# 第二节

# 微积分的研究对象 —— 函数

主要内容：

函数、基本初等函数与复合函数

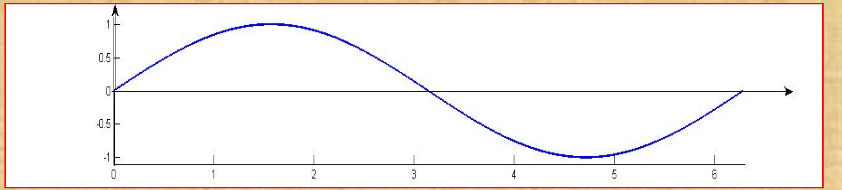
# 一、函数

**常量：** 保持不变的量.

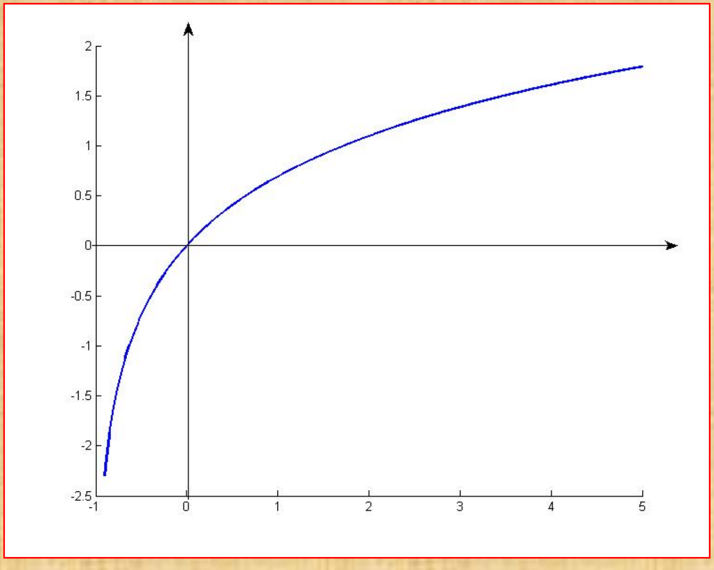
如常数 1、－2、50、 e 、π

**变量：** 可以取不同值的量.

如 sinx 中的 $x$, sinx




ln(1+ $x$)中的 $x$ , ln(1+ $x$)



定义（传统定义） 如果在变化过程中有两个变量$x$、$y$, 在 $x$某个变化范围 $X$ 内的每一确定的值, 按照某个对应法则 $f$, $y$ 都有唯一确定的值与它对应, 那么 $y$ 就是 $x$ 的函数. 记作$y = f(x)$， 称 $x$ 为自变量, $X$ 是 $f$ 的定义域,全体函数值的集合称作函数的值域.

函数的定义表明了函数的结构.

函数是由定义域、对应法则、值域组成的.

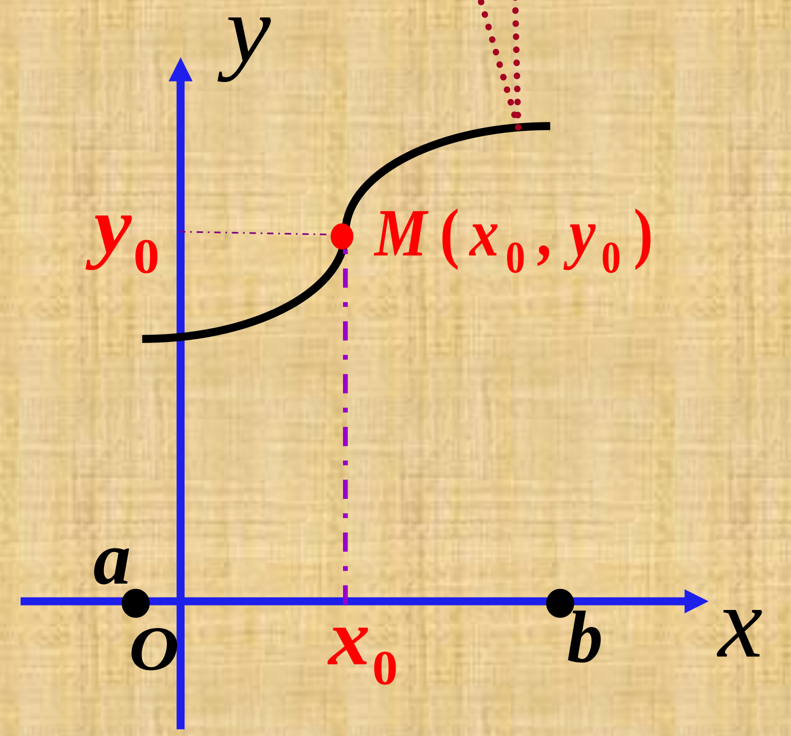
函数的模型如同一部机器，把$X$中任一原材料$x$输入$f(x)$,就可产出实数$y = f(x)$.

定义域

$y=f(x)$

$$y = f(x),\ x \in D \qquad (D=[a,b])$$

因变量　　自变量




定义域是自变量所能取的, 使算式有意义的一切实数值.

对应规律的表示方法: 解析法、图像法、列表法.

如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相等的.

如 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

如果两个函数定义域和对应法则二者有一个不同，那么这两个函数是不同的.

如 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$

实际上 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$.

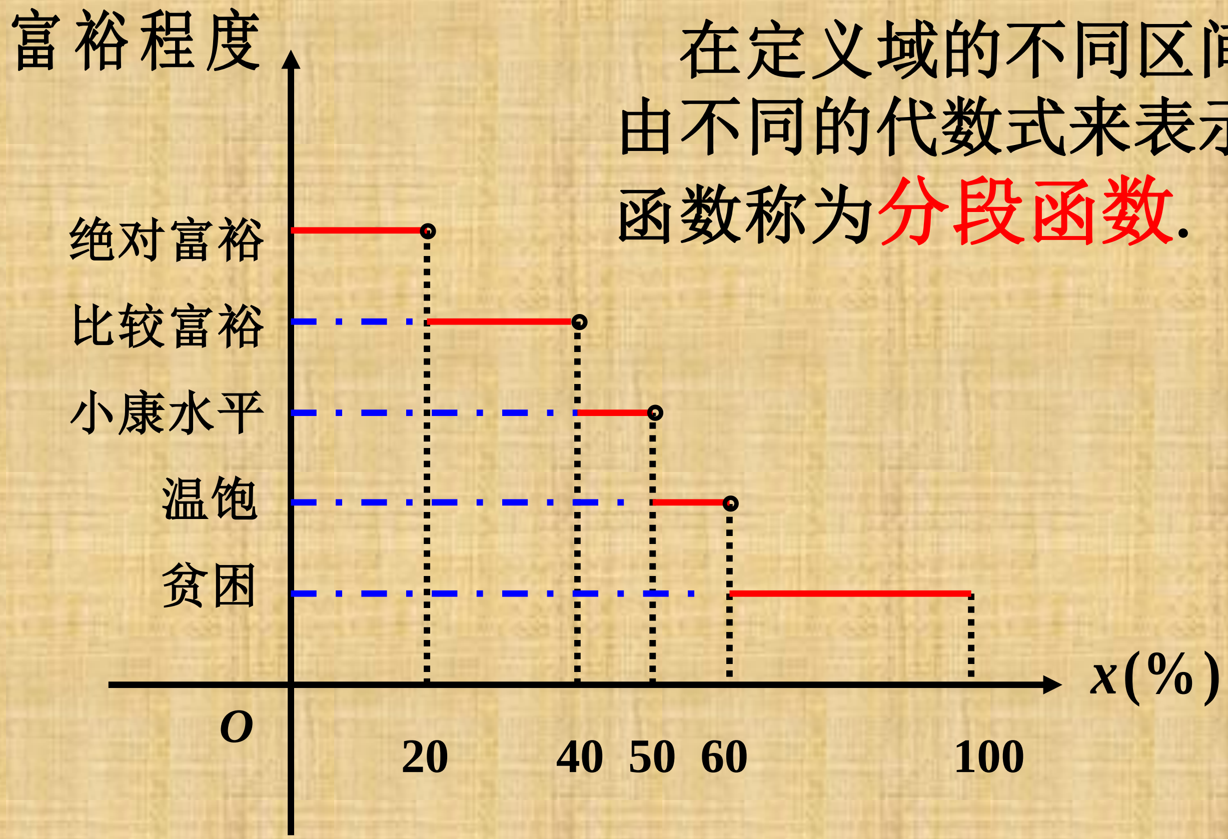
例1 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求$f(f(x)-1)$.

解 $f(x)-1=\dfrac{1}{1+x^2}-1=\dfrac{1-1-x^2}{1+x^2}$

$$=-\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\therefore f(f(x)-1)=\frac{1}{1+\left(-\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)^2}=\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2+x^4}.$$

例2 在统计学上饮食消费占日常支出的比例称为恩格尔系数，它反映了一个国家的富裕程度，也是国际通用的一项重要指标.




在定义域的不同区间上由不同的代数式来表示的函数称为**分段函数**.

## 函数的性质：

单调性、奇偶性、周期性.

**有界性：**

设$y = f(x)$的定义域是$(a,b)$，$M \ge 0$，若对$x \in (a,b)$满足$|f(x)| \le M$，称$f(x)$是区间$(a,b)$内的有界函数.

如：$\sin x$、$\cos x$在定义域内是有界函数：

$|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1.$

$3x^2$在定义域内是无界函数，而在$[-1,1]$内有界：$|3x^2| \le 3.$

## 二、反函数的定义

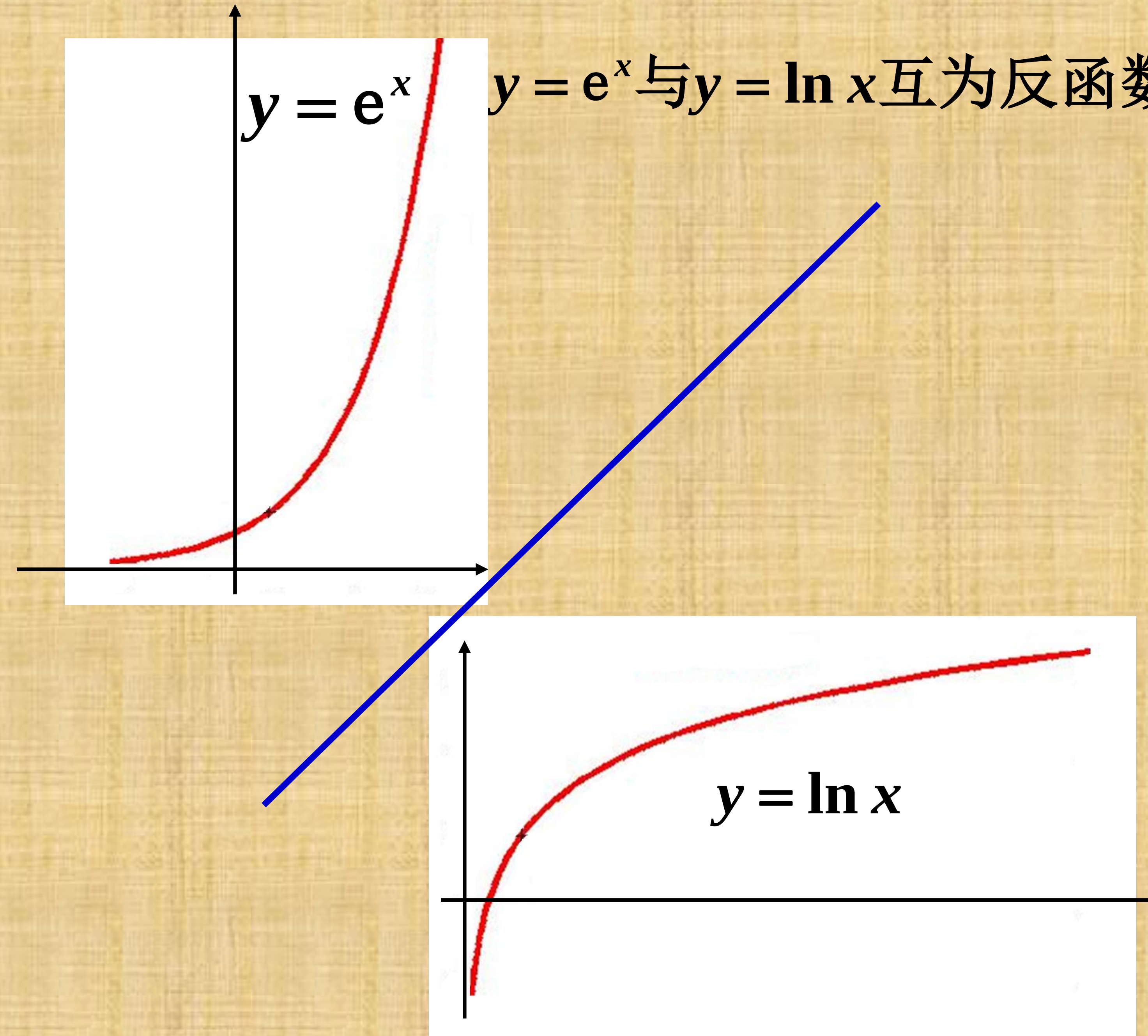
设函数 $y=f(x), x\in D$ ,$Y$ 是值域. 如果对于 $Y$ 内的任一 $y$, $D$内都有唯一确定的 $x$ 与之对应，使 $f(x)=y$, 则在$Y$ 上确定了一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$的反函数.

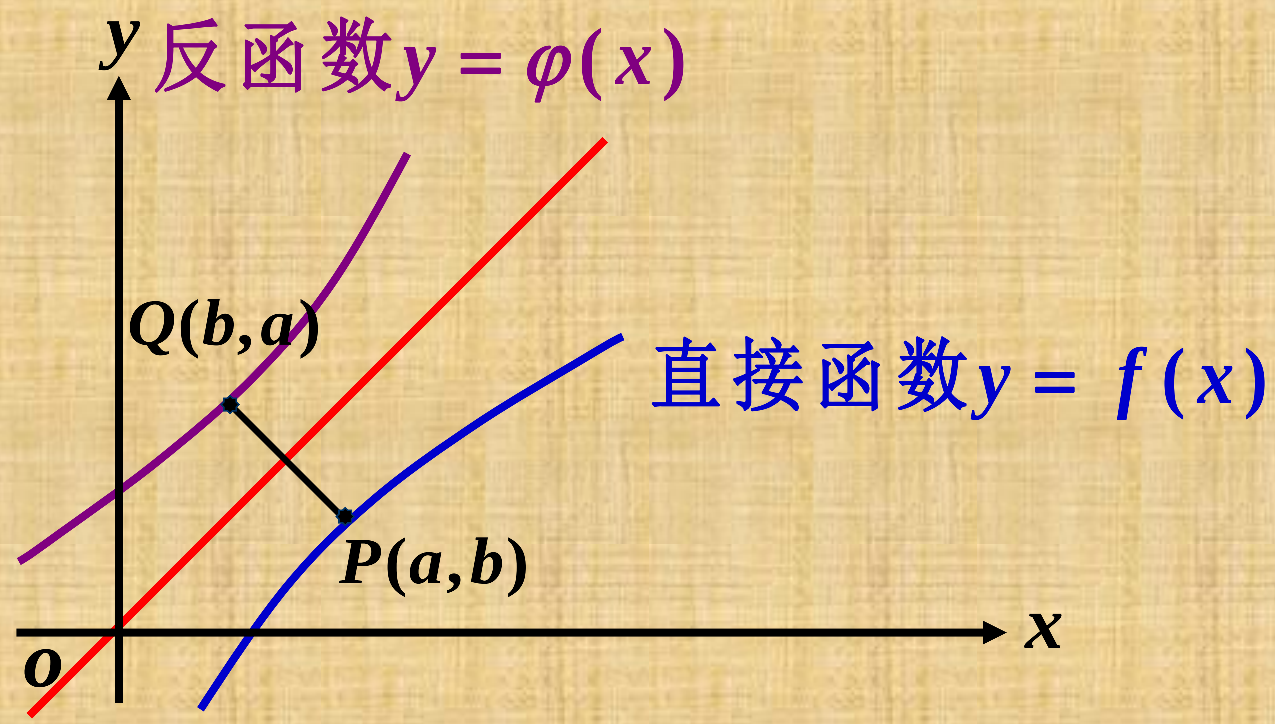
记作 $x=f^{-1}(y), y\in Y$.

由$y=f(x)$确定的$y=f^{-1}(x)$称为反函数.

原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

$y = \mathrm{e}^x$与$y = \ln x$互为反函数.






直接函数与反函数的图形关于直线 $y=x$对称.

**反函数存在性定理**：单调函数存在反函数，且函数与其反函数的单调性相同.

例4 设$y = x^2 - 1$，求其反函数.

提示与分析：由反函数存在性定理，当函数$y$为单调函数时，才有反函数，所以$y = x^2 - 1$在（$-\infty$，$+\infty$）内不存在反函数. 需将（$-\infty$，$+\infty$）分成$x \geq 0$与$x < 0$两个区间，再求$y$的反函数.

解 $\because x < 0$时，$y$单调递减；

$x \geq 0$时，$y$单调递增，

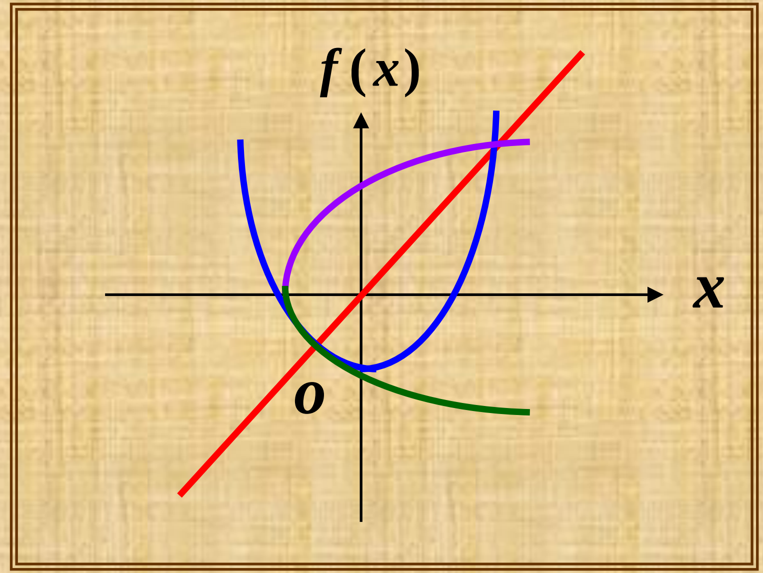
$\therefore y$在（$-\infty$，$+\infty$）内不存在反函数.

原函数在单调增区间$[0,+\infty)$,存在反函数$y=\sqrt{x+1}$,

定义域为$D=[-1,+\infty)$.

在单调减区间$(-\infty,0]$,存在反函数$y=-\sqrt{x+1}$,

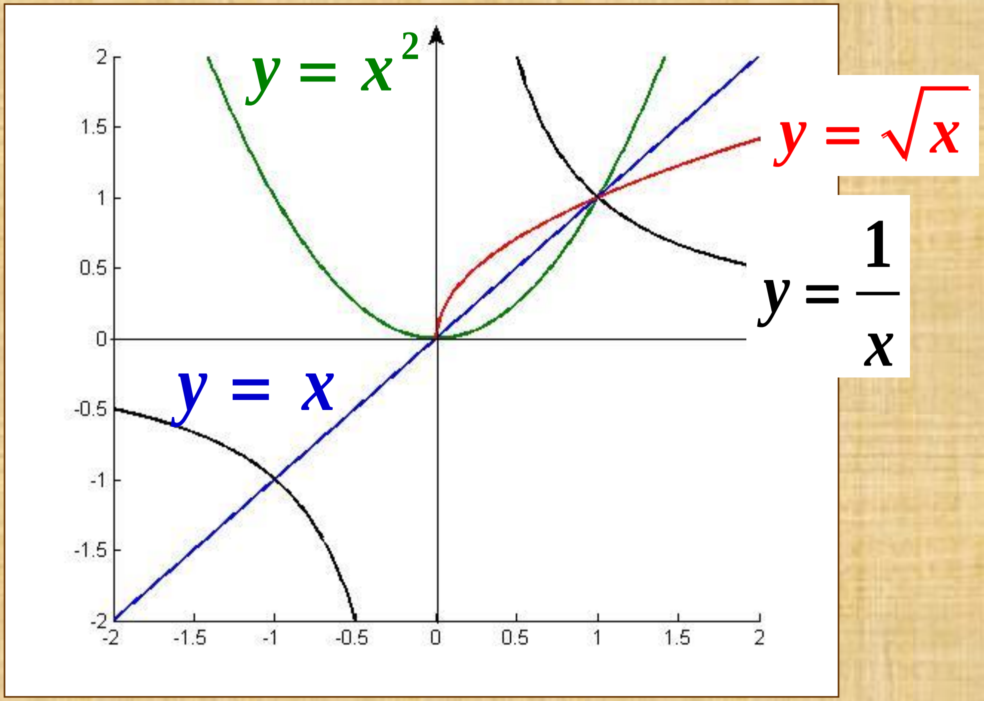
定义域为$D=[-1,+\infty)$.



# 三、基本初等函数

## 1. 幂函数

$y = x^{\mu}$　($\mu$是常数)，在（$0,+\infty$）内总有定义



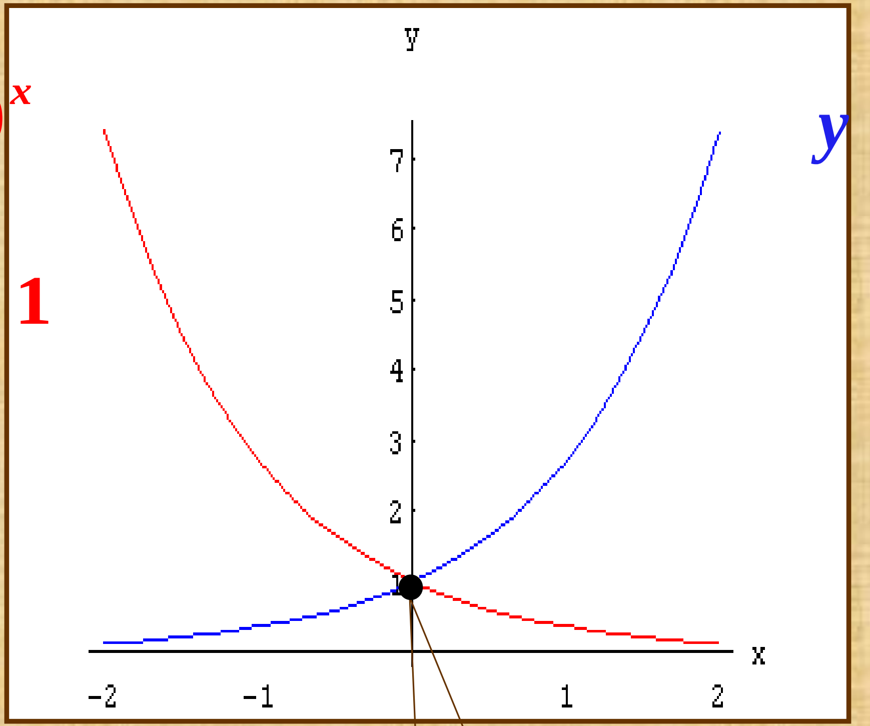
## 2. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$y = \mathrm{e}^x$ 是常用的指数函数

$y = (\frac{1}{a})^x$

$0 < \frac{1}{a} < 1$



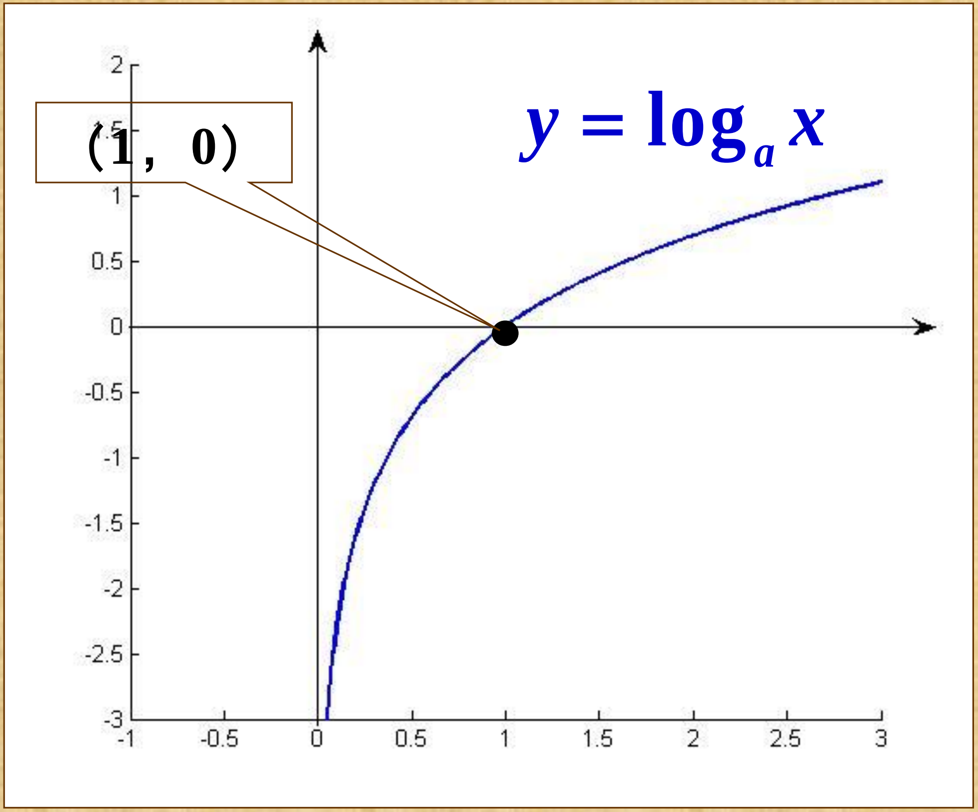

$y = a^x$（$a > 1$）

(0， 1)

## 3. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

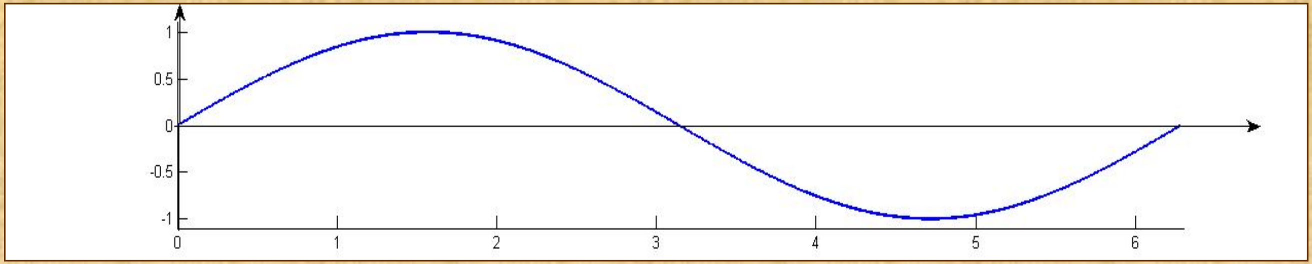
$y = \ln x$是常用的对数函数



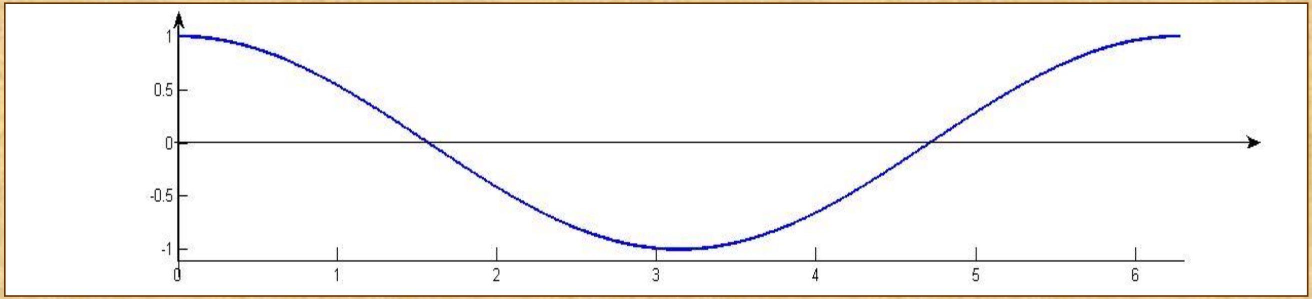
# 4. 三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域是（$-\infty$，$+\infty$），值域是[－1，1]，以$2\pi$为最小周期，有界函数.

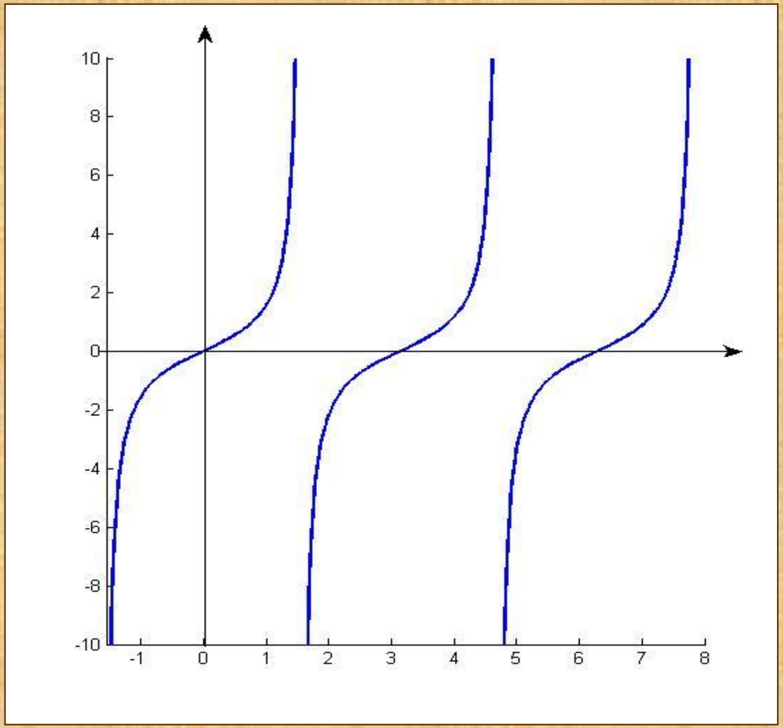
正弦函数 $y=\sin x$




余弦函数 $y=\cos x$



# 正切函数　$y = \tan x$

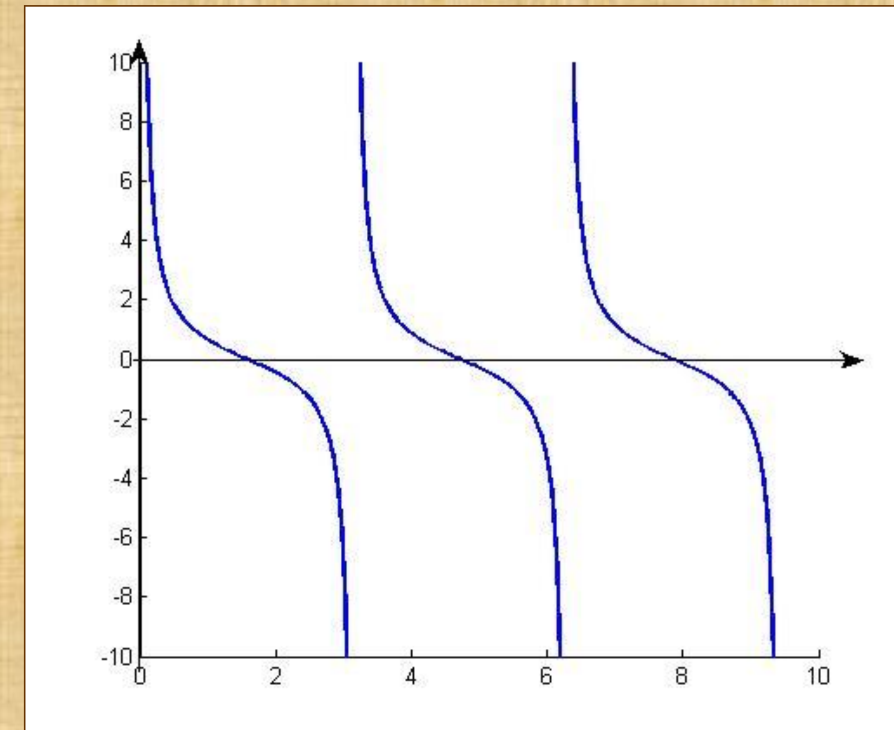



定义域：$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in Z$；值域$(-\infty, +\infty)$，

以 $\pi$ 为周期，在每个开区间$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$上

递增.

# 余切函数　$y = \cot x$



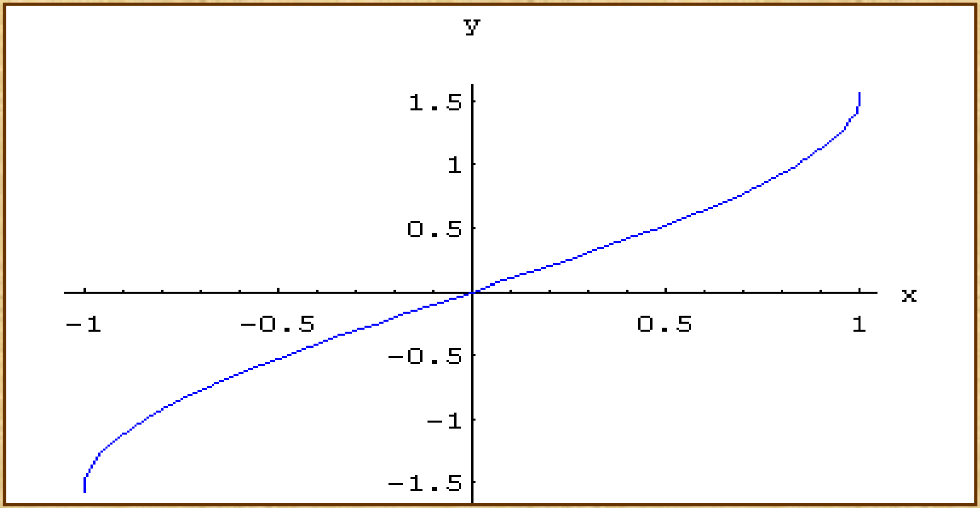

定义域：$(k\pi,(k+1)\pi), k \in Z$；值域$(-\infty,+\infty)$，以 $\pi$ 为周期，在每个开区间 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 上递减.

## 5. 反三角函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$

定义域 $[-1,1]$, 值域 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

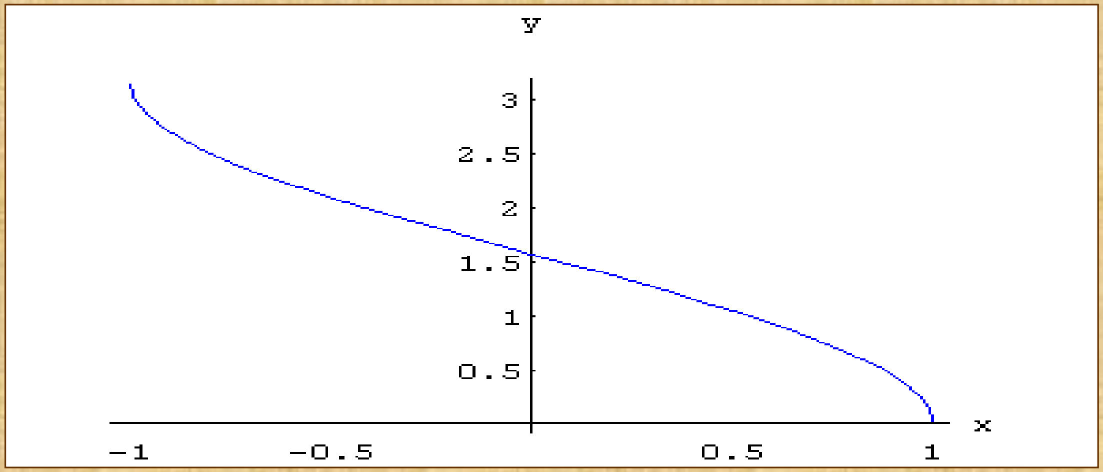
$\sin(\arcsin x) = x.$



反余弦函数 $y = \arccos x$

定义域 $[-1,1]$, 值域 $[0, \pi]$

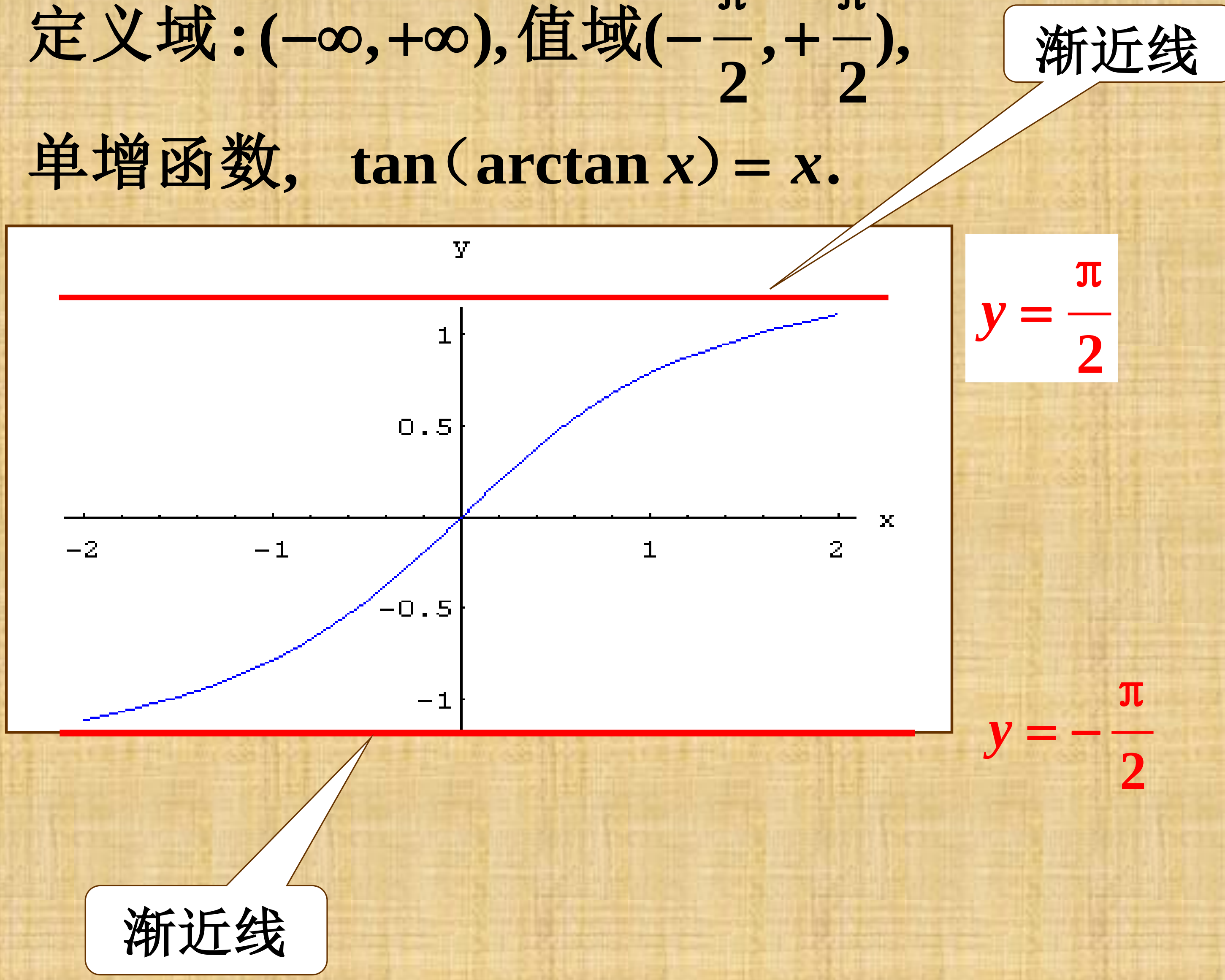
$\cos(\arccos x) = x$.



反正切函数 $y = \arctan x$

定义域:$(-\infty, +\infty)$, 值域$(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$,

单增函数, $\tan(\arctan x) = x$.



把常数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为 **基本初等函数**.

例5 讨论$y = \arcsin\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域.

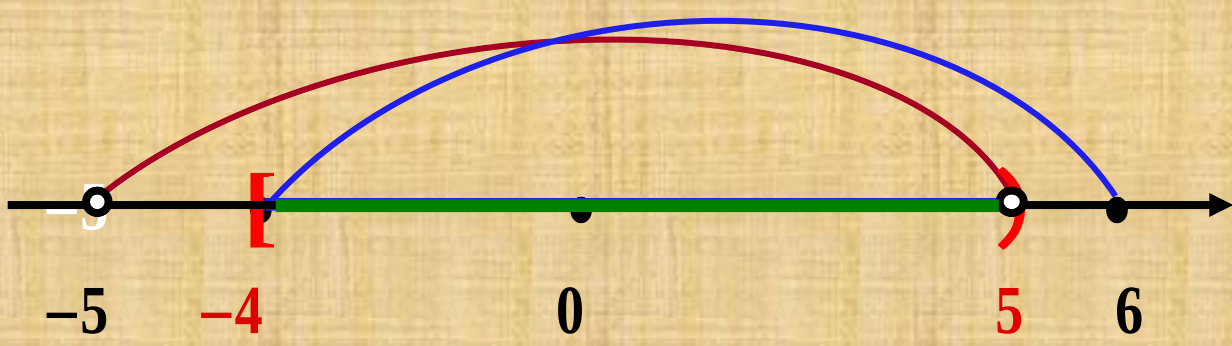
提示与分析:

所给函数是两个函数之和形式，所以$f(x)$的定义域是使两个函数同时有意义的取值范围，即应是两个函数定义域的交集.

解 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right| \le 1, x^2 < 25, \Leftrightarrow |x-1| \le 5$且$|x| < 5$

$\Leftrightarrow -4 \le x \le 6$且$-5 < x < 5$,

于是,定义域是[    ,    ).




两个函数和的定义域，是这两个函数定义域的公共部分.

# 四、复合函数

设$y = f(u), u \in U; u = \phi(x), x \in X$

由 ……定的函数值$u = \phi(x)$落……

函……$u)$的定义域$U$内,则称

$y = f[\phi(x)]$为复合函数.

$y = f(u)$称为外层函数

$u = \phi(x)$称为里层函数

自变量

中间变量

如, $y = \sqrt{1 - x^2}$是由$\underline{y = \sqrt{u}}, \underline{u = 1 - x^2}$复合而得的.

基本初等函数

**初等函数:** 由基本
函数经过有限次四
算和复合运算构成
数并可用一个式子表示
的函数.

$$y=\sqrt{\frac{x^2-1}{\cos 2x}}+\ln[1+\arcsin(x^3+\frac{1}{3})]$$

表面形式复杂, 但依然是初等函数.

如, $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$ 是

由 $y=e^u, u=\sqrt{v}, v=1-x^2$

复合而得的.

指数函数

幂函数

多项式函数

分段函数不是初等函数.

**分解复合函数原则:**

观察各层函数是否为基本初等函数或多项式函数.

$y=\arcsin u$的定义域是$[-1,1]$,
而$u=2+x^2>1$,这两个函数是
不能复合成一个函数的.

**注意:**

1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

例如 $y=\arcsin u$,

$u=2+x^2$; $\quad y \cancel{=} \arcsin(2+x^2)$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

中间变量

自变量

例如 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$, $y=\sqrt{u}$, $u=\cot v$, $v=\frac{x}{2}$.

把一个复合函数分成不同层次的函数,叫做复合函数的分解.

## 综上所论:

**初等函数的结构关系**

- 复合函数 $y=f(u),u=\varphi(x)\to y=f[\varphi(x)]$

$\downarrow$

- 初等函数：由基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合运算构成

$\uparrow$

- 基本初等函数
  - 指 数 函 数 $y=a^x, y=\mathrm{e}^x$
  - 对 数 函 数 $y=\log_a x$， $y=\ln x$
  - 幂 函 数 $y=x^\mu$
  - 三角函数 $y=\sin x$， $y=\cos x$， $y=\tan x$， $y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$
  - 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x$， $y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$
  - 常数 $y=c$
- ------反函数 $y=f^{-1}(x)$

## 五、应用

例6 用函数关系探测古墓的年代

考古人员研究了长沙马王堆一号古墓，发现了棺盖板是由杉木做成的，并且盖板所含的$C^{14}$放射性物质和现代杉木的$C^{14}$的比值为76.7%，问此古墓是什么时候建的？

解 已知放射性物质$C^{14}$的半衰期为5570 年，并且生物体死亡后$C^{14}$的含量$b$与原始含量$a$随时间 $t$ 的变化满足下面的函数关系：

$b = a\mathrm{e}^{-ct}$，$c$为常数，

$t = 5570$时， $\mathrm{e}^{-ct} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$,

可得，$c=\dfrac{\ln 0.5}{-5570}\approx 1.244\times 10^{-4}$,

即有 $\dfrac{b}{a}=0.767=\mathrm{e}^{-1.244\times 10^{-4}t}$,

$\therefore t=-\dfrac{\ln 0.767}{1.244\times 10^{-4}}\approx 2132$(年).

因此推算出古墓是在2132年前建成的.

# 课后作业

习题 1 (page 26-27)

2，3（2），4（6），5（3），8