3.7 Möbius反演

$$= n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\varphi(n)$$

【定理3-7-2】Möbius反演定理

设$f(n)$和$g(n)$是定义在正整数集合上的两个函数，若$f(n)=\sum_{d|n} g(d)$，则$g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f(\frac{n}{d})$，反之亦然。

证明：$\xRightarrow{\text{必要性}}$ 首先，$f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d_1|\frac{n}{d}} g(d_1)$，因为$d_1|\frac{n}{d}$，故$d_1dm=n$，从而$d|\frac{n}{d_1}$。这样，

3.7 Möbius反演

$$\sum_{d|n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d_1|\frac{n}{d}}g(d_1)=\sum_{d|n}\sum_{d_1|\frac{n}{d}}\mu(d)g(d_1)$$

$$=\sum_{d_1|n}\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)g(d_1)=\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)$$

由前定理可知：

$\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=d_1\\ 0, & n>d_1\end{cases}$，即有

$$\sum_{d_1|n}g(d_1)\sum_{d|\frac{n}{d_1}}\mu(d)=g(n)$$

3.7 Möbius反演

充分性 $\Longleftarrow$ **首先有：** $g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu(d_1) f\left(\frac{n}{dd_1}\right) = \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1)$

这样，

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1)$$

$$= \sum_{d_1|n} \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) f(d_1) =$$

$$\sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu\left(\frac{n}{dd_1}\right) = f(n)$$

3.7 *Möbius*反演

【练习1】再看$\varphi(n)=n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)n}{d}$, 很容易看出：

$$f\left(\frac{n}{d}\right)=\frac{n}{d}$$

故，$n=f(n)=\sum_{d|n}\varphi(d)=\sum_{d|n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$

【练习2】$f(n)=\sum_{d|n}d$；$f(n)=\sum_{d|n}1$

3.8 鸽巢原理

鸽巢原理是组合数学中最简单也是最基本的原理，也叫抽屉原理。即“若有n个鸽子巢，n+1个鸽子，则至少有一个巢内有至少有两个鸽子。”

【例17-1】367人中至少有２人的生日相同。

【例17-2】10双手套中任取11只，其中至少有两只是完整配对的。

【例17-3】参加会议的n人中至少有２人认识的别的参会者的人数相等。

【例17-4】给定5个不同的正整数，其中至少有3个数的和被3整除。

3.8 鸽巢原理

【例17-5】从1到2n的正整数中任取n+1个，则这n+1个数中，至少有一对数，其中一个是另一个的倍数。

证明：设$n+1$个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$。每个数去掉一切2的因子，直至剩下一个奇数为止。组成序列 $r_1, r_{2,}, \ldots, r_{n+1}$。这$n+1$个数仍在$[1, 2n]$中，且都是奇数。而$[1, 2n]$中只有$n$个奇数。故必有$r_i = r_j = r$, 则$a_i = 2^{\alpha i} r$, $a_j = 2^{\alpha j} r$，若$a_i > a_j$，则 a_i是aj的倍数。

【例17-6】设 $a_1, a_2, \cdots, am$是正整数序列，则至少存在k和l，$1 \leq k \leq l \leq m$，使得和$a_{k+1} + \cdots + al$是m的倍数。

证明：设$S_k = \sum a_i$，$S_h \equiv r_h$ (mod m), $0 \leqslant r_h \leqslant m-1$，$h = 1, 2, \cdots, m$。若存在l，$S_l \equiv 0$ （mod m）则命题成立．否则，$1 \leqslant r_h \leqslant m-1$．但$h = 1, 2, \cdots, m$．由鸽巢原理，故存在$r_k = rh$, 即$S_k \equiv S_h$，不妨设$h > k$．则 $S_h - Sk = ak_{+1} + ak_{+2} + \ldots + ah_{\equiv} 0 \bmod m$

3.8 鸽巢原理

【例17-7】设a_1, a_2, a_3为任意3个整数，$b_1b_2b_3$为a_1, a_2, a_3的任一排列，则$a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$中至少有一个是偶数。

证明:

由鸽巢原理，a_1, a_2, a_3必有两个同奇偶．设这3个数被2除的余数为xxy，于是b_1, b_2, b_3中被2除的余数有2个x，一个y．这样$a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$被2除的余数必有一个为0。

【例17-8】设$a_1, a_2, \cdots, a_{100}$是由1和2组成的序列，已知从其任一数开始的顺序10个数的和不超过16．即$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9} \leqslant 16$，$1 \leqslant i \leqslant 91$。则至少存在h和k，k > h，使得$a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$。

3.8 鸽巢原理

证明:

令 $S_j = \sum a_i$, j =1 ，2 ，… ，100 显然 $S_1<S_2<\cdots<S_{100}$，且 $S_{100} = (a_1 + \cdots +a_{10})+ (a_{11} + \cdots +a_{20})+\cdots + (a_{91} + \cdots +a_{100})$

根据假定有 $S_{100}\leqslant 10\times 16 = 160$ 作序列 S_1，S_2，…，S_{100}，$S_1 +39$，…，$S_{100}+39$ 共200项．其中最大项 $S_{100}+39\leqslant 160+39$ 由鸽巢原理，必有两项相等．而且必是前段中某项与后段中某项相等．设 $S_k = S_h + 39$，$k>h$ $S_k - S_h =39$ 即 $a_h + a_{h+1} +\cdots + a_k = 39$。

【练习】把5个顶点放入边长为2的正方形，则至少有两个点之间的距离小于等于$\sqrt{2}$。

3.8 鸽巢原理

【例17-7】设a_1, a_2, a_3为任意３个整数，$b_1b_2b_3$为a_1, a_2, a_3的任一排列，则$a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$中至少有一个是偶数。

证明：

由鸽巢原理，a_1, a_2, a_3必有两个同奇偶．设这３个数被２除的余数为xxy，于是b_1, b_2, b_3中被２除的余数有２个x，一个y．这样$a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3$被２除的余数必有一个为0。

【例17-8】设$a_1, a_2, \cdots, a_{100}$是由1和２组成的序列，已知从其任一数开始的顺序10个数的和不超过16．即$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9} \leqslant 16$，$1 \leqslant i \leqslant 91$。则至少存在$h$和$k$，$k > h$，使得$a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$。

3.8 鸽巢原理

证明：

令 $S_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$，$j = 1, 2, \ldots, 100$，显然$S_1 < S_2 < \ldots < S_{100}$，且$S_{100} = (a_1 + \ldots + a_{10}) + (a_{11} + \ldots + a_{20}) + \ldots + (a_{91} + \ldots + a_{100})$

根据假定有 $S_{100} \le 10 \times 16 = 160$ 作序列 $S_1, S_2, \ldots, S_{100}, S_1 + 39, \ldots, S_{100} + 39$ 共200项。其中最大项$S_{100} + 39 \le 160 + 39$由鸽巢原理，必有两项相等。而且必是前段中某项与后段中某项相等。设 $S_k = S_h + 39$，$k > h$，$S_k - S_h = 39$，即 $a_h + a_{h+1} + \ldots + a_k = 39$。

【练习】把5个顶点放入边长为2的正方形，则至少有两个点之间的距离小于等于$\sqrt{2}$。

3.8 鸽巢原理

鸽 巢 原 理 二　　设k和n都是任意正整数，若至少有$kn+1$只鸽子分配在n个鸽巢中，则至少存在一个鸽巢中至少有$k+1$只鸽子。

或者：若$m_1, m_2, \ldots, m_n$是正整数，且$m_1+m_2+\ldots+m_n-n+1$只鸽子住进n个鸽笼，则第一个鸽笼至少有m_1只鸽子，…第n个鸽笼至少有m_n只鸽子，至少其中之一必然成立。

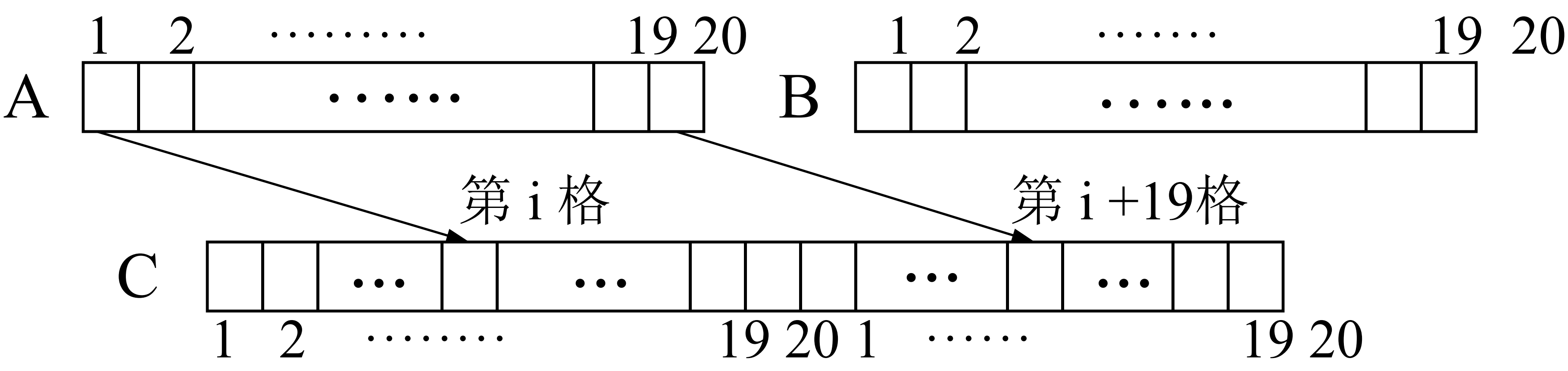
推论1　m只鸽子，n个鸽巢，则至少有一个鸽巢中有不少于$\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$只鸽子。

推论2　若取n(m−1)+1个球放进n个盒子，则至少有一个盒子有m个球。

推论3　若$m_1, m_2, \ldots, m_n$是正整数，且$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}$>r－1,则$m_1, \ldots, m_n$至少有一个不小于r。

3.8 鸽巢原理

【例18】设$A = a_1a_2\cdots a_{20}$是10个0和10个1 组成的二进制数。$B = b_1b_2\cdots b_{20}$是任意的二进制数。$C = b_1b_2\cdots b_{20}\,b_1b_2\cdots b_{20} = C_1C_2\cdots C_{40}$，则存在某个$i$，$1 \le i \le 20$，使得$C_iC_{i+1}\ldots C_{i+19}$与$a_1a_2\cdots a_{20}$至少有10位对应相等。



3.8 鸽巢原理

证明： 在$C = C_1C_2\cdots C_{40}$中，当 i 遍历1，2，…，20时，每一个b_j历遍 $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$。因A中有10个0和10个1，每一个b_j都有10位次对应相等。从而当i历遍1, …, 20时，共有10×20=200位次对应相等。故对每个i平均有200/20 = 10位相等，因而对某个i 至少有10位对应相等。

定理 若序列$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}\}$中的各数是不等的。$m, n$ 是正整数，则S有一长度为$m+1$的严格增子序列或长度为$n+1$的减子序列，而且S有一长度为$m+1$的减子序列或长度为$n+1$的增子序列。

3.8 鸽巢原理

证明： 由S中的每个a_i向后选取最长增子序列，设其长度为l_i，从而得序列$L=\{l_1, l_2, \dots, l_{mn+1}\}$。若存$l_k \geq m+1$，则结论成立。

否则所有的$l_i \in [1, m]$，其中必有$\left\lfloor \frac{mn+1-1}{m} \right\rfloor + 1 = n+1$个相等。

设$l_{i_1} = l_{i_2} = \dots = l_{i_n} = l_{i_{n+1}}$，不妨设$i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$

应有$a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_{n+1}}$，即有一长度为$n+1$的减子列。否则，不妨设$a_{i_1} < a_{i_2}$，则有$l_{i_1} > l_{i_2}$，矛盾。

3.8 鸽巢原理

【例19】 将[1，67]划分为4个子集，必有一个子集中有一数是同子集中的两数之差。

证明：反证法，设此命题不真，即存在划分$P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = [1, 67]$，$P_i$中不存在一个数是$P_i$中两数之差，$i = 1,2,3,4$。因$\left\lfloor\frac{67-1}{4}\right\rfloor$ +1= 17，故有一子集，其中至少有17个数，设这17个数从小到大为$a_1, \ldots, a_{17}$。不妨设$A = \{a_1, \ldots, a_{17}\}$包含于$P_1$。令$b_{i-1} = a_i - a_1$，$i = 2, \cdots, 17$。

设 $B = \{b_1, \ldots b_{16}\}$，$B$包含于$[1, 67]$。由反证法假设$B \cap P_1 = \emptyset$。因而

B包含于$P_2 \cup P_3 \cup P_4$。因为$\left\lfloor\frac{16-1}{3}\right\rfloor + 1 = 6$，不妨设$\{b_1, \cdots, b_6\}$包含于$P_2$，

3.8 鸽巢原理

令$C_{i-1} = b_i - b_1$，$i = 2$，…，6

设$C = \{C_1, \cdots, C_5\}$，C包含于$[1, 67]$

由反证法假设$C \cap (P_1 \cup P_2) = \emptyset$，故有

C包含于$P_3 \cup P_4$

因为$\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$，不妨设$\{C_1, C_2, C_3\}$包含于$P_3$，

令 $d_{i-1} = C_i - C_1$，$i = 2, 3$

设 $D = \{d_1, d_2\}$，D包含于$[1, 67]$。

由反证法假设 $D \cap (P_1 \cup P_2 \cup P_3) = \emptyset$，因而

D包含于P_4

由反证法假设 $d_2 - d_1 \in P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$，

故 $d_2 - d_1 \in [1, 67]$，但显然$d_2 - d_1 \in [1, 67]$，

矛盾。

3.8 鸽巢原理(练习)

1. 任取8个数，求证其中至少有两个数，差是7的倍数。
2. 将1，2，…10随机摆成一个圆圈，必有某三个相邻数之和大于等于17。
3. 一个抽屉中有20件衣服，其中4件是蓝色的，7件是黑色的，9件是红色的，试问应当从中随意取多少件才能保证有4件是同色的？
4. 边长为1的正方形内任取9点，试证存在3个不同的点，由此构成的三角形面积不超过1/8。

3.9 Ramsey问题

1．Ramsey问题

Ramsey问题可以看成是鸽巢原理的推广。下面举例说明Ramsey问题。

【例20】6个人中至少存在３人相互认识或者相互不认识。

证明：这个问题与K_6的边２着色存在同色三角形等价。假定用红蓝着色。

设K_6的顶点集为$\{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$，$d_r(v)$表示与顶点$v$ 关联的红色边的条数，$d_b(v)$表示与v关联的蓝色边的条数。

在K_6中，有$d_r(v)+d_b(v)=5$，由鸽巢原理可知，至少有３条边同色。将证明过程用判断树表示如下：

3.9 Ramsey问题

$d_r(v_1) \geq 3?$

N / Y

$d_b(v_1) \geq 3$

设(v_1v_2) (v_1v_3) (v_1v_4)为红边

设(v_1v_2) (v_1v_3) (v_1v_4)为蓝边

$\triangle v_2v_3v_4$是蓝△？

N / Y

$\triangle v_2v_3v_4$是红△？

设(v_2v_3)是红边　√

N / Y

$\triangle v_1v_2v_3$是红△

设(v_2v_3)是蓝边　√

$\triangle v_1v_2v_3$是蓝△

3.9 Ramsey问题

２．若干推论

（a） K_6的边用红蓝任意着色，则至少有两个同色的三角形。

证明： 由前定理知，有同色三角形，不妨设$\triangle v_1v_2v_3$是红色三角形可由如下判断树证明。

3.9 Ramsey问题

- $d_r(v_1) \ge 3$?
  - y: 设(v_1v_4)为红边
    - (v_4v_2) (v_4v_3) 蓝边?
      - 设(v_4v_2)为红边
        - $\triangle v_1v_2v_4$是红$\triangle$
      - y: $d_b(v_4) \ge 3$?
        - n: $d_r(v_4) \ge 3$
          - (v_4v_5) (v_4v_6)为红边
            - $\triangle v_1v_5v_6$是蓝$\triangle$?
              - n: (v_5v_6)为红边
                - $\triangle v_4v_5v_6$是红$\triangle$
              - y: √
        - y: (v_4v_5)为蓝边
          - $\triangle v_2v_3v_5$是红$\triangle$?
            - n: (v_2v_5)为蓝边
              - $\triangle v_2v_4v_5$是蓝$\triangle$
            - y: √
  - n: $d_b(v_1) \ge 3$
    - (v_1v_4) (v_1v_5) (v_1v_6)为蓝边
      - $\triangle v_4v_5v_6$是红$\triangle$?
        - y: √
        - n: (v_4v_5)为蓝边
          - $\triangle v_1v_4v_5$是蓝$\triangle$

3.9 Ramsey问题

$(b)K_9$的边红蓝两色任意着色，则必有红K_4或蓝色三角形(蓝K_4或红色三角形).

证明：设9个顶点为$v_1, v_2, \cdots, v_9$。对９个顶点的完全图的边的红、蓝2着色图中，必然存在 v_i，使得

$d_r(v_i) \neq 3$ 。否则，红边数$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} d_r(v_i) = \frac{27}{2}$，这是不可能的。不妨设$d_r(v_1)\neq3$，可得如下判断树证明结论。

3.9 Ramsey问题

$d_r(v_1) \geq 4?$

N：$d_b(v_1) \geq 6$

$(v_1v_2) \cdots (v_1v_7)$是6条蓝边

$K_6(v_2 \cdots v_7)$中有红△？

N：设△$v_2v_3v_4$是蓝△

$K_4(v_1v_2v_3v_4)$是蓝K_4

Y：√

Y：$(v_1v_2)\ (v_1v_3)\ (v_1v_4)(v_1v_5)$是4红边

$K_4(v_2v_3v_4v_5)$是蓝K_4？

N：设(v_2v_3)是红边

△$v_1v_2v_3$是红△

Y：√

3.9 Ramsey问题

∵ K_9的边红、蓝２着色，必有红色三角形或蓝色K_4。

同理可证 K_9的红、蓝２着色，必有蓝色三角形或红色K_4。

(红△∨蓝K_4)∧(蓝△∨红K_4)

＝存在同色K_4或红△及蓝△

＝同色K_4∨(红△∧蓝△)

3.9 Ramsey问题

（c）K_{18}的边红，蓝２着色，存在红K_4或蓝K_4 。

证明：设18个顶点为v_1，v_2，⋯，v_{18}。从v_1引出的17条边至少有９条是同色的，不妨先假定为红色。从而可得下面的判断树证明命题。

3.9 Ramsey问题

$d_r(v_1) \geq 9$

N

Y

$d_b(v_1) \geq 9$

$(v_1v_2)\cdots(v_1v_{10})$是红边

$(v_1v_2)\cdots(v_1v_{10})$是蓝边

$K_9(v_2\cdots v_{10})$中有同色K_4或红△加蓝△

$K_9(v_2\cdots v_{10})$中有同色K_4或红△加蓝△

$K_{10}(v_1v_2\cdots v_{10})$中有同色$K_4$

$K_{10}(v_1v_2\cdots v_{10})$中有同色$K_4$

3.10 Ramsey数

将上一节的问题一般化：给定一对正整数a、b，存在一个最小的正整数r，对r个顶点的完全图的边任意红、蓝２着色，存在a个顶点的红边完全图或b个顶点的蓝边完全图。记为$r(a,b)$。比如：

r(3,3)＝6，r(3,4)＝9，r(4,4)＝18

1．Ramsey数的简单性质

定理　$r(a, b)= r(b, a)$；$r(a, 2)=a$

证明： $K_{r(a,b)}$的边红、蓝 2 着色，有红K_a或蓝K_b。将红蓝 2 色对换，就有红K_b或蓝K_a。

3.10 Ramsey数

设$r(a,b)=r$，K_r的边任意红蓝２着色红蓝互换后仍是K_r的边的２着色，由$r(a,b)$的定义，有红K_a或蓝K_b。再红蓝对换恢复原图有红K_b或蓝K_a。

容易理解，K_9的边任意红蓝２着色，有红三角形或蓝K_4。红蓝对换后，有蓝三角形或红K_4。

第二个等式容易看出。K_a红蓝２着色若不全红（红K_a)，则必有一条蓝边。

3.10 Ramsey数

定理：当$a,b\geq 2$时，

$$r(a,b)\leq r(a-1,b)+r(a,b-1)$$

证明：对$r(a-1,b)+r(a,b-1)$个顶点的完全图红蓝２着色。任取其中一点v，有$d_r(v)+d_b(v)=r(a-1,b)+r(a,b-1)-1$。2画出相应判定树即可。

推论：$r(a,b)\leq C(a+b-2,a-1)$

证明：使用数学归纳法

$$r(a,b)\leq r(a-1,b)+r(a,b-1)$$
$$\leq C(a+b-3,a-2)+C(a+b-3,a-1)$$
$$=C(a+b-2,a-1)$$

3.10 Ramsey数

２．Ramsey数的推广

若将２着色改为k着色，同色K_a或同色K_b改为同色K_{a_i}，$i=1,2,\ldots,k$。即得Ramsey数$r(a_1,a_2,\ldots,a_k)$。

对于给定的正整数$a_i(a_i\geq 2)$，$i=1,2,\ldots,k$。存在最小正整数r。对K_r的边用k中颜色$C_i(i=1,2,\ldots,k)$任意着色。则存在i，出现全C_i色的K_{a_i}。（即边都是C_i色的a_i个顶点的完全图）；这个最小正整数r用$r(a_1,\ldots,a_k)$表示。

3.10 Ramsey数

$$\mathrm{r}\,(a_1, a_2, \dots a_k) \le \mathrm{r}\,(a_1,\ \mathrm{r}\,(a_2,\ \dots,\ a_k)\,)$$

证明：

设$r(a_1, r(a_2, \dots, a_k)) = p$，$r(a_2, \dots, a_k) = q$；

对K_p的边２着色，出现第一色K_{a_1}或第二色K_q，用$k-1$中色对K_q的边着色，至少出现i色的a_i点完全图，$i = 2, \dots, n$。对K_p的边k着色，将后$k-1$中色看作同一种色，出现第一色K_{a_1}或另一色（$k-1$种色看作另一色）的K_q。即出现第i色K_{a_i}，$i = 2, \dots, n$。

故，$r(a_1, a_2, \dots, a_k) \le p$。