第三节

定积分的拓展—非正常积分

主要内容：

一、问题的提出

二、反常积分的定义

三、反常积分的几何意义

四、举例

一、问题的提出

（微积分基本定理）

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,若$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

牛顿–莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \ .$$

要求满足：(1) $f(x)$在区间$[a,b]$上连续；

(2)$[a,b]$为有限区间.

反常类型

1.无限区间：$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$.

2.被积函数$f(x)$在$[a,b]$内不连续：

(1) 在左端点a处间断，

(2) 在右端点b处间断，

(3) 在区间$[a,b]$的某点处间断 .

二、反常积分的定义

称无穷区间上的积分和无界函数的积分为广义积分或反常积分, 而定积分则称为常义积分或正常积分.

本节只研究无穷限反常积分.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\ ,\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x\ ,\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\ .$$

无穷限反常积分的定义 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = ?$

设函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上有定义,且在任何有限区间$[a,A]$上可积,如果存在极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = J,$$

则称此极限J为函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上的无穷限反常积分,简称无穷限积分,

记作 $$J=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

并称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.否则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \ .$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \ .$$

类似地，可定义函数$f(x)$在无限区间$(-\infty,b]$及$(-\infty,+\infty)$上的无穷限积分：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\mathrm{d}x \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

积分区间的可加性

a任意取

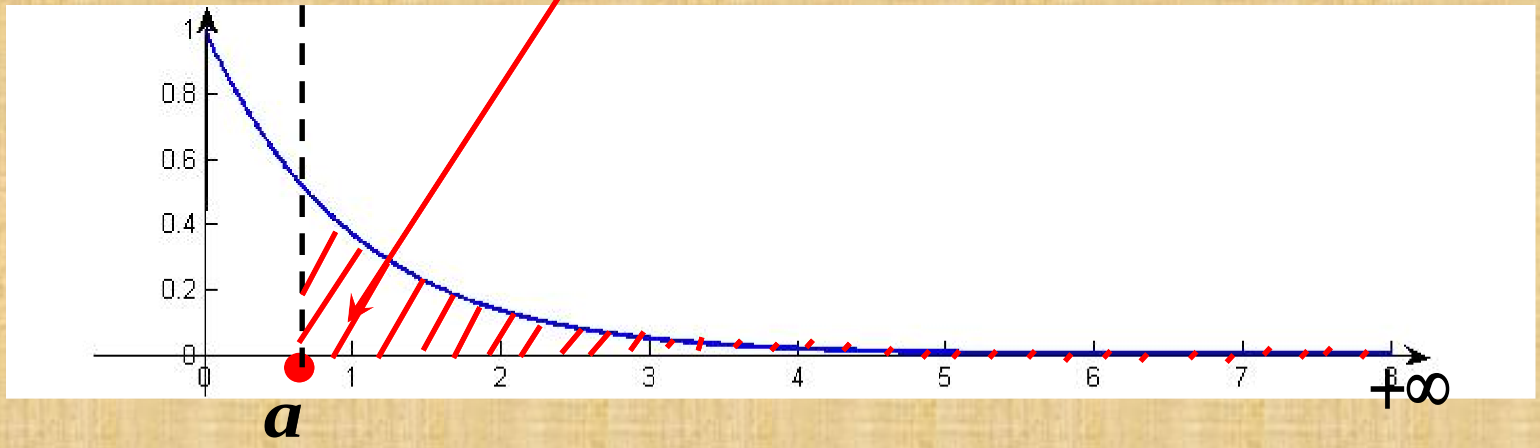
右侧两个积分都收敛时，称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，

否则，只要有一个发散，就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

三、无穷限积分的几何意义

若$f(x)\geq 0, x\in[a,+\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的几何意义：

曲线$y = f(x)$,直线$x = a$与x轴之间向右无限延伸的阴影区域有面积，并以$\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$极限的值作为它的面积.



四、举例

例1 计算$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)\mathrm{d}x$$

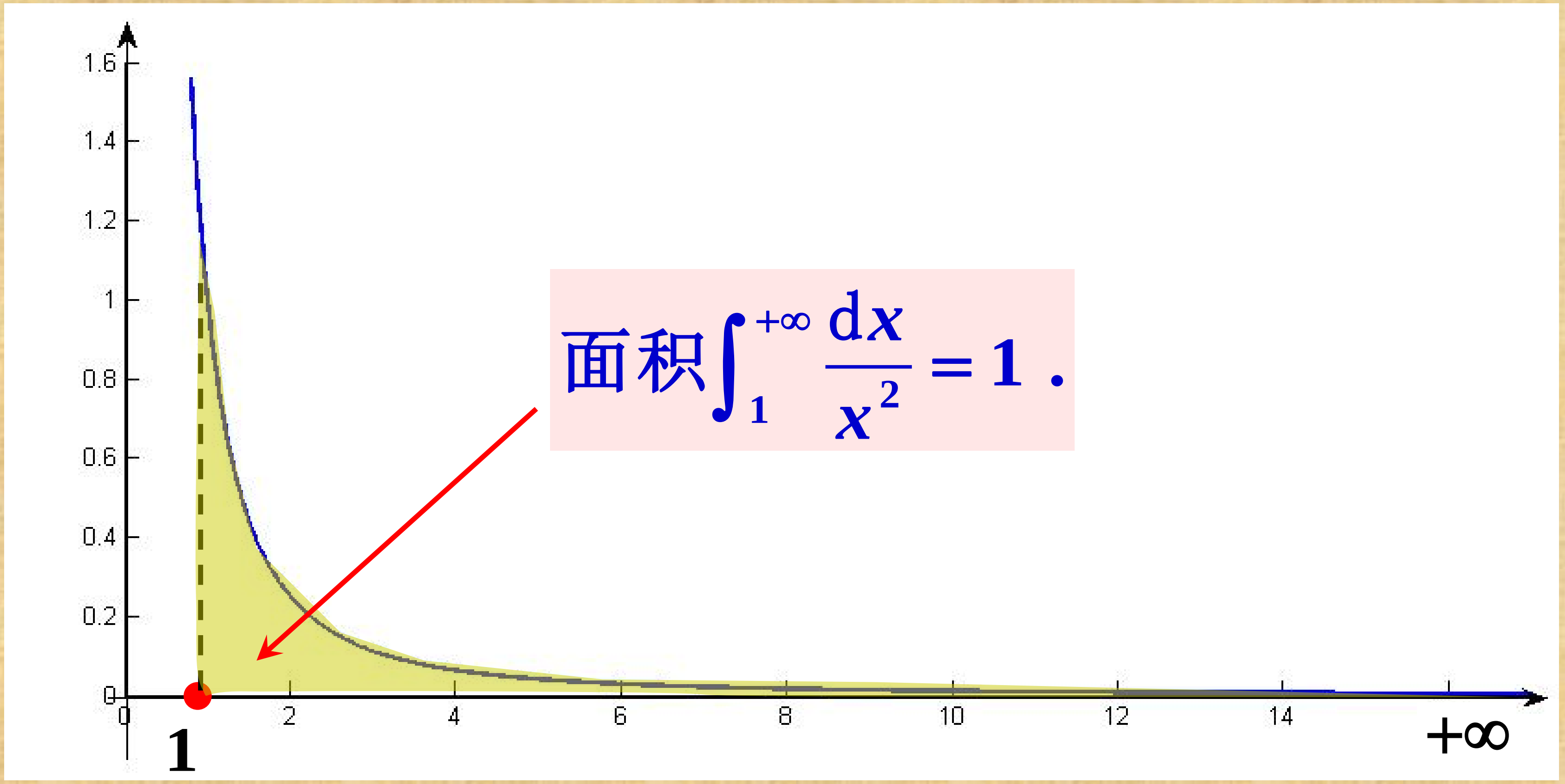
解 $$\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A}\right)$$

$$=1.$$

例1 计算$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.



反常积分

1. 无穷限的反常积分,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \mathrm{d}x \cancel{=} 0 \ ,$$

2. 被积函数具有无穷间断点的反常积分.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \cancel{=} \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0.$$