§3.3 拟连续与Sobolev函数的精确表示.

引理3.3.1（容量-Chebyshov不等式） 设$f\in K^p$. $\varepsilon>0$, 定令

$$A:=\left\{x\in\mathbb{R}^n: \fint_{B(x,r)} > \varepsilon,\ \exists\, \varepsilon>0\right\}.$$

则

$$\mathrm{Cap}_p(A)\leq \frac{C}{\varepsilon^p}\int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx$$

证明: Step1（Besicovitch覆盖）. 不失一般性, 设$\varepsilon=1$. 此时

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}^n: \fint_{B(x,r)} > 1\right\}$$

则对$\forall x\in A$, 考虑球$B(x,r)$. 知$\exists\, C>0$, s.t.

$$\alpha(n)r^n\leq\int_{B(x,r)} f\,dy\leq[\alpha(n)r^n]^{1-\frac{1}{p^*}}\left(\int_{B(x,r)} f^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}}\overset{f\in K^p}{<} C.$$

从而令$\mathcal{F}:=\{B(x,r): x\in A\}$. 知$\mathcal{F}$满足

$$\sup\{\operatorname{diam}B: B\in\mathcal{F}\}<\infty \quad (*)$$

Besicovitch覆盖引理: $\exists$正常数N_n, s.t. 对$\forall$满足$(*)$的非退化闭球族$\mathcal{F}$, $\exists$ $\mathcal{G}_1,\cdots \mathcal{G}_{N_n}$ s.t.

(i) 对$\forall\, i=1,\dots,N_n$, $\mathcal{G}_i$为可数个互不相交闭球组成（$\mathcal{F}$中）.

(ii) $A\subset\bigcup_{i=1}^{N_n}\bigcup_{B\in\mathcal{G}_i} B$.

对上述$\mathcal{F}$应用Besicovitch覆盖引理, 得N_n以及由互不相交闭球组成的球列$\mathcal{F}_i$, $i=1,\dots,N_n$, s.t.

$$\begin{cases} A\subset\bigcup_{i=1}^{N_n}\bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B & (*1)\\ \text{对}\forall B\in\bigcup_{i=1}^{N}\mathcal{F}_i,\quad \fint_B>1. & (*2)\end{cases}$$

Step 2 (K^p 函数的构造) 记 $\mathcal{F}_i$ 中球为 B_j^i. 由 $f\in K^p$, 知 $(f_{B_j^i}-f)\mathbb{1}_{B_j^i}\in W^{1,p}(B_j^i)$.

$$\|D((f_{B_j^i}-f)\mathbb{1}_{B_j^i})\|_{L^p(B_j^i)} = \|D(f_{B_j^i}-f)\|_{L^p(B_j^i)} = \|Df\|_{L^p(B_j^i)} < \infty.$$

$$\|(f_{B_j^i}-f)\mathbb{1}_{B_j^i}\|_{L^p(B_j^i)} \lesssim \|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} + |f_{B_j^i}| < \infty.$$

故从而

$$\left((f_{B_j^i}-f)\mathbb{1}_{B_j^i}\right)^+ = (f_{B_j^i}-f)^+\mathbb{1}_{B_j^i} \in W^{1,p}(B_j^i).$$

作 $(f_{B_j^i}-f)^+\mathbb{1}_{B_j^i}$ 从 B_j^i 到 $\mathbb{R}^n$ 的连续延拓 h_{ij} s.t.

$$\begin{cases} h_{ij} = (f_{B_j^i}-f)^+ \quad \text{on } B_j^i \\ \|h_{ij}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|(f_{B_j^i}-f)^+\|_{L^p(B_j^i)} + \|D(f_{B_j^i}-f)^+\|_{L^p(B_j^i)} \end{cases}$$

$$\lesssim \|(f_{B_j^i}-f)\|_{L^p(B_j^i)} + \|D(f)\|_{L^p(B_j^i)}$$

$$\lesssim \left(\fint_{B_j^i} |f_{B_j^i}-f|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \cdot r^{\frac{n}{p}} + \|D(f)\|_{L^p(B_j^i)}$$

$$\overset{\text{Poincaré}}{\lesssim} r^{1+\frac{n}{p}} \left(\fint_{B_j^i} |Df|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} + \|D(f)\|_{L^p(B_j^i)}$$

是与 n 与 p 相关? 这一步暂时不清楚!

$$\lesssim (r+1)\|Df\|_{L^p(B_j^i)}. \quad \lesssim \|Df\|_{L^p(B_j^i)}$$

Step 3 (零点的估计) 由 h_{ij} 的定义知在 B_j^i 上

$$f + h_{ij} = f + (f_{B_j^i}-f)^+ \ge f_{B_j^i} \ge 1 \quad \text{on}.$$

从而 令 $h := \sup\{h_{ij} : i=1,\dots,N_n,\ j=1,\dots\} \in K^p$

知 $f+h\geq 1$ on A. 且

$$\int_{\mathbb{R}^n}|D(f+h)|^p dx \leq C\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx+\sum_{i=1}^{N_n}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|Dh_{ij}|^p dx\right\}$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx.$$

又由 A 开 $\Rightarrow$ $A\subset\{f+h\geq 1\}^{\circ}$. 从而

$$\mathrm{Cap}_p(A)\leq\int_{\mathbb{R}^n}|D(f+h)|^p dx\lesssim\int_{\mathbb{R}^n}|Df|^p dx.$$

\#

定义 3.3.2 (p-拟连续) 称一个函数是 p-拟连续, 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ 一个开集 V, s.t. $\mathrm{Cap}_p(V)<\varepsilon$ 且

$f|_{\mathbb{R}^n\setminus V}$ 为连续.

定理 3.3.3 (Sobolev 函数的拟连续性). 设 $1\leq p<n$, $f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. 则如下性质成立.

(i) (精确表示). $\exists$ Borel 集 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, s.t. $\mathrm{Cap}_p(E)=0$ 且对 $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus E$,

$$\lim_{r\to 0} f_{B(x,r)}=f^*(x) \text{ 存}.$$

(ii) (平均连续性) 对 $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus E$, 有

$$\lim_{r\to 0}⨍_{B(x,r)}|f-f^*(x)|^{p^*}dx=0$$

(iii) (拟连续性). f^* 是 p-拟连续.

证明: Step 1 ((i) 的证明:) 令

$$A:=\left\{x\in\mathbb{R}^n: \limsup_{r\to 0}\frac{1}{r^{n-p}}\int_{B(x,r)}|Df|^p dy>0\right\}$$

由 Hausdorff 测度的性质, $\mathcal{H}^{n-p}(A)=0$. 从而由 Hausdorff 测度与 Capacity 之间关系, 得

$$\mathrm{Cap}_p(A)=0$$

对 $\forall x \notin A$，由 Poincaré 不等式，知

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f-f_{B(x,r)}|^{p^*} dy \le \lim_{r\to 0} r^{p^*}\left[\fint_B |Df|^p dy\right]^{\frac{p^*}{p}}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left[r^{p-n}\int_B |Df|^p dy\right]^{\frac{p^*}{p}}$$

$$\overset{x\notin A}{=} 0. \quad (*)$$

对 $\forall i \in \mathbb{N}$，取 $f_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$，s.t.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df-Df_i|^p dx \le \frac{1}{2^{(p+1)i}}$$

并令

$$B_i := \left\{x\in\mathbb{R}^n : \left|\fint_{B(x,r)} |f-f_i|\, dy > \frac{1}{2^i} \quad \exists r>0\right.\right\}$$

应用引理3.5.1（容量-Chebyshev不等式）有

$$\frac{Cap_p(B_i)}{2^{pi}} \le C\int_{\mathbb{R}^n} |Df-Df_i|^p dy \le \frac{C}{2^{(p+1)i}}$$

$\Rightarrow Cap_p(B_i) \lesssim \frac{1}{2^i}$. 进一步.

$$|(f)_{B(x,r)} - f_i(x)| \le \fint_{B(x,r)} |f-f_{B(x,r)}|\, dy + \fint_{B(x,r)} |f-f_i|\, dy + \fint_{B(x,r)} |f_i - f_i(x)|\, dy$$

应用 $(*)$ 及 B_i 的定义 知当 $x\notin A\cup B_i$ 时.

$$\limsup_{r\to 0} |(f)_{B(x,r)} - f_i(x)| \le \frac{1}{2^i}$$

令 $E_k := A\cup\left(\bigcup_{j=k}^\infty B_j\right)$. 则

$$Cap_p(E_k) \le Cap_p(A) + \sum_{j=k}^\infty Cap_p(B_j) \le C\sum_{j=k}^\infty \frac{1}{2^j} \lesssim \frac{1}{2^k}.$$

而当 $x\in\mathbb{R}^n\setminus E_k$ 且 $i,j\geq k$ 时，有

$$|f_i(x)-f_j(x)|\leq\limsup_{r\to 0}|(f)_{B(x,r)}-f_i(x)|+\limsup_{r\to 0}|(f)_{B(x,r)}-f_j(x)|$$

$$\leq\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^j}\quad (**)$$

从而 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ 在 $\mathbb{R}^n\setminus E_k$ 上一致收敛于某一连续函数 g. 且

$$\limsup_{r\to 0}|g(x)-f_{B(x,r)}|\leq|g(x)-f_j(x)|+\limsup_{r\to 0}|f_j(x)-f_{B(x,r)}|$$

应用 (**)，并且令 $i\to\infty$，得对 $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus E_k$.

$$\limsup_{r\to 0}|g(x)-f_{B(x,r)}|=0.$$

令 $E:=\bigcap_{k=1}^\infty E_k$. 知 $\mathrm{Cap}_p(E)\leq\lim_{k\to\infty}\mathrm{Cap}_p(E_k)=0$. 且对 $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus E$.

$$f^*(x):=\lim_{r\to 0}f_{B(x,r)}\ \exists.$$

$\Rightarrow$ (i) 成立.

<u>Step 2 (ii) 的证明</u> 由 (i) 中证明的 (*) 式知

$$\lim_{r\to 0}\left(⨍_{B(x,r)}|f-f^*(x)|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\leq\lim_{r\to 0}|f_{B(x,r)}-f^*(x)|+\lim_{r\to 0}\left(⨍_{B(x,r)}|f-f_{B(x,r)}|^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$=0.$$

$\Rightarrow$ (ii) 成立.

<u>Step 3</u>. (iii) 可用 (i) 中证明得到.

#