§3 容量

- 设 $1\le p<n$.

~~定义~~ §3.1 容量的基本性质.

定义3.1.1 (容量). 设 $K^p:=\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\ f\ge 0,\ f\in L^{p^*}(\mathbb{R}^n),\ Df\in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\}$. 设 $A\subseteq\mathbb{R}^n$,

令称

$$\mathrm{Cap}_p(A):=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx:\ f\in K^p,\ A\subseteq\{f\ge 1\}^\circ\right\}.$$

内部

为 A 的 p-容量

注3.1.2 (i). 设 $K\subseteq\mathbb{R}^n$ 为紧集, 由 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 K^p 中稠, 且 (此时) $K\subseteq\{f\ge 1\}^\circ$

$\iff f\ge \mathbb{1}_K$, 知 此时有

$$\mathrm{Cap}_p(K)=\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx:\ f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ f\ge \mathbb{1}_K\right\}.$$

(ii) 设 $A\subseteq B$, 知

$$\mathrm{Cap}_p(A)\le \mathrm{Cap}_p(B).$$

引理3.1.3 (K^p空间的性质) (逼近+嵌入) 设 $1\le p<n$.

(i) 若 $f\in K^p$, 则 $\exists\{f_k\}_{k=1}^\infty\subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, s.t. (逼近性质)

$$\|f-f_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\to 0,\qquad \|Df-Df_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\to 0.\qquad \text{as } k\to\infty.$$

(ii) 若 $f\in K^p$, 则 (Sobolev不等式)

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

证明: Step 1 ((i)$\Rightarrow$(ii)). 若(i)成立. ~~由事~~ ~~对~~ 则对 $\forall f\in K^p$. 由(i)知$\exists$

$$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^n).\ \text{s.t.}\ \begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}\|Df_k-Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=0\end{cases}\quad (*)$$

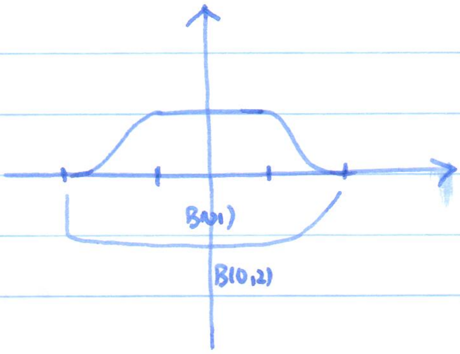
又由对 $\forall k$, $f_k\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, 其满足Sobolev不等式.

$$\|f_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|Df_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\quad (**)$$

由此及$(*)$, 并令$k\to\infty$, 得$(**)$式对于f也成立, $\Rightarrow$ (ii)成立.

Step 2 ((i)的证明: $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$的构造). 取 $\varsigma\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\begin{cases}0\le\varsigma\le1.\quad \varsigma=1\ \text{on}\ B(0,1)\\ \operatorname{supp}\varsigma\subset B(0,2),\quad |D\varsigma|\le2.\end{cases}$$



对 $\forall k\in\mathbb{N}$, 令

$$\varsigma_k(x):=\varsigma\left(\frac{x}{k}\right).$$

则对 $\forall f\in K^p$, 令 $f_k:=f\varsigma_k$. 则 $f_k\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

$\sqrt{}$ (a) $$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_k(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\overset{p^*>p+\text{Hölder}}{\le}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varsigma_k|^{(\frac{p^*}{p})'}dx\right)^{\frac{1}{(\frac{p^*}{p})'}\cdot\frac{1}{p}}<\infty.$$

(b) 由Sobolev函数的乘法公式. 对 $\forall i=1,2,\cdots,n$.

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\varsigma_k+f\frac{\partial\varsigma_k}{\partial x_i}.$$ 而 $\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L^p$, $\varsigma_k\in L^\infty$, ~~$f\in L^p$~~, $f\cdot\frac{\partial\varsigma_k}{\partial x_i}\in L^p$ $\to$ (类似于(a))

知 $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\in L^p$.

综合(a)与(b), 得 $f_k\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Step3 (ci)的证明：逼近)

(a) $$\int_{\mathbb{R}^n} |f-f_k|^{p^*} dy \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p^*} (1-g_k(y))^{p^*} dy$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,k)} |f(y)|^{p^*} dy \xrightarrow{f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} 0 \quad \text{as } k \to \infty.$$

(b) $$\int_{\mathbb{R}^n} |Df - Df_k|^p dy \overset{\text{乘法公式}}{\le} \int_{\mathbb{R}^n} |(Df - Df g_k) - f Dg_k|^p dy$$

$$\le 2^{p-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |Df - Df g_k|^p dy + \int_{\mathbb{R}^n} |f Dg_k|^p dy \right\}$$

$\longrightarrow 0$, as $k \to \infty$.

综合 (a) 与 (b)，说明 (ci) 成立。

引理3.1.4 (K^p 空间的性质——运算封闭性)

(i) 设 $f, g \in K^p$，令 $h := \max\{f, g\}$，则 $h \in K^p$ 且

$$Dh = \begin{cases} Df & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f > g\} \\ Dg & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on } \{f < g\} \end{cases}$$

类似地，$\min\{f, g\}$ 也成立。

(ii). 设 $f \in K^p$，$t \ge 0$，则 $h := \min\{f, t\} \in K^p$.

(iii) 给定 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq K^p$，定义

$$g := \sup_{1 \le k \le \infty} f_k, \qquad h := \sup_{1 \le k < \infty} |Df_k|$$

则 ~~$g \in L^{p}(\mathbb{R}^n)$~~，若 $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$，则 $g \in K^p$ 且 $|Dg| \le h$ $\mathcal{L}^n$-a.e.

证明: Step 1((i) 的证明) 注意到

$$h=\max\{f,g\}=f+(g-f)^+$$

因此，应用Sobolev函数正部的导数公式

$$Df^+=\begin{cases} Df, & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on }\{f>0\}\\ 0 & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on }\{f=0\}\end{cases}$$

得

$$Dh=Df+D[(g-f)^+]=\begin{cases} Dg, & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on }\{g>f\}\\ Df, & \mathcal{L}^n\text{-a.e. on }\{g\le f\}.\end{cases}$$

知 $Dh\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 又由 $0\le h\le f+g \overset{K^p\text{定义}}{\Longrightarrow} h\in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. 综上，$h\in K^p$.

Step 2 ((ii) 的证明) (ii) 的证明类似于 (i)，略去.

Step 3 ((iii) 的证明——$g\in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ 的证明). 对 $\forall \ell\in\mathbb{N}$，令

$$g_\ell := \sup_{1\le k\le \ell} f_k.$$

由(i)知 $g_\ell=\max\{f_1,f_2,\cdots f_\ell\}\in K^p$ 且

$$|Dg_\ell|\le \sup_{1\le k\le \ell}|Df_k|\le h. \quad (*)$$

又由 $g_\ell\nearrow g$，有

引理3.1.3(ii)

$$\|g\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \overset{\text{单调收敛定理}}{=} \lim_{\ell\to\infty}\|g_\ell\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \overset{K^p\text{上Sobolev不等式}}{\lesssim} \liminf_{\ell\to\infty}\|Dg_\ell\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\overset{(*)}{\lesssim} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \overset{h\in L^p(\mathbb{R}^n).}{<}\infty$$

$\Rightarrow g\in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Step 4 (C(iii) 的证明 — 1° $Dg \in L^p(\mathbb{R}^n)$) 任取 $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, 由控制收敛,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \operatorname{div}\varphi\, dy = \lim_{\ell\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g_\ell \operatorname{div}\varphi\, dy$$

$$\overset{g_\ell \in K^p}{=} -\lim_{\ell\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\cdot Dg_\ell\, dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|\, h\, dy \quad (**)$$

定义 $C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函如下: 对 $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, 有

$$L(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} g \operatorname{div}\varphi\, dy.$$

由 (**), 知 $|L(\varphi)| \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty}\|h\|_{L^p(\operatorname{supp}\varphi)} < \infty.$ (***)

故由 $C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \subseteq C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 上稠, 可 L 可连续延拓至 $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. 且 (**) 仍然成立.

i.e. $\quad L(\varphi) \leq \int_{\mathbb{R}^n}|\varphi|\, h\, dy.$

回顾 $C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 上的 Riesz 表示定理 [Evans-Gariepy, book, P.49, Thm1]

定理 (Riesz 表示定理) 设 $L: C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 为一个线性泛函, 满足

$$\sup\{L(f) : f \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |f|\leq 1,\ \operatorname{supp} f \subseteq K\} < \infty.$$

对 $\forall$ 紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 成立. 则 $\exists$ Radon 测度 μ 与 μ-可测函数 $\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, s.t.

(i). $|\sigma(x)| = 1$. μ-a.e. $x \in \mathbb{R}^n$

(ii). 对 $\forall f \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\quad L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\sigma\, d\mu$

(iii) 对 $\forall V \subseteq \mathbb{R}^n$, 开,

$$\mu(V) := \sup\{L(f) : f \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n),\ |f|\leq 1,\ \operatorname{supp} f \subseteq V\}.$$

应用(***)及上述Riesz表示定理知 ∃ Radon测度 μ 与 μ-可测函数 $\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, s.t.

(i)' $|\sigma(x)|=1$. μ-a.e. $x\in\mathbb{R}^n$

(ii)' $I(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\cdot\sigma\, d\mu$.

又由(iii)知 对∀开集U.

$$\mu(U) \overset{(**)+(iii)}{\leq} \int_U h\, dy \Rightarrow \mu \ll \mathcal{L}^n \text{ 且 } \frac{d\mu}{dy}\leq h. \text{ 记 } k=\sigma\cdot\frac{d\mu}{dy},$$

知. $|k|\leq h$. 且

$$\left.\begin{aligned} I(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\, k\, dx \\ &\parallel \\ \int_{\mathbb{R}^n} &g\, \mathrm{div}\varphi\, dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow k=-Dg \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

综上. $g\in K^p$.

定理3.1.5 (容量的外测度性质). 设 $1\leq p<n$, 则 Cap_p 为 $\mathbb{R}^n$ 上的外测度.

证明: 设 $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. 且 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cap}_p(A_k)<\infty$. 则对∀ε>0, 以及 $k\in\mathbb{N}$, 取 $f_k\in K^p$, s.t.

$$\begin{cases} A_k\subseteq\{f_k\geq 1\}^{\circ} \\ \int_{\mathbb{R}^n}|Df_k|^p dx\leq \mathrm{Cap}_p(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k} \end{cases}$$

令 $g:=\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, 知 $A\subseteq\{g\geq 1\}^{\circ}$. 且 $g\in K^p$ (引理3.1.4(iii)). 因此,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Dg|^p dx\leq\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{1\leq k\leq n}|Df_k|^p dx\leq\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|Df_k|^p dx$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{Cap}_p(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cap}_p(A_k)+\varepsilon.$$

因此，由 $\mathrm{Cap}_p(A)$ 的定义，以及 ε 的任意性，知

$$\mathrm{Cap}_p(A)\le \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Cap}_p(A_k).$$

#

定理 3.1.6（容量的性质）假设 $A, B\subseteq \mathbb{R}^n$，则如下结论成立.

(i) $\mathrm{Cap}_p(A)=\inf\{\mathrm{Cap}_p(U): U \text{ 开且 } A\subseteq U\}$.（外正则）

(ii) $\mathrm{Cap}_p(\lambda A)=\lambda^{n-p}\,\mathrm{Cap}_p(A)$, $\lambda>0$ （齐次性）

(iii) 设 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为等距仿射变换（仿射变换即为平移，旋转或坐标轴反射的复合），则

$$\mathrm{Cap}_p(L(A))=\mathrm{Cap}_p(A).$$ （仿射不变性）

(iv) $\mathrm{Cap}_p(B(x,r))=r^{n-p}\,\mathrm{Cap}_p(B(0,1))$ （球伸缩性）

(v) $\exists$ 正常数 C（仅依赖于 n 与 p），s.t. （与 Hausdorff 测度比较）

$$\mathrm{Cap}_p(A)\le C\mathcal{H}^{n-p}(A).$$

(vi) $\exists$ 正常数 C（仅依赖于 n 与 p），s.t. （与 Lebesgue 测度比较）.

$$\mathcal{L}^n(A)\le C\left[\mathrm{Cap}_p(A)\right]^{\frac{n}{n-p}}$$

(vii). $\mathrm{Cap}_p(A\cup B)+\mathrm{Cap}_p(A\cap B)\le \mathrm{Cap}_p(A)+\mathrm{Cap}_p(B)$. （次可加性）

(viii). 若 $A_1\subset\cdots\subset A_k\subset A_{k+1}\subset\cdots$ 单增，则 （上连续性）

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{Cap}_p(A_k)=\mathrm{Cap}_p\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right).$$

(ix) 若 $A_1 \supset \cdots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \cdots$ 为单减的紧集列. 则

$$\lim_{k\to\infty} Cap_p(A_k) = Cap_p\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$ (上连续性)

证明: Step 1 (i) 的证明. 由 $A \subseteq U$, 易知

$$Cap_p(A) \le \inf\{Cap_p(U) : U \text{开且} A \subseteq U\}.$$

另一方面, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $f \in K^p$, s.t. $A \subseteq \{f > 1\}^\circ \overset{(*)}{=:} U$. 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx \le Cap_p(A) + \varepsilon. \quad (**)$$

而由 (*) 知

$$Cap_p(U) \le \int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx. \quad (***)$$

联立 (**) 与 (***), ~~知~~ ~~由ε~~ 知

$$Cap_p(U) \le Cap_p(A) + \varepsilon.$$

从而由下确界定义, $\Rightarrow$

$$\inf\{Cap_p(U) : U \text{开且} A \subseteq U\} \le Cap_p(A).$$

$\Rightarrow$ (i) 成立.

Step 2 (iii) 的证明 ~~+(iii)+(iv)~~ 对 $\forall \varepsilon > 0$, 选取 $f \in K^p$ 满足 Step 1 中条件. 则令 $g(x) := f(x/\lambda)$.

知 $g \in K^p$, ~~且~~ $\lambda A \subseteq \{g \ge 1\}^\circ$. 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Dg(x)|^p dx = \frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} \left|(Df)\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx = \lambda^{n-p}\int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx \overset{\text{f条件}}{\le} \lambda^{n-p}\left[Cap_p(A) + \varepsilon\right].$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

由ε的任意性以 $Cap_p(\lambda A)$ 的定义得

$$Cap_p(\lambda A) \le \lambda^{n-p}\, Cap_p(A).$$

另一方面，考虑 $\tilde{g}(x) := f(\lambda x)$，可得反向不等式. $\Rightarrow$ (ii) 成立.

(iii) 的证明类似于 (ii)，略去. 而 (iv) 可由 (ii)+(iii) 联立得证.

Step 3. (v) 的证明 回顾 $\mathcal{H}^{n-p}(A)$ 的定义.

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{n-p}(A) = \lim\limits_{\delta\to 0} \mathcal{H}^{n-p}_\delta(A) \\ \mathcal{H}^{n-p}_\delta(A) = \inf\left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\dfrac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^{n-p} : A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j < \delta \right\}. \end{cases}$$

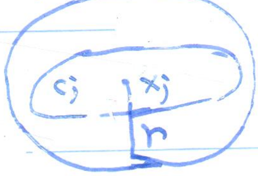
故对 $\forall \delta > 0$，取 $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ s.t. $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$，$\operatorname{diam} C_j < \delta$ 且

$$\mathcal{H}^{n-p}_\delta(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^{n-p} < 2\,\mathcal{H}^{n-p}_\delta(A)$$

对 $\forall C_j$，作球 $B(x_j, r_j)$ s.t. $x_j \in C_j$，$C_j \subseteq B(x_j, r_j)$，$r_j < \delta$ 如图

$r_j = \operatorname{diam} C_j$

则



知 $$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\, r_j^{n-p} \le C \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^{n-p} \lesssim \mathcal{H}^{n-p}_\delta(A).$$

从而应用 Cap_p 的外测度性质有

$$Cap_p(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} Cap_p(B(x_j, r_j)) \overset{\text{平移性+伸缩性}}{=} C\, Cap_p(B(0,1)) \left[\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\, r_j^{n-p}\right]$$

$$\lesssim \mathcal{H}^{n-p}_\delta(A).$$

令 $\delta \to 0$，得 $Cap_p(A) \lesssim \mathcal{H}^{n-p}_\delta(A)$. $\Rightarrow$ (v) 成立.

Step 4 ((vi)的证明) 对 $\forall \varepsilon>0$，取 $f\in K^p$，形如 Step 1 中所得，则有

$$\{f\geq 1\}^\circ \supseteq A$$

$$[\mathcal{L}^n(A)]^{\frac{1}{p^*}} \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p^*}dx\right]^{\frac{1}{p^*}} \overset{\text{Sobolev不等式}}{\lesssim} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \overset{f\text{的选取}}{\lesssim} (\mathrm{Cap}_p(A)+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}$$

从而由 ε 的任意性，知

$$\mathcal{L}^n(A) \lesssim [\mathrm{Cap}_p(A)]^{\frac{p^*}{p}} \Rightarrow \text{(vi) 成立.}$$

Step 5 ((vii)的证明) 对 $\forall \varepsilon>0$，取 $f\in K^p$，形如 Step 1 中. 另取 $g\in K^p$，s.t.

$$B\subseteq \{g\geq 1\}^\circ. \quad 且 \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Dg(x)|^p dx \leq \mathrm{Cap}_p(B)+\varepsilon.$$

易知 $\max\{f,g\}$，$\min\{f,g\}\in K^p$.

且
$$|D(\max\{f,g\})|^p + |D(\min\{f,g\})|^p = \begin{cases} |Df|^p+|Dg|^p & \mathcal{L}^n\text{-a.e. } \{f\geq g\} \\ |Df|^p+|Dg|^p, & \mathcal{L}^n\text{-a.e. } \{f<g\}. \end{cases}$$

(*)

$$= |Df|^p + |Dg|^p.$$

又由 $A\cup B \subset \{\max\{f,g\}\geq 1\}^\circ$

$A\cap B \subset \{\min\{f,g\}\geq 1\}^\circ$

从而由 Cap_p 的定义，

$$\mathrm{Cap}_p(A\cup B)+\mathrm{Cap}_p(A\cap B) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D\max\{f,g\}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} |D\min\{f,g\}|^p dx$$

$$\overset{(*)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} [|Df(x)|^p + |Dg(x)|^p]dx$$

$$\leq \mathrm{Cap}_p(A)+\mathrm{Cap}_p(B)+2\varepsilon.$$ 由 ε 的任意性 $\Rightarrow$ (vii) 成立.

Step6 (viii)的证明) 当$p=1$时，见[Federer-Ziemer, Indiana. U. Math J. 1972]. 下只考虑 $p\in(1,n)$的情形. 不失一般性，假设 $\lim_{k\to\infty}Cap_p(A_k)<\infty$.（否则(viii)两边都取$+\infty$）.

此时，对$\forall\varepsilon>0$，以及$k\in\mathbb{N}$，取$f_k\in K^p$，s.t.

$$A_k\subseteq\{x: f_k(x)\geq 1\}^{\circ} \text{ 且 } \int_{\mathbb{R}^n}|Df_k|^p dx<Cap_p(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令

$$h_0=0,\quad h_m:=\max\{f_k: 1\leq k\leq m\}.$$ 易知

$$\begin{cases} h_m=\max\{h_{m-1},f_m\}\in K^p. \\ A_{m-1}\subset\{x:\min\{h_{m-1},f_m\}\geq 1\}^{\circ}. \end{cases}$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Dh_m|^p dx+Cap_p(A_{m-1})\leq\int_{\mathbb{R}^n}|D(\max\{h_{m-1},f_m\})|^p dx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^n}|D(\min\{h_{m-1},f_m\})|^p dx$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}(|Dh_{m-1}|^p+|Df_m|^p)\,dx$$

$$\leq\int_{\mathbb{R}^n}|Dh_{m-1}|^p dx+Cap_p(A_m)+\frac{\varepsilon}{2^m}.$$

因此，$$\int_{\mathbb{R}^n}|Dh_m|^p dx-\int_{\mathbb{R}^n}|Dh_{m-1}|^p dx\leq Cap_p(A_m)-Cap_p(A_{m-1})+\frac{\varepsilon}{2^m}$$

（设$A_0=\phi$.

利用累加法，得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|Dh_m|^p dx\leq Cap_p(A_m)+\varepsilon.$$

令 $f:=\lim_{m\to\infty}h_m$. 知 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\subseteq\{x:f(x)\geq 1\}^{\circ}$. ~~从~~而

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} = \lim_{m\to\infty} \|h_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}$$

Sobolev不等式

$$\lesssim \liminf_{m\to\infty} \|Dh_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \left[\lim_{m\to\infty} Cap_p(A_m) + \varepsilon\right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

由$p>1$, $\int_{\mathbb{R}^n} |Dh_m|^p dx \leq Cap_p(A_m) + \varepsilon < \infty$. 及$L^p(\mathbb{R}^n)$紧，知

$\exists$ 子列 $\{Dh_{m_j}\}_{j=1}^{\infty} \longrightarrow Df$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\Rightarrow f \in K^p$.

从而 $Cap_p(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \|Df\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \lim_{m\to\infty} Cap_p(A_m) + \varepsilon$.

$\Rightarrow$ (viii) 成立.

<u>Step I (ix)的证明.</u> 由 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A_k$, 易知

$$Cap_p(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \lim_{k\to\infty} Cap_p(A_k).$$

另一方面, 对$\forall$开集U, 满足 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq U$, 由$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$紧, 知$\exists m \in \mathbb{N}$, s.t. 当 $k \geq m$,

$A_k \subseteq U$ 因此

$$\lim_{k\to\infty} Cap_p(A_k) \leq Cap_p(U).$$

再由(i), 得 $\lim_{k\to\infty} Cap_p(A_k) \leq Cap_p(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \Rightarrow$ (ix) 成立.

#.

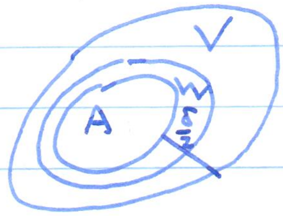
§3.2 容量与Hausdorff维数

定理3.2.1 (容量为0) 设 $1<p<n$. 若 $\mathcal{H}^{n-p}(A)<\infty$, 则 $\mathrm{Cap}_p(A)=0$.

证明：不失一般性，设 A 为紧集 → $\boxed{\text{?暂时不知道原因}}$

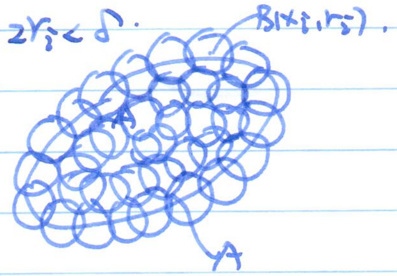
Step 1 (断言). 断言：$\exists C>0$, (仅依赖于 n 与 A), s.t. 对 $\forall$ 开集 V, 满足 $A\subseteq V$, 都 $\exists$ 开集 W, 与 $f\in K^p$, s.t.

$$\begin{cases} A\subseteq W\subset\{f=1\} \\ \operatorname{supp} f\subset V \\ \int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx\le C. \end{cases}$$



事实上，设 $V\supseteq A$ 为开集，记 $\delta:=\frac{1}{2}\operatorname{dist}(A,\mathbb{R}^n\setminus V)$. 由于 $\mathcal{H}^{n-p}(A)<\infty$ 且 A 为紧集，

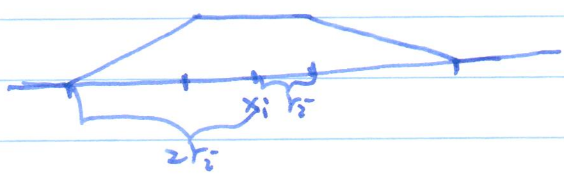
知 $\exists$ 有限开球族 $\{U(x_i,r_i)\}_{i=1}^m$ s.t. $2r_i<\delta$.



$$\begin{cases} U(x_i,r_i)\cap\neq\phi \\ A\subseteq\bigcup_{i=1}^m U(x_i,r_i) \\ \sum_{i=1}^m \alpha(n-p)\,r_i^{n-p}\le C\mathcal{H}^{n-p}(A)+1 \end{cases}$$

令 $W:=\bigcup_{i=1}^m U(x_i,r_i)$, 并定义 $f_i\in K^p$ 如下

$$f_i(x)=\begin{cases} 1 & |x-x_i|\le r_i \\ 2-\dfrac{|x-x_i|}{r_i} & r_i\le|x-x_i|\le 2r_i \\ 0 & 2r_i\le|x-x_i| \end{cases}$$



则 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |Df_i|^p\,dx = \int_{r_i \le |x-x_i| \le 2r_i} \left| D\left(\frac{|x-x_i|}{r_i}\right)\right|^p dx$

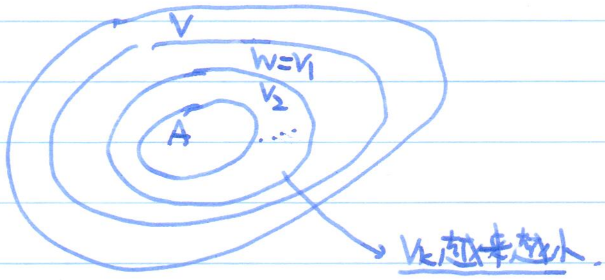
$$\lesssim r_i^{\,n-p}.$$

令 $f := \max\{f_1, \cdots, f_m\}$. $\Rightarrow f \in K^p$. 且 $W \subseteq \{f=1\}^\circ$. $\operatorname{supp} f \subseteq V$. 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx \le \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} |Df_i|^p dx \le C \sum_{i=1}^m r_i^{\,n-p} \lesssim (\mathcal{H}^{n-p}(A)+1).$$

Step 2（迭代讨论）对 Step 1 中断言重复使用，可得开集列 $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ 以及函数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ s.t.

$$\begin{cases} A \subset V_{k+1} \subset V_k \\ \overline{V_{k+1}} \subset \{f_k = 1\}^\circ \\ \operatorname{supp} f_k \subset V_k \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |Df_k|^p dx \le C \quad (*) \end{cases}$$



令 $S_j := \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}$, $\quad g_j := \frac{1}{S_j}\sum_{k=1}^j \frac{f_k}{k} \Rightarrow g_j \in K^p$. 且

$$g_j \ge 1 \text{ on } V_{k+1}$$

由 $\operatorname{supp}|Df_k| \subset V_k \setminus \overline{V_{k+1}} \Rightarrow$

$$\mathrm{Cap}_p(A) \le \int_{\mathbb{R}^n} |Dg_j(x)|^p dx \overset{\text{支集互不相交}}{\le} \frac{1}{S_j^{\,p}} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^p} \int_{\mathbb{R}^n} |Df_k|^p dx$$

$$\overset{(*)}{\lesssim} \frac{1}{S_j^{\,p}} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^p} \xrightarrow{p>1} 0. \text{ as } j \to \infty.$$

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$ 收敛

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ 发散

$\Rightarrow \mathrm{Cap}_p(A) = 0.$

定理3.22（Hausdorff测度为0）设 $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $1\le p<\infty$. 若 $\mathrm{Cap}_p(A)=0$, 则对 $\forall s>n-p$,

$\mathcal{H}^s(A)=0$.

证明：Step 1（构造 K^p 函数）. 由 $\mathrm{Cap}_p(A)=0$. 知对 $\forall i\in\mathbb{N}$, $\exists f_i\in K^p$, s.t.

$$\begin{cases} A\subseteq\{f_i\ge 1\}^\circ \\ \int_{\mathbb{R}^n}|Df_i|^p dx<\frac{1}{2^i} \end{cases}.$$

令 $g:=\sum_{i=1}^\infty f_i$. 则

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Dg|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{广义Minkowski}}{\le} \sum_{i=1}^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

进一步，应用GNS不等式，得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \overset{\text{广义Minkowski}}{\le} \sum_{i=1}^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f_i|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\overset{\text{GNS不等式}}{\lesssim} \sum_{i=1}^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Df_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

$\Rightarrow g\in K^p$.

Step 2（g的性质）由 $A\subseteq\{f_i\ge1\}^\circ$ 知对 $\forall m\in\mathbb{N}$, 有 $A\subseteq\{g\ge m\}^\circ$. 从而对 $\forall a\in A$,

取 r 充分小，可有 $\begin{cases} B(a,r)\subseteq\{g\ge m\}^\circ \\ g_{B(a,r)}\ge m \end{cases}$ 成立.

从而 $\lim_{r\to0} g_{B(a,r)}=+\infty$.

进一步，有 $\limsup_{r\to0}\frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)}|Dg|^p dx=+\infty$ (*)

事实上，用反证法，若 $\limsup\limits_{r\to 0}\frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)}|Dg|^p dx<\infty$.

则 $\exists\,\delta_0>0$，与 $M_1>0$, s.t.

$$\sup_{r\in(0,\delta_0)}\frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)}|Dg|^p dx\le M_1$$

又由 $\int_{\mathbb{R}^n}|Dg|^p dx<\infty$. 知. $\exists M_2>0$,

$$\sup_{r\in[\delta_0,1]}\frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)}|Dg|^p dx\le M_2.$$

令 $M:=\max\{M_1,M_2\}$，得

$$\sup_{r\in[0,1]}\frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)}|Dg|^p dx\le M.$$

从而对 $\forall\ 0<r\le 1$,

$$\fint_{B(a,r)}|g-g_{B(a,r)}|^p dx\overset{\text{Poincaré}}{\lesssim} r^p\fint_{B(a,r)}|Dg|^p dx\lesssim r^{p-n+s}\frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)}|Dg|^p dx \quad (**)$$

$$\lesssim r^{p-n+s}.\quad 令\ \theta=p-n+s.$$

因此，$$|g_{B(a,\frac{r}{2})}-g_{B(a,r)}|=\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(a,\frac{r}{2}))}\left|\int_{B(a,\frac{r}{2})}g-g_{B(a,r)}\,dx\right|$$

$$\overset{\text{积分区域放大}}{\le} 2^n\fint_{B(a,r)}|g-g_{B(a,r)}|\,dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim} 2^n\left(\fint_{B(a,r)}|g-g_{B(a,r)}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{(**)}{\lesssim} r^{\frac{\theta}{p}}.$$

错位相减

从而若 $k>j$. 则

$$|g_{B(a,2^{-k})}-g_{B(a,2^{-j})}|\le\sum_{l=j+1}^{k}|g_{B(a,2^{-l})}-g_{B(a,2^{-l+1})}|$$

$$\lesssim \sum_{\ell=j+1}^{k} \left(\frac{1}{2^{\ell-1}}\right)^{\frac{\delta}{p}}$$

$\Rightarrow \{g_{B(a,2^{-k})}\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列. $\Rightarrow g_{B(a,2^{-k})} \longrightarrow$ 某个数. 这与

$\lim\limits_{r\to 0} g_{B(a,r)} = \infty$ 矛盾. $\Rightarrow$ (*)式成立.

Step 3 ($\mathcal{H}^s(A)$ 的~~控制~~).

由 $A \subseteq \{a\in\mathbb{R}^n : \limsup\limits_{r\to 0} \frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)} |Dg|^p dx = +\infty\}$

$$\subseteq \{a\in\mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^s}\int_{B(a,r)} |Dg|^p dx > 0\} =: \Lambda_s.$$

即由 Hausdorff 测度的性质

$$\mathcal{H}^s(\Lambda_s) = 0. \#$$

· 由 Hausdorff 维数的定义,

$$\mathcal{H}_{dim}(A) := \inf\{0\le s<\infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

由定理 3.2.2. 若 $Cap_p(A) = 0$, $\Rightarrow \mathcal{H}_{dim}(A) \le n-p$. #