第8章　信号とシステム

8.1 実験目的

本章では、信号とシステムの基礎知識として連続時間（アナログ）から離散時間（ディジタル）への標本化、信号とシステムの性質、時間領域と周波数領域の表現、フィルタリングについて MATLAB のプログラミングおよびそのシミュレーション実験を通して理解することを目的としている。

8.2 実験原理

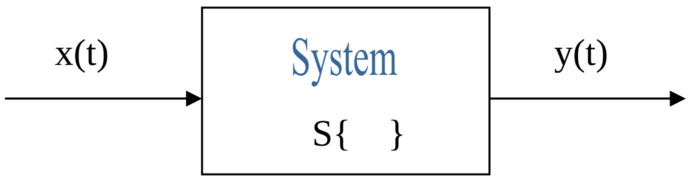
8.2.1 信号とシステム

「信号とシステム」と言う用語は電子情報工学でしばしば使われているが、信号とはある物理量の変動パターンを表現するものと考えてもよい。信号の種類として、例えば、音声・画像・通信・生体・地震などのように、実際にその物理量を測ることが可能なあらゆる信号が含まれる。一方、システムとは、「信号から新しい信号への変換、伝送などのような可能な操作である」、と狭義的に定義される。例えば、連続時間信号から離散信号という A/D 変換は、一つのシステムであると考えられる。つまり、連続信号をシステムに入力すると、それに対応する離散的な信号が得られるという操作を意味する。

便宜上、信号とシステムは数式やブロック図を用いて表現されることが多い。例えば、連続時間 t に変動する入力信号を x(t) とすると、ある操作によって出力信号 y(t) が得られた場合には、次のような数式で表現される。

$$y(t) = S\{x(t)\} \tag{8-1}$$

ここで、$S\{\cdot\}$はオペレータで、システムが具体化されることによって決められるものである。式(8-1)で表現される信号とシステムの関係をブロック図で表すと、次のようになる。



このようなブロック図はシステムの設計と実装の段階でよく用いられる表現法である。

8.2.2 連続信号のサンプリング

1) アナログ信号からディジタル信号への変換

音声、通信及び脳波などの信号は、計測により、連続時間（アナログ）信号として記録されていることが多い。これらの信号をディジタル装置で処理するためには、アナログ信号からディジタル信号への変換（A/D 変換）が必ず必要となる。A/D 変換はアナログ信号の時間変化に対する標本化（サンプリング）と振幅変化に対する量子化の二つの操作(演算)から成る。

サンプリングの操作は一定の時間間隔で連続時間信号を取り出していくことにより実現される。例えば、連続な時間 t に変動している信号 x(t)に対してある一定の間隔でデータの値を取り出すようなスイッチを用いると、次式で表現されるような離散的な信号（数列）が得られる。

$$y[nTs] = S\{x(t)\} \qquad (8\text{-}2)$$

ここで、Ts［sec］はサンプリング周期、fs=1/Ts［Hz］はサンプリング周波数、n はサンプル数、$S\{\cdot\}$は標本化を行うような演算子とそれぞれ定義できる。

一方、量子化の操作とは、標本化によりある時点でのアナログ信号の値を取り出し、その値を離散値で表現することである。例えば、電圧 0〜10 Vのアナログ値を 16 bitのディジタルの数列で表現すると、計 2^{16}= 65536 の値を表現することができる。つまりアナログ電圧 0 Vがディジタルの 0 に対応し、電圧 10 Vがディジタルの 2^{16}に相当する。このときの分解能は $10/2^{16}$=0.15 mVとなる。

上記二つの操作により、アナログ信号はディジタル信号へ変換することができるが、逆にディジタル信号からアナログ信号へ再変換するときに、元のアナログ信号が再構築できるかと言う問題が生じてくる。量子化の操作では bit 数によって量子化誤差が生じるが、元のアナログ信号の再構築には影響がない。しかし、標本化の操作においては、どのような時間間隔で信号の標本を取り出すかについては標本化定理に従わないと、元のアナログ信号が正しく再構築されない。

2) Shannon の標本化定理

連続信号x(t)に含まれる最大の周波数成分f_{max}[Hz］ の 2 倍以上のサンプリング周波数 fs［Hz］:

$$f_s \geq 2 f_{\max} \qquad (8\text{-}3)$$

または標本化の時間間隔を次式のようにして標本(サンプル)を取り出すと、

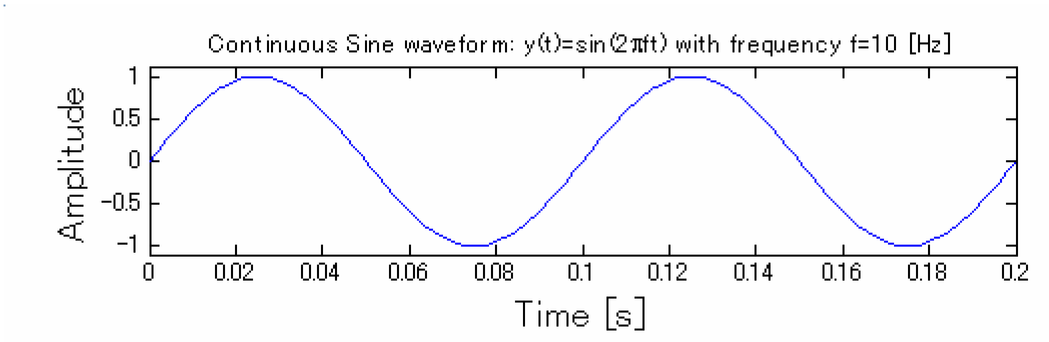
$$T_s \leq \frac{1}{2 f_{\max}} \qquad (8\text{-}4)$$

元の連続信号x(t)は離散数列から正しく（誤差が無く）再構築される。ここで、周波数 $2f_{max}$はナイキスト(Nyquist)周波数と呼ばれる。

標本化定理はディジタル信号処理、ディジタル制御、ディジタル通信、ディジタル音声処理などによく登場する一つの基礎定理である。例えば、音の信号に対する人間の聴覚で

感知できる上限は 20 [kHz]と言われているが、その上限周波数の 2 倍以上の周波数 44.1 [kHz]で標本化されているのが一般に市販されている音楽用のディジタル CD に用いられている。

例題 8_1：周波数 f=10 [Hz]の連続正弦波信号 $y(t) = \sin(2\pi f t)$ に対する t=0.2 [秒]の波形を下図のように示す。



この正弦波に対して時間間隔（サンプリング周期）Ts=5, 10, 60 [ms]を用いてそれぞれ標本化し、その結果について検討してみよう。

連続信号から離散信号への変換は式(8-2)で表される。この式を利用して上記の正弦波信号に対するサンプリングすると、次式が得られる。

$$y[nTs] = S\{\sin(2\pi f t)\} = \sin(2\pi f nTs) \tag{8-5}$$

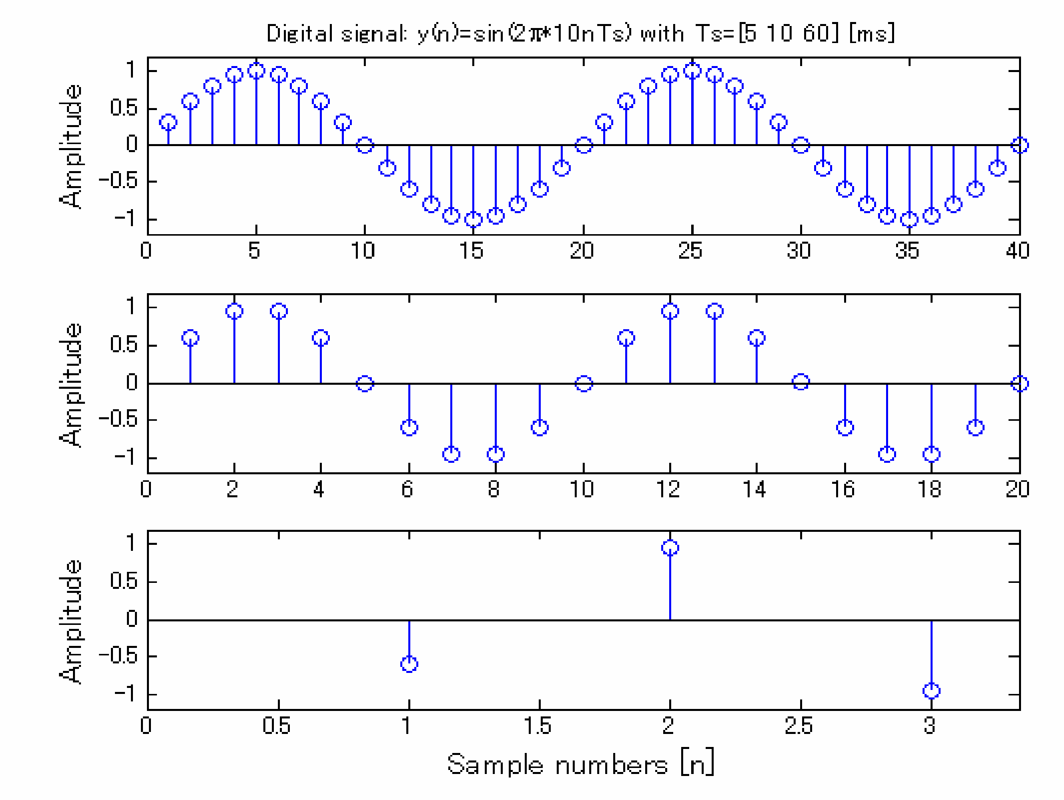
この例題では、周波数は f=10 [Hz]で、サンプリング周期（Ts=1/fs [sec]）は Ts=5, 10, 60 [ms]である。時間 t=0.2 [秒]の間に Ts でサンプルを採り出すと、サンプル数はそれぞれ n=t/Ts=40, 20, 3 [個]となる。

上述のパラメータ f,n,Ts を式(8-5)に代入すると、離散信号 y が求められる。これを実行するような Matlab プログラムは次表のようになる。

```
% Investigation of the Shannon sampling theorem
% filename: Samp6_1_2.m
% Jianting Cao, Feb. 22, 2003

clear all
f=10;  % 正弦波周波数
t=0.2; % 表示する時間（秒）
Ts=[5 10 60]/1000; % 標本化する周期（秒）[Ts <= 1/2f = 50 ms]
n=[1:t/min(Ts)]; % サンプル数の計算
y=[]; % y の定義
```

```
% 各サンプリング時間に対する計算とプロット
for i=1:3
    y(i,:)=sin(2*pi*f*n*Ts(i));
    subplot(3,1,i);
    stem(y(i,:))
    axis([0 t/Ts(i) -1.2 1.2]);
    ylabel('Amplitude','FontSize',12);
   if i==1; title('Digital signal: y(n)=sin(2{¥pi}*10nTs) with Ts=[5 10 60]
[ms]','FontSize',10);end
   if i==3; xlabel('Sample numbers [n]','FontSize',12);end
end
% ビットマップファイルへ出力
Print -dbitmap Samp6_1_2
```

このプログラムを実行すると、次の波形が得られる。



上段の図の場合、サンプリング周期は Ts=5 [ms]であり、これを式(8-4)で定義されたナイキスト周期 $T_s^* \le \dfrac{1}{2f_{\max}} = \dfrac{1}{2*10} = 50 \quad [ms]$ と比較すると、明らかに $T_s < T_s^*$ であるこ

とが分かる。つまり、サンプリング周期Ts=5 [ms]で標本化することは標本化定理を満たしており、この場合には、連続信号に含まれている周波数成分が全く失われることはなく再構築が可能である、ということが分かる。また、最上段図に示されるように隣同士のサンプル値（○の中心）を直線で繋げた波形と、元の連続時間で表現される正弦波形とを比較すれば、形がほぼ一致することからこのことが直感的にも推察される。

次に、中段の図の場合、サンプリング周期は Ts=10 [ms]であり、上段の図の場合と同様に$T_s < T_s^*$であるため、元の連続信号が再構築することが出来る。しかし、この場合はサンプル数が十分でないため、誤差が多少生じることが波形からも明らかである。

下段の図では、サンプリング周期はTs=60 [ms]であり、$T_s > T_s^*$であるため、標本化定理を満たさないことが分かる。つまりこの場合波形から推察できるように、離散数列から元の連続信号への再構築ができないことを示している。

8.2.3 線形時不変システム

線形性と時不変性はシステムを表すための最も基本的な性質である。これらの性質に基づいてシステムの動作原理を数学的により深く理解することが出来る。線形性かつ時不変性を満足するシステムを線形・時不変システム(LTI: Linear Time-Invariant System)と呼ぶ。この線形および時不変システムの概念は、信号とシステムまたはディジタル信号処理において大変重要である。

1. 線形システム

任意の離散システムS{・}に対して、入出力の関係を次のように定義する。

$$y(n) = S\{x(n)\} \tag{8-6}$$

システムS{・}は次の二つ条件を同時に満たせば、S{・}が線形システムと呼ばれる。

(1) <u>入力信号の和から得た出力信号は、それぞれの入力信号から得た個々の出力信号の和と等しい</u>。例えば、二つの信号の場合には、

$$S\{x_1(n) + x_2(n)\} = S\{x_1(n)\} + S\{x_2(n)\} \tag{8-7}$$

が成り立つ。

(2) <u>a(aは任意定数)倍した出力信号は、入力信号をa倍したものから得た出力信号と等しい</u>。

$$aS\{x(n)\} = S\{ax(n)\} \tag{8-8}$$

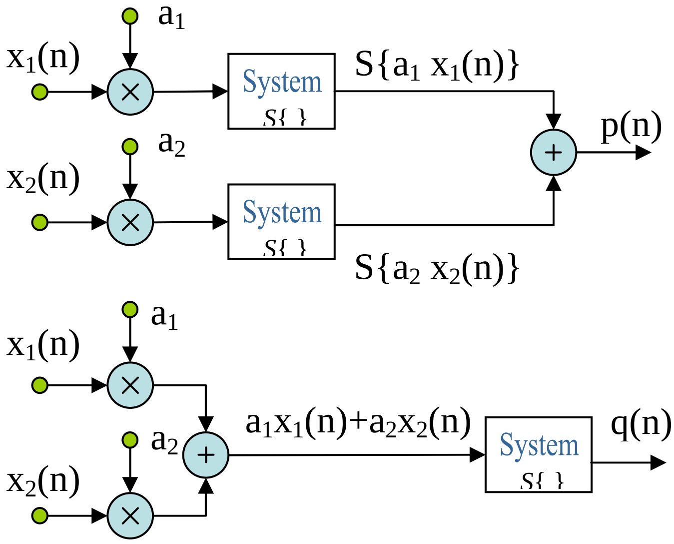
ここで、式(8-7)と式(8-8)をまとめると、

$$S\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = S\{a_1 x_1(n)\} + S\{a_2 x_2(n)\} \tag{8-9}$$

となる。これは重ね合わせの原理(Principle of superposition)と呼ばれる。また、式(8-9)

は上述した二つの線形システムの条件と等価である。

システムの線形特性を検証するために、次に示すようなブロック図を作成する。次図で二つの出力が p(n)=q(n) であれば、システムは線形システムであることが判る。



例題 8_2： 信号増幅器 y(n)=Ax(n) の線形性を重ね合わせの原理を用いて検証してみよう。

ブロック図から p(n) の計算は

$$p(n) = S\{a_1x_1(n)\} + S\{a_2x_2(n)\}$$
$$= Aa_1x_1(n) + Aa_2x_2(n)$$

である。一方、q(n) の計算は次のようになる。

$$q(n) = S\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\}$$
$$= A\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\}$$

上記の計算から $p(n) = q(n)$ であるので、信号増幅器は線形システムであると言える。

2. 時不変システム

ある入力信号 x(n) が k サンプル遅れて入力されたとき、その出力信号 y(n) も k サンプル遅れるシステムは時不変システムであると定義される。つまり、“時不変”とは入力の遅延した時間（サンプル数）が出力においても不変であるということを意味している。時不変システムの検証方法は前述した線形システムの検証方法と同じように

$$p(n) = S\{x(n-k)\} \tag{8-9}$$

$$q(n) = y(n-k) \tag{8-10}$$

とし、上式が $p(n) = q(n)$ である場合は、システムは時不変システムである。

8.2.4 ディジタルフィルタ

ディジタルフィルタとは一つの線形時不変である離散時間システムと定義できる。

ディジタルフィルタの入出力の関係は、時間領域で表現される（time-domain representation）場合と周波数領域で表現される（frequency-domain representation）場合がある。本節では、これらについて考える。

1. 時間領域の畳み込み表現

離散時間の単位インパルス（unit impulse）はクロネッカーデルタ関数(Kronecker delta function)と呼ばれ、次のように定義される。

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{8-11}$$

単位インパルスを離散時間システムに入力したとき、式(6-6)を用いてその出力はインパルス応答として次のように書ける：

$$h(n) = S\{\delta(n)\} \tag{8-12}$$

ここで、クロネッカーデルタ関数は時不変であるため、k サンプル分シフトした（遅れた）インパルスを入力すると、そのインパルス応答(impulse response)は k サンプル分遅れたものが得られる。つまりインパルス応答は

$$h(n-k) = S\{\delta(n-k)\} \tag{8-13}$$

となる。

一方、任意の信号 x(n)は単位インパルス$\delta(n)$を用いて次式のように表現することもできる。

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \tag{8-14}$$

この信号を入力信号として式(8-6)に代入すると、線形システムの出力は

$$\begin{aligned} y(n) &= S\{x(n)\} \\ &= S\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)S\{\delta(n-k)\} \end{aligned} \tag{8-15}$$

となる。ここで、式(8-13)のインパルス応答を用いて表現すると、システムの出力は

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= h(n-k) * x(n) \end{aligned} \tag{8-16}$$

となる。上式の記号「＊」は畳み込み(convolution)演算と呼ばれている。上式から、線形システムの出力は入力とインパルス応答の畳み込みで求められることが分かる。このようなシステムは一つのディジタルフィルタとみなされる。更に、上式(8-16)の変数 x と h を入れ替えて次式のようにも表現される：

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{8-17}$$

上式の因果性[y(n)=0, if n<0]とインパルス応答が有限であること考慮すると、上式は更に次式のように変形できる。

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} h(k)x(n-k) \tag{8-18}$$

式(8-18)で表現されるフィルタは有限インパルス応答フィルタ（FIR filter: Finite Impulse Response Filter）と呼ばれる。（N はフィルタの次数）。

FIR フィルタの計算は、式(8-18)を利用するほか、Matlab の畳み込み関数 conv()とフィルタ関数 filter()を利用することも出来る。但し、filter()を利用する場合には、パラメータの設定が必ず FIR フィルタの構成と一致している必要がある。（関数 filter()に詳しい説明は`>>help filter`で参照すること。）

2. 周波数領域の表現

FIR フィルタの周波数応答を調べるために、今、入力信号が複素数関数 $x(n) = e^{j\phi}e^{j\omega n}$ である場合を考える。ここで、$-\infty < n < \infty$ 、ω は角周波数で、ϕ は初期位相であるとする。この信号を式(8-18)に代入すると、FIR フィルタの出力は

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{N} h(k)e^{j\phi}e^{j\omega(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N} h(k)e^{-j\omega k}\right)e^{j\phi}e^{j\omega n} \\ &= H(\omega)x(n) \end{aligned} \tag{8-19}$$

となる。ここで、$H(\omega)$ は周波数応答(frequency response)と呼ばれる。この式から、角周波数 ω である複素数関数を入力するとき、FIR フィルタの出力は入力と同じ角周波数 ω である複素数関数の信号となる。但し、この場合出力の振幅と位相が異なる。このことを確かめるために、式(8-19)の $H(\omega)$ を極座標表現で書き換えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} y(n) &= |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}e^{j\phi}e^{j\omega n} \\ &= |H(\omega)|e^{j(\angle H(\omega)+\phi)}e^{j\omega n} \end{aligned} \tag{8-20}$$

上式から、角周波数 ω の複素数関数を入力した場合、FIR フィルタの出力の振幅と位相は $H(\omega)$ によって決められることが判る。ここで、$\theta(\omega) = \angle H(\omega)$ と置くと、$|H(\omega)|$ と $\theta(\omega)$ はそれぞれ FIR フィルタの振幅特性(amplitude characteristic)と位相特性(phase characteristic)と呼ばれる。

8.2.5 離散フーリエ変換(DFT)と高速フーリエ変換(FFT)

フーリエ変換は時間領域の信号を周波数領域におけるスペクトル(spectrum)とし

て観察するための手段としてよく用いられる。離散フーリエ変換は有限長の離散時間信号から、その周波数によって表現される数列に変換する一つの計算方法である。離散時間フーリエ変換は次式のように定義される。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{8-21}$$

ここで、x(n)は時間領域の信号である。N は離散時間信号のサンプル数であり、周波数 0～2π を等分割するための数である。また、インデックス k は周波数を表す整数、フーリエ変換された信号の絶対値|X(k)|は信号 x(n)の振幅スペクトル(magnitude spectrum)、また角度 $\angle X(k)$ は位相スペクトル(phase spectrum)である。

離散時間フーリエの逆変換は次式のようになる。

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\qquad n=0,1,\cdots,N-1 \tag{8-22}$$

上述した離散時間フーリエ変換とその逆変換は、それぞれ周波数領域における N 個の複素数、時間領域における N 個の数列を作成するための計算方法と考えてもよい。これらの計算法は N が大きくなると演算量の問題が生じてくる。そのため、高速フーリエ変換(FFT)が考案されている。Matlab においては、高速フーリエ変換の計算は関数 fft()で行い、その逆変換の計算は関数 ifft()で行う。

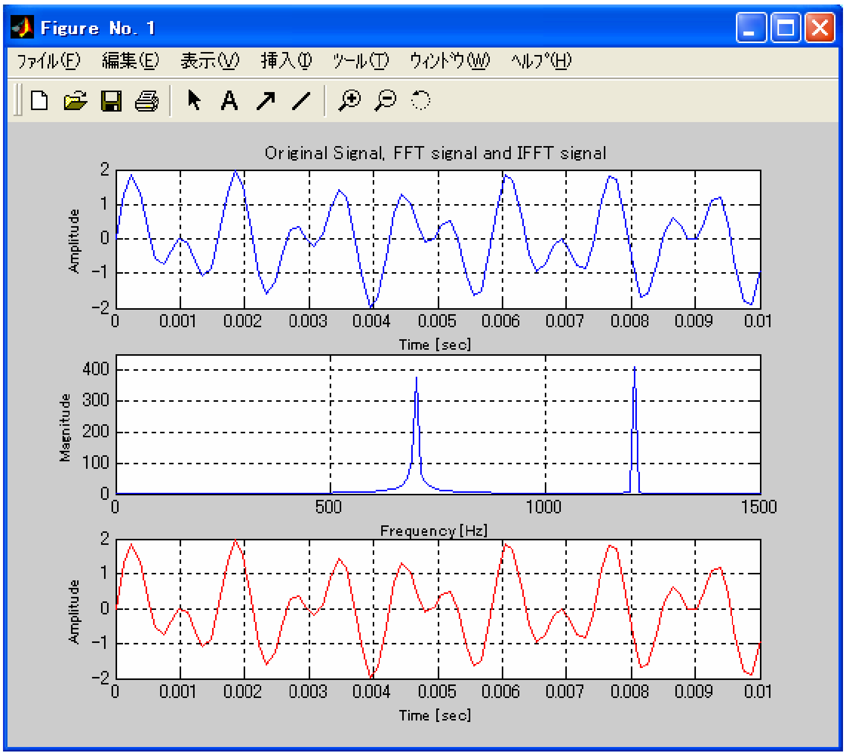
例題 8_3：周波数 f1=697[Hz]、f2=1209[Hz]の正弦波信号 $x(t)=\sin(2\pi f_1 t)+\sin(2\pi f_2 t)$ をサンプリング周波数 fs=8192[Hz]で標本化し、得られた離散信号に対して高速フーリエ変換を行いその振幅特性を示してみよう。また、そのフーリエ変換された信号に対して逆高速フーリエ変換してみよう。

本例題の Matlab 計算プログラムを次表のようになる。

```
% Investigation of the fft() and ifft()
% Filename: Samp6_3.m
% Jianting Cao, Feb. 28, 2003

clear all
f1=697;f2=1209;  % 周波数の定義
fs=8192;         % サンプリング周波数の定義
n=[0:1/fs:0.1];  % サンプル数の定義
x=sin(2*pi*f1*n)+sin(2*pi*f2*n);%合成信号の生成
X=fft(x);        % 信号のフーリエ変換の計算
m=abs(X);        % 振幅特性の計算
xx=real(ifft(X));% 信号の逆フーリエ変換の計算
```

```
t=linspace(0,0.01,82);% 元信号のプロット
subplot(3,1,1);
plot(t,x(1:length(t)));grid;
xlabel('Time [sec]','FontSize',8);
ylabel('Amplitude','FontSize',8);
title('Original Signal, FFT signal and IFFT signal','FontSize',10)

subplot(3,1,2); %フーリエ変換した信号のプロット
f=(0:length(X)-1)*fs/length(X);
plot(f,m);axis([0 1500 0 450]);grid;
xlabel('Frequency [Hz]','FontSize',8);
ylabel('Magnitude','FontSize',8);

subplot(3,1,3); %逆フーリエ変換した信号のプロット
plot(t,xx(1:length(t)),'r-');grid;
xlabel('Time [sec]','FontSize',8);
ylabel('Amplitude','FontSize',8);
```

上記のプログラムを実行すると、次の結果が得られる。



上段の波形は、サンプリング周波数 fs=8192 [Hz]で標本化し得られたものである。中

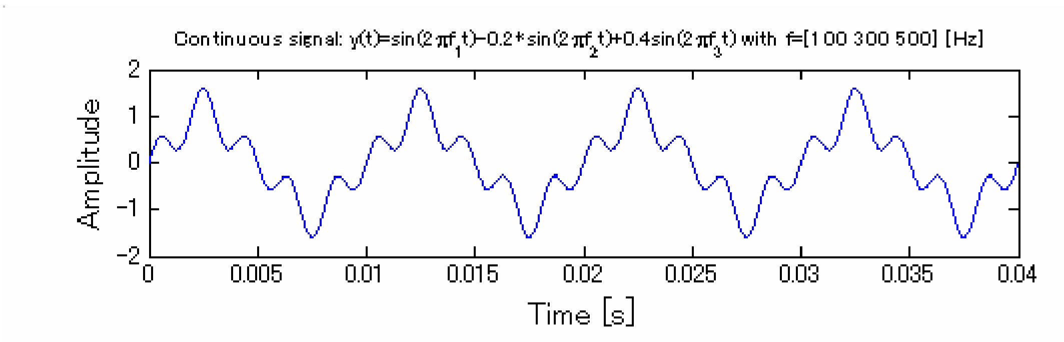
段の波形は、上段の離散信号に対して求められた振幅特性を示している。この波形に現れている二つのピークで示される周波数はそれぞれ f1、f2 と一致していることが分かる。更に下段の波形は、その逆フーリエ変換されたものであり、上段の離散信号と一致していることが示されている。

8.3 実験課題

1. 今、連続三角関数信号を次式のように定義する：

$$y(t) = \sin(200\pi t) - 0.2\sin(600\pi t) + 0.4\sin(1000\pi t)$$

この場合の時間 t=0.04 [秒]までの波形を下の図に示す。



1） 上式で定義される連続信号に対するナイキスト周波数を求めよ。また、時間間隔 Ts=0.2, 0.5, 1.5 [ms]で標本化するような MATLAB プログラムを作成し、その結果を波形で示せ。

2） プログラムの実行結果に対して、元の連続信号に含まれているすべての周波数成分が失われているかどうか、また失われた場合には何故失われたのか、前述した標本化定理に基づいて検討せよ。

2. 例題 8-2 において、信号増幅器を y(n)=1/2x(n)とした場合、MATLAB を用いてその線形性を検証せよ。但し、入力信号はそれぞれ

$$x_1(n) = \sin(2\pi 941n)$$
$$x_2(n) = \sin(2\pi 1336n)$$

であるとする。またその各サンプル数は n=[0:1/8192:0.1]とする。

[ヒント:y1+y2 が x1+x2 によって得た y と一致しているかどうかをプロットして観察。]

3. 式(8-18)において、インパルス応答 h=[2 1 0.5]、入力信号 x=[1 -2 -1 2]、次数 N=5 の FIR フィルタの出力信号 y(0)～y(5)を手計算で求めよ。また、Matlab の conv() 関数と filter()関数をそれぞれ用いて出力信号を計算し、その結果を手計算したものと

比較せよ。

4. プッシュ回線の電話機で発信の際にダイヤルボタンを押す毎に発信される信号音が伴っている。これはDual Tone Multi Frequency(DTMF)と呼ばれ、一つの標準となっており、1つのボタンにつき2種類の周波数が割り当てられる。例えば、電話機番号のボタン「1」の音は周波数f_1=697[Hz]、f_2=1209[Hz]の正弦波信号 $x(t)=\sin(2\pi f_1 t)+\sin(2\pi f_2 t)$ を用いて発生させる。各番号のボタンと周波数の対応関係を次表のように示す。

	1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
697 Hz	1	2	3
770 Hz	4	5	6
852 Hz	7	8	9
941 Hz	*	0	#

1） この表を利用して、各自の学籍番号の最後1桁の数字による合成正弦波を作成せよ。但しサンプリング周波数はfs=8192[Hz]とする。

2） 合成された正弦波を音声関数 sound()で聞いてみて、自分が持っている携帯電話でその数字を押すときの音と一致するかどうかを比べてみよ。

3） 次に、その作成した正弦波に対して振幅特性と位相特性[関数unwrap(angle(fft(・)))を利用すること]を求めよ。

4） 更に、その求められた振幅特性から各数字に対応する周波数を示せ。