20375177 曹建钦 数值分析作业

1.3 向量范数和矩阵范数

P13

9. 证明: $x=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

① 正定性: 显然 $\sum_{i=1}^{n}|x_i|\geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时, $\|x\|_1=0$

② 齐次性: 对任意一数 $k\in R$, 有 $\|kx\|_1=\sum_{i=1}^{n}|kx_i|=|k|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|k|\|x\|_1$

③ 成立三角不等式: 任取向量 $y\in R^n$, 则有

$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1$

故 $\|\cdot\|_1$ 是向量范数

$\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$

① 正定性: 显然 $\max_{1\leq i\leq n}|x_i|\geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时, $\|x\|_\infty=0$

② 齐次性: 对任意一数 $k\in R$, 有 $\|kx\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|kx_i|=|k|\max_{1\leq i\leq n}|x_i|=|k|\|x\|_\infty$

③ 成立三角不等式: 任取向量 $y\in R^n$, 则有

$\|x+y\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i+y_i|\leq\max_{1\leq i\leq n}|x_i|+\max_{1\leq i\leq n}|y_i|=\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$

故 $\|\cdot\|_\infty$ 是向量范数

11. 证明: $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2}$

要证 $\|\cdot\|_F$ 是与向量范数 $\|\cdot\|_2$ 相容的矩阵范数

即需证 对任意 $x\in R^n$, $A\in R^{n\times n}$, 满足 $\|Ax\|_2\leq\|A\|_F\|x\|_2$

$\|Ax\|_2=\sqrt{\langle Ax,Ax\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right|^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}x_k|\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||x_k|\right)^2}$

$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2)(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2} = \|A\|_F \cdot \|x\|_2$

再证 $\|\cdot\|_F$ 满足矩阵范数定义的四个条件: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

① 易知 $\|A\|_F \ge 0$，当且仅当 $A=0$ 时，$\|A\|_F = 0$

② 对任一数 $k \in R$，有 $\|kA\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(ka_{ij})^2} = |k|\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = |k|\|A\|_F$

③ $\|A+B\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})^2} \le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} + \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2} = \|A\|_F + \|B\|_F$

④ $\|AB\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \cancel{(a_{ij}b_{ij})} [AB]_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})^2} \le \sqrt{(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2)} = \|A\|\|B\|$

故 $\|\cdot\|_F$ 是与向量范数 $\|\cdot\|_2$ 相容的矩阵范数

12. 解: $\|x\|_1 = |4| + |-8| + 2 = 14$

$\|x\|_2 = \sqrt{4^2+(-8)^2+2^2} = 2\sqrt{21}$

$\|x\|_\infty = \max(4, 8, 2) = 8$

$\|A\|_1 = \max(7, 7, 9) = 9$

$\|A\|_\infty = \max(11, 4, 8) = 11$

$\|A\|_F = \sqrt{2^2+(-5)^2+4^2+(-1)^2+3^2+4^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{79}$

14. 解

$\alpha = (1, 1, \dots, 1)^T$

$\beta = (|a_1|, |a_2| \cdots |a_n|)^T$

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ $\quad \|x\|_1^2 = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2$

有 $\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \le (\sum_{i=1}^{n}|x_i|)^2 \le n\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$ 由内积的柯西不等式 $|(\alpha, \beta)| \le |\alpha||\beta|$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$

(2) $\|Ax\|_2 \le \|Ax\|_1 \le \|A\|_1\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|A\|_1\|x\|_2$

原命题得证

2.1 Gauss消去法

P45. 1. 三位十进制限制

解 顺序Gauss消去法，消元过程如下.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 0 & -10.0 & -24.5 & -59.0 \\ 0 & 0.100 & -12.0 & -24.0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 0 & -10.0 & -24.5 & -59.0 \\ 0 & 0 & -12.2 & -24.6 \end{bmatrix}$$

经回代得 $x_1 = 1.57$ $x_2 = -0.951$ $x_3 = 2.02$

列主元素Gauss消去法，消元过程如下.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6 \\ 2 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0 & 1.00 & 2.45 & 5.90 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0 & 1.00 & 2.45 & 5.90 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \\ 0 & 0 & 2.99 & 5.99 \end{bmatrix}$$

经回代得 $x_1 = -2.60$ $x_2 = 0.999$ $x_3 = 2.00$

2.2 三角分解法

P45. 5. 不选主元的Doolittle分解法求解

解 采用四位十进制限制

$$\begin{cases} 3.2x_1 - 1.4x_2 + x_3 = 2.5 \\ 6.4x_1 + 2.8x_2 + 3x_3 = 1.8 \\ 5.5x_1 + 5.2x_2 - 4x_3 = 7.2 \end{cases} \xrightarrow[\text{得}]{\text{分解}} \text{为} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.200 & -1.400 & 1.000 \\ 2.000 & 5.6 & 1.000 \\ 1.719 & 1.358 & -7.077 \end{bmatrix}$$

可得 $Ly=b$ $Ux=y$

$\Rightarrow$ $y_1=2.500$ $y_2=-3.200$ $y_3=7.248$

$x_1=0.9352$ $x_2=-0.3868$ $x_3=-1.034$

20375177 曹建钦 数值分析

2.2.2 选主元的Doolittle分解法

P45. 6

解:

$$(A,b)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&8&2&3&12\\-6&-3&8&1&40\\2&4&4&2&-50\\10&5&-5&6&80\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}10&5&-5&6&80\\-6&-3&8&1&40\\2&4&4&2&-50\\1&8&2&3&12\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}10&5&-5&6&80\\-\frac{3}{5}&-3&8&1&40\\\frac{1}{5}&4&4&2&-50\\\frac{1}{10}&8&2&3&12\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}10&5&-5&6&80\\\frac{1}{10}&\frac{15}{2}&\frac{5}{2}&\frac{12}{5}&12\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&4&2&-50\\-\frac{3}{5}&0&8&1&40\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}10&5&-5&6&80\\\frac{1}{10}&\frac{15}{2}&\frac{5}{2}&\frac{12}{5}&12\\-\frac{3}{5}&0&5&\frac{23}{5}&40\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&-\frac{96}{25}&-50\end{array}\right]$$

则有 $L=\begin{bmatrix}1&&&\\\frac{1}{10}&1&&\\-\frac{3}{5}&0&1&\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&1\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}10&5&-5&6\\&\frac{15}{2}&\frac{5}{2}&\frac{12}{5}\\&&5&\frac{23}{5}\\&&&-\frac{96}{25}\end{bmatrix}$

令 $Ly=b \Rightarrow y_1=80 \quad y_2=4 \quad y_3=88 \quad y_4=-138$

令 $Ux=y \Rightarrow x_1=-\frac{1471}{80} \quad x_2=-\frac{93}{16} \quad x_3=-\frac{1237}{80} \quad x_4=\frac{575}{16}$

2.2.3 追赶法

P45. 8.

解

$$A=\begin{bmatrix}8&-1&&&\\2&8&1&&\\&1&8&-1&\\&&2&8&1\\&&&1&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1&&&&\\2&d_2&&&\\0&1&d_3&&\\0&0&2&d_4&\\0&0&0&1&d_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\beta_1&0&0&0\\&1&\beta_2&0&0\\&&1&\beta_3&0\\&&&1&\beta_4\\&&&&1\end{bmatrix}$$

有 $d_1=8 \quad d_2=\frac{33}{4} \quad d_3=\frac{260}{33} \quad d_4=\frac{1073}{130} \quad d_5=\frac{8454}{1073}$

$\beta_1=-\frac{1}{8} \quad \beta_2=\frac{4}{33} \quad \beta_3=-\frac{33}{260} \quad \beta_4=\frac{130}{1073}$

令 $Ly=b \Rightarrow y_1=0.275 \quad y_2=-0.375 \quad y_3=1.096 \quad y_4=0.742 \quad y_5=-0.640$

令 $Ux=y \Rightarrow x_1=0.210 \quad x_2=-0.520 \quad x_3=1.200 \quad x_4=0.820 \quad x_5=-0.640$

很是精确

2.3 病态线性方程组

11.

证明.

$Ax^* = b \Rightarrow \|x^*\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|} \Rightarrow \frac{1}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}$

$A\tilde{x} = b - r = Ax^* - r \Rightarrow A(x^* - \tilde{x}) = r \Rightarrow x^* - \tilde{x} = A^{-1}r \Rightarrow \|x^* - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|r\|$

故 $\frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|b\|} = cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$

12.

解 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -9800 & 9900 \\ 9900 & -10000 \end{bmatrix}$

$cond(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 1.99 \times 19900 = 39601$

(2) $\tilde{x} = (1, 0)^T$ 时 $A\tilde{x} = (1, 0.99)^T \Rightarrow r = b - A\tilde{x} = (0, 0.01)^T$

(3) $\tilde{x} = (100.5, -99.5)^T$ $A\tilde{x} = (1.995, 1.985)^T \Rightarrow r = b - A\tilde{x} = (0.995, -0.985)^T$

本题计算结果说明 近似解的选择会对最后迭代得到的解有影响.