§6 Bessel与Riesz位势的估计

§6.1 点态与积分估计

引理6.1.1 (小球积分). 设$\mu\in M(\mathbb{R}^N)$, 则对$\forall\,\delta>0$,

(a) 若 $0<\alpha<N$, 则

$$\int_{|x-y|<\delta}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}=(N-\alpha)\int_0^\delta\frac{\mu(B(x,r))}{r^{N-\alpha}}\frac{dr}{r}+\frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{N-\alpha}}.$$

(b) 若$\alpha=N$, 则

$$\int_{|x-y|<\delta}\log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)d\mu(y)=\int_0^\delta\mu(B(x,r))\frac{dr}{r}+\mu(B(x,\delta))\log\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

(c). 若 $0<\alpha<N$, 则

$$\int_{|x-y|>\delta}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}=(N-\delta)\int_\delta^{+\infty}\frac{\mu(B(x,r))}{r^{N-\alpha}}\frac{dr}{r}-\frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{N-\alpha}}.$$

• ~~全一大大宽~~ 令$Mf(x)$为Hardy-Littlewood极大函数, 其定义如下

$$Mf(x):=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy$$

设$0<\alpha<N$, 定义分数阶极大函数$M_\alpha f(x)$如下

$$M_\alpha f(x):=\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|^{\frac{N-\alpha}{N}}}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy.$$

命题6.1.2（Riesz位势的点态估计）设 $0<\alpha<N$, $1\le p<\infty$, 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall$ 非负可测函数 f 以及 $x\in\mathbb{R}^N$, 有

(a). 对 $\forall p\in[1,\frac{N}{\alpha})$, 有

$$I_\alpha * f(x)\le A\|f\|_p^{\alpha p/N}Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{N}}.$$

(b) 对 $0<\theta<1$,

$$I_{\alpha\theta}*f(x)\le A(I_\alpha * f(x))^\theta Mf(x)^{1-\theta}.$$

(c). 对 $0<\theta<1$,

$$I_{\alpha\theta}*f(x)\le A[M_\alpha f(x)]^\theta[Mf(x)]^\theta.$$

证明: Step1 (a)的证明. 由引理6.1.1知

$$\cancel{I_\alpha * f(x)}\int_{|x-y|<\delta}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy=(N-\alpha)\int_0^\delta\frac{1}{r^{N-\alpha}}\left[\int_{B(x,r)}f(y)dy\right]\frac{dr}{r}$$

$$+\frac{1}{\delta^{N-\alpha}}\int_{B(x,\delta)}f(y)dy$$

$$\lesssim\left[\int_0^\delta r^{\alpha-1}dr+\delta^\alpha\right]M(f)(x)\sim\delta^\alpha M(f)(x).\quad (*1)$$

另一方面,

$$\int_{|x-y|\ge\delta}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy\lesssim\left(\int_{|x-y|\ge\delta}|f(y)|^pdy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{|x-y|\ge\delta}|x-y|^{(\alpha-N)p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\lesssim\|f\|_p\left(\int_\delta^{+\infty}r^{(\alpha-N)p'+n-1}dr\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\surd\ (\alpha-N)p'+n<0\iff p'>\frac{n}{N-\alpha}\iff p<\frac{\frac{n}{n-\alpha}}{\frac{n}{n-\alpha}-1}=\frac{n}{n-n+\alpha}=\frac{n}{\alpha}$$

$$\lesssim\|f\|_p\,\delta^{\frac{(\alpha-N)p'+N}{p'}}\sim\delta^{\alpha-\frac{N}{p}}\|f\|_p.\quad (*2)$$

联立(*)与(*2)，得.

$$I_\alpha * f(x) \lesssim \delta^\alpha Mf(x) + \delta^{\alpha-N/p}\|f\|_p \quad 对\ \forall\,\delta>0.$$

取 $\delta=\left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{p/N}$ 得. $\delta^\alpha=\left[\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right]^{\frac{p\alpha}{N}} Mf(x)$

$$=\|f\|_p^{\frac{p\alpha}{N}}\left[Mf(x)\right]^{1-\frac{p\alpha}{N}}.$$

$$\delta^{\alpha-\frac{N}{p}}\|f\|_p=\left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{N}(\alpha-\frac{N}{p})}\|f\|_p=\frac{\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{N}-1+1}}{[Mf(x)]^{\frac{\alpha p}{N}-1}}=\|f\|_p^{\frac{p\alpha}{N}}[Mf(x)]^{1-\frac{p\alpha}{N}}$$

从而 $I_\alpha * f(x)\lesssim\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{N}}Mf(x)^{1-\alpha p/N}$.

Step2 (b)的证明. 注意到由引理6.1.1.

$$\int_{|x-y|\ge\delta}\frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{N-\alpha\theta}}\ \cancel{=(N-\alpha\theta)\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{r^{N-\alpha\theta}}\left[\int_{B(x,r)}f(y)\,dy\right]\frac{dr}{r}-\frac{1}{\delta^{N-\alpha\theta}}\int_{B(x,\delta)}f(y)\,dy}.$$

由 $|x-y|\ge\delta\Rightarrow\frac{1}{|x-y|^{N-\alpha\theta}}=\frac{1}{|x-y|^{N-\alpha+\alpha(1-\theta)}}\le\delta^{\alpha(\theta-1)}\frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}}$.

从而 上式 $\lesssim\delta^{\alpha(\theta-1)}\int_{|x-y|\ge\delta}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy\lesssim\delta^{\alpha(\theta-1)}I_\alpha * f(x)$ (*3)

联立(*)与(*3)，得.

$$I_{\alpha\theta} * f(x)\lesssim\delta^{\alpha\theta}M(f)(x)+\delta^{\alpha(\theta-1)}I_\alpha * f(x)$$

取 $\delta=\left(\frac{I_\alpha * f(x)}{Mf(x)}\right)^{1/\alpha}$. 得

$$I_{\alpha\theta} * f(x)\lesssim\left(\frac{I_\alpha * f(x)}{Mf(x)}\right)^\theta\cdot Mf(x)+\left[\frac{I_\alpha * f(x)}{Mf(x)}\right]^{\theta-1}[I_\alpha * f(x)]\sim[I_\alpha * f(x)]^\theta Mf(x)^{1-\theta}$$

Step3 (c)的证明) 利用引理6.1.3(c), 知.

$$\int_{|x-y|>\delta}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha\theta}}dy \lesssim \delta^{\alpha\theta-\alpha}M_\alpha f(x). \quad (*4)$$

联立(*)与(*4)并取 $\delta=\left(\frac{M_\alpha(f)(x)}{M(f)(x)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. $\Rightarrow$ (c)成立.

#

命题6.1.3 (Riesz位势的端点点态估计). 设 $1\le p<\infty$ 满足 $\alpha p=N$. 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall\varepsilon>0$, $f\in L^p_+$, 满足 $\mathrm{supp}\, f\subseteq B(0,R)$, $\|f\|_p=1$, 有 对 $\forall x\in B(0,R)$.

$$(I_\alpha * f(x)-\varepsilon)_+^{p'}\le \underbrace{\gamma_\alpha^{p'}\frac{\omega_{N-1}}{N}}_{\text{常数}}\log_+\left(\frac{ARN(Mf(x))^p}{\varepsilon^p}\right).$$

证明: 对 $\forall x\in B(0,R)$, 以及 $\delta<2R$, 有

$$\int_{|x-y|\ge\delta}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy \underset{\substack{x\in B(0,R)\\ \mathrm{supp} f\subseteq B(0,R)\end{substack}\Rightarrow |x-y|\le 2R}}{=} \int_{\delta\le|x-y|\le 2R}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy$$

$\alpha p=N \Rightarrow p'=\frac{p}{p-1}\Rightarrow p'=\frac{\frac{N}{\alpha}}{\frac{N}{\alpha}-1}=\frac{N}{N-\alpha}.$

$(\alpha-N)p'+N=0$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\delta^{2R}r^{(\alpha-N)p'+N-1}dr\right)^{\frac{1}{p'}} \overset{\|f\|_p=1}{\lesssim}\left(\omega_{N-1}\int_\delta^{2R}r^{-1}dr\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\simeq\left[\log\left(\frac{2R}{\delta}\right)\omega_{N-1}\right]^{\frac{1}{p'}} \quad (*)$$

又 $\int_{|x-y|}\frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}dy\le A_1\delta^\alpha Mf(x)$.

令 $\delta^\alpha:=\min\left\{\frac{\varepsilon}{\gamma_\alpha A_1 Mf(x)}, (2R)^\alpha\right\}$.

$$\Rightarrow \int_{B(0,R)} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{N-\alpha}} \le \frac{\varepsilon}{\gamma_\alpha} + \left(\omega_{N-1} \log_+ \frac{2R(\gamma_\alpha A_1 Mf(x))^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

再由$\alpha = N/p$, $\Rightarrow$.

$$\left(\int_{B(0,R)} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{N-\alpha}} - \frac{\varepsilon}{\gamma_\alpha}\right) \le \omega_{N-1} \log_+ \frac{2R(\gamma_\alpha A_1 Mf(x))^{\frac{p}{N}}}{\varepsilon^{\frac{p}{N}}}$$

$$\sim \left[\log_+ \left(\frac{AR^N Mf(x)^p}{\varepsilon^p}\right)\right]^{\frac{1}{p'}}$$

#.

定理6.1.4 (Riesz位势的有界性)

(a). 设$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $0<\alpha<N$, 则

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : |I_\alpha * f(x)| > \lambda\}| \le A\left(\frac{\|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{N}{N-\alpha}}.$$

(b) 设$f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $0<\alpha<N$, $1<p<\frac{N}{\alpha}$, $p^* = \frac{Np}{N-\alpha p}$. 则

$$\|I_\alpha * f\|_{p^*} \le A\|f\|_p.$$

(c) 设$f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $0<\alpha<N$, $p=\frac{N}{\alpha}$, 若 $\operatorname{supp} f \subseteq B(0,R)$, 且$\|f\|_p = 1$, 则

$$\int_{B(0,R)} \exp\{\beta |I_\alpha * f|^{p'}\}\,dx \le AR^N,$$

其中$\beta < \beta_0 = \gamma_\alpha^{-p'} N/\omega_{N-1}$.

证明: Step1 ((a)与(b)的证明). 不失一般性,仅证(a) 由命题6.1.2 ~~知~~ (取$p=1$). 知 对 $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

有 $I_\alpha * f(x) \lesssim \|f\|_1^{\frac{\alpha}{N}} [Mf(x)]^{1-\frac{\alpha}{N}}$. (*)

又由 M 为弱 (1,1) 有界，知

$$\left|\{x:|I_\alpha*f(x)|>\lambda\}\right| \le \left|\{x: A\|f\|_1^{\frac{\alpha}{N}}[Mf(x)]^{1-\frac{\alpha}{N}}>\lambda\}\right|$$

$$=\left|\{x: Mf(x)>\left[\frac{\lambda}{A\|f\|_1^{\frac{\alpha}{N}}}\right]^{\frac{N}{N-\alpha}}\}\right|$$

$$\overset{\text{弱(1,1)有界}}{\lesssim} \frac{\|f\|_1\,\|f\|_1^{\frac{\alpha}{N-\alpha}}}{\lambda^{\frac{N}{N-\alpha}}} \sim \left(\frac{\|f\|_1}{\lambda}\right)^{\frac{N}{N-\alpha}} \Rightarrow \text{(a) 成立.}$$

类似地，(b) 也成立.

Step 2 ((c) 的证明).

断言如下初等不等式：对 $\forall\, c<1$ 以及 $\varepsilon>0$，$\exists\, A>0$，s.t. 对 $\forall\, x\ge\varepsilon$，

$$c\,x^{p'} \le (x-\varepsilon)^{p'}+A. \quad (*2).$$

则

$$\int_{B(0,R)}\exp(\beta|I_\alpha*f|^{p'})\,dx \le \int_{B(0,R)\cap\{x:\beta|I_\alpha*f|^{p'}<\varepsilon\}}\exp(\beta|I_\alpha*f|^{p'})\,dx+\int_{B(0,R)\cap\{x:\beta|I_\alpha*f|^{p'}\ge\varepsilon\}}\cdots\,dx$$

$$=: I_1+I_2.$$

对于 I_1，易知 $I_1\le \exp(\varepsilon)R^N$. $(*3)$

对于 I_2，则由命题 6.1.3 知

$$(I_\alpha*f(x)-\varepsilon)_+^{p'} \le \gamma_\alpha^{p'}\frac{\omega_{N-1}}{N}\log_+\frac{AR^N Mf(x)^p}{\varepsilon^p}.$$

知对 $\forall\,\beta<\frac{1}{\gamma_\alpha^{p'}\frac{\omega_{N-1}}{N}}$，有

$$\beta(I_\alpha*f(x)-\varepsilon)_+^{p'} \le \log_+\left(\frac{AR^N Mf(x)^p}{\varepsilon^p}\right).$$

$$\Rightarrow \exp\{\beta(I_\alpha*f(x)-\varepsilon)_+^{p'}\} \le \exp\left[\log_+\left(\frac{AR^N Mf(x)^p}{\varepsilon^p}\right)\right] \le \frac{AR^N Mf(x)^p}{\varepsilon^p}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\substack{B(0,R)\cap \\ \{\beta|I_\alpha * f(x)|^{p'} \geq \varepsilon\}}} \exp\{\beta(I_\alpha * f(x))^{p'}\}\, dx \lesssim \int_{B(0,R)} \exp\{\beta(I_\alpha * f(x) - \varepsilon)_+^{p'}\}\, dx + \int_{B(0,R)} A\, dx$$

$$\lesssim \frac{R^N}{\varepsilon_0} \|M_\alpha f\|_p + R^N \overset{\|f\|_p=1}{\lesssim} R^N.$$

#

推论6.1.5 (Bessel位势的有界性).
设 $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $0<\alpha\leq N$, $1<p<\frac{N}{\alpha}$, 令 $p^* := \frac{Np}{N-\alpha p}$, 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall\ p\leq q\leq p^*$,

$$\|G_\alpha * f\|_q \leq A\|f\|_p.$$

证明: 由 $G_\alpha \leq I_\alpha$, 应用定理6.1.4, 知. 对 $\forall\ 1<p<\frac{N}{\alpha}$,

$$\|G_\alpha * f\|_{p^*} \leq \|I_\alpha * f\|_{p^*} \leq A\|f\|_p \quad (*1)$$

又由 $\|G_\alpha\|_1 = 1$. 应用 Young 卷积不等式, 得

$$\|G_\alpha * f\|_p \leq \|G_\alpha\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p \quad (*2)$$

联立 (*1) 与 (*2), 并应用算子插值, 得 对 $\forall\ q\in(p,p^*)$

$$\|G_\alpha * f\|_q \lesssim \|f\|_p$$

#

定理6.1.6 (Riesz位势的插值不等式) 设 $0<\alpha<N$, $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1<p<\frac{N}{\alpha}$, 则 $\exists A>0$, s.t.

(i) $\|I_{\alpha\theta} * f\|_r \leq A \|I_\alpha * |f|\|_q^\theta \|f\|_p^{1-\theta}$

(ii) $\|I_{\alpha\theta} * f\|_r \leq A \|M_\alpha f\|_q^\theta \|f\|_p^{1-\theta}$,

其中 $0<\theta<1$, $0<q\leq\infty$. $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p}$.

证明：不失一般性，仅证(i)．由命题6.1.2知．对 $\forall\theta\in(0,1)$，$x\in\mathbb{R}^N$，有

$$I_{\alpha\theta}*f(x)\le A\,(I_\alpha*f(x))^{\theta}\,Mf(x)^{1-\theta}.$$

$$\Rightarrow \|I_{\alpha\theta}*f\|_{L^r}=\|(I_\alpha*f)^{\theta}(Mf)^{1-\theta}\|_{L^r}\sim\left[\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha*f)^{\theta r}(x)\,Mf(x)^{(1-\theta)r}dx\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\lesssim}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|I_\alpha*f(x)|^{s\theta r}dx\right)^{\frac{1}{rs}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}[Mf(x)]^{(1-\theta)rs'}dx\right)^{\frac{1}{rs'}}.$$

取 $s>1$，s.t.

$\downarrow$ 查看 $s\theta r$

$$\begin{cases} s\theta r=q \\ (1-\theta)rs'=p\end{cases}\Rightarrow \quad \cancel{\theta=\frac{q}{sr}}\quad s=\frac{q}{\theta r}$$

$$\cancel{1-\theta=\frac{p}{rs'}}\quad s'=\frac{p}{(1-\theta)r}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{\theta r}{q}+\frac{(1-\theta)r}{p}=1.\ 且\ \frac{1}{rs}=\frac{\theta}{q}.$$

$$\frac{1}{rs'}=\frac{1-\theta}{p}.$$

$$\cdot\lesssim\|I_\alpha*f\|_q^{\theta}\,\|f\|_p^{1-\theta}.$$

#

命题6.1.7 (Riesz位势的导数估计)．设 $\xi\in\mathbb{N}^N$ 为多重指标满足 $|\xi|<\alpha<N$．则 $\exists A>0$，s.t. 对 $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^N)$，$1\le p<\infty$，a.e. $x\in\mathbb{R}^N$，有

$$|D^{\xi}(I_\alpha*f(x))|\le A[Mf(x)]^{\frac{|\xi|}{\alpha}}(I_\alpha*|f|(x))^{1-\frac{|\xi|}{\alpha}}.$$

证明：由如下两件事实：

(i)．$D^{\xi}(I_\alpha*f)(x)=(D^{\xi}I_\alpha*f)(x)$

(ii) $|D^{\xi}I_\alpha(x)|\lesssim I_{\alpha-|\xi|}(x)$.

又由命题6.1.2知　（令 $\alpha-|\xi|=\alpha\cdot\frac{\alpha-|\xi|}{\alpha}=\alpha\theta$，即 $\theta=\frac{\alpha-|\xi|}{\alpha}$）.

$$I_{\alpha\theta}*f(x)\lesssim(I_\alpha*f(x))^\theta[Mf(x)]^{1-\theta}.$$

$$\sim[I_\alpha*f(x)]^{1-\frac{|\varsigma|}{\alpha}}[Mf(x)]^{\frac{|\varsigma|}{\alpha}}.$$

#.

命题6.1.8 (Bessel位势的导数估计) 对$\forall$多重指标ς，满足$0<|\varsigma|<N$，$\exists$常数$A>0$, s.t. 对$\forall f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1\le p<\infty$, a.e. $x\in\mathbb{R}^N$.

$$|D^\varsigma(G_\alpha*f(x))|\le A[Mf(x)]^{\frac{|\varsigma|}{\alpha}}(G_\alpha*|f|(x))^{1-\frac{|\varsigma|}{\alpha}}.$$

证明略.

§6.2 最佳指数估计

定理6.2.1 (最佳指数估计). 设$f\in L^p(\mathbb{R}^N)$, $0<\alpha<N$, $p=\frac{N}{\alpha}$, 假设 $\operatorname{supp}f\subseteq B(0,R)$, $\|f\|_p=1$. 则$\exists A>0$, s.t.

$$\int_{B(0,R)}\exp(\beta_0|I_\alpha*f|^{p'})dx\le AR^N,$$

其中 $\beta_0:=\gamma_\alpha^{-p'}N/\omega_{N-1}$. #

证明略.

§6.3 位势上的作用.

- 设T: 为$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (或$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$) 为一个映射. 称T为一个压缩，若

(i) $T(0)=0$

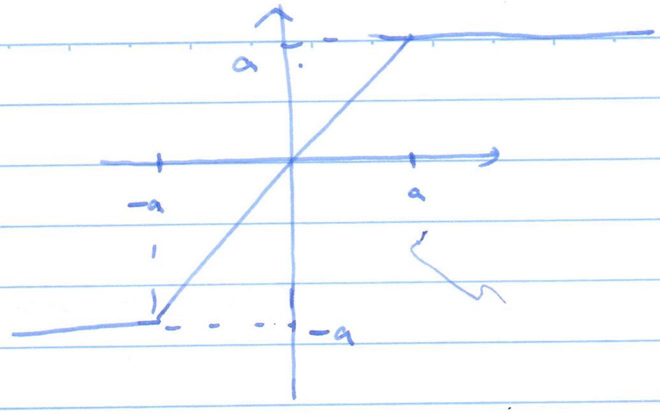
(ii) 对$\forall x,y$, $|T(x)-T(y)|\le|x-y|$.

称T为一个截断，若

(i). $T(x)=x$, $|x|\le a$

(ii) $T(x)=a$, $x>a$.

(iii). $T(x)=-a$, $x<-a$.



定理6.3.1 (Sobolev函数的压缩). 设 $O\subseteq\mathbb{R}^N$ 开, $u\in W_0^{1,p}(O)$, $1\le p<\infty$. T为一个压缩. 则 $T\circ u\in W_0^{1,p}(O)$. 且

$$\|T\circ u\|_{W^{1,p}}\le\|u\|_{W^{1,p}}.$$

进一步, 如下链式法则成立,

$$\nabla(T\circ u)(x)=(T'\circ u)(x)\,\nabla u(x).$$

证明略.

定理6.3.2 (高阶Sobolev函数压缩的必要条件). 设 $\alpha\ge2$ 且 $\alpha\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}1\le p<\frac{N}{\alpha}, & 若\ \alpha\ge3\\ 1<p<\frac{N}{2} & 若\ \alpha=2.\end{cases}$

设 $T\in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 对 $\forall u\in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$, 都有 $T\circ u\in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$, 则 $\exists c>0$, s.t.

$$T(t)=ct.$$

证明: Step1 (构造 $W^{\alpha,p}$ 函数). 设 $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 满足

$$v(x)=\begin{cases}x_1, & |x|\le1\\ 0, & |x|\ge2\end{cases}$$

~~取~~对 $\forall i\in\mathbb{N}$, 取 $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, s.t.

(i) $\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i=0$

(ii) $C_i>1$

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty}C_i^p\varepsilon_i^{N-\alpha p}<\infty$ (iv) $\sum_{i=1}^{\infty}C_i^{\alpha p-1}\varepsilon_i^{N-\alpha p}=\infty$. (注意到 $\alpha p-1>p$).

取点列 $\{y^i\}_{i\in\mathbb{N}}$, s.t.

(i) $\{B(y^i, 2\varepsilon_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 两两不交.

(ii)

令 $v_i(x) := C_i v\left(\frac{x-y^i}{\varepsilon_i}\right)$. 并定义 $u=\sum_{i=1}^{\infty} v_i$. 则

断言: $u\in W^{\alpha,p}$.

$$\sum_{|s|\le\alpha}\int |D^s u|^p dx \le A\sum_{i=1}^{\infty} C_i^p \varepsilon_i^{N-\alpha p} < \infty$$

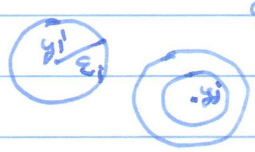
Step 2 (说明T为多项式). 下证T必须为一个阶数不超过 α 的多项式. 若不然, ∃ 有界闭区间 $[a,b]$, s.t. $T^{(\alpha)}(t)>0$. 则令

$$S_i := \left\{x\in B(y^i,\varepsilon_i) : a < C_i \frac{x_1-y^i_1}{\varepsilon_i} < b\right\} \quad (*).$$

知对 $\forall x\in S_i$,

$$u(x)=v_i(x)=C_i\frac{x_1-y^i_1}{\varepsilon_i}$$

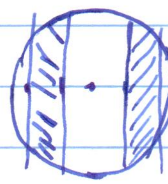
设计时, $x\in S_i$ 则 $|x-y^i|<\varepsilon_i$, 而 $\mathrm{supp}\, v_j \subseteq B(y^j, 2\varepsilon_j)$



因此,

$$\frac{\partial^\alpha (T\circ u)}{\partial x_1^\alpha} = (T^{(\alpha)}\circ u)\left(\frac{C_i}{\varepsilon_i}\right)^\alpha$$

~~由 $|S_i| \approx \frac{\varepsilon_i^N}{C_i}$~~. 由 $|S_i| \gtrsim \frac{\varepsilon_i^N}{C_i}$ 知



则 $\cancel{\|u\|^p_{W^{\alpha,p}}}$ $\|T\circ u\|^p_{W^{\alpha,p}} \ge \int \left|\frac{\partial^\alpha (T\circ u)}{\partial x_1^\alpha}\right|^p dx$

$$\ge A\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\alpha p}\varepsilon^{-\alpha p}|S_i|$$

$$\ge A\sum_{i=1}^{\infty} C_i^{\alpha p}\varepsilon^{N-\alpha p} = \infty.$$

$\Rightarrow T\circ u \notin W^{\alpha,p}$. 因此, T为一个阶数不超过 α 的多项式.

Step3 (证明 T 为线性函数). 取 $\psi \in C_0^\infty$ 满足 $\psi(0)\neq 0$. 对 $\forall s>0$, 取 $u(x)=|x|^{-s}\psi(x)$.

可得.

#

定理 6.3.3 (Bessel 位势的复合). 设 $0<\alpha<N$, $1<p<\infty$, $T\in C^k(\mathbb{R}^+)$, (其中 $k\geq\alpha$). 若 T 满足.

对 $\forall i\in\{0,1,\cdots,k\}$,

$$\sup_{t>0}|t^{i-1}T^{(i)}(t)|\leq L<\infty.$$

则 ~~$T\circ(G_\alpha * f)$~~ 对 $\forall f\in L_+^p(\mathbb{R}^N)$, 有 $T\circ(G_\alpha * f)\in L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$, ~~特别~~地, 有

$$\|T\circ(G_\alpha * f)\|_{\alpha,p}\lesssim\|G_\alpha * f\|_{\alpha,p}\sim\|f\|_p.$$

证明略.

推论 6.3.4 (容量的等价性). 设 $1<p<\infty$, $\alpha>0$. 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall E\subseteq\mathbb{R}^N$, 有

$$C_{\alpha,p}(E)\leq N_{\alpha,p}(E)\leq A\,C_{\alpha,p}(E).$$

证明: 回顾对 $\forall$ 紧集 k,

$$N_{\alpha,p}(k):=\inf\{\|\varphi\|_{\alpha,p}^p:\varphi\in\tilde{\omega}_k\},\quad \tilde{\omega}_k:=\{\varphi\in\mathcal{S}:\varphi\equiv 1 \text{ on } k \text{ 的一个邻域}\}$$

$$C_{\alpha,p}(k):=\inf\{\|\varphi\|_{\alpha,p}^p:\varphi\in\omega_k\},\quad \omega_k:=\{\varphi\in\mathcal{S}:\varphi\geq 1 \text{ on } k\}$$

显然, 由 $\tilde{\omega}_k\subseteq\omega_k$, 易知

$$C_{\alpha,p}(k)\leq N_{\alpha,p}(E).$$

另一方面, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $f\geq 0$, s.t. $F=G_\alpha * f\geq 1$ on k, 且

$$\|f\|_p^p\leq C_{\alpha,p}(k)+\varepsilon.$$

则 令 $T\in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足

$$\begin{cases} 0\le T\le 1 \\ T(t)=0, \quad 0\le t\le \frac{1}{2} \\ T(t)=1 \quad t\ge 1 \end{cases}$$ 则应用定理6.3.3知 $T(F)\in L_{p,\alpha}$ 且 $T(F)\in \tilde{W}_K$.

满足

$$\|T(F)\|_{\alpha,p}\le C_{\alpha,p}(K)+\varepsilon.$$

由 $N_{\alpha,p}(K)$ 的定义以及 ε 的任意性，得

$$N_{\alpha,p}(K)\le C_{\alpha,p}(K).$$

#

§6.4 单位逼近

定理6.4.1（单位逼近）. 设 $u\in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$，其中 $\alpha\in\mathbb{N}$，$1<p<\infty$，则 $\exists\ \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.

(a) $u_n\in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)\cap L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$，$\operatorname{supp} u_n$ 为紧集.

(b) $|u_n(x)|\le|u(x)|$ 且 $u_n(x)u(x)\ge 0$，a.e.

(c) $\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{\alpha,p}=0$.

证明略

定理6.4.2（局部 L^1 → L^1 ~~函数→函数~~）. 设 $u\in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$，其中 $\alpha\in\mathbb{N}$，$1<p<\infty$. 令 $S\in W^{-\alpha,p'}(\mathbb{R}^N)\cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. 若 $\exists f\in L^1(\mathbb{R}^N)$，$S(x)u(x)\ge-|f(x)|$，则 $Su\in L^1(\mathbb{R}^N)$ 且

$$\langle S,u\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}S(x)u(x)\,dx.$$

对偶

#

证明：设 $u\in W^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为定理6.4.1中单位逼近序列，则对 $\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$，

$$\langle S,\varphi\rangle=\int S(x)\varphi(x)\,dx.$$

...

#

§6.5 位势上的分数阶指标作用

· 设 $\alpha\in[0,\infty)$. 记 $m=[\alpha]$ 为 α 的整数部分. 对 $\forall u\in\mathcal{S}$, 引入非线性算子 D^α 如下

$$D^\alpha u(x):=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x+y)-P_x^m u(x+y)|^2}{|y|^{2\alpha}}\frac{dy}{|y|^N}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $P_x^m u$ 为 u 在 x 处的 m 阶 Taylor 多项式.

$$P_x^m u(x+y)=\sum_{|\beta|\le m}\frac{1}{\beta!}D^\beta u(x)y^\beta$$

引理 6.5.1 (D^α 的等价范数). 设 $\alpha\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$. 则 $\exists A>0$, s.t.

$$A^{-1}\|u\|_{\alpha,2}\le\|u\|_2+\|D^\alpha u\|_2\le A\|u\|_{\alpha,2}.$$

证明略.

定理 6.5.2 (分数阶 Bessel 位势的复合). 设 $0<\alpha<N$. $T\in C^{m+1}(\mathbb{R}^+)$ 满足 $m=[\alpha]$. 若对 $\forall i=0,1,\cdots,m+1$,

$$\sup_{t>0}|t^{i-1}T^{(i)}(t)|\le L<\infty.$$

令 $u=G_\alpha*f$, 其中 $f\ge0$ 且 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. 则 $\exists A>0$, s.t.

$$D^\alpha(T\circ u)(x)\le A(D^\alpha u(x)+Mf(x)).$$

对一般的 $p\ne2$, 引入算子 S^α 如下

$$S^\alpha u(x)=\left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{r^{N+\alpha}}\int_{|y|\le r}|u(x+y)-P_x^m u(x+y)|dy\right)^2\frac{dr}{r}\right]^{\frac{1}{2}}$$

定理 6.5.3 (S^α 的等价范数). 设 $1<p<\infty$, $\alpha\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$. 则 $\exists A>0$, s.t.

$$A^{-1}\|u\|_{\alpha,p}\le\|u\|_p+\|S^\alpha u\|_p\le A\|u\|_{\alpha,p}.$$ #

§6.6 位势与极大函数

• 设 μ 为一个正测度. 则对 $\forall x\in\mathbb{R}^N$, $r>0$, $0<\alpha<N$,

$$\cancel{I_\alpha *}\quad I_\alpha*\mu(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}\ge\int_{|x-y|\le r}\frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-\alpha}}\ge\frac{1}{r^{N-\alpha}}\int_{|x-y|\le r}d\mu(y)$$

$$\Rightarrow\ M_\alpha(\mu)(x)\le I_\alpha*\mu(x)\qquad ①$$

定理6.6.1 (分数阶极大函数与Riesz位势). 设 $1<p<\infty$, $0<\alpha<N$. 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall$ 正测度 μ, 有

$$A^{-1}\|M_\alpha\mu\|_p\le\|I_\alpha*\mu\|_p\overset{(*)}{\le}A\|M_\alpha\mu\|_p.$$

证明: Step1 (good-λ 不等式). 由 $I_\alpha*\mu(x)$ 下半连续, 知对 $\forall\lambda>0$,

$$E_\lambda:=\{x: I_\alpha*\mu(x)>\lambda\}$$

为开集. 作 E_λ 的 Whitney 分解, 得二进方体族 $\{Q_j\}_j$ s.t.

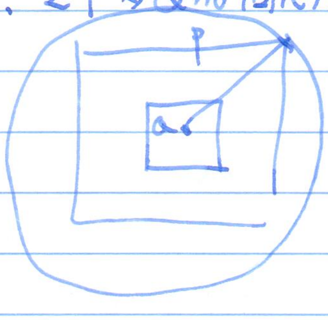
(a) $\{Q_j\}_j$ 两两内部互不相交.

(b) 对 $\forall j$, $\exists x_j$ 满足 $\mathrm{dist}(x_j,Q_j)\le 4\,\mathrm{diam}\,Q_j$ 且 $I_\alpha*\mu(x)\le\lambda$.

任取 $Q\in\{Q_j\}_j$, 令 $a>0$, $F_\lambda:=\{x\in Q: I_\alpha*\mu(x)>a\lambda\}$. 若 Q 与集合

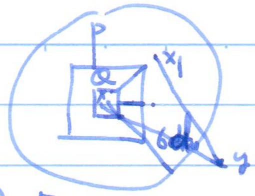
$$G_\lambda:=\{x: M_\alpha\mu(x)\le\varepsilon\lambda\}$$

相交非空, 令 P 为 Q 的同心~~方体~~球 且 ~~diam P =~~ $r_P=6\,\mathrm{diam}\,Q$



记 $\mu_1:=\mu|_P$ 且 $\mu_2:=\mu-\mu_1$. 则有

$$\left|\{x: I_\alpha * u_1(x) > a\lambda/2\}\right| \le A\left(\frac{1}{a\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} du_1\right)^{\frac{N}{N-\alpha}}.$$



取 $x_0\in Q$, s.t. $M_\alpha u(x_0)\le \varepsilon\lambda$. 记 $B(x_0)=B(x_0, 8\,\mathrm{diam}\,Q)$. 知

$$P\subset B(x_0).$$

从而

$$\int_{\mathbb{R}^N} du_1 = \int_P du \le \int_{B(x_0)} du \le A\, M_\alpha(u)(x_0)\,|B(x_0)|^{\frac{N-\alpha}{N}}$$

$$\le A\varepsilon\lambda\,|B(x_0)|^{\frac{N-\alpha}{N}}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} du_1\right)^{\frac{N}{N-\alpha}} \le A\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{\frac{N}{N-\alpha}}|Q|$$

因此, $\exists\, b$, s.t.

$$\left|\{x\in Q: I_\alpha * u_1(x) > \frac{a\lambda}{2}\}\right| \le b\,\varepsilon^{\frac{N}{N-\alpha}}|Q|. \quad (*1)$$

另一方面, 若 x_1 满足 $\mathrm{dist}(x_1, Q)\le 4\,\mathrm{diam}\,Q$, 则由 P 构造, $\exists\, L$ s.t. 对 $\forall\, y\in P^c$, $\forall\, x\in Q$, $|x_1-y|\le L|x-y|$.

因此, 若 $I_\alpha * u(x_1)\le\lambda$, 得.

$$I_\alpha * u_2(x) = \int_{\mathbb{R}^N\setminus P} |x-y|^{\alpha-N}\,du(y)$$

$$\le L^{N-\alpha}\int_{\mathbb{R}^N\setminus P}|x_1-y|^{\alpha-N}\,du(y)$$

$$= L^{N-\alpha}\, I_\alpha * u_2(x_1) \le L^{N-\alpha}\lambda.$$

取 $a\ge 2L^{N-\alpha}$, 则 $I_\alpha * u_2(x)\le\frac{a\lambda}{2}$. 因此, 若 $I_\alpha * u(x) > a\lambda$, 则 $I_\alpha * u_1(x) > \frac{a\lambda}{2}$, i.e.

$$Q\subseteq\{x: M_\alpha u(x)>\varepsilon\lambda\} \text{ 或 } \{x\in Q: I_\alpha * u(x) > a\lambda\}\subseteq\{x: I_\alpha * u_1(x) > \frac{a\lambda}{2}\}.$$

而后者推出

$$|\{x\in Q: I_\alpha * u(x) > a\lambda\}| \le b\,\varepsilon^{N/N-\alpha}|Q|.$$

综上，

$$|\{x: I_\alpha * u(x) > a\lambda\}| \le b\,\varepsilon^{\frac{N}{N-\alpha}}|\{x: I_\alpha * u(x) > \lambda\}| + |\{x: M_\alpha u(x) > \varepsilon\lambda\}|. \quad (*2)$$

Step2 (积分估计). 由(*2)，知 对 $\forall R>0$,

$$\int_0^R |\{x: I_\alpha * u(x) > a\lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda$$

$$\le b\,\varepsilon^{\frac{N}{N-\alpha}}\int_0^R|\{x: I_\alpha * u(x) > \lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda + \int_0^R|\{x: M_\alpha u(x) > \varepsilon\lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda.$$

变量替换 $\Rightarrow$

$$a^{-p}\int_0^{aR}|\{x: I_\alpha * u(x) > \lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda$$

$$\le b\,\varepsilon^{\frac{N}{N-\alpha}}\int_0^R|\{x: I_\alpha * u(x) > \lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda + \varepsilon^{-p}\int_0^{\varepsilon R}|\{x: M_\alpha u(x) > \lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda.$$

取ε充分小, s.t. $b\,\varepsilon^{\frac{N}{N-\alpha}} \le \frac{1}{2}a^{-p}$，得.

$$a^{-p}\int_0^{aR}|\{x: I_\alpha * u(x) > \lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda < 2\varepsilon^{-p}\int_0^{\varepsilon R}|\{x: M_\alpha u(x) > \lambda\}|\lambda^{p-1}d\lambda$$

令$R\to\infty$, $\Rightarrow$

$$\|I_\alpha * u\|_p^p \lesssim \|M_\alpha u\|_p^p.$$

Step3 (一般的 supp u 可不一定为紧集). 利用单调扩张.

#

• 定义截断Riesz位势如下

$$I_{\alpha,\delta}(x) := \begin{cases} I_\alpha(x) & |x|<\delta \\ 0. & |x|\ge\delta \end{cases}$$

定理6.6.2（局部型极大函数与Riesz位势）. 设 $0<p<\infty$, $0<\alpha<N$, $\delta>0$. 则 $\exists A_1, A_2, A_3>0$, s.t. 对 $\forall$ 正测度 u, 有

$$\|M_{\alpha,\delta}u\|_p \le A_1\|I_{\alpha,\delta}*u\|_p \le A_2\|G_\alpha*u\|_p \le A_3\|M_{\alpha,\delta}u\|_p.$$

证明略.

推论6.6.3（向量值刻画）. 设 $0<\alpha<N$, $0<p<\infty$, $1<q<\infty$, $\delta>0$. $\{\eta_n\}_n$ 为一族单位分解. 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall u\ge 0$,

$$A^{-1}\|I_\alpha*u\|_p \le A^{-1}\|M_\alpha u\|_p \le \|\{2^{-n\alpha}\eta_n*u\}_{n=-\infty}^{+\infty}\|_{L^p(\ell^\infty)}$$

$$\le \|\{2^{-n\alpha}\eta_n*u\}_{n=-\infty}^{+\infty}\|_{L^p(\ell^q)} \le \|\{2^{-n\alpha}\eta_n*u\}_{n=-\infty}^{+\infty}\|_{L^p(\ell^1)}$$

$$\le A\|I_\alpha*u\|_p.$$

#