第三节
极限应用的一个例子——连续函数

主要内容：

一、连续函数的概念

二、初等函数的连续性

三、闭区间上连续函数的性质

一、连续函数

连续函数是微积分研究的主要对象.

增量的定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X, 当自变量从定点 x_0 变化到新的点 x 时,它们的差称为自变量的增量(或叫做改变量).记做

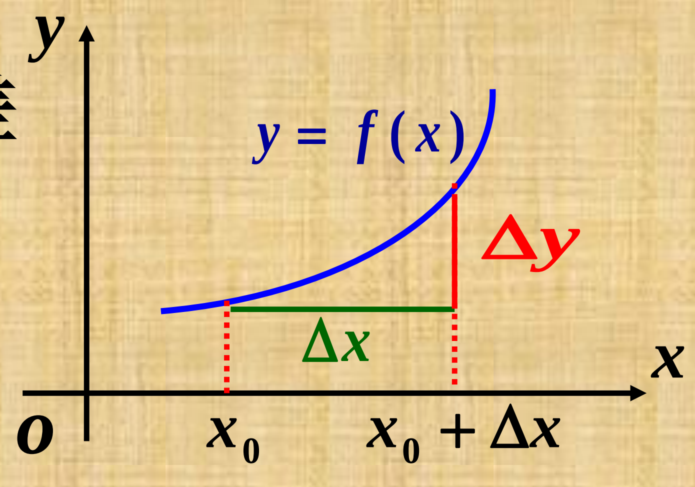
$\Delta x = x - x_0$, 自然 $x = x_0 + \Delta x$.

对应的函数值由 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0 + \Delta x)$, 其差

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

称作函数的增量,

即 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.



注意：Δx可能是正的，也可能是负的. 比如：

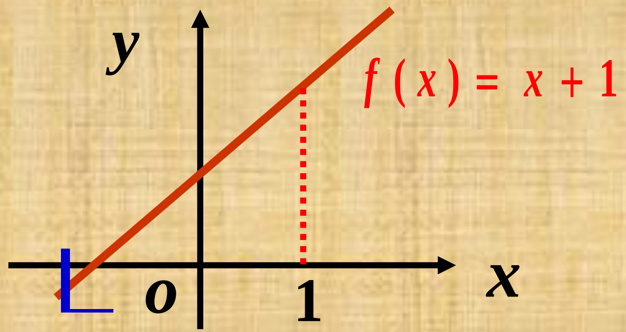
$$x_0 = 2, x = 1.5;$$

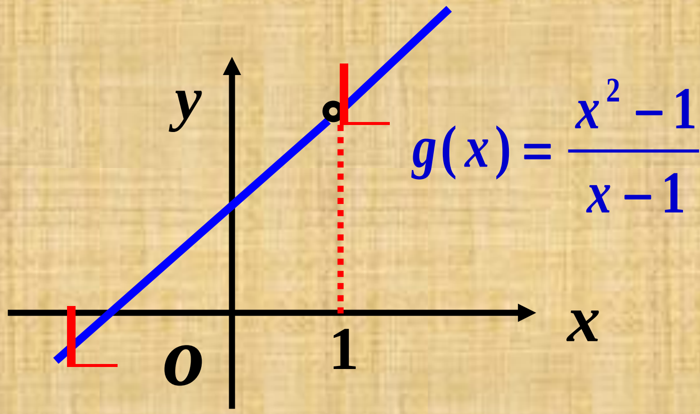
$$\Delta x = x - x_0 = -0.5 < 0$$

$$x_0 = 1, x = 1.5;$$

$$\Delta x = x - x_0 = 0.5 > 0$$

下面的问题帮助我们理解连续的定义：





$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 = f(1).$$

从图形看$f(x)$的曲线在$x=1$处是连续的.

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

尽管$f(x),g(x)$在$x=1$点的性质不同，但当$x\to 1$时，它们的极限却是一样的.

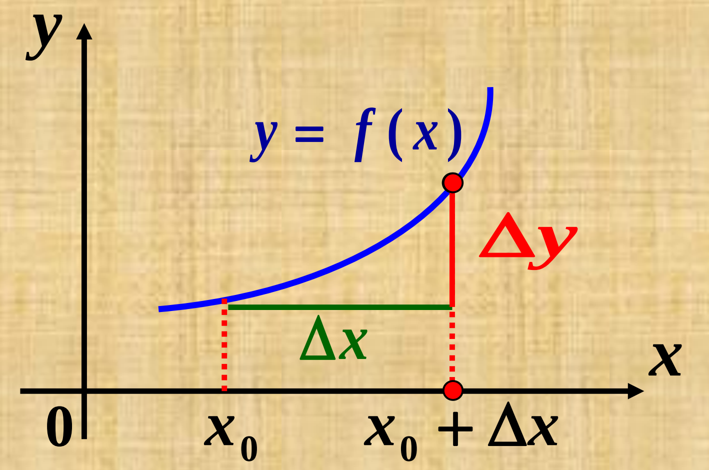
连续函数的定义

定义一 设函数$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义,如果当自变量的增量Δx趋向于0时，对应的函数增量Δy也趋向于0，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,

或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那么就称函数

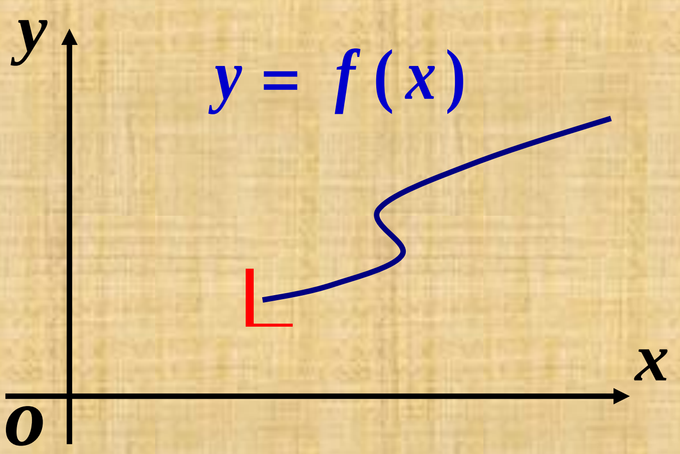
$f(x)$在点x_0连续,

也称x_0是$f(x)$的连续点.



函数在一点连续的本质：自变量变化很小时，因变量（函数值）变化也很小.

若函数在一个区间内点点连续，就称这个函数是这个区间上的连续函数.



连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

在考虑函数的连续性时，我们一般分三步考虑：

1） 先给定Δx;

2） 求出Δy;

3） 考察当$\Delta x \to 0$时，是否有$\Delta y \to 0$.

例1 证明 $y = \sin x$ 在定义域内连续.

分析与提示：用定义一证明函数在某点x_0连续，需先求出Δy，考察当$\Delta x \to 0$时，是否$\Delta y \to 0$.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

证 $$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

由于 $$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1, \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le \frac{|\Delta x|}{2}$$

$$|\sin x| \le |x|$$

于是 $$|\Delta y| = \left|2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le |\Delta x|$$

于是 $|\Delta y| = \left|2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right| \cdot \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le |\Delta x|$

显然当$\Delta x \to 0$时， $\Delta y \to 0.$

$0 \le |\Delta y| \le |\Delta x| \to 0$

因此 $y = \sin x$ 在定义域内连续.

定义二　设函数$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义，如果当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限存在且等于$f(x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，

那么就称函数$f(x)$在点x_0连续.

由定义一　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

$f(x)$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

例2 证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$的连续性.

分析与提示：先确定函数的定义域，在定义域内任取一点x_0，再由x_0的任意性，从而证明函数在定义域内是连续的.

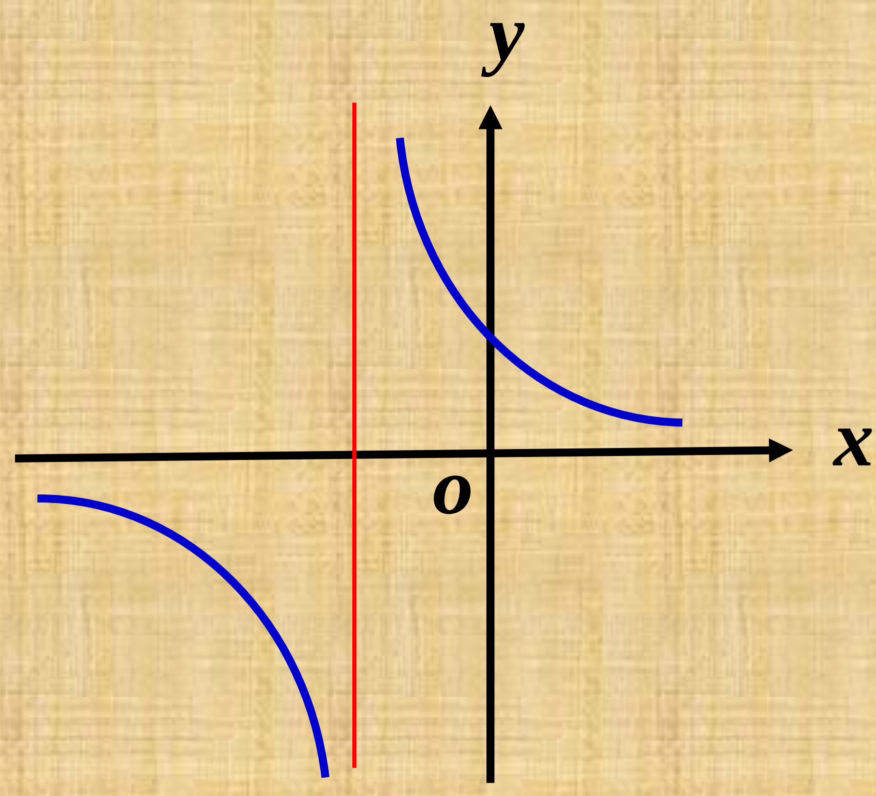
证　设x_0为定义域$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$内任意一点，显然$f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}$，

又$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}(x+2)}=\frac{1}{x_0+2}.$$

$$\because \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x+2}=f(x_0)=\frac{1}{x_0+2},$$

$\therefore$ 该函数在x_0点连续，由x_0任意性可知在

$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$定义域内，$f(x)$是连续的.



函数的间断点

函 数 $f(x)$在 点 x_0处 连 续 必 须 满 足 的 三 个 条 件：

(1) $f(x)$在 点 x_0处 有 定 义；

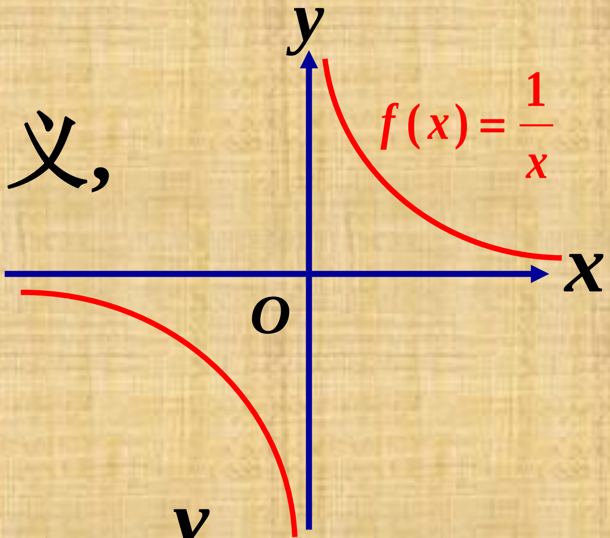
(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存 在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

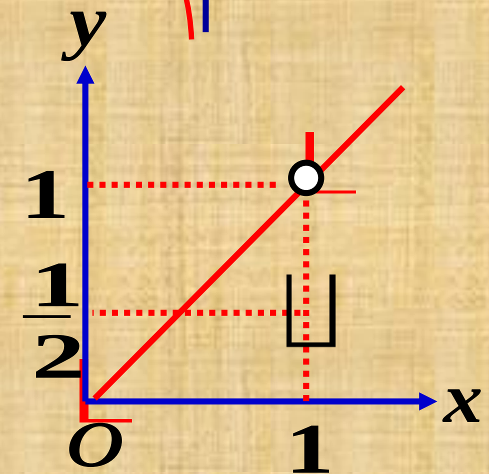
上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断)，并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

例3 1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义,

所以 $x=0$ 是间断点.



2) $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x=1, \end{cases}$



从图形中可以看出 $x=1$ 是分段点,

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1\neq f(1)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$$

所以 $x=1$ 是间断点.

二、初等函数的连续性

四则运算的连续性

定理 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点 x_0处连续,则

$$f(x)\pm g(x),\ \ f(x)\cdot g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0处也连续.

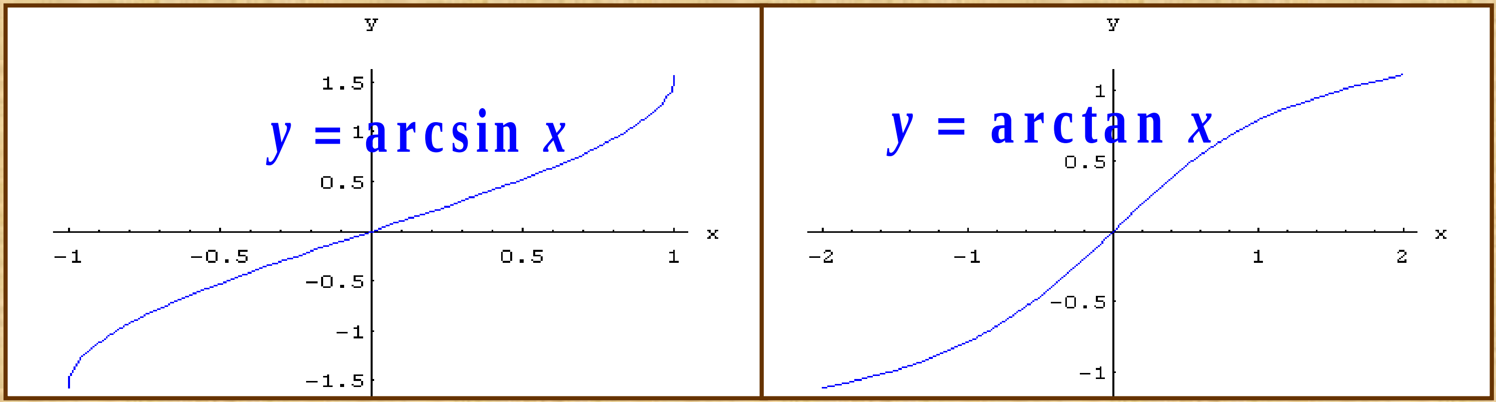
例如, $\sin x,\cos x$在 $(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

反函数与复合函数的连续性

定理 严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

推论 反三角函数在其定义域内皆连续.



定理 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

例如：$y=\sin x^2$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\sin x^2=\sin(\lim_{x\to\frac{\sqrt{\pi}}{2}}x^2)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$y=\sin u, u=x^2$

该定理表明极限符号可以与函数符号互换.

初等函数的连续性

★ 初等函数在定义域内都是连续的.

例4　1) $\lim\limits_{x\to1}(2x^2+3x-4)$

解（方法一）$=\lim\limits_{x\to1}(2x^2)+\lim\limits_{x\to1}3x+\lim\limits_{x\to1}(-4)$

由求极限四则运算法则

$=2(\lim\limits_{x\to1}x)^2+3-4=1.$

方法二　$\lim\limits_{x\to1}(2x^2+3x-4)=(2x^2+3x-4)\Big|_{x=1}$

由连续函数的定义

$=2\times1^2+3\times1-4=1.$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}$.

解 $\sin\sqrt{e^x-1}$是由$y=\sin u, u=e^x-1$复合而得的，

$\sin\sqrt{e^x-1}$是连续函数，所以由代入法，

原式 $=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$是初等函数，它是连续的.

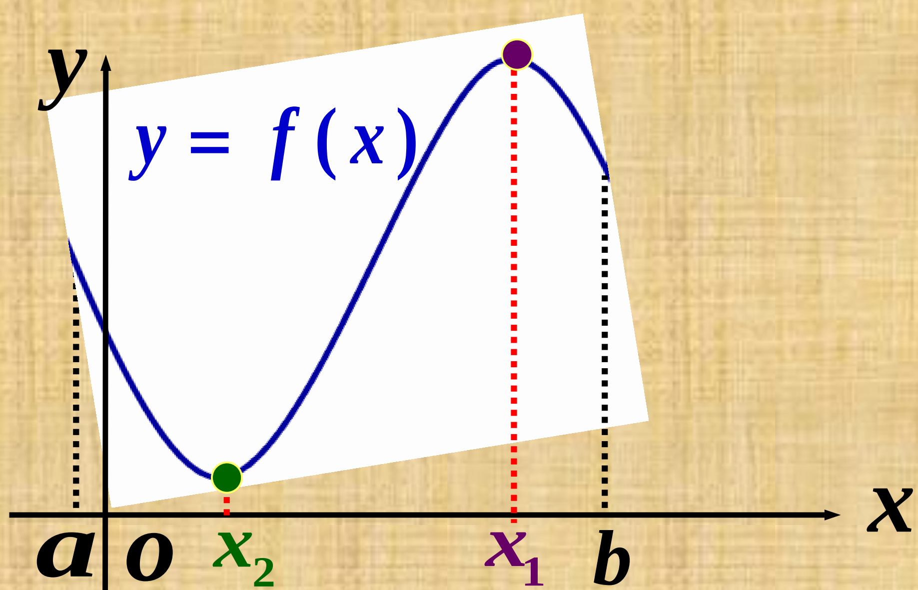
解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

三、闭区间上连续函数的性质

1）最大值和最小值定理

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$,
使得$\forall x \in [a,b]$,有 $f(x_1) \geq f(x)$,
$f(x_2) \leq f(x)$.

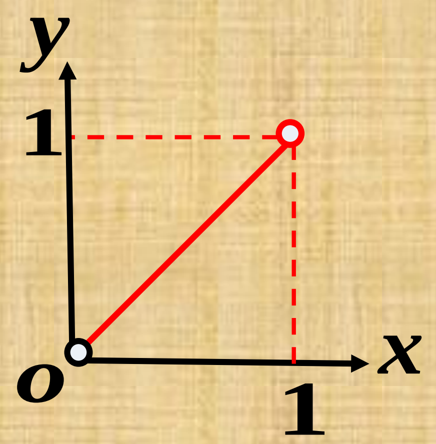


注意：定理中的两个条件缺一不可.

若区间是开区间，定理不一定成立；

若区间内有间断点，定理不一定成立.

例如： $f(x)=x,\ x\in(0,1)$

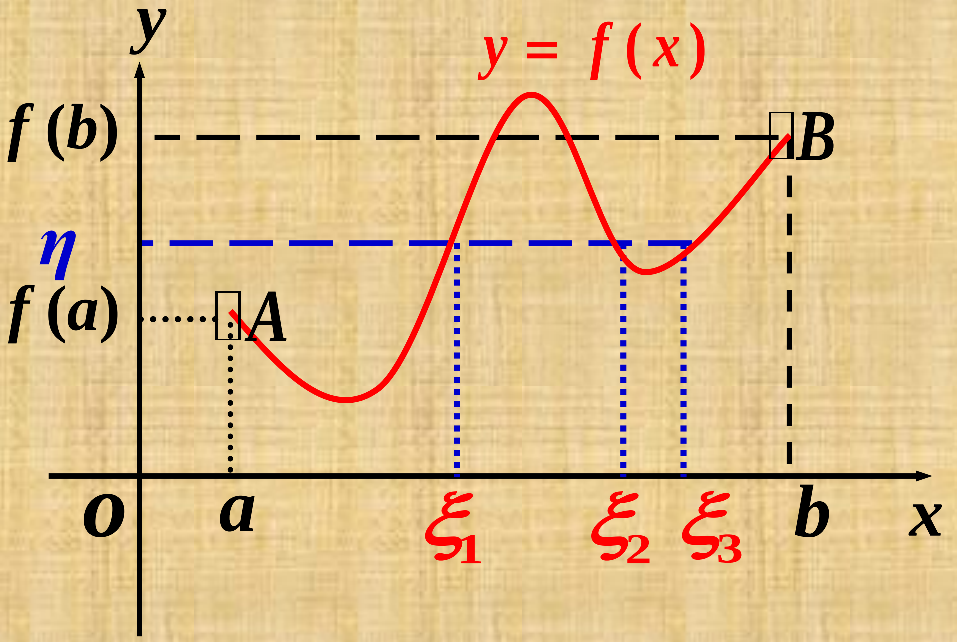


$f(x)$ 无最大值和最小值.

例如： $f(x)=1/x,\ x\in[-1,0)\cup(0,1]$

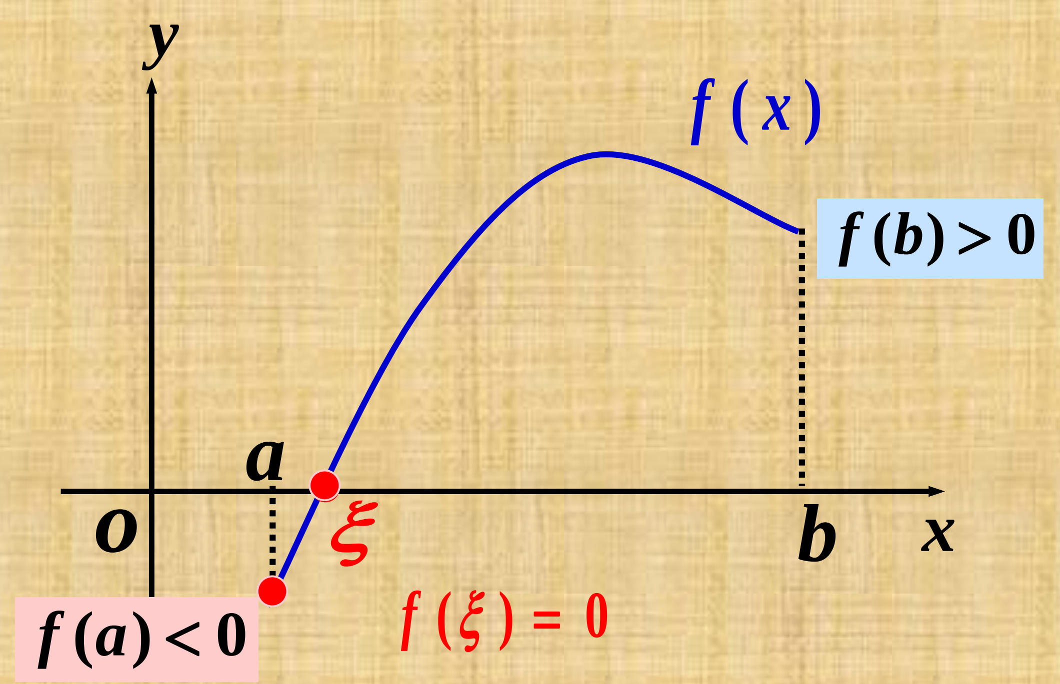
2）介值定理 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a) \neq f(b)$, $f(a) < \eta < f(b)$或$f(a) > \eta > f(b)$，则至少存在一个内点$\xi \in (a,b)$使得$f(\xi) = \eta$.

连续曲线弧$y = f(x)$与水平直线$y = \eta$至少有一个交点.



推论（根的存在定理） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，则至少存在一个内点$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根 $x=\xi$.



例7 证明方程 $x^3-3x=1$在1和2之间至少有一实根.

证　令 $f(x)=x^3-3x-1$, 该函数是初等函数，在[1,2]上连续,

又 $f(1)=-3<0$, $f(2)=1>0$,

由推论，存在 $\xi\in(1,2)$，使 $f(\xi)=0$,

即 $\xi^3-3\xi-1=0$,

$\therefore$ 方程$x^3-3x-1=0$在$(1,2)$内至少有一个实根ξ.

课后作业

习题 2 (page 62-64)

1(1)(3），2（1），5(3)(5)，8(1)(7)，10（2），13（2）