知 $(h_0-\tilde{h}_0)\perp \mathcal{H} \Longrightarrow h_0-\tilde{h}_0=0$ (作业). 故 $h_0=\tilde{h}_0$.

#

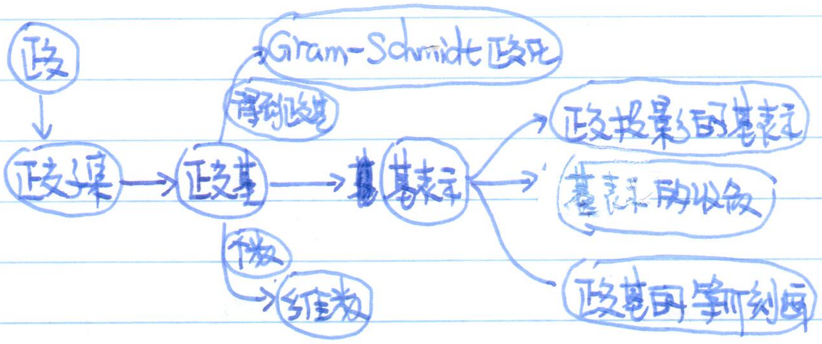
推论1.3.6 ($L^2(\mu)$上的Riesz表示定理) 设(X,Ω,μ)为一个测度空间. $F: L^2(\mu)\to \mathbb{F}$ 为一个有界线性泛函. 则 $\exists!\, h_0\in L^2(\mu)$, s.t. 对 $\forall\, h\in L^2(\mu)$,

$$F(h)=\langle h,h_0\rangle=\int_X h\bar{h}_0\, d\mu.$$

证明: 应用定理1.3.5 以及 $L^2(\mu)$为一个Hilbert空间.

§1.4 正交向量与正交基

主要知识点



定义1.4.1 (正交子集与正交基). 设$\mathcal{H}$为一个Hilbert空间.

(i) (正交子集) 设 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个子集. 称 $\mathcal{E}$ 为一个正交子集, 若如下两条性质成立:

(a) 对 $\forall\, e\in\mathcal{E}$, $\|e\|=1$. (规范性)

(b) 对 $\forall\, e_1,e_2\in\mathcal{E}$, 且 $e_1\neq e_2$, 有 $e_1\perp e_2$ (正交) 即 i.e. $\langle e_1,e_2\rangle=0$. (正交性)

(ii) (正交基) 设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个正交子集, 称 $\mathcal{E}$ 为一个正交基, 若 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个极大正交子集, i.e. 若 $\exists\, \mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的另一个正交子集, 且 $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{F}$, 则

$\mathcal{E}=\mathcal{F}$.

正交化+从正交集得到

定 **命题1.4.2（正交基存在）** 设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个正交子集. 则一定 $\exists$ $\mathcal{H}$ 中的一个正交基 $\mathcal{F}$, s.t.

$$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{F}.$$

例1.4.3 (i) $\mathcal{H}=\mathbb{F}^d$, 对 $\forall k\in\{1,\dots,d\}$, 令

$$e_k:=(0,\cdots 0,\overset{k}{1},0,\cdots)$$

知 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个正交基.

(ii) $\mathcal{H}=\ell^2(I)$, 其中 I 为一个集合（参见讲义 P.1 例1.1.1）. 则对 $\forall i\in I$, 令 $e_i: I\to\mathbb{F}$. 满足

$$e_i(j)=\begin{cases}1 & 当 j=i\\ 0 & 当 j\neq i\end{cases}\quad(\text{Dirac 映射}).$$

知 $\{e_i\}_{i\in I}$ 为 $\ell^2(I)$ 中一个正交基.

(i) 与 (ii) 的证明可用后面正交基的刻画来得到.

命题1.4.4（正交子集存在：从线性无关子集得到） (Gram-Schmidt 正交化) 设 $\mathcal{H}$ 为一个 Hilbert 空间. $\mathbb{H}:=\{h_n: n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个线性无关子集. i.e. $\forall h_n\in\mathbb{H}$, 都不能用 $\mathbb{H}$ 中其它元素线性表示. 则 $\exists$ $\mathcal{H}$ 中的一个正交子集 $\mathcal{E}=\{e_n: n\in\mathbb{N}\}$, s.t. 对 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\operatorname{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\operatorname{Span}\{h_1,h_2,\cdots,h_n\},$$

其中 Span$\{\cdots\}$ 表示由向量生成的线性子空间.

证明: Step 1（正交化）. 设 $\mathbb{H}:=\{h_n: n\in\mathbb{N}\}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个线性无关子集. 则作子集

$$\tilde{\mathcal{E}}:=\{\tilde{e}_n: n\in\mathbb{N}\}, 满足$$

$$\tilde{e}_1:=h_1,\quad \tilde{e}_2:=h_2-\frac{\langle h_2,\tilde{e}_1\rangle}{\|\tilde{e}_1\|^2}\tilde{e}_1,\quad 易知$$

(1) $\langle \tilde{e}_2, \tilde{e}_1 \rangle = \langle h_2, \tilde{e}_1 \rangle - \dfrac{\langle h_2, \tilde{e}_1 \rangle}{\|\tilde{e}_1\|^2} \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow \tilde{e}_1 \perp \tilde{e}_2$.

即 h_1, h_2 可线性表示 $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$

(2) $\tilde{e}_1 = h_1 \qquad \tilde{e}_2 = h_2 - \dfrac{\langle h_2, \tilde{e}_1 \rangle}{\|\tilde{e}_1\|^2} h_1 \Rightarrow \operatorname{span}\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} \subseteq \operatorname{span}\{h_1, h_2\}$

而 $h_1 = \tilde{e}_1, \quad h_2 = \tilde{e}_1 + \dfrac{\langle h_2, \tilde{e}_1 \rangle}{\|\tilde{e}_1\|} \tilde{e}_2 \Rightarrow \operatorname{span}\{h_1, h_2\} \subseteq \operatorname{span}\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$.

$\Rightarrow \operatorname{span}\{h_1, h_2\} = \operatorname{span}\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$.

一般地，当 $n \geq 3$ 时，令

$$\tilde{e}_n := h_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle h_n, \tilde{e}_k \rangle}{\|\tilde{e}_k\|^2} \tilde{e}_k .$$

类似于 $n=2$ 的情形，有

$$\tilde{e}_1 \perp \tilde{e}_2 \perp \cdots \perp \tilde{e}_{n-1} \perp \tilde{e}_n \quad \text{即两两正交}$$

$$\operatorname{span}\{h_1, h_2, \cdots, h_n\} = \operatorname{span}\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_n\} \quad (*)$$

由此，令 $\tilde{\mathcal{E}} := \{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 得元素两两正交子集，满足(*)成立.

Step2 (规范化). 作子集 $\mathcal{E} := \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, s.t. 对 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$e_n := \frac{\tilde{e}_n}{\|\tilde{e}_n\|} \Rightarrow \|e_n\| = 1$$

易知 $\mathcal{E}$ 即为所求之正交子集.

#

定义1.4.5(基表示). 设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个正交基, $h\in\mathcal{H}$. 则称

$$\sum_{e_n\in\mathcal{E}}\langle h,e_n\rangle e_n \quad (*)$$

为 h 关于 $\mathcal{E}$ 的一个基表示.

基本问题: 问题1: (*) 中级数是否有意义 ⟶ 级数收敛
问题2: 若收敛, 级数 (*) 与 h 的关系. $\begin{cases}\text{投影算子, Bessel 不等式}\\ \text{Parseval 等式}\end{cases}$

• 令 $A\subseteq\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个子集. 记 $\operatorname{span}\{A\}$ 为 A 中元素生成的线性子空间.
记 $\vee A$ 表示 $\operatorname{span}(A)$ 的闭包, 即 $\overline{\operatorname{span}(A)}$.

命题1.4.6(投影算子的基表示). 设 $\mathcal{E}=\{e_k\}_{k=1}^n$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个有限正交子集. 令 $\mathcal{M}=\vee(\mathcal{E})$ 为 $\mathcal{E}$ 生成的闭线性子空间. 设 $P:\mathcal{H}\to\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{M}$ 上的正交投影, 则对 $\forall h\in\mathcal{H}$,

$$Ph=\sum_{k=1}^n\langle h,e_k\rangle e_k.$$

证明: 令对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 记 $Qh:=\sum_{k=1}^n\langle h,e_k\rangle e_k$. 只需证 $Ph=Qh$, 即对 $\forall g\in\mathcal{M}$, 有 (由正交投影刻画)

$$(h-Qh)\perp g.$$

而由 $\mathcal{M}=\vee(\mathcal{E})$, 只需证, 对 $\forall j\in\{1,\dots,n\}$,

$$\langle h-Qh,e_j\rangle=0 \quad (*)$$

事实上,

$$\langle h-Qh,e_j\rangle=\langle h,e_j\rangle-\sum_{k=1}^n\langle h,e_k\rangle\underbrace{\langle e_k,e_j\rangle}_{=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}}$$

$$=\langle h,e_j\rangle-\langle h,e_j\rangle=0.$$

⟹ (*) 成立. 从而 $Ph=Qh$.

#.

命题1.4.7（Bessel不等式）设$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为$\mathcal{H}$中的一个可数正交子集，$h\in\mathcal{H}$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h,e_n\rangle|^2\le\|h\|^2.$$

证明：对$\forall n\in\mathbb{N}$，令

$$h_n:=h-\sum_{k=1}^{n}\langle h,e_k\rangle e_k.\quad(*)$$

易知$h_n\perp e_k$（对$\forall k\in\{1,\dots,n\}$）。$\langle h_n,e_k\rangle=0$ 则毕达哥拉斯定理

$$\|h\|^2=\|h_n+(h-h_n)\|^2\overset{(*)+\text{毕达哥拉斯}}{=\!=\!=}\|h_n\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle h,e_k\rangle|^2\|e_k\|^2$$

$$=\|h_n\|^2+\sum_{k=1}^{n}|\langle h,e_k\rangle|^2.$$

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}|\langle h,e_k\rangle|^2\le\|h\|^2.$ 令$n\to\infty$，$\Rightarrow$ Bessel不等式成立。#

推论1.4.8（不可数基的可数表示）设$\mathcal{E}$为$\mathcal{H}$中的一个正交子集（不一定可数），则对$\forall h\in\mathcal{H}$，则$\exists$至多可数个元素（依赖于h）$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}$，s.t.

$$\langle h,e_n\rangle\ne0.$$

证明：任取$n\in\mathbb{N}$，令$\mathcal{E}_n:=\{e\in\mathcal{E}:|\langle h,e\rangle|\ge\frac{1}{n}\}$，由Bessel不等式知，$\mathcal{E}_n$的个数有限。

若不然，取出$\mathcal{E}_n$中可数子列$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，应用Bessel不等式得

$$+\infty<\sum_{n=1}^{\infty}|\langle h,e_n\rangle|^2\le\|h\|$$

这与$h\in\mathcal{H}$矛盾。

又由$\{e\in\mathcal{E}:\langle h,e\rangle\ne0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{E}_n\Rightarrow\{e\in\mathcal{E}:\langle h,e\rangle\ne0\}$至多有可数个元素。#

推论1.4.9 (Bessel不等式的一般形式) 设 $\mathcal{E}$ 为Hilbert空间中的一个正交子集(不一定可数). $h\in\mathcal{H}$, 则

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}|\langle h,e\rangle|^2\le\|h\|^2.$$

证明: 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 由推论1.4.8知 $\mathcal{E}$ 中满足 $\langle e,h\rangle\neq0$ 的 e 的个数至多可数.

令 $\tilde{\mathcal{E}}:=\{e\in\mathcal{E}:\langle h,e\rangle\neq0\}$. 易知 $\tilde{\mathcal{E}}$ 也为 $\mathcal{H}$ 中一个正交子集, 且

$$\sum_{e\in\mathcal{E}}|\langle h,e\rangle|^2=\sum_{e\in\tilde{\mathcal{E}}}|\langle h,e\rangle|^2.$$

应用Bessel不等式(命题1.4.7)得 后者 $\le\|h\|^2$. #

由于Hilbert空间中元素的若干元素涉及不可数元素求和, 为了在此情形下给出合适的收敛定义, 下引入拓扑中的"网"以及"网收敛"的概念.

定义1.4.10 (偏序集与定向集) 设 I 为一个集合, "$\le$" 为 I 中的一个二元关系.

(a) 称 $(I,\le)$ 为一个偏序集, 若如下性质成立.

(i) (自反性). 对 $\forall a\in I$, $a\le a$.

(ii) (反对称性). 对 $\forall a,b\in I$, 若 $a\le b$ 且 $b\le a$, 则 $a=b$

(iii) (传递性). 对 $\forall a,b,c\in I$, 若 $a\le b$, $b\le c$, 则 $a\le c$.

(b) 设 $(I,\le)$ 为一个偏序集. 我们称其为一个定向集, 若对 $\forall i_1,i_2\in I$, $\exists i_3\in I$, s.t.

$i_1\le i_3$

$i_2\le i_3$.

例. 令 $I:=\{B(x,r):x\in\mathbb{R}^d, r\ge0\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中所有开球构成的集合. 易验证对 $\forall B_1,B_2$ 定义

$B_1\le B_2 \Longleftrightarrow B_1\subseteq B_2$. 知 $(I,\le)$ 为一个定向集.

定义1.4.11(网) 设X为一个拓扑空间. $(I,\leq)$为一个方向集. $x: I\to X$为一个函数. 则称$((I,\leq),x)$为X中的一个网. 记作$\{x_i\}_{i\in I}$

例如. 取$I=\mathbb{N}$为自然数集. 在I中定义$\leq$为通常的大小关系. 取$X=\mathbb{R}$为实数. 此时x变为$\mathbb{N}\to\mathbb{R}$为数列. 从而知$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为$\mathbb{R}$中的一个网.

• 因此. 网可看作数列在更一般(如不可数)情形下的推广.

定义1.4.12(网收敛) 设$\{x_i\}_{i\in I}$为拓扑空间X中的一个网. 设$x_0\in X$. 则称$\{x_i\}_{i\in I}$收敛于x_0, (记作 $x_i\to x$). 若对X中$\forall$包含x_0的开集U, (可无穷小). 都$\exists i_0\in I$, s.t. 当$i\geq i_0$ (序关系). 有 $x_i\in U$.

或 $\lim x_i$

• 应用上述网与网收敛的概念回到基表示问题中. 设$\{h_i: i\in I\}$为Hilbert空间的一个集, 其中I为一个集合(不一定可数). 有 $I\longrightarrow$ 方向集 $\longrightarrow$ 网 $\longrightarrow$ 级数收敛

• 定义$\mathcal{F}$为由I中所有有限子集构成的集合族, 在$\mathcal{F}$中定义偏序关系. 对$\forall A, B\in\mathcal{F}$. 则 $A\leq B \iff A\subseteq B$.

易知$(\mathcal{F},\leq)$为一个方向集. 此时定义映射 $h:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{H}$ 如下 对$\forall F\in\mathcal{F}$,

$$h_F := \sum_{i\in F} h_i.$$ 由F为有限集, 知这一定义有意义.

从而知$\{h_F\}_{F\in\mathcal{F}}$为$\mathcal{H}$中的一个网.

定义1.4.13(级数收敛) 设$\{h_i\}_{i\in I}$为$\mathcal{H}$中一个子集. I为一个集合(不一定可数). 假设网$\{h_F\}_{F\in\mathcal{F}}$收敛, 则定义收敛级数 $\sum_{i\in I} h_i := \lim h_F$.

引理1.4.14 (基表示的收敛) 设$\mathcal{E}$为$\mathcal{H}$的一个正交基, $h\in\mathcal{H}$ 则

$$\sum\{\langle h,e\rangle e : e\in\mathcal{E}\}$$

在$\mathcal{H}$中收敛.

Step1 (转化为网)

证明: 将$\mathcal{E}$中元素标记为

$$\mathcal{E}=\{e_i\}_{i\in I}.$$

其中I为一个集合与$\mathcal{E}$一一对应. 令$\mathcal{F}$为I中所有有限子集构成的有向集, 并定义网

$\{h_F\}_{F\in\mathcal{F}}$, 满足 $h_F=\sum_{i\in F}\langle h,e_i\rangle e_i$.

则由级数收敛的定义, 只需说明 $\{h_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ 为 Cauchy 列, i.e. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists F_0\in\mathcal{F}$, s.t. 对 $\forall$

$E\geq F_0$, $F\geq F_0$, 有

$$\|h_E-h_F\| < \varepsilon. \quad (*)$$

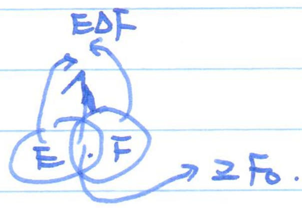
由推论1.4.8

Step 2 (转化为有限基表示). 对$\forall h\in\mathcal{H}$, 令 $\tilde{\mathcal{E}}:=\{e_j\}_{j=1}^{\infty}=\{e\in\mathcal{E}: \langle h,e\rangle\neq 0\}$. (个数至多可数

应用Bessel不等式, $\sum_{j=1}^{\infty}|\langle h,e_j\rangle|^2\leq\|h\|^2<\infty$.

故对上述$\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\sum_{j=N}^{\infty}|\langle h,e_j\rangle|^2<\varepsilon^2$.

取 $F_0:=\{e_1,\cdots,e_{N-1}\}$. 知对 $\forall E\geq F_0$, $F\geq F_0$, 有



$$\|h_E-h_F\|^2=\Big\|\sum_{i\in E}\langle h,e_i\rangle e_i-\sum_{i\in F}\langle h,e_i\rangle e_i\Big\|^2$$

对称差 因为相同部分将被减掉

$E\triangle F=(E\setminus F)\cup(F\setminus E)$.

$$=\Big\|\sum_{i\in E\triangle F}\pm\langle h,e_i\rangle e_i\Big\|^2\overset{\text{正交性}}{=}\sum_{i\in E\triangle F}|\langle h,e_i\rangle|^2\leq\sum_{i=N}^{\infty}|\langle h,e_i\rangle|^2<\varepsilon^2.$$

$\Rightarrow$ (*)式成立. #

定理1.4.15 (正交基的刻画) 设 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个正交子集，则如下命题等价 (TFAE).

(a) $\mathcal{E}$ 为一个正交基.

(b) 若 $h\in\mathcal{H}$ 且 $h\perp\mathcal{E}$，则 $h=0$.

(c) $V(\mathcal{E})=\mathcal{H}$

(d) 对 $\forall h\in\mathcal{H}$，则 $$h=\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle h,e\rangle e.$$

(e) 对 $\forall g,h\in\mathcal{H}$，则
$$\langle g,h\rangle=\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle g,e\rangle\langle e,h\rangle.$$

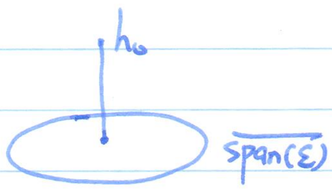
(f) (Parseval 等式). 对 $\forall h\in\mathcal{H}$,
$$\|h\|^2=\sum_{e\in\mathcal{E}}|\langle h,e\rangle|^2.$$

证明: 证明思路:
$$\begin{tikzcd}
(a) \arrow[r, Rightarrow] & (b) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (c) \\
(f) \arrow[u, Rightarrow] & (e) \arrow[l, Rightarrow] & (d) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Step 1 ((a)⇒(b)) 假设 $h\in\mathcal{H}$，且 $h\in\mathcal{E}$ 且 $h\neq 0$. 知
$$\mathcal{E}\cup\left\{\frac{h}{\|h\|}\right\}\subseteq\mathcal{H},$$
为一个真包含 $\mathcal{E}$ 的正交子集，这与 $\mathcal{E}$ 的极大性矛盾. $\Rightarrow h=0$. $\Rightarrow$ (b) 成立.

Step 2 ((b)⇒(c)) 反证，若 $V(\mathcal{E})=\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})}\subsetneq\mathcal{H}$. 知 $\exists\, h_0\in\mathcal{H}$, s.t.
$$d(h_0,\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})})>0.$$

(若 $d(h_0,\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})})=0$，则 $h_0\in\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})}$ ↯)



令 P: 为 $\mathcal{H}$ 到 $V(\mathcal{E})$ 上的正交投影. 知

$(h_0-Ph_0)\perp\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})}$. 而由 (b) $\Rightarrow h_0=Ph_0\Rightarrow d(h_0,\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})})=d(Ph_0,\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})})$

$P(h_0)\in\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})}$

$=0$. 这与 $d(h_0,\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})})>0$ 矛盾. $\Rightarrow V(\mathcal{E})=\mathcal{H}$.

Step 3 ((c)⇒(b)). 由 $V(\mathcal{E})=\mathcal{H}\Rightarrow \mathring{\mathrm{span}}(\mathcal{E})^\perp=\overline{\mathrm{span}(\mathcal{E})}^\perp=\mathcal{H}^\perp=\{0\}$.

⇒(b)成立.

Step 4 ((b)⇒(d)). 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 令

$$f:=h-\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle h,e\rangle e.$$

由引理1.4.14知 f 是良定义的. 另一方面, 对 $\forall e_0\in\mathcal{E}$, 有

$$\langle f,e_0\rangle=\langle h,e_0\rangle-\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle h,e\rangle\langle e,e_0\rangle \overset{\mathcal{E}\text{的正交性}}{=} \langle h,e_0\rangle-\langle h,e_0\rangle=0$$

由(b) ⇒ $f=0$. 从而

$$h=\sum_{e\in\mathcal{E}}\langle h,e\rangle e. \quad (*)$$

Step 5 ((d)⇒(e)) (留作作业)

Step 6 ((e)⇒(f)) $\|h\|^2=\langle h,h\rangle \overset{(e)}{=\!=} \sum_{e\in\mathcal{E}}|\langle h,e\rangle|^2$. ⇒(f)成立.

Step 7 ((f)⇒(a)). 反证. 若 $\mathcal{E}$ 非正交基, i.e. $\mathcal{E}$ 非极大, 则 $\exists e_0\in\mathcal{H}$, s.t. $\|e_0\|=1$ 且

$e_0\perp\mathcal{E}$.

此时, 由(f)

$$\|e_0\|=\sum_{e\in\mathcal{E}}|\langle e_0,e\rangle|^2=0.$$

这与 $\|e_0\|=1$ 矛盾. 因此, $\mathcal{E}$ 极大. 从而 $\mathcal{E}$ 为正交基.

#

命题1.4.16(维数) 设$\mathcal{H}$为Hilbert空间. $\mathcal{E}$、$\mathcal{F}$为$\mathcal{H}$中的$\forall$两个正交基. 则

$$\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}).$$

证明: 令 $\varepsilon := \mathrm{Card}(\mathcal{E})$. $\eta := \mathrm{card}(\mathcal{F})$. 不失一般性, 设 ε、η 都为无穷.

则对 $\forall e\in\mathcal{E}$, 令 $\mathcal{F}_e := \{f\in\mathcal{F} : \langle e, f\rangle \neq 0\}$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_e$ 至多为可数集. 且由命题1.4.15(b)知

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e\in\mathcal{E}} \mathcal{F}_e.$$

两列夫重.

$\Rightarrow$ $\eta \le \varepsilon\aleph_0 = \varepsilon$. 类似地, 有 $\varepsilon\le\eta$. 从而 $\varepsilon=\eta$. #

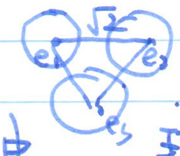
定义1.4.17(Hilbert空间的维数) 设$\mathcal{H}$为Hilbert空间. $\mathcal{E}$为其一个正交基. 则 $\mathrm{card}(\mathcal{E})$ 定义为 $\mathcal{H}$的维数, 记作 $\dim\mathcal{H}$.

定义1.4.18(可分空间) 设(X,d)为一个度量空间. 称X可分, 若X∃一个可数稠密子集.

命题1.4.19(可分Hilbert空间的维数). 设$\mathcal{H}$为一个无穷维的Hilbert空间. 则 $\mathcal{H}$可分 $\Leftrightarrow \dim\mathcal{H}=\aleph_0$.

证明: Step1(可分$\Rightarrow$可数维) 设$\mathcal{E}$为$\mathcal{H}$的一个正交基. 易知对$\forall e_1,e_2\in\mathcal{E}$, 有

$$\|e_1-e_2\|^2 \overset{\text{毕达哥拉斯}}{=} \|e_1\|^2+\|e_2\|^2 = 2.$$



从而作球列 $\underbrace{\{B(e,\tfrac{\sqrt2}{2})\}_{e\in\mathcal{E}}}_{\mathcal{B}:=}$. 知该一球列中 球两两不交

由$\mathcal{H}$可分, 令 $D\subseteq\mathcal{H}$ 为$\mathcal{H}$内的可数稠密子集. 知对$\forall$球 $B(e,\frac{\sqrt2}{2})$, $\exists\ x_i\in D\cap B(e,\frac{\sqrt2}{2})$.

$\Rightarrow \mathrm{Card}(\mathcal{B}) \le \mathrm{Card}(D) = \aleph_0 \Rightarrow \mathrm{Card}(\mathcal{B})=\aleph_0$. (因为$\mathrm{Card}(\mathcal{B})=\mathrm{Card}(\mathcal{E})$·无穷).

从而 $\mathrm{Card}(\mathcal{E})=\aleph_0 \Rightarrow \mathcal{H}$为可数维.

Step 2 (可数维 ⟹ 可分). 令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个正交基. 由 $\dim\mathcal{H}=\aleph_0$. 记.

$$\mathcal{E}=\{e_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

对 $\forall n\in\mathbb{N}$

令 $D_n:=\{h\in\mathcal{H}:\ h=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$, 其中 $c_i=a_i+ib_i$ 且 $a_i, b_i\in\mathbb{Q}$ 为有理数 $\}$.

令 $D:=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$. 由 D_n 可数, 知 D 也可数.

进一步, 对 $\forall h\in\mathcal{H}$. 由 $h=\sum_{i=1}^{\infty}\langle h,e_i\rangle e_i$ in $\mathcal{H}$. 对 $\forall\varepsilon>0$. 以及 $i\in\mathbb{N}$.

取 $c_{i,\varepsilon}\in\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$, s.t.

$$|\langle h,e_i\rangle-c_{i,\varepsilon}|^2<\frac{\varepsilon}{2^i}.$$

从而令 $h_\varepsilon:=\sum_{i=1}^{\infty}c_{i,\varepsilon}e_i$. 易知 $h_\varepsilon\in D\cap\mathcal{H}$. 且.

$$\|h-h_\varepsilon\|^2\overset{\text{Parseval等式}}{=\!=\!=}\sum_{i=1}^{\infty}|\langle h,e_i\rangle-c_{i,\varepsilon}|^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 这说明 $D\cap\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 的稠子集. $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ 可分.

#