第一章

微积分的基础和研究对象



第一节

微积分的基础——集合、实数和极限

主要内容实数与邻域

实数

将所学过的数归纳如下:

对加法、乘法、 减法封闭

有理点在数轴上稠密分 布,不具有连续性

整数(□)

(□)有理数

负整数(□⁻)

对加法、乘 法封闭,对 减法不封闭

(口)实数

(□)复数<

(□°)无理数 无限不循环小数 正无理数 负无理数

具有连续性

虚数

微积分研究的是连续变化的事物在数 量方面的关系,今后所指的数是实数.

二. 邻域

邻域的定义:

与点 x_0 的距离小于 δ (>0)的全体实数的集合称作点 x_0 的邻域,记作 $U(x_0, \delta)$,称 x_0 为邻域的中心, δ 为邻域的半径.

邻域的表示方法:

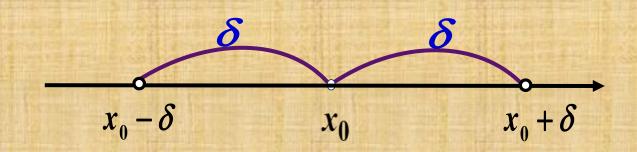
集合表示法: $\left\{x \mid |x-x_0| < \delta\right\}$

不等式表示法: $|x-x_0| < \delta$

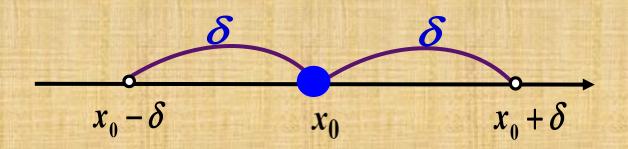
区间表示法: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

几何表示法: $x_0 - \delta$ x_0 $x_0 + \delta$

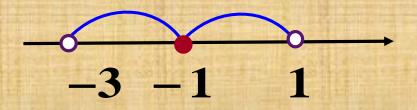
去心邻域: $U(x_0, \delta)$ 中不包括 $x_0, U^{\circ}(x_0, \delta)$



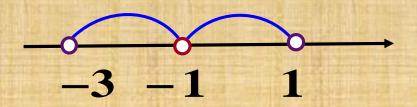
邻域 $U(x_0, \delta)$



比如: $U(-1,2) \Leftrightarrow (-3,1)$



$$U^{\circ}(-1,2) \Leftrightarrow (-3,-1) \cup (-1,1)$$



例1 用邻域符号和区间符号分别表示不等式 $|2x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\varepsilon > 0)$ 所确定的x 的范围.

解 已知不等式 $|2x+1| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\varepsilon > 0)$

$$\left|2x+1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \left|2\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

这是以 为中心,以 为半径的邻域

用邻域符号表示是
$$U(-\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{4})$$

用区间表示是
$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

