§2.4 紧算子

定义2.4.1（紧算子） 设 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ 为线性算子，称 T 为紧算子，若对 $\mathcal{H}$ 中单位闭球

$$\overline{B(0,1)}:=\{h\in\mathcal{H}:\|h\|\le 1\}$$

有 $T(\overline{B(0,1)})\subseteq\mathcal{K}$ 具有紧的闭包. i.e. $\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 为 $\mathcal{K}$ 中紧集. 记 $\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 中的紧算子全体. 记 $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})=\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

命题2.4.2（紧算子的性质） (a) $\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

(b) $\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为一个向量空间，且若 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 且 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$，满足

$$\|T_n-T\|\to 0,$$

则 $T\in\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

(c) 若 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$，$T\in\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$，则 $TA, BT\in\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$

证明：Step 1（(a)的证明）设 $T\in\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$，由 $\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 在 $\mathcal{K}$ 中紧，知 $\exists\, C>0$, s.t.

$$\overline{T(\overline{B(0,1)})}\subseteq B_{\mathcal{K}}(0,C)$$

从而，对 $\forall\, h\in\mathcal{H}$，满足 $\|h\|\le 1$，有

$$\|T(h)\|\le C \Rightarrow T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}).$$

Step 2（(b)的证明）设 $A,B\in\mathcal{B}_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$，且 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$，则由

$$\overline{(\alpha A+\beta B)(\overline{B(0,1)})}\overset{(*)}{\subseteq}\alpha\overline{A(\overline{B(0,1)})}+\beta\overline{B(\overline{B(0,1)})}.$$

$\downarrow$ 由 $(\alpha A+\beta B)(\overline{B(0,1)})\subset\alpha\overline{A(\overline{B(0,1)})}+\beta\overline{B(\overline{B(0,1)})}\overset{\text{取闭包}}{\Rightarrow}\subseteq$ ✓

另一方面，对 $\forall\, k\in\alpha\overline{A(\overline{B(0,1)})}+\beta\overline{B(\overline{B(0,1)})}$，知 $\exists\, k_1\in\overline{A(\overline{B(0,1)})}$，$k_2\in\overline{B(\overline{B(0,1)})}$, s.t.

$$k=\alpha k_1+\beta k_2.$$

又由 $k_1\in\overline{A(\overline{B(0,1)})}$，知 $\exists\{\tilde{k}_n\}_n\subseteq A(\overline{B(0,1)})$, s.t.

$$\tilde{k}_n\longrightarrow k_1 \text{ in } \mathcal{K}.$$

同理，由 $k_2\in\overline{B(\overline{B(0,1)})}$，知 $\exists\{\tilde{\tilde{k}}_n\}_n\subseteq B(\overline{B(0,1)})$, s.t.

$$\tilde{\tilde{k}}_n\longrightarrow k_2 \text{ in } \mathcal{K}.$$

综上，$\alpha\tilde{k}_n+\beta\tilde{\tilde{k}}_n\subseteq\alpha A(\overline{B(0,1)})+\beta B(\overline{B(0,1)})$. 且

$$\alpha\tilde{k}_n+\beta\tilde{\tilde{k}}_n\longrightarrow k$$

$\Rightarrow k\in\overline{(\alpha A+\beta B)(\overline{B(0,1)})}$ $\Rightarrow$ "$\supseteq$"成立.

由A、B为紧算子，~~知~~ 知 $\overline{\alpha A(\overline{B(0,1)})}$ 与 $\overline{\beta B(\overline{B(0,1)})}$，又由赋范空间中两紧集之和仍为紧集（拓扑知识，暂时承认）知 $\overline{\alpha A(\overline{B(0,1)})}+\overline{\beta B(\overline{B(0,1)})}$ 紧.

所以 $\alpha A+\beta B$ 为紧算子.

下说明 $B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 依算子范数闭. 设 $\{T_n\}_n\subseteq B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $T\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, s.t.

$$\|T_n-T\|\to 0, \quad \text{as } n\to\infty.$$

则：

设 $\overline{B(0,1)}$ 为 $\mathcal{H}$ 中单位闭球. 要证 $\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ ~~闭~~紧，只需证如下两个结论.

<u>结论1</u>：$T(\overline{B(0,1)})$ 完全有界, i.e. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$有限个点 $k_1,\dots,k_m\in T(\overline{B(0,1)})$, s.t.

m 可与 ε 有关.

$$T(\overline{B(0,1)})\subset\bigcup_{j=1}^{m}B(k_j,\varepsilon).$$

<u>结论2</u>. 若 $T(\overline{B(0,1)})$ 完全有界，则 $\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 也完全有界.

<u>结论3</u>. 若 $\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 完全有界，则 $\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 紧.

结论1的证明: 对 $\forall \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$, 知 $\exists N$, s.t. 对 $\forall n\geq N$ 时,

$$\|T-T_n\|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad (*)$$

而对 T_n, 作开球族 $\mathcal{B}:=\{B(T_n h;\frac{\varepsilon}{3}),\ h\in\overline{B(0,1)}\}$ 易知

$$\overline{T_n(\overline{B(0,1)})}\subseteq\bigcup_{h\in\overline{B(0,1)}}B(T_n h,\frac{\varepsilon}{3}).$$

易 $\mathcal{B}$ 为 $\overline{T_n(\overline{B(0,1)})}$ 的一个开覆盖, 由 T_n 紧, 知 $\exists$ 有限子覆盖. $\{B(T_n h_j;\frac{\varepsilon}{3});\ j=1,\dots,m\}$.

从而, 对 $\forall h\in\overline{B(0,1)}$, $\exists h_j\in\overline{B(0,1)}$, s.t.

$$\|T_n h-T_n h_j\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

从而

$$\begin{aligned}\|Th-Th_j\|&\leq\|Th-T_n h\|+\|T_n h-T_n h_j\|+\|T_n h_j-Th_j\|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

$\Rightarrow T(\overline{B(0,1)})\subseteq\bigcup\limits_{j=1}^{m}B(Th_j;\varepsilon)$ 从而 $T(\overline{B(0,1)})$ 完全有界

结论2的证明: 由 $T(\overline{B(0,1)})$ 完全有界, 故对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 有限个点 $k_1\dots k_m\in\overline{B(0,1)}$, s.t.

$$T(\overline{B(0,1)})\subset\bigcup_{j=1}^{m}B(k_j,\frac{\varepsilon}{2}).$$

而对 $\forall k\in\overline{T(\overline{B(0,1)})}$, 知 $\exists\tilde{k}\in T(\overline{B(0,1)})$ s.t. $\|k-\tilde{k}\|<\frac{\varepsilon}{2}$.

从而 $\overline{T(\overline{B(0,1)})}\subset\bigcup\limits_{j=1}^{m}B(k_j,\varepsilon)$

$\Rightarrow\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 也完全有界

练习3的证明 若 $\overline{T(B(0,1))}$ 完全有界，则对其中 $\forall$ 序列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$，(不失一般性，设 k_n 互不相同)，

只需证其 $\exists$ 收敛子列。为此，对 $\forall \varepsilon>0$，由 $\overline{T(B(0,1))}$ $\exists$ 有限开覆盖 $B(k_{\varepsilon,j},\varepsilon)$，s.t.

$$\begin{cases} k_{\varepsilon,j}\in\overline{T(B(0,1))} \\ \overline{T(B(0,1))}\subset\bigcup_{j=1}^{m}B(k_{\varepsilon,j},\varepsilon). \end{cases}$$

从而 $\exists j_0\in\{1,\dots,m\}$，s.t. 序列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中 $\exists$ 无穷个点属于 $B(k_{\varepsilon,j_0},\varepsilon)$。由 ε 的任意性，

可得收敛子列。

#

Step3. ~~不失一般性，设~~先证 $BT\in B_0(\mathcal{H},k)$.

断言：设 K 为 Hausdorff 空间中紧集，f 为连续映射，则 $f(K)$ 也为紧集（点集拓扑中结论）

参见熊金城《点集拓扑讲义》

从而，对 $\mathcal{H}$ 中 $\forall$ 单位闭球 $\overline{B(0,1)}$，由 T 紧，知 $\overline{T(B(0,1))}$ 为紧集，从而

$$\overline{BT(B(0,1))}=B\left(\overline{T(B(0,1))}\right)\ \underset{\text{断言}}{} \text{紧}$$

下证 $TA\in B_0(\mathcal{H},k)$。由对 $\mathcal{H}$ 中单位闭球 $\overline{B(0,1)}$，知 $A(\overline{B(0,1)})\subseteq\overline{B(0,\|A\|)}=\|A\|\,\overline{B(0,1)}$.

又由 T 为紧算子，知 $TA(\overline{B(0,1)})\subseteq\|A\|\,T(\overline{B(0,1)})$。而后者紧，知 $TA(\overline{B(0,1)})$ 也紧。

从而 $TA\in B_0(\mathcal{H},k)$. ↓紧集的闭子集也为紧集↑

#

定义2.4.3 (有限秩算子) 设 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ 有界 为线性算子, 称T为有限秩算子, 若其值域空间 $\operatorname{ran}(T)$ 的维数有限. 记 $B_{00}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 的有限秩算子全体, 记 $B_{00}(\mathcal{H}):=B_{00}(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

命题2.4.4 (有限秩算子的性质)

(a) $B_{00}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为一个向量空间;

(b) $B_{00}(\mathcal{H},\mathcal{K})\subseteq B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

证明: (a)的证明: $\dim(\operatorname{Ran}(A+B))\le \dim(\operatorname{Ran}(A))+\dim(\operatorname{Ran}(B))$.

(b) 设 $\overline{B(0,1)}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的单位闭球, 由T有界知

$\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 为有界闭集.

又由 $\dim(T)<\infty$ $\Rightarrow$ 上述集合为紧集.

#

定理2.4.5 (紧算子的刻画) 设 $T\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, TFAE.

(a) T为紧算子, (b) T^*为紧算子, (c) $\exists$有限秩算子列 $\{T_n\}_n$, s.t. $\|T_n-T\|\to 0$, as $n\to\infty$.

证明:

$$\begin{tikzcd} & (a) \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ (b) \arrow[ur, Rightarrow] & & (c) \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Step1 ((c)$\Rightarrow$(a)) 设 $T\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 若$\exists$有限秩算子列 $\{T_n\}_n$ s.t.

$\|T_n-T\|\to 0$, as $n\to\infty$.

则由 $B_{00}(\mathcal{H},\mathcal{K})\subseteq B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 且命题2.4.2(b), 知 $T\in B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$。

Step2 ((a)$\Rightarrow$(c)) 因设 $\overline{B(0,1)}$ 为 $\mathcal{H}$ 中单位闭球, 由T为紧算子, 知

$\overline{T(\overline{B(0,1)})}$ 为紧集. $\Longrightarrow$ $T(\overline{B(0,1)})$ 完全有界.

$\Rightarrow$ 对$\forall\varepsilon>0$, $\exists$有限个点 $\{k_j\}_{j=1}^m\subseteq T(\overline{B(0,1)})$ $\Rightarrow$ s.t. $T(\overline{B(0,1)})\subset\bigcup_{j=1}^m B(k_j,\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $T(\overline{B(0,1)})$ 可分, i.e. 存在可数稠密子集.

令 P 为 $\mathcal{H}$ 到 $\overline{\mathrm{span}\{k_1,\cdots,k_m\}}$ 上的正交投影, 并定义

$$T_\varepsilon := P\circ T.$$

易知 $\dim(T_\varepsilon)<\infty$. 从而 T_ε 为有限秩算子, 则对 $\forall$ $h\in\mathcal{H}$, 满足 $\|h\|\le 1$,

由 $T(\overline{B(0,1)})\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}B(k_j,\varepsilon)$, 知 $\exists\, j_0\in\{1,\cdots,m\}$, s.t.

$$\|Th-k_j\|<\varepsilon.$$

从而,

$$\begin{aligned}\|Th-T_\varepsilon h\| &\le \|Th-k_j\|+\|k_j-T_\varepsilon h\|\\ &=\|Th-k_j\|+\|P(k_j-Th)\|\\ &\le 2\|Th-k_j\|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\|T-T_\varepsilon\|<2\varepsilon$. 从而, 令 $\varepsilon\to 0$, 得 T 为一列有限秩算子的极限.

Step 3 ((c)$\Rightarrow$(b))

断言: 设 $T\in B_{00}(\mathcal{H},K)$, 则 $T^*\in B_{00}(K,\mathcal{H})$.

由 $T\in B_{00}(\mathcal{H},K)$, 知 $\dim(\mathrm{Ran}\,T)<\infty$ (不妨设为 n). 令 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $T(\mathcal{H})$ 的一组正交基.

则对 $\forall h\in\mathcal{H}$,

$$Th=\sum_{j=1}^{n}\langle Th,e_j\rangle e_j=\sum_{j=1}^{n}\langle h,T^*e_j\rangle e_j$$

令 $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\}$ 定义如下,

$$\varepsilon_j=T^*e_j.$$

知对 $\forall k\in\mathcal{H}$,

~~(Th, k)~~ $\langle Th, k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle h, T^*e_j\rangle\langle e_j, k\rangle$

$$= \langle h, \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, k\rangle \varepsilon_j\rangle.$$

$$= \langle h, T^*k\rangle.$$

$\Rightarrow T^*k = \sum_{j=1}^{n}\langle k, e_j\rangle \varepsilon_j$. $\Rightarrow \dim(T^*\mathcal{H}) = n$. $\Rightarrow T^*$ 也为有限秩算子.

则对 $\forall \{T_n\}_n \subseteq B_{00}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 满足 $\|T_n - T\| \to 0$, 知

$\{T_n^*\}_n \subseteq B_{00}(\mathcal{K},\mathcal{H})$, 满足 $\|T_n^* - T^*\| \to 0 \Rightarrow T^* \in B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$

$\Rightarrow$ (a)成立.

Step 4 (b)$\Rightarrow$(a). 若 T^* 紧, 则利用(c), $T = T^{**}$, 从而 ~~且一致有界~~ (a)$\Rightarrow$(b) $\Rightarrow T$ 紧. #

推论 2.4.12 (紧算子的性质)

(a) 设 $T \in B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 为紧算子, 则 $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ 为可分空间.

(b) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ 的一个正交基, 设 P_n 为 $\mathcal{H}$ 到 $\vee\{e_1, \dots, e_n\}$ 的正交投影, 则

$$\|P_nT - T\| \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

证明: Step 1 ((a)的证明). 设 $T \in B_0(\mathcal{H},\mathcal{K})$. 知 $\overline{T(B(0,1))}$ 为 $\mathcal{K}$ 上的紧集, 从而 $\overline{T(B(0,1))}$ 完全有界. $\Rightarrow \overline{T(B(0,1))}$ 可分. $\Rightarrow \overline{\mathrm{Ran}(T)}$ 也可分.

Step 2 ((b)的证明). 由 $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ 可分, 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ 的一个正交基, P_n 为 $\mathcal{H}$ 到 $\vee\{e_1 \cdots e_n\}$ 上的正交投影. 则 ~~对~~ $\forall$ 由 $\overline{T(B(0,1))}$ 完全有界, 知对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{k_j = Th_j\}_{j=1}^{m} \subseteq T(B(0,1))$, s.t. 对 $\forall h \in B(0,1)$, 有 $\|Th_j - Th\| < \frac{\varepsilon}{3}$. ~~从而~~ ⊛

另一方面，对上述 h_j，取 n 充分大，s.t.

$$\|P_nTh_j-Th_j\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

则. $\|Th-T_nh\|\le\|Th-Th_j\|+\|Th_j-T_nh_j\|+\|T_nh_j-T_nh\|$

$$\le\|Th-Th_j\|+\|Th_j-T_nh_j\|+\|Th_j-Th\|$$

$$<\varepsilon.$$

从而由 $\|h\|\le1$ 的任意性，$\Rightarrow$ $\|T-T_n\|\to0$, as $n\to\infty$.

#

命题2.4.7（紧算子的刻画）对角形 设 $\mathcal{H}$ 为一个可分Hilbert空间，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个正交基。设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{F}$ 满足 $M:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\alpha_n|\}<\infty$. 若线性算子 $A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 满足，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$Ae_n=\alpha_ne_n.$$

则

(i) A 可~~延拓~~为 $\mathcal{H}$ 上的一个有界线性算子，满足 $\|A\|=M$.

(ii). A 为紧算子 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

证明：Step 1（(i)的证明）对 $\forall h\in\mathcal{H}$，知

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle e_n,$$

从而 $A(h)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle A(e_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\langle h,e_n\rangle e_n$. 从而

$$\|A(h)\|_{\mathcal{H}}^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2|\langle h,e_n\rangle|\le M^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

$\Rightarrow$ A 为有界算子且. $\|A\|\le M$.

另一方面，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $n\in\mathbb{N}$, s.t. $|\alpha_n|>M-\varepsilon$. 从而，知

$\|A\|\ge\|Ae_n\|=|\alpha_n|>M-\varepsilon$. 由 ε 的任意性 $\Rightarrow$ $\|A\|\ge M$.

综上 $\|A\|=M$.

Step2 (iii)的证明). "⇐"的证明：令 P_n 为 $\mathcal{H}$ 到 $\vee\{e_1\cdots e_n\}$ 的正交投影，易知 P_nT 为有限秩算子. 令

$$A_n := A - AP_n$$

知对

$$A_n e_j = \begin{cases} 0 & j\le n \\ \alpha_j e_j & j>n \end{cases}$$

$\Rightarrow \|A_n\| = \sup\{|\alpha_j| : j>n\}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|=0. \Rightarrow$ A 为紧算子.

"⇒" 若 A 为紧算子，令 P_n 为如上定义的正交投影，知.

$$\|A-AP_n\|\to 0.$$

而 $\|A-AP_n\| = \sup\limits_{j>n}\{|\alpha_j|\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=0$.

#

定义 ~~命题2.4.8~~ (特征值与特征向量) 设 $A\in B(\mathcal{H})$, $\alpha\in\mathbb{F}$. 称 α 为 A 的特征值，若 $\ker(A-\alpha)\ne\{0\}$.

若 $0\ne h\in\ker(A-\alpha)$，则 h 称作 α 的特征向量，i.e. $Ah=\alpha h$. 记 $\sigma_p(A)$ 为 A 的全体特征值.

例. 设 A 为命题2.4.7中对角算子，满足对 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$Ae_n=\alpha_n e_n.$$

则 ① $\sigma_p(A)=\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\supset$ ✓ $\subset$ 设 $\alpha\in\sigma_p(A)$, $\Rightarrow \exists\, h\ne 0$, s.t. $Ah=\alpha h$. 则由 $h=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle e_n$ 知.

$$Ah=\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle\alpha_n e_n = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle e_n ; \ (*)$$

$\Rightarrow$ α 只能取 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中某一个

② 设 $\alpha\in\sigma_p(A)$，令 $J_\alpha:=\{j\in\mathbb{N}: \alpha_j=\alpha\}$. 则 h 为 α 的特征向量 $\Leftrightarrow h\in\bigvee(e_j: j\in J_\alpha)$.

$\Downarrow \Leftarrow \checkmark$. $\Rightarrow$ 设 h 为 α 的特征向量. 利用(※)式,

$$Ah=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle\alpha_n e_n}_{(**)}=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\langle h,e_n\rangle e_n.$$

$\Rightarrow \alpha_n=\alpha$. 从而 在(**)中非0项仅有满足 $\alpha_n=\alpha$ 的 e_n.

$\Rightarrow h\in\bigvee(e_j: j\in J_\alpha)$.

#

命题2.4.9 (特征空间) 设 $T\in B_0(\mathcal{H})$, $\lambda\in\sigma_p(T)$, 且 $\lambda\neq 0$. 则此时特征空间 $\ker(T-\lambda)$ 为有限维.

证明: 反证, 若 $\ker(T-\lambda)$ 为无穷维. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\ker(T-\lambda)$ 的一个可数正交集. 由于 T 为紧算子, 且 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\overline{B(0,1)}$, 知 $\{T(e_n)\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\overline{T(B(0,1))}$. 从而由 $\overline{T(B(0,1))}$ 紧, 知 $\exists$ 子列 $\{e_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $\{Te_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛. 然而当 $n_k\neq n_j$ 时,

$$\|Te_{n_k}-Te_{n_j}\|^2=\|\lambda e_{n_k}-\lambda e_{n_j}\|^2=2|\lambda|^2>0.$$

矛盾与收敛矛盾. 因此 $\ker(T-\lambda)$ 为有限维.

#

命题2.4.10 (紧算子的特征值) 设 T 为 $\mathcal{H}$ 上的紧算子, $\lambda\neq 0$, 且

$$\inf\{\|(T-\lambda)h\|: \|h\|=1\}=0 \quad (*)$$

则 $\lambda\in\sigma_p(T)$.

证明: 由(*)式, 知 $\exists\{h_n\}_n\subseteq\mathcal{H}$ 满足 $\|h_n\|=1$, s.t. $\|(T-\lambda)h_n\|\to 0$. 又由 T 为紧算子, 知 $\exists f\in\mathcal{H}$, 以及子列 $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, s.t. $\|Th_{n_k}-f\|\to 0$, as $k\to\infty$. 而由

$$h_{n_k}=\lambda^{-1}[(\lambda-T)h_{n_k}+Th_{n_k}]\longrightarrow\frac{f}{\lambda}.$$

知

$1=\|\lambda^{-1}f\|=|\lambda|^{-1}\|f\|$. ⇒ 因 $f\neq 0$. ~~从而~~ 又由 T 有界，知

$Th_{n_k}\to\lambda^{-1}Tf$,

由此，及 $Th_{n_k}\to f$ ⇒ $\lambda^{-1}Tf=f$ ⇒ $Tf=\lambda f$. ⇒ $\lambda\in\ker(T-\lambda)$ ~~而~~ 且 $f\neq 0$.

从而. ~~$f\in\ker(T-\lambda)$~~, $\lambda\in\sigma_p(T)$.

推论 2.4.11 (谱集). 设 T 为 $\mathcal{H}$ 上的一个紧算子. $\lambda\neq 0$, $\lambda\notin\sigma_p(T)$, $\bar{\lambda}\notin\sigma_p(T^*)$. 则 $\mathrm{Ran}(T-\lambda)=\mathcal{H}$,

且 $(T-\lambda)^{-1}$ 为 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子.

证明: 由 $\lambda\notin\sigma_p(T)$, 应用~~推论~~命题2.4.10 知 $\exists c>0$ s.t. 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 有

$$\|(T-\lambda)h\|\geq c\|h\|. \quad (*)$$

~~从而~~ 先证 $\mathrm{Ran}(T-\lambda)=\mathcal{H}$. 为此, 只需说明 (i). $\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ 闭, (ii). $[\mathrm{Ran}(T-\lambda)]^{\perp}=\{0\}$.

事实上, 对于(i), 设 $f\in\overline{\mathrm{Ran}(T-\lambda)}$, 知 $\exists\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{H}$, s.t. $(T-\lambda)h_n\to f$. 从而

$$\|h_n-h_m\|\overset{(*)}{\leq}\frac{1}{c}\|(T-\lambda)h_n-(T-\lambda)h_m\|\to 0 \Rightarrow \{h_n\}_{n=1}^{\infty}\text{ 为 }\mathcal{H}\text{ 中 Cauchy 列}.$$

从而由 $\mathcal{H}$ 完备, 知 $\exists h\in\mathcal{H}$, s.t. $h_n\to h$. 因此,

$$(T-\lambda)h=\lim_{n\to\infty}(T-\lambda)h_n=f.$$

⇒ $f\in\mathrm{Ran}(T-\lambda)$. ⇒ (i) 成立.

对于(ii). 由 ~~ker~~ $[\mathrm{Ran}(T-\lambda)]^{\perp}=\ker(T^*-\bar{\lambda})\overset{\bar{\lambda}\notin\sigma_p(T^*)}{=}\{0\}$ ⇒ (ii) 成立.

综合(i)与(ii), 得 $\mathrm{Ran}(T-\lambda)=\mathcal{H}$.

下证 ~~由~~ $(T-\lambda)^{-1}$ 存 $\in B(\mathcal{H})$. 对 $\forall f\in\mathcal{H}$, 令 Af 为满足 $(T-\lambda)h=f$ 而唯一而 h.

唯一性由前面讨论知

从而, 对 $\forall f\in\mathcal{H}$,

$$(T-\lambda)Af=f.$$

因此，由③式得，对 $\forall f\in\mathcal{H}$，

$$c\|Af\| \leq \|(T-\lambda)Af\| = \|f\|.$$

$$\Rightarrow \|Af\| \leq \frac{1}{c}\|f\|. \Rightarrow A\in B(\mathcal{H}).$$

又由 $(T-\lambda)A(T-\lambda)h=(T-\lambda)h. \Rightarrow (T-\lambda)[A(T-\lambda)h-h]=0.$ 即 $\lambda\notin\sigma_p(T)$，故

$$A(T-\lambda)h=h \Rightarrow A(T-\lambda)=(T-\lambda)A=I \Rightarrow A=(T-\lambda)^{-1}.$$

#