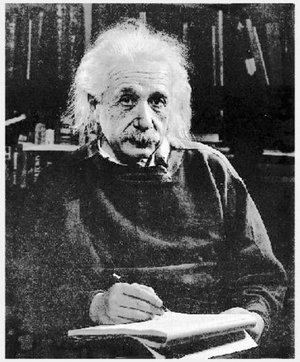
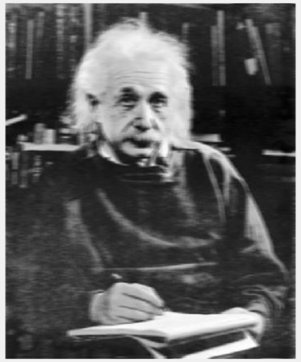
Discussion

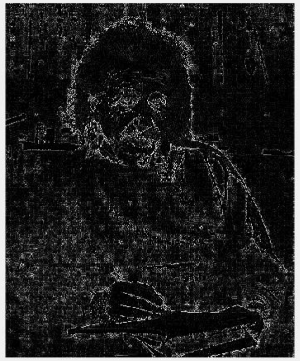
- 提取垂直边缘的卷积核（kernel）长什么样子？



原图



$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

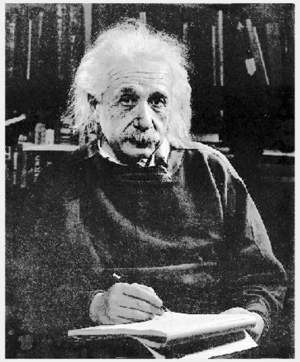


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

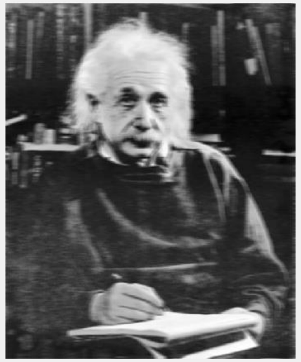
[?]

Discussion

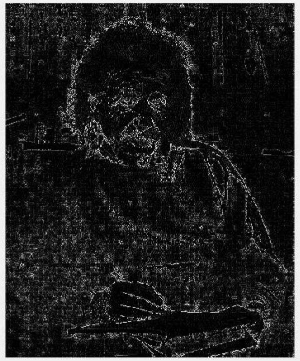
- 提取垂直边缘的卷积核（kernel）长什么样子？



原图



$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{10\times10}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ch3
频率域滤波

荆丽雯 助理教授
大数据与互联网学院

Part 1：
傅里叶变换

- 空间域的平滑和锐化，怎么实现？本质是什么?

Part 1：傅里叶变换

- 空间域的平滑和锐化，怎么实现？本质是什么?
  - 平滑（低通滤波器，降低灰度的急剧过度，平均，积分）
  - 锐化（高通滤波器，增强边缘，拉普拉斯算子，微分）

- 高低指的是什么？频率高低与空间域灰度特性如何对应？

Part 1：傅里叶变换

- 空间域的平滑和锐化，怎么实现？本质是什么?
  - 平滑（低通滤波器，降低灰度的急剧过度，平均，积分）
  - 锐化（高通滤波器，增强边缘，拉普拉斯算子，微分）

- 高低指的是什么？频率高低与空间域灰度特性如何对应？
  - 变化最慢的频率分量为**0**。
  - 低频对应于图像中变化缓慢的灰度分量。
  - 高频对应于图像中越来越快的灰度变化。

Part 1：
傅里叶变换

- 空间域的平滑和锐化，怎么实现？本质是什么?
  - 平滑（低通滤波器，降低灰度的急剧过度，平均，积分）
  - 锐化（高通滤波器，增强边缘，拉普拉斯算子，微分）

- 高低指的是什么？频率高低与空间域灰度特性如何对应？
  - 变化最慢的频率分量为**0**。
  - 低频对应于图像中变化缓慢的灰度分量。
  - 高频对应于图像中越来越快的灰度变化。

频率域可以完成空间域的处理，**and even better！**

Part 1：
傅里叶变换
（复数）

$$C = R + jI$$

- C复数， R实部，I虚部，$j = \sqrt{-1}$。

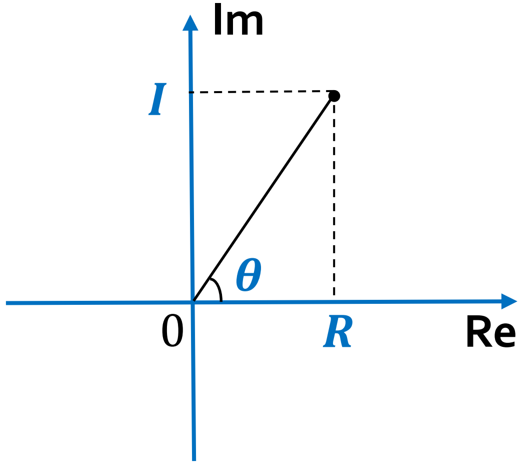
$$C = |C|(cos\theta + jsin\theta)$$

$$C = |C|e^{j\theta}$$

- 极坐标表示复数。

$$C^{*} = R - jI$$

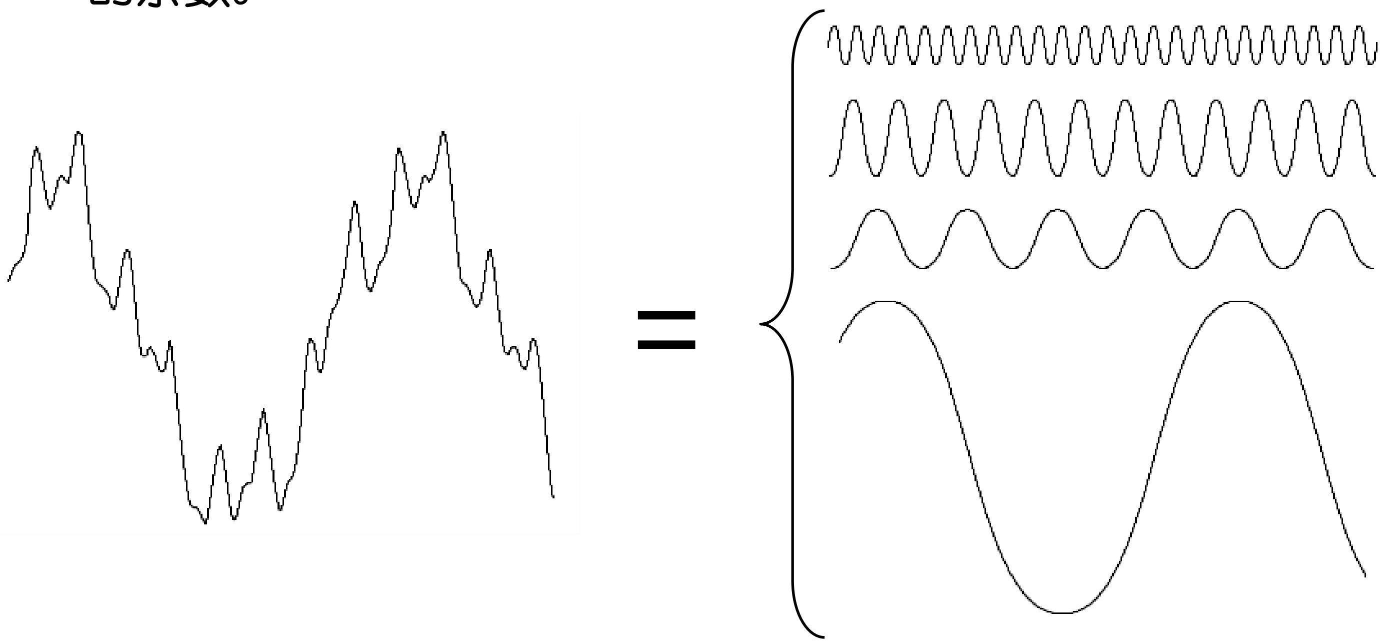
- 复数的共轭。



- Q:求1+j2的极坐标表示。
- A:$\sqrt{5}e^{j\theta}, \theta = 63.4°$或1.1弧度

Part 1：傅里叶变换

- 什么是傅里叶变换?
  - 法国数学家傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier）1822年在The Analytic Theory of Heat一书中首次提出。
  - 核心思想：任何周期函数都可以表示为不同频率的正弦函数和/或余弦函数之和，其中每个正弦函数和/或余弦函数都乘以不同的系数。



Part 1：傅里叶变换

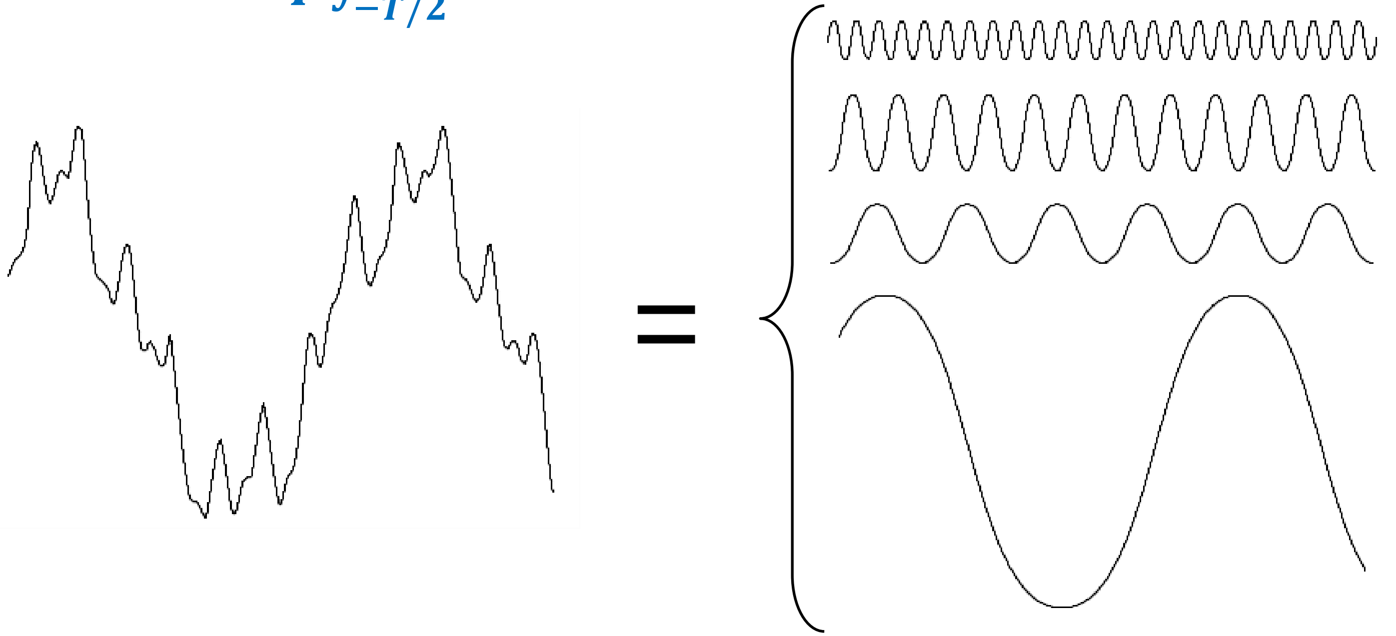
（傅里叶级数）

- 周期为T的周期函数$f(t)$可以表示为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt\,,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$



Part 1：
傅里叶变换
（傅里叶级数）

- 周期为T的周期函数$f(t)$可以表示为

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt\,,\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Q1：求 $f(t)=1$的傅里叶级数展开。

A1： $f(t)$ =1（$c_0=1$，其他$c_n=0$，只有直流分量）

Q2：求$f(t)=t,-\pi<t\leq\pi$ （$f(t)=f(t+2\pi)$）的傅里叶级数展开。

A2:$f(t)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}sin(nt)$

Part 1：
傅里叶变换
（连续单变量函数的傅里叶变换）

- 连续变量t的连续函数$f(t)$的傅里叶变换可以表示为

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$

Q1:求盒式函数的傅里叶变换： $f(t)=\begin{cases} A\,, -W/2 \le t \le W/2 \\ 0, \quad otherwise \end{cases}$

A1： $F(\mu)=AW\dfrac{sin(\pi\mu W)}{\pi\mu W}$

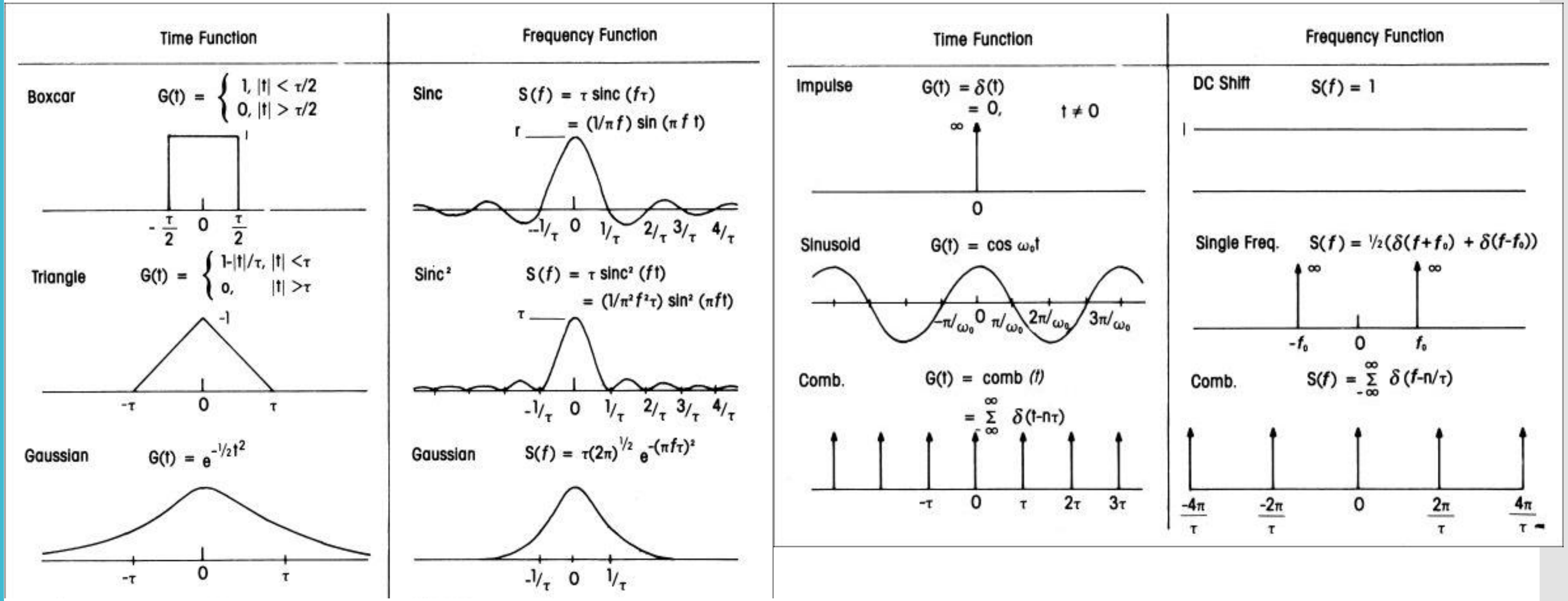
Q2:求冲激函数的傅里叶变换： $f(t)=\begin{cases} \infty\,, & t=0 \\ 0, & t\neq 0 \end{cases}$

A2： $F(\mu)=1$

Part 1：傅里叶变换（连续单变量函数的傅里叶变换）

- 连续变量t的连续函数$f(t)$的傅里叶变换可以表示为

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$



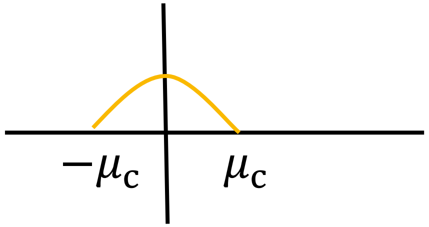
Part 1：
傅里叶变换
（连续单变量函数的傅里叶变换）

- 采样和采样函数的傅里叶变换

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\tau)$$

$$\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\tau}\right)$$

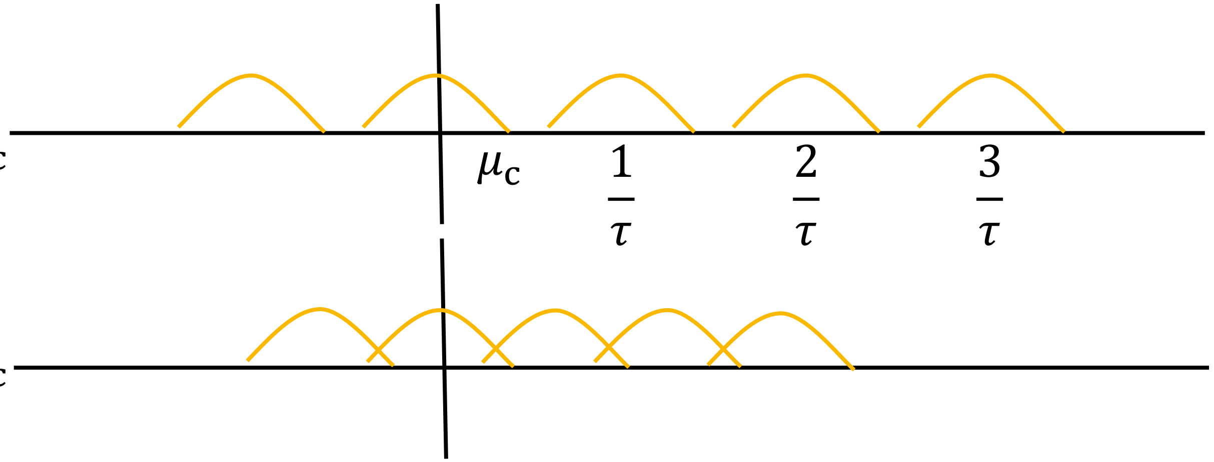
采样前，$F(\mu)$



采样后，$\tilde{F}(\mu)$

$\frac{1}{\tau} \geq 2\mu_c$

$\frac{1}{\tau} < 2\mu_c$

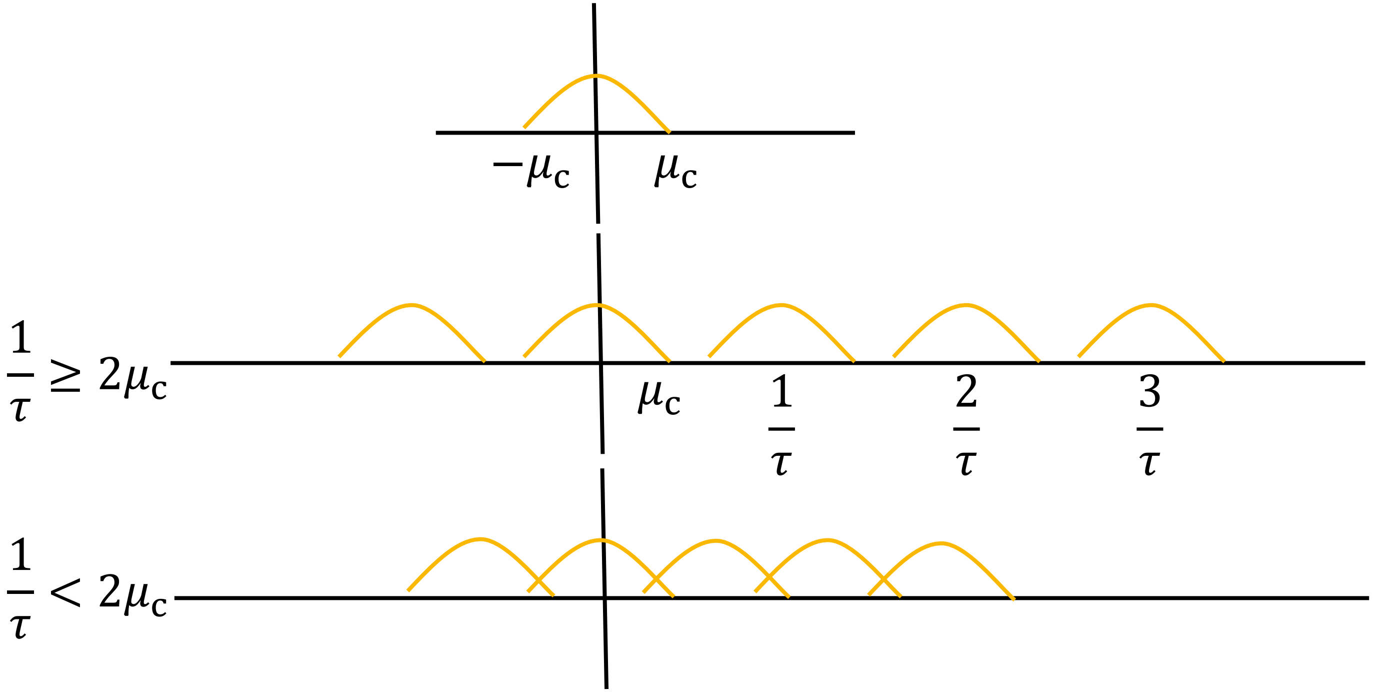


Part 1：

傅里叶变换

（连续单变量函数的傅里叶变换）

- 采样定理：如果以超过函数最高频率2倍的采样率来得到样本，那么连续带限函数就能够完全由其样本集合复原。否则将发生频谱混叠。
- 图中，μ_c表示带线信号的最高频率，$\frac{1}{\tau}$表示采样频率。



Part 1：
傅里叶变换
（连续单变量函数的离散傅DFT里叶变换）

- 由采样后的函数的连续傅里叶变换可以直接得到DFT

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\tau)$$

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-j2\pi\mu t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\tau)\ e^{-j2\pi\mu t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-n\tau)e^{-j2\pi\mu t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\tau}$$

如上，抽样函数的傅里叶变换是以1/τ为周期无限循环的，只需要在μ=0~μ=1/τ等间距取出M个样本，

$$\mu = \frac{m}{M\tau}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

Part 1：傅里叶变换

（连续单变量函数的离散傅DFT里叶变换）

- 由采样后的函数的连续傅里叶变换可以直接得到DFT
- 正变换DFT：

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M}, u = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

- 反变换IDFT：

$$f(x) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} F(u)e^{-j2\pi ux/M}, x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$$

Part 1：傅里叶变换（二维DFT）

- 二维离散傅里叶变换及其反变换
  - 二维离散傅里叶变换（DFT）

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

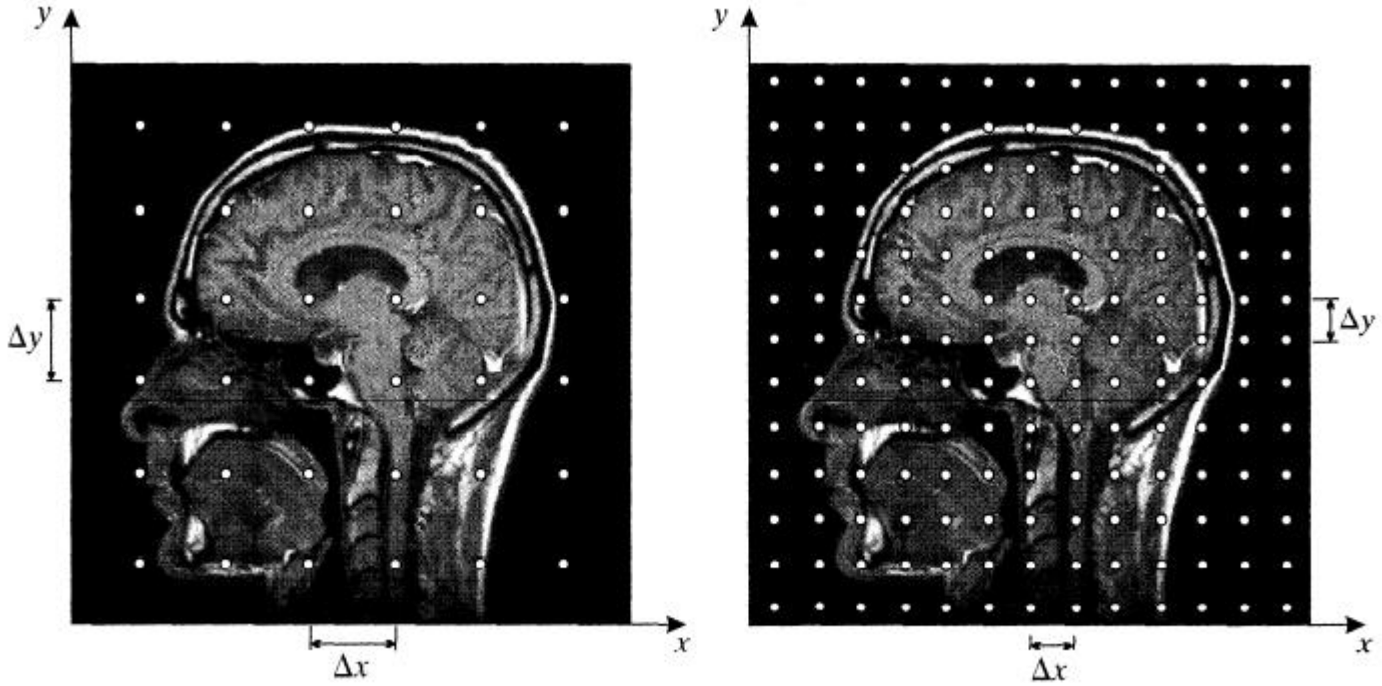
  - 二维离散傅里叶反变换（IDFT）

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

其中$f(x,y)$是大小为$M\times N$的数字图像。

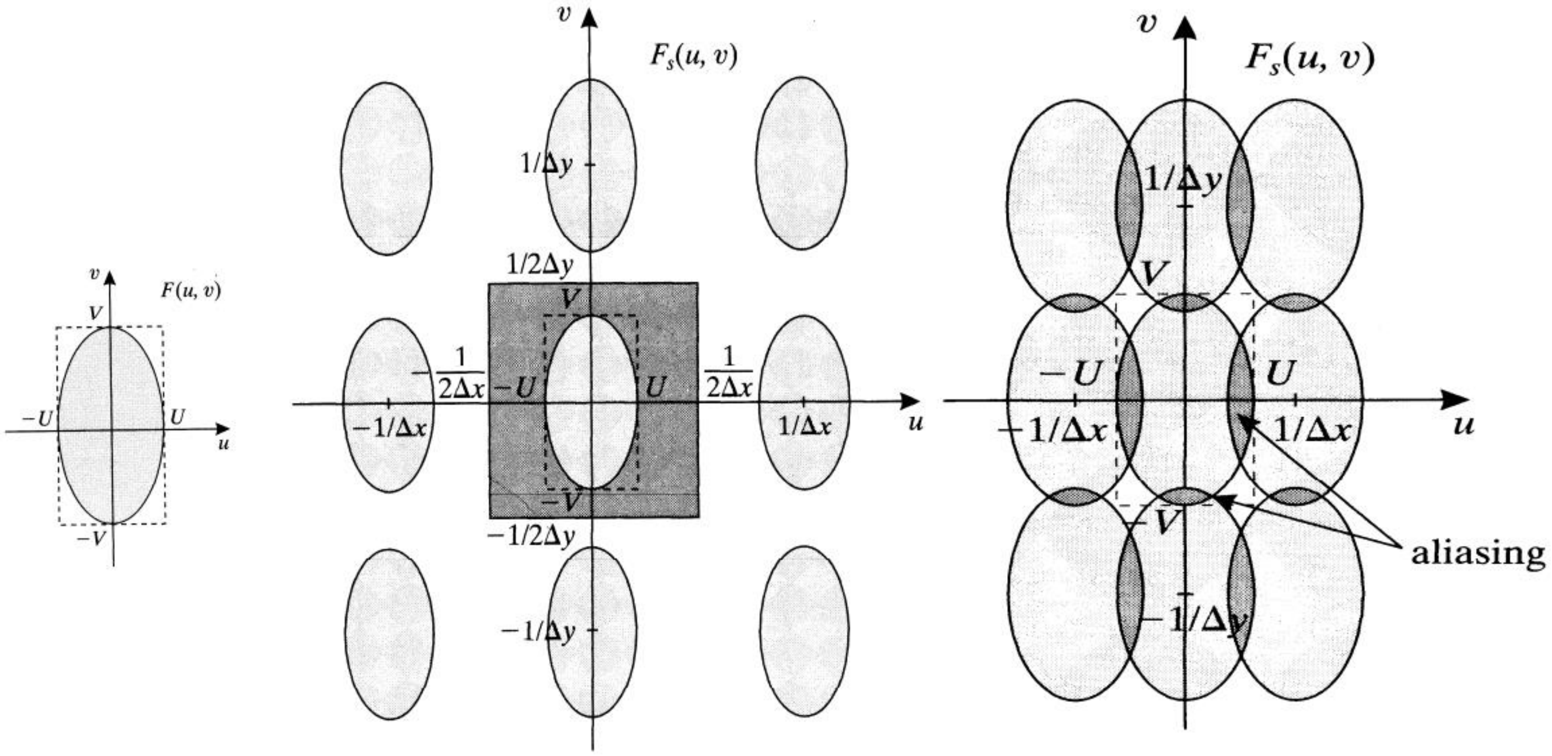
Part 1：傅里叶变换（二维DFT）

- 二维采样



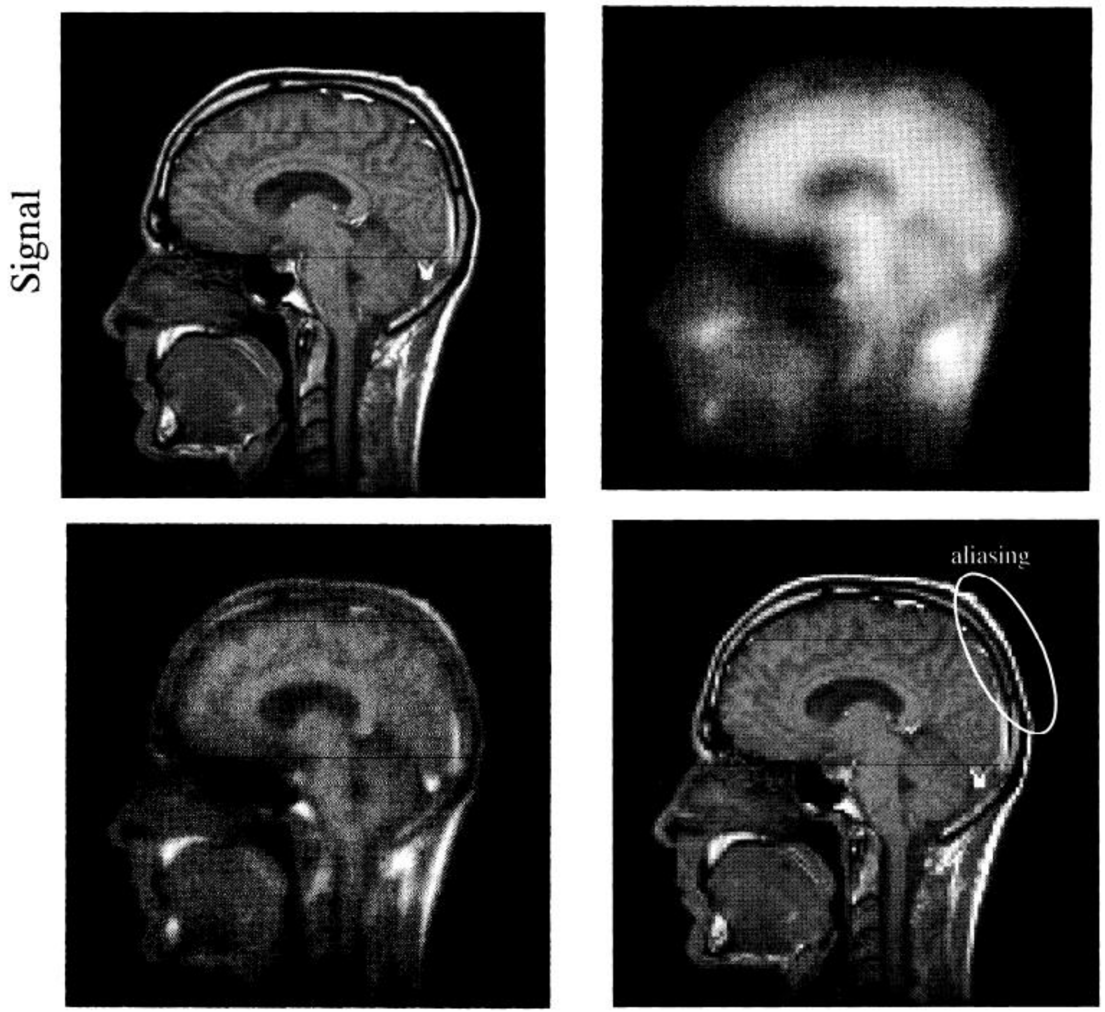
Part 1：
傅里叶变换
（二维DFT）

- 二维采样



Part 1：傅里叶变换（二维DFT）

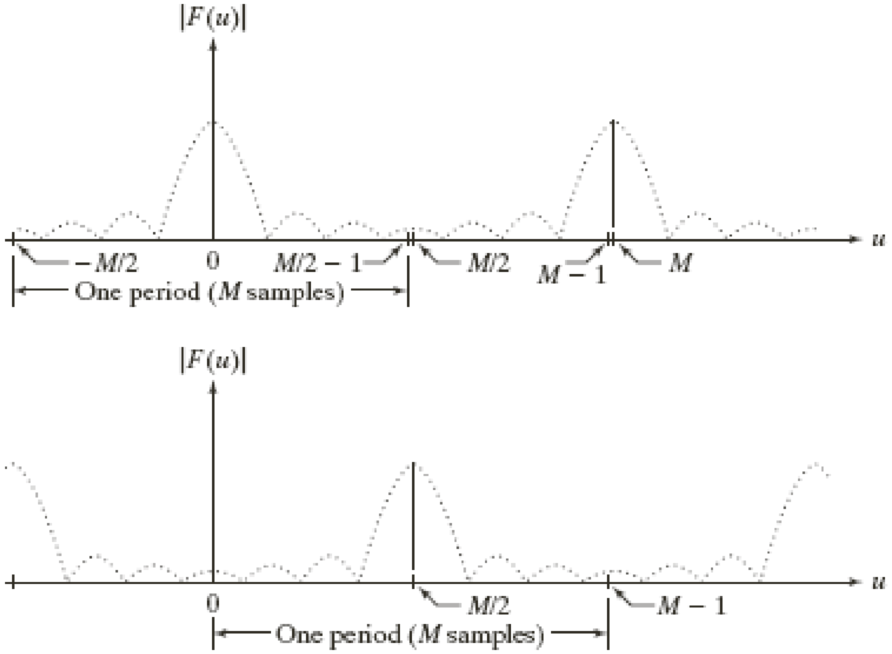
- 二维采样



Part 1：
傅里叶变换

- 二维离散傅里叶变换的周期性
- $F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$

$$F(u,v)=F(u+k_1M,v)=F(u,v+k_2N)=F(u+k_1M,v+k_2N)$$



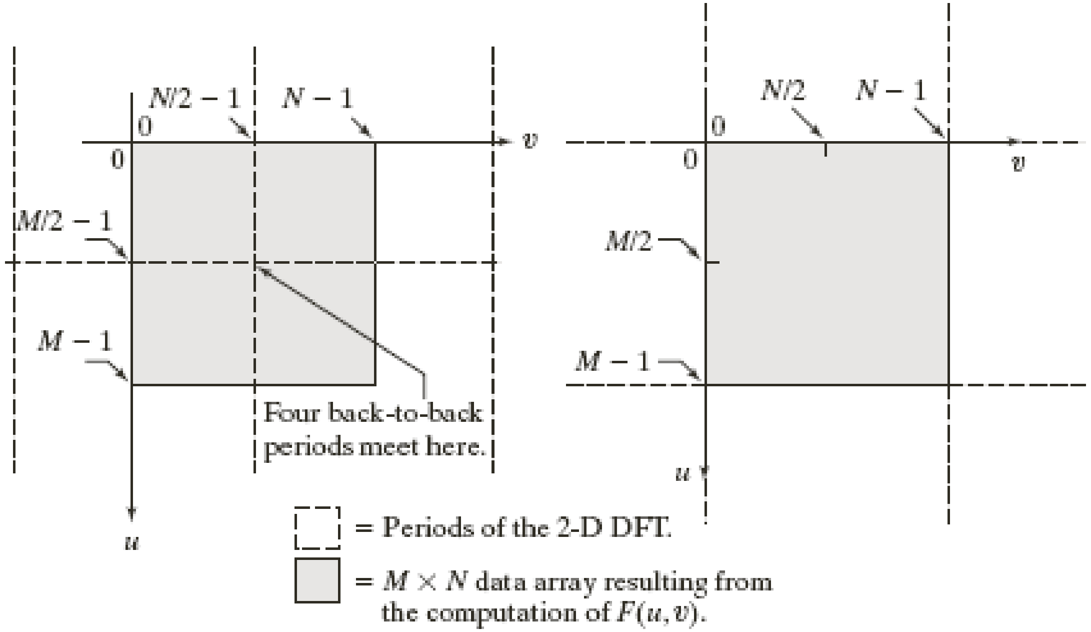
a
b

FIGURE 3.1 (a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M-1]$. (b) Centered spectrum in the same interval, obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ prior to computing the Fourier transform.

Part 1：
傅里叶变换

- 二维离散傅里叶变换的周期性

$$F(u,v)=F(u+k_1M,v)=F(u,v+k_2N)=F(u+k_1M,v+k_2N)$$



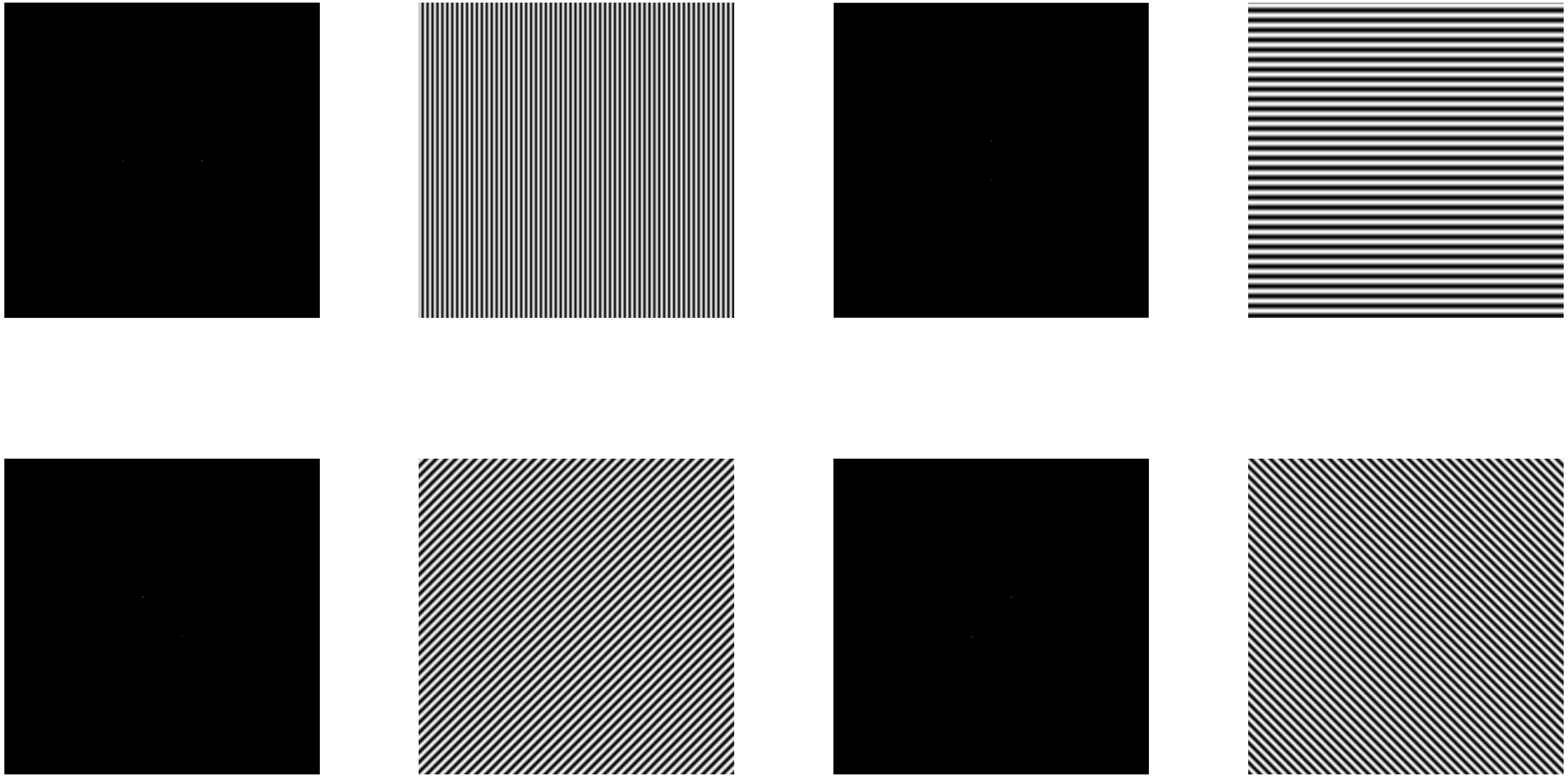
a b

FIGURE 3.2 (a) $M \times N$ Fourier spectrum (shaded), showing four back-to-back quarter periods. (b) Spectrum after multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ prior to computing the Fourier transform. The shaded period is the data that would be obtained by using the DFT.

Part 2：
图像的频率域变换

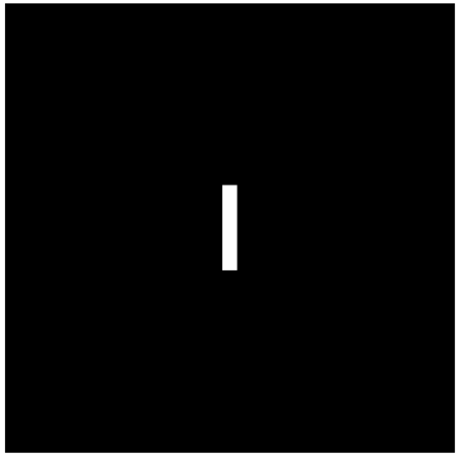
DIP4_2_5.m

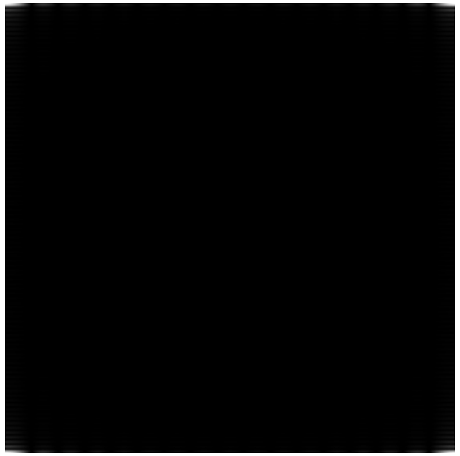
- 二维离散傅里叶变换、观察周期函数的频谱

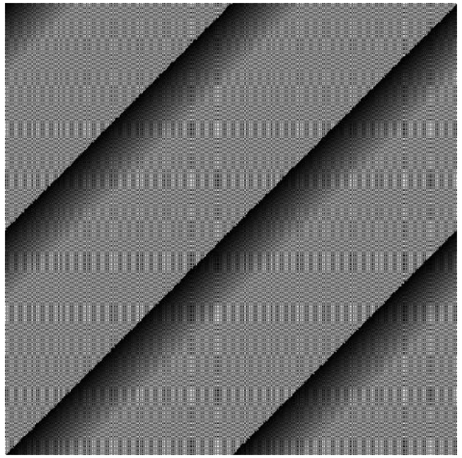


Part 2：图像的频率域变换

- 二维离散傅里叶变换
- MATLAB函数：fft2，fftshift
- 观察一个矩形函数的频谱，是两个方向的sinc函数


原图


傅里叶变换后幅度图

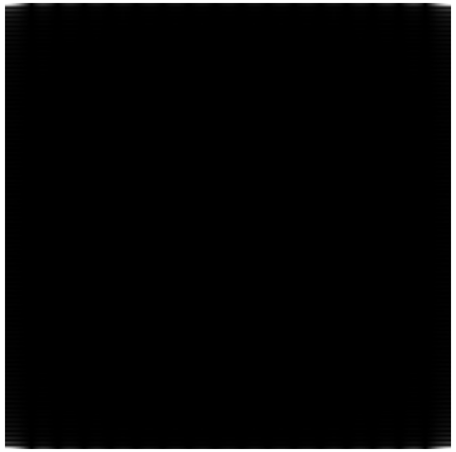

傅里叶变换后相位图

DIP3_2_1.m

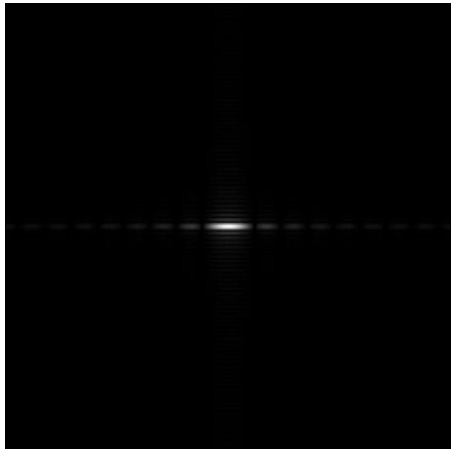
Part 2：

图像的频率域变换

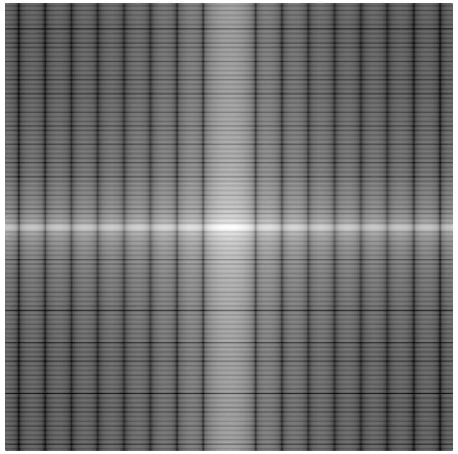
- 二维离散傅里叶变换
- **MATLAB函数：fft2，fftshift**



傅里叶变换后幅度图



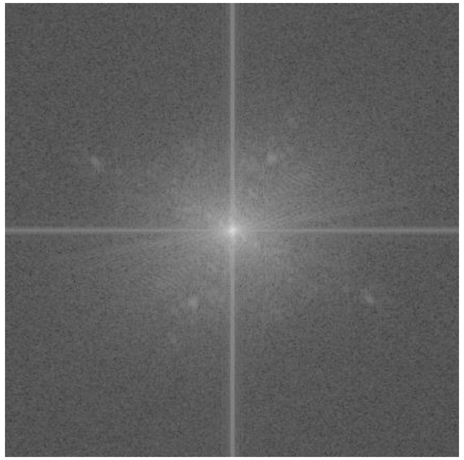
傅里叶变换+fftshift后幅度图



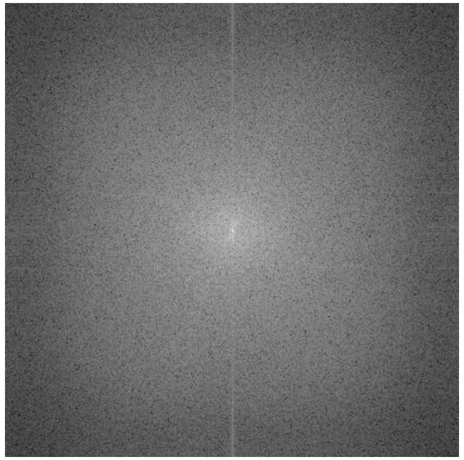
使用对数变换增强后的傅里叶幅度谱

DIP3_2_1.m

Part 2：
图像的频率域变换



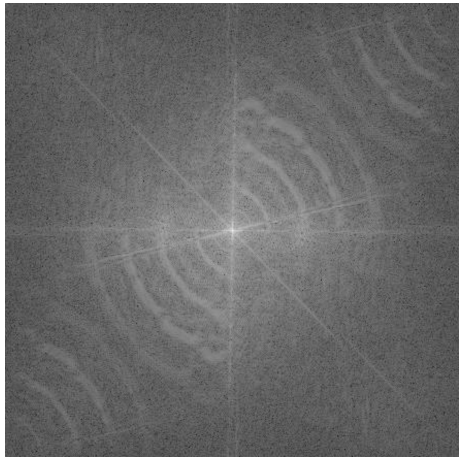
灰度较平坦图像



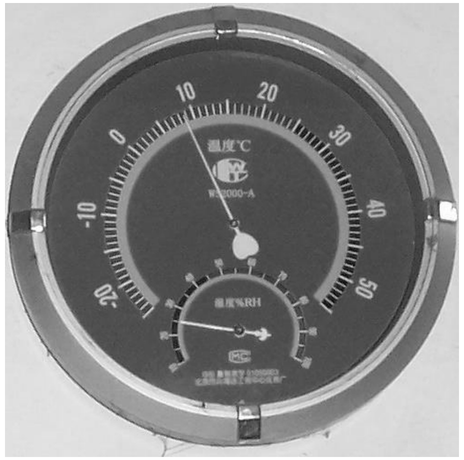
细节较丰富图像

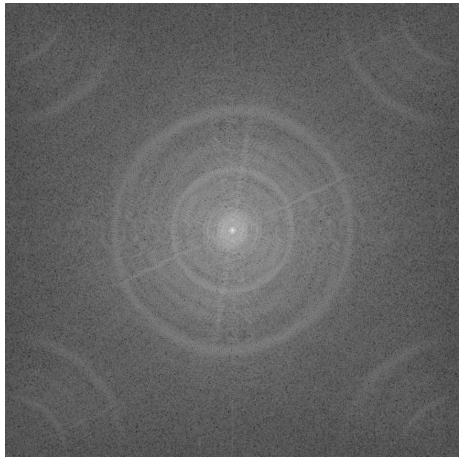
不同细节程度图像的傅里叶谱比较

Part 2：
图像的频率域变换



方形仪表指针图像





圆形仪表指针图像

突出频率特征的傅里叶谱

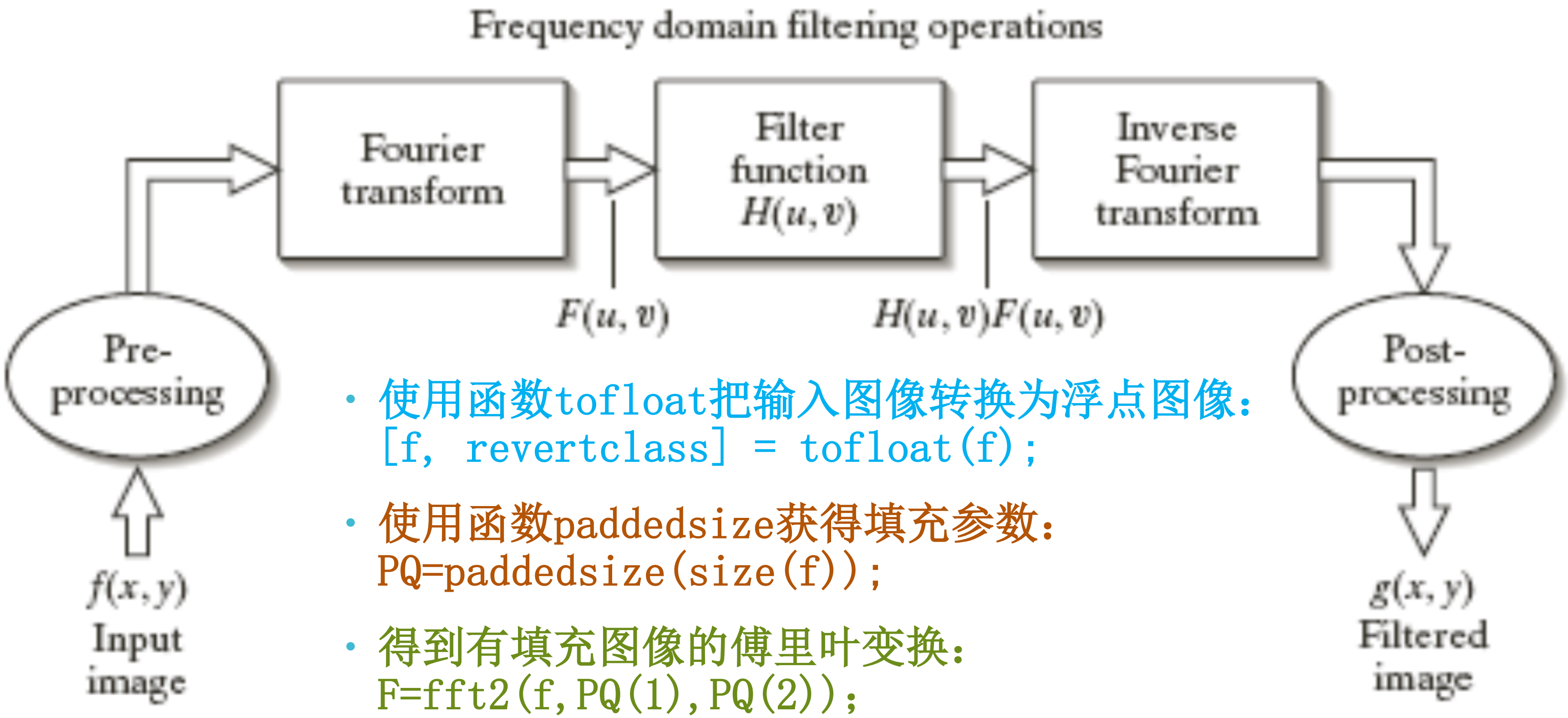
Part 3：频率域滤波

- 空间域滤波采用卷积运算，频率域滤波采用乘法运算。
- 卷积定理：

$$f(x,y) * h(h,y) <=> H(u,v)F(u,v)$$

$$f(x,y)h(h,y) <=> H(u,v) * F(u,v)$$

Part 3：频率域滤波



- 使用函数tofloat把输入图像转换为浮点图像：[f, revertclass] = tofloat(f);
- 使用函数paddedsize获得填充参数：PQ=paddedsize(size(f));
- 得到有填充图像的傅里叶变换：F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
- 生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数；
- 用滤波器乘以该变换：G=H.*F;
- 获得G的IFFT：g=ifft2(G);
- 将左上部的矩形裁剪为原始大小：g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
- 图像类型转换等。

Part 3：
频率域滤波

任务1： 使用函数paddedsize获得填充参数： PQ=paddedsize(size(f));

二维序列零延拓

设$f(x,y)$表示尺寸为$A\times B$的输入图像,$h(x,y)$表示尺寸为$C\times D$的卷积函数。在x和y方向上分别对行和列补零到相同的长度P和Q，满足

$$P \geqslant A+C-1,\ Q \geqslant B+D-1$$

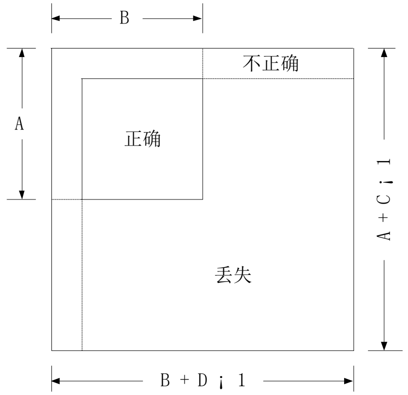
对$f(x,y)$和$h(x,y)$零延拓的扩展表示如下：

$$f_e(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & 0\leqslant x\leqslant A-1, 0\leqslant y\leqslant B-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

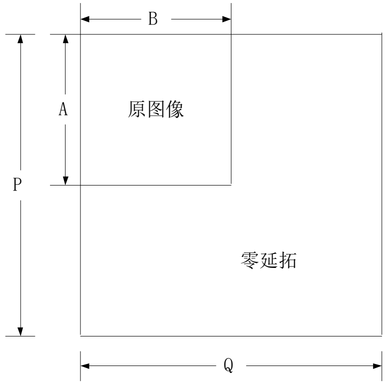
$$h_e(x,y)=\begin{cases} h(x,y), & 0\leqslant x\leqslant C-1, 0\leqslant y\leqslant D-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Part 3：
频率域滤波

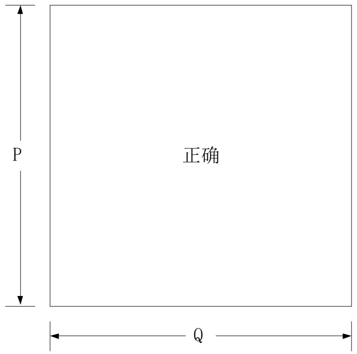
- 由卷积定理可知，在空域中输入图像与空域模板的卷积等效于在频域中图像频谱与频率响应函数的乘积。
- 零延拓是在频域中实现空域滤波的前提，若没有执行正确的扩展，则滤波结果就是错误的。
- 未经适当扩展的滤波图像与输入图像的尺寸相同，从图中可以看到，图像前面部分因混叠引入错误数据，后面部分则将丢失数据。



未扩展的频域滤波图像

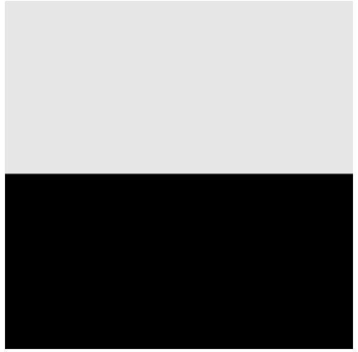


适当扩展的图像

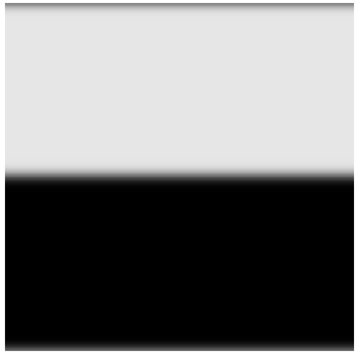


适当扩展的频域滤波图像

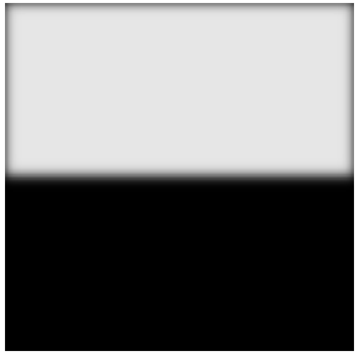
Part 3：
频率域滤波



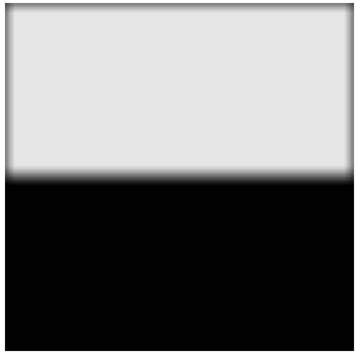
原图



无填充的低通滤波



有填充的低通滤波



imfilter函数
(空间滤波结果)

DIP3_2_2.m

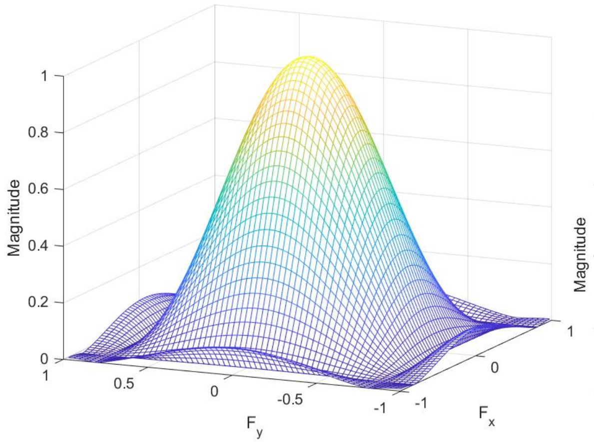
Part 3：频率域滤波

任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法1：从空间域生成，可以从空间卷积核直接生成

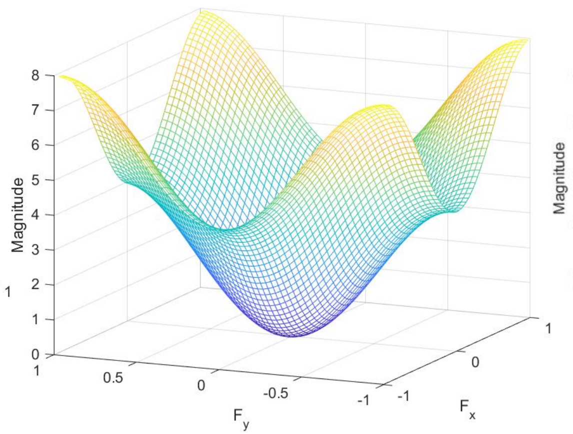
Matlab函数：fspecial&freqz2

高斯低通



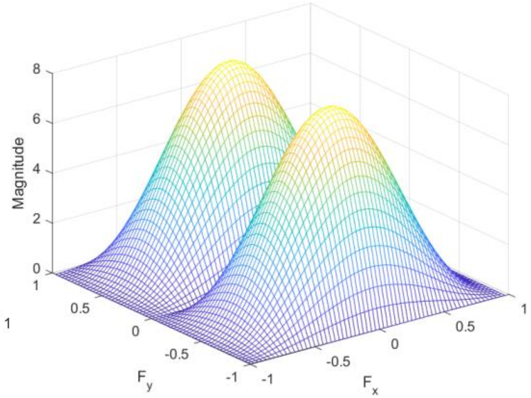
$$\begin{bmatrix} 0.0751 & 0.1238 & 0.0751 \\ 0.1238 & 0.2042 & 0.1238 \\ 0.0751 & 0.1238 & 0.0751 \end{bmatrix}$$

拉普拉斯高通



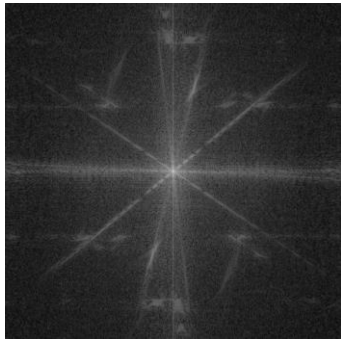
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sobel...



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

DIP3_2_3.m



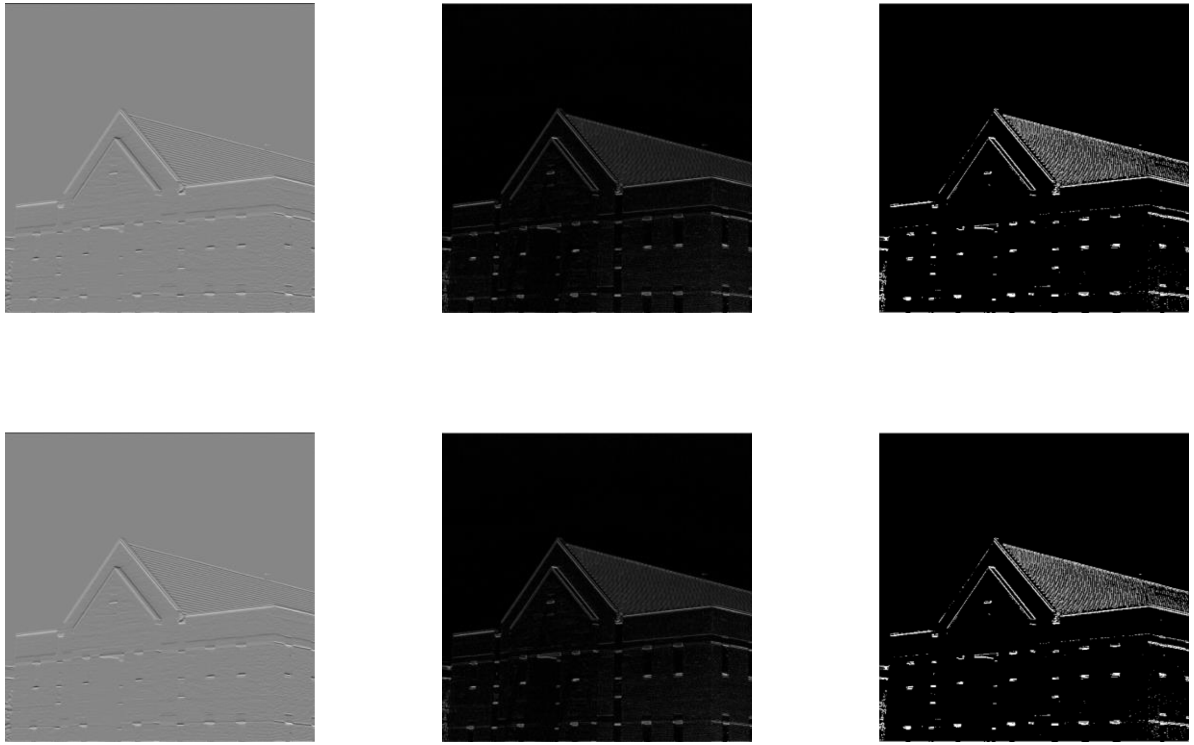
Part 3：
频率域滤波

DIP3_2_3.m

任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法1：从空间域生成，可以从空间卷积核直接生成

Matlab函数：fspecial&freqz2



空间域卷积
imfilter

频率域滤波
dftfilt

处理结果　　abs　　阈值处理

Part 3：
频率域滤波

任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法2：从频率域直接生成

MATLAB函数dftuv，hypot，lpfilter，hpfilter…

TABLE 3.1 Lowpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v)=\begin{cases}1 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 0 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$	$H(u,v)=\dfrac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$	$H(u,v)=e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

TABLE 3.2 Highpass filters. D_0 is the cutoff frequency and n is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{if } D(u,v)\le D_0\\ 1 & \text{if } D(u,v)>D_0\end{cases}$	$H(u,v)=\dfrac{1}{1+\left[D_0/D(u,v)\right]^{2n}}$	$H(u,v)=1-e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

Part 3：频率域滤波

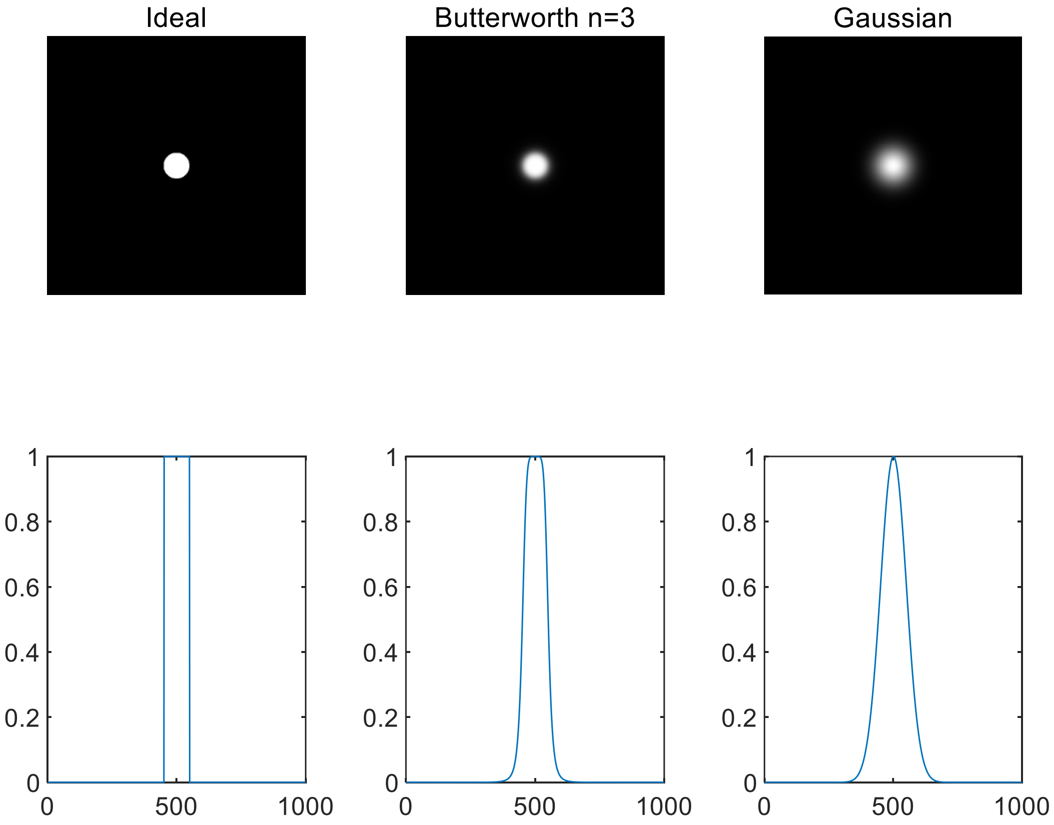
DIP3_2_4.m

任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法2：从频率域直接生成

MATLAB函数dftuv，hypot，lpfilter，hpfilter…

从公式生成



Part 3：
频率域滤波

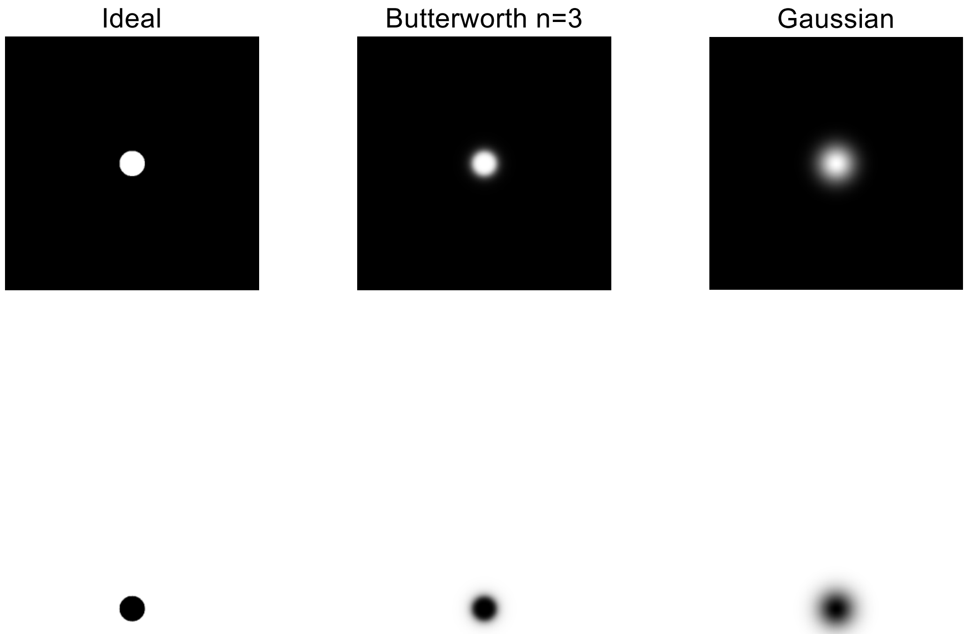
DIP3_2_4.m

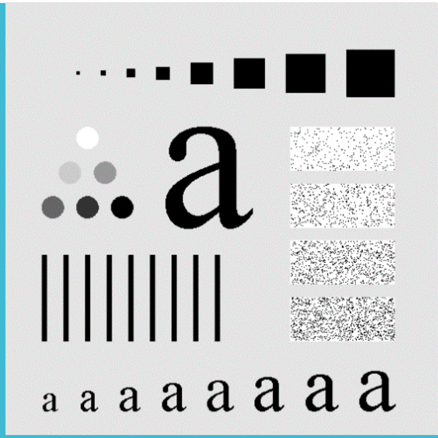
任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法2：从频率域直接生成

MATLAB函数dftuv，hypot，lpfilter，hpfilter…

用函数生成





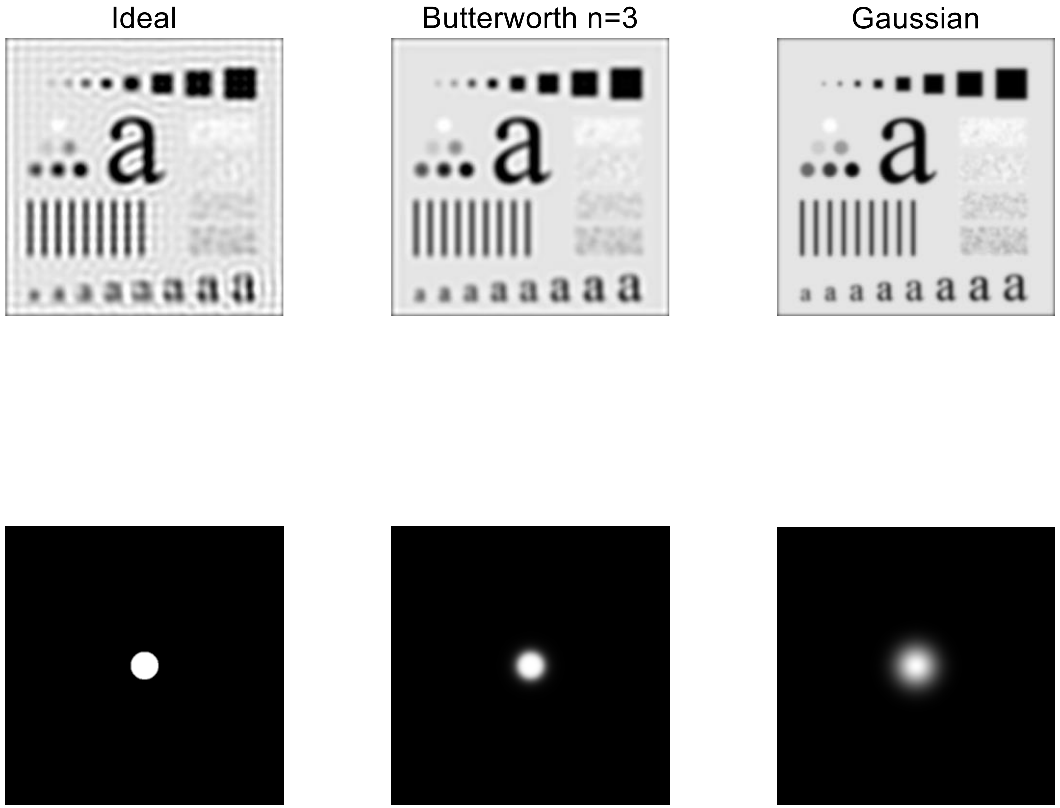
Part 3：频率域滤波

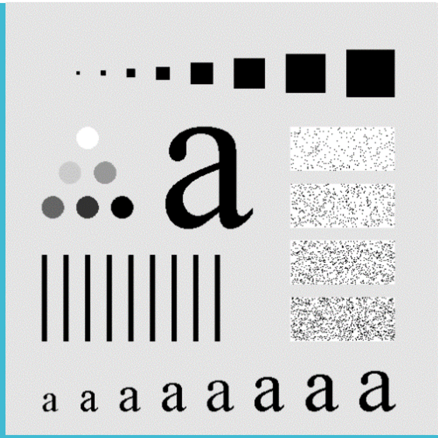
DIP3_2_4.m

任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法2：从频率域直接生成

低通滤波后



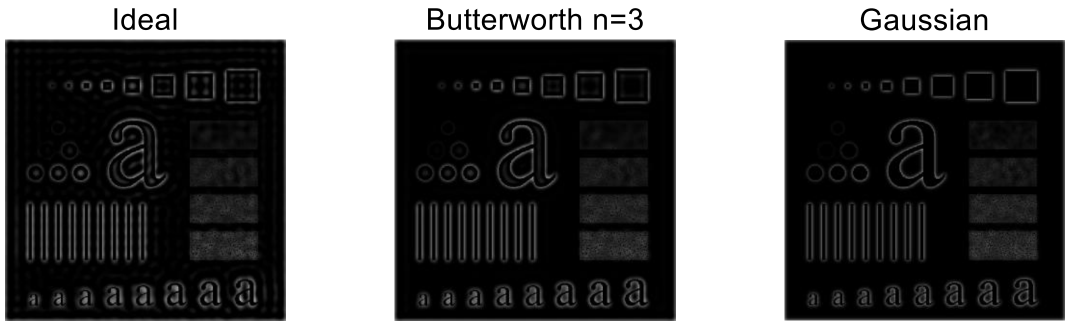


Part 3：
频率域滤波

任务2：生成一个大小为 PQ(1)*PQ(2)的滤波器函数

方法2：从频率域直接生成

高通滤波后



DIP3_2_4.m