命题1.1.12（完备化）. 设 $\mathcal{X}$ 为一个向量空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为其上的内积. 则 $\exists$ 一个更大的向量空间 $\mathcal{H}$, s.t.

(i) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$.

(ii) $\mathcal{H}$ 上也 $\exists$ 一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$, s.t. 当 $x, y \in \mathcal{X}$ 时.

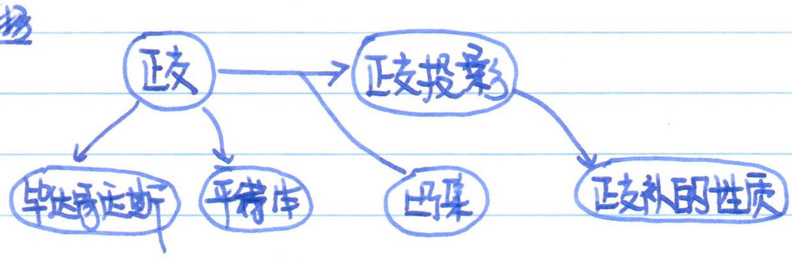
$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x, y\rangle.$$

(iii) $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间.

证明: 此定理的证明需用到度量空间完备化的知识，我们暂且不证.

§1.2 正交

~~定义结构~~



定义1.2.1（正交） 设 $\mathcal{H}$ 为一个 Hilbert 空间, $f, g \in \mathcal{H}$, $A, B \subseteq \mathcal{H}$. 则

(i) 若 $\langle f, g\rangle = 0$, 则称 f 与 g 正交, 记作 $f \perp g$.

(ii) 若对 $\forall f \in A$, $g \in B$, 有 $\langle f, g\rangle = 0$, 则称集合 A 与 B 正交, 记作 $A \perp B$.

定理1.2.2（毕达哥拉斯）. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $\mathcal{H}$ 中 n 个相互正交的元素(向量). 则

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2.$$

证明：不失一般性，设$n=2$.（一般的情形可利用数学归纳法）. 此时

极化恒等式（P.9页注1.1.6）

$$\|f_1+f_2\|^2=\langle f_1+f_2, f_1+f_2\rangle = \|f_1\|^2+2\mathrm{Re}\langle f_1, f_2\rangle+\|f_2\|^2.$$

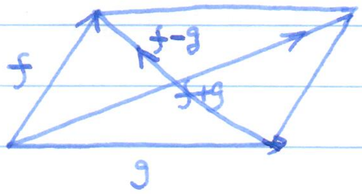
由$f_1\perp f_2$，知$\langle f_1, f_2\rangle=0$. 从而

$$\text{上式}=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2.$$

#

定理1.2.3（平行四边形法则） 设$\mathcal{H}$为Hilbert空间，$f, g\in\mathcal{H}$. 则

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$



证明：利用极化恒等式，知

$$\|f+g\|^2=\|f\|^2+2\mathrm{Re}\langle f, g\rangle+\|g\|^2$$

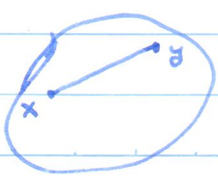
$$\|f-g\|^2=\|f\|^2+2\mathrm{Re}\langle f, -g\rangle+\|g\|^2$$

$$\Rightarrow \|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left[\|f\|^2+\|g\|^2\right].$$

#

定义1.2.4（凸集） 设X为数域$\mathbb{F}$上的向量空间，$A\subseteq X$. 称A为一个凸集，若对$\forall x, y\in A$，有对$\forall t\in[0,1]$，

$$tx+(1-t)y\in A.$$



例

注1.2.5 1)(线性子空间). 设$\mathcal{X}$为一个向量空间, $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$为$\mathcal{X}$的一个线性子空间. 则$\mathcal{Y}$为$\mathcal{X}$中的一个凸集.

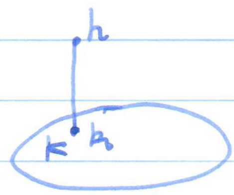
2)(闭球). 设$\mathcal{H}$为一个Hilbert空间, $f\in\mathcal{H}$, $r>0$, 则闭球

$$B(f,r):=\{g\in\mathcal{H}: d(g,f)=\|g-f\|<r\}$$

也为$\mathcal{H}$中的一个凸集.

定理1.2.6 (点到凸集的距离). 设$\mathcal{H}$为一个Hilbert空间, $K\subseteq\mathcal{H}$为一个非空凸集, $h\in\mathcal{H}$. 则$\exists!\, k_0\in K$, s.t. (k_0可称为h到K的最近点)

$$\|h-k_0\|=\operatorname{dist}(h,K):=\inf\{\|h-k\|: k\in K\} \quad (*)$$



图示

即h与K之间的距离, 可在k_0点达到.

证明. Step 1 (简化$(*)$式). 不失一般性, 假设$h=0$为零元. 此时, 欲证$(*)$, 只需证, $\exists!\, k_0\in K$, s.t.

$$\|k_0\|=\inf\{\|k\|: k\in K\}. \quad (**)$$

若$h\neq 0$, 则令 $\tilde{K}:=K-h:=\{k-h: k\in K\}$. 可由$K$为凸集, 易知$\tilde{K}$也为凸集 (作业).

此时 $(*)\Longleftrightarrow \exists!\, k_0-h\in K-h=\tilde{K}$, s.t.

$$\|h-k_0\|=\inf\{\|h-k\|: k-h\in K-h=\tilde{K}\} \quad (***)$$

利用$\tilde{K}$代替K, 知$(***)$即为$(**)$.

Step2（寻找最近点）．令 $d:=\operatorname{dist}(0,K)=\inf\{\|k\|: k\in K\}$．由下确界定义知，
$\exists\{k_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K$, s.t.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|k_n\|=d$

(ii) 对 $\forall n$, $\|k_n\|\geq d$.

下说明 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 中 Cauchy 列．为此，对 $\forall n\neq m$．利用平行四边形法则，有

$$\left\|\frac{k_n-k_m}{2}\right\|^2+\left\|\frac{k_n+k_m}{2}\right\|^2=2\left[\left\|\frac{k_n}{2}\right\|^2+\left\|\frac{k_m}{2}\right\|^2\right]$$

从而 $\left\|\frac{k_n-k_m}{2}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left[\|k_n\|^2+\|k_m\|^2\right]-\left\|\frac{k_n+k_m}{2}\right\|^2$.

由知，对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, s.t. 当 $n,m\geq N$ 时，有

$$\|k_n\|^2\leq d^2+\frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\|k_m\|^2\leq d^2+\frac{\varepsilon^2}{4}$$

另一方面，由 $k_n,k_m\in K$，而 K 为凸集，知 $\frac{k_n+k_m}{2}\in K$．由此由 d 的定义知

$$\left\|\frac{k_n+k_m}{2}\right\|^2\geq d^2$$

综合与以及得当 $n,m\geq N$ 时

$$\left\|\frac{k_n-k_m}{2}\right\|^2\leq d^2+\frac{\varepsilon^2}{4}-d^2=\frac{\varepsilon^2}{4}\Rightarrow\|k_n-k_m\|\leq\varepsilon.$$

这说明 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 中 Cauchy 列．由 $\mathcal{H}$ 是完备的，知 $\exists k_0\in\mathcal{H}$, s.t.

$$\lim_{n\to\infty}\|k_n-k\|=0.$$

下说明 k_0 满足 (**) 式．即 $\|k_0\|=d$．事实上

$$d \le \|k_0\| \le \|k_0-k_n+k_n\| \overset{\text{三角不等式}}{\le} \|k_0-k_n\|+\|k_n\|$$

令 $n\to\infty$，由 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\|k_n-k_0\|=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\|k_n\|=d\end{cases}$ 知上式右也 $\to d$．

从而 $\|k_0\|=d$．由此说明 k_0 为 h 到 K 的最近点．

<u>Step3（最近点的唯一性）</u>．若 k_0 点不唯一，设 $\exists h_0\neq k_0\in K$，也满足

$\|h_0\|=d$．此时，由 K 凸，知 $\frac{1}{2}(h_0+k_0)\in K$．由

$$d\le\left\|\tfrac{1}{2}(h_0+k_0)\right\| \overset{\text{三角不等式}}{\le} \tfrac{1}{2}(\|h_0\|+\|k_0\|)=d.$$

这说明 $\|\frac{1}{2}(h_0+k_0)\|=d$．又由平行四边形法则

$$\left\|\tfrac{1}{2}(h_0-k_0)\right\|^2+\left\|\tfrac{1}{2}(h_0+k_0)\right\|^2=2\left[\left\|\tfrac{h_0}{2}\right\|^2+\left\|\tfrac{k_0}{2}\right\|^2\right]=d^2$$

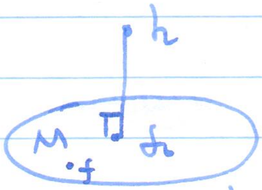
$$\left\|\tfrac{1}{2}(h_0-k_0)\right\|^2+d^2$$

由左=右，$\Rightarrow \|\frac{1}{2}(h_0-k_0)\|^2=0 \Rightarrow h_0=k_0$，矛盾．这说明最近点 k_0 唯一．

\#

定理1.2.7 (最近点的正交性刻画) 设$\mathcal{H}$为Hilbert空间. $M\subseteq\mathcal{H}$为$\mathcal{H}$中的一个闭线性子空间. $h\in\mathcal{H}$. 则点$f_0\in M$为h到M的最近点 $\Longleftrightarrow$ $h-f_0\perp M$. 即对$\forall f\in M$,

$$(h-f_0)\perp f.$$



证明: Step 1 ($\Rightarrow$ 最近点$\Rightarrow$正交) 设$f_0\in M$为h到M的最近点, 则对$\forall f\in M$, 需证.

$$(h-f_0)\perp f \quad ⊛$$

由$f\in M$, $f_0\in M$, 知 $f+f_0\in M$. 因此, 由f_0为最近点知

$$\|h-f_0\|^2 \le \|h-(f_0+f)\|^2$$
$$=\|(h-f_0)-f\|^2 \overset{\text{极化恒等式}}{=\!=} \|h-f_0\|^2-2\mathrm{Re}\langle h-f_0,f\rangle+\|f\|^2$$

$\Rightarrow 2\mathrm{Re}\langle h-f_0,f\rangle\le\|f\|^2$. (**) 记 $\langle h-f_0,f\rangle=re^{i\theta}$. $(r\ge0)$.

由$f\in M$是任意的, 将f用$te^{i\theta}f$代替, 由M为线性子空间知$te^{i\theta}f\in M$. 从而应用(**)式得

$$\underbrace{2\mathrm{Re}\langle h-f_0,f\rangle te^{i\theta}}_{2rt}\le t^2\|f\|^2. \Rightarrow r\le\frac{t}{2}\|f\|^2.$$

再令$t\to0$知 $r=|\langle h-f_0,f\rangle|=0$. $\Rightarrow$ ⊛式成立.

Step2 ("⇐" 从正交到最近点) 假设 $f_0\in M$, 满足 $h-f_0\perp M$. 则对 $\forall f\in M$, 有

$$(h-f_0)\perp(f_0-f).$$

从而

$$\|h-f\|^2=\|(h-f_0)+(f_0-f)\|^2 \overset{\text{毕达哥拉斯}}{=} \|h-f_0\|^2+\|f_0-f\|^2 \geq \|h-f_0\|^2$$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(h,M)=\|h-f_0\|^2$. $\Rightarrow f_0$ 也 h 到 M 的最近点.

#

定义1.2.8 (正交投影) 设 $\mathcal{H}$ 为Hilbert空间, $\boxed{M\leq\mathcal{H}\text{为一个闭线性子空间}}^{\text{记作}M\leq\mathcal{H}}$. ~~记 $f_0\in M$ 为 从中~~ 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 记 $f_0\in M$, 为 h 到 M 的最近点, 由此得到映射 $P:\mathcal{H}\to M$,

$$f\longmapsto Pf:=h.$$

称 P 为 $\mathcal{H}$ 到 M 上的正交投影. 由定理1.2.7知, 若 $P:\mathcal{H}\to M$ 为正交投影, 则对 $\forall h\in\mathcal{H}$, $(h-Ph)\perp M$.

定义1.2.9 (正交补) (i). 设 $\mathcal{H}$ 为Hilbert空间, $A\subseteq\mathcal{H}$. 则 A 的正交补 $A^\perp$ 定义为

$$A^\perp:=\{f\in\mathcal{H}: f\perp g,\ \forall g\in A\}.$$

(ii) 设 $P:\mathcal{H}\to M$ 为一映射, 则 P 的核空间, $\ker P$, 定义为

$$\ker P:=\{f\in\mathcal{H}: Pf=0\}.$$

定理1.2.10(正交投影的性质) 设$M\leq\mathcal{H}$，P为$\mathcal{H}$到M上的正交投影，则如下性质成立.

(a) P为$\mathcal{H}\to\mathcal{H}$上的线性映射，即对$\forall\, h_1,h_2\in\mathcal{H}$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$，有

$$P(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)=\alpha_1P(h_1)+\alpha_2P(h_2).$$

(b) 对$\forall\, h\in\mathcal{H}$，$\|Ph\|\leq\|h\|$.

(c) $P^2=P\circ P=P$

(d) $\ker P=M^{\perp}$. $\operatorname{ran}P=M$ （$\operatorname{ran}P$表示映射P的值域）.

证明: Step 1 ((a)的证明). 对$\forall\, h_1,h_2\in\mathcal{H}$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$，由正交投影的定义，只需说明对$\forall f\in M$，有

$$\langle(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)-\alpha_1P(h_1)+\alpha_2P(h_2),f\rangle=0 \quad ⊛$$

而利用内积的线性性知

$$\text{上式左边}=\langle\alpha_1(h_1-Ph_1)+\alpha_2(h_2-Ph_2),f\rangle$$

$$=\alpha_1\langle h_1-Ph_1,f\rangle+\alpha_2\langle h_2-Ph_2,f\rangle$$

$$\overset{\text{由}P\text{的定义}}{=}0.$$

这说明⊛式成立.

Step 2 ((b)的证明) 对$\forall\, h\in\mathcal{H}$，有记$h=(h-Ph)+Ph$，其中$(h-Ph)\perp Ph$.

$$\|h\|^2=\|(h-Ph)+Ph\|^2\xlongequal{\text{毕达哥拉斯}}\|h-Ph\|^2+\|Ph\|^2$$

$$\Rightarrow\|Ph\|\leq\|h\|.$$

Step3 ((c)的证明) 注意到对 $\forall f\in M$, 有 $Pf=f$ (留作作业). 又由对一般的 $h\in\mathcal{H}$, 有 $Ph\in M$, 从而

$$P^2h = P(Ph) = Ph.$$

故 $P^2=P$.

Step4 ((d)的证明) $\operatorname{ran}P=M$ 的证明留given作业 (类似于 Step3 中作业).

下证 $\ker P = M^{\perp}$ 为 M 的正交补.

事实上, 一方面, 若 $h\in\ker P$, 有 $Ph=0$. 从而对 $\forall f\in M$, 有

$$\langle h-Ph, f\rangle = \langle h,f\rangle = 0 \Rightarrow h\in M^{\perp}.$$

另一方面, 若 $h\in M^{\perp}$, 知对 $\forall f\in M$, 有

$$\langle h,f\rangle = 0 \Rightarrow \langle h-0, f\rangle = 0 \Rightarrow Ph=0 \Rightarrow h\in\ker P.$$

#.

推论 1.2.11 (正交补的性质) 设 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间.

(i) 若 $M\leq\mathcal{H}$, 则 $(M^{\perp})^{\perp}=M$.

(ii) 若 $A\subseteq\mathcal{H}$, 则 $(A^{\perp})^{\perp}$ 为包含 A 的最小闭子空间.

证明: 设 $P:\mathcal{H}\to M$ 为正交投影. $I:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 为单位映射. 则如下断言成立.

断言: $I-P$ 为 $\mathcal{H}$ 到 $M^{\perp}$ 的正交投影.

事实上对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 以及 $\forall g\in M^{\perp}$, 有

$$\langle h-(I-P)h, g\rangle = \langle Ph, g\rangle \xlongequal{Ph\in M,\, g\in M^{\perp}} 0$$

$\Rightarrow$

利用定理1.2.10的性质(d),有

$$(M^{\perp})^{\perp}=\ker(I-P)=\{h\in H: (I-P)h=0 \Leftrightarrow h=Ph\}=\operatorname{ran}P=M.$$

(ii)的证明留作习题.

§1.3 Riesz表示定理

定义1.3.1(有界线性泛函) 设H为Hilbert空间. $L:H\to\mathbb{F}$为一个映射(泛函)

(a) 称L为一个线性泛函,若L为一个线性映射,即对$\forall h_1,h_2\in H$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$,

$$L(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)=\alpha_1L(h_1)+\alpha_2L(h_2).$$

(b) 称L为一个有界线性泛函,若L为一个线性泛函,且$\exists$常数$c>0$, s.t. 对$\forall h\in H$,

$$|L(h)|\leq c\|h\|.$$

命题1.3.2(有界线性泛函的等价刻画) 设$L:H\to\mathbb{F}$为一个线性泛函.则如下命题等价(TFAE).

(a) L连续,即对$\forall h_n\to h$,有$\lim\limits_{n\to\infty}L(h_n)=L(h)$

(b) L在0处连续.

(c) L在某一点处连续.

(d) $\exists$常数$c>0$, s.t. 对$\forall h\in H$, $|L(h)|\leq c\|h\|$.

证明：只需证

$$\begin{array}{c} (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a) \\ (b) \Updownarrow (d) \end{array}$$

Step 1（容易的部分）. (a)⇒(b) 显然

(d)⇒(b) 容易（~~留作~~ 略）

下证 (b)⇒(c). 任取 $h_0\in\mathcal{H}$, 假设 $h_n\to h_0$, 要证 L 在 h_0 处连续, 只需说明

$$\lim_{n\to\infty} L(h_n) = L(h_0) \quad \text{即} \quad |L(h_n)-L(h_0)| \overset{L\text{线性}}{=} |L(h_n-h_0)| \to 0 \quad ⊛$$

为此考虑 $\{h_n-h_0\}_{n=1}^{\infty}$，知 ~~其收敛于~~ $\lim\limits_{n\to\infty}(h_n-h_0)=0$. 而 L 在 0 处连续.

有 $\lim\limits_{n\to\infty}|L(h_n-h_0)|=0$. ⇒ ⊛式成立. ⇒ (c) 成立.

~~Step 3~~ ((c)⇒(a)) 的证明类似, 留作习题.

Step 2 ((b)⇒(d)). 由 L 在 0 点处连续, 且 $L(0)=0$, 知 ~~对~~ 对 $\mathbb{F}$ 中 ∀开集 U,

$L^{-1}(U)$ 也为 $\mathcal{H}$ 中开集. 特别地, 取 $U:=\{\alpha\in\mathbb{F}: |\alpha|<1\}=B(0,1)$ 为 $\mathbb{F}$ 中单位开球, 则

$L^{-1}(B(0,1))$ 在 $\mathcal{H}$ 中开. 又 $0\in L^{-1}(B(0,1))$.

知 ∃$\delta>0$, s.t.

$$B(0,\delta)\subseteq L^{-1}(B(0,1)).$$

即对 ∀$h\in\mathcal{H}$, 满足 $\|h\|<\delta$, 有 $|L(h)|<1$. ⊛

从而, 对 ∀$h\in\mathcal{H}$, 取 $\varepsilon>0$ 充分小, 由 $\left\|\frac{\delta h}{\|h\|+\varepsilon}\right\|<\delta$.

知 $\left|L\left(\frac{\delta h}{\|h\|+\varepsilon}\right)\right|<1 \Rightarrow |L(h)|\le \frac{\|h\|+\varepsilon}{\delta}$.

令 $\varepsilon\to0$，得
$$|L(h)|\le\frac{1}{\delta}\,c\|h\|.$$

故取 $c=\frac{1}{\delta}$，得对 $\forall\, h\in\mathcal{H}$，
$$|L(h)|\le c\|h\| \implies (d)\ 成立.$$

#

命题1.3.3（有界线性泛函的范数/界）. 设 L 为 $\mathbb{H}$ 上的有界线性泛函，定义
$$\|L\|:=\sup\{|L(h)|:\ h\in\mathcal{H},\ \|h\|\le1\}<\infty.$$

称 $\|L\|$ 为 L 的界（范数）。且

$$\|L\|=\sup\{|L(h)|:\|h\|=1\} \qquad A$$
$$=\sup\left\{\frac{|L(h)|}{\|h\|}:\ h\in\mathcal{H},\ h\ne0\right\} \qquad B$$
$$=\inf\{c>0:\ |L(h)|\le c\|h\|,\ \forall\, h\in\mathcal{H}\} \qquad C.$$

证明: Step1 ($A=B=\|L\|$) $A=B$ 显然。$A\le\|L\|$ 显然。下证 $\|L\|\le B$。事实上，对 $\forall\,\varepsilon>0$ 充分小，由 $\|L\|$ 的定义以及 sup 的定义知 $\exists\, h\in\mathcal{H}$，$\|h\|\le1$，s.t.

$$\|L\|-\varepsilon<|L(h)|\le\|L\|$$

另一方面，由 B 的定义，$|L(h)|=\frac{|L(h)|}{\|h\|}\cdot\|h\|\le B$

知对
$$\|L\|-\varepsilon<B.\ 由\ \varepsilon\ 的任意性，\|L\|\le B.$$

Step2 ($B=C$). 先证 $C\le B$. 考虑集合

$$E:=\{c>0:\ |L(h)|\le c\|h\|,\ h\in\mathcal{H}\}$$

由 B 的定义，知 $B\in E$，从而

$$C=\inf\{c>0;\ c\in E\}\leq B=\cancel{\|L\|}.$$

下说明 $\|L\|\leq C$. 又由对 $\forall\, c\in E$,

$$|L(h)|\leq c\|h\|. \iff \frac{|L(h)|}{\|h\|}\leq c.$$

知 c 为 $\frac{|L(h)|}{\|h\|}$ 的一个上界，从而由 B 为上确界，即最小上界，有

$B\leq c$. ※

再对 c 在集合 E 中取下确界，得 $B\leq C$. $\Rightarrow B=C=\|L\|$. #

例 1.3.4（由内积生成的有界线性泛函）固定 $h_0\in\mathcal{H}$，定义由 h_0 诱导的映射 L：$\mathcal{H}\to\mathbb{F}$ 如下.

对 $\forall\, h\in\mathcal{H}$，$L(h):=\langle h, h_0\rangle$.

易知 (i) L 为线性泛函.（作业）

(ii) L 为有界线性泛函

由命题 1.3.2，知只需说明 $\exists\, c>0$, s.t. 对 $\forall\, h\in\mathcal{H}$,

$$|L(h)|\leq c\|h\|. \quad (*)$$

而 $|L(h)|=|\langle h, h_0\rangle| \overset{\text{Cauchy不等式}}{\leq} \|h\|\,\|h_0\|.\overset{(**)}{} \Rightarrow (*)$ 式成立

(iii) $\|L\|=\|h_0\|$.

一方面，由命题 1.3.3 知 $\|L\|\leq\|h_0\|$. 另一方面，取 $h=\frac{h_0}{\|h_0\|}$，知

$$|L(h)|=\left|\left\langle\frac{h_0}{\|h_0\|}, h_0\right\rangle\right|=\|h_0\|. \Rightarrow \text{由}\|L\|\text{的定义，知}\ \|h_0\|\leq\|L\|$$

定理1.3.5 (Riesz表示定理) 设 $L:\mathcal{H}\to\mathbb{F}$ 为一个有界线性泛函. 则∃!向量 $h_0\in\mathcal{H}$, s.t. 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 有

$$L(h)=\langle h, h_0\rangle.$$

满足 $\|L\|=\|h_0\|$.

证明: Step1 (核空间). 令 $M:=\ker L$. 由 L 为有界线性泛函 知 L 连续. 从而

$$\ker L=L^{-1}\{0\}$$ 为一个闭线性子空间

不失一般性, 假设 $M\neq\mathcal{H}$ 且 $M^{\perp}\neq\{0\}$.

1° 若 $M=\mathcal{H}$, 则 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, $h\in M=\ker L \Rightarrow L(h)=0$. 故此时可取 $h_0=0$.

2° 若 $M\neq\mathcal{H}$ 但 $M^{\perp}=\{0\}$. 由推论1.2.1 (正交补的性质) 知

$$M=(M^{\perp})^{\perp}=(\{0\})^{\perp}=\mathcal{H}. \text{ 矛盾.}$$

此时 $\exists\, \tilde{f}_0\in M^{\perp}$, s.t. $L(\tilde{f}_0)\neq 0$. 令 $f_0:=\dfrac{\tilde{f}_0}{L(\tilde{f}_0)}$, 知 $f_0\in M^{\perp}$ 且

$$L(f_0)=\frac{L(\tilde{f}_0)}{L(\tilde{f}_0)}=1.$$

Step2 (表示元) 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 令 $\alpha=L(h)$. 知

$$L(h-\alpha f_0)=L(h)-\alpha L(f_0)=L(h)-\alpha=0. \Rightarrow h-\alpha f_0\in M.$$

因此, 由 $f_0\in M^{\perp}$, 得

$$\begin{aligned}0&=\langle h-L(h)f_0, f_0\rangle\\ &=\langle h, f_0\rangle-L(h)\|f_0\|^2 \Rightarrow L(h)=\left\langle h, \frac{f_0}{\|f_0\|^2}\right\rangle.\end{aligned}$$

令 $h_0:=\dfrac{f_0}{\|f_0\|^2}$, 知 $L(h)=\langle h, h_0\rangle$. 对 $\forall h\in\mathcal{H}$ 成立.

Step3 (唯一性). 若 $\exists\, \tilde{h}_0\in\mathcal{H}$, s.t. $\langle h, h_0\rangle=\langle h, \tilde{h}_0\rangle$ 对 $\forall h\in\mathcal{H}$.