《抽象代数》
第五次作业

姓名：姜岚曦 学号：19375233
姓名：魏来 学号：20374104
姓名：曹建钦 学号：20375177
姓名：李璞 学号：20376164
姓名：刘灵 学号：21374261

\$2.8：子群

1. 解：

$S_3 = \{(1), (12), (23), (31), (123), (132)\}$

$H_1 = \{(1)\} H_2 = S_3$ 两平凡子群.

$H_3 = \{(1), (12)\}$,$H_4 = \{(1), (23)\}$,$H_5 = \{(1), (31)\}$,$H_6 = \{(1), (123), (132)\}$

2. 解：

设群 G 有两个子群 H_1、H_2，有 $e \in H_1, e \in H_2$. 故 $H_1 \bigcap H_2 \neq \emptyset$.

设 H_1、H_2 的交集中有一元素名为 a，即 $a \in H_1, a \in H_2$.

则有 $a^{-1} \in H_1, a^{-1} \in H_2$，即 $a^{-1} \in H_1 \bigcap H_2$

设另有一元素 $b \in H_1 \bigcap H_2$. 则 $ab \in H_1, ab \in H_2, b^{-1} \in H_1, b^{-1} \in H_2$

故 $ab \in H_1 \bigcap H_2, b^{-1} \in H_1 \bigcap H_2$

故 $H_1 \bigcap H_2$ 满足定理 1，是 G 的子群

3. 解：

$S = \{(12), (13)\}$，设生成子群 H

则 $(12)(123) = (13) \in H. \quad (123)(12) = (23) \in H$

则 $(12)(23) = (123) \in H. \quad (12)(12) = (1)$

故 $H = S_3$

肯定会，S_3 也是 S_3 的一个子集，生成平凡子群与 S 生成的 H 一样

4. 解：

显然，循环群 $G = (a)$ 的子群 $\{e\}$ 也是循环群

设子群 H 中有元素 a^m. 令 i 是使 $a^j \in H$ 的最小正整数.

则 H 中可写成 a^{iq+r} 的形式，其中 q 是正整数，$0 \leq r < i$

则 $a^{iq} \in H \Rightarrow a^r \in H$，而因为 $r < i$，故 $r = 0$

$H = (a^i)$

5. 解：

$\{[0]\} \quad \{[0], [1], \ldots, [11]\}$

$\{[0], [2], [4], [6], [8], [10]\}$

$\{[0], [3], [6], [9]\} \quad \{[0], [4], [8]\} \quad \{[0], [6]\}$

6. 解：

设 a 的阶是 $m, a^m = e$.

则 $a^{m-1} = a^{-1} \in H, H$ 是子群. 充分性得证.

必要性，由定理 1，显然成立.

$2.9：子群的陪集

1. 解：

如果一个群 G 的阶是素数，设其为 N.

由定理 2 有 $N=nj$，其中 n 是 G 的一个子群 H 的阶，j 是 H 在 G 里的指数.

由于 N 是素数，故 $n=l$ 或 N.

若 $n=1$，则显然 $H=\{e\}$，其 $j=N$. 即存在 N 个 H 的右陪集.

故有 $H(a)=\{e,a\}$ 当 $a\neq e,a\in G$ 时.

对于每一个符合条件的 a，均有 $\{a\}$ 是一个群，即有 $a=e$ 成立矛盾. 故 G 中只有一个元素 e. 矛盾.

故 $n=N$, 显然 $H=G$, 对于 G 中任意一个不为 e 的元 a，a 生成的循环子群的阶必为 N. 即有 $G=(a)$. 故 G 是循环群

2. 解：

设群 G 的阶为 P^m. P 是素数. G 中任意不为 e 的元 a，阶为 n.

则由定理 3 有 n/p^m. 故 $n=p^t,t\geq 1$

当 $t=1$ 时，$n=p$,(a) 是一个阶为 p 的子群.

当 $t>1$ 时，取 $b=a^{p^{t-1}}$，有 $b^p=a^{p^t}=a^n=e$

易证 b 的阶为 P，(b) 是一个阶为 P 的子群.

3. 解：

设群 G 的阶为 N，则有 $m/N,n/N$.

设 ab 的阶是 P，则有 P/N.

由 $ab=ba$，则 $(ab)^{mn}=a^{mn}b^{mn}=e$.

故 p/mn.

考察 $(ab)^{pn}=a^{pn}b^{pn}=a^{pn}=e$.

故 m/pn，由于 $(m,n)=1$，故 m/p.

同理有 n/p 得 $p=mn$.

4*. 解：设 H 中两不为 e 的元素 a,b，$a\in H,b\in H$，H 是与 e 等价的元的集合.

故有 $a\sim e,b\sim e$ $a\sim e\Rightarrow a\sim aa^{-1}\Rightarrow e\sim a^{-1}\Rightarrow a^{-1}\in H$.

$b\sim e\Rightarrow a^{-1}ab\sim a^{-1}a\Rightarrow ab\sim a\sim e\Rightarrow ab\sim e\Rightarrow ab\in H$.

故 H 是一个子群.

5. 解：

假设 G 中某元 a 同时属于 2 个右陪集 Hb,Hc,$b\in G,c\in G$.

则 $a=h_1b=h_2c$, 其中 $h_1\in H, h_2\in H$.
则有 $b=(h_1)^{-1}h_2c$
对 Hb 中的任意元 hb 有 $hb=h(h_1)^{-1}h_2c$, 显然 $h(h_1)^{-1}h_2\in H$
故 hb 是 Hc 中的元, 即 $Hb\subset Hc$, 同理可有 $Hc\subset Hb$.
即 $Hb=Hc$ 矛盾，故 a 至多属于一个右陪集.
显然由于 H 是子群，势必包含 e，则 $a=ea\in Ha$.
故 a 属于 1 个右陪集.

6*. 解：
对于一个阶为 4 的群 G 而言, 其中元的阶只能是 l,2.4
若 G 有一个阶为 4 的元 a，则 (a) 是一个 4 阶循环群与模 4 剩余类加群同构.
若 G 无阶为 4 的元，则 G 有 3 个阶为 2 的元, 设为 xyz.
则 $G=\{e,x,y,z\}$. 显然 $xy\in G$.
若 $xy=e$. 则 $xy^2=y=x$，矛盾
若 $xy=x$, 则 $y=e$，矛盾; 若 $xy=y$, 则 $x=e$, 矛盾
所以 $z=xy$，同理有 $xy=yx=z\quad yz=zy=x\quad xz=zx=y$
上述所有群都与 $G=\{e,x,y,z\}$ 对于运算 R 的群同构，其中：

R	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

综上，对于任何一个 4 阶群，其必与 G 或模 4 的剩余类加群二者之一同构.

$2.10：不变子群．商群

1. 解：
不变子群 N 阶为 2，设其为 $\{e,a\}$
其中有 $a=a^{-1}, a^2=e$ 成立，由定理 2.
对于 $\forall x\in G$, 有 $xax^{-1}\in\{e,a\}=N$.
若 $xax^{-1}=e$, 则 $xa=x\Rightarrow a=e$ 不可能
故 $xax^{-1}=a$, 即 $xa=ax$ 对 $\forall x\in G$ 成立.
显然 G 的中心包含 a,e. 显然故包含 N

2. 解:

首先，两个子群的交集一定还是一个子群

令两个子群的交集 $N = N_1 \bigcap N_2$

N 中一元设为 n, 则有 $n \in N_1, n \in N_2$

由定理 2，有 $\forall a \in G$, 有 $ana^{-1} \in N_1, ana^{-1} \in N_2$

即 $ana^{-1} \in N_1 \bigcap N_2 = N \Rightarrow ana^{-1} \in N$ 对 $\forall a \in G$ 成立.

故 $N = N_1 \bigcap N_2$ 是不变子群

3. 解:

设 N 是 G 的一个指数为 2 的子群, 显然 $N \neq G$.

对于 G 中两元 e、b，其中 b 是任意不为 e 的元，且 $b \bar{\in} N$.

N 的两个右陪集为 $Ne = N$ 与 Nb, 两者构成 G 的一个分类.

同理有两个左陪集 $eN = N$ 与 bN 亦构成 C 的一个分类.

所以有 $Nb = bN$ 对任意符合要求的 b 成立

而对于 $a \in N$ 而言,$aN = Na$ 显然成立，故 N 是不变子群

4. 解:

设 HN 中元为 hn，其中 $h \in H, n \in N$.

设 HN 中两元 h_1n_1, h_2n_2, 其中 $h_1, h_2 \in H, n_1, n_2 \in N$

则 $(h_1n_1)(h_2n_2)^{-1} = (h_1n_1)(n_2^{-1}h_2^{-1}) = h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} = h_1(n_1n_2^{-1})h_2^{-1} = h_1nh_2^{-1}$

显然 $n \in N$，所以 nh_2^{-1} 构成的集合同 $h_2^{-1}n$

故 $h_1nh_2^{-1} \in h_1HN = HN$.

故 HN 是 G 的子群.

5. 解:

$G = S_4, N = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$N_1 = \{(1)(12)(34)\}$

N_1 是 N 的一个不变子群（由于 N 是交换群）

但容易找到 $ana_1 \bar{\in} N_1$ 的例子，其中 $a \in G, n \in N_1$

6*. 解:

(i) C 显然是个子群

对 $\forall a \in G, c \in C, aca^{-1} = (aca^{-1}c^{-1})c \in C$

故 C 是一个不变子群

(ii) 令 $a, b \in G$，则有 $c = a^{-1}b^{-1}ab \in C$

故有 $ab = bae \qquad abcC = bacC = baC$

故有 $CabC = CbaC = aCbC = bCaC$
故 a/c 是交换群
(iii) 对 $\forall a, b \in G$，有 $aNbN = bNaN$
即 $abNN = baNN \Rightarrow abN = baN$
即有 $abe = baN, n \in N \Rightarrow ab = ban \Rightarrow a^{-1}b^{-1}ab = n \in N$ 包含 C
故 $C \subset N$.

\$2.11：同态和不变子群

1. 解：
由于 ϕ 是满射，则 $\forall \bar{a} \in \bar{S}$，存在 $a \in S$ 使 $\phi(a) = \bar{a}$，有 $\bar{S} \subset \phi(S)$. 对于 $\forall a \in S$，存在 $\bar{a} \in \bar{S}$ 使 $\phi(a) = \bar{a}$，有 $\phi(S) \subset \bar{S}$，故 $\phi(S) = \bar{S}$
反例很容易举出，设 $A = \{a, b, c\}$,$\bar{A} = \{c\}$.$\phi:\quad a \to c, b \to c, c \to c$.
取 $S = \{a\}$，则 $\bar{S} = \{c\}$. 而 $\bar{S}$ 的逆像是 $\{a, b, c\} \neq a = S$

2. 解：
跳过

3. 解：
G 与 $\bar{G}$ 同态 $\Rightarrow G/N \cong \bar{G}$. G/N 的阶为 n 是 N 在 G 的指数显然 n/m.
若 n/m，令 $G = (a), \bar{G} = (\bar{a})$
$\phi:\quad a^k \to \bar{a}^k$ 若 $a^{k_1} = a^{k_2}$, 则 $m/k_2 - k_1 \Rightarrow n/k_2 - k_1 \Rightarrow \bar{a}^{k_1} = \bar{a}^{k_2}$ 故是映射.
显然对 $\forall \bar{k} \in \bar{G}$ 都能找到 $\phi^{-1}(\bar{a}^k) = a^k \in G$.
故 ϕ 是同态满射，G 与 G 同态.

4. 解：
循环群是交换群，故其子群是不变子群，G/N 存在.
设 $G = (a)$，对于 $\forall a^k \in G$，存在 N 的陪集 $a^kN = (aN)^k$
全体 a^kN 构成 G/N 亦即 (aN) 是循环群.