第二节

矛盾转化法

—— 换元积分法与分部积分法

主要内容：

一、第一换元积分法

二、第二换元积分法

三、分部积分法

利用基本积分公式和积分的性质，虽然可以求出不少函数的原函数，但仅有这些方法远远不够. 比如，

$$\int \cos^2 x \sin x \mathrm{d}x \qquad 和 \qquad \int (ax+b)^{10} \mathrm{d}x$$

就不能用这些方法求出，本节将介绍常见的两种积分方法——换元法、分部积分法，解决具体问题时，有时需要将两种方法结合起来使用.

一、第一换元积分法

考虑 求不定积分$\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x.$

能用直接积分法吗？　不行

$$\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \int \cos(x^2)(x^2)'\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}x^2$$

$$f'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$$

$$= \int \cos u \,\mathrm{d}u \qquad 令\ x^2 = u$$

$$= \sin u + C.$$

从而$\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \sin x^2 + C.$

对于不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$,如果无法直接计算,而被积函数可以分为两个部分:

$\boxed{f(x)}=\boxed{g[\varphi(x)]\varphi'(x)}$

$\boxed{f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)}$

那么$\int \quad \mathrm{d}x=\int$

$\boxed{\mathrm{d}\varphi(x)}$

$\Big\downarrow\ \boxed{u=\varphi(x)}$

$$=\int g(u)\mathrm{d}u$$

如果$\int g(u)\mathrm{d}u$可以求出,原不定积分就解决了.这就是**第一换元法**,也称**凑微分法**.

定理 设$g(u)$及$\varphi'(x)$连续，且$F'(u)=g(u)$，

则作变量代换$u=\varphi(x)$后，

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$=\int g(u)\mathrm{d}u=F(x)+C$$

$$=F[\varphi(x)]+C.$$

证明 $[F[\underbrace{\varphi(x)}_{u}]+C]'=F'(u)\,u'_x$ 复合函数求导

$$=g(u)u'_x=g[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

根据不定积分的定义，结论成立.

第一换元法求不定积分的步骤：

关键

第一步：把被积函数$f(x)$分解成两部分因式相乘的形式，一部分是$\varphi(x)$的函数，另一部分是$\varphi(x)$的导数；

第二步：凑微分$\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(x)$，并作变量代换$u=\varphi(x)$，把关于$x$的不定积分转化成关于$u$的不定积分$\int f(u)\mathrm{d}u$.

例1 求 $\int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^3 x \sin' x \, \mathrm{d}x = \int \sin^3 x \mathrm{d}\sin x$

$g(u)$

$u = \sin x$

$= \int \quad ^3 \mathrm{d}$

$= \frac{1}{4} u^4 + C$

$u = \sin x$

$= \frac{1}{4} \quad ^4 + C.$

例2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}(a \neq 0)$.

提示与分析：变形被积函数，用凑微分法求解.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{\frac{1}{a^2}\mathrm{d}x}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}$ 分子、分母同除以 a^2

$= \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{a})^2} = \int \frac{\mathrm{d}\frac{x}{a}}{}$

$u = \frac{x}{a}$

$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan u + C$$

$$\Big\downarrow\; u = \frac{x}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

熟练后可以省略变量 u

说明 使用第一积分公式的关键在于将

$\int f(x)\mathrm{d}x$ 化为 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x.$

例4 (1)求$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x$.

解一 $\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \int \sin x \mathrm{d} \sin x$

$$= \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

解二 $\int \cos x \sin x \mathrm{d}x = \int \cos x \mathrm{d}(-\cos x)$

$$= \int \cos x \mathrm{d} \cos x = -\frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

(2)求 $\int \tan x\,\mathrm{d}x$.

解 $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(-\cos x)$

$= \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$= -\ln|\cos x| + C.$

例6 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

$f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$

解 原式$=\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+2\ln x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+2\ln x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$

$u=1+2\ln x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u|+C$

$u=1+2\ln x$

$= \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$.

凑微分法常用的几种配元形式:

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$

(2) $\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}(x^n)$

(3) $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x)$

(4) $\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}(\cos x)$

(5) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$

(6) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x)$

二、第二换元积分法

第一类换元法

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

难　求

$\varphi(x)=u$

$$\int f(u)\mathrm{d}u$$

易　求

易　求

$u=\varphi(x)$

难　求

第二类换元法

定理 设$f(x)$, $\varphi(t)$及$\varphi'(t)$均连续,且$\varphi'(t)\neq 0$,

又$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$存在原函数$F(t)$,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$$=F(t)+C$$

$$=F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

$x=\varphi(t)$的反函数

这种方法是要引入新的变量$\varphi(t)$,以使原积分容易计算.下以实例说明具体方法.

例7 求$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令$x=t^2$ $(t\geq 0)$, 则$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$ 于是

第二换元法

变量代换

原式$=\int \frac{1}{1+\sqrt{}}$ $=\int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t$

第一换元法

$=\int \frac{t+1-1}{1+t}\mathrm{d}t$

$=2\left(\int \mathrm{d}t-\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t\right)$

变量代换

$x=t^2$

$=2(t-\ln|1+t|)+C$

$=2(\sqrt{x}-\ln|1+\sqrt{x}|)+C.$

例8 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$.

解 令 $x = a\sin t,\ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t,$$

$$\mathrm{d}x = (a\sin t)'\mathrm{d}t = a\cos t\,\mathrm{d}t$$

原式 $= \int \qquad\qquad = a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}2t\right)$$

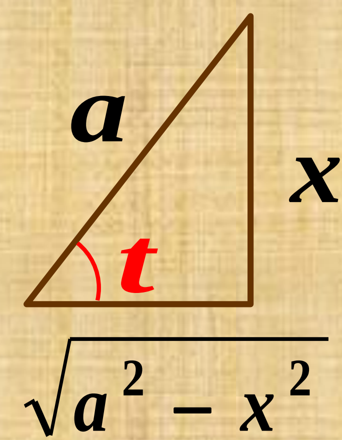
$$= \frac{a^2}{2}\left(\int \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t \,\mathrm{d}2t\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C$$

$$\sin t \cos t = \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\right) + C.$$

$$\sin t = \frac{x}{a}$$



$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

三、分部积分法

两个函数乘积的求导公式：

$$[u(x)\cdot v(x)]' = [u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x)]$$

对上式两端积分得：

$$\int \qquad \mathrm{d}x = \int \qquad \mathrm{d}x$$

$$u(x)\cdot v(x) \qquad \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int v'(x)u(x)\mathrm{d}x$$

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

定理 若$u(x)$与$v(x)$可导，且不定积分$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$存在，则$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$也存在，且有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

也可简写成 $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$

称这个等式为分部积分公式.

通过以下例题说明这个公式的应用.

例10　求$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解一　令$u=\cos x$, $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}v$

原式$=\frac{1}{2}\int\cos x\,\mathrm{d}x^2=\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin x\,\mathrm{d}x$

显然，u,v'选择不当，积分更难进行.

解二　令$u=x$　$\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x=\mathrm{d}v$

原式$=\int$　　$=x\sin x-\int\sin x\,\mathrm{d}x$

$=x\sin x+\cos x+C$.

例13 求$\int e^x \cos x\mathrm{d}x$.

解 原式$= \boxed{\int e^x \cos x\mathrm{d}x} = \int \cos x\mathrm{d}e^x$

$= e^x \cos x - \int e^x \mathrm{d}(\cos x)$ 分部积分

$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\mathrm{d}x$

$= e^x \cos x + \int \sin x\mathrm{d}e^x$

再次分部积分 $= e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x \mathrm{d}\sin x)$

$= e^x(\cos x + \sin x) - \boxed{\int e^x \cos x\mathrm{d}x}$

$\therefore \int e^x \cos x\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C.$

注意循环形式

课后作业

习题 5 (pages 142-143)

1(2)(7)， 2(1)(9)，3(1)(3)