§4 位势

§4.1 Sobolev空间

定义4.1.1 ($W^{\alpha,p}(\Omega)$). 设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$为开集，$\alpha\in\mathbb{N}$，$p\in[1,\infty)$，则Sobolev空间$W^{\alpha,p}(\Omega)$定义为

$$W^{\alpha,p}(\Omega):=\{f\in L^p(\Omega):\ 对\ \forall\,\sigma\in\mathbb{N}^N\ 满足\ 0\le|\sigma|\le N,有\ D^\sigma f\in L^p(\Omega)\},$$

其中$D^\sigma f$表示f的σ-阶弱导数 s.t. 对$\forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，有

$$\int_\Omega f D^\sigma\varphi\,dx=(-1)^{|\sigma|}\int_\Omega D^\sigma f\,\varphi\,dx.$$

对$\forall\,f\in W^{\alpha,p}(\Omega)$，定义其范数，

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\Omega)}:=\Big(\sum_{|\sigma|\le\alpha}\int_\Omega|D^\sigma f|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.\quad (*)$$

定理4.1.2 ($C^\infty(\Omega)$的稠密性). 设$f\in L^p(\Omega)$，则$f\in W^{\alpha,p}(\Omega)\iff$ ~~$C^\infty(\Omega)$之在~~ $\exists\,\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subseteq C^\infty(\Omega)$ s.t.

(i) $\varphi_n\longrightarrow f$ in $L^p(\Omega)$

(ii) 对$\forall\,\sigma\in\mathbb{N}^N$，$|\sigma|\le\alpha$，$\{D^\sigma\varphi_n\}_{n=1}^\infty$为$L^p(\Omega)$中Cauchy列.

[Mazya book]

定义4.1.3 ($W_0^{\alpha,p}(\Omega)$). 设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$为开集，$\alpha\in\mathbb{N}$，$p\in[1,\infty)$，则Sobolev空间$W_0^{\alpha,p}(\Omega)$定义为$C_0^\infty(\Omega)$按照$\|\cdot\|_{W^{\alpha,p}(\Omega)}$范数下的完备化.

- 易知$W_0^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)=W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$.

定义4.1.4 (可延拓区域). 设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$为开集，称$\Omega$为可延拓区域，若对$\forall\,\Omega'$开满足$\Omega\subset\overline{\Omega}\subset\Omega'$，以及$\forall\,m\in\mathbb{N}$，$\exists$延拓算子$E_m:W^{m,p}(\Omega)\to W_0^{m,p}(\Omega')$，s.t.

(i) E_m为有界线性. (ii) 对$\forall\,f\in W^{m,p}(\Omega)$，$E_mf|_\Omega=f$.

定理4.1.5（C^∞区域）. 设$\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$为有界区域，且$\partial\Omega$为$C^\infty$，则$\Omega$为可延拓区域

证明：Maz'ya's book

• 定义4.1.6（齐次Sobolev空间）. 对Ω,α,p定义如上，引入齐次Sobolev半范数如下

$$\|f\|_{\dot W^{\alpha,p}(\Omega)}:=\left(\sum_{|\sigma|=\alpha}\int_\Omega|D^\sigma f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

则齐次Sobolev空间$\dot W_0^{\alpha,p}(\Omega)$定义为$C_0^\infty(\Omega)$在$\|\cdot\|_{\dot W^{\alpha,p}(\Omega)}$下的完备化.

注（Newton位势）. 对$\forall x\in\mathbb{R}^N$，$N\geq3$.

$$令\ I_2(x):=\frac{1}{(N-2)\omega_{N-1}}\frac{1}{|x|^{N-2}},$$

其中 $\omega_{N-1}:=\dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$ 为$\mathbb{R}^N$中单位球面的面积.

由Green公式，知对$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$，（Schwartz函数）有

$$f(x)=I_2*(-\Delta f)(x)=-\frac{1}{(N-2)\omega_{N-1}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\Delta f(y)}{|x-y|^{N-2}}dy. \qquad (*)$$

§4.2 Riesz与Bessel位势

定义4.2.1（Laplace的负幂）. 设$0<\alpha<N$. 定义Laplace算子的负$-\frac{\alpha}{2}$次幂$\Delta^{-\frac{\alpha}{2}}=I_\alpha:\mathcal{S}\to\mathcal{S}'$如下.
记号

$$I_\alpha(f)=(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}f:=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}\hat f).$$

利用Fourier变换，令 $I_\alpha(x):=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha})$，知
（$\mathcal{F}^{-1}$：广义）

$$I_\alpha(x):=\frac{\gamma_\alpha}{|x|^{N-\alpha}},\quad \gamma_\alpha\text{为一个依赖于}\alpha\text{和}N\text{的正常数}.$$

特别地，当$\alpha=2$时，$I_2(x)$回到Newton位势。称I_α为α-阶Riesz位势。

• 类似于P.36中(*1)，知对$\forall f\in\mathcal{S}$，有

$$f(x)=I_\alpha(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f=I_\alpha*((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f)=\gamma_\alpha\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy$$

• 另一方面，对$\forall j=1,\cdots,N$，对$\forall f\in L^2$，令

$$R_j f:=\frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f$$

为f的Riesz变换，由

$$\sum_{j=1}^N R_j\partial_j f=\sum_{j=1}^N\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f=(-\Delta)\circ(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}f$$

$$=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}f.$$

而$I_1=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$，知$I_1\circ(\sum_{j=1}^N R_j\partial_j)=I$（单位算子），故对$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$，有

$$f=I_1*(\sum_{j=1}^N R_j\partial_j f). \qquad (*2)$$

• 在上述讨论中用$I-\Delta$代替$-\Delta$，从而得出Bessel位势的概念。特别地，定义Bessel核如下

$$G_\alpha:=\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}),$$

其中$\alpha\in\mathbb{R}$。记Bessel位势如下

$$\mathcal{G}_\alpha:=(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

则对$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$，如下Bessel位势表示成立。

$$f=\mathcal{G}_\alpha(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}f=G_\alpha*[(I-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}f]\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

易知，$\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$构成一个算子群。

$$\mathcal{G}_\alpha\circ\mathcal{G}_\beta=\mathcal{G}_{\alpha+\beta},\quad \mathcal{G}_\alpha^{-1}=\mathcal{G}_{-\alpha},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

引理 4.2.2（积分等式）[Stein book]

(i) 对 $\forall\, 0<\alpha<N$，有 $I_\alpha(x) = a_\alpha \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-N}{2}} e^{-\frac{\pi|x|^2}{t}} \frac{dt}{t}$， (*)

(ii). 对 $\forall\, \alpha>0$， $G_\alpha(x) = a_\alpha \int_0^{+\infty} t^{\frac{\alpha-N}{2}} e^{-\frac{\pi|x|^2}{t} - \frac{t}{4\pi}} \frac{dt}{t}$. (**)

其中 $\frac{1}{a_\alpha} = (4\pi)^{\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$.

引理 4.2.3（Bessel 核的性质）.

(i)（相互控制）. 对 $\forall\, 0<\alpha<N$，

$$0<G_\alpha(x)<I_\alpha(x).$$

(ii).（规范性）. $\|G_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1$.

(iii)（径向性）. $G_\alpha(x)$ 为一个关于 $|x|$ 的递减径向函数，且.

$$\begin{cases} G_\alpha(x) \sim I_\alpha(x), & \text{as } |x|\to 0, \quad 0<\alpha<N. \\ G_\alpha(x) = O(e^{-c|x|}), & \text{as } |x|\to\infty, \quad \alpha>0, \quad \text{其中 } c<1. \end{cases}$$

(iv).（点态估计）. 对 $\forall\, |x|\geq 2$, $|y|\leq 1$,

$$G_\alpha(x) \leq A\, G_\alpha(x+y).$$

命题 4.2.4（Bessel 核积分表示）

(i) 设 $\alpha>N$，则 $G_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} d\xi$.

(ii) [Bochner, 1948]. 设 $\alpha>N$.

$$G_\alpha(x) := (2\pi)^{-N/2} |x|^{-\frac{N-2}{2}} \int_0^\infty \frac{t^{N/2}}{(1+t^2)^{\alpha/2}} J_{(N-2)/2}(|x|t)\, dt.$$

其中 J_ν 为 ν 阶 Bessel 函数.

(iii). $G_\alpha(x) = c_\alpha |x|^{-\frac{(N-\alpha)}{2}} K_{\frac{N-\alpha}{2}}(|x|)$, 其中 $\frac{1}{c_\alpha} = 2^{\frac{\alpha-2}{2}}(2\pi)^{N/2}\Gamma(\alpha/2)$,

K_ν 为修正的第三类Bessel函数,

定义4.2.5 (Bessel位势空间) 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, $p\in[1,\infty)$, 则 Bessel位势空间 $L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) := \{f:\ f = G_\alpha * g,\ g\in L^p(\mathbb{R}^N)\}$$

对 $\forall f\in L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$, 定义其范数为

$$\|f\|_{L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)} := \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

类似地, Riesz位势空间 $\dot{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$\dot{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) := \{f:\ f = I_\alpha * g,\ g\in L^p(\mathbb{R}^N)\}$$

且赋以范数

$$\|f\|_{\dot{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)} := \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

定理4.2.6 (位势与Sobolev空间) 设 $\alpha\in\mathbb{N}$, 则 ~~$W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$与~~ 对 $\forall\, 1<p<\infty$, 有

$$W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N) = L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$$

§5 容量与非线性位势

§5.1. (α,p)-容量和初始形式

定义5.1.1 (初始 (α,p)-容量).

(i) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 紧，则定义

$$C'_{\alpha,p}(K):=\inf\{\|\varphi\|^p_{W^{\alpha,p}}:\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ \varphi\geq 1 \text{ on } K\}.\ (*)$$

(ii) 设 $G\subseteq\mathbb{R}^N$ 开，则定义

$$C'_{\alpha,p}(G):=\sup\{C'_{\alpha,p}(K):K\subseteq G,\ K\text{紧}\}.$$

命题5.1.2 (外正则) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 紧，则

$$C'_{\alpha,p}(K)=\inf\{C'_{\alpha,p}(G):G\supseteq K,\ G\text{开}\}.\ (*)$$

证明：设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 紧.

断言：在定义5.1.1 (i) 的定义中，将 (*) 中条件 $\varphi\geq1$ on K 替换成 $\varphi>1$ on K 定义等价.

$\downarrow\ \varphi\to\varphi(1+\varepsilon)\uparrow$

取 $\varphi\in C_0^\infty$, s.t. $\varphi(x)>1$ on K 且 $\|\varphi\|^p_{W^{\alpha,p}}<C'_{\alpha,p}(K)+\varepsilon$.

令 $K_1:=\{x:\varphi(x)\geq1\}$，知 K_1 紧，且 $K\subset K_1^\circ\subset K_1$，

$$C'_{\alpha,p}(K_1)\leq\|\varphi\|^p_{W^{\alpha,p}}$$

则

$$C'_{\alpha,p}((K_1)^\circ)\leq C'_{\alpha,p}(K_1)\leq C'_{\alpha,p}(K)+\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ (*) 式成立.

#

定义5.1.3 (外容量). 设$E\subseteq\mathbb{R}^N$为一个集合. 则定义其外容量 $C'_{\alpha,p}(E)$ 如下

$$C'_{\alpha,p}(E):=\inf\{C'_{\alpha,p}(G):\ G\supset E,\ G\text{开}\}$$

定义5.1.4 (拟a.e.). 设~~性质~~ $P(x)$为一个关于点x的性质. $E\subseteq\mathbb{R}^N$满足$C'_{\alpha,p}(E)=0$. 称P (α,p)-拟a.e.成立, 若对$\forall x\in\mathbb{R}^N\setminus E$, $P(x)$成立.

注5.1.5 (i) 当$\alpha=1$, $p=2$时, 定义5.1.1中(*)式的极元子函数u为如下方程

$$-\Delta u+u=0$$

的弱解 (变分法)

(ii) 当$\alpha=1$, $p\neq 2$时, 相应极元子u为如下方程

$$-\mathrm{div}(\nabla u|\nabla u|^{p-2})+u|u|^{p-2}=0 \qquad (p\text{-Laplace方程})$$

的弱解.

定义5.1.6 ((α,p)容量). 设$K\subseteq\mathbb{R}^N$紧. 定义函数类

$$\omega_K:=\{\varphi\in\mathcal{S}:\ \varphi\geq 1\ \text{on}\ K\}.$$

对$\forall\alpha>0$, $1<p<\infty$, 定义K的(α,p)-容量如下

$$C_{\alpha,p}(K):=\inf\{\|\varphi\|^p_{\alpha,p}:\ \varphi\in\omega_K\},$$ 其中$\|\varphi\|_{\alpha,p}$为Bessel位势范数.

对$\forall G$开与一般的$A\subseteq\mathbb{R}^N$, 利用定义5.1.1与定义5.1.3的方法, 定义外容量.

易知当$|\alpha|\in\mathbb{N}$时, 对$\forall E\subseteq\mathbb{R}^N$

$$C_{\alpha,p}(E)\sim C'_{\alpha,p}(E). \qquad (\text{等价}).$$

定理5.1.7 ((α,p)-容量的相关性质) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 紧, $\alpha>0$, $1<p<\infty$. 则如下结论成立.

(i) 令 $\overline{W_K}$ 为 W_K 在 $L^{\alpha,p}$ 下的闭包, 则 ∃! 极值函数

$$F^K=G_\alpha * f^K\in\overline{W_K}$$

(极值子).

s.t.

$$\|f^K\|_p^p=C_{\alpha,p}(K).$$

(ii). 令 $\mathcal{M}^+(K)$ 为 K 上全体正 Radon 测度组成的测度集. 则 $\exists\,\mu^K\in\mathcal{M}^+(K)$ (称为容量测度), s.t.

$$f^K=(G_\alpha*\mu^K)^{p'-1}$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}^N}G_\alpha(x-y)\,d\mu^K(y)\right)^{p'-1}.$$

~~因此~~ 此时,

$$F^K=G_\alpha*(G_\alpha*\mu^K)^{p'-1}=:V^{\mu}_{\alpha,p}$$

称为 K 的<u>容量位势</u>. f^K 称为 K 的<u>容量函数</u>. ~~特别地, 记称 $V^{\mu}_{\alpha,p}$ 为非线性位势.~~

(iii). 极值子对 F^K 满足

$$\begin{cases} C_{\alpha,p}(K)=\int_{\mathbb{R}^N}(G_\alpha*\mu^K)^{p'}dx=\int_K F^K\,d\mu^K \\ F^K(x)\le 1 \quad \text{a.e. on } \operatorname{supp}\mu^K \\ \mu^K(K)=C_{\alpha,p}(K). \end{cases}$$

(iv) (对偶表示).

$$C_{\alpha,p}(K)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}^+(K)}\left(\frac{\mu(K)}{\|G_\alpha*\mu\|_{p'}}\right)^p.$$

注：例5.18（非线性位势）. 令

$$V_{\alpha,p}^{\mu} := G_\alpha * (G_\alpha * \mu)^{p'-1}.$$

为非线性位势，易知

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_{\alpha,p}^{\mu}\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha(x-y)(G_\alpha*\mu)^{p'-1}(y)\, dy\right] d\mu(x).$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^N}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha(x-y)\, d\mu(x)\right)(G_\alpha*\mu)^{p'-1}(y)\right] dy.$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}[G_\alpha*\mu]^{p'}(y)\, dy. \quad \circledast$$

下回到定理5.17的证明中.

Stop 1（一致凸性与极凡上）

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为Banach空间. 称其一致凸，若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t. 若 $\|f\|<1+\delta$，$\|g\|<1+\delta$，且 $\|\frac{1}{2}(f+g)\|\geq 1$，则 $\|f-g\|<\varepsilon$.

引理1：设 $1<p<\infty$，则 L^p 为一致凸.

引理2：设 $(X, \|\cdot\|)$ 为一致凸的Banach空间，$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$，满足 $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=1$，且

$$\liminf_{n,m\to\infty} \left\|\tfrac{1}{2}(f_n+f_m)\right\| \geq 1.$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 中强收敛.

引理3. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为一致凸的Banach空间. $\Omega \subseteq X$ 为一个凸子集. 则 $\exists!\, f\in\Omega$，满足

$$\|f\| = \inf\{\|f\| : g\in\Omega\}.$$

应用引理1与3，由 $W_k \subseteq L_{p,\alpha}$ 为凸子集，知 $\exists!\, F^k = G_\alpha * f^k \in \overline{W_k}$，s.t.

$$\|F^k\|_{\alpha,p}^p = \inf_{\varphi\in W_k} \|\varphi\|_{\alpha,p}^p = C_{\alpha,p}(K).$$

Step2（容量测度）对 $\forall \psi \in \mathcal{S}$，满足 $\varphi := G_\alpha * \psi \in \mathcal{S}$，$\varphi \geq 0$。设 F^k 为 $C_{\alpha,p}(K)$ 的极小元子，

对 $\forall t \geq 0$，知 $F^k + t\varphi \in \overline{W_k}$，则由极小元子定义，

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f^k + t\psi|^p dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |f^k|^p dx. \quad (*)$$

对 $\forall x \in \mathbb{R}^N$，由 $\frac{d}{dt}\left(|f^k + t\psi|^p\right)\Big|_{t=0} = \cancel{p|f^k+t\psi|^{p-1}} = |f^k|^{p-2} f^k \psi \cdot p$.

由 $(*)$ 式，知 $\int_{\mathbb{R}^N} |f^k|^{p-2} f^k \psi\, dx \geq 0$.

· 令 $h := |f^k|^{p-2} f^k$，由 $|h|^{p'} = |f^k|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} = |f^k|^p$ 知 $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$.

又由 $g_{-\alpha}: L^p \to L^{-\alpha, p'}(\mathbb{R}^N)$，知

$$u^k := G_{-\alpha} * h \in L^{-\alpha, p'}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

且
$$\begin{cases} h = G_\alpha * u^k. \\ \int_{\mathbb{R}^N} (G_\alpha * u^k)\psi\, dx \geq 0. \end{cases} \qquad f^k = h^{p'-1} = (G_\alpha * u^k)^{p-1}. \quad (*)$$

后者说明，对 $\forall \psi \in \mathcal{S}$ 满足 $\varphi := G_\alpha * \psi \in \mathcal{S}$，$\varphi \geq 0$，

$$\langle u^k, G_\alpha * \psi \rangle = \langle u^k, \varphi \rangle \geq 0.$$

应用Schwartz定理，知 u^k 为正Radon测度。

$\downarrow$ 正分布必为正测度

Step3（μ^k 的性质）

性质1. $\mathrm{supp}\,\mu^k \subseteq K$.

$\downarrow$ 对 $\forall \varphi \in S$，满足 $\mathrm{supp}\,\varphi \subseteq K^c$. 易知 $f^k + t\varphi \in \overline{W_K}$. 对 $\forall t \in \mathbb{R}$.

此时类似于 Step2 中(*)式的估计，要求

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^+}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f^k+t\varphi|^p dx\right) \geq 0.$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0^-}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f^k+t\varphi|^p dx\right) \leq 0$$

$\Rightarrow \langle \mu^k, \varphi \rangle = 0$.

$\Rightarrow \mathrm{supp}\,\mu^k \subseteq K$. $\uparrow$

性质2 $\int_K f^k d\mu^k = C_{\alpha,p}(K)$.

$\downarrow$
$$\int_K f^k d\mu^k = \int_K (G_\alpha * f^k)\, d\mu^k = \int_{K} \left[\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha(x-y) f^k(y)\, dy\right] d\mu^k(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha(x-y)\, d\mu^k(x)\right] f^k(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f^k (G_\alpha * \mu^k)\, dx$$

$$= \theta \int_{\mathbb{R}^N} (G_\alpha * \mu^k)^{p'-1} (G_\alpha * \mu^k)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (G_\alpha * \mu^k)^{p'} dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f^k)^p dx = C_{\alpha,p}(K).$$

性质3 $F^k(x) \le 1$. on $\operatorname{supp} \mu^k$.

√由 $F^k = G_\alpha * f^k$, 连续. 知. $\{x: F^k(x) > 1\}$ 为开集. 则对 $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足

$\operatorname{supp}\varphi \subseteq \{x: F^k(x) > 1\}$, 有 $F^k + t\varphi \in \overline{W_k}$, 对 $\forall t \in \mathbb{R}$ 满足 $|t|$ 充分小.

类似于之前讨论, 得.

$$\langle \mu^k, \varphi \rangle = 0.$$

从而. $\operatorname{supp} \mu^k \subset \{x: F^k(x) \le 1\}$.

Step 4 (等测性与对偶). 对 $\forall \mu \in M^+(K)$, 令 $F := G_\alpha * f \in W_k$, 则

$$\mu(K) \le \int_K F \, d\mu = \int_K (G_\alpha * f) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} (G_\alpha * \mu) f \, dx$$

$$\le \|G_\alpha * \mu\|_{p'} \|f\|_p. \quad (*)$$

~~在上述讨论中~~ 用 F^k 利用极限讨论, 知 $(*)$ 式对 $\forall F \in \overline{W_k}$ 仍然成立. 因此.

令 $F = F^k$ 为极用子, 得.

$$\mu(K) \le \|G_\alpha * \mu\|_{p'} \|f^k\|_p \le \|G_\alpha * \mu\|_{p'} \operatorname{Cap}(K)^{\frac{1}{p}}.$$

故. $$\sup_{\mu \in M^+(K)} \left[\frac{\mu(K)}{\|G_\alpha * \mu\|_{p'}}\right]^{p'} \le \operatorname{Cap}(K). \quad (*1)$$

特别地, 取 $\mu = \mu^k$, 得

$$\mu^k(K) \le \|G_\alpha * \mu^k\|_{p'} \operatorname{Cap}(K)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{Cap}(K). \quad (*2)$$

另一方面，利用性质3.知

$$u^k(K) \geq \int_K F^k \, d u^k \overset{\text{性质2}}{=\!=\!=} C_{\alpha,p}(K) = \| G_\alpha * u^k \|_{p'} \left[C_{\alpha,p}(K) \right]^{\frac{1}{p}}$$

$\Rightarrow$ $u^k(K) \geq C_{\alpha,p}(K)$

所以 $\left(\frac{u^k(K)}{\| G_\alpha * u^k \|_{p'}} \right)^p \geq C_{\alpha,p}(K)$

$\Rightarrow$ 对偶定义成立，所以 $u^k(K) = C_{\alpha,p}(K)$. #