§1 Sobolev不等式

§1.1 Gagliardo-Nirenberg-Trudinger不等式

• 设 $1\le p<n$, 令

$$p^*:=\frac{np}{n-p}$$

为p的Sobolev指标. 易知 $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$.

定理1.1.1 (G-N-T不等式) 假设 $1\le p<n$. 则∃正常数C, (只依赖p与n) s.t.

对 $\forall f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 由 $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 中稠, 只需假设 $f\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Step1 (p=1的情形) 由 $f\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, 则对 $\forall 1\le i\le n$, 有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_n)=\int_{-\infty}^{x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,t_i,\cdots x_n)\,dt_i$$

故 $$|f(x)|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|Df(x_1,\cdots,t_i,\cdots x_n)|\,dt_i.$$

从而

$$|f(x)|^{\overset{1^*}{\overbrace{\frac{n}{n-1}}}}\le\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|Df(x_1,\cdots,t_i,\cdots x_n)|\,dt_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

在上述不等式中关于 x_1 积分, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^{1^*}dx_1\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dt_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dt_i\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dt_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dx_1dt_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

进一步,关于 x_2 积分,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f|^{1^*}dx_1dx_2\le\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dx_1dt_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dt_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dx_1dx_2dt_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

不断持续下去,直到关于 x_n 积分,得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{1^*}dx\le\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|Df|\,dx_1\cdots dt_i\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df|\,dx\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

由此,可得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{1^*}dx\right)^{\frac{1}{1^*}}\le\int_{\mathbb{R}^n}|Df|\,dx\,. \qquad (*).$$

Step 2 ($1<p<n$ 的情形) 此时,令 $g=|f|^{\gamma}$,其中 $\gamma>0$ 待定. 对于 g 应用 $(*)$ 式,得.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{\gamma-1}|Df|\,dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le}\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

取 $\gamma>0$, s.t. $\dfrac{\gamma n}{n-1}=\dfrac{(\gamma-1)p}{p-1}\iff\gamma=\dfrac{p(n-1)}{n-p}>0$.

$$\Rightarrow\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}=\frac{np}{n-p}=p^*.$$

从而上式变为

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p^*}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p^*}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

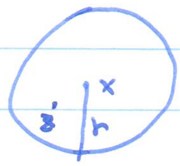
#

§1.2 球上的 Poincaré 不等式

引理1.2.1 (差分不等式)

设 $1\le p<\infty$. 则 $\exists$ 正常 C,(仅依赖 n 与 p) s.t. 对 $\forall$ 球 $B(x,r)\subseteq\mathbb{R}^n$, $f\in C^1(B(x,r))$ 以及 $z\in B(x,r)$, s.t.

$$\int_{B(x,r)}|f(y)-f(z)|^p dy \le C r^{n+p-1}\int_{B(x,r)}|Df(y)|^p|y-z|^{1-n}dy$$

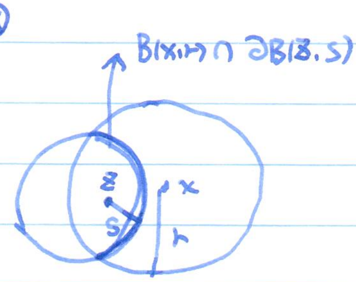


证明: 对 $\forall$ $y,z\in B(x,r)$, 由

$$f(y)-f(z)=\int_0^1\frac{d}{dt}f(z+t(y-z))dt=\int_0^1 Df(z+t(y-z))dt\cdot(y-z).$$

知

$$|f(y)-f(z)|^p\le|y-z|^p\int_0^1|Df(z+t(y-z))|^p dt \qquad (*)$$



因此，对 $\forall s>0$ 有

$$\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,s)}|f(y)-f(z)|^p d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

$$\overset{(*)+\text{Fubini}}{\le} s^p\int_0^1\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,s)}|Df(z+t(y-z))|^p d\mathcal{H}^{n-1}(y)\,dt \qquad (**)$$

在(**)中令 $w=z+t(y-z)$，知 $d\mathcal{H}^{n-1}(w)=t^{n-1}d\mathcal{H}^{n-1}(y)$. 且. 若 $y\in B(x,r)\cap\partial B(z,s)$,

有
$$\begin{cases}|y-x|<r\\ |y-z|=s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|w-x|=|t(y-x)+(1-t)(z-x)|<r\\ |w-z|=|t(y-z)|=ts\end{cases}\Rightarrow w\in B(x,r)\cap\partial B(z,ts)$$

从而
$$\text{上式}\le s^p\int_0^1\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,ts)}|Df(w)|^p\frac{d\mathcal{H}^{n-1}(w)}{t^{n-1}}\,dt\qquad \left[|w-z|=ts\Rightarrow\frac{1}{t^{n-1}}=\frac{1}{|w-z|^{n-1}}s^{n-1}\right]$$

$$=s^{n+p-1}\int_0^1\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,ts)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}d\mathcal{H}^{n-1}(w)\,dt.\quad (***)$$

回忆极坐标公式 [Evans-Gariepy, Book, P.118, Prop.1]

[设 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 $\mathcal{L}^n$-可积，则

$$\int_{\mathbb{R}^n}g\,dx=\int_0^\infty\left[\int_{\partial B(a,r)}g\,d\mathcal{H}^{n-1}\right]dr.\quad (*)$$]

令 $g(w)=|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}\mathbb{1}_{B(x,r)}(w)\cancel{\mathbb{1}_{\partial B(z,ts)}(w)}\mathbb{1}_{B(z,s)}(w)$.

应用(*)得

$$\int_0^1\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,ts)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}d\mathcal{H}^{n-1}(w)\,dt=\int_0^\infty\left[\int_{\partial B(a,r)}g\,d\mathcal{H}^{n-1}\right]dr$$

$$=\int_{B(z,s)\cap B(x,r)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}\,dw.$$

联立(***)式，得

$$\text{上式}\le s^{n+p-1}\int_{B(z,s)\cap B(x,r)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}\,dw.$$

再应用一次(※)式得

$$\int_{B(x,r)} |f(y)-f(z)|^p dy \le \int_0^{2r} s^{n+p-2} \int_{B(x,r)\cap B(z,s)} |Df(w)|^p |w-z|^{1-n} dw$$

$$\le r^{n+p-1} \int_{B(x,r)} |Df(w)|^p |w-z|^{1-n} dw.$$

#.

定理1.2.2 (Poincaré不等式) 设 $1\le p<n$. 则 $\exists$ 正常数 C (仅依赖 p 与 n) s.t. 对 $\forall$ 球 $B(x,r)\subset\mathbb{R}^n$ 与 $f\in W^{1,p}(U(x,r))$, 有

$$\left(⨍_{B(x,r)} |f-f_{B(x,r)}|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{p^*}} \le Cr\left(⨍_{B(x,r)} |Df|^p dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $f_{B(x,r)} := \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy$

证明:

不失一般性, 设 $f\in C^1(B(x,r))$.

Step1 (p-p Poincaré) 应用引理1.2.1 得

$$⨍_{B(x,r)} |f-f_{B(x,r)}|^p dy \overset{f_B\text{的定义}}{=} ⨍_{B(x,r)} \left|⨍_{B(x,r)} (f(y)-f(z))\,dz\right|^p dy$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} ⨍_{B(x,r)} ⨍_{B(x,r)} |f(y)-f(z)|^p dz\,dy$$

$$\overset{\text{引理1.2.1}}{\lesssim} ⨍_{B(x,r)} r^{p-1} \int_{B(x,r)} |Df(y)|^p |y-z|^{1-n} dz\,dy$$

$$\lesssim r^p ⨍_{B(x,r)} |Df|^p dz, \qquad (※)$$

Step 2 (带余项Poincaré) 下证对 $\forall g \in W^{1,p}(U(x,r))$, 有

$$\left(⨍_{B(x,r)} |g|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C \left[r^p ⨍_{B(x,r)} |Dg|^p dy + ⨍_{B(x,r)} |g|^p dy \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (**)$$

事实上, 回顾 GNS 不等式

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (*)$$

~~取~~ 对 r 的大小分情况.

情形1° $r=1$. 此时在 $(*)$ 中取 $\bar{g}$ 为 g 从 $B(x,1)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上的延拓, 满足.

$$\|\bar{g}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{W^{1,p}(B(x,1))}.$$

则应用 $(*)$, 有

$$\|g\|_{L^{p^*}(B(x,1))} \le \|\bar{g}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \overset{(*)}{\lesssim} \|D\bar{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\sim \left[\int_{B(x,1)} (|Dg(y)|^p + |g(y)|^p) dy \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (***)$$

情形2°. $r \neq 1$. 此时, 令 $g_r(z) = g(rx + rz)$. 易知,

$$g(y) = g\left[r\left(\frac{y-x}{r}\right) + rx\right] = g_r\left(\frac{y-x}{r}\right).$$

对 $\forall q > 1$

从而.
$$\left[⨍_{B(x,r)} |g(y)|^q dy\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} \left|g_r\left(\frac{y-x}{r}\right)\right|^q dy\right]^{\frac{1}{q}}$$

令 $w = \frac{y-x}{r}$

$$= \left[\int_{B(0,1)} |g_r(w)|^q dw\right]^{\frac{1}{q}} \quad (**)$$

应用(***)+(**),得

$$\left(⨍_{B(x,r)}|g|^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}}=\|g_r\|_{L^{p^*}(B(0,1))}\lesssim\left[\int_{B(0,1)}(|Dg_r(w)|^p+|g_r(w)|^p)\,dw\right]^{\frac{1}{p}}$$

再代回 $w=\frac{y-x}{r}$,由 $Dg_r(w)=\cancel{Dg(\frac{y-x}{r})}=Dg(rw+rz)$

$$=(Dg)(rw+rz)\cdot r.$$

再由(**)得

$$上式\lesssim\left[r^p⨍_{B(x,r)}|Dg(y)|^p+⨍_{B(x,r)}|g(y)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$\Rightarrow$ (**)成立.

Step3(去掉余项) 联立Step1与2,取 $g(x)=f-f_{B(x,r)}$,得 $Dg=Df$ 且

$$\left(⨍_{B(x,r)}|f-f_{B(x,r)}|^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}}\overset{Step2}{\lesssim}\left[r^p⨍_{B(x,r)}|Df(y)|^p+⨍_{B(x,r)}|f-f_B|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{Step1}{\lesssim}r\left(⨍_{B(x,r)}|Df(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\Rightarrow \text{Poincaré不等式成立.}$$

#.

§1.3 Morrey不等式.

定义1.3.1(Hölder连续) 设 $0<\alpha<1$,称函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 α-阶Hölder连续,若.

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty.$$

定理1.3.2 (Morrey不等式) 设 $n<p<\infty$

(i) ~~设 $n<p<\infty$,~~ 则 ∃正常数 C,(仅依赖 p 与 n), s.t. 对∀球 $B(x,r)\subseteq\mathbb{R}^n$, $f\in W^{1,p}(U(x,r))$

以及 $\mathcal{L}^n$-a.e. $y,z\in U(x,r)$, 有

$$|f(y)-f(z)|\le Cr\left(⨍_{B(x,r)}|Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}}$$

(ii) 设 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, 则对∀$x\in\mathbb{R}^n$, 极限

$$\lim_{r\to0}(f)_{B(x,r)}=:f^*(x)$$

∃, 且 f^* 为 $1-\frac{n}{p}$ 阶 Hölder 连续.

证明: Step 1 ((i)的主体证明) 假设 $f\in C^1$. 应用引理1.2.1 (取 $p=1$).

$$\Rightarrow ⨍_{B(x,r)}|f(y)-f(z)|dy\lesssim r^n\int_{B(x,r)}|Df(y)||y-z|^{1-n}dy$$

知对∀ $y,z\in U(x,r)$.

$$|f(y)-f(z)|\le|(f(y)-f_{B(x,r)})+(f_{B(x,r)}-f(z))|$$

$$\le⨍_{B(x,r)}\left(|f(y)-f(w)|+|f(w)-f(z)|\right)dw$$

$$\lesssim\int_{B(x,r)}|Df(w)|\left(|y-w|^{1-n}+|w-z|^{1-n}\right)dw$$

$$\lesssim\underbrace{\left(\int_{B(x,r)}\left(|y-w|^{1-n}+|z-w|^{1-n}\right)^{\frac{p}{p-1}}dw\right)^{\frac{p-1}{p}}}_{\circledast}\left(\int_{B(x,r)}|Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}}$$

∵ $|y-w|\le|x-y|+|x-w|\le2r$.

$|z-w|\le|z-x|+|x-w|<2r$

$$\circledast\lesssim\int_{B(y,2r)}|y-w|^{\frac{p(1-n)}{p-1}}dw+\int_{B(z,2r)}|z-w|^{\frac{p(1-n)}{p-1}}dw\lesssim r^{n-\frac{(n-1)p}{p-1}}.$$

$$\lesssim r^{\left[n-\frac{(n-1)p}{p-1}\right]\frac{p-1}{p}}\left(\int_{B(x,r)}|Df|^p\,dw\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sim r^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,r)}|Df|^p\,dw\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Step2 ($C^1\to W^{1,p}$). 对一般的 $f\in W^{1,p}(U(x,r))$. 利用逼近.

Step3 ((ii)的证明) 设 $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. 则由(i), 对 $\mathcal{L}^n$-a.e. x,y, 令 $r=|x-y|$.

有 $$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\left(\int_{B(x,r)}|Df|^p\,dw\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}}.$$

$\Rightarrow$ f $\mathcal{L}^n$-a.e. 等于 $(1-\frac{n}{p})$-阶 Hölder 连续函数.

§2. Sobolev 函数的紧性.

定理2.1 (紧性) (Rellich-Kondrachov) 设 U 有界, ∂U 为 Lipschitz 光滑, $1<p<n$, 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq W^{1,p}(U)$ 满足

$$\sup_k\|f_k\|_{W^{1,p}(U)}<\infty.$$

则 $\exists$ 子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ 与 $f\in W^{1,p}(U)$, s.t. 对 $\forall\, q\in[1,p^*)$,

紧嵌入

$$f_{k_j}\longrightarrow f \text{ in } L^q(U). \text{ i.e. } W^{1,p}(U)\subset\subset L^q(U)$$

证明: Step1 (延拓). 取有界开集 V, s.t. $U\Subset V$, 对 $\forall f_k\in W^{1,p}(U)$, 延拓 f_k

于 $\mathbb{R}^n$, 得 $\bar{f}_k$, s.t.

(i) $\operatorname{supp}\bar{f}_k\subseteq V$

(ii). $\sup_k\|\bar{f}_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\sup_k\|f_k\|_{W^{1,p}(U)}<\infty$ ⊛

性质2的证明. 先证$\{f_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$有界. 事实上, 由$f_k^\varepsilon$的定义知

$$|f_k^\varepsilon(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|f_k(y)|dy$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} \varepsilon^{-\frac{n}{p}} \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \varepsilon^{-\frac{n}{p}}. \Rightarrow \{f_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty \text{一致有界(关于}k)$$

另一方面,

$$|Df_k^\varepsilon(x)| \le \int_{B(x,\varepsilon)} |D\eta_\varepsilon(x-y)||f_k(y)|dy$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} \varepsilon^{-\frac{n}{p}-1} \|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \varepsilon^{-\frac{n}{p}-1} \Rightarrow \{Df_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty \text{关于}k\text{一致有界}.$$

从而 等度连续: $\forall \varepsilon>0$, $\exists\delta$, s.t. 对 $\forall |x-y|<\delta$, $\forall$ $k=1,\cdots\infty$,

$$|f_k^\varepsilon(x)-f_k^\varepsilon(y)|<\varepsilon.$$

由$\{Df_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$一致有界 $\Rightarrow$ $\{f_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ 等度连续.

性质3的证明: 利用性质1, 取ε充分小, s.t.

$$\sup_k \|f_k^\varepsilon - f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\delta}{3}.$$

回顾Arzela-Ascoli定理: 设$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C(\mathbb{R}^n)$一致有界, 且等度连续, 则其$\exists$一致收敛的子列.

应用性质2+AA定理, 知$\exists$子列$\{f_{k_j}^\varepsilon\}_{j=1}^\infty$ s.t. $f_{k_j}^\varepsilon$在$\mathbb{R}^n$上一致收敛. 因此,

$$\|f_{k_j}-f_{k_i}\|_{L^p(U)} \le \|f_{k_j}-f_{k_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le \|f_{k_j}-f_{k_j}^\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_{k_j}^\varepsilon - f_{k_i}^\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|f_{k_i}^\varepsilon - f_{k_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\le \frac{2}{3}\delta + \|f_{k_j}^\varepsilon - f_{k_i}^\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \text{(由 supp}\, f_{k_j}^\varepsilon\text{. supp}\, f_{k_i}^\varepsilon\text{ 有界)}$$

$$\le \delta$$

Step 2 令 $\eta(x) := \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1 \\ 0 & |x|\geq 1 \end{cases}$,

其中常数 $c>0$, s.t. $\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx=1$. 令 $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ 为磨光子. 则对 f_k 作磨光, 得如下

$$f_k^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f_k = \int_{B(0,1)}\eta(z)f_k(x-\varepsilon z)dz$$

易知如下三条性质成立.

性质1: $\|f_k^\varepsilon - f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < C\varepsilon$ 关于 k 一致成立.

性质2: 对 $\forall \varepsilon>0$, 序列 $\{f_k^\varepsilon\}_{k=1}^\infty$ 有界且等度连续于 $\mathbb{R}^n$.

性质3: 对 $\forall \delta>0$, $\exists$ 子列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ s.t.

$$\limsup_{i,j\to\infty}\|f_{k_i}-f_{k_j}\|_{L^p(U)} \leq \delta.$$

• 性质1的证明: 不失一般性, 假设 f_k 光滑. 则

$$|f_k^\varepsilon(x) - f_k(x)| \leq \int_{B(0,1)}\eta(z)\,|f_k(x-\varepsilon z)-f_k(x)|\,dz$$

$$= \int_{B(0,1)}\eta(z)\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}f_k(x-t\varepsilon z)dt\right|dz$$

$$\leq \varepsilon\int_{B(0,1)}\eta(z)\int_0^1 |Df_k(x-t\varepsilon z)|\,dt\,dz$$

因此, $\|f_k^\varepsilon - f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \lesssim \varepsilon^p\int_{B(0,1)}\eta(z)\int_0^1\left[\int_{\mathbb{R}^n}|Df_k(x-t\varepsilon z)|^p dx\right]dt\,dz$

$$\lesssim \varepsilon^p\|f_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p$$

$$\lesssim \varepsilon^p.$$

Step3 和1($L^q(U)$上的收敛)

利用性质3, 取 $\delta=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$ 以及对角线法, 可得更小子列(仍记为 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$), s.t.

$\exists f\in L^p(U)$, s.t. $\lim\limits_{j\to\infty}\|f_{k_j}-f\|_{L^p(U)}=0$

则对 $\forall q\in[1,p^*)$, 应用Hölder, 取 $\theta\in(0,1)$ 满足 $\frac{1}{q}=\frac{\theta}{1}+\frac{1-\theta}{p^*}$

$$\|f_{k_j}-f\|_{L^q(U)}=\left[\int_U|f_{k_j}-f|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}=\left[\int_U|f_{k_j}-f|^{q\theta}|f_{k_j}-f|^{q(1-\theta)}dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

令 $s=\frac{1}{\theta q}$, $s'=\frac{p^*}{(1-\theta)q}$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim}\left(\int_U|f_{k_j}-f|\,dx\right)^{\theta}\left(\int_U|f_{k_j}-f|^{p^*}dx\right)^{\frac{1-\theta}{p^*}}$$

$$\overset{p>1\text{ 且U有界}}{\lesssim}\left(\int_U|f_{k_j}-f|^p dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_U|f_{k_j}-f|^{p^*}dx\right)^{\frac{1-\theta}{p^*}}\quad (**)$$

又由GNT不等式 $\|f_k\|_{L^{p^*}(U)}\overset{\text{延拓}}{\lesssim}\|\bar{f}_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\overset{\text{GNT不等式}}{\lesssim}\|D\bar{f}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

$$\overset{\text{延拓性质}}{\lesssim}\sup_k\|f_k\|_{W^{1,p}(U)}<\infty$$

知 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $L^{p^*}(U)$ 中一致有界. 从而

$$\lim_{j\to\infty}\|f_{k_j}-f\|_{L^q(U)}=0.\implies f_{k_j}\to f \text{ in } L^q(U).$$

Step4 (说明 $f\in W^{1,p}(U)$). 已知 $p>1$ 且 $f\in L^p(U)$. (需用到 $L^p(U)$ 的紧性, 略去细节).