泛函分析讲义

§0 课程介绍

- 课程介绍
  - ① 什么是泛函分析
    - a. 简略
    - b. 发展历史
    - c. 学科内容
  - ② 本课程内容
  - ③ 课程安排
    - a. 上课方式
    - b. 考核方式

§0.1 什么是泛函分析

a. 简略

• 泛函分析属于分析学的一个重要分支。本质上，它通过对数学分析与实变函数的内容，进行拓扑化，几何化，代数化的处理，从而得到一门更为抽象的学科。

数学分析、实变函数 —(拓扑化，几何化；代数化)→ 泛函分析

• 由此形成一门研究拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑与代数条件的性质的学科。

b. 发展历史

起源（18-19世纪）→ Hilbert时期（~~20世纪~~ ~~1900—1906~~ 20世纪初）→ Fréchet时期（20世纪初）→ Banach时期（20世纪30年代）→ 持续发展（V. Neumann）

Banach时期 → 现代泛函分析的奠基人

1) 起源—变分法 (意大利数学家 Volterra).

• 考虑定义在区间$[a,b]$上的连续函数的最大值.

$$M(f) := \max_{a\le x\le b} |f(x)| .$$

知对$\forall$ $[a,b]$上的连续函数，都$\exists$一个数$M(f)$与之对应，由此定义一个映射

$$f \longmapsto M(f).$$

与通常的函数将数映到数不同~~时~~的是，上述映射~~而~~将函数映到数，故可称为"函数的函数"，法国数学家Hadamard首次用"泛函"的称呼称这一类映射，这成为泛函分析学科名称的来源.

2) 起源—积分方程 (瑞典数学家 Fredholm)

• 考虑形如

$$f(x) - \int_a^b K(x,y) f(y)\,dy = g(x), \qquad ①$$

其中$K(x,y)$为核函数，$f(x)$为未知函数. Fredholm通过引入复参数$\lambda\in\mathbb{C}$，考虑新的积分方程

$$f(x) - \lambda\int_a^b K(x,y) f(y)\,dy = g(x).$$

由引出特征值与特征函数~~特~~等概念. 这些结果曾被Hilbert认为可用于解决黎曼猜想.

• ~~将积分方程~~

2) Hilbert时期.(德国数学家Hilbert).

• 通过将积分方程①离散化，得如下n个线方程所组成的线性方程组.

$$f_i-\frac{(b-a)}{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}f_j=g_i\qquad(i=1,\cdots,n).\qquad ②$$

先利用线性代数的方法求解②，再令$n\to\infty$. 得到①的性质. 在此意义上，泛函分析也称为"无穷维分析".

3) Fréchet时期(法国数学家Fréchet)

• Fréchet发现之前所用到的收敛不需要建立在度量的基础，而只需从拓扑的角度出发即可，由此引出了拓扑向量空间的概念.

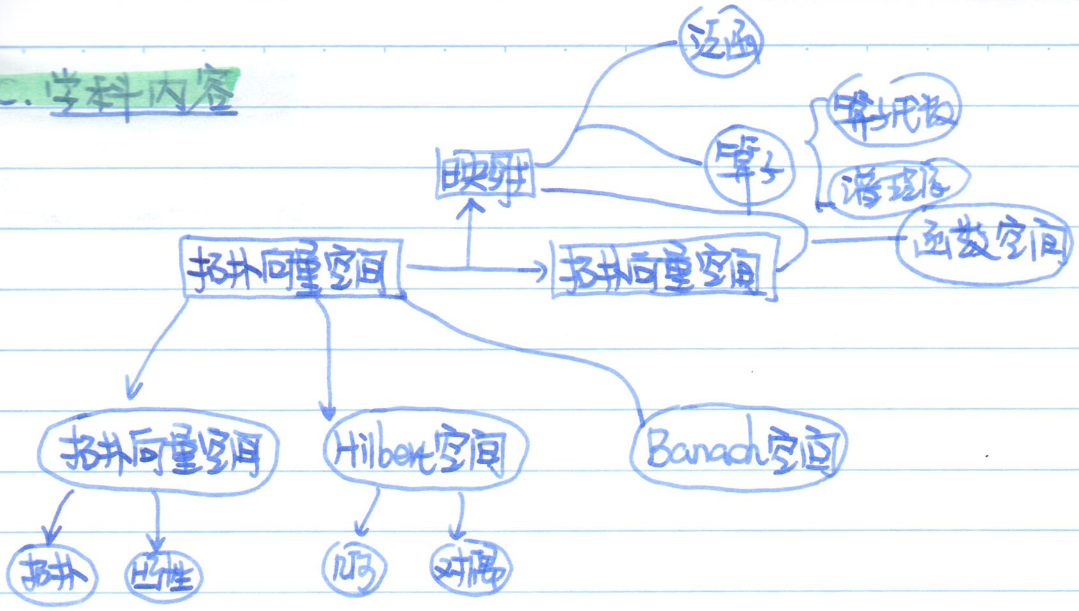
4) Banach时期(波兰数学家Banach).

• 系统地从拓扑向量空间角度，建立泛函分析理论，得到了泛函分析三大定理，并完成巨著《线性算子理论》，标志着泛函分析学科的成熟.

5) V.Neumann时期(匈牙利数学家V.Neumann).

受量子力学的启发，建立了无界自伴算子的谱理论，使之成为Schrödinger算子研究的基础.

c. 学科内容



§0.2 本课程内容

Hilbert空间 ⟶ Banach空间 ⟶ 局部凸空间

线性算子 ⟶ 三大定理 ⟶ 算子代数 ⟶ 谱理论

§0.3 课程安排

a. 上课方式： 48学时，前8周每周2次，后8周每周1次．以教材内容为主，可提前看讲义。

b. 考核方式：

- 平时：上课+作业　30%
- 期末：　70%

§1 Hilbert空间.

§1.1. 基本性质与例子

半内积 → 内积 → Cauchy不等式 → 范数 → Banach空间

范数 → 度量 → Hilbert空间 → 完备化

• 设$\mathbb{F}$为实数域$\mathbb{R}$,或复数域$\mathbb{C}$. $\mathcal{X}$为$\mathbb{F}$上的向量空间.

定义1.1.1(半内积)

设$\mathcal{X}$为数域$\mathbb{F}$上的向量空间,设

$$u: \mathcal{X}\times\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{F}$$

为$\mathcal{X}$上的"二元映射",称u为一个半内积,若如下四个条件成立.

设$\mathcal{X}$为一个集合,$\mathbb{F}$为一个数域,若$\mathcal{X}$满足:

(i) 对$\forall x,y\in\mathcal{X}$, $x+y\in\mathcal{X}$.

(ii) 对$\forall x\in\mathcal{X}$, $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha x\in\mathcal{X}$.

即$\mathcal{X}$关于相加与数乘封闭,则称$\mathcal{X}$为向量空间.

(a) (线性性). $u(\alpha x+\beta y, z) = \alpha u(x,z)+\beta u(y,z)$, $\forall x,y,z\in\mathcal{X}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$.

(b) (共轭线性性). $u(x, \alpha y+\beta z) = \bar{\alpha} u(x,y)+\bar{\beta} u(x,z)$.

(c) (非负性) $u(x,x)\geq 0$.

(d) (共轭对称性) $u(x,y) = \overline{u(y,x)}$,

~~例1.1.2~~

~~(1) ℓ^2上的内积~~

定义1.1.2(内积)

设u为向量空间$\mathcal{X}$上的半内积,若u进一步满足如下条件

(e) (唯一性). 若$u(x,x)=0$,则$x=0$.

则称u为$\mathcal{X}$上的内积,此时记$u(x,y)=\langle x,y\rangle$.

例1.1.2 (a) ℓ^2上的内积. 设 $\mathcal{X} := \{\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} : \alpha_n \in \mathbb{F}$, 且只有有限个$\alpha_n$非零$\}$. 在$\mathcal{X}$上定义加法与数乘如下.

(i) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} + \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha_n+\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ii) $\alpha\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$.

这使得$\mathcal{X}$成为向量空间. 对$\forall \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{X}$, 定义$\mathcal{X}$上的二元映射: $\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{F}$. 如下

$$u(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}) := \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta_n}.$$

易知 u 为$\mathcal{X}$上的半内积与内积.

(a) (线性性). $u(\alpha\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}+\beta\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty})$

$$= \cancel{\sum_{n=1}^{\infty}} u(\{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha\alpha_n+\beta\beta_n]\overline{\gamma_n}$$

$$= \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\gamma_n} + \beta\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\overline{\gamma_n}.$$

$$= \alpha u(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}) + \beta u(\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

(b) (共轭线性性) 略

(c) 非负性 与 (d) 共轭对称性作为作业.

(b) (L^2上的内积) 设(X,Ω,μ)为一个测度空间，其中X为一个集合，Ω为X的一些子集组成的σ-代数，μ为定义在Ω上的测度。定义

$$L^2(X,\Omega,\mu)=L^2(\mu):=\{f: X\to\mathbb{F},\ \int_X |f(x)|^2 d\mu<\infty\}$$

为Lebesgue空间。对$\forall f,g\in L^2(\mu)$，定义~~内积如下~~ $L^2(\mu)\times L^2(\mu)\longrightarrow\mathbb{F}$ 映射如下：

$$\langle f,g\rangle:=\int_X f(x)\overline{g(x)}\,d\mu.$$

易知$\langle\cdot,\cdot\rangle$为$L^2(\mu)$上的内积。(证明为作业)。

命题1.1.4 (Cauchy不等式) 设$\langle\cdot,\cdot\rangle$为$\mathcal{H}$上的半内积，则对$\forall x,y\in\mathcal{H}$，有

$$|\langle x,y\rangle|^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

进一步，等号成立$\Longleftrightarrow$ $\exists$非零常数α,β, s.t. $\langle\beta x+\alpha y,\beta x+\alpha y\rangle=0$.

证明：Step 1 (构造不等式) 对$\forall\alpha\in\mathbb{F}$，$\forall x,y\in\mathcal{H}$，易知

$$\overset{\text{非负性}}{0\le}\langle x-\alpha y,\ x-\alpha y\rangle$$

$$\overset{\text{共轭线性}}{=}\langle x,x\rangle-\alpha\langle y,x\rangle-\bar{\alpha}\langle x,y\rangle+|\alpha|^2\langle y,y\rangle \quad (*)$$

Step 2 (取系数α)。令$\langle y,x\rangle=be^{i\theta}$, $b\ge0$. 则选取系数

$$\alpha=te^{-i\theta},\ \text{其中}\ t\in\mathbb{R}.$$

此时，不等式$(*)$变为

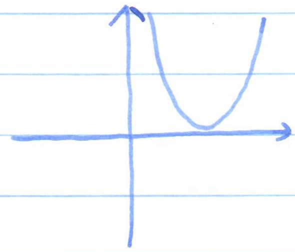
$$0\le\langle x,x\rangle-te^{-i\theta}be^{i\theta}-te^{i\theta}be^{-i\theta}+t^2\langle y,y\rangle$$

$$=\langle x,x\rangle-2bt+t^2\langle y,y\rangle \qquad \text{令}\ a=\langle y,y\rangle\ge0,\ c=\langle x,x\rangle\ge0$$

$$=c-2bt+at^2. \quad (**)$$

Step3 (~~一元二次方程~~). 抛物线). 考虑抛物线 $g(t)=at^2-2bt+c$. 由(*)式知

$g(t)\geq 0$. 知



$$0\geq\Delta=(2b)^2-4ac=4\left[|\langle x,y\rangle|^2-\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\right].$$

从而

$$|\langle x,y\rangle|^2\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle. \quad (**)$$

特别地, (**) 中等号成立 $\Leftrightarrow \exists t_0\neq 0$ s.t. $g(t_0)=0$. 其中 ~~...~~ $\alpha_0=e^{-i\theta}t_0$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_0\neq 0, \text{ s.t. } \langle x-\alpha_0 y, x-\alpha_0 y\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\neq 0, \text{ s.t. } \langle \beta x+\alpha y, \beta x+\alpha y\rangle=0.$$

#

推论1.1.5 (范数). 设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathcal{X}$ 上的内积, 对 $\forall x\in\mathcal{X}$, 定义

$$\|x\|:=\left[\langle x,x\rangle\right]^{\frac{1}{2}}.$$

则如下结论成立:

(a). ~~对 $\forall x, y\in$~~ (三角不等式). 对 $\forall x,y\in\mathcal{X}$, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

(b) (齐次性). 对 $\forall \alpha\in\mathbb{F}$ 与 $x\in\mathcal{X}$, 有 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$.

(c) (唯一性). 若 $\|x\|=0$, 则 $x=0$ 为零元.

注: 此时, $\|x\|$ 称为 x 的一个范数.

证明：Step 1 (b)与(c)的证明显然（利用内积的线性性＋唯一性）.

Step 2.（(a)的证明）对 $\forall\ x, y \in \mathcal{X}$，注意到

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$$

$$\overset{\text{共轭线性}}{=} \|x\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \quad (*)$$

$$\overset{\text{共轭对称}}{=} \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

利用 Cauchy 不等式知

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|.$$

从而由 $(*)$ 式，得

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

因此，$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. $\Rightarrow$ (a) 成立.

#

注[1.1.6]：(内积极化恒等式). $(*)$ 式

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

称作极化恒等式.

定义1.1.7（度量空间）设 $\mathcal{X}$ 为一个集合，$d: \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to [0, \infty)$ 为 $\mathcal{X}$ 上的非负"二元"映射.
称 d 为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量，若如下条件成立.

(a).（非负性）$d(x, y) \ge 0$. 且

(b)（对称性）$d(x, y) = d(y, x)$

(c)(三角不等式) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

(d)(唯一性). $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$.

若 d 为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量，则 $(\mathcal{X},d)$ 为一个度量空间.

定义1.1.8(完备度量空间) 设 $(\mathcal{X},d)$ 为一个度量空间

(a) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{X}$ 中的一个序列. 称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为Cauchy列，若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. 当 $n,m\ge N$ 时,

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

(b) 称度量空间 $(\mathcal{X},d)$ 是完备的，若对 $\mathcal{X}$ 中 $\forall$ Cauchy列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，都 $\exists$ 点 $x\in\mathcal{X}$, s.t. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 x. 即. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. 当 $n\ge N$ 时, $d(x_n,x)<\varepsilon$. i.e.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0.$$

命题1.1.9(度量) 设 $\|\cdot\|$ 为向量空间 $\mathcal{X}$ 上的一个范数. 则对 $\forall x,y\in\mathcal{X}$, 定义二元映射 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to[0,\infty)$, 如下

$$d(x,y):=\|x-y\|.$$

则 d 为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量.

小结:

$$\text{内积}\longrightarrow\text{范数}\longrightarrow\text{度量}\xrightarrow{+\text{完备}}\text{Hilbert空间}$$

定义1.1.10(Hilbert空间) 设 $\mathcal{X}$ 为向量空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为其上内积, d 为内积诱导的度量. 若 $(\mathcal{X},d)$ 作为度量空间是完备的, 则称 $(\mathcal{X},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为Hilbert空间

例 1.1.11 (1) $\ell^2(I)$. 设 I 为一个集合, 定义

$$\ell^2(I) := \{x: I \to \mathbb{F}: \ x(i) \text{ 除了 } I \text{ 中可数个点外都为 } 0, \text{ 且 } \sum_{i\in I}|x(i)|^2<\infty.\}.$$

对 $\forall\ x, y \in \ell^2(I)$, 定义内积如下

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i\in I} x(i)\overline{y(i)}.$$

则 (a) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\ell^2(I)$ 上内积. (作为作业).

(b) $(\ell^2(I), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为 Hilbert 空间.

证 由(a), 只需说明 $\ell^2(I)$ 作为度量空间是完备的, 其中度量由内积诱导, 定义如下.

$$d(x,y) := \left[\sum_{i\in I}|x(i)-y(i)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (*).$$

任取 $\ell^2(I)$ 中关于 d 的 Cauchy 列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. 由完备定义, 需说明 $\exists\ x\in \ell^2(I)$, s.t.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0. \quad (**)$$

事实上, 由 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 列, 知对 $\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. 对 $\forall n, m\geq N$.

$$d(x_n, x_m) = \left[\sum_{i\in I}|x_n(i)-x_m(i)|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

从而对 $\forall\ i\in I$, $|x_n(i)-x_m(i)|<\varepsilon$. 这说明对 $\forall\ i\in I$ (临时固定) 有

$\{x_n(i)\}_{n=1}^\infty$ 作为数为 Cauchy 列. 由数域 $\mathbb{F}$ 是完备的, 知 $\exists\ x(i)\in\mathbb{F}$, s.t.

对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, s.t.

$$\lim_{n\to\infty} x_n(i) = x(i).$$

由于 N 与 i 无关, 知上述收敛关于 i 一致收敛.

由此令 $x=\{x(i)\}_{i\in I}$. 下说明

(i) $x\in \ell^2(I)$.

(ii) ~~由~~ $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$.

先证(i). 利用 $x_n(i)\longrightarrow x(i)$ 关于 i 一致. 知.

$$\sum_{i\in I}|x(i)|^2=\sum_{i\in I}\left[\lim_{n\to\infty}|x_n(i)|^2\right]\xlongequal{\text{一致收敛}}\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}|x_n(i)|^2 < \infty$$

Cauchy列有界

$\Rightarrow x\in \ell^2(I)$. $\Rightarrow$ (i) 成立.

下证(ii). 由 $[d(x_n,x)]^2=\sum\limits_{i\in I}|x_n(i)-x(i)|^2$

由 $|x_n(i)-x(i)|^2\le 2|x_n(i)|^2+2|x(i)|^2$.

且 $\sum\limits_{i\in I}2|x_n(i)|^2<\infty$, $\sum\limits_{i\in I}2|x(i)|^2<\infty$. 因此利用 $\boxed{\text{控制收敛定理}}$ 知

$$\lim_{n\to\infty}[d(x_n,x)]^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I}|x_n(i)-x(i)|^2$$

$$=\sum_{i\in I}\left[\lim_{n\to\infty}|x_n(i)-x(i)|^2\right]=0. \Rightarrow \text{(ii) 成立.}$$

综上. $\ell^2(I)$ 为 Hilbert空间.

2) $L^2(\mu)$ 设 (X,Ω,μ) 为一个测度空间. 定义.

$$L^2(X,\Omega,\mu)=L^2(\mu):=\left\{f:X\to\mathbb{F},\ \int_X|f(x)|^2d\mu<\infty\right\}$$

则 $L^2(\mu)$ 也为 Hilbert空间.

命题1.1.12 (完备化). 设 $\mathscr{X}$ 为一个向量空间, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为其上的内积. 则 $\exists$ 一个更大的向量空间 $\mathscr{H}$, s.t.

(i) $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{H}$.

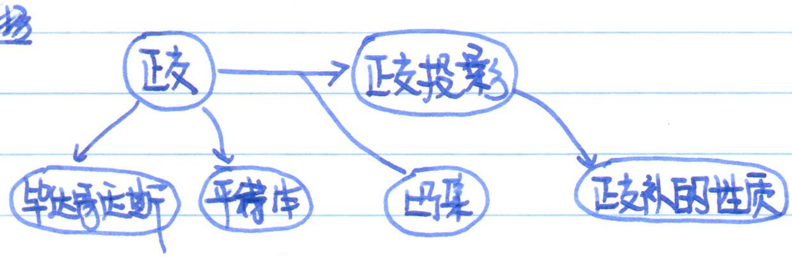
(ii) $\mathscr{H}$ 上也 $\exists$ 一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{H}}$, s.t. 当 $x, y \in \mathscr{X}$ 时,

$$\langle x, y\rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, y\rangle.$$

(iii) $\mathscr{H}$ 为 Hilbert 空间.

证明: 此定理的证明需用到度量空间完备化的知识, 我们暂且不证.

§1.2 正交



定义1.2.1 (正交) 设 $\mathscr{H}$ 为一个 Hilbert 空间, $f, g \in \mathscr{H}$, $A, B \subseteq \mathscr{H}$. 则

(i) 若 $\langle f, g\rangle = 0$, 则称 f 与 g 正交, 记作 $f \perp g$.

(ii) 若对 $\forall f \in A$, $g \in B$, 有 $\langle f, g\rangle = 0$, 则称集合 A 与 B 正交, 记作 $A \perp B$.

定理1.2.2 (毕达哥拉斯). 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $\mathscr{H}$ 中 n 个相互正交的元素(向量), 则

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2.$$