§3.6 Hahn-Banach 定理

定义3.6.1 (次线性泛函). 设$\mathcal{X}$为一个向量空间. 称映射 $q:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 为一个次线性泛函, 若

(a) $q(x+y)\le q(x)+q(y)$ $\quad\forall x,y\in\mathcal{X}$,

(b) $q(\alpha x)=\alpha q(x)$, $\forall x\in\mathcal{X}$, $\alpha\ge 0$.

定理3.6.2 (Hahn-Banach定理) 设$\mathcal{X}$为$\mathbb{R}$上的向量空间. q为$\mathcal{X}$上的一个次线性泛函, 设M为$\mathcal{X}$中的一个线性子空间, $f:M\to\mathbb{R}$为M上一个线性泛函满足, 对$\forall x\in M$有

$$f(x)\le q(x).$$

则$\exists\,\mathcal{X}$上的线性泛函 $F:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, s.t. $\begin{cases}(i)\ F|_M=f\\(ii)\ 对\forall x\in\mathcal{X},\ F(x)\le q(x).\end{cases}$

~~证明:~~

引理3.6.4 (实与复线性泛函) 设$\mathcal{X}$为数域$\mathbb{C}$上的向量空间. 则

(a) 若$f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$为一个$\mathbb{R}$-线性泛函, 则 $\tilde f(x):=f(x)-if(ix)$ 为一个$\mathbb{C}$-线性泛函, 且 $f=\mathrm{Re}\tilde f$.

(b) 若$g:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$ 为一个$\mathbb{C}$-线性泛函, 令 $f:=\mathrm{Re} g$, 定义 $\tilde f$ 形如(a). 则 $\tilde f=g$

(c) 若 p 为$\mathcal{X}$上的一个半范, f与$\tilde f$形如(a), 则

$$|f(x)|\le p(x),\ \forall x\in\mathcal{X} \iff |\tilde f(x)|\le p(x),\ \forall x\in\mathcal{X}.$$

(d) 若$\mathcal{X}$为赋范空间, 且f与$\tilde f$形如(a), 则 $\|f\|=\|\tilde f\|$.

证明: Step1 ((a)的证明). 由f为一个$\mathbb{R}$-线性泛函, 知对$\forall x,y\in\mathcal{X}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, 有考虑

$$\tilde f(\alpha x+\beta y)=f(\alpha x+\beta y)-if(i\alpha x+i\beta y)\quad (*)$$

令$\alpha=a+ib$, $\beta=c+id$, 则 $\alpha x+\beta y=(a+ib)x+(c+id)y=(ax+cy)+(bix+diy)$

$$i\alpha x+i\beta y=(a+ib)ix+(c+id)iy=aix+ciy-bx-dy$$

因此, 利用(*)以及f的$\mathbb{R}$-线性性, 知

$$\tilde f(\alpha x+\beta y)=\cancel{f(ax+cy)+}\ f(ax+cy+bix+diy)-if(aix+ciy-bx-dy)$$

$$=af(x)+cf(y)+bf(ix)+df(iy)-aif(ix)-cif(iy)+bif(x)+dif(y)$$

$= [af(x)+bf(ix)-aif(ix)+bif(x)] + [cf(y)+df(iy)-cif(iy)+dif(y)]$

$= (a+ib)(f(x)-if(ix)) + (c+id)(f(y)-if(iy))$

$= \alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{f}(y)$. $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ 为 $\mathbb{C}$-线性泛函.

下证 $f=\mathrm{Re}\tilde{f}$. 事实上，对 $\forall x\in\mathcal{X}$，有

$$\mathrm{Re}\tilde{f}(x) = \mathrm{Re}\left[\overset{\in\mathbb{R}}{f(x)} - i\overset{\in\mathbb{R}}{f(ix)}\right] = f(x).$$

#

$$\begin{tikzcd} \text{实} & \text{复} \\ f \arrow[r] & \tilde{f} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Re}"] \end{tikzcd}$$

Step2 ((b)的证明) 对 $\forall x\in\mathcal{X}$，由

$$\tilde{f}(x) = f(x) - if(ix)$$

$$= \mathrm{Re}\,g(x) - i\,\mathrm{Re}\,g(ix)$$

$$\overset{g\text{为}\mathbb{C}\text{-线性}}{=} \mathrm{Re}\,g(x) + -i\,\mathrm{Re}\left[i\overset{\mathrm{Re}g+i\mathrm{Im}g}{\overset{\parallel}{g(x)}}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\,g(x) + i\,\mathrm{Im}\,g(x) = g(x).$$

Step3 ((c)的证明). 先证"$\Rightarrow$" 若对 $\forall x\in\mathcal{X}$，$|f(x)|\le p(x)$，则 对 $\forall x\in\mathcal{X}$，取 $\theta\in[0,2\pi]$, s.t.

$$\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|e^{i\theta}. \Rightarrow |\tilde{f}(x)| = e^{-i\theta}\tilde{f}(x) \overset{\mathbb{C}\text{-线性}}{=} \tilde{f}(xe^{-i\theta}) \overset{\text{为实数}}{=} \mathrm{Re}\tilde{f}(xe^{-i\theta})$$

$$= f(xe^{-i\theta}) \le p(xe^{-i\theta}) \overset{\text{半范}}{=} p(x).$$

下证"$\Leftarrow$" 若对 $\forall x\in\mathcal{X}$ 有 $|\tilde{f}(x)|\le p(x)$，则有

$$|f(x)| = |\mathrm{Re}\tilde{f}(x)| \le |\tilde{f}(x)| \le p(x). \Rightarrow f(x)\le p(x).$$

Step4 ((d)的证明) 在(c)中，取 $p(x)=C\|x\|$，应用(c)得

$$|f(x)| \le C\|x\|,\ \forall x\in\mathcal{X} \Leftrightarrow |\tilde{f}(x)| \le C\|x\|.$$

由泛函范数的定义知 $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

#

推论3.6.4（一般情形Hahn-Banach定理）. 设$\mathscr{X}$为数域$\mathbb{F}$上的向量空间. $\mathcal{M}$为$\mathscr{X}$上的线性子空间. 设$p:\mathscr{X}\to[0,\infty)$为一个半范，$f:\mathcal{M}\to\mathbb{F}$为一个线性泛函. 满足对$\forall x\in\mathcal{M}$，$|f(x)|\le p(x)$，则$\exists\ \mathscr{X}$上的线性泛函$F:\mathscr{X}\to\mathbb{F}$, s.t. $\begin{cases}(a)\ F|_{\mathcal{M}}=f\\ (b)\ |F(x)|\le p(x),\ \forall x\in\mathscr{X}.\end{cases}$

证明: Step1（$\mathbb{F}=\mathbb{R}$的情形）. 此时对$\forall x\in\mathcal{M}$，有

$$f(x)\le|f(x)|\le p(x).$$

因此，应用定理3.6.2知$\exists\ \mathscr{X}$上的线性泛函F s.t. $\begin{cases}(a)'\ F|_{\mathcal{M}}=f\\ (b)'\ F(x)\le p(x).\end{cases}$

又由$-F(x)=F(-x)\le p(-x)=p(x)$. $\Rightarrow|F(x)|\le p(x)$. $\Rightarrow$推论在$\mathbb{F}=\mathbb{R}$时成立.

Step2（$\mathbb{F}=\mathbb{C}$的情形）由$f:\mathcal{M}\to\mathbb{F}$为一个$\mathbb{C}$-线性泛函. 令. $f_1:=\mathrm{Re}f$. 由引理3.6.3知对$\forall x\in\mathcal{M}$.

$|f_1(x)|\le p(x)$. 且f_1为$\mathcal{M}$上的一个$\mathbb{R}$-线性泛函. 应用情形1°. 知$\exists F_1$为$\mathscr{X}\to\mathbb{R}$, s.t.

$F_1|_{\mathcal{M}}=f_1$且$|F_1|\le p$. 令$F(x):=F_1(x)-iF_1(ix)$. 对$\forall x\in\mathcal{M}$. 得.

$$\begin{cases}|F(x)|\le p(x).\\ F|_{\mathcal{M}}=f(x).\end{cases}$$

#

推论3.6.5（有界线性泛函的延拓）. 设$\mathscr{X}$为赋范空间. $\mathcal{M}$为$\mathscr{X}$的一个线性子空间. $f:\mathcal{M}\to\mathbb{F}$为一个有界线性泛函. 则$\exists F\in\mathscr{X}^*$（$\mathscr{X}$上的有界线性泛函）s.t. $F|_{\mathcal{M}}=f$且$\|F\|=\|f\|$

证明: 显然.

推论3.6.6（插值有界线性泛函）. 设$\mathscr{X}$为赋范空间, $\{x_1,\cdots,x_d\}$为$\mathscr{X}$中的一个线性独立子集. $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_d\}\subseteq\mathbb{F}$. 则$\exists f\in\mathscr{X}^*$, s.t. 对$\forall j\in\{1,\cdots,d\}$, 有

$$f(x_j)=\alpha_j.$$

证明：令 $M := \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_d\}$，定义 $g: M \to \mathbb{F}$. ~~对~~ 对 $\forall \sum_j \beta_j x_j \in M$,

$$g\left(\sum_j \beta_j x_j\right) = \sum_j \beta_j g(x_j) = \sum_j \beta_j \alpha_j.$$

易知 g 为线性映射. 又由 M 为有限维线性空间，知 g 为连续线性泛函. 应用推论3.6.5. 知 $\exists$ $\mathcal{X}$ 上的有界线性泛函 f s.t. $f|_M = g$. #

推论3.6.7（范数的对偶表示）设 $\mathcal{X}$ 为赋范空间，$x \in \mathcal{X}$，则

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{X}^* \text{ 且 } \|f\| \le 1\} =: \alpha.$$

进一步，上确界可达到.

证明：先证"$\geq$" 对 $\forall f \in \mathcal{X}^*$ 满足 $\|f\| \le 1$，有

$$|f(x)| \le \|x\|.$$

由 f 的任意性，知 $\geq$ 成立. 下证"$\le$". 令 $M := \vee\{x\}$. ~~则~~ 并定义 M 上的有界线性泛函 g 如下.
对 $\forall \beta x \in M$，有

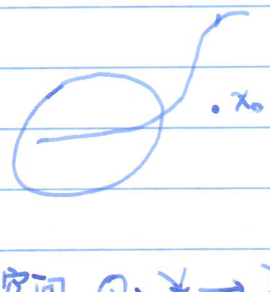
$$g(\beta x) = \beta g(x) = \beta \|x\|.$$

易知 $\|g\| = 1$. 应用推论3.6.5. 知 $\exists$ $\mathcal{X}$ 上的一个有界线性泛函 f, s.t. $f|_M = g$, 且 $\|f\| = \|g\| = 1$.

从而 $f(x) = g(x) = \|x\|$. $\Rightarrow$. $\le$ 成立. 且上确界可取到. #

推论3.6.8（分离泛函）设 $\mathcal{X}$ 为赋范空间，$M \le \mathcal{X}$, $x_0 \in \mathcal{X} \setminus M$. 且 $d := d(x_0, M)$. 则 $\exists f \in \mathcal{X}^*$, s.t.

$$\begin{cases} f(x_0) = 1 \\ f(x) = 0, \text{ 对 } \forall x \in M. \\ \|f\| = d^{-1}. \end{cases}$$



证明：Step 1（f 的构造）. 设 $\mathcal{X}/M$ 为商空间，$Q: \mathcal{X} \to \mathcal{X}/M$ 为自然映射. 定义 $\mathcal{X}/M$ 上的有界线性
泛函 $g \in (\mathcal{X}/M)^*$ ~~如下~~. ~~对 $\forall$ $x_0 + M \in \mathcal{X}/M$, $g(x_0+M)$~~ $:=$ 满足

Stop2 (α_0 的上界) 若$F(x)$满足结论，则对 $\forall t\ge 0$, $y_1\in M$, 有

$$F(y_1+tx_0)=f(y_1)+t\alpha_0\le g(y_1+tx_0)$$

因此,

$$\alpha_0\le -t^{-1}f(y_1)+t^{-1}g(tx_0+y_1)$$

$$\overset{g\text{次线性}}{=} -f(y_1/t)+g\left(x_0+\frac{y_1}{t}\right),$$ 又由 $y_1/t\in M$. 知

$$\alpha_0\le -f(y_1)+g(x_0+y_1),\quad \forall y_1\in M. \qquad (*1)$$

Stop3 (α_0 的下界). 若$F(x)$满足结论，则 对$\forall t\ge 0$, $y_2\in M$, 有

$$F(\cancel{-t}\, y_2-tx_0)=f(y_2)-t\alpha_0\le g(y_2-tx_0).$$

类似于(*1), 可得

$$\alpha_0\ge f(y_2)-g(-x_0+y_1). \qquad (*2)$$

联立(*1)与(*2), 知要使得F存在. 对$\forall y_1, y_2\in M$,

$$f(y_2)-g(-x_0+y_2)\le -f(y_1)+g(x_0+y_1). \qquad (*3)$$

$$\Leftrightarrow f(y_1+y_2)\le g(x_0+y_1)+g(\cancel{y}-x_0+y_1).$$

~~Stop4 (α_0 的确定)~~.

而 $$f(y_1+y_2)\le g(y_1+y_2)=g((y_1+x_0)+(y_1-x_0))\overset{\text{次线性}}{\le} g(y_1+x_0)+g(y_1-x_0)\Rightarrow (*3)\text{成立}$$

Stop4 (α_0 的确定) 取α_0满足

$$\sup_{y_2\in M}[f(y_2)-g(-x_0+y_2)]\le\alpha_0\le\inf_{y_1\in M}[-f(y_1)+g(x_0+y_1)].$$

知这样的α_0存在. 定义 $F(x)=F(y+tx_0)=f(y)+t\alpha_0$. 知 F满足定理3.6.2中结论.

#

$g(x_0+M) = d = \|x_0+M\| := \inf\{\|x_0-y\| : y\in M\}$.

且 $\|g\|=1$. 定义 $f := d^{-1} g\circ Q : \mathcal{X}\to\mathbb{F}$.

Step2 (f的性质). 先证f连续. ∫ Q, g 连续了. 又 对 $\forall x\in M$,

$$f(x) = d^{-1} g\circ Q(x) \overset{x\in M}{=} d^{-1} g(x+M) \overset{g的线性性. 0\mapsto 0.}{=} 0.$$

而 $f(x_0) = d^{-1} g\circ Q(x_0) = d^{-1} g(x_0+M) = \frac{d}{d} = 1$.

下证 $\|f\| \le d^{-1}$.

∫ 事实上, 对 $\forall x\in\mathcal{X}$, 有 $|f(x)| = d^{-1}|g(Q(x))| \le \frac{1}{d}\|Q(x)\| \le \frac{\|x\|}{d}$. ⅃

反之. 由 $\|g\|=1$, $\Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{X}$, s.t. $\begin{cases} |g(x_n+M)| \to 1. \\ \|x_n+M\| < 1. \end{cases}$

令 $y_n\in M$, s.t. $\|x_n+y_n\|<1$, $\Rightarrow |f(x_n+y_n)| = d^{-1}|g(x_n+M)| \to d^{-1}$. $\Rightarrow \|f\| = d^{-1}$.

#

引理3.6.1 (H-B定理的一个简单情形). 在定理3.6.2条件下, 若 $\dim \mathcal{X}/M = 1$, 则 定理3.6.2结论成立.
(基分解似)

证明: Step1 (延拓下$F(x_0)$的选取). 由 $\dim \mathcal{X}/M = 1$, 固定 $x_0 \in \mathcal{X}\setminus M$. 则知.

$$\mathcal{X} = M \vee \{x_0\} = \{y + t x_0 : y\in M, t\in\mathbb{R}\}. \quad ⊛$$

则要得到延拓 $F : \mathcal{X}\to\mathbb{R}$, 只需确定 $F(x_0)$ 即可. ⌈

∫ 事实上, 对 $\forall x\in\mathcal{X}$, 由 ⊛ 知 $\exists y\in M$, $t\in\mathbb{R}$, 有 $x = y + t x_0$, 从而 由线性性知

$$F(x) = F(y+tx_0) = F(y) + tF(x_0) \overset{F|_M = f}{=} f(y) + tF(x_0).$$

记 $\alpha_0 := F(x_0)$

现回到 定理3.6.2的证明.

Step1 (佐恩引理).

- 设 $(S, \preceq)$ 为一个偏序集，子集 $T \subseteq S$ 称为一个全序子集(链)，若对 $\forall a, b \in T$，

  $a \preceq b$ 与 $b \preceq a$ 必有一个发生.
- 设 $(S, \preceq)$ 为一个偏序集，$V \subseteq S$，$a \in S$，则 a 称为 V 的一个上界，若对 $\forall v \in V$，

  $v \preceq a$.

  称 $m \in S$ 为 S 的一个极大元，若对 $\forall x \in S$，满足 $m \preceq x$，一定有 $m = x$.

定理1 (佐恩引理) 设 $(S, \preceq)$ 为一个偏序集，若 S 中 $\forall$ 全序集一定 $\exists$ 一个上界，则

$(S, \preceq)$ 中至少 $\exists$ 一个极大元.

Step2 (构造偏序集). 令

$$\mathcal{S} := \{(M_i, f_i) : M_i \text{ 为 } X \text{ 中线性子空间满足 } M_i \supseteq M,\ f_i : M_i \to \mathbb{R} \text{ 为线性泛函},\ f_i \le g \text{ on } M_i\}$$

易知 $\mathcal{S} \neq \phi$. 在 $\mathcal{S}$ 中定义偏序关系，

$$(M_1, f_1) \preceq (M_2, f_2) \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \text{ 且 } f_2|_{M_1} = f_1.$$

由此得 $(\mathcal{S}, \preceq)$ 为一个偏序集. 另一方面. 任取 $\mathcal{S}$ 中一个全序子集 $\mathcal{C} := \{(M_i, f_i) : i \in I\}$

令 $N := \bigcup_{i \in I} M_i$，易知 N 也为一个线性子空间. 且满足对 $\forall i \in I$，

$$M_i \subseteq N \quad (*)$$

进一步，在 N 上定义线性泛函 $F : N \to \mathbb{R}$. 满足. 对 $\forall x \in N$. 由 $\exists i_0 \in I$. s.t. $x \in M_{i_0}$，

则 $F(x) := f_{i_0}(x)$.

由 $\mathcal{C}$ 为全序集，知这样的 F 为良定义的.

应用佐恩引理，知 $(\mathcal{G}, \preceq)$ 中 $\exists$ 一个极大元 $(\mathcal{Y}, F)$. 又由引理 3.6.9. 知

$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$（否则可利用引理 3.6.9. 一步步提高 $\mathcal{Y}$ 的维数，与 $\mathcal{Y}$ 的极大矛盾）.
这说明了 $\mathcal{X}$ 上泛函的存在性.

定理 3.6.13（线性子空间闭包的刻画）. 设 $\mathcal{X}$ 为赋范空间，$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{X}$ 为线性子空间，则

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{M} = \bigcap \{\ker f : f \in \mathcal{X}^* \text{ 且 } \mathcal{M} \subseteq \ker f\} =: \mathcal{N}.$$

证明：Step 1（$\mathrm{cl}\,\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$）. 对 $\forall f \in \mathcal{X}^*$，满足 $\mathcal{M} \subseteq \ker f$，由 $\ker f$ 闭，知

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{M} \subseteq \ker f \Rightarrow \mathrm{cl}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}.$$

Step 2（$\mathcal{N} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{M})$）. 反证，若 $x_0 \notin \mathrm{cl}(\mathcal{M})$，由 $\mathrm{cl}(\mathcal{M})$ 闭，知 ~~$\exists$~~

$$d(x_0, \mathrm{cl}(\mathcal{M})) > 0.$$

应用推论 3.6.8，知 $\exists\, f \in \mathcal{X}^*$, s.t. $\begin{cases} f(x_0) = 1 \\ \text{对 } \forall x \in \mathcal{M},\ f(x) = 0. \end{cases}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{X}^*$ 且 $\mathcal{M} \subseteq \ker f$，但 $x_0 \notin \ker f$. $\Rightarrow x_0 \notin \mathcal{N}$. 故 $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{M})$. #

推论 3.6.14（稠密性刻画）. 设 $\mathcal{X}$ 为赋范空间，$\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的线性子空间，则 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中稠密 $\Leftrightarrow$
$\forall f \in \mathcal{X}^*$，若 $\mathcal{M} \subseteq \ker f$，有 $f \equiv 0$.

证明：应用定理 3.6.13.

"$\Rightarrow$" 若 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{X}$ 中稠，知 $\mathrm{cl}(\mathcal{M}) = \mathcal{X}$. 由定理 3.6.14. 知对 $\forall f \in \mathcal{X}^*$，且 $\mathcal{M} \subseteq \ker f$，有

$$\ker f = \mathcal{X}. \Rightarrow f \equiv 0.$$

"$\Leftarrow$" 若对 $\forall f \in \mathcal{X}^*$，$\mathcal{M} \subseteq \ker f$，有 $f \equiv 0 \xrightarrow{} \ker f = \mathcal{X}$. 应用定理 3.6.14. 知

$$\mathrm{cl}\,\mathcal{M} = \ker f = \mathcal{X}. \quad \#$$