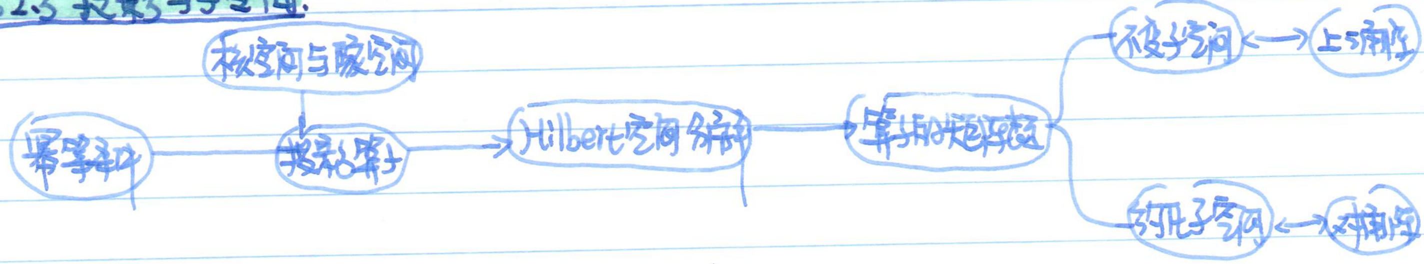
§2.3 投影与子空间



定义2.3.1 (幂等与投影算子) 设 $E\in B(\mathcal{H})$.

(i) (幂等). 称E为幂等算子, 若 $E^2=E$.

(ii) (投影). 设P为幂等算子, 称E为投影算子, 若 $\ker P=(\operatorname{ran} P)^{\perp}$.

命题2.3.2 (幂等算子的性质)

(a) E为幂等算子 $\Longleftrightarrow$ $I-E$ 也为幂等算子.

(b) 设E为幂等算子, 则 $\operatorname{ran} E=\ker(I-E)$, $\ker E=\operatorname{ran}(I-E)$ 且 $\operatorname{ran}(E)$, $\ker E$ 为 $\mathcal{H}$ 的闭线性子空间

(c). 设 $M=\operatorname{ran} E$, $N=\ker E$, 则 $\begin{cases} M\cap N=\{0\} \\ M+N=\mathcal{H}. \end{cases}$

证明: Step1 ((a)的证明). 注意到

$$(I-E)^2=I-2E+E^2$$

则 E为幂等算子 $\Longleftrightarrow E^2=E \Longleftrightarrow (I-E)^2=I-2E+E=I-E \Longleftrightarrow I-E$ 为幂等算子.

Step2 ((b)的证明). 先证 $\operatorname{ran} E=\ker(I-E)$. 设(*)

√ 先证 $\ker(I-E)\subseteq \operatorname{ran} E$. 对 $\forall h\in\ker(I-E)$, 则有

$$0=(I-E)h=h-Eh \Longleftrightarrow h=Eh \Longrightarrow h\in\operatorname{ran}(E).$$

反过来, 再证 $\operatorname{ran} E\subseteq\ker(I-E)$. 对 $\forall h\in\operatorname{ran} E$, 知 $\exists g\in\mathcal{H}$, s.t. $h=Eg$, 从而 $(I-E)h=h-Eh=h-E^2g=h-h=0$.

$\Longrightarrow h\in\ker(I-E)$.

假设(a)成立. 令 $\tilde{E} := I-E$, 由(a)知 $\tilde{E}$ 也为幂等算子, 故

$$\operatorname{ran}\tilde{E} = \operatorname{ran}(I-E) = \ker(I-\tilde{E}) = \ker E. \text{ 即}$$

$$\ker E = \operatorname{ran}(I-E).$$

又由 E 为有界线性算子, 知 $\ker E$, $\underset{\operatorname{ran}(E)}{\underset{\parallel}{\ker(I-E)}}$ 为闭线性子空间. 从而 (b)成立.

Step3 ((c)的证明) 先证 $M\cap N=\{0\}$. 事实上, 对 $\forall h\in M\cap N$, 知 $Eh=0$, 且 $\exists g\in \mathcal{H}$, s.t.

$h=Eg$, 又由 E 幂等, 知 $h=Eg=E^2g=Eh=0$. $\Rightarrow M\cap N=\{0\}$.

下证 $M+N=\mathcal{H}$. 一方面, 显然有 $M+N\subseteq\mathcal{H}$. 另一方面, 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, 作分解.

$$h=(h-Eh)+Eh.$$

易知 $(h-Eh)\in M=\ker E$, $Eh\in\operatorname{ran}E$.

命题2.3.3 (投影算子的刻画). 设 E 为 $\mathcal{H}$ 上的幂等算子. 则如下结论等价.

(a). E 为投影算子　　(b) E 为 $\mathcal{H}$ 到 $\operatorname{ran}E$ 上的正交投影.

(c) $\|E\|=1$.　　(d) E 为自伴算子

(e) E 为正规算子,　　(f) 对 $\forall h\in\mathcal{H}$, $\langle Eh,h\rangle\geq 0$.

证明:

$$\begin{tikzcd}
& (d) \arrow[r, Rightarrow] & (e) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (a) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
(f) \arrow[ur, Rightarrow] & (b) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (c) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Step1 ((a)$\Rightarrow$(b)) 令 $M:=\operatorname{ran}E$, $P:=P_M$ 为 $\mathcal{H}$ 到 M 上的正交投影. 则对 $\forall h\in\mathcal{H}$,

知 $(h-Ph)\in M^{\perp}=\operatorname{ran}(I-E)=\ker E$.

从而 $h-Eh\in\ker E \Rightarrow (h-Eh)\in M^{\perp}$. 由正交投影的唯一性, 知

知 $Eh=Ph$. 从而 E 为 $\mathcal{H}$ 到 M 上的正交投影.

Step2 ((b)⇒(c)). 设 E 为 $\mathcal{H}$ 到 $\operatorname{ran}E$ 上的正交投影，易知 $\|E\|\leq 1$. 另一方面，对 $\forall h\in\operatorname{ran}E$，有

$$Eh=h. \text{ 知}$$

$$\|E\|=\sup_{h\in E}\frac{\|Eh\|}{\|h\|}\geq\sup_{h\in\operatorname{ran}E}\frac{\|Eh\|}{\|h\|}=1.$$

综上，$\|E\|=1$.

Step3 ((c)⇒(a)) 先证 $(\ker E)^{\perp}=(\operatorname{ran}E)^{\perp}$. ~~事实上，对 $\forall h\in\ker E$~~，由 $\ker E$ 与 $\operatorname{ran}E$ 的闭性，知只需证

$(\ker E)^{\perp}\subseteq\operatorname{ran}E$. 事实上，对 $\forall h\in(\ker E)^{\perp}$，由 $\operatorname{ran}(I-E)=\ker E$，知.

$$h-Eh\in\ker E,$$

从而

$$0=\langle h-Eh,h\rangle=\|h\|^2-\langle Eh,h\rangle$$

因此 $\|h\|^2=\langle Eh,h\rangle\leq\|Eh\|\|h\|\leq\|h\|^2$. 即 $\langle Eh,h\rangle=\|h\|^2=\|Eh\|^2$

进一步，又由 $h\in(\ker E)^{\perp}$，知.

$$\|h-Eh\|^2\overset{\text{极化恒等式}}{=}\|h\|^2-2\operatorname{Re}\langle Eh,h\rangle+\|Eh\|^2=0$$

$$\Rightarrow h\in\ker(I-E)=\operatorname{ran}E. \Rightarrow(\ker E)^{\perp}\subseteq\operatorname{ran}E.$$

另一方面，对 $\forall g\in\operatorname{ran}E$，利用正交分解.

$$g=g_1+g_2$$

满足 $g_1\in\ker E$，$g_2\in(\ker E)^{\perp}$.

知 $g=Eg=Eg_2=g_2\Rightarrow g\in(\ker E)^{\perp}$ 从而 $\operatorname{ran}E\subseteq(\ker E)^{\perp}$. ⇒ E 为投影算子.
#

Step4 ((b)⇒(f)) 设 $h\in\mathcal{H}$，记

$$h=h_1+h_2,$$

其中 $h_1\in \operatorname{ran}E$, $h_2\in \cancel{\ker E}\ (\operatorname{ran}E)^{\perp}=\ker E$. 因此,

$$\langle Eh,h\rangle=\langle E(h_1+h_2),h_1+h_2\rangle=\langle Eh_1,h_1\rangle\overset{h_1\in\operatorname{ran}E}{=}\langle h_1,h_1\rangle\geq 0.$$

Step5 ((f)⇒(a)) 为证 E 为投影算子, 只需说明对 $\forall h_1\in\operatorname{ran}E$, $h_2\in\ker E$, 有

$$\langle h_1,h_2\rangle=0. \quad (*)$$

$(*)\Rightarrow(\ker E)^{\perp}=\operatorname{ran}E.$

下证 $(*)$. 应用 (f), 知

$$0\leq\langle E(h_1+h_2),h_1+h_2\rangle=\langle Eh_1,h_1\rangle+\langle Eh_1,h_2\rangle+\underbrace{\langle Eh_2,h_1\rangle}_{\overset{h_2\in\ker E}{=}0}+\underbrace{\langle Eh_2,h_2\rangle}_{h_2\in\ker E}$$

$$\overset{h_1\in\operatorname{ran}E}{=}\langle h_1,h_1\rangle+\langle h_1,h_2\rangle \cancel{+\langle h_2,h_2\rangle}.$$

$\Rightarrow -\|h_1\|^2\leq\langle h_1,h_2\rangle$ 对 $\forall\ h_1\in\operatorname{ran}E$, $h_2\in\ker E$, 成立.

若 $(*)$ 不成立, 记 $\langle h_1,h_2\rangle=\alpha\neq0$, 可将 h_2 替换成

$$k_2=-2\alpha^{-1}\|h_1\|^2h_2\in\ker E,$$

得

$$-\|h_1\|^2\leq-2\|h_1\|^2\Rightarrow\|h_1\|\leq0\Rightarrow h_1=0.$$ 矛盾. 因此 $(*)$ 式成立.

Step6 ((a)⇒(d)) 设 E 为投影算子, 对 $\forall h,g\in\mathcal{H}$, 作分解

$$h=h_1+h_2\quad h_2\in\ker E,\ h_1\in\operatorname{ran}E$$

$$g=g_1+g_2,\quad g_1\in\operatorname{ran}E,\ g_2\in\ker E.$$

则 $\langle Eh,g\rangle=\langle Eh_1,g_1\rangle=\langle h_1,g_1\rangle$

$\langle E^*h,g\rangle=\langle h,Eg\rangle=\langle h_1,g_1\rangle$

$\Rightarrow E=E^*.\Rightarrow E$ 自伴.

Step 7 ((d)⇒(e)) ✓

Step 8 ((e)⇒~~(c)~~(a)) 若 E 为正规算子，则对 $\forall h\in\mathcal{H}$，$\|Eh\|=\|E^*h\|$. 从而

$\ker E=\ker E^*$.

而由共轭算子的性质. $\ker E^*=(\operatorname{ran}E)^\perp=\ker E$. ⇒. E 为投影算子.

命题2.3.4 (投影算子的直和分解) 设 P 为投影算子，$M:=\operatorname{ran}P$，$N:=\ker P$. 则

(i) M, N 为 Hilbert 空间.

(ii) $\mathcal{H}=M\oplus N$.

证明:. (利用元素的正交分解 + Hilbert 空间直和定义).

定义2.3.5 (正交直和与正交差). 设 $\{M_i\}_i$ 为 $\mathcal{H}$ 中一族两两相互成正交的子空间. 则其正交直和

$\bigoplus_i M_i$ 定义为 $\bigoplus_i M_i:=\bigvee_i M_i:=\overline{\operatorname{span}(M_1\cdots M_i)}$.

设 M 与 N 为 $\mathcal{H}$ 中的两个闭线性子空间，则 M 与 N 的正交差定义为

$$M\ominus N:=M\cap N^\perp.$$

命题2.3.6 (正交直和与直和) 设 $M, N\le\mathcal{H}$ 为两个闭线性子空间. 且 $M\perp N$. 则

$$M\oplus N=M+N.$$

证明: 对 $\forall$ ~~$h\in M, g\in N$~~ $h\oplus g\in M\oplus N$，其中 $h\in M, g\in N$. 作映射.

$$U: M\oplus N\longrightarrow M+N$$
$$h\oplus g\longmapsto U(h\oplus g)=h+g.$$

知 U 满足. 对 $\forall\ h_1\oplus g_1,\ h_2\oplus g_2$.

$$\langle U(h_1\oplus g_1), U(h_2\oplus g_2)\rangle=\langle h_1+g_1, h_2+g_2\rangle\overset{M\perp N}{=}\langle h_1,h_2\rangle+\langle g_1,g_2\rangle$$

$= \langle h_1 \oplus g_1, h_2 \oplus g_2 \rangle$. 知 U 为同构态.

(补充)

又由 M、N 闭, $\Rightarrow$ $\overline{M+N}$ 也闭. $\Rightarrow$ $M+N$ 也为 Hilbert 空间. 从而

$$M \oplus N = M + N. \quad (\text{同构})$$

#

定义 2.3.7 (不变与约化子空间) 设 $A \in B(\mathcal{H})$, $M \leq \mathcal{H}$ 为闭线性子空间, ~~称 M 为 A 的~~

(i) (不变子空间) 称 M 为 A 的不变子空间, 若对 $\forall h \in M$, 有 $Ah \in M$. i.e. $AM \subseteq M$.

(ii) (约化子空间) 称 M 为 A 的约化子空间, 若 $AM \subseteq M$

$$AM^{\perp} \subseteq M^{\perp}$$

设 $M \leq \mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个闭子空间. 易知 $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. 则对 $\forall A \in B(\mathcal{H})$. 由 M、$M^{\perp}$ 为闭线性子空间. 令 P_M, $P_{M^{\perp}}$ 分别为 $\mathcal{H}$ 到 M 与 $M^{\perp}$ 上的正交投影. 因此, 对 $\forall\, m \in M$, $w \in M^{\perp}$.

定义 $W: M \longrightarrow M$

$$m \longmapsto W(m) := P_{M}[A(m \oplus 0)] \Rightarrow W \in B(M).$$

$X: M^{\perp} \longrightarrow M$

$$w \longmapsto X(w) := P_M[A(0 \oplus w)] \Rightarrow X \in B(M^{\perp}, M).$$

$Y: M \longrightarrow M^{\perp}$

$$m \longmapsto Y(m) := P_{M^{\perp}}[A(m \oplus 0)] \Rightarrow Y \in B(M, M^{\perp}).$$

$Z: M^{\perp} \longrightarrow M^{\perp}$

$$w \longmapsto Z(w) := P_{M^{\perp}}[A(0 \oplus w)] \Rightarrow Z \in B(M^{\perp}, M^{\perp}).$$

从而引入算子矩阵, 对 $\forall\ h = m \oplus w$

$$\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(m) + X(w) \\ Y(m) + Z(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M[A(m\oplus 0)] + P_M[A(0 \oplus w)] \\ P_{M^{\perp}}[A(m \oplus 0)] + P_{M^{\perp}}[A(0 \oplus w)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_M[A(h)] \\ P_{M^{\perp}}[A(h)] \end{bmatrix} = A(h).$$

因此，得

$$A=\begin{bmatrix} W, & X \\ Y, & Z \end{bmatrix}. \quad (*)$$ ~~称此式为A的~~矩阵表示

命题 2.3.8（不变子空间的刻画）设 $A\in B(\mathcal{H})$，$M\leq\mathcal{H}$ 为闭子空间，$P=P_M$ 为 $\mathcal{H}$ 到 M 上的正交投影，则 TFAE.

(a) M 为 A 的不变子空间.

(b) $PAP=AP$

(c). 在 A 的算子矩阵表示中，$Y=0$. 即为上三角阵.

证明：~~(a)⟹(b)~~ Step 1 (a)⟹(b) 设 M 为 A 的不变子空间. 则对 $\forall h\in\mathcal{H}$，知 $Ph\in M$. 从而

$APh\in M \Rightarrow PAPh=APh. \Rightarrow PAP=AP. \Rightarrow$ (b) 成立.

Step 2 (b)⟹(a) 设 $PAP=AP$. 由 P 为 $\mathcal{H}\to M$ 上的正交投影，~~知~~作算子矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$ 其中 I 为 M 上的单位矩阵

断言：$P=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

事实上，对 $\forall \overset{h}{\overset{\shortparallel}{m\oplus w}}\in M\oplus M^{\perp}=\mathcal{H}$，知

$$\begin{bmatrix} I, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ w \end{bmatrix}=m=Ph.$$

从而. $PAP=\begin{bmatrix} I, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W, & X \\ Y, & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I, & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I, & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W, & 0 \\ Y, & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W, & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AP=\begin{bmatrix} W & 0 \\ Y, & 0 \end{bmatrix}$, 由 $PAP=AP$，知 $Y=0$.

Step3 ((c)⇒(a)). 若 $A=\begin{bmatrix} W, & X \\ 0, & Z \end{bmatrix}$, 则对 $\forall h\in\mathcal{M}$, 有

$$Ah=\begin{bmatrix} W, & X \\ 0, & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Wh \\ 0 \end{bmatrix}\in\mathcal{M}.$$

⇒ $\mathcal{M}$ 为 A 的不变子空间.

命题2.3.9 (约化子空间的刻画). 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{M}\leq\mathcal{H}$, $P=P_{\mathcal{M}}$. 则 TFAE.

(a) $\mathcal{M}$ 为 A 的约化子空间.

(b) $PA=AP$

(c) 在 A 的矩阵表示中, $X, Y=0$, 即为分块对角阵.

(d) $\mathcal{M}$ 同时为 A 与 A^* 的不变子空间.

证明: Step1 ((a)⇒(b)). 由 $\mathcal{M}$ 为 A 的约化子空间, 以及命题2.3.8知

$$\begin{cases} AP=PAP. \\ \underset{\substack{\| \\ A-AP}}{A(I-P)}=\underset{\substack{\| \\ (I-P)(A-AP) \\ \| \\ A-AP-PA+PAP=A-PA}}{(I-P)A(I-P)}, \end{cases}$$

$I-P$ 为 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{M}^\perp$ 上的正交投影

⇒ $AP=PA$. ⇒ (b)成立.

Step2. ((b)⇒(c)) 类似于命题2.3.8中证明. (作业)

Step3 ((c)⇒(d)) 若 $A=\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$,

断言: $A^*=\begin{bmatrix} W^* & 0 \\ 0 & Z^* \end{bmatrix}$.

事实上, 对 $\forall m_1, m_2\in\mathcal{M}$, $w_1, w_2\in\mathcal{M}^\perp$, 有

$$\langle A(m_1\oplus w_1), m_2\oplus w_2\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} X & 0\\ 0 & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1\\ w_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_2\\ w_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} Xm_1\\ Zw_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_2\\ w_2\end{bmatrix}\right\rangle = \langle Xm_1, m_2\rangle + \langle Zw_1, w_2\rangle$$

$$= \langle m_1, X^*m_2\rangle + \langle w_1, Z^*w_2\rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} m_1\\ w_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X^*, & 0\\ 0, & Z^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2\\ w_2\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$\Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} X^*, & 0\\ 0, & Z^*\end{bmatrix}.$$

应用命题2.3.8知 $AM\subseteq M$, $A^*M\subseteq M$ $\Rightarrow$ M同时为A与A^*的不变子空间.

Step4. ((d)$\Rightarrow$(a)) 对$\forall h\in M^\perp$, $g\in M$, 注意到

$$\langle g, Ah\rangle = \langle A^*g, h\rangle \overset{A^*g\in M}{\underset{h\in M^\perp}{=}} 0$$

$\Rightarrow Ah\in M^\perp \Rightarrow AM^\perp\subseteq M^\perp$. 类似地, 可证$AM\subseteq M$.

\#

定义2.3.10(算子的限制). 设$A\in B(\mathcal{H})$, $M\leq \mathcal{H}$, 且M为A的不变子空间. 则定义A在M上的限制为

$$A|M: M\longrightarrow M.$$
$$h\in M\longmapsto (A|M)(h)=Ah.$$

易知 $\|A|M\|\leq\|A\|$.