, x_1, ..., x_k] = \dfrac{f[x_0, ..., x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, ..., x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$

Newton插值法

3. $\{\varphi_0(x)\equiv 1,\ \varphi_k(x)=\omega_k(x)=\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j),\ k=1,\ ...,\ n\}$

n 次插值多项式 $p_n(x)$ 可表示为　　　满足$p_n(x_k)=f(x_k)$

$$p_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} p_n(x_0)=c_0=f(x_0) \\ p_n(x_1)=c_0+c_1(x_1-x_0)=f(x_1) \\ p_n(x_2)=c_0+c_1(x_2-x_0)+c_2(x_2-x_1)=f(x_2) \\ \qquad\vdots \\ p_n(x_n)=c_0+c_1(x_n-x_0)+c_2(x_n-x_1)+\cdots c_n(x_n-x_{n-1})=f(x_n) \end{cases}$$

由此方程组可递推地求出系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$，并可用差商表示，结果如下：

$$c_0 = f(x_0)$$

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$c_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

归纳可得 $\begin{cases} c_0 = f(x_0) \\ c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \end{cases}$

$$\begin{aligned} p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

$P_n(x)$为次数不超过n 的多项式,且易知

$$R_n(x_i)= 0 \quad 即 \quad P_n(x_i)= y_i\ ,\ (i=0,1,\ \ldots,n)$$

满足插值条件, 故其为插值问题的解, $P_n(x)$称为牛顿插值多项式。

特点：每增加一个节点，Newton插值多项式只增加一项，克服了Lagrange插值的缺点，适合编程计算。

实际应用：适合高次插值。

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

$$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$R_n(x)$称为牛顿型插值余项。

$$\omega_k(x)=\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j),$$

$\{\omega_k(x),\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ 称为**Newton插值基函数**，并称这种构造n次插值多项式的方法为**Newton插值法**。

定理4：设 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 是$n+1$个互异的实数，对于给定的x，函数 $f(x)$ 有 $n+1$次导数，则Newton插值多项式的插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$R_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\Rightarrow f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

2. 差商的性质

定理1(差商性质)

(1)差商与函数值的关系为 $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

例：$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$

(2)差商与节点排列顺序无关(对称性)

$$f\left[x_0, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n\right] = f\left[x_0, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n\right]$$

(3) 由性质(2)及定义可得

$$f[x_1,\cdots,x_{k-1},x_0]$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

(4) 若$f(x)$在$[a, b]$上存在n阶导数, 且节点$x_i\in[a, b]$ $(i=0,1, \ldots,n)$，则n阶均差与导数的关系为

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\quad \xi\in[a,b].$$

(5) n次多项式$f(x)$的k阶差商, 当$k\le n$时是一个$n-k$次多项式; 当$k>n$时恒等于0，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{k-2},x]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x-x_{k-1}}$$

当$k\le n$时是一个$n-k$次多项式; 而当$k>n$时由性质(4)得到其恒等于0.

表2-1（差商表）

x_k	函数值	一阶均差	二阶均差	三阶均差	…
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	…
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		…	
x_3	$f(x_3)$		…		
…	…	…			

【例4】:给定$f(x)=\ln x$的数据表

x_i	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00
$f(x_i)$	0.78846	0.87547	0.95551	1.02962	1.09861

1.构造差商表；2. 写出四次Newton插值多项式$N_4(x)$

解:1.差商表

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.78846				
2.40	0.87547	0.43505			
2.60	0.95551	0.40010	–0.087375		
2.80	1.02962	0.37055	–0.073875	0.02250	
3.00	1.09861	0.34495	–0.06400	0.01646	–0.00755

$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$

$f[x_0,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$

2.

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
2.20	0.78846				
2.40	0.87547	0.43505			
2.60	0.95551	0.40010	–0.087375		
2.80	1.02962	0.37055	–0.073875	0.02250	
3.00	1.09861	0.34495	–0.06400	0.01646	–0.00755

$$
\begin{aligned}
N_4(x) = {} & 0.78846 \\
& +0.43505(x-2.20) \\
& -0.087375(x-2.20)(x-2.40) \\
& +0.0225(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60) \\
& -0.00755(x-2.20)(x-2.40)(x-2.60)(x-2.80)
\end{aligned}
$$

3. 由差商的概念（再增加一个节点x）可得

$$f(x)=p_n(x)+f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n,x\right](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$n+1$阶差商和$n+1$阶导数的关系

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]=\frac{f(x)-p_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

如果 $|f^{(n+1)}(\xi)|\le \mathrm{M}_{n+1} \Rightarrow |R_n(x)|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

例5 设$x_j(j=0,1,2,\dots,n)$为互异节点,求证:$\sum_{j=0}^{n} l_j(x)(x_j)^k = x^k$,

$k=0,1,2,\dots,n$

证: 取$f(x)=x^k$, $k=0,1,2,\dots,n$. 用节点$x_0,x_1,\dots,x_n$对x^k

构造Lagrange插值函数 $L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)(x_j)^k$

由插值误差估计定理知,

$$R_n(x)=x^k-\sum_{j=0}^{n} l_j(x)(x_j)^k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

当$f(x)=x^k$, $k=0,1,2,\dots,n$时. 有$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$。所以$R_n(x)=0$,

得到 $x^k\equiv\sum_{j=0}^{n} l_j(x)(x_j)^k \qquad k=0,1,2,\dots,n$

例6: 已知 $f(x)=2^x$ 的数据点如下：

x_i	-1	0	1
2^{x_i}	0.5	1	2

用 x_1, x_2, x_3 构造二次Lagrange插值多项式$L_2(x)$，
并计算$2^{0.3}$的近似值,并估计截断误差.

解: (1)

$$L_2(x)=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$=0.5\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+2\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$

$$=0.25x^2+0.75x+1 \qquad 2^{0.3}\approx L_2(0.3)=1.2475.$$

因为$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3$, $\max\limits_{-1\le x\le 1}|f'''(x)|=2(\ln 2)^3=0.6660$,所以

$$|R_2(0.3)| = |2^{0.3}-L_2(0.3)| \le \frac{0.6660}{3!}\overbrace{|(0.3+1)(0.3-0)(0.3-1)|}^{\omega_3(0.3)} = 0.03030 < \frac{1}{2}\times 10^{-1}$$

可见用$L_2(0.3)$=1.2475作为$2^{0.3}$的近似值，可保证有两位有效数字.

例7 已知$f(x)=\mathrm{sh}x$的数表,求二次牛顿插值多项式,并由此计算$f(0.596)$的近似值.

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
0.40	<u>0.41075</u>				
		<u>1.1160</u>			
0.55	0.57815		<u>0.2800</u>		
		1.1860		<u>0.1970</u>	
0.65	0.69675		0.3588		<u>0.0344</u>
		1.2757		0.2137	
0.80	0.88811		<u>0.4336</u>		
		1.3841			
0.90	1.02652				

解 由上表可得过前三点的二次牛顿插值多项式为

$$P_2(x) = 0.41075 + 1.1160(x - 0.40) + 0.2800(x - 0.40)(x - 0.55)$$

故 $f(0.596) \approx P_2(0.596) = 0.632010$

又 $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0.1970$

还可得过前四点的三次牛顿插值多项式

$$P_3(x) = P_2(x) + 0.1970(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)$$

故 $f(0.596) \approx P_3(0.596) = 0.6319145$

$f[x_0, \cdots, x_4] = 0.0344$ 可得$P_3(x)$的截断误差

$$\left|R_3(x)\right| \approx \left|0.0344(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)\right|$$

$$\left|R_3(0.596)\right| \approx 0.34 \times 10^{-6}$$

反插值法 已知单调连续函数 $y=f(x)$ 的如下数据

x_i	−0.11	0.00	1.50	1.80
$f(x_i)$	−1.23	−0.10	1.17	1.58

用插值法计算x约为多少时$f(x)=1$（小数点后至少保留4位）

解 作辅助函数$g(x)=f(x)-1$，则问题转化为x为多少时$g(x)=0$，此时可作新的关于$g(x_i)$的函数表，由$f(x)$单调连续知$g(x)$也单调连续，因此可对$g(x)$的数值进行反插值.由数据表

x_i	−0.11	0.00	1.50	1.80
$y_i=g(x_i)$	−2.23	−1.10	0.17	0.58

作出均差表

y_k	$x_k=g^{-1}(y_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
-2.23	<u>-0.11</u>			
		<u>0.97345</u>		
-1.1	0		<u>0.451565</u>	
		1.1811102		<u>0.255894</u>
0.17	1.5		0.267497	
		0.731307		
0.58	1.8			

得牛顿型插值多项式为

$$
\begin{aligned}
x = g^{-1}(y) &= -0.11 + 0.097345(y+2.23) + 0.451565(y+2.23)(y+1.10) \\
&\quad - 0.255894(y+2.23)(y+1.10)(y-0.17)
\end{aligned}
$$

故 $x = g^{-1}(0) = 1.321497.$

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院