§3. Banach空间

§3.1 Banach空间的基本性质.

半范/范数 $\xrightarrow{\text{完备化}}$ Banach空间 $\longrightarrow$ 例子

$\downarrow$

基本性质

定义3.1.1 (半范与范数). 设$\mathcal{X}$为数域F上的一个向量空间. $p:\mathcal{X}\to[0,\infty)$为一个函数. 称$p$为一个半范, 若

(a) (次线性性). 对$\forall x,y\in\mathcal{X}$, 有 $p(x+y)\le p(x)+p(y)$.

(b) (次齐次性). 对$\forall \alpha\in F$, $x\in\mathcal{X}$, 有

$$p(\alpha x)=|\alpha|\,p(x).$$

进一步, 称p为一个范数, 若

(c) (唯一性), $p(x)=0 \Rightarrow x=0$.

定义3.1.2 (Banach空间). 设$\mathcal{X}$为一个向量空间, $\|\cdot\|$为其上的范数, 若$\mathcal{X}$关于由$\|\cdot\|$诱导的度量d ($d(x,y):=\|x-y\|$) 完备, 则称二元对 $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ 为一个Banach空间.

命题3.1.3 (运算的连续性). 设$\mathcal{X}$为一个向量空间. 则

(a) 加法: $\mathcal{X}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$, $(x,y)\longmapsto x+y$ 为连续映射

(b) 数乘. $F\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}$, $(\alpha,x)\longmapsto\alpha x$ 为连续映射.

证明: Step 1 ((a)的证明). 设 $x_n\to x$, $y_n\to y$, 则

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\le\|x_n-x\|+\|y_n-y\|$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

$\Rightarrow$ 加法连续

Step 2. (b)的证明类似!

引理3.4.4 (半范的性质) 设 p, q 为 $\mathscr{X}$ 上的半范，则如下结论等价.

(a) 对 $\forall x$，$p(x) \le q(x)$ (即 $p \le q$)

(b) $\{x \in \mathscr{X}: q(x) < 1\} \subseteq \{x \in \mathscr{X}: p(x) < 1\}$

(b)' $q(x) < 1 \Rightarrow p(x) < 1$

(c) $\{x: q(x) \le 1\} \subseteq \{x: p(x) \le 1\}$

(d) $\{x: q(x) < 1\} \subseteq \{x: p(x) \le 1\}$.

证明:

$$\begin{tikzcd}
 & (a) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr, shift left] & \\
(b) \arrow[rr, bend right] & (c) \arrow[r, Rightarrow] & (d) \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

Step1 ((a) $\Rightarrow$ (b)/(c)/(d)).

设 $p(x) \le q(x)$，则，对 $\forall x \in \{x \in \mathscr{X}: q(x) < 1\}$，$\Rightarrow$ $p(x) \le q(x) < 1$

$\Rightarrow x \in \{x \in \mathscr{X}: p(x) < 1\}$. $\Rightarrow$ (b) 成立.

Step2 ((b)/(c) $\Rightarrow$ (d)). 设 (b) 成立，则对 $\forall x \in \{x: q(x) < 1\}$ 有

$\{x: q(x) < 1\} \subseteq \{x: p(x) < 1\} \subseteq \{x: p(x) \le 1\}$. $\Rightarrow$ (d) 成立.

类似地，当 (c) 成立时，也可得 (d) 成立..

Step3 ((d) $\Rightarrow$ (a)). 对 $\forall x \in \mathscr{X}$，任取 $\varepsilon > 0$，知

$$q\left(\frac{x}{q(x)+\varepsilon}\right) = \frac{q(x)}{q(x)+\varepsilon} < 1.$$

由 (d) 知 ~~$p(x) \le$~~ $p\left(\frac{x}{q(x)+\varepsilon}\right) \le 1 \Rightarrow p(x) \le q(x) + \varepsilon$. 令 $\varepsilon \to 0$，得

$p(x) \le q(x)$.

#

命题3.1.5（等价范数的刻画）. 设$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$为$\mathcal{X}$上的两个范数. 则若$\exists c_1, c_2>0$, s.t.

$$c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1 \quad (\text{即 } \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2)$$

$\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$在$\mathcal{X}$上诱导出相同的拓扑（即$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价）

证明：Step1（$\sim \Rightarrow$ 等价）. 设$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, 要证$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$, 只需说明用$\|\cdot\|_1$定义的开球内含有用$\|\cdot\|_2$定义的开球，（以及反过来的情形）. 事实上，对任取$x_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon>0$, 令

$$B_1(x_0,\varepsilon) := \{x\in \mathcal{X}_1 : \|x-x_0\|_1 < \varepsilon\}$$

$$B_2(x_0,\varepsilon) := \{x\in \mathcal{X}_2 : \|x-x_0\|_2 < \varepsilon\}$$

易知. $B_1(x_0, \frac{\varepsilon}{c_2}) \subseteq B_2(x_0,\varepsilon)$ (*1)

对$\forall x\in B_1(x_0,\frac{\varepsilon}{c_2})$, 有$\|x-x_0\|_2 \le c_2\|x-x_0\|_1 < c_2\cdot\frac{\varepsilon}{c_2} = \varepsilon$.

$\Rightarrow x\in B_2(x_0,\varepsilon)$.

类似地，有

$B_2(x_0, c_1\varepsilon) \subseteq B_1(x_0,\varepsilon)$ (*2)

联立(*1)与(*2), 得$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价.

Step2（等价 $\Rightarrow \sim$）. 设$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价. 与设$B_1(0,1)$为$\|\cdot\|_1$下的单位开球. 知$\exists r>0$, s.t.

$B_2(0,r) \subseteq B_1(0,1)$.

令 $g(x) = \frac{\|x\|_2}{r}$, $p(x)=\|x\|_1$, 并应用引理3.1.4, 得. $p(x) = \|x\|_1 \le g(x) = \frac{\|x\|_2}{r}$, 从而

$r\|x\|_1 \le \|x\|_2$. 取$c_1 = r \Rightarrow c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2$

类似地，可证$\exists c_2>0$, s.t. $\|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$.

#

例 3.1.6 (有界连续空间 $C_b(\mathbb{X})$). 设 $\mathbb{X}$ 为 Hausdorff 空间 (即 $\mathbb{X}$ 为 T_2 分离: 对 $\forall x, y \in \mathbb{X}$, $x \neq y$, $\exists$ x, y 的邻域 U, V, s.t. $U \cap V = \phi$). 令

$$C_b(\mathbb{X}) := \{f: \mathbb{X} \to \mathbb{F} \text{ 连续}\}$$

对 $\forall f \in C_b(\mathbb{X})$, 定义 $\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|$.

命题. $(C_b(\mathbb{X}), \|\cdot\|)$ 为一个 Banach 空间.

证明: $\|\cdot\|$ 为一个范数的证明显然. 下证 $C_b(\mathbb{X})$ 关于 $\|\cdot\|$ 完备. 事实上, 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_b(\mathbb{X})$ 为一个 Cauchy 列. i.e. 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon > 0$, s.t. 对 $\forall n, m \geq N_\varepsilon$, 有

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in \mathbb{X}} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (*)$$

则对 $\forall x \in \mathbb{X}$, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{F}$ 中 Cauchy 列, 由 $\mathbb{F}$ 的完备性, 知 $\exists$ $f(x)$, s.t.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{in } \mathbb{F}.$$

下证:

(i) $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$

(ii) $f \in C_b(\mathbb{X})$.

事实上, 对于(i), 任取 $\varepsilon > 0$, 以及 $n, m \geq N_\varepsilon$, 有对 $\forall x \in \mathbb{X}$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)|$$

$$\leq |f(x) - f_m(x)| + \|f_m - f_n\|$$

$$< |f(x) - f_m(x)| + \varepsilon.$$

令 $m \to \infty$, 可得.

$$|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon \implies \|f - f_n\| < 2\varepsilon. \implies \text{(i) 成立.}$$

对于(ii)，由 $f_n \to f$ 为一致收敛，知 f 也连续，又由

$$\|f\| \le \|f-f_n\| + \|f_n\| < \infty$$

综上，得 $f \in C_b(X)$.

#

命题3.1.1 ($C_0(X)$ 的完备性) 设 X 为一个局部紧空间（对 $\forall x\in X$，都 $\exists x$ 的一个紧邻域），令

$$C_0(X) := \{ f: X \to \mathbb{F} \text{ 连续} \mid \text{对} \forall \varepsilon>0,\ \{x\in X: |f(x)|\ge \varepsilon\} \text{ 为紧集} \}.$$

则 $C_0(X)$ 为 $C_b(X)$ 的闭子空间，从而为一个 Banach 空间.

证明：Step1 $C_0(X)$ 为 $C_b(X)$ 的线性子空间. 略去细节.

Step2 ($C_0(X)$ 在 $C_b(X)$ 中闭). 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C_0(X)$ 为一个 Cauchy 列. 由 $C_b(X)$ 完备，知 $\exists f\in C_b(X)$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

下证 $f \in C_0(X)$. ~~事实上~~，~~对~~ 由 $C_0(X)$ 的定义，只需再证 对 $\forall \varepsilon>0$，

$$\{x\in X: |f(x)|\ge \varepsilon\} \text{ 为紧集. } (*)$$

事实上，若 $|f(x)|\ge \varepsilon$. 则有 取 $N\in\mathbb{N}$, s.t. $\|f-f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n\ge N$. 故

$$\varepsilon \le |f(x) - f_N(x) + f_N(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + |f_N(x)|.$$

$$\Rightarrow |f_N(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此 $\overbrace{\{x\in X: |f(x)|\ge\varepsilon\}}^{A} \subseteq \overbrace{\{x\in X: |f_N(x)|\ge \frac{\varepsilon}{2}\}}^{B}$.

而由 $f_N \in C_0(X) \Rightarrow B$ 为紧集. 而由 f 连续，A 为 B 的闭子集，$\Rightarrow A$ 也为紧集.

#

例3.1.8 (L^p空间). 设(X, Ω, μ)为测度空间. $p\in[1,\infty]$. 定义

$$L^p(X,\Omega,\mu):=\{f: X\to \mathbb{F} \mid \int_X |f(x)|^p d\mu<\infty\}. \text{ 为 Lebesgue 空间}.$$

对$\forall f\in L^p(X)$, 定义.

$$\|f\|_{L^p}:=\left[\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}$$

则$(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$为一个Banach空间.

例3.1.9 (ℓ^p空间) 设I为一个集合, $1\le p<\infty$. 定义.

$$\ell^p(I):=\{f: I\to \mathbb{F},\ \sum_{i\in I}|f(i)|^p<\infty\}.$$

对$\forall f\in \ell^p(I)$, 定义.

$$\|f\|_{\ell^p}:=\left(\sum_{i\in I}|f(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

则$(\ell^p, \|\cdot\|_{\ell^p})$为一个Banach空间

命题3.1.10 (半范的绝对值不等式)

(i) (半范). 设p为X上的半范, 则对$\forall x, y\in X$,

$$|p(x)-p(y)|\le p(x-y).$$

(ii) (范数). 设$\|\cdot\|$为X上的范数, 则对$\forall x, y\in X$,

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|.$$

证明: 不失一般性, 只需证(i). 事实上, 对$\forall x, y\in X$, 有

$$p(x)=p(x-y+y)\le p(x-y)+p(y) \Rightarrow p(x)-p(y)\le p(x-y).$$

类似地, $p(y)-p(x)\le p(x-y)$. 综上$\Rightarrow$ (i)成立. #

定义3.1.11 (Banach空间之间的等距同构)

(i) 设 $\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$ 为两个赋范空间，称 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 等距同构，若 ∃ 一个满射线性等距映射 s.t. $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.

(ii) 设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 为两个Banach空间．称 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 同构，若 ∃．线性双射 $T: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, s.t. T 为同胚.

§3.2 赋范空间之间的算子.

命题3.2.1 (有界线性算子) 设 $\mathscr{X}$．$\mathscr{Y}$ 为两个赋范空间．$A: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 为一个线性算子．TFAE.

(a) $A \in \mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 为 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 上的有界线性算子
(b) A 在 0 处连续
(c) A 在某一点处连续
(d) ∃ $C>0$, s.t. 对 $\forall x \in \mathscr{X}$，$\|Ax\| \le C\|x\|$.

• 设 $A \in \mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，定义算子范数.

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathscr{X} \\ \|x\| \le 1}} \|Ax\|.$$

则易知.

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{X} \\ \|A\| = 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{X} \\ x \ne 0}} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\}$$

$$= \inf\{C>0 : \|Ax\| \le C\|x\|, \forall x \in \mathscr{X}\}.$$

命题3.2.2 (算子Banach空间)．设 $\mathscr{X}$ 为赋范空间．$\mathscr{Y}$ 为Banach空间．则 $\mathcal{B}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 在算子范数下也为Banach空间.

证明: Step1 $(B(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\|\cdot\|)$ 为赋范空间. 显然

Step2 (说明 $(B(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\|\cdot\|)$ 完备). 事实上, 设 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 为 Cauchy 列. 则

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. 对 $\forall n,m>N$, 有 $\|A_n-A_m\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}}<\varepsilon$.

从而, 对 $\forall x\in\mathcal{X}$, 满足 $\|x\|=1$, 有.

$$\|(A_n-A_m)x\|_{\mathcal{Y}}<\varepsilon.$$

因此 $\{A_nx\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{Y}$ 中 Cauchy 列. 由 $\mathcal{Y}$ 完备, 知 $\exists\,\tilde{x}\in\mathcal{Y}$, s.t.

$$\lim_{n\to\infty}A_nx=\tilde{x}.$$

因此, 对 $\forall x\in\mathcal{X}$, 满足 $\|x\|=1$, 定义.

$$Ax:=\tilde{x}.$$

易知, 由线性扩张. A 的定义可扩张至 $\forall x\in\mathcal{X}$. 且.

$$\|Ax\|=\lim_{n\to\infty}\|A_nx\|\le C\|x\|.$$

$\Rightarrow$ A 有界. $\Rightarrow A\in B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. #

§3.3 有限维赋范空间

范数等价定理 → 线性子空间的闭性.

范数等价定理 → 线性算子的连续性

定理3.3.1 (范数等价定理) 设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间. 则 $\mathcal{X}$ 上任两个范数等价.

证明: Step1 ($\|\cdot\|_2$ 范数). 由 $\mathcal{X}$ 为有限维向量空间, 设 $\{e_i\}_{i=1}^{d}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一组基, 知.

对 $\forall x\in\mathcal{X}$, 有

$$x=\sum_{i=1}^{d}x_ie_i,\quad 其中\ x_i\in\mathbb{F}.$$

定义 $\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

易知 $\|\cdot\|_2$ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个范数.(留作作业，欧氏范数). 故为完成证明只需说明，对 $\mathcal{X}$ 上 $\forall$ 范数 $\|\cdot\|$, 有

$$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2 \quad (*)$$

Step2. ($\|\cdot\| \lesssim \|\cdot\|_2$). 事实上，对 $\forall x \in \mathcal{X}$, 由 $x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$ 知

$$\|x\| \le \sum_{j=1}^{d} |x_j| \, \|e_j\| \overset{\text{Hölder}}{\lesssim} \left(\sum_{j=1}^{d} \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2. \quad (*_1)$$

Step3. ($\|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|$). 由 $(*_1)$ 知，对 $\forall x, y \in \mathcal{X}$, 有

$$\|x-y\| \lesssim \|x-y\|_2.$$

$\Rightarrow$ $x \longrightarrow \|x\|$ 为连续函数. 令 $S := \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_2 = 1\}$ 为欧氏范数下的单位球面.

知 $\exists p \in S$, s.t. $\|p\| = \inf_{x \in S} \|x\|$.

从而，对 $\forall x \in \mathcal{X}$ (不妨设 $x \neq 0$), 有

$$\|x\| = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \ge \|p\| \, \|x\|_2. \quad (\circledast)$$

#.

命题3.3.3 (有限维线性子空间的闭性). 设 $\mathcal{X}$ 为赋范空间. $M \subseteq \mathcal{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 的有限维线性子空间. 则 M 为闭子空间.

证明: ~~由M为~~ 由 M 为有限维向量空间，其上可赋以 $\|\cdot\|_2$ (欧氏范数). ~~知中相同的范数~~ 知

$(M, \|\cdot\|_2)$ 完备. 又由 $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. 知 $(M, \|\cdot\|)$ 也完备.

#

命题3.3.4 (连续映射) 设$\mathscr{X}$为有限维赋范空间, $\mathscr{Y}$为赋范空间, $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$为线性算子, 则$T$连续.

证明: ~~对 $\forall x$~~ 设$\{e_j\}_{j=1}^{d}$为$\mathscr{X}$上的一组基, 对$\forall x\in\mathscr{X}$, 定义

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_j| : 1\le j\le d\},\quad 其中\ x=\sum_{j=1}^{d}x_j e_j.$$

易知$\|\cdot\|_\infty$为$\mathscr{X}$上的一个范数, 且, 对$\forall x\in\mathscr{X}$, 有

$$\|Tx\|_{\mathscr{Y}} \le \sum_{j=1}^{d}|x_j|\,\|Te_j\|_{\mathscr{Y}} \le \Big(\sum_{j=1}^{d}\|Te_j\|_{\mathscr{Y}}\Big)\|x\|_\infty.$$

$\Rightarrow T:(\mathscr{X},\|\cdot\|_\infty)\to(\mathscr{Y},\|\cdot\|_{\mathscr{Y}})$ 有界.

又由等价范数定理, $\|\cdot\|_\infty\sim\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, 从而

$$T:(\mathscr{X},\|\cdot\|_{\mathscr{X}})\to(\mathscr{Y},\|\cdot\|_{\mathscr{Y}})\ 有界.$$

#