§1.5 Hilbert空间的直和.

定义1.5.1 (两个Hilbert空间的直和) 设$\mathcal{H}$与$\mathcal{K}$为两个Hilbert空间. 定义~~新~~ $\mathcal{H}$与$\mathcal{K}$的直和, (记作 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$) 为

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{K} := \{h\oplus k : h\in\mathcal{H},\ k\in\mathcal{K}\}.$$

对$\forall\ h_1\oplus k_1,\ h_2\oplus k_2 \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$, 赋予内积.

$$\langle h_1\oplus k_1,\ h_2\oplus k_2\rangle := \langle h_1, h_2\rangle + \langle k_1, k_2\rangle.$$

命题1.5.2 (直和完备) 设$\mathcal{H}$与$\mathcal{K}$为Hilbert空间. 则 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ 也为Hilbert空间.

证明略

定义1.5.3 (Hilbert空间列的直和) 设$\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列Hilbert空间, 定义其直和 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ 如下

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n := \left\{(h_n)_{n=1}^{\infty} : h_n\in\mathcal{H}_n \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty}\|h_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty\right\}.$$

此时, 对$\forall\ h=(h_n)_{n=1}^{\infty}.\ g=(g_n)_{n=1}^{\infty}\in\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$, 定义内积.

$$\langle h, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_n}.$$

命题1.5.4 (直和完备). 设$\{\mathcal{H}_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列Hilbert空间, 则 $\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$ 也为Hilbert空间.

§2 Hilbert空间中的算子.

§2.1 算子的基本性质.

定义2.1.1 (有界线性算子) 设$\mathcal{H}$与$\mathcal{K}$为两个Hilbert空间. $A:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$为一个映射.

(i) (线性算子). 称A为线性算子, 若对$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $h,g\in\mathcal{H}$, 有

$$A(\alpha h+\beta g)=\alpha A(h)+\beta A(g)$$

(ii) (有界线性算子). 称A为有界线性算子, 若A线性, 且$\exists$正常数$c>0$, s.t. 对$\forall h\in\mathcal{H}$, 有

$$\|A(h)\|_{\mathcal{K}}\leq c\,\|h\|_{\mathcal{H}}.$$

命题2.1.2 (有界线性算子的刻画) 设$\mathcal{H}$与$\mathcal{K}$为Hilbert空间. $A:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$为线性算子. 则TFAE.

(a). A连续. (b) A在0点连续

(c) A在$\mathcal{H}$中某一点连续, (d) A为有界线性算子.

证明: (类似于§2.2中命题1.3.2的证明, 略去 作为作业.

定义2.1.3 (算子的范数) 设$A:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$为有界线性算子, 定义其算子范数$\|A\|$如下

$$\|A\|:=\sup\{\|Ah\|: h\in\mathcal{H},\ \|h\|\leq 1\}.$$

且类似于有界线性泛函的情形, 有

$$\|A\|=\sup\{\|Ah\|: h\in\mathcal{H},\ \|h\|=1\}$$

$$=\sup\left\{\frac{\|Ah\|}{\|h\|}: h\in\mathcal{H},\ h\neq 0\right\}$$

$$=\inf\{c>0: \|Ah\|\leq c\|h\|,\ h\in\mathcal{H}\}.$$

定义2.1.4（算子空间）设$\mathcal{H}, \mathcal{K}$为Hilbert空间. ~~$A: \mathcal{H}\to\mathcal{K}$为有界算子~~ 则定义算子空间$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$如下.

$$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}) := \{A: \mathcal{H}\to\mathcal{K} \mid A\text{为有界线性算子}\}$$

并赋以定义2.1.3中算子范数.

命题2.1.5（算子范数的性质）设$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$为Hilbert空间之间的算子空间. 则如下结论成立.

(a). ~~若~~（空间的线性性）设$A, B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $\alpha, \beta\in\mathbb{F}$, 则 $\alpha A+\beta B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

(b). （算子的乘法）. 设$A\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. $B\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{L})$, 其中$\mathcal{L}$为另一个Hilbert空间. 则 $BA\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{L})$. 且

$$\|BA\| \le \|B\|\,\|A\|.$$

证明: Step1（(a)的证明）. 要证$\alpha A+\beta B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 只需对$\forall h\in\mathcal{H}$, 说明

$$\|(\alpha A+\beta B)h\|_{\mathcal{K}} \le c\|h\|_{\mathcal{H}}. \quad (*)$$

而 $(*)$左边 $\le |\alpha|\,\|Ah\|_{\mathcal{K}} + |\beta|\,\|Bh\|_{\mathcal{K}}$

$$\le \left(|\alpha|\,\|A\| + |\beta|\,\|B\|\right)\|h\|_{\mathcal{H}}.$$

令 $c = (|\alpha|\,\|A\|+|\beta|\,\|B\|)$ 得$(*)$式成立.

Step2（(b)的证明）对$\forall h\in\mathcal{H}$, 有

$$\|BA(h)\|_{\mathcal{L}} \le \|B\|\,\|Ah\|_{\mathcal{K}} \le \|B\|\,\|A\|\,\|h\|_{\mathcal{H}}.$$

$\Rightarrow BA$为$\mathcal{H}\to\mathcal{L}$上的有界线性算子, 且 $\|BA\|\le\|B\|\,\|A\|$.

#

例 2.1.6 (算子的例子).

(i) (矩阵) 设 $\mathcal{H}$、$\mathcal{K}$ 为两个 Hilbert 空间，满足 $\dim(\mathcal{H})=n<\infty$. $\dim(\mathcal{K})=m<\infty$. 令

$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的一个正交基，$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m\}$ 为 $\mathcal{K}$ 中的一个正交基. 设 $A:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ 为一个线性变换.

断言 1: $B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 与 $m\times n$ 的矩阵一一对应.

Step 1 (线性变换 → 矩阵). 设 $A\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$. 定义 $m\times n$ 矩阵 $(a_{ij})_{\substack{i=1\cdots m\\ j=1\cdots n}}$，如下

$$a_{ij}:=\langle Ae_j,\varepsilon_i\rangle$$

知对 $\forall h\in\mathcal{H}$，由 $h=\sum_{j=1}^{n}\langle h,e_j\rangle e_j$，知.

$$Ah=\sum_{j=1}^{n}\langle h,e_j\rangle A(e_j).$$

从而对 $\forall k\in\mathcal{K}$，有

$$\langle Ah,k\rangle=\langle\sum_{j=1}^{n}\langle h,e_j\rangle A(e_j),\sum_{i=1}^{m}\langle k,\varepsilon_i\rangle \varepsilon_i\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle k,\varepsilon_i\rangle\langle h,e_j\rangle\langle Ae_j,\varepsilon_i\rangle. \quad (*)$$

故若令 $\vec{h}=(h_1,\cdots,h_n)$，其中 $h_j=\langle h,e_j\rangle$ 为 h 在 $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ 下的坐标

$\vec{k}=(k_1,\cdots,k_m)$，其中 $k_i=\langle k,\varepsilon_i\rangle$ 为 k 在 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{m}$ 下的坐标，

则由 $(*)$ 式

$$\langle Ah,k\rangle=\vec{k}\cdot\left((a_{ij})_{i,j}\times\vec{h}\right) \quad (**).$$

Step 2 (矩阵 → 线性变换). 设 (a_{ij}) 为一个 $m\times n$ 的矩阵，则定义 $\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ 的线性算子如下. 对 $\forall e_j$，$\forall \varepsilon_i$ 有

$$\langle Ae_j,\varepsilon_i\rangle:=a_{ij}.$$

类似于Step1，知(**)仍然成立，且A为线性算子，且，对$\forall h\in H$，

$$|\langle Ah, k\rangle| = |\bar{k}\cdot(a_{ij})_{ij}\times \bar{h}|$$

$$\leq |\det(a_{ij})|\ \|k\|\ \|h\|.$$

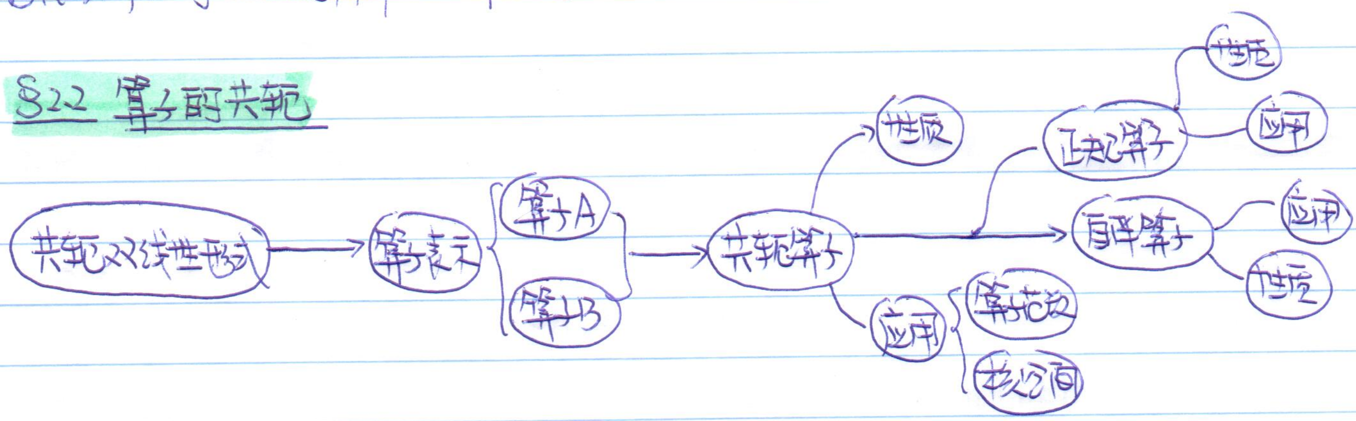
$\Rightarrow$ A为有界算子。

(2)(无穷矩阵) 设 $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$，对$\forall i\in\mathbb{N}$，令

$$e_i := (0,\cdots,\underset{\text{第}i\text{个}}{0,1},0,\cdots)$$

知$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$为ℓ^2中的一个正交基，令$B(\ell^2):=B(\ell^2,\ell^2)$为$\ell^2$上的有界线性算子全体，此时$B(\ell^2)$对应于无穷矩阵中的一个子类。

§2.2 算子的共轭



定义2.2.(共轭双线性形式) 设H与K为两个Hilbert空间，二元映射$u: H\times K\to \mathbb{F}$ 称为一个共轭双线性形式，若对$\forall h,g\in H$，$k,f\in K$ 以及$\alpha,\beta\in\mathbb{F}$，有

(a) $u(\alpha h+\beta g, k)=\alpha u(h,k)+\beta u(g,k)$

(b) $u(h, \alpha k+\beta f)=\bar{\alpha} u(h,k)+\bar{\beta} u(h,f)$.

称共轭双线性形式有界，若对$\forall h\in H, k\in K$，有

$$|u(h,k)|\leq M\|h\|\|k\|,$$

其中常数M，称为u的界。

例 2.2.2（共轭双线性形式的算子表示）设 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ 为两个 Hilbert 空间，$A\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$，$B\in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$。定义 $u, \tilde{u}: \mathcal{H}\times\mathcal{K}\longrightarrow \mathbb{F}$ 如下：对 $\forall\, h\in\mathcal{H}, k\in\mathcal{K}$，有

$$u(h,k) := \langle Ah, k\rangle_{\mathcal{K}}.$$

$$\tilde{u}(h,k) := \langle h, Bk\rangle_{\mathcal{H}}.$$

易知 u 与 $\tilde{u}$ 都为共轭双线性形式。

定理 2.2.3（算子表示）设 $u: \mathcal{H}\times\mathcal{K}\longrightarrow\mathbb{F}$ 为一个有界共轭双线性形式，其界为 M，则 $\exists!\, A\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$，$\exists!\, B\in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$，s.t. 对 $\forall\, h\in\mathcal{H}, k\in\mathcal{K}$，有

$$u(h,k) = \langle Ah, k\rangle_{\mathcal{K}} = \langle h, Bk\rangle_{\mathcal{H}}. \quad (*)$$

且 $\|A\|, \|B\| \le M$.

证明：Step1（算子 A 的选取）对 $\forall\, h\in\mathcal{H}$，定义由 h 诱导的有界线性泛函 $L_h: \mathcal{K}\longrightarrow\mathbb{F}$，s.t.

对 $\forall\, k\in\mathcal{K}$，$L_h(k) := \overline{u(h,k)}$.

易知 L_h 为 $\mathcal{K}$ 上的有界线性泛函，且 $|L_h(k)| \le M\|h\|\,\|k\|$.

利用 Riesz 表示定理，$\exists!\, f\in\mathcal{K}$，s.t.

$$L_h(k) := \overline{u(h,k)} = \langle k, f\rangle_{\mathcal{K}}. \quad (*)$$

且

$$\|f\| \le M\|h\|.$$

令定义算子 $A: \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}$，s.t. 对 $\forall\, h\in\mathcal{H}$，$Ah = f$。由 $(*)$ 知对 $\forall\, h\in\mathcal{H}, k\in\mathcal{K}$，

$$u(k,h) = \langle Ah, k\rangle$$

且 $\|Ah\| = \|f\| \le M\|h\| \Rightarrow \|A\| \le M$

Step2 (算子B的选取). 对 $\forall\, k\in K$, 定义由 k ~~定~~诱导的线性泛函 $\tilde{l}_k: H\to F$, s.t.

对 $\forall\, h\in H$,

$$\tilde{l}_k(h) := u(h,k).$$

剩下部分作为作业.

#

Step3 (算子的唯一性). 不失一般性, 只考虑算子A的唯一性. 若 $\exists\, A_1\in B(H,K)$, s.t.

$$u(h,k) = \langle A_1 h, k\rangle.$$

则由对 $\forall\, h\in H$, $k\in H$.

$$\langle A_1 h - Ah, k\rangle = 0$$

由 h 与 k 的任意性 $\Rightarrow A_1 = A$.

#

定义 2.2.4 (共轭算子). 设 $A\in B(H,K)$. 则满足定理 2.2.3 中④式唯一的算子 $B\in B(K,H)$, 称为A的共轭算子, 记作 A^*.

命题 2.2.5 (共轭算子的性质) 设 $A, B\in B(H)$, $\alpha\in F$, 则如下性质成立.

(a) $(\alpha A+\beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$ (共轭线性性)

(b) $(AB)^* = B^*A^*$. (乘法的共轭)

(c) $A^{**} = (A^*)^* = A$ (双重共轭)

设 $A\in B(H)$, 称 A可逆, 指 $\exists\, B\in B(H)$, s.t. $AB = BA = I$ 为单位算子.

(d) 设 $A\in B(H)$ 可逆. A^{-1} 为其逆算子, 则 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (共轭的逆).

证明: (a) 的证明留作作业. 只证 (b), (c), (d).

Step 1 ((b) 的证明) 设 $A, B\in B(H)$, 且 $A^*, B^*\in B(H)$ 为相应的共轭算子, 要证 (b), 只需说明

对$\forall h,k\in\mathcal{H}$,

$$\langle ABh, k\rangle = \langle h, B^*A^*k\rangle \quad ⊛$$

而由A^*、B^*的定义,易知

$$左边 = \langle Bh, A^*k\rangle = \langle h, B^*A^*k\rangle$$

⇒ ⊛式成立. ⇒ (b) 成立.

Step2 ((c)的证明). 注意到, 对$\forall h,k\in\mathcal{H}$,

$$\langle Ah, k\rangle = \langle h, A^*k\rangle = \overline{\langle A^*k, h\rangle} = \overline{\langle k, A^{**}h\rangle}$$

$$= \langle A^{**}h, k\rangle.$$

由h与k的任意性, 得 $A^{**}=A$.

Step3 ((d)的证明). 由逆算子的定义, 只需说明 $A^*\circ(A^{-1})^* = (A^{-1})^*\circ A^* = I$. 不失一般性, 先证 $(A^{-1})^*\circ A^* = I$. ⊛ 事实上,

对$\forall h,k\in\mathcal{H}$,

$$\langle (A^{-1})^*\circ A^*h, k\rangle = \overline{\langle k, (A^{-1})^*\circ A^*h\rangle}$$

$$= \overline{\langle A^{-1}k, A^*h\rangle}$$

$$= \overline{\langle A\circ A^{-1}k, h\rangle}$$

$$= \langle h, k\rangle.$$

由h与k的任意性, 知 $(A^{-1})^*\circ A^* = I$.

命题2.2.6 (同构的共轭刻画) # 设$\mathcal{H}, \mathcal{K}$为两个Hilbert空间, 则 ~~U∈H~~ $U\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为同构算子 ⟺ U可逆且 $U^{-1}=U^*$.

称$U\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$为同构, 若对$\forall h,g\in\mathcal{H}$, $\langle Uh, Ug\rangle_{\mathcal{K}} = \langle h, g\rangle_{\mathcal{H}}$.

证明：Step1（"⇐" 共轭⇒同构）. 设 U 可逆且 $U^{-1}=U^*$. 则对 $\forall h,k\in\mathcal{H}$.

$$\langle Uh, Uk\rangle_{\mathcal{K}} = \langle h, U^*\circ Uk\rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, k\rangle_{\mathcal{H}}.$$

⇒ U 同构.

Step2（"⇒" 同构⇒共轭）. 设 U 为同构. 则. 对 $\forall h,k\in\mathcal{H}$. ~~k∈K~~,

$$\langle U^*Uh, k\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle k, U^*Uh\rangle_{\mathcal{H}}} = \overline{\langle Uk, Uh\rangle_{\mathcal{K}}}$$

$$= \overline{\langle k, h\rangle_{\mathcal{H}}} = \langle h, k\rangle_{\mathcal{H}}.$$

由 h 与 k 的任意性，得 $U^*U=I$. 类似地，知 $UU^*=I$. 因此 U 可逆，且 $U^{-1}=U^*$. #

命题 2.2.5（范数的共轭表示）设 $A\in B(\mathcal{H})$. 则 $\|A\|=\|A^*\|=\|A\circ A^*\|^{\frac{1}{2}}$.

证明：Step1（$\|A\|=\|A^*\|$）. 对 $\forall h\in\mathcal{H}$，满足 $\|h\|\le 1$，知

$$\|Ah\|^2=\langle Ah, Ah\rangle = \langle A^*Ah, h\rangle$$

$$\le \|A^*Ah\|\,\|h\| \le \|A^*A\| \le \|A^*\|\,\|A\|. \quad (*)$$

对 h 取上确界，得

$$\|A\|^2\le \|A^*\|\,\|A\| \Rightarrow \|A\|\le\|A^*\|.$$

又由 $A=A^{**}$ ⇒

$$\|A^*\|\le\|A^{**}\|=\|A\|.$$

综合上述两方面估计，得 $\|A\|=\|A^*\|$.

Step2（$\|A\|=\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}$）. 由 (*) 式及 $\|A\|=\|A^*\|$，得.

$$\|A\|^2=\|A^*A\|=\|A\|^2 \Rightarrow \|A\|=\|A^*A\|^{\frac{1}{2}}=\|AA^*\|^{\frac{1}{2}}.$$

#

例 2.2.6（位移算子）设 $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$，定义单向位移算子 $S:\ell^2\to\ell^2$ 如下

$$\alpha \longmapsto S\alpha.$$

易见，若 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$，则 $S\alpha=(0,\alpha_1,\alpha_2,\dots)$.

断言1：S 为 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的一个等距算子，即

$$\|S\alpha\|_{\ell^2}=\|\alpha\|_{\ell^2}.$$

由此 $S\in B(\ell^2)$.

• 定义反向位移算子 $S^*:\ell^2\to\ell^2$ 如下，对 $\forall\,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\dots)$，有

$$S^*\alpha=(\alpha_2,\alpha_3,\dots).$$

易知，$\|S^*\alpha\|_{\ell^2}\leq\|\alpha\|_{\ell^2}$.

断言2：S^* 与 S 互为共轭，即对 $\forall\,\alpha,\beta\in\ell^2$，有

$$\langle S\alpha,\beta\rangle_{\ell^2}=\langle\alpha,S^*\beta\rangle_{\ell^2}.$$

↓ 事实上，左边 $=\langle(0,\alpha_1,\alpha_2\dots),(\beta_1,\beta_2\dots)\rangle$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_{k+1}$$

右边 $=\langle(\alpha_1,\alpha_2,\dots),(\beta_2,\beta_3,\dots)\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_{k+1}$.

左边 = 右边. ↑

定义 2.2.7（自伴与正规算子）设 $A\in B(\mathcal{H})$，则

(a) 称 A 为自伴算子（或 Hermite 算子），若 $A^*=A$.

(b) 称 A 为正规算子，若 $AA^*=A^*A$（A 与 A^* 可交换）.

(c) 称 A 为酉算子，若 $AA^*=A^*A=I$.

命题2.28(自伴的刻画). 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $\mathcal{H}$为Hilbert空间, $A\in B(\mathcal{H})$, 则A自伴$\Leftrightarrow$对$\forall h\in\mathcal{H}$,

$$\langle Ah, h\rangle\in\mathbb{R}. \quad (*)$$

证明: 设A自伴, 易知$A=A^*$, 从而, 对$\forall h\in\mathcal{H}$,

$$\langle Ah, h\rangle=\langle h, Ah\rangle \Rightarrow \langle Ah, h\rangle\in\mathbb{R}.$$

另一方面, 若$(*)$式成立, 则对$\forall\alpha\in\mathbb{C}$以及$h, g\in\mathcal{H}$, 有

$$(**)\quad \langle A(h+\alpha g), h+\alpha g\rangle=\langle Ah, h\rangle+\bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle+\alpha\langle Ag, h\rangle+|\alpha|^2\langle Ag, g\rangle\in\mathbb{R}.$$

又由$\langle Ah, h\rangle$, 与$\langle Ag, g\rangle\in\mathbb{R}$, 在$(**)$式两边取复共轭, 得

$$\langle A(h+\alpha g), h+\alpha g\rangle=\langle Ah, h\rangle+\alpha\langle g, Ah\rangle+\bar{\alpha}\langle h, Ag\rangle+|\alpha|^2\langle Ag, g\rangle$$

联立上述两等式得

$$\alpha\langle Ag, h\rangle+\bar{\alpha}\langle Ah, g\rangle=\bar{\alpha}\langle h, Ag\rangle+\alpha\langle g, Ah\rangle$$

$$=\bar{\alpha}\langle A^*h, g\rangle+\alpha\langle A^*g, h\rangle \quad (***)$$

在$(***)$式中分别取$\alpha=1$与$\alpha=i$, 得

$$(*)\begin{cases}\overbrace{\langle Ag, h\rangle}^{a}+\langle Ah, g\rangle=\langle A^*h, g\rangle+\langle A^*g, h\rangle\\ i\langle Ag, h\rangle-i\langle Ah, g\rangle=-i\langle A^*h, g\rangle+i\langle A^*g, h\rangle\end{cases}$$

令$\langle Ag, h\rangle=a+ib \Rightarrow \langle A^*h, g\rangle=\overline{\langle Ag, h\rangle}=a-ib$

令$\langle Ah, g\rangle=c+id \Rightarrow \langle A^*g, h\rangle=\overline{\langle Ah, g\rangle}=c-id.$

$$\text{从而}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}(a+ib)+(c+id)=(a-ib)+(c-id)\\ (a+ib)-(c+id)=(c-id)-(a-ib)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+d=-(b+d)\Rightarrow b+d=0\\ a-c=c-a\Rightarrow a=c\\ b-d=b-d\end{cases}$$

从而$\langle Ag, h\rangle=a+ib=c+i(-d)=c-id=\langle A^*g, h\rangle$. 由$g, h$的任意性,

得 $A=A^*$. #

命题2.2.9（自伴算子的对偶表示）设 $A=A^*$ 为 Hilbert 空间上的自伴算子，则

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ah,h\rangle| : \|h\|=1\} =: M.$$

证明：Step1（$M\le\|A\|$）. 事实上，对 $\forall h\in\mathcal{H}$，满足 $\|h\|=1$，有

$$|\langle Ah,h\rangle| \overset{\text{Cauchy不等式}}{\le} \|Ah\|\,\|h\| \le \|A\|\,\|h\|^2 = \|A\|.$$

由此及 h 的任意性，得

$$M\le\|A\|.$$

Step2（$\|A\|\le M$）—一般不等式）. 对 $\forall h,g\in\mathcal{H}$ 满足 $\|h\|=\|g\|=1$，由内积（共轭）线性性

$$\langle A(h+g), h+g\rangle = \langle Ah,h\rangle + \langle Ah,g\rangle + \langle Ag,h\rangle + \langle Ag,g\rangle$$

$$\overset{A=A^*}{=} \langle Ah,h\rangle + \langle Ah,g\rangle + \langle g,Ah\rangle + \langle Ag,g\rangle$$

$$= \langle Ah,h\rangle + 2\mathrm{Re}\langle Ah,g\rangle + \langle Ag,g\rangle \quad (*1)$$

类似地，有

$$\langle A(h-g), h-g\rangle = \langle Ah,h\rangle - 2\mathrm{Re}\langle Ah,g\rangle + \langle Ag,g\rangle \quad (*2)$$

因此，利用 (*1)−(*2) 式，得

$$4\mathrm{Re}\langle Ah,g\rangle = \langle A(h+g),h+g\rangle + \langle A(h-g),h-g\rangle$$

$$\overset{\text{Cauchy不等式}}{\le} \|A\|\left[\|h+g\|^2 + \|h-g\|^2\right]$$

$$\overset{\text{平行四边形法则}}{=} 2\|A\|\left[\|h\|^2+\|g\|^2\right] \quad (*)$$

$$= 4M.$$

Step3.(选取合适的 h) 在 ⊛式中用 $e^{-i\theta}h$ 代替原 h, 其中 θ 满足

$$\langle Ah,g\rangle = |\langle Ah,g\rangle| e^{i\theta}.$$

则 ⊛式变为

$$4\,\mathrm{Re}\left[\langle Ah,g\rangle e^{-i\theta}\right] \le 4M \iff |\langle Ah,g\rangle| \le M.$$ 从而

$$\|A\| := \sup_{\|h\|\le 1} \|Ah\| = \sup_{\|h\|\le 1} \sup_{\|g\|=1} |\langle Ah,g\rangle| \le M,$$

$$\Rightarrow \|A\| \le M.$$

推论2.2.10 (算零算子的条件) 若 $A=A^*$ 为自伴算子, 且对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 有 $\langle Ah,h\rangle=0$, 则 $A=0$.

证明: 利用命题2.2.9, 显然.

定义2.2.11 (算子的实部与虚部) 设 $\mathcal{H}$ 为一个 $\mathbb{C}$-Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为有界线性算子. 则

$$B := \frac{A+A^*}{2} =: \mathrm{Re}A, \quad C := \frac{A-A^*}{2i} =: \mathrm{Im}A$$

分别称为 A 的实部与虚部. 易知 B、C 为自伴算子.

命题2.2.12 (零算子的条件) 若 $\mathcal{H}$ 为一个 $\mathbb{C}$-Hilbert空间, $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为有界线性算子, 满足对 $\forall h\in\mathcal{H}$,

$\langle Ah,h\rangle=0$, 则 $A=0$.

证明: 利用定义2.2.11 + 推论2.2.10. (作为作业).

命题2.2.13 (正规算子的刻画). 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为有界算子, 则如下结论等价 (TFAE).

(a) A 为正规算子. (b) 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, $\|Ah\|=\|A^*h\|$

进一步, 若 $\mathcal{H}$ 为 $\mathbb{C}$-Hilbert空间, 则 (a), (b) 进一步与如下结论等价.

(c). A 的实部与虚部可交换, i.e. $\mathrm{Re}A\circ\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A\circ\mathrm{Re}A$.

证明: Step1 ((a)$\Leftrightarrow$(b)). 注意到, 对$\forall h\in H$,

$$\|Ah\|^2-\|A^*h\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle - \langle A^*h, A^*h\rangle$$

$$= \langle A^*Ah, h\rangle - \langle AA^*h, h\rangle$$

$$= \langle (A^*A-AA^*)h, h\rangle. \quad (*)$$

其中 A^*A-AA^* 为自伴算子. 则

$$(a)\Leftrightarrow A^*A-AA^*=0 \overset{\text{推论2.2.10}+(*)}{\Longleftrightarrow} \langle (A^*A-AA^*)h,h\rangle=0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \|Ah\|=\|A^*h\|.$$

Step2 ((a)$\Leftrightarrow$(c)) 设B与C分别为算子A的实部与虚部, 即 $B=\frac{A+A^*}{2}$ $C=\frac{A-A^*}{2i}$, 则

$$A=B+iC$$

$$A^*=B-iC$$

因此有 $AA^*=(B+iC)(B-iC)=B^2+iCB-iBC+C^2$ (*)

$$A^*A=(B-iC)(B+iC)=B^2+iBC-iCB+C^2$$

则 $(a)\Leftrightarrow AA^*=A^*A \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} CB-BC=BC-CB \Leftrightarrow BC=CB \Leftrightarrow$ 实部与虚部可交换.

命题2.2.14 (算子的等距刻画) 设$A\in B(H)$, 则如下结论等价(TFAE).

(a) A为等距映射 (i.e. 对$\forall h\in H$, $\|Ah\|=\|h\|$)

(b) $A^*A=I$

(c) 对$\forall h,g\in H$, $\langle Ah, Ag\rangle=\langle h,g\rangle$.

证明: Step1 ((a)$\Leftrightarrow$(c)) 先证"$\Leftarrow$" 设(c)成立, 则对$\forall h\in H$,

$$\|Ah\|^2=\langle Ah, Ah\rangle \overset{(c)}{=} \langle h,h\rangle=\|h\|^2 \Rightarrow \|Ah\|=\|h\| \Rightarrow (a)\text{成立}.$$

下证"$\Rightarrow$" 对$\forall g,h\in H$, $\forall\lambda\in F$, 由A为等距算子知

$$\|h+\lambda g\|^2=\|Ah+\lambda Ag\|^2$$

应用极化恒等式,得

$$\left.\begin{aligned}\|h+\lambda g\|^2 &= \langle h,h\rangle + |\lambda|^2\langle g,g\rangle + 2\mathrm{Re}\bar{\lambda}\langle h,g\rangle \\ \|Ah+\lambda Ag\|^2 &= \langle Ah,Ah\rangle + |\lambda|^2\langle Ag,Ag\rangle + 2\mathrm{Re}\bar{\lambda}\langle Ah,Ag\rangle\end{aligned}\right\}(*)$$

由A等距,知 $\langle Ah,Ah\rangle = \|Ah\|^2 = \|h\|^2 = \langle h,h\rangle$,类似地 $\langle g,g\rangle = \langle Ag,Ag\rangle$. 由此及(*)式知对$\forall$ $\lambda\in\mathbb{F}$,有

$$\mathrm{Re}\bar{\lambda}\langle h,g\rangle = \mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\langle Ah,Ag\rangle.$$

下对$\mathbb{F}$的情况分两种情形. 1° 若$\mathbb{F}=\mathbb{R}$. 取$\lambda=1$. ~~即知~~得

$$\langle Ah,Ag\rangle = \langle h,g\rangle \Rightarrow (c)\text{成立}.$$

2° 若$\mathbb{F}=\mathbb{C}$,取 分别 取$\lambda=1$,与i,得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle h,g\rangle &= \mathrm{Re}\langle Ah,Ag\rangle \\ \mathrm{Im}\langle h,g\rangle &= \mathrm{Im}\langle Ah,Ag\rangle\end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle h,g\rangle = \langle Ah,Ag\rangle.$$

Step 2 (b)$\Leftrightarrow$(c).

$$(b)\Leftrightarrow A^*A=I \Leftrightarrow \text{对}\forall h,g\in\mathcal{H},\ \langle A^*Ah,g\rangle = \langle h,g\rangle$$

$$\Leftrightarrow \text{对}\forall h,g\in\mathcal{H},\ \langle Ah,Ag\rangle = \langle h,g\rangle$$

$$\Leftrightarrow (c).$$

#

命题2.2.15(酉算子刻画) 设$A\in B(\mathcal{H})$. TFAE.

(a) A为酉算子. (b) $A^*A=AA^*=I$.(即 $A^{-1}=A^*$).

即A为一个满的等距算子

(c). A为一个正规的等距算子.

(b)$\Rightarrow$(a)
$\Uparrow$ $\swarrow$
(c)

证明: Step 1 (b)$\Rightarrow$(a). 为此,只需说明(i) A为满射,这由$AA^*=I$可知显然成立.

(ii) A等距,而由命题2.2.14, ~~由~~ 从$A^*A=I$,知其成立.

Step2 $(a)\Rightarrow(c)$. 由 $A^*A=AA^*=I$ 易知 A 为正规算子. 又由 $A^*A=I$ 知 A 为等距算子.

Step3 $((c)\Rightarrow(b))$. ~~由题~~ 由 A 为等距算子, 则应用命题2.2.14知 $A^*A=I$. 又由 A 正规, 知 $AA^*=A^*A$. 因此, (b)成立.

#

命题2.2.16 (核空间与像空间) 设 $A\in B(\mathcal{H})$, 则 $\ker A=(\operatorname{ran}A^*)^\perp$.

证明: Step1 $(\ker A\subseteq(\operatorname{ran}A^*)^\perp)$. 设 $h\in\ker A$, 则对 $\forall g\in\mathcal{H}$, 有

$$\langle h, A^*g\rangle=\langle Ah, g\rangle=0. \Rightarrow h\in \cancel{A^*g}(\operatorname{ran}A^*)^\perp.$$

Step2 $((\operatorname{ran}A^*)^\perp\subseteq\ker A)$. 设 $h\in(\operatorname{ran}A^*)^\perp$, 则对 $\forall g\in \cancel{A}\,\mathcal{H}$, 有

$$\langle Ah, g\rangle=\langle h, A^*g\rangle=0. \Rightarrow h\in\ker A.$$

#