§2.4.(附) 紧等部分点集拓扑知识补充 .[张恭庆,《泛函分析讲义上》]

定义2.4.1 (紧集) 设$(\mathcal{X},d)$为一个距离空间. 称集合$M\subseteq\mathcal{X}$为紧集, 若M的每个由开集构成的覆盖, 都∃一个有限的子覆盖.

定义2.4.2 (列紧集) 设$(\mathcal{X},d)$为一个距离空间. 称集合$A\subseteq\mathcal{X}$为列紧集, 若A中∀点列∃一个收敛子列. 进一步, 若该点列还收敛于A中一点, 则称A自列紧

定义2.4.3 (完全有界) 设$(\mathcal{X},d)$为一个距离空间. $M\subseteq\mathcal{X}$.

(i) (ε-网). 设$\varepsilon>0$, $N\subseteq M$, 若对$\forall x\in M$, $\exists y\in N$, s.t. $d(x,y)<\varepsilon$. 则称N为M的一个ε-网. 进一步, 若N为有限集, 则称N为M的有限ε-网.

(ii) (完全有界). 称M完全有界, 若对$\forall\varepsilon>0$, ∃M的一个有限ε-网.

命题2.4.4 (紧集的性质). 设$(\mathcal{X},d)$为一个距离空间. $M\subseteq\mathcal{X}$.

(i) (连续映射). 设$(\mathcal{Y},\rho)$也为一个距离空间, $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$为连续映射. 则f将$\mathcal{X}$中紧集映至$\mathcal{Y}$中紧集

(ii) (列紧$\Leftrightarrow$~~完全有界~~紧). M列紧$\Leftrightarrow$M紧

(iv) (列紧$\Leftrightarrow$完全有界) 若$(\mathcal{X},d)$完备. 则 M列紧$\Leftrightarrow$M完全有界.

(v) (完全有界$\Rightarrow$可分). 若$\mathcal{X}$完全有界$\Rightarrow\mathcal{X}$可分

(vi) (紧集之和). 若$N\subseteq\mathcal{X}$, M,N都为紧集. 则M+N也为紧集.

(vii) (紧集与闭包) 若M紧, 则$\overline{M}$也紧

若$N\subseteq M$且N闭, M紧. 则N也紧.

• 设E为幂等算子.

命题A: 对$\forall h_1 \in \mathrm{Ran}E$, $h_2 \in \ker E$, 有$\langle h_1, h_2 \rangle = 0$.

命题B: $\ker E = (\mathrm{Ran}E)^{\perp}$.

定理1 设E幂等. 则 A⇒B.

为证定理1, 需如下3个引理.

引理2 (闭子空间). $\ker E$, $\mathrm{Ran}E$ 都为$\mathcal{H}$中闭子空间.

证略:显然.

引理3 (正交基) 若命题A成立, 则设ε为$\ker E$的一个正交基, $\tilde{\varepsilon}$为$\mathrm{Ran}E$的一个正交基, 则$\varepsilon \cup \tilde{\varepsilon}$为$\mathcal{H}$的一个正交基.

证明: 由$\mathcal{H}$正交基刻画, 只需说明对$\forall h \in \mathcal{H}$, 满足$h \perp (\varepsilon \cup \tilde{\varepsilon})$, 有$h=0$.

事实上, 作h的分解

$$h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in \ker E, \quad h_2 \in \mathrm{Ran}E.$$

由有对$\forall e \in \varepsilon$, 有 $\langle h, e \rangle = \langle h_1, e \rangle + \underbrace{\langle h_2, e \rangle}_{h_2 \in \mathrm{Ran}E,\ e \in \ker E,\ 命题A}$

$$\overset{\|}{0} \qquad = \langle h_1, e \rangle.$$

$\Rightarrow h_1 \perp \varepsilon$, 由$h_1 \in \ker E$, 且$\varepsilon$为$\ker E$的正交基, $\Rightarrow h_1 = 0$

类似地, $h_2 = 0$.

引理4. 设(正交补和正交基) 设ε, $\tilde{\varepsilon}$为引理3中正交基. 则ε也为$(\mathrm{Ran}E)^{\perp}$的一个正交基.

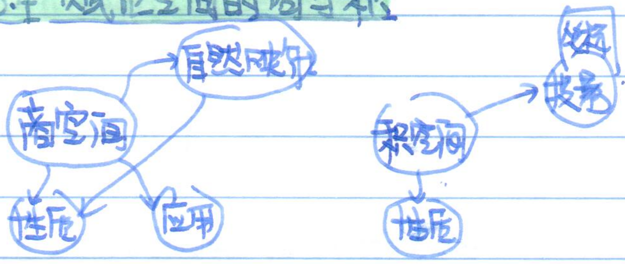
证明: 只需证对$\forall h \in (\mathrm{Ran}E)^{\perp}$, 满足$h \perp \varepsilon$, 有$h=0$. 而 由$h \in (\mathrm{Ran}E)^{\perp} \Rightarrow h \perp \tilde{\varepsilon}$.

又$h \perp \varepsilon \Rightarrow h \perp (\varepsilon \cup \tilde{\varepsilon})$. 由$\varepsilon \cup \tilde{\varepsilon}$为$\mathcal{H}$上一个正交基, $\Rightarrow h = 0$.

回到定理1的证明. 由命题A及引理3, 4 知ε同时为$\ker E$与$(\mathrm{Ran}E)^{\perp}$的一个正交基.

$\Rightarrow \ker E = (\mathrm{Ran}E)^{\perp}$. (两个空间,正交基相同则空间也相同).

§3.4 赋范空间的商与积



定义3.4.1 (商空间). 设 $\mathscr{X}$ 为赋范空间，$M\subseteq\mathscr{X}$ 为线性子空间. 定义商空间 $\mathscr{X}/M$ 为

$$\mathscr{X}/M := \{x+M : x\in\mathscr{X}\}.$$

易知，对 $\forall\, x,y\in\mathscr{X}$，若 $x-y\in M$，则 $x+M=y+M$. 设 $Q:\mathscr{X}\to\mathscr{X}/M$ 为自然映射

$$x\longmapsto Q(x)=x+M.$$

则对 $\forall\, x+M\in\mathscr{X}/M$，赋以范数

$$\|x+M\|_{\mathscr{X}/M} := \inf\{\|x+y\|_{\mathscr{X}} : y\in M\}$$

$$=\inf\{\|x-y\|_{\mathscr{X}} : y\in M\}$$

$$=\operatorname{dist}(x,M).$$

命题3.4.2 (赋范空间) 设 $\mathscr{X}$ 为赋范空间，$M\subseteq\mathscr{X}$ 为线性子空间.

(i) $\|\cdot\|_{\mathscr{X}/M}$ 为 $\mathscr{X}/M$ 上的半范.

(ii) 若 M 为闭集，则 $\|\cdot\|_{\mathscr{X}/M}$ 为 $\mathscr{X}/M$ 上的范数.

证明: Step 1 (i)的证明.

• (次可加性). 对 $\forall\, x+M,\ y+M$，则 $(x+M)+(y+M)=x+y+M$.

则 $\|(x+M)+(y+M)\| = \operatorname{dist}(x+y,M) = \inf\limits_{z\in M}\|(x+y)-z\| = \inf\limits_{\substack{z\in M\\ k\in M}}\|(x+y)-(z+k)\|$

而对 $\forall\, z\in M,\ k\in M$，有

$$\|(x+y)-(z+k)\| \le \|x-z\|+\|y-k\|$$

由 z 与 k 的任意性，

$$\inf_{\substack{z\in M\\ k\in M}}\|(x+y)-(z+k)\| \le \inf_{z\in M}\|x-z\| + \inf_{k\in M}\|y-k\| \le \operatorname{dist}(x,M)+\operatorname{dist}(y,M)$$

$$=\|x+M\|+\|y+M\|.$$

知 $\|(x+y)+M\| \le \|x+M\|+\|y+M\|$.

• 线性性.(留作作业).

Step2 (ii)的证明) 由M闭, 知∃ $x_0\in M$, s.t.

$$dist(x,M)=dist(x,x_0).$$

从而, 若 $\|x+M\|=0 \Rightarrow dist(x,M)=0 \Rightarrow d(x,x_0)=0 \Rightarrow x=x_0$. 从而 $x\in M$. 因此,

$$x+M=0+M.$$

#

定理3.4.3 (商空间的性质) 设 $\mathscr{X}$ 为赋范空间. $M\le\mathscr{X}$ 为 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间. 则

(a) 对 $\forall x\in\mathscr{X}$, $\|Q(x)\|_{\mathscr{X}/M}\le\|x\|_{\mathscr{X}}$, 其中 $Q:\mathscr{X}\to\mathscr{X}/M$ 为自然映射

(b) 若 $\mathscr{X}$ 为Banach空间, 则 $\mathscr{X}/M$ 也为Banach空间.

(c) 设 $W\subseteq\mathscr{X}/M$, 则 W关于 $\|\cdot\|_{\mathscr{X}/M}$ 开 $\Longleftrightarrow$ $Q^{-1}(W)$ 在 $\mathscr{X}$ 中开.

对 $\forall x\in W$, ∃用 $\|\cdot\|_{\mathscr{X}/M}$ 定义的开球 $B(x,\varepsilon):=\{x\in\mathscr{X}/M: \|\cdot - x\|_{\mathscr{X}/M}<\varepsilon\}$. s.t. $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq W$

(d) 若 $U\subseteq\mathscr{X}$ 开, 则 $Q(U)$ 在 $\mathscr{X}/M$ 中开.

证明: Step1 ((a)的证明), 对 $\forall x\in\mathscr{X}$, 有 $Q(x)=x+M$

$$\|Q(x)\|_{\mathscr{X}/M}=\|x+M\|_{\mathscr{X}/M}=dist(x,M)\overset{0\in M}{\le}dist(x,0)=\|x\|.$$

Step2 ((b)的证明) 由 $(\mathscr{X}/M,\|\cdot\|_{\mathscr{X}/M})$ 已经为赋范空间. 下证 $\mathscr{X}/M$ 完备. 事实上, 设

$\{x_n+M\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{X}/M$ 中Cauchy列. 则对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 取 $x_{n_k}+M$, $x_{n_{k+1}}+M$ s.t.

$$\|(x_{n_k}+M)-(x_{n_{k+1}}+M)\|=\|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}+M\|<2^{-k}.\ (*)$$

由此得子列 $\{x_{n_k}+M\}_{k=1}^{\infty}$.

构造 M 中子列 $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 如下. $y_1=0$, y_2 满足.

$$\|x_{n_1}-x_{n_2}+y_2\| \le \|x_{n_1}-x_{n_2}-M\|+2^{-1},$$

y_3 满足.

$$\|(x_{n_2}+y_2)-(x_{n_3}+y_3)\| \le \|x_{n_2}-x_{n_3}+M\|+2^{-2}$$

...

一般地 对 $\forall k\ge 3$.

$$\|(x_{n_k}+y_k)-(x_{n_{k+1}}+y_{k+1})\| \le \|x_{n_k}-x_{n_{k+1}}+M\|+2^{-k}.$$

$$\overset{(*1)}{\le} 2\,2^{-k}.$$

因此, $\{x_{n_k}+y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 也为 $\mathcal{X}$ 中 Cauchy 列. 由 $\mathcal{X}$ 完备, 知 $\exists x_0\in\mathcal{X}$, s.t.

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}+y_k)=x_0 \quad \text{in } \mathcal{X}.$$

而由(a), 自然映射为有界线性算子, 从而连续, 故

$$x_{n_k}+M=Q(x_{n_k}+y_k)\longrightarrow Q(x_0)=x_0+M.$$

而 $\{x_n+M\}_{n=1}^{\infty}$ 本身也收敛, 知 $x_n+M\longrightarrow x_0+M\in\mathcal{X}/M$. $\Rightarrow$ $\mathcal{X}/M$ 完备.

从而 $(\mathcal{X}/M, \|\cdot\|_{\mathcal{X}/M})$ 为 Banach 空间.

#

Step3 (c)的证明) 先证"$\Rightarrow$": 若 $W\subseteq \mathcal{X}/M$ 开. 由 Q 连续, 易知 $Q^{-1}(W)$ 也在 $\mathcal{X}$ 中开.

下证"$\Leftarrow$" 设 $W\subseteq \mathcal{X}/M$, 且 $Q^{-1}(W)$ 在 $\mathcal{X}$ 中开. 为此先证如下断言:

断言: 设 $r>0$, $B_r:=\{x\in\mathcal{X}: \|x\|_{\mathcal{X}}<r\}$, $Q:\mathcal{X}\to\mathcal{X}/M$ 为自然映射. 则

$$Q(B_r)=\{x+M: \|x+M\|_{\mathcal{X}/M}<r\}.$$

事实上，若 $x\in B_r$, i.e. $\|x\|_X<r$, 则易知 $Q(x)=x+M$ 且

$$\|x+M\|_{X/M}=dist(x,M)\overset{0\in M}{=\!=}dist(x,0)=\|x\|<r.$$

$\Rightarrow$ $x+M\in\{x+M:\|x+M\|<r\}$.

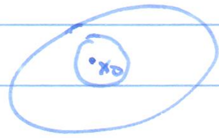
反过来，若 $x+M\in\{x+M:\|x+M\|<r\}\Rightarrow\exists y\in M$, s.t.

$$\|x+y\|_X<r.\Rightarrow x+y\in B_r$$

则由 ~~$Q(x)=x+M$~~ 且 $x+M=Q(x+y)\in Q(B_r)$.

则对 $\forall x_0+M\in W$, 由 $x_0\in Q^{-1}(W)$ 且 $Q^{-1}(W)$ 开，知 $\exists r>0$, s.t.

$$x_0+B_r:=\{x:\|x-x_0\|<r\}\subseteq Q^{-1}(W)$$



从而 $Q(x_0+B_r)\subseteq QQ^{-1}(W)=W$.

$x_0+M\in Q(x_0+B_r)$.

又由 $Q(x_0+B_r)\overset{类似}{=}\{x+M:\|x-x_0+M\|<r\}$ 开.

知 W 在 X/M 中开.

Step 4 ((d)的证明) 设 U 在 X 中开，由(c)，要证 $Q(U)$ 在 X/M 中开，只需证 $Q^{-1}(Q(U))$ 在 X 中开.

而 $Q^{-1}(Q(U))=U+M=\{u+y:u\in U,y\in M\}=\bigcup_{y\in M}\{U+y\}$.

其中对 $\forall y\in M$, $U+y$ 在 X 中开, $\Rightarrow Q^{-1}(Q(U))$ 在 X 中开. 证 #.

命题3.14 (闭子空间的和) 设 X 为赋范空间, $M\subseteq X$ 为闭子空间, 且 $N\subseteq X$ 为有限维子空间, 则 $M+N$ 为 X 的一个闭子空间.

证明: 考虑自然映射 $Q:X\to X/M$. 由 $\dim Q(N)\le\dim N<\infty$, 且 $Q(N)$ 为有限维子空间

$\Rightarrow Q(N)$ 在 X/M 中闭. 又由 Q 连续, $Q^{-1}(Q(N))=M+N$, 且 Q 连续. $\Rightarrow M+N$ 闭. #

定义3.45（积空间） 设I为一个指标集，$\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$为一族赋范空间，则积空间$\prod_{i\in I}\mathcal{X}_i$定义为

$$\prod_{i\in I}\mathcal{X}_i := \{\pi: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i,\ s.t.\ \pi(i)\in\mathcal{X}_i\}.$$

特别地，若$I=\mathbb{N}$为自然数集，则

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{X}_i := \{\{x_i\}_{i=1}^{\infty} : x_i\in\mathcal{X}_i\}.$$

~~对$\forall x\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{X}_i$~~，对$\forall 1\le p<\infty$，定义~~赋范~~积空间

$$\bigoplus_p \mathcal{X}_i := \{x\in\prod_{i\in I}\mathcal{X}_i : \|x\|_{\oplus_p} := \Big[\sum_{i\in I}\|x(i)\|^p\Big]^{\frac{1}{p}}<\infty\}$$

$$\bigoplus_\infty \mathcal{X}_i := \{x\in\prod_{i\in I}\mathcal{X}_i : \|x\|_{\oplus_\infty} := \sup_i\|x(i)\|<\infty\}.$$

此外，若$I=\mathbb{N}$为自然数，则定义如下积空间

$$\bigoplus_0 \mathcal{X}_i := \{x\in\prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{X}_n : \|x(n)\|\longrightarrow 0\},$$ 且对$\forall x\in\bigoplus_0\mathcal{X}_i$，定义

$$\|x\| := \sup_i\|x(i)\|.$$

命题3.46（积空间的性质） 设$\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$为一族赋范空间，且$\mathcal{X}=\bigoplus_p\mathcal{X}_i$，$1\le p\le\infty$，则

(a). $\mathcal{X}$也为一个赋范空间，且对$\forall i\in I$，定义投影$P_i:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}_i$

$$x\longmapsto P_i(x)=x(i),$$

则P_i有界，且对$\forall x\in\mathcal{X}$，$\|P_i(x)\|_{\mathcal{X}_i}\le\|x\|_{\mathcal{X}}$.

(b) $\mathcal{X}$为Banach空间$\Leftrightarrow$对$\forall i\in I$，$\mathcal{X}_i$为Banach空间.

(c) 对$\forall i\in I$，$P_i:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{X}_i$为开映射.

证明略.

§3.5 线性泛函

$$
\begin{tikzcd}
\text{超平面} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{线性泛函} \arrow[r] \arrow[d] & \text{对偶空间} \arrow[d] & \\
& \text{连续泛函} & \text{例子} \arrow[r] & \text{Riesz表示定理}
\end{tikzcd}
$$

定义3.5.1 (超平面). 设 X 为数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间, M 为 X 的一个线性子空间. 称 M 为 X 中的一个超平面, 若 $\dim(X/M)=1$.

命题3.5.2 (线性泛函与超平面). (a) 设 $f: X\to\mathbb{F}$ 为一个线性泛函, 且 $f\neq 0$, 则 $\ker f$ 为 X 中一个超平面.
(b) 若 M 为 X 的一个超平面, 则 $\exists$ 线性泛函 $f: X\to\mathbb{F}$, s.t. $M=\ker f$.

证明: Step1 ((a)的证明) 若 $f: X\to\mathbb{F}$ 为线性泛函. 定义 $\tilde{f}: X/\ker f\to\mathbb{F}$, s.t.

$$x+\ker f\longmapsto \tilde{f}(x+\ker f)=f(x).$$

知 $\tilde{f}$ 为线性同构. 从而 $\dim(X/\ker f)=\dim\mathbb{F}=1$.

Step2 ((b)的证明) 若 M 为 X 的一个超平面. 令 $Q: X\to X/M$ 为自然映射. 由 $X/M\cong\mathbb{F}$.

令 $T: X/M\to\mathbb{F}$ 为线性同构, 则定义 $f=T\circ Q: X\to\mathbb{F}$. 易知 f 为线性泛函, 且 $\ker f=M$.

命题3.5.3 (线性泛函与核空间). 设 f, g 为 X 上两个线性泛函, 满足 $\ker f=\ker g$. 则 $\exists\beta\in\mathbb{F}$, s.t. $g=\beta f$.

证明: 取 $x_0\in X$, s.t. $f(x_0)=1$, 由 $\ker f=\ker g$, 知 $g(x_0)\neq 0$. 则对 $\forall x\in X$, 令 $\alpha=f(x)$, 知

$x-\alpha x_0\in\ker f=\ker g$. [$\because f(x-\alpha x_0)=f(x)-\alpha=0$.]

$\Rightarrow g(x)=\alpha g(x_0)=g(x_0)f(x)$. 取 $\beta=g(x_0)$. $\Rightarrow g=\beta f$. #

命题3.5.2(赋范空间的超平面)(二择一性质). 设$\mathcal{X}$为赋范空间. M为$\mathcal{X}$中超平面. 则或者M闭, 或者M稠.

证明: 记$cl(M)$为M的闭包. 由M为线性子空间, 知cl也为线性子空间. 又$M \subseteq cl(M)$.
且$\dim(\mathcal{X}/M)=1$. 则

情形1°. 若M闭, 此时$cl(M)=M$.

情形2°. 若M不闭, 则$M \subsetneq cl(M)$. 又由$\dim(\mathcal{X}/M)=1$知. $cl(M)=\mathcal{X}$. $\Rightarrow M$稠. #

定理3.5.3(线性泛函的二择一性质)(连续泛函) 设$\mathcal{X}$为一个赋范空间. $f:\mathcal{X}\to\mathbb{F}$为线性泛函. 则$f$连续
$\Leftrightarrow \ker f$闭.

证明: "$\Rightarrow$" ✓ "$\Leftarrow$" 若$\ker f$闭. 令$Q:\mathcal{X}\to \mathcal{X}/\ker f$为自然映射. ~~由Q连续~~.

由$\ker f$为超平面, $\Rightarrow \dim(\mathcal{X}/\ker f)=1$. 令$T:\mathcal{X}/\ker f \to \mathbb{F}$为线性同构. 由$T$为有限维空间之间的线性映射. 知$T$连续. 又$Q$连续. 知

$$g := T\circ Q : \mathcal{X}\to\mathbb{F} \text{ 连续}.$$

且$\ker g = \ker f$. 从而$f=\alpha g$. 由g连续$\Rightarrow f$连续.

定义3.5.4(对偶空间). 设$\mathcal{X}$为赋范空间. 定义

$$\mathcal{X}^* := \{f : \mathcal{X}\to\mathbb{F} \text{ 为}\mathcal{X}\text{上的有界线性泛函}\}.$$

对$\forall f\in\mathcal{X}^*$, 定义

$$\|f\| := \sup_{\substack{x\in\mathcal{X} \\ \|x\|\le 1}} |f(x)|.$$

则称$(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$为$\mathcal{X}$的对偶空间.

命题3.5.5(对偶空间完备). 若$\mathcal{X}$为赋范空间. 则$\mathcal{X}^*$为Banach空间.

证明略

定理3.5.6 (Lebesgue空间的对偶) 设(X, Ω, μ)为一个σ-有限测度空间. 对$\forall$ X上可测函数f,

(~~定义~~ g, 定义 $L_g(f) := \int f(x)g(x)d\mu(x)$ (*).

(a). 设$1<p<\infty$, 则 $[L^p(X,\mu)]^* = L^q(X,\mu)$, 且. 对$\forall g \in L^q(X,\mu)$, $L_g \in [L^p(X,\mu)]^*$.

(b) 设$p=1$. 则 $[L^1(X,\mu)]^* = L^\infty(X,\mu)$, 且对 $\forall g \in L^\infty(X,\mu)$, $L_g \in [L^1(X,\mu)]^*$.

证明略.

定义3.5.7 (有界测度空间). 设X为一个局部紧空间. 记.

$$M(X) := \{\mu : \mu \text{为} X \text{上的一个正-值正则Borel测度, 满足} \|\mu\| := |\mu|(X) < \infty\}.$$

定理3.5.8 (Riesz表示定理) 设X为局部紧空间. $\mu \in M(X)$. 定义 $F_\mu : C_0(X) \to \mathbb{F}$, s.t.

$$F_\mu(f) = \int f d\mu.$$

则 $F_\mu \in (C_0(X))^*$. 进一步, $\mu \longrightarrow F_\mu$ 为 $M(X)$ 到 $(C_0(X))^*$上等距同构, i.e.

$$(C_0(X))^* = M(X).$$