§5.2 L^p-容量的一般理论

定义5.2.1 (核) 设(M,ν)为一个测度空间. 称函数$g: \mathbb{R}^N\times M\to[0,+\infty)$为一个核, 若

(i) 对$\forall y\in M$, $g(\cdot,y)$在$\mathbb{R}^N$上下半连续

(ii) 对$\forall x\in\mathbb{R}^N$, $g(x,\cdot)$在M上可测.

定义5.2.2 (g位势) 设$\mu\in M^+(\mathbb{R}^N)$为$\mathbb{R}^N$上的正Radon测度. 设f为一个非负ν-可测函数 ($f: M\to\mathbb{R}$). 定义位势如下:

$$\mathcal{G}f(x):=\int_M g(x,y)f(y)\,d\nu(y),\qquad x\in\mathbb{R}^N$$

$$\check{\mathcal{G}}\mu(y):=\int_{\mathbb{R}^N} g(x,y)\,d\mu(x),\qquad y\in M.$$

交互能量定义如下.

$$\mathcal{E}_g(\mu,f):=\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{G}f(x)\,d\mu(x)}_{\boxed{\text{下半连续}}}=\int_M \check{\mathcal{G}}\mu(y)\overset{f(y)}{\vee}d\nu(y).$$

命题5.2.3 (g位势的性质) 设g为个核, f为M上一个ν-可测函数. $y\in M$, 则

(a) $x\longmapsto\mathcal{G}f(x)$在$\mathbb{R}^N$上下半连续.

(b) $\mu\longmapsto\check{\mathcal{G}}\mu(y)$在依弱*拓扑在$M^+(\mathbb{R}^N)$上下半连续

(c). $\mu\longmapsto\mathcal{E}_g(\mu,f)$依弱*拓扑在$M^+(\mathbb{R}^N)$上下半连续.

Step1 (a)的证明)

证明: 称函数$h(x)$在点x_0处下半连续, 若对$\forall$点列$\{x_k\}_{k=1}^\infty$满足$x_k\to x$, 都有

$$h(x)\le\liminf_{k\to\infty}h(x_k).$$

因此取$x_0\in\mathbb{R}^N$, 令$\{x_k\}_{k=1}^\infty$满足$x_k\to x_0$. 且(在相差一个子列的情形下)

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{G}f(x_k)=\liminf_{x\to x_0}\mathcal{G}f(x).$$

由 $g(\cdot,y)$ 关于第一个分量下半连续，知.

$$\mathcal{G}f(x_0)=\int_M g(x_0,y)f(y)\,d\nu(y)\le\int_M \liminf_{k\to\infty} g(x_k,y)f(y)\,d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\le}\liminf_{k\to\infty}\int_M g(x_k,y)f(y)\,d\nu(y)$$

$$=\liminf_{k\to\infty}\mathcal{G}f(x_k)$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}f(x)$ 在 x_0 处下半连续.

Step 2 (cb)的证明) 设 $\mu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$，令 $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$，s.t.

$$\mu_i\xrightarrow{*}\mu.$$

由对 $\forall y$，$g(\cdot,y)$ 下半连续 [Rudin, Real and Complex Analysis, Chap. 2. Exercise 22] 知 $\exists\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathbb{R}^N$ 上的函数列，满足

(i) 对 $\forall n$，~~h_n 是有界连续~~. $h_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

(ii) h_n 关于 n $\nearrow$

(iii) 对 $\forall x\in\mathbb{R}^N$，$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=g(x,y)$.

因此有

$$\int_{\mathbb{R}^N}h_n\,d\mu=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}h_n\,d\mu_i\le\liminf_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}g(\cdot,y)\,d\mu_i=\liminf_{i\to\infty}\check{\mathcal{G}}\mu_i(y).$$

利用单调收敛定理，知

$$\check{\mathcal{G}}\mu(y)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}h_n\,d\mu.\le\liminf_{i\to\infty}\check{\mathcal{G}}\mu_i(y)$$

$\Rightarrow$ $\check{\mathcal{G}}\mu(y)$ 关于 μ 在弱*拓扑下下半连续.

Step 3 ((c)的证明). 设 μ 与 $\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$ 形如 (b) 中证明. 令 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 为形如 (b) 中选取的函数列，但将 (iii) 替换为

(iii)' 对 $\forall x\in\mathbb{R}^N$, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = Gf(x)$.

则 $\int_{\mathbb{R}^N} h_n d\mu = \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h_n d\mu_i \le \liminf_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} g\, Gf d\mu_i$.

再另一方面

$$\mathcal{E}_g(\mu, f) \xlongequal{\text{单调收敛}} \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} h_n d\mu_i \le \liminf_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} Gf d\mu_i = \liminf_{i\to\infty}\mathcal{E}_g(\mu_i, f).$$

\#

定义 5.2.4 (L^p-容量). 设 $1\le p<\infty$. $E\subseteq\mathbb{R}^N$. 令

$$\Omega_E := \{f : f\in L_+^p(\nu),\ Gf(x)\ge 1 \text{ on } E\}$$

则相关于核 g 的 L^p-容量定义为

$$C_{g,p}(E) := \inf\left\{\int_M f^p d\nu : f\in\Omega_E\right\}.$$

若 $\Omega_E=\phi$, 则定义 $C_{g,p}(E)=\infty$.

命题 5.2.5 (L^p-容量的性质)

(i) 若 $E_1\subseteq E_2$, 则 $C_{g,p}(E_1)\le C_{g,p}(E_2)$.

(ii) (外正则性). 对 $\forall E\subseteq\mathbb{R}^N$,

$$C_{g,p}(E) = \inf\{C_{g,p}(E) : G\supseteq E,\ G \text{开}\}$$

(iii) (次可列可加性). 设 $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathbb{R}^N$, $E=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$, 则

$$C_{g,p}(E)\le\sum_{i=1}^\infty C_{g,p}(E_i).$$

证明：(i) 显然，(iii) 显然．下证 (ii)．

(ii) 不失一般性，设 $C_{g,p}(E)<\infty$．此时，对 $\forall\ \varepsilon\in(0,1)$ 充分小，取 $f\in\Omega_E$，s.t.

$$\int_M f^p d\nu < C_{g,p}(E)+\varepsilon .$$

由 $\mathcal{G}f$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上下半连续，知 $\{x:\mathcal{G}f(x)>1-\varepsilon\}=:G$ 为开集 且 $\frac{f}{1-\varepsilon}\in\Omega_G$．因此，

$$C_{g,p}(G)\le(1-\varepsilon)^{-p}\int_M f^p d\nu<(1-\varepsilon)^{-p}\left(C_{g,p}(E)+\varepsilon\right).$$

由 ε 的任意性，得 (ii) 成立．

#

(1.

命题 5.26（零容量集的刻画）设 $E\subseteq\mathbb{R}^N$．则 $C_{g,p}(E)=0 \Leftrightarrow \exists f\in L_+^p(\nu)$，s.t.

$$E\subseteq\{x:\mathcal{G}f(x)=+\infty\} \quad (*)$$

证明：Step 1 ($\Leftarrow$)．假设 (*) 式成立．对 $\forall f\in L_+^p(\nu)$，以及 $\lambda>0$，令

$$E_\lambda:=\{x:\mathcal{G}f(x)>\lambda\}. \Rightarrow \frac{f}{\lambda}\in\Omega_{E_\lambda}.$$

故 $C_{g,p}(E_\lambda)\le\frac{1}{\lambda^p}\int_M f^p d\nu$．令 $\lambda\to\infty$，得

$$C_{g,p}(\{x:\mathcal{G}f(x)=+\infty\})=0.\ 故\ C_{g,p}(E)=0.$$

Step 2 ($\Rightarrow$) 假设 $C_{g,p}(E)=0$．对 $\forall\ i\in\mathbb{N}$，取 $f_i\in\Omega_E$，s.t.

$$\int_M f_i^p d\nu<2^{-ip}.$$

令 $f:=\sum_{i=1}^{\infty}f_i$ 知 $f\in\Omega_E$，且 $\mathcal{G}f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{G}f_i(x)=\infty$

$$\int_M f d\nu<1.$$

$$\Rightarrow E\subseteq\{x:\mathcal{G}f(x)=\infty\}.$$

定义5.2.7（(g,p)-拟 a.e.）. 设一个性质在相差一个 $C_{g,p}$-零测集下成立，则称该性质 (g,p)-拟 a.e. 成立.

• 对 $\forall f\in L^p(\nu)$，定义

$$\mathcal{G}f(x):=\mathcal{G}(f^+)(x)-\mathcal{G}(f^-)(x).$$

命题5.2.8（Egorov 型定理）. 设 $\{f_i\}_i\subseteq L^p(\nu)$ 满足 $f_i\xrightarrow{L^p(\nu)}f$. 则 $\exists$ 子列 $\{f_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 以及 ~~满足~~. 对充分小的 (g,p)-容量开集外，$\mathcal{G}f_{i_n}(x)$ (g,p)-拟 a.e. 下一致收敛于 $\mathcal{G}f(x)$.

证明： 由命题5.2.6，知在相差一个零 (g,p)-容量集下，$\mathcal{G}f_i$，$\mathcal{G}f$ 有限，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，有，

取 i_n s.t.

$$\int_M |f_{i_n}-f|^p d\nu<4^{-np}.$$

令 $E_n:=\{x:\mathcal{G}(|f_{i_n}-f|)(x)>2^{-n}\}$ 以及 $G_m:=\bigcup_{n=m}^{\infty}E_n$. 则

$$C_{g,p}(E_n)\le 2^{np}\int_M|f_{i_n}-f|^p d\nu\le 2^{-np}.$$

且

$$C_{g,p}(G_m)\le\sum_{n=m}^{\infty}2^{-np}$$

因此 $C_{g,p}(\bigcap_{m=1}^{\infty}G_m)=0$. 则若 $x\notin G_m\cup F$，则对 $\forall n\ge m$，

$$|\mathcal{G}f_{i_n}(x)-\mathcal{G}f(x)|\le\mathcal{G}(|f_{i_n}-f|)(x)\le 2^{-n}.$$

因此，$\lim_{n\to\infty}\mathcal{G}f_{i_n}(x)=\mathcal{G}f(x)$ 在 $G_m\cup F$ 外一致收敛.

#

令 $\overline{\Omega_E}$ 为 Ω_E 在 $L^p(\nu)$ 下的闭包.

命题5.2.9 ($\overline{\Omega_E}$的刻画) 设 $1\le p<\infty$, $E\subseteq\mathbb{R}^N$. 则

$$\overline{\Omega_E}:=\{f: f\in L_+^p(\nu),\ \mathcal{G}f(x)\ge 1\ (g,p)\text{-q.e. on }E\}=F.$$

证明: Step 1 (F闭) 设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subseteq L_+^p(\nu)$ 满足 $\mathcal{G}f_n(x)\ge 1$ on $E\setminus F_n$, 其中 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 满足

$C_{g,p}(F_n)=0$. 若 $f_n\xrightarrow{L^p(\nu)}f$, 则应用命题5.2.8知∃子列 $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ s.t.

$\lim\limits_{i\to\infty}\mathcal{G}f_{n_i}(x)=\mathcal{G}f(x)$. (g,p)-q.e.

因此, $\mathcal{G}f(x)\ge 1$ (g,p)-q.e. 于 $E\setminus(\bigcup\limits_{i=1}^\infty F_{n_i})$. 从而 (g,p)-q.e. 于 E.

因此, 集合F为闭集, ⇒ $\overline{\Omega_E}\subset F$.

Step 2 ($F\subseteq\overline{\Omega_E}$). 设 $f\in F$, 则由命题5.2.7知 ∃h 且 $h\ge 0$. $\|h\|_{L^p}<\infty$ 充分小 s.t. $\mathcal{G}h(x)=+\infty$, on F.

因此, $f+h\in\Omega_E$, 且 $\|f+h-f\|_{L^p}=\|h\|_{L^p}$ 充分小. ⇒ $f\in\overline{\Omega_E}$. #

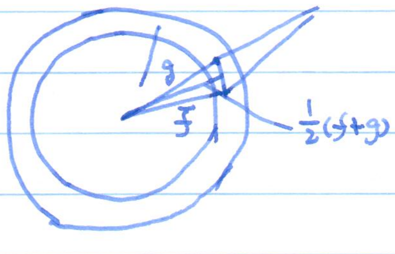
定理5.2.10 (容量的表示) 设 $1<p<\infty$. $E\subseteq\mathbb{R}^N$ 满足 $C_{g,p}(E)<\infty$. 则 ∃! f^E s.t. $f^E\in L_+^p(\nu)$ 且

$\mathcal{G}f^E(x)\ge 1$ (g,p)-q.e. on E 且 $\int_M (f^E)^p d\nu=C_{g,p}(E)$.

证明:

定义 (一致凸) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为Banach空间. 称 X 为一致凸, 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当 $\|f\|\le 1+\delta$,

$\|g\|<1+\delta$ 且 $\|\frac{1}{2}(f+g)\|\ge 1$ 时, 有 $\|f-g\|<\varepsilon$.



命题. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为一个一致凸的Banach空间. Ω 为其凸集. 则 ∃! $u\in\overline{\Omega}$, s.t.

$$\|u\|_X:=\inf_{v\in\Omega}\|v\|_X.$$

由 $(L^p(\mu), \|\cdot\|_{L^p})$ 为一致凸的Banach空间，

$\Omega_E := \{f\in L^p_+(\nu) : g_f(x)\geq 1 \text{ on } E\}$ 为凸闭集.

故由以上若干命题以及命题5.2.9知定理成立. #

• 称上述定理中 f^E 为 E 的容量函数，g_{f^E} 为 E 的容量位势. 一般设 C 为容量，$E\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个集合，称 E 关于 C 是可容量的，若（其内外正则，i.e.）

$$C(E) = \sup\{C(K) : K\subseteq E,\ K\text{紧}\} = \inf\{C(G) : G\supseteq E,\ G\text{开}\}$$

定理 5.2.11（容量定理） 设 $C: 2^{\mathbb{R}^N} \xrightarrow{} [-\infty,+\infty]$ 为 $\mathbb{R}^N$ 上的集合函数. 满足

(a) $C(\phi)=0$

(b) 若 $E_1\subseteq E_2$，则 $C(E_1)\leq C(E_2)$.

(c) 若 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ 为一列递减紧集列，则

$$C\Big(\bigcap_{i=1}^\infty K_i\Big) = \lim_{i\to\infty} C(K_i)$$

(d) 若 $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ 为一列递增集列，则

$$C\Big(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\Big) = \lim_{i\to\infty} C(E_i).$$

则所有的Suslin集（特别地，所有的Borel集）都关于C是可容量的.

命题 5.2.12（$C_{g,p}$ 的容量定理） 设 $1<p<\infty$，若 $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ 为 $\mathbb{R}^N$ 中一列单增集合列，满足

$$E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i.$$

则 $C_{g,p}(E) = \lim_{i\to\infty} C_{g,p}(E_i)$. 因此，所有的Suslin集都关于 $C_{g,p}$ 可容量.

进一步，若 $C_{g,p}(E)<\infty$，则容量函数列 $\{f^{E_i}\}_{i=1}^\infty \xrightarrow{L^p(\nu)} f^E$.

证明：$\lim_{i\to\infty} C_{g,p}(E_i) \leq C_{g,p}(E)$ ✓. 下证反方向不等式. 不失一般性，设 $\lim_{i\to\infty} C_{g,p}(E_i)<\infty$.

设 $\{f^{E_i}\}_{i=1}^\infty$ 为相应容量函数. 由 $\{\Omega_i\}\uparrow$ 易知 当 $i<j$ 时，$f^{E_j}\in\Omega_{E_i}$，从而

$$\int_M \left(\frac{1}{2}(f^{E_i}+f^{E_j})\right)^p d\nu \geq C_{g,p}(E_i).$$

$\Downarrow$

引理：设 $(X,\|\cdot\|)$ 为一致凸的 Banach 空间，设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|=1$ 且

$$\liminf_{n,m\to\infty}\left\|\frac{1}{2}(f_n+f_m)\right\|\geq 1.$$

则 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中强收敛。$\uparrow$

$\Rightarrow \{f^{E_i}\}_{i=1}^{\infty}\xrightarrow{L^p(\nu)} f$ s.t. $\int_M f^p d\nu=\lim\limits_{i\to\infty}C_{g,p}(E)$. 且对 $\forall i$ 有

$$gf(x)\geq 1 \quad (g,p)\text{-a.e. on } E_i$$

从而允许相差可数个 $C_{g,p}$–0 容量集之后，记为 N

$$gf(x)\geq 1 \quad \text{on } E\setminus N$$

由 Ω_E 的刻画，知 $f\in\Omega_E$，且 $\int_M f^p d\nu\geq C_{g,p}(E)$. $\Rightarrow$ 反方向不等式也成立. #

命题 5.2.13（两容量的一致性） 设 $1<p<\infty$，则对 $\forall E\subseteq\mathbb{R}^N$，

$$C_{G_\alpha,p}(E)=C_{\alpha,p}(E).$$

$\Omega_K=\{f\in L^p(\nu),\ G_\alpha f(x)\geq 1 \text{ on } K\}$

证明：回顾，设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 紧，$\omega_K:=\{\varphi\in S:\varphi\geq 1 \text{ on } K\}$，则

$$C_{\alpha,p}(K)=\inf\{\|\varphi\|_{\alpha,p}^p:\varphi\in\omega_K\},\ \text{其中 } \|\varphi\|_{\alpha,p}:=\|g\|_p,\ \text{s.t. } \varphi=G_\alpha * g.$$

$$C_{G_\alpha,p}(K)=\inf\left\{\int_M f^p d\nu: f\in\Omega_K\right\}.$$

由 $\overset{W}{\Omega}_K\subseteq\Omega_K$.（$\Omega_K$ 中 $f>0$ 的条件可去掉）.

另一方面，设 $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$，满足 $G_\alpha * f(x)\geq 1$ on K s.t. $\|f\|_p^p<C_{G_\alpha,p}(K)+\varepsilon$.

则断言 $G_\alpha * f\in\overline{W_K}$. 细节略. #

§5.3 Minimax 定理

• 设 $\mathbb{X}$、$\mathbb{Y}$ 为两个集合. $f:\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$ 为实值函数. 则

(i) 称 f 在 $\mathbb{X}$ 上凸, 若对 $\forall x_1,x_2\in\mathbb{X}$, 与 $\xi_1,\xi_2\geq 0$ 满足 $\xi_1+\xi_2=1$, $\exists x_0\in\mathbb{X}$, s.t.

$$f(x_0,y)\leq \xi_1 f(x_1,y)+\xi_2 f(x_2,y),\qquad \forall y\in\mathbb{Y}.$$

(ii) 称 f 在 $\mathbb{Y}$ 上凹, 若对 $\forall y_1,y_2\in\mathbb{Y}$ 与 $\eta_1,\eta_2\geq 0$ 满足 $\eta_1+\eta_2=1$, $\exists y_0\in\mathbb{Y}$, s.t.

$$f(x,y_0)\geq \eta_1 f(x,y_1)+\eta_2 f(x,y_2),\qquad \forall x\in\mathbb{X}.$$

定理5.3.1 (Minimax定理) 设 $\mathbb{X}$ 为一个紧的Hausdorff空间. $\mathbb{Y}$ 为一个集合. $f:\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$ 为一个二元实函数. 满足:

(i) 对 $\forall y\in\mathbb{Y}$, $f(x,y)$ 关于 x 下半连续,

(ii) f 在 $\mathbb{X}$ 上凸

(iii) f 在 $\mathbb{Y}$ 上凹.

则

$$\min_{x\in\mathbb{X}}\sup_{y\in\mathbb{Y}} f(x,y)=\sup_{y\in\mathbb{Y}}\min_{x\in\mathbb{X}} f(x,y).\qquad (*)$$

证明略去

§5.4 容量的对偶定义

• 设 $\mathbb{X}:=\{\mu:\mu\in M^+(K),\ \mu(K)=1\}$, 其中 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个紧集.

$$\mathbb{Y}:=\{f: f\in L^p_+(\nu),\ \|f\|_{L^p(\nu)}\leq 1\}$$

令 $\mathcal{E}_g(\mu,f):\mathbb{X}\times\mathbb{Y}\to\mathbb{R}$ 为互能量定义如下

$$\mu\times f\longmapsto \mathcal{E}_g(\mu,f):=\int_{\mathbb{R}^N} Gf\,d\mu.$$

已知 $\mathcal{E}_g$ 满足如下性质:

~~性质~~ (i) $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 凸. $\mathcal{X}$ 在 弱*拓扑下紧.

(ii) $\mu \longmapsto \mathcal{E}_g(\mu, f)$ 下半连续.

定理 5.4.1 (紧集容量的对偶表示) 设 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 为紧集. $1<p<\infty$. 则

$$C_{g,p}(K)^{\frac{1}{p}} = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), \|\check{g}\mu\|_{L^{p'}(\nu)} \le 1\}.$$

证明: 令 $\Omega_K := \{f \in L^p_+(\nu) : Gf(x) \ge 1 \text{ on } K\}$ 知对 $\forall f \in \Omega_K$

$$\mu(K) \le \int_M Gf(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \check{g}\mu f\, d\nu$$

$$\le \|\check{g}\mu\|_{L^{p'}(\nu)} \|f\|_{L^p(\nu)}$$

由于加正齐次性

从而 $\mu(K) \le \|\check{g}\mu\|_{L^{p'}(\nu)} [C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p}}$. 因此.

$$\sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{M}^+(K), \|\check{g}\mu\|_{L^{p'}(\nu)} \le 1\} \overset{(*)}{\le} C_{g,p}(K)^{\frac{1}{p}}.$$

└说明 (*) 中可取等号.

反过来, 一方面, 有由

$$\sup_{f \in \mathcal{Y}} \mathcal{E}_g(\mu, f) = \sup_{f \in \mathcal{Y}} \int_M \check{g}\mu f\, d\nu = \|\check{g}\mu\|_{L^{p'}(\nu)}.$$

知

$$\min_{\mu \in \mathcal{X}} \sup_{f \in \mathcal{Y}} \mathcal{E}_g(\mu, f) = \min_{\mu \in \mathcal{M}^+(K)} \frac{\|\check{g}\mu\|_{L^{p'}(\nu)}}{\mu(K)}.$$

另一方面,

$$\min_{\mu \in \mathcal{X}} \mathcal{E}_g(\mu, f) = \min_{\mu \in \mathcal{X}} \int_{\mathbb{R}^N} Gf\, d\mu(x) = \min_{x \in K} Gf(x).$$

因此由 Ω_K 的定义,

$$\sup_{f \in \mathcal{Y}} \min_{\mu \in \mathcal{X}} \mathcal{E}_g(\mu, f) = \sup_{f \in L^p_+(\nu)} \frac{\min_{x \in K} Gf(x)}{\|f\|_{L^p(\nu)}} = \sup_{f \in \Omega_K} \frac{1}{\|f\|_{L^p(\nu)}} = [C_{g,p}(K)]^{-\frac{1}{p}}.$$

应用 minmax 定理知

$$\min_{u\in M^+(K)} \frac{\|\check{g}u\|_{L^{p'}(\nu)}}{u(K)} = [C_{g,p}(K)]^{-\frac{1}{p}}$$

由 $M^+(K)$ 紧，知 $\exists u_0\in M^+(K)$, s.t.

$\Rightarrow$ ~~$\|\check{g}(u)\|_{L^{p'}(\nu)} \geq u(K) [$~~

$$\frac{\|\check{g}(u_0)\|_{L^{p'}(\nu)}}{u_0(K)} = [C_{g,p}(K)]^{-\frac{1}{p}}.$$

从而等式成立。

#

• (Suslin 集) $\bigcup_k \bigcap_j F_{k,j}$. 其中 $F_{k,j}$ 为闭集. (F_σ 集)

推论 5.4.2 (Suslin 集容量的对偶表示) 设 $E\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个 Suslin 集，则

$$[C_{g,p}(E)]^{\frac{1}{p}} = \sup\{u(E): u\in M^+(\mathbb{R}^N),\ \text{supp}\,u\subseteq E \text{ 且 } \|\check{g}u\|_{L^{p'}(\nu)}\leq 1\}.$$

证明: 利用 $C_{g,p}$ 容量和容量性质. (从紧集 → Suslin 集).

定理 5.4.3 (容量函数的表示测度) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 为紧集，$1<p<\infty$. 则 $\exists u^K\in M^+(K)$, s.t.

$$f^K = (\check{g}u^K)^{p'-1}.$$

且满足

$$u^K(K) = \int_M (\check{g}u^K)^{p'} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} g f^K du^K = C_{g,p}(K).$$

并测度.

证明: Step 1 (容量的对偶表示) 利用定理 5.4.1. 知

$$[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p}} = \sup\{u(K): u\in M^+(K),\ \|\check{g}u\|_{L^{p'}(\nu)}\leq 1\}.$$

因此 $\exists \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}^+(K)$, s.t. $\|\check{g}u_n\|_{L^{p'}(\nu)}=1$, 且

$$\lim_{n\to\infty} u_n(K)=[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p}}.$$

利用弱紧性, 设 $u_n \xrightarrow{\text{弱*收敛}} u\in\mathcal{M}^+(K)$, 故有

$$u(K)=[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p}}.$$

~~Step~~ 且 又由 $\check{g}_u(y)$ 关于 u 下半连续, 知 $\|\check{g}u\|_{L^{p'}(\nu)}\leq 1$.

Step2 (由 u 构造 u^K). 定义.

$$u^K:=[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p'}}u.$$

知 $u^K(K)=[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p'}}u(K)=C_{g,p}(K)$.

令 f^K 为相应的容量函数, s.t. $gf^K(x)\geq 1$ $C_{g,p}$-q.e. on K. 并令.

$$S:=\{x\in K: gf^K(x)<1\}.$$

利用 $u(F)\leq\|\check{g}(u)\|_{L^{p'}(\nu)}[C_{g,p}(F)]^{\frac{1}{p}}$ 对 $\forall F\subseteq S$, 紧.

知 $u(F)=0$. 从而由 S 为 Borel 集 $\Rightarrow u(S)=0$. $\Rightarrow u^K(S)=0$.

故 $gf^K(x)\geq 1$, u^K-a.e. 于 K. 则由 Fubini. 得.

$$C_{g,p}(K)=u^K(K)\leq\int_{\mathbb{R}^N} gf^K du^K=\int_M \check{g}u^K f^K d\nu$$

$$\leq\|\check{g}u^K\|_{L^{p'}(\nu)}\|f^K\|_{L^p(\nu)}=[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p'}}[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p}}=C_{g,p}(K).$$

$\Rightarrow C_{g,p}(K)=\int_{\mathbb{R}^N} gf^K du^K=u^K(K)$. 且由 Hölder 不等式取等的条件

$$(f^K)^p=(\check{g}u^K)^{p'}$$

#

定义5.14（非线性位势） 设 $\mu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$，定义非线性位势 $V^{\mu}_{g,p}$ 如下. 对 $\forall x\in\mathbb{R}^N$,

$$V^{\mu}_{g,p}(x):=\mathcal{G}(\check{\mathcal{G}}\mu)^{p'-1}(x)$$

$$=\int_M g(x,y)\left[\int_{\mathbb{R}^N} g(z,y)\,d\mu(z)\right]^{p'-1}d\nu(y).$$

定义相应的广义能量如下

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^{\mu}_{g,p}(x)\,d\mu(x)=\int_M\left[\int_{\mathbb{R}^N} g(z,y)\,d\mu(z)\right]^{p'}d\nu(y)$$

$$=\int_M(\check{\mathcal{G}}\mu)^{p'}d\nu.$$

定理5.15（容量的非线性位势表示） 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 为紧集，$1<p<\infty$. 则对 $\forall x\in \operatorname{supp}\mu^K$,

$$\mathcal{G}f^K(x)=V^{\mu^K}_{g,p}(x)\le 1. \quad (*)$$

进一步,

$$C_{g,p}(K)=\max\{\mu(K):\mu\in\mathcal{M}^+(K),\ V^{\mu}_{g,p}(x)\le 1 \text{ on } \operatorname{supp}\mu\}. \quad (**)$$

证明: Step1（(*)的证明）假设 $\mathcal{G}f^K(x_0)>1$. 利用 $\mathcal{G}f^K(x_0)$ 的下半连续性, 知 $\exists\delta>0$, 以及 x_0 的一个开邻域 $U(x_0)$, s.t. 对 $\forall x\in U(x_0)$, 有

$$\mathcal{G}f^K(x)>1+\delta.$$

进一步, 由 f^K 的定义, 知 $\mathcal{G}f^K(x)\ge 1$ a.e. (μ^K).

因此, 有

$$C_{g,p}(K)=\int_{\mathbb{R}^N} V^{\mu^K}_{g,p}\,d\mu^K\ge(1+\delta)\mu^K(G)+\mu^K(K\setminus G).$$

$$=\delta\mu^K(G)+\mu^K(K)=\delta\mu^K(G)+C_{g,p}(K).$$

因此, $\mu^K(G)=0$. $\Rightarrow x_0\notin\operatorname{supp}\mu^K$.

Step2 (**)的证明) 设 $\mu\in\mathcal{M}^+(K)$ 并假设 $V_{g,p}^{\mu}(x)\le 1$ on $\mathrm{supp}\,\mu$. 则

$$\mu(K)\ge\int_K V_{g,p}^{\mu}(x)\,d\mu=\|\check{g}(\mu)\|_{L^{p'}(\nu)}^{p'}$$

而由 $\mu(K)\le\|\check{g}(\mu)\|_{L^{p'}(\nu)}C_{g,p}(K)^{\frac{1}{p}}$

$$\Rightarrow\mu(K)\le[\mu(K)]^{\frac{1}{p'}}[C_{g,p}(K)]^{\frac{1}{p}}\Rightarrow\mu(K)\le C_{g,p}(K).$$

而又由 $\mu^K(K)\le C_{g,p}(K)$. 得 (**) 式成立. #

定理5.4.6 (一般容量的数因表示) 设 $E\subseteq\mathbb{R}^N$, $1<p<\infty$, $C_{g,p}(E)<\infty$. M 为一个局部紧的拓扑空间. 设核函数 g 满足.

(i) $g\varphi$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上连续

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty}g\varphi(x)=0$ 对 $\forall\varphi\in C_0(M)$,

则 $\exists$ 容量测度 $\mu^E\in\mathcal{M}^+(E)$, s.t.

(i) $f^E=(\check{g}\mu^E)^{p'-1}$

(ii) $\begin{cases}gf^E(x)\ge 1 & C_{g,p}\text{-q.e. on } E\\ gf^E(x)\le 1 & \text{on } \mathrm{supp}\,\mu^E.\end{cases}$

(iii) $\mu^E(E)=\int_M(\check{g}\mu^E)^{p'}d\nu=\int_{\mathbb{R}^N}gf^E\,d\mu^E=C_{g,p}(E)$,

证明: 由 $C_{g,p}$ 为外容量, 知 $\exists$ G_δ 集 H, s.t.

$$\begin{cases}E\subseteq H\subseteq\overline{E}.\\ C_{g,p}(E)=C_{g,p}(H).\end{cases}$$

而由 H 为 Borel 集，知 H 为 $C_{g,p}$-可容量的，故 ∃ 一列单增紧集列 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$，s.t.

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = S \subset H \\ C_{g,p}(S) = C_{g,p}(H). \end{cases}$$

应用定理 5.4.3，对 $\forall K_i$，∃ 容量函数 $f^{K_i} = (\check{g}\mu^{K_i})^{p-1}$，满足 $\mu^{K_i}(K_i) = C_{g,p}(K_i)$.

又由 $C_{g,p}(E) < \infty$，知，$f^{K_i} \xrightarrow{L^{p}(\nu)} f^{S}$. 由容量函数的唯一性，知，

$$f^{S} = f^{H} = f^{E}.$$

又由 $\{\mu^{K_i}\}_i$ 一致有界，知 ∃ 子列（仍设为原列），s.t.

$$\mu^{K_i} \xrightarrow{\text{弱收敛}} \mu^{E} \in \mathcal{M}^{+}(E).$$

且

$$\mu^{E}(E) \leq C_{g,p}(S) = C_{g,p}(E).$$

下断言. $f^{E} = (\check{g}\mu^{E})^{p-1}$.

⌊ 事实上，设 $\varphi \in C_0(M)$，则有

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{E}_g(\mu^{K_i}, \varphi) = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi\, d\mu^{K_i} = \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi\, d\mu^{E} = \mathcal{E}_g(\mu^{E}, \varphi).$$

又由 $\{(f^{K_i})^{p-1}\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $L^{p'}(\nu)$ 中一致有界，则 ∃ 子列，在 $L^{p'}(\nu)$ 中弱收敛于 $(f^{E})^{p-1}$.

因此，$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{E}_g(\mu^{K_i}, \varphi) = \lim_{i\to\infty} \int_M (f^{K_i})^{p-1} \varphi\, d\nu = \int_M (f^{E})^{p-1} \varphi\, d\nu.$$

$$\Rightarrow \int_M (f^{E})^{p-1} \varphi\, d\nu = \mathcal{E}_g(\mu^{E}, \varphi) = \int_M \check{g}\mu^{E} \varphi\, d\nu.$$ 对 $\forall \varphi \in C_0(M)$ 成立.

综上，$(f^{E})^{p-1} = \check{g}\mu^{E}$. ⌋

下证. $\mathcal{G}f^E(x)\le 1$ on $\mathrm{supp}\,\mu^E$. 设 $x\in \mathrm{supp}\,\mu^E$, 取 $x_i\in \mathrm{supp}\,\mu^{K_i}$, s.t.

$x_i\to x$. 知

$\mathcal{G}f^{K_i}(x_i)\le 1$. 利用弱紧性, 有

$f^{K_i}(y)\longrightarrow f^E(y)$ ν-a.e.

则 $\mathcal{G}f^E(x)=\int_M g(x,y)f^E(y)\,d\nu(y)\le \int_M \liminf\limits_{i\to\infty}\left(g(x_i,y)f^{K_i}(y)\right)d\nu(y)$

$$\le \liminf_{i\to\infty}\int_M g(x_i,y)f^{K_i}(y)\,d\nu(y)\le 1.$$

从而 $C_{g,p}(E)=\int_M (f^E)^p\,d\nu=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{G}f^E\,d\mu^E\le \mu^E(E)$. #.

§5.5 径向递减卷积核

- 设 $g:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\to[0,\infty)$, 称 g 为径向递减卷积核, 若 $g(x,y)=g_0(|x-y|)$, 其中 g_0 为 $\mathbb{R}^+$ 上一个非负下半连续, 的非增函数, 满足

$$\int_0^1 g_0(t)\,t^{N-1}\,dt<\infty$$

- 当 $g=I_\alpha$ 为Riesz位势时, 记相应容量 $C_{g,p}$ 为 Riesz容量, 记作 $\dot{C}_{\alpha,p}$,
  当 $g=G_\alpha$ 为Bessel位势时, 记相应容量 $C_{g,p}$ 为 Bessel容量, 记作 $C_{\alpha,p}$.

命题5.5.1 (容量的性质) 设 $1<p<\infty$, 若 g 为径向递减卷积核, 则

(a) 若 $\int_{\mathbb{R}^N} g(x)^{p'}dx<\infty$, 则对 $\forall\, a\in\mathbb{R}^N$, $C_{g,p}(\{a\})>0$.

(b) 若 $\int_{\{|x|>1\}} g(x)^{p'}dx=\infty$, 则对 $\forall\, E\subseteq\mathbb{R}^N$, $C_{g,p}(E)=0$

(c) 若 $\int_{\{|x|>1\}} g(x)^{p'}dx<\infty$, 则对 $\forall\, E\subseteq\mathbb{R}^N$, 满足 $C_{g,p}(E)>0$, 有 $|E|=0$.

注: (1) $I_\alpha\notin L^{p'}$ 当 $0<\alpha<N$, $\int_{|x|>1} I_\alpha^{p'}(x)\,dx<\infty$, 当 $0<\alpha p<N$

(2) $G_\alpha\notin L^{p'}$ 当 $\alpha p\le N$, $\int_{|x|>1} G_\alpha^{p'}(x)\,dx<\infty$, 对 $\forall\,\alpha>0$.

(3). 由Sobolev嵌入, 知. 对$\forall \varphi\in W_E$, 令 $q=\frac{N}{N-\alpha p}$. $\Rightarrow$ ~~$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{N-\alpha p}{N}$~~

$$|E|^{1-\frac{\alpha p}{N}}=\left[\int_E \varphi(x)^q dx\right]^p \overset{\text{Sobolev嵌入}}{\lesssim} \|\varphi\|_{p,\alpha}^p$$

$\Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{N-\alpha p}{N}=1-\frac{\alpha p}{N}$

而 $\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{N}=$

利用φ的任意性, 得. $|E|^{1-\frac{\alpha p}{N}}\lesssim \dot{C}_{\alpha,p}(E)$. ⊛.

命题5.5.1的证明

Step1 (a)的证明. 设$\|g\|_{p'}<\infty$. 令$a=0$且δ为Dirac测度, 则 由于$\{0\}$为紧集. 应用$\dot{C}_{g,p}$的对偶表示,

$$\left[\dot{C}_{g,p}(\{0\})\right]^{\frac{1}{p}}=\sup\left\{\frac{\mu(\{0\})}{\|g*\mu\|_{p'}}:\mu\in\mathcal{M}^+(\{0\})\right\}$$
$$=\frac{1}{\|g*\delta\|_{p'}}=\frac{1}{\|g\|_{p'}}>0.$$

Step2 (b)的证明. 设$\int_{\{|x|>1\}} g(x)^{p'}dx=\infty$. 设对$\forall$单位球$B=B(0,1)$, 则对$\forall\mu\in\mathcal{M}^+(B)$, 有

$$g*\mu(x)=\int_B g(x-y)\,d\mu(y)\geq g_0(|x|+1)\,\mu(B).$$

$$\Rightarrow \|g*\mu(x)\|_{p'}=\infty. \text{ 则 } C_{g,p}(B)=0.$$

Step3 (c)的证明) 设$\int_{\{|x|>1\}} g(x)^{p'}dx<\infty$. 且$C_{g,p}(E)=0$. 不失一般性, 设E有界, 且只需证明

$$|E\cap B|=0.$$

令$F:=E\cap B$. 取$f\in L_+^p$满足 $g*f\geq 1$ on F. 则

$$|F|\leq\int_F g*f\,dx=\int_{\mathbb{R}^N} f(g*\mathbb{1}_F)\,dx\leq\|f\|_p\,\|g*\mathbb{1}_F\|_{p'}$$

而 $g*\mathbb{1}_F(x)=\int_F g(x-y)\,dy\leq\begin{cases}Ag(\frac{|x|}{2}) & |x|\geq 2 \quad \text{且 } |x-y|\geq|x|-|y|\geq\frac{|x|}{2}\\ A & |x|<2,\quad ~~|x+y|\geq|x|~~\end{cases}$

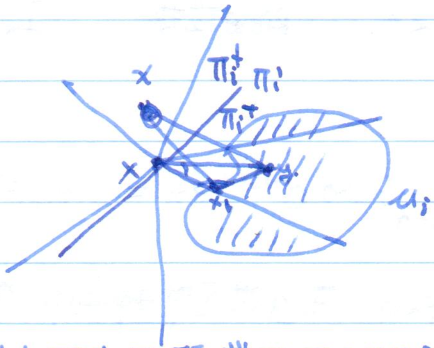
$\Rightarrow |E\cap B| \le A\, C_{g,p}(E)^{\frac{1}{p}}$. $\Rightarrow |E\cap B|=0$

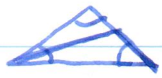
#

定理5.5.2(线性有界原理) 设g为一个径向递减的卷积核, $\mu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, 则$\exists$常数$Q$, (仅依赖于$N$), s.t. 对$\forall x\in\mathbb{R}^N$,

$$g*\mu(x) \le Q \sup_{y\in \operatorname{supp}\mu} g*\mu(y).$$

证明: 不失一般性, 设 $\sup_{y\in\operatorname{supp}\mu} g*\mu(y)=1$. 设$x\notin\operatorname{supp}\mu$. 设$\{\Gamma_i\}_{i=1}^Q$为$Q$个顶点为$x$, 开角为$\frac{\pi}{3}$的圆锥, s.t. $\bigcup_{i=1}^{Q}\Gamma_i=\mathbb{R}^N$.





设$\mu_i := \mu|_{\Gamma_i}$. 令$x_i\in\operatorname{supp}\mu_i$, s.t.

$$|x-x_i| = \operatorname{dist}(x,\operatorname{supp}\mu_i)$$

设π_i为从x到x_i线段的中垂面. 分别记π_i^+与π_i^-为π_i所截的两个半空间. 知若$x_i\in\pi_i^-$, 则

$\operatorname{supp}\mu_i\subseteq\pi_i^-$, 因此, 若$y\in\operatorname{supp}\mu_i$, 知 $|y-x_i|\le|y-x|$ 从而

$g(x-y)\le g(x_i-y)$. 因此

$$g*\mu_i(x) \le g*\mu_i(x_i) = \int_{\operatorname{supp}\mu_i} g(x_i-y)\,d\mu_i(y) \le 1$$

$\boxed{\sup_{y\in\operatorname{supp}\mu} g*\mu \le}$

因此, $g*\mu(x) \le \sum_{i=1}^{Q} g*\mu_i(x) \le Q$.

#

定理5.5.3(非线性有界原理) 设g,μ,Q形如定理5.5.2, 则对$\forall x\in\mathbb{R}^N$, 有

$$V^{\mu}_{g,p}(x) \le \max\{Q^{p-1}, Q\}\sup_{y\in\operatorname{supp}\mu} V^{\mu}_{g,p}(y).$$

证明略

注: 若$\operatorname{supp}\mu$为紧集, 则$Q=1$.

推论5.5.4(有界函数) 设g为一个径向递减的卷积核, $E\subseteq\mathbb{R}^N$满足$C_{g,p}(E)<\infty$, 则(g,p)-容量函数位势, $g*f^E$为$\mathbb{R}^N$上的有界函数

定理5.5.5(连续原理) 设g为径向非增卷积核，在$\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$上连续，设$u\in M^+(\mathbb{R}^N)$为一个测度，且具有紧支集，$\operatorname{supp}u=K$. 若此时 $V_{g,p}^{u}\big|_K\in C(K)$，则 $V_{g,p}^{u}$ 在$\mathbb{R}^N$上连续.

证明：Step1 (截断)

Dini定理. 设K为一个紧度量空间，$h:K\to\mathbb{R}$连续，$h_n:K\to\mathbb{R}$连续. 若

(i) $h_n\xrightarrow{\text{点态}}h$

(ii) $h_n(x)\geq h_{n+1}(x)$，$\forall x\in K$.

则 $h_n\xrightarrow{\text{一致}}h$.

在上述定理中，令 $K=\operatorname{supp}u$，$\cancel{h(x):=\int_{\mathbb{R}^N}g(x-y)f(y)dy}$ $\quad h=0$.

$$h_n(x)=\int_{|x-y|<\frac{1}{n}}g(x-y)f(y)dy$$

知对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. 对$\forall x\in K$，

$$\int_{|x-y|<\delta}g(x-y)f(y)\,dy<\varepsilon.\ (*)$$

令 $g_\delta(x):=\begin{cases}g(x) & |x|<\delta\\ 0 & |x|\geq\delta\end{cases}$

则由定理5.5.4(有界原理)，对$\forall x\in\mathbb{R}^N$

$$g_\delta*f(x)=\int_{|x-y|<\delta}g(x-y)f(y)\overset{(*)}{\leq}Q\varepsilon.$$

Step2 (连续性证明)

设$x_0\in K$，取$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $x_n\to x_0$. 由g在$\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$上连续，知

$$\limsup_{n\to\infty}V_{g,p}^{u}(x_n)\leq((g-g_\delta)*f)(x_0)+Q\varepsilon.$$

$$\leq V_{g,p}^{u}(x_0)+Q\varepsilon$$

又由 $V_{g,p}^{u}$ 为下半连续，得

$$V_{g,p}^{u}(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} V_{g,p}^{u}(x_n).$$

从而 $V_{g,p}^{u}$ 在 K 上连续. $V_{g,p}^{u}$ 在 K^c 上的连续性显然. #

推论 5.5.6 (非线性位势的连续性) 设 g 形如定理 5.5.5 中函数. $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 为紧集, 满足 $C_{g,p}(K)>0$. 则 $\exists\, u \in \mathcal{M}^+(K)$, s.t. $u \ne 0$ 且

$$V_{g,p}^{u} \text{ 在 } \mathbb{R}^N \text{ 上连续}.$$

证明: 由 $C_{g,p}(K) = \max\{u(K) : u \in \mathcal{M}^+(K),\ V_{g,p}^{u}(x) \le 1 \text{ on } \operatorname{supp} u\}$ 知

$\exists\, 0 \ne u \in \mathcal{M}^+(K)$, s.t. $V_{g,p}^{u}(x) \le 1$ on K. 又由 Egorov 定理, 知 $\exists$ 紧集 $K' \subset K$, s.t. $u(K') > \frac{1}{2}u(K)$ 且 $g * f(x)$ 在 K' 上一致收敛. 令 $u' := u|K'$. 得.

$$g*(g*u')^{p'-1}(x) = V_{g,p}^{u'}(x) \text{ 在 } K' \text{ 上一致收敛}.$$

从而 $V_{g,p}^{u'}$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上连续. #

命题 5.5.7 (一致下界) 设 $1<p<\infty$, $g(x) = g_0(|x|)$ 为 $\mathbb{R}^N$ 上的一个径向递减的卷积核, 满足.

(i) g 在 $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 上连续

(ii) $\int_{\{|x|>1\}} g^{p'}\,dx < \infty$

(iii) $\exists\, L>0$ 与 $\delta>0$, s.t. 对 $0<r<\delta$, $g_0(r) \le L g_0(2r)$.

令 $f \in L_+^p(\mathbb{R}^N)$, 满足 $g*f \ge 1$ a.e. on U. 则 $g*f \ge 1$ on U.

证明:

推论5.5.8（容量的表示）. 设 $1<p<\infty$, $\alpha>0$, $E\subseteq\mathbb{R}^N$, 则

$$C_{\alpha,p}(E)=\inf\{\|F\|_{\alpha,p}^p : F\in L^{p,\alpha},\ F(x)\ge 1 \text{ a.e. on } U(E)\}. \quad (*)$$

证明: 设 $F\in L^{\alpha,p}$ 满足 $F(x)\ge 1$ a.e. on $U(E)$. 则 $\exists f\in L^p$, s.t.

$F=G_\alpha * f$.

$\Rightarrow G_\alpha * f_+(x)\ge 1$ a.e. on U. 应用命题5.5.7, 得

$G_\alpha * f_+(x)\ge 1$ on U.

从而 $C_{\alpha,p}(U)\le\|f\|_p^p$. 又由 $C_{\alpha,p}$ 的外部容量性质, 得 $(*)$ 成立.

#

命题5.5.9（非线性位势的下界）设 $g(x)=g_0(|x|)$ 为径向递减的卷积核, 满足命题5.5.7中条件. 则 $\exists A>0$, s.t. 对 $\forall \mu\in\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$,

$$V_{g,p}^{\mu}(0)\ge A\int_0^\delta g_0(r)^{p'}r^{N-1}\mu(B(0,r))^{p'-1}dr.$$

证明:

$$V_{g,p}^{\mu}(0)=\int_{\mathbb{R}^N}g(x)\Big[\int_{\mathbb{R}^N}g(y-x)\,d\mu(y)\Big]^{p'-1}dx$$

$$\overset{\text{分环}}{\ge}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\delta 2^{-n-1}<|x|\le\delta 2^{-n}}g(x)\Big[\int_{|y|\le\delta 2^{-n}}g(y-x)\,d\mu(y)\Big]^{p'-1}dx$$

$$\ge\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\delta 2^{-n-1}<|x|\le\delta 2^{-n}}g(x)\,g(\delta 2^{-n+1})^{p'-1}\mu(B(0,\delta 2^{-n}))^{p'-1}dx$$

$$\ge L^{-2}\int_{B(0,\delta)}g(x)^{p'}\mu(B(0,|x|))^{p'-1}dx$$

$$\ge A\int_0^\delta g_0(r)^{p'}\mu(B(0,r))^{p'-1}r^{N-1}dr$$

#

§5.6 容量的替代定义与奇点的可去性

定义5.6.1 (替代定义) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$，~~定义~~令

$$\omega_K:=\{\varphi\in\mathcal{S}:\varphi\equiv1\ \text{on}\ U(K),\ e\}.$$

K的一个邻域.

设 $\alpha>0$，$1<p<\infty$，则

$$N_{\alpha,p}(K):=\inf\{\|\varphi\|_{\alpha,p}^{p}:\varphi\in\omega_K\}.$$

利用类似的方法，将上述定义推广至∀集合.

定理5.6.2 (替代容量的表示) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 紧，$\alpha>0$，$1<p<\infty$. 则 $\exists!\ f^K=G_\alpha*f^K\in\overline{\omega_K}$，s.t.

(i) $\|f^K\|_p^p=N_{\alpha,p}(K)$

(ii) ∃分布 $T^K\in L^{-\alpha,p'}\cap\mathcal{D}'(K)$，s.t.

$$f^K=(G_\alpha*T^K)|G_\alpha*T^K|^{p'-2}.$$

(iii) $\langle T^K,1\rangle=N_{\alpha,p}(K)$，

(iv) $$[N_{\alpha,p}(K)]^{\frac{1}{p}}=\sup_{T\in\mathcal{D}'(K)}\frac{\langle T,1\rangle}{\|G_\alpha*T\|_{p'}}.$$

定义5.6.3 (可去集) 设 $K\subseteq\mathbb{R}^N$ 为紧集. $\mathcal{L}$ 为定义在K的一个邻域上的偏微分算子. $1<p<\infty$.

则称K为 $\mathcal{L}$ 在 L^p 中可去的，若∃K的有界开邻域O，s.t. 对方程

$$\mathcal{L}u=0\quad \text{in}\ O\setminus K$$

的∀满足 $u\in L^p(O\setminus K)$ 的解u，都∃u的一个延拓 $\tilde u:O\to\mathbb{R}$，s.t.

$$\mathcal{L}\tilde u=0\quad \text{in}\ O.$$

定理5.6.4 (可去集的N容量刻画) 设L为一个α-阶的常系数椭圆算子, $\alpha<N$; $K\subseteq\mathbb{R}^N$紧. 则

(i) ~~K为L在Lᵖ中~~ 若$N_{\alpha,p'}(K)=0$, 则K为L在L^p中可去.

(ii) 若$N_{\alpha,p'}(K)>0$, 则K为L在L^p中不可去.

注:

$$C_{\alpha,p}(E)\sim N_{\alpha,p}(E).$$