第二节

计算不定式极限的一般方法

—— 洛必达法则

主要内容：

一、两个基本类型不定式

二、其他类型的不定式

在第二章介绍极限时,曾用特定的办法计算过简单的两个无穷小量（无穷大量）之比的极限，而无一般法则.本节将以导数为工具，给出计算不定式极限的一般方法，该方法称为洛必达（**L' Hospital**，法国人，**1661 — 1704**）法则.

一、两个基本类型不定式

如果当$x \to a$(或$x \to \infty$)时,两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于0,或都趋于∞,那么极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在,也可能不存在.通常将这种极限叫作不定式,分别记为$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

1. $\dfrac{0}{0}$型不定式

定理　如果函数$f(x)$和$g(x)$满足

(1) $x \to a$(或$x \to \infty$)时, $f(x) \to 0, g(x) \to 0$;

(2) $f'(x), g'(x)$存在,且$g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或是$\infty$）,

那么 $\boxed{\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$.

如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), g'(x)$ 满足定理的条件，可以继续使用洛必达法则，即

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots.$$

例1 用洛必达法则计算 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} \boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

用倍角公式化为第一个重要极限求.

解一 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{}{x^2}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

$$= \frac{1}{2}.$$

该题用洛必达法则计算更简单.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解二 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$=\dfrac{1}{2}$.

在用洛必达法则求极限时，与以前学过的求极限方法相结合更好！

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$. $\dfrac{0}{0}$型

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x^2-x)'}$$

$$=\frac{e^0}{2\times 0-1}$$

$$=-1.$$

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式

定理　如果函数$f(x)$和$g(x)$满足

(1) $x \to a$(或$x \to \infty$)时, $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$;

(2) $f'(x), g'(x)$存在,且$g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或是$\infty$）,

那么 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^n)'}$

无穷大量

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

若求导之后出现繁分式，一般应化简后再判断是否为$\dfrac{0}{0}$型或者$\dfrac{\infty}{\infty}$型，然后再决定是否能继续用洛必达法则.

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)'}{(\frac{1}{x})'}$. $(\frac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$ $(\frac{\infty}{\infty})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

还有其他方法吗？

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{1+x^2}=1.$$

二、其他类型的不定式

前述$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型是两种**最基本**的不定式，

除此之外，还有$0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},\infty^{0}$和$0^{0}$等类型的不定式，这些不定式都可以通过适当的变形化为$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型.

1. $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \dfrac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\dfrac{1}{0}$

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x$. $(0\cdot\infty)$

提示与分析:

x与$\cot 2x$，哪部分做分母，要以转化后极限易算为准则.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x)'}{(\tan 2x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sec^2 2x}=\frac{1}{2}.$$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例10 求 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\cdot\sin x)'}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

幂函数与对数函数相乘，将幂函数放在分母运算简便.

步骤:
$$\left.\begin{array}{l} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{array}{l} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{array}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$$

例12 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}$ $(0\cdot\infty)$ $= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

e^x是连续函数

洛必达法则

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \quad \therefore \lim_{x\to 0^+} x^x = \mathrm{e}^0 = 1.$$

注意：洛必达法则的使用条件.

例15 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$. $(\dfrac{\infty}{\infty})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

极限不存在

洛必达法则失效

利用无穷小量的性质求解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}\cos x)=1.$$

无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.