第六章

求总量的问题——定积分

第一节

特殊和式的极限—定积分的概念

主要内容：

一、定积分概念的两个现实原型

二、定积分的概念

三、可积条件

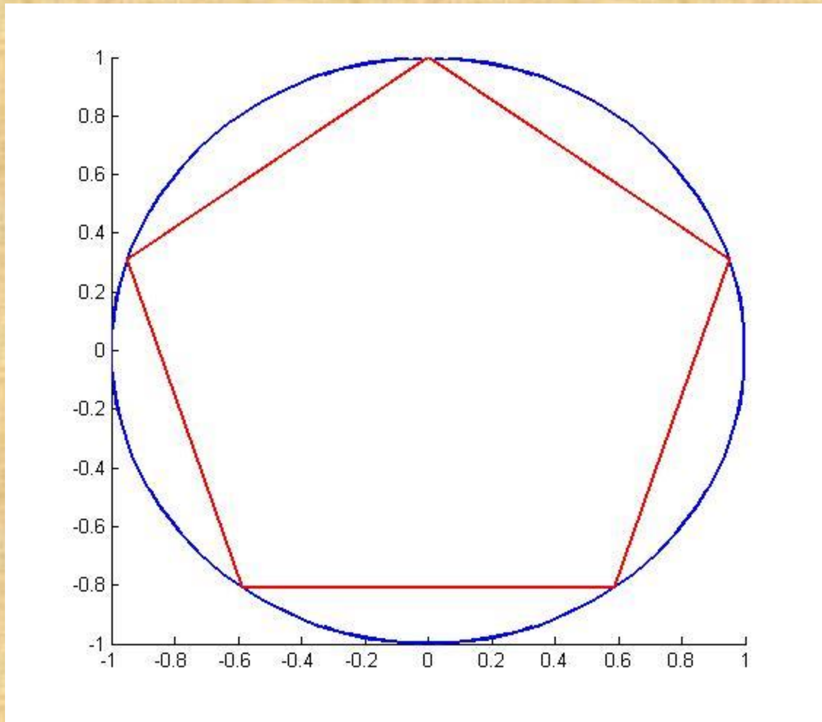
四、定积分的性质

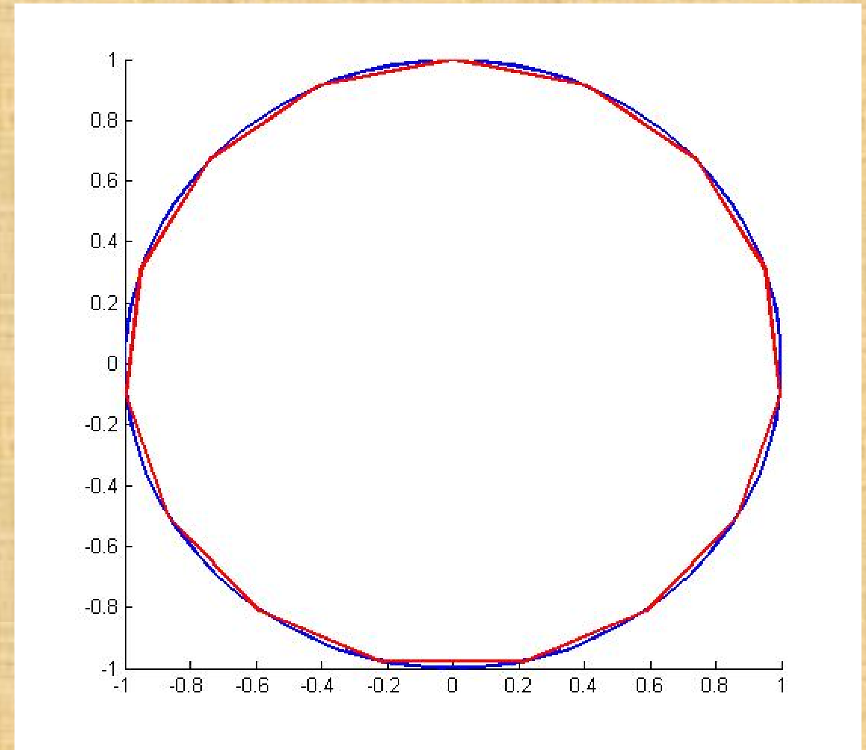
定积分的起源

积分思想出现在求面积、体积等问题中，在古中国、古希腊、古巴比伦、古埃及的早期数学文献中都有涉及这类问题的思想和方法.

如：古希腊的阿基米德（公元前287—前212）用边数越来越多的正多边形去逼近圆的面积，称为“穷竭法”．

中国魏晋时代的刘徽在其《九章算术注》（公元263年）中，对于计算圆面积提出了著名的“割圆术”，他解释说：“割之弥细，所失弥少. 割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣.”这些都是原始的积分思想.

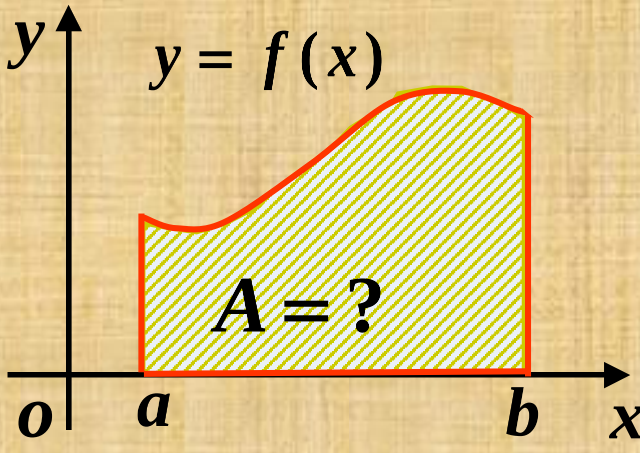




一、抽象定积分概念的两个现实原型

原型I （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线$y = f(x)(f(x) \ge 0)$, x轴与两直线$x = a, x = b$所围成.

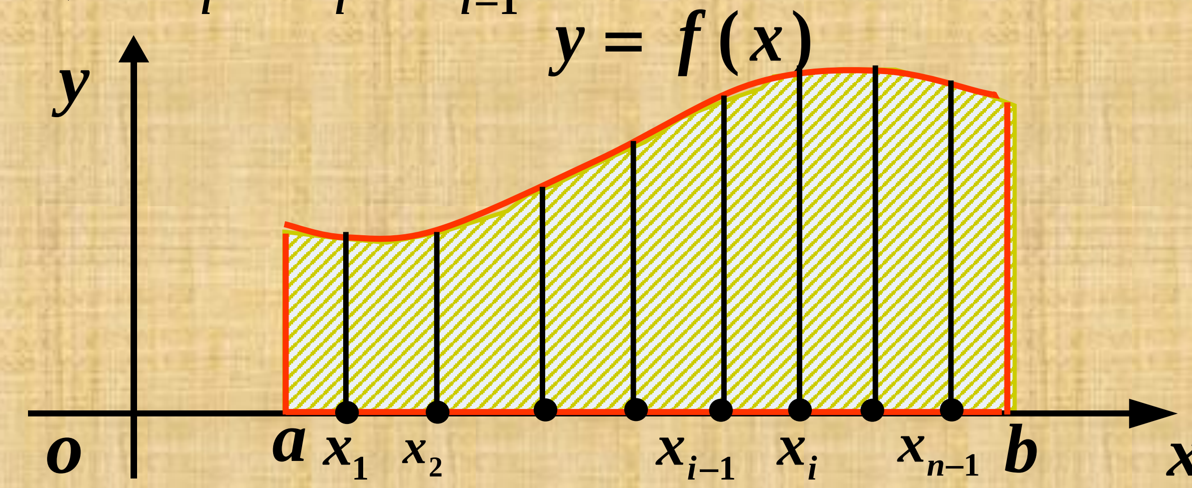


曲边梯形的面积的解决思路：

利用元素法的思想求解曲边梯形的面积时，可概括“分割–取近似–求和–取极限” 的步骤.

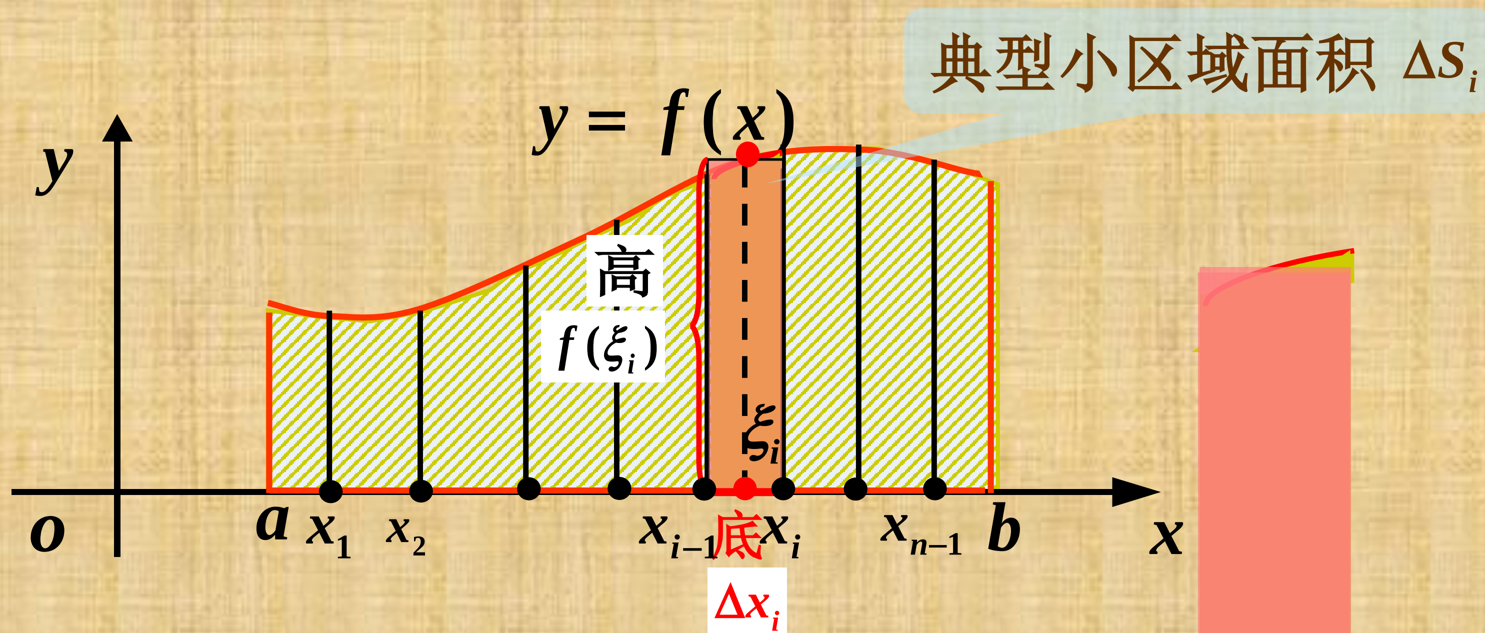
第一步　分割：

将曲边梯形的底，即[*a* ,*b*]进行分割（用垂直于*x*轴的直线）. 记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



第二步　取近似；

取出典型小区域，用矩形面积近似曲边梯形面积.

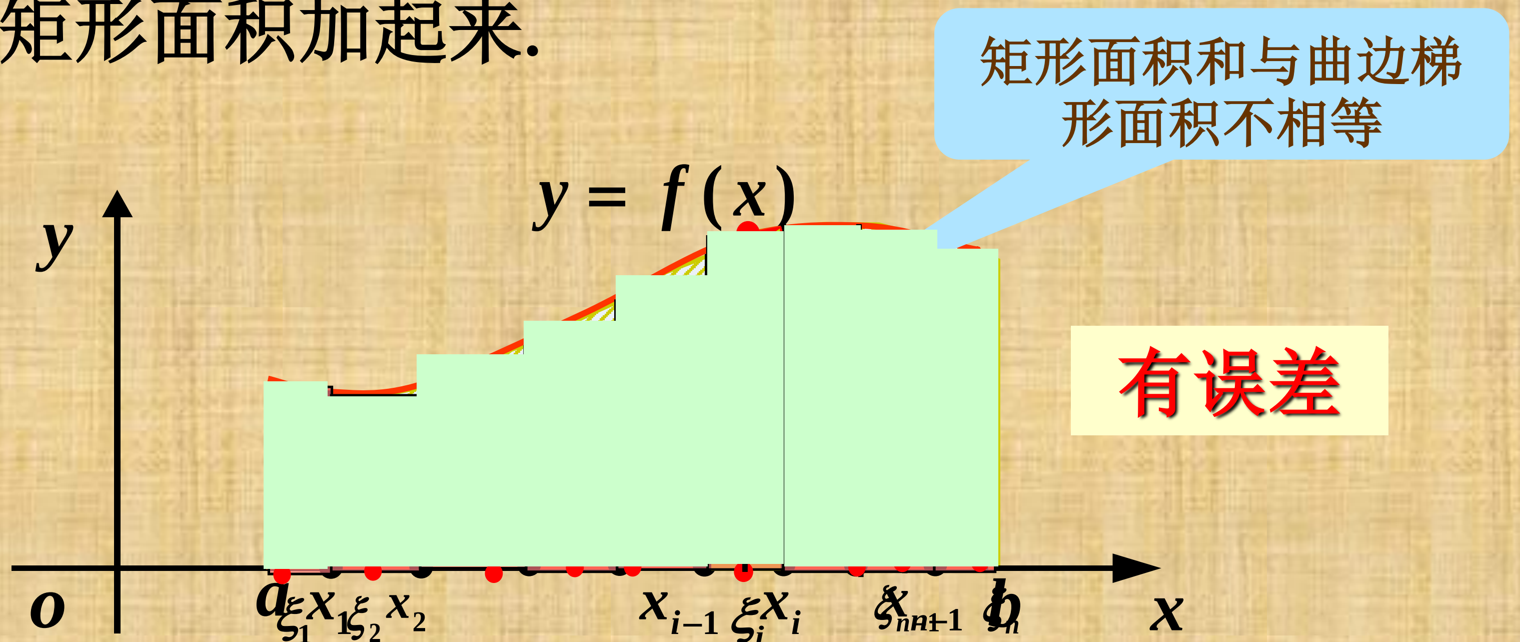


$\Delta S_i = f(\xi_i)\Delta x_i$.

用矩形面积近似
小曲边梯形面积

第三步　求和：

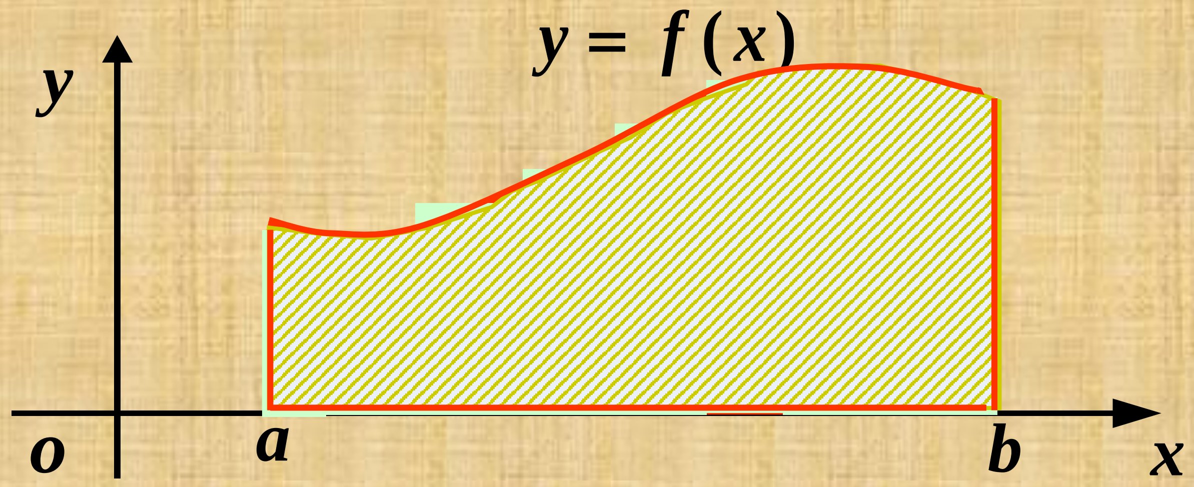
将每个小曲边梯形的面积都用矩形近似，并将所有的小矩形面积加起来.



$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad .$$

第四步　取极限.

当对曲边梯形底的分割越来越细时，矩形面积之和越近似于曲边梯形面积.



$$\Delta x_i \to 0, i = 1, 2, \cdots, n \Leftrightarrow \underbrace{\max\{\Delta x_i\}}_{\lambda} \to 0$$

曲边梯形面积的近似值为:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n \ ,$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

曲边梯形面积为

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n] \ .$$

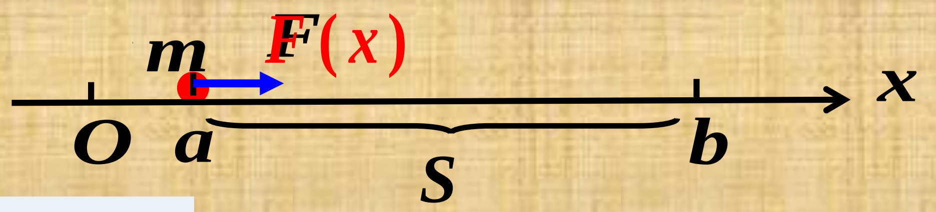
原型Ⅱ　（求变力所做的功）

设质点m受力F的作用沿x轴由点a移动至点b，并设F平行于x轴(如图). 如果F是常量，则它对质点所作的功为 $W = F(b-a)$.

如果力F不是常量，而是质点所在位置x的连续函数

$$F = F(x), \quad a \le x \le b,$$

那么F对质点m所做的功W应如何计算呢？



$W = ?$

公式失效

解决思路：

元素法

在区间 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

分割

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$,

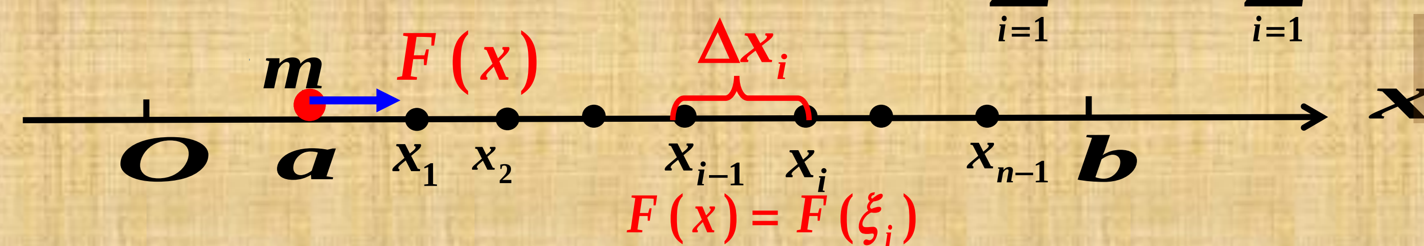
长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n$;

以恒力代变力

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i,

$F(\xi_i)\Delta x_i$ 就近似于质点 m 从点 x_{i-1} 位移到 x_i 时力 $F(x)$ 所做的功 ΔW_i，从而 $W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$

求和



当分割无限加细,即小区间的最大长度 取极限

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

F 对质点 m 所做的功 $W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \Delta x_i$.

定积分

二、 定积分的定义

定义 设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界函数,用点$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$将区间$[a,b]$任意分割成$n$个子区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\ldots)$,这些子区间及其长度均记作$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\ldots,n)$.在每一子区间$\Delta x_i$上任取一点$\xi_i$,作$n$个乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$的和式

以直代曲

求和 $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

如果当$n\to\infty$,同时最大子区间的长度

取极限

$\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$时,和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的

极限存在,并且其极限值与$[a,b]$的分割法

以及ξ_i的取法无关,则该极限值称为函数

$f(x)$区间在$[a,b]$上的定积分,记作:

积分和

积分上限

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$为积分区间

注意:

(1)积分值仅与被积函数及积分区间有关,而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2)在定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

(3)当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时,称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

总结原型I和II

(1)连续曲线 $y=f(x)\geq 0$在$[a,b]$构成的曲边梯形的面积为函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上的定积分,即$W=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

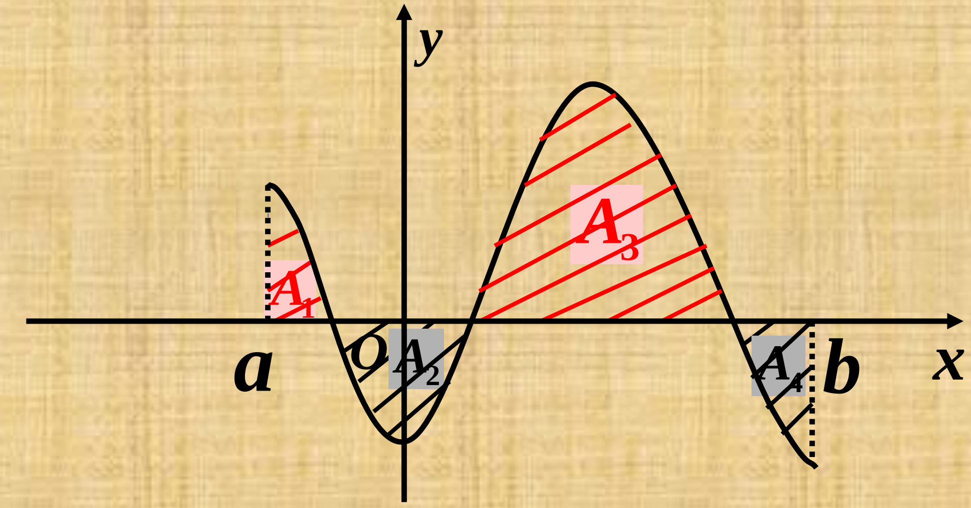
定积分的几何意义

(2)在方向平行于x轴的连续变力$F(x)$作用下,质点m沿x轴从点a位移到点b所做的功为$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

定积分的几何意义

$f(x) > 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$　　曲边梯形的面积

$f(x) < 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$　　曲边梯形的面积的负值

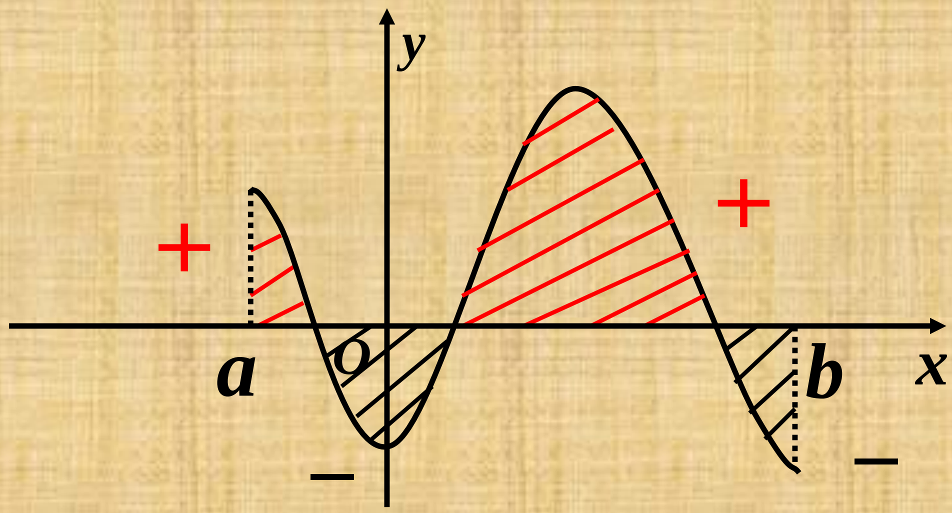


$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = +A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和.

在 x 轴上方的面积取正号;在 x 轴下方的面积取负号.

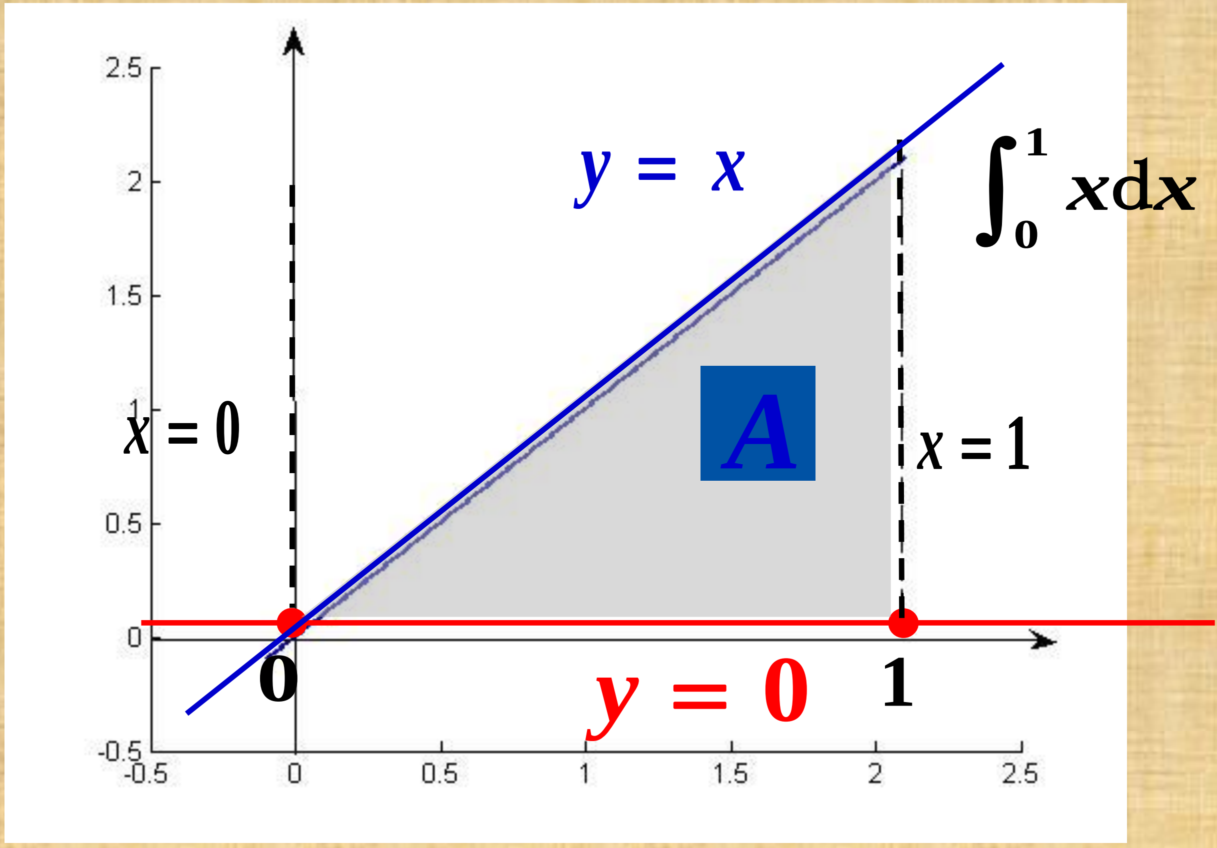


例1 利用定积分的几何意义计算下列积分.

$$(1)\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\;;\qquad (2)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\;.$$

解 $(1)\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$，

表示由$x=0, x=1, y=x$及x轴围成的三角形面积.



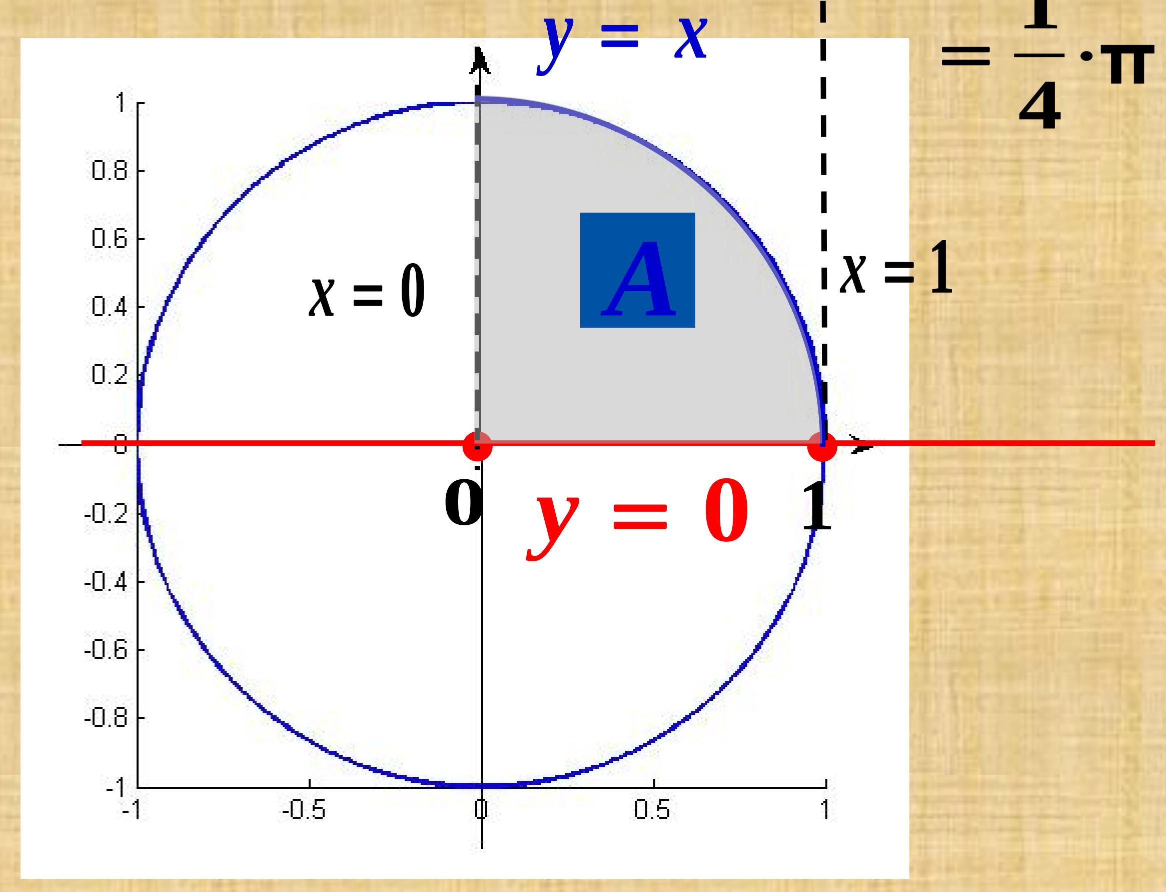
$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\;.$$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ，

表示由$x=0, x=1, y=\sqrt{1-x^2}$及x轴围成

的$\frac{1}{4}$圆面积.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 = \frac{1}{4} .$$



三、可积条件

定理 （可积的必要条件）

若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

定理 （可积的充分条件）

若$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数,或者是$[a,b]$上的单调函数,或者是$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数,则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

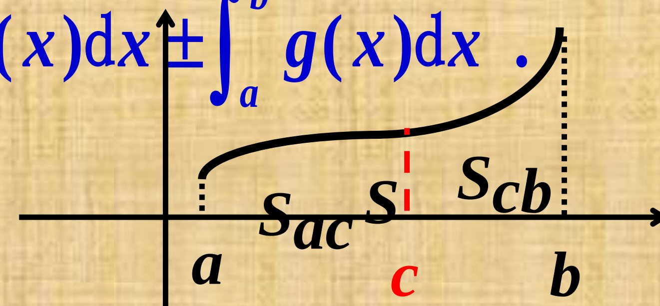
可导必连续,连续必可积,可积必有界.

四、定积分的性质

定理 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,k为常数,则$kf(x)$在$[a,b]$上也可积,且$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 用定积分的定义证明

定理 若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$f(x)\pm g(x)$在$[a,b]$上也可积,

且 $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

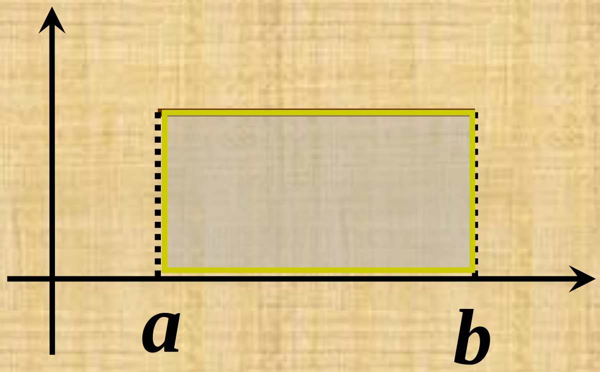


定理 （积分区间的可加性）

有界函数$f(x)$在$[a,c],[c,b]$上都可积的充要条件是$f(x)$在$[a,b]$上也可积,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

补充：不论 a,b,c的相对位置如何, 上式总成立.

定理 $\int_a^b 1\cdot \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\pi.$$

对定积分的补充规定:

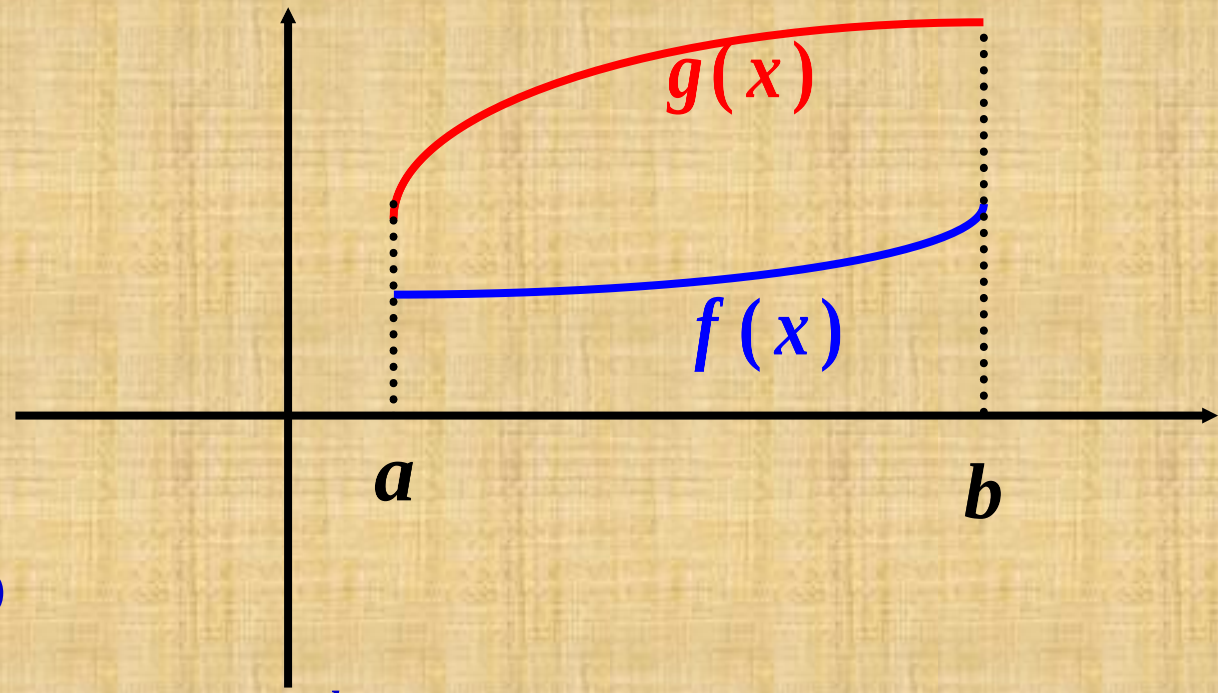
(1)当$a=b$时,令$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2)当$a>b$且$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$存在时,令$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

定理（保序性）

设$f(x)$与$g(x)$为定义在$[a,b]$上的两个可积函数,

若$f(x) \le g(x), x \in [a,b]$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.



推论（保号性）

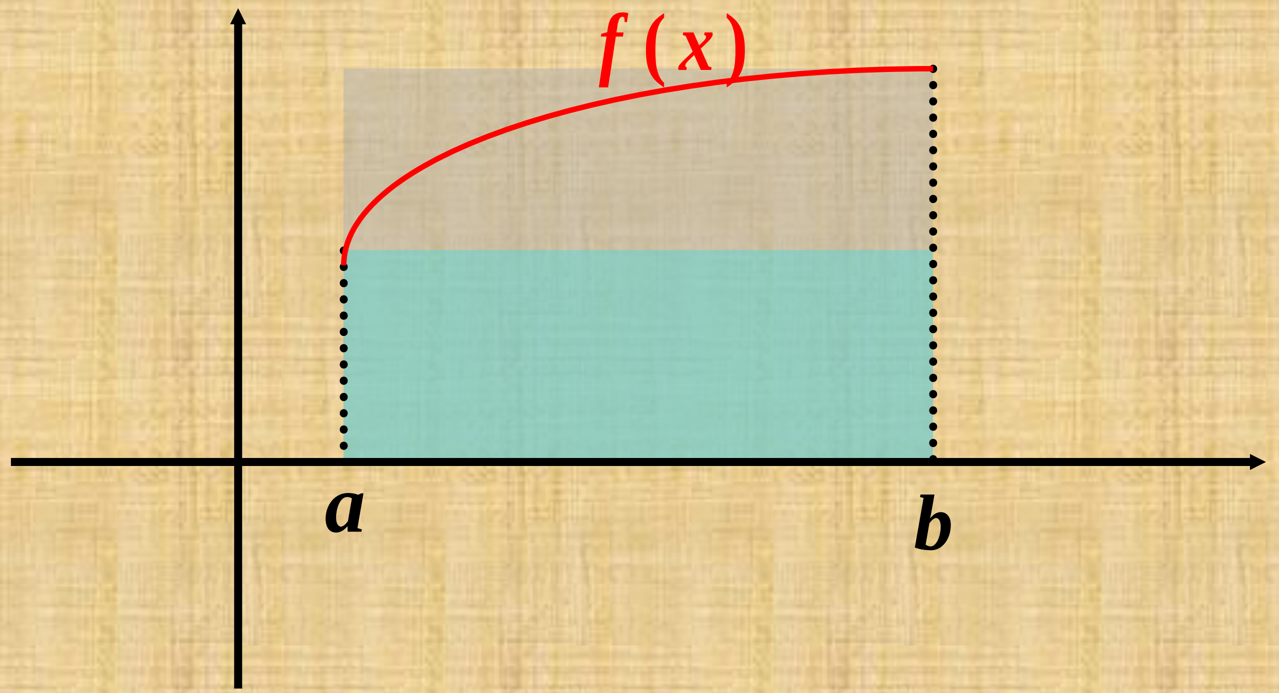
若$f(x) \ge 0, x \in [a,b]$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

定理 （有界性）

设m, M分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值.

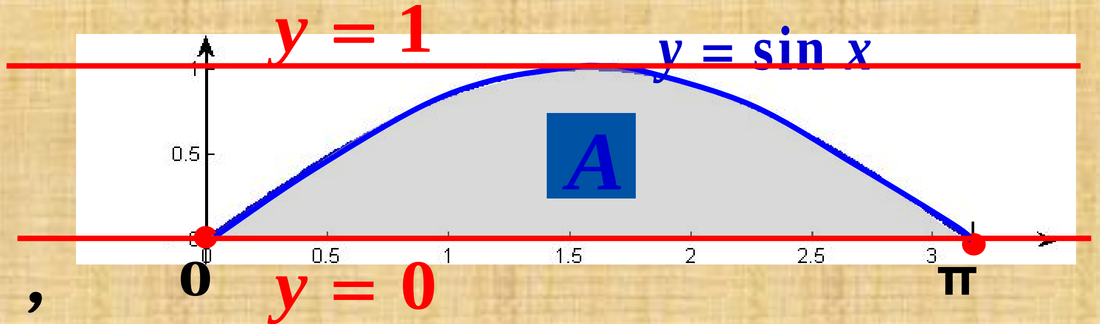
若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a) \ .$$



例2 利用定积分的有界性估计下列定积分的值.

(1) $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{4} (x^2+1)\mathrm{d}x$.



解 (1) $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$,

$\because 0 \le \sin x \le 1,\ \ x \in [0,\ \pi]$,

$$0 \cdot \pi \le \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \le 1 \cdot \pi ,$$

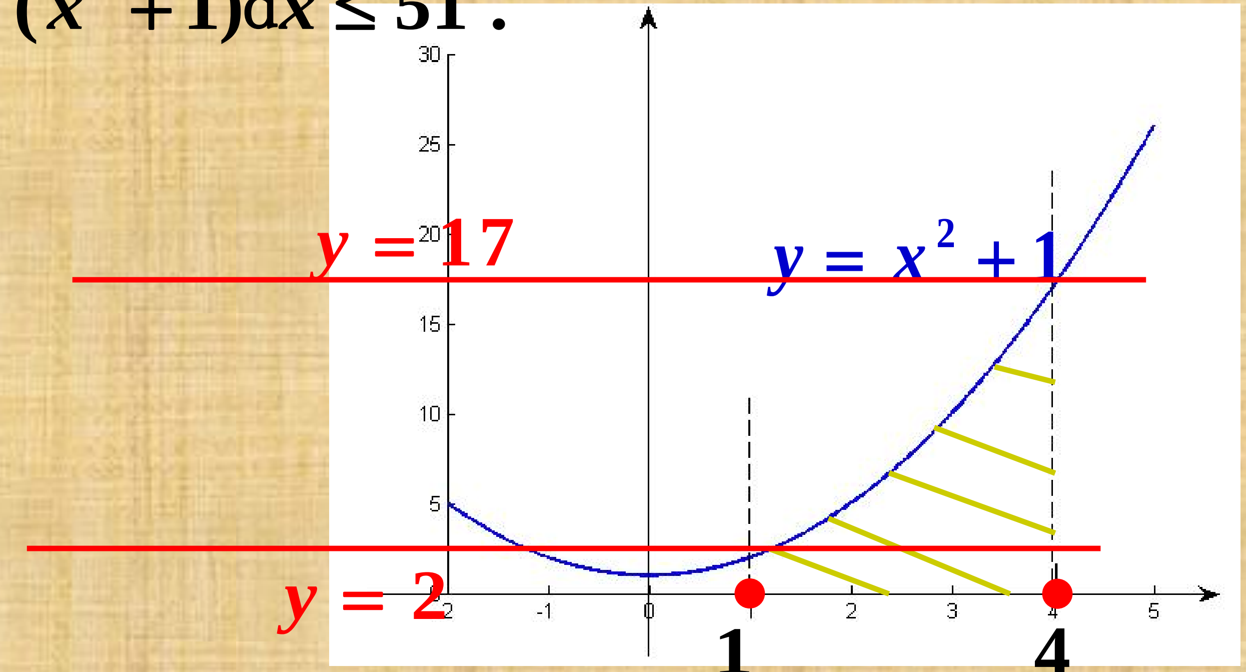
$$\therefore 0 \le \int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x \le \pi.$$

(2) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$,

$\because 2 \le x^2+1 \le 17,\ \ x\in[1,4]$,

$$2\cdot(4-1) \le \int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x \le 17\cdot(4-1)\ ,$$

$$\therefore 6 \le \int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x \le 51\ .$$

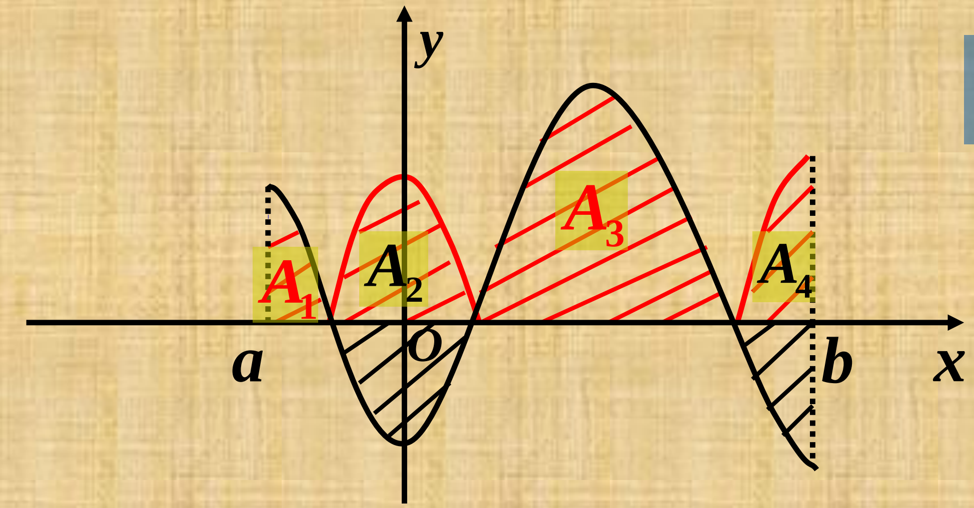


定理（绝对值不等式）

若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$|f(x)|$在$[a,b]$上也可积,

且 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \ .$$ $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

用保序性证得



$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

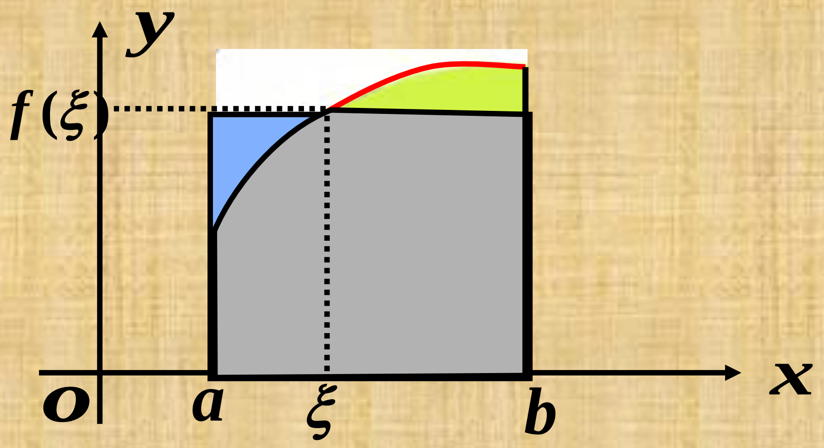
$$\int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

定理（积分中值定理）

若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则在$[a,b]$上至少存在一点ξ,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) .$$

积分中值公式的几何解释



在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ,使得以区间$[a,b]$为底边,以曲线$y=f(x)$为曲边的梯形面积等于同一底边而以$f(\xi)$为高的一个矩形面积.