北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY

数值分析

主讲教师：贺慧霞

北京航空航天大学数学科学学院

第六章 数值积分

6.7 高斯型求积公式

一、高斯(Gauss)求积公式

在构造Newton - Cotes求积公式时，**节点是等距的**,这种特点使得**求积公式便于构造，复化求积公式易于形成**,但同时也**限制了公式的精度**.

问题： 能不能节点**固定为$n+1$**的前提下,在区间$[a,b]$上

1)适当选择$n+1$个节点 $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$,

2)求相应的求积系数

使插值求积公式具有尽可能高的代数精度(高于n)？

$n+1$个插值节点的插值型求积公式至少有n次代数精度.

进一步： （1）**最高**为多少? （2）**如何构造**这样的公式?

考虑更一般形式的数值积分问题

$\rho(x)\geq 0$

$$I(f)=\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (*)$$

定义：若求积公式$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 对一切不高于m次的多项式 $p(x)$都等号成立，即$R(p)=0$；而对于某个$m+1$次多项式等号不成立，则称此求积公式的代数精度为m.

1. 代数精度最高为2n+1

定理1：设节点$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$，则求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的代数精度最高为$2n+1$次.

证明： 取特殊情形 $\rho(x)=1$,

分别取$f(x)=1,x,x^2,\cdots,x^r$代入公式，并让其成为等式,得

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = b-a,$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i A_i = \frac{b^2-a^2}{2},\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^r A_i = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1},$$

只有$r+1$个等式，但有$2n+2$个待定系数(A_i, x_i为变元)，要想如上方程有唯一解，应该方程个数等于变量个数，即$r+1=2n+2$，这样导出的求积公式的代数精度至少是$2n+1$.

下面证明代数精度只能是$2n+1$.

事实上,取 $2n+2$次多项式$g(x)=(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$ 代入求积公式,这里 $x_0, x_1, \ldots, x_n$是节点，有

$$左 = \int_a^b \rho(x)g(x)dx > 0, \qquad 右 = \sum_{k=0}^{n} A_k g(x_k) = 0$$

左≠右,故等式不成立,求积公式的代数精度最高为$2n+1$次. 证毕.

定义： 若求积公式$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 对一切不高于m次的多项式 $p(x)$都等号成立，即$R(p)=0$;而对于某个$m+1$次多项式等号不成立，则称此求积公式的代数精度为m.

定义1: 使求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

达到最高代数精度2n+1的求积公式称为**Guass型求积公式**。

Guass型求积公式的节点 x_k 称为**Guass点**,系数 A_k 称为**Guass系数**.

因为Guass求积公式也是插值型求积公式,故有

结论: n+1个节点的插值型求积公式的代数精度 d满足

$$n \le d \le 2n+1.$$

2. 构造方法

繁琐

(1) 用待定系数法构造高斯求积公式

$$I_k=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},\sum_{i=1}^{2}c_i x_i^k=I_k$$

【例1】选择系数与节点，使下面的求积公式成为Gauss公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)\qquad(1)$$

【解】n=1, 由定义，若求积公式具有3次代数精度,则其是Gauss公式. 为此,分别取 $f(x)$=1, x，x^2，x^3 代入公式，并让其成为等式，得

$$\begin{cases}(1)\quad c_1+c_2=2,\\(2)\quad c_1x_1+c_2x_2=0\\(3)\quad c_1x_1^2+c_2x_2^2=\dfrac{2}{3},\\(4)\quad c_1x_1^3+c_2x_2^3=0\end{cases}$$

解得 $c_1=c_2=1,\quad x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

所求Gauss公式为：

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

(2) 利用正交多项式构造高斯求积公式

设$P_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$,为正交多项式序列, $P_n(x)$具有如下性质:

1)对每一个n, $P_n(x)$是 n 次多项式, $n=0,1,2,\ldots$,

2)(正交性)$\int_a^b \rho(x)P_i(x)P_j(x)dx = 0, (i \neq j)$

3)对任意一个次数≤n-1的多项式$P(x)$，有

$$\int_a^b \rho(x)P(x)P_n(x)dx = 0, n \geq 1$$

4) $P_n(x)$在(a,b)内有n个互异零点.

定理 6.5 设$\{g_k(x)(k=0,1,\cdots)\}$是区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系，则求积公式(6.23)、(6.24)是 Gauss 型求积公式的充分必要条件是它的求积节点是 n 次正交多项式$g_n(x)$的n个零点$x_i(i=1,2,\cdots,n)$。

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),\quad A_k = \int_a^b \rho(x)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}dx$$

必要性 由于当 $f(x)$是任何次数不高于 $2n-1$ 的多项式时，求积公式(6.23)成为等式，所以对任意次数不高于 $n-1$ 的多项式 $q(x)$，总有

$$\int_a^b \rho(x)q(x)\omega_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} A_i q(x_i)\omega_n(x_i) = 0$$

根据定理 5.6 以及正交多项式的唯一性，可知

$$\omega_n(x) \equiv \frac{1}{a_n}g_n(x) \tag{6.26}$$

其中 a_n 是 $g_n(x)$的 x^n 项系数。因此，求积公式(6.23)、(6.24)的求积节点是 $g_n(x)$的零点。

充分性） 设$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是$n+1$次正交多项式$P_{n+1}(x)$的$n+1$个零点,则插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),\quad A_k=\int_a^b \rho(x)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}dx$$

是Guass型求积公式.

证明： 只要证明求积公式的代数精确度为$2n+1$,即对任意一个次数$\le 2n+1$的多项式求积公式都精确成立。

设 $f(x)$为任意一个次数$\le 2n+1$的多项式，则有$f(x) = q(x)P_{n+1}(x)+r(x)$，满足 $f(x_k)=r(x_k)$,这里, $P_{n+1}(x)$是 $n+1$次正交多项式, $q(x),r(x)$ 均是次数$\le n$的多项式。

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)q(x)P_{n+1}(x)dx+\int_a^b \rho(x)r(x)dx$$

由于$n+1$个节点的插值型求积公式的代数精确度不低于n，故有

$$\int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k r(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad (4)$$

由性质3)有 $f(x_k)=r(x_k)$,

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)q(x)P_{n+1}(x)dx + \int_a^b \rho(x)r(x)dx$$

$$= 0 + \int_a^b \rho(x)r(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

即对 $f(x)$ 为任意一个次数$\leqslant 2n+1$的多项式求积公式都精确成立.

3)对任意一个次数$\leqslant n-1$的多项式$P(x)$，有

$$\int_a^b \rho(x)P(x)P_n(x)dx = 0, n \geq 1$$

证毕

利用正交多项式构造高斯求积公式的基本步骤：

1. 以$n+1$次正交多项式的零点$x_0, x_1, \cdots x_n$作为积分点(高斯点），

2. 用高斯点$x_0, x_1, \cdots x_n$对$f(x)$作$Lagrange$插值多项式

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

代入积分式 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \int_a^b \rho(x) (\sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)) dx$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b \rho(x) l_i(x) dx \right) f(x_i)$$

因此，求积系数为

$$A_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x) dx \quad (i = 0,1,\cdots n)$$

【例2】 对于积分$\int_{-1}^{1}(1+x^2)\ f(x)dx$,试构造两点高斯求积公式.

解： 首先在$[-1,1]$上构造带权$\rho(x)=1+x^2$的正交多项式

$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x).$

$$\alpha_1=\frac{(x,\varphi_0(x))}{(\varphi_0(x),\varphi_0(x))}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)xdx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}=0$$

$\varphi_0(x)=1$

$\varphi_1(x)=x-\alpha_1\varphi_0(x)=x$

$\varphi_2(x)=x^2-\beta_1\varphi_0(x)-\beta_2\varphi_1(x)=x^2-\dfrac{2}{5}$

$$\beta_1=\frac{(x^2,\varphi_0(x))}{(\varphi_0(x),\varphi_0(x))}=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^2dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}=\frac{2}{5},\quad \beta_2=\frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^3dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^2dx}=0$$

$\varphi_2(x)$的零点为$x_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

以$\varphi_2(x)$的零点$x_0=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, x_1=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$作为高斯点。

两点高斯公式$n=1$,应有3次代数精度，求积公式形如

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$$

将$f(x)=1, x$依次代入上式两端，令其成为等式。

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx = A_0 + A_1$$

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)xdx = A_0(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})+A_1(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$$

联立解出$A_0=A_1=\frac{4}{3}$

得到两点高斯求积公式为

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)f(x)dx \approx \frac{4}{3}\left[f(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})+f(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})\right]$$

二、高斯型求积公式的截断误差和稳定性分析

定理3： 高斯型求积公式的求积系数恒正，

$$\text{即：} A_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x) dx > 0, 0 \le i \le n.$$

证明： 在高斯求积公式 $\int_a^b \rho(x) f(x) dx$ 中，

取 $f(x) = l_i^2(x)$，$l_i^2(x)$ 为 $2n$ 次多项式，求积公式等式成立，

$$\int_a^b \rho(x) l_i^2(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_i^2(x_k) = A_i$$

$$\therefore \quad A_i = \int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) l_i^2(x) dx > 0$$

推论： 高斯求积公式是稳定的.

定理4： 设 $f(x) \in C[a,b]$，则高斯求积公式是收敛的.

定理5: (1) 若$f^{(2n+2)}(x)$在$[a,b]$上连续，则高斯求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

的截断误差为：$R(f)=\dfrac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)w_{n+1}^2(x)dx$

其中$\eta\in(a,b), w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

证明： 因为n阶高斯求积公式有$2n+1$次代数精度，

因此，用点$x_0, x_1, \cdots, x_n$对$f(x)$作$Hermite$插值，

得到$2n+1$次插值多项式$H_{2n+1}(x)$,并且满足：

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i) \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i) \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

已知Hermite插值误差是

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx+\int_a^b \rho(x)\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2dx$$

因为对2n+1次多项式求积公式准确成立，即

$$\int_a^b \rho(x)H_{2n+1}(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_iH_{2n+1}(x_i)=\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)$$

代入上式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)+\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2dx$$

即有

$$R(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx-\sum_{i=0}^{n}A_if(x_i)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2dx$$

三、常用的高斯求积公式

勒让德多项式(Legendre)，

$$L_0(x)=1,\quad L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, n\ge 1.$$

$L_0(x)=1,$

$L_1(x)=x\Rightarrow$ 零点为$x=0,$

$L_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)\Rightarrow$ 零点为$x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3},$

$L_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)\Rightarrow$ 零点为$x_1=0, x_{2,3}=\pm\frac{1}{5}\sqrt{15},$

1.Gauss - Legendre 求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

其中高斯点为Legendre多项式的零点

$$A_i=\int_{-1}^{1}\frac{L_n(x)}{(x-x_i)L_n'(x_i)}dx$$

$(i=1,\cdots,n)$

Guass点x_k, Guass系数A_k都有表可以查询.

Gauss-Legendre公式积分点和求积系数

n	x_k	A_k
1	0	2
2	±0.5773502692	1
3	±0.7745966692 0	0.5555555556 0.8888888889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	±0.9602898565 ±0.7966664774 ±0.5255324099 ±0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$n=0$, 1个节点，$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$, 具有一次代数精度；

$n=1$ 2个节点，$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-0.5773502692) + f(0.5773502692)$,

具有三次代数精度，

$n=2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 0.5555555556 f(-0.7745966692)$$

$$+ 0.8888888889 f(0) + 0.5555555556 f(0.7745966692)$$

一般区间的Gauss - Legendre 求积公式

如果积分区间是$[a,b]$，用线性变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

将积分区间从$[a,b]$变成$[-1,1]$,由定积分的换元积分法有

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt$$

这样就可以用Gauss - Legendre求积公式计算一般区间的积分.

【例3】运用三点高斯-勒让德求积公式与辛普森求积公式计算积分$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx$

解:由三点高斯-勒让德求积公式有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx \approx 0.555556(\sqrt{0.725403}+\sqrt{2.274596})+0.888889\sqrt{1.5}$$

$$=2.399709$$

由三点辛普森求积公式有

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx \approx \frac{1}{3}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{1.5}+\sqrt{2.5})=2.395742$$

该积分的准确值 $\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1.5}dx=2.399529$

【例4】 对积分$\int_0^1 f(x)dx$,试利用$n=1$的两点$Gauss-Legendre$求积公式构造$Gauss$型求积公式。即确定x_0, x_1和A_0, A_1使$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$为$Gauss$型求积公式。

解: 先作变量代换

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t = \frac{1}{2}(1+t), \qquad dx = \frac{1}{2}dt$$

于是$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}(1+t))dt \overset{\nabla}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 F(t)dt$

由两点$Gauss-Legendre$求积公式 $\int_{-1}^1 F(t)dt \approx F(-0.577) + F(0.577)$

得 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{1}{2}(1+t))dt \approx \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}(1-0.577)) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}(1+0.577))$

$$= \frac{1}{2}f(0.2115)) + \frac{1}{2}f(0.7885)$$

【例5】 对积分$\int_0^1 f(x)dx$,试利用$n=3$的四点$Gauss-Legendre$求积公式构造$Gauss$型求积公式。即确定x_0,x_1,x_2,x_3和A_0,A_1,A_2,A_3使

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)+A_3 f(x_3)$$为$Gauss$型求积公式。

解：先作变量代换

$$x=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)t=\frac{1}{2}(1+t), \qquad dx=\frac{1}{2}dt$$

于是$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(1+t)\right)dt \overset{\nabla}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^1 F(t)dt$$

对积分$\int_{-1}^1 F(t)dt$用四点$Gauss-Legendre$求积公式

$$\int_{-1}^1 F(t)dt \approx \overline{A}_0F(t_0)+\overline{A}_1F(t_1)+\overline{A}_2F(t_2)+\overline{A}_3F(t_3)$$

原积分

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(t)dt$$

$$\approx \frac{1}{2}(\overline{A}_0 F(t_0) + \overline{A}_1 F(t_1) + \overline{A}_2 F(t_2) + \overline{A}_3 F(t_3))$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\overline{A}_0 f(\frac{1}{2}(1+t_0)) + \overline{A}_1 f(\frac{1}{2}(1+t_1)) + \overline{A}_2 f(\frac{1}{2}(1+t_2)) + \overline{A}_3 f(\frac{1}{2}(1+t_3))\right\}$$

即有 $\quad x_i = \frac{1}{2}(1+t_i) \qquad A_i = \frac{1}{2}\overline{A}_i \qquad i = 0,1,2,3$

可查表得到t_i和$\overline{A}_i$,$(i=0,1,2,3)$　　$x_i=\frac{1}{2}(1+t_i), A_i=\frac{1}{2}\overline{A}_i, \quad i=0,1,2,3$

列表如下：

$i=0$	1	2	3
$t_i=-0.861136$	-0.339981	0.339981	0.861136
$\overline{A}_i=0.347855$	0.652145	0.652145	0.347855
$x_i=0.069432$	0.330009	0.669991	0.930568
$A_i=0.173927$	0.326073	0.326073	0.173927

于是$\int_0^1 f(x)dx \approx 0.173927f(0.069432)+0.326073f(0.330009)$

$+0.326073f(0.669991)+0.173927f(0.930518)$

2.Gauss-Chebyshev公式

常用的切比雪夫多项式 $T_n(x)=\cos(n\arccos x), \quad |x|\le 1.$

权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x\in[-1,1]$ $\quad T_n(x)$最高次项系数 $a_n=2^{n-1}$

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n} f(x_i) \\
x_i = \cos\dfrac{2(n-i)+1}{2(n+1)}\pi \quad (i=1,\cdots,n)\text{是}T_n(x)\text{的零点}, \\
A_i = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-x_i)T_n'(x_i)}dx = \frac{\pi}{n} \quad (i=1,\cdots,n)
\end{cases}
$$

称为带权高斯-切比雪夫求积公式.

Chebyshev求积公式的截断误差为

$$R=\frac{f^{(2n)}(\eta)}{a_n^2(2n)!}\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\eta),\qquad \eta\in(-1,1).$$

【例6】计算$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,其中$f(x)$是$m$次多项式.

解 用Gauss – Chebyshev求积公式计算.

由于$f(x)$的$m+1$阶导数恒为零,所以当m为奇数时,求积公式中取$n=\frac{m+1}{2}$可使截断误差为零,所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{m+1}\sum_{i=1}^{\frac{m+1}{2}}f\left(\cos\frac{m+2-2i}{m+1}\pi\right).$$

当m为偶数时,应取$n=\frac{m+2}{2}$才能使截断误差为零,所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{m+2}\sum_{i=1}^{\frac{m+2}{2}}f(\cos\frac{m+3-2i}{m+2}\pi).$$

例7 利用Gauss求积公式计算$\int_{-1}^{1}\frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$. $T_n(x) \overset{n=?}{\Rightarrow} x_i, A_i$

解 由$f(x)=x^6\Rightarrow n=4.$ $\int_{-1}^{1}\frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{4}f(\cos\frac{9-2i}{8}\pi)$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{4}\left[(\cos\frac{7}{8}\pi)^6+(\cos\frac{5}{8}\pi)^6+(\cos\frac{3}{8}\pi)^6+(\cos\frac{1}{8}\pi)^6\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})^6+(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})^6+(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})^6+(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2})^6\right]=\frac{5}{16}\pi$$

【例8】 计算$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,要求精度到$10^{-5}$.

解：$f(x)=e^x,\ f^{(2n)}=e^x,|\mathrm{R}|\le\frac{2\pi e}{2^{2n}(2n)!}$.

当$n=4$时,$\frac{2\pi e}{2^{2n}(2n)!}\approx 0.16546794\times10^{-5}<0.5\times10^{-5}$.

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{4}\left[e^{\cos\frac{7}{8}\pi}+e^{\cos\frac{5}{8}\pi}+e^{\cos\frac{3}{8}\pi}+e^{\cos\frac{1}{8}\pi}\right]\approx 3.97746265$$

准确值为 $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\approx 3.97746326$

$$\boxed{R=\frac{f^{(2n)}(\eta)}{a_n^2(2n)!}\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\eta),\qquad \eta\in(-1,1).}$$

3.Gauss-Laguerre公式（无穷区间上的Gauss积分公式）

$\rho(x)=e^{-x}$ $$U_n(x)=e^x\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^n\cdot e^{-x}),\quad [0,+\infty)$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i),$$ x_i是$U_n(x)$的零点,$(i=1,\cdots,n)$

其中 $$A_i=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot\frac{U_n(x)}{(x-x_i)U_n'(x_i)}\mathrm{d}x,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

$$=\frac{(n!)^2}{x_i[U_n'(x_i)]^2},\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

截断误差为 $$R=\frac{(n!)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\eta),\quad \eta\in(0,+\infty).$$

Gauss-Laguerre积分点和求积系数表

n	x_i	A_i	n	x_i	A_i
1	1	1	5	0.263 560 319 7	0.521 755 610 6
2	0.585 786 437 6	0.853 553 390 6		1.413 403 059 1	0.398 666 811 1
	3.414 213 562 4	0.146 446 609 4		3.596 425 771 0	0.075 942 449 7
3	0.415 774 556 8	0.711 093 009 9		7.085 810 005 9	0.003 611 758 7
	2.294 280 360 3	0.278 517 733 6		12.640 800 844	0.000 023 370 0
	6.289 945 082 9	0.010 389 256 5	6	0.222 846 604 2	0.458 964 674 0
4	0.322 547 689 6	0.603 154 104 3		1.188 932 101 7	0.417 000 830 8
	1.745 761 101 2	0.357 418 692 4		2.992 736 326 1	0.113 373 382 1
	4.536 620 296 9	0.038 887 908 5		5.775 143 569 1	0.010 399 197 5
	9.395 070 912 3	0.000 539 294 7		9.837 467 418 4	0.000 261 017 2
				15.982 873 981	0.000 000 898 5

n

(1)求某一个无穷区间$[0,+\infty)$上的积分$\int_0^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{x} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} F(x)dx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n} A_i F(x_i), \qquad 其中 F(x_i) = e^{x_i} f(x_i)$$

(2)对$[a,+\infty)(a>0)$区间上的积分$\int_a^{+\infty} e^{-x} f(x)dx$,

通过变量代换$x = a + t$,将$x \in [a,+\infty)$变为$t \in [0,+\infty)$,
再用$Gauss-Laguerre$求积公式计算积分

$$\int_a^{+\infty} e^{-x} f(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+t)} f(a+t)dt = e^{-a}\int_0^{+\infty} e^{-t} f(a+t)dt$$

例9 用高斯-拉盖尔求积公式计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$ 的近似值.

解 取 $n=1$,查表得

$$x_0 = 0.58578644\,,\ x_1 = 3.41421356$$

$$A_0 = 0.85355339\,,\ A_1 = 0.14644661\,,$$

所以 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx \approx A_0\sin x_0 + A_1 \sin x_1 = 0.43246.$

如果取 $n=1$,得 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx \approx 0.49603;$

如果取 $n=5$,得 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx \approx 0.50005.$

而准确值 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = 0.5$,这表明取 $n=5$的求积公式已经相当精 确.

4.Gauss-Hermite公式

$\rho(x)=e^{-x^2}$ $\quad H_n(x)=(-1)^{(n)}e^{x^2}\cdot\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$， $(-\infty,\infty)$

同前，求积分$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$，积分点$x_i$是$H_n(x)$的零点.

其中 $A_i=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cdot\dfrac{H_n(x)}{(x-x_i)H_n'(x_i)}\mathrm{dx}$， $i=1,2,\cdots,n$.

$$=\frac{2^{n+1}n!\sqrt{2}}{[H_n'(x_i)]^2},\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

截断误差为 $R=\dfrac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!}f^{(2n)}(\eta)$， $\eta\in(0,+\infty)$.

n=? ✓

n	x_i	A_i	n	x_i	A_i
1	0	1.772 453 850 0		±1.335 849 074 0	0.157 067 320 3
2	±0.707 106 781 2	0.886 226 925 5		±0.436 077 411 9	0.724 629 595 2
3	±1.224 744 871 4	0.295 408 975 2	7	±2.651 961 356 8	0.000 971 781 245
	0	1.181 635 900 6		±1.673 551 628 8	0.054 515 582 82
4	±1.650 680 123 9	0.081 312 835 5		±0.816 287 882 9	0.425 607 252 6
	±0.524 647 623 3	0.804 914 090 0		0	0.810 264 617 6
5	±2.020 182 870 5	0.019 953 242 1	8	±2.930 637 420 3	0.000 199 604 07
	±0.958 572 464 6	0.393 619 323 2		±1.981 656 756 7	0.017 077 983 01
	0	0.945 308 720 5		±1.157 193 712 4	0.207 802 325 8
6	±2.350 604 973 7	0.004 530 009 9		±0.381 186 990 2	0.661 147 012 6

例10 用两个节点的高斯-埃尔米特求积公式计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^2 dx$.

解 先求节点x_0, x_1,由$H_2 = 4x^2 - 2$,其零点为$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

可求得 $A_0 = A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

于是 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^2 dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

高斯型求积公式的代数精度为3，故对 $f(x) = x^2$求积公式精确成立，从而得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

【例11】分别用不同的方法计算$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$的近似值.

【解】 各种做法比较如下:

1、Newton-Cotes公式 $I \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k)$

- 当n=1时，即用梯形公式， $I \approx 0.9270354$
- 当n=2时，即用Simpson公式， $I \approx 0.9461359$
- 当n=3时， $I \approx 0.9461090$
- 当n=4时， $I \approx 0.9460830$
- 当n=5时， $I \approx 0.9460831$

二、用复化梯形公式 $h=\frac{1}{8}=0.125$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{h}{2}\{f(0)+2[f(h)+\cdots+f(7h)]+f(1)\}=0.94569086$$

三、用复化Simpson求积公式，令$h=\frac{1}{8}=0.125$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx \frac{h}{3}\{f(0)+4[f(h)+\cdots+f(7h)]+2[f(2h)+\cdots+f(6h)]+f(1)\}$$

$$=0.946083305$$

四、用Gauss求积公式

$$令x=\frac{1+t}{2}, I=\int_{-1}^{1}\frac{\sin\frac{1+t}{2}}{t+1}\mathrm{d}t$$

1、用两个节点的Gauss公式

$$I \approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1} + \frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1} = 0.9460411$$

2、用三个节点的Gauss公式

$$I \approx 0.5555556 \times \frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745907+1)}{0.7745907+1} + 0.8888889 \times \frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}$$

$$+0.5555556 \times \frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745907+1)}{0.7745907+1} = 0.946083$$

$\boxed{\text{此题的精确值为}:0.9460831...}$

由例题的各种算法可知:

Newton-Cotes公式: $n=1$时有1位有效数字;

$n=2$时有3位有效数字;

$n=4$时有6位有效数字.

复化梯形公式: 有2位有效数字;

复化Simpson公式: 有6位有效数字;

Gauss公式: 仅用了3个函数值，就得到了结果.

总　结

- Newton—Cotes求积公式是等距节点的插值型求积公式，当n>7时计算不稳定；梯形求积公式和Simpson求积公式是低精度方法，但对于光滑性较差的被积函数有时比高精度方法能得到更好的效果。实际计算中一般采用复化求积公式。

- Romberg求积方法。算法简单，当节点加密提高积分近似程度时，前面计算的结果可以为后面的计算使用，因此，对减少计算量有好处。

$T_n \to S_n \to C_n \to R_n$

$n=?$

- Gauss求积。Gauss公式精度高，计算稳定，但求积节点选取困难。带权Gauss求积方法能把复杂积分化简，还可以直接计算无穷区间上的积分和广义积分。

作 业

177页习题6: 12,15,17、19、20

本讲课程结束

北京航空航天大学数学科学学院