第二章

微积分的直接基础——极限

第一节　数列极限

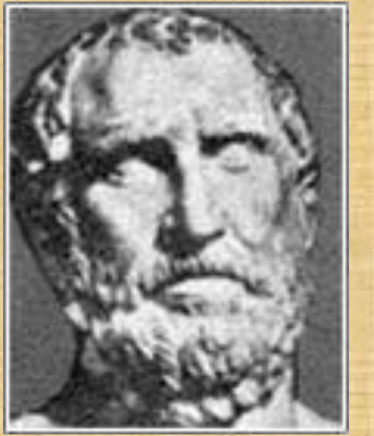
主要内容：

数列及数列极限的概念

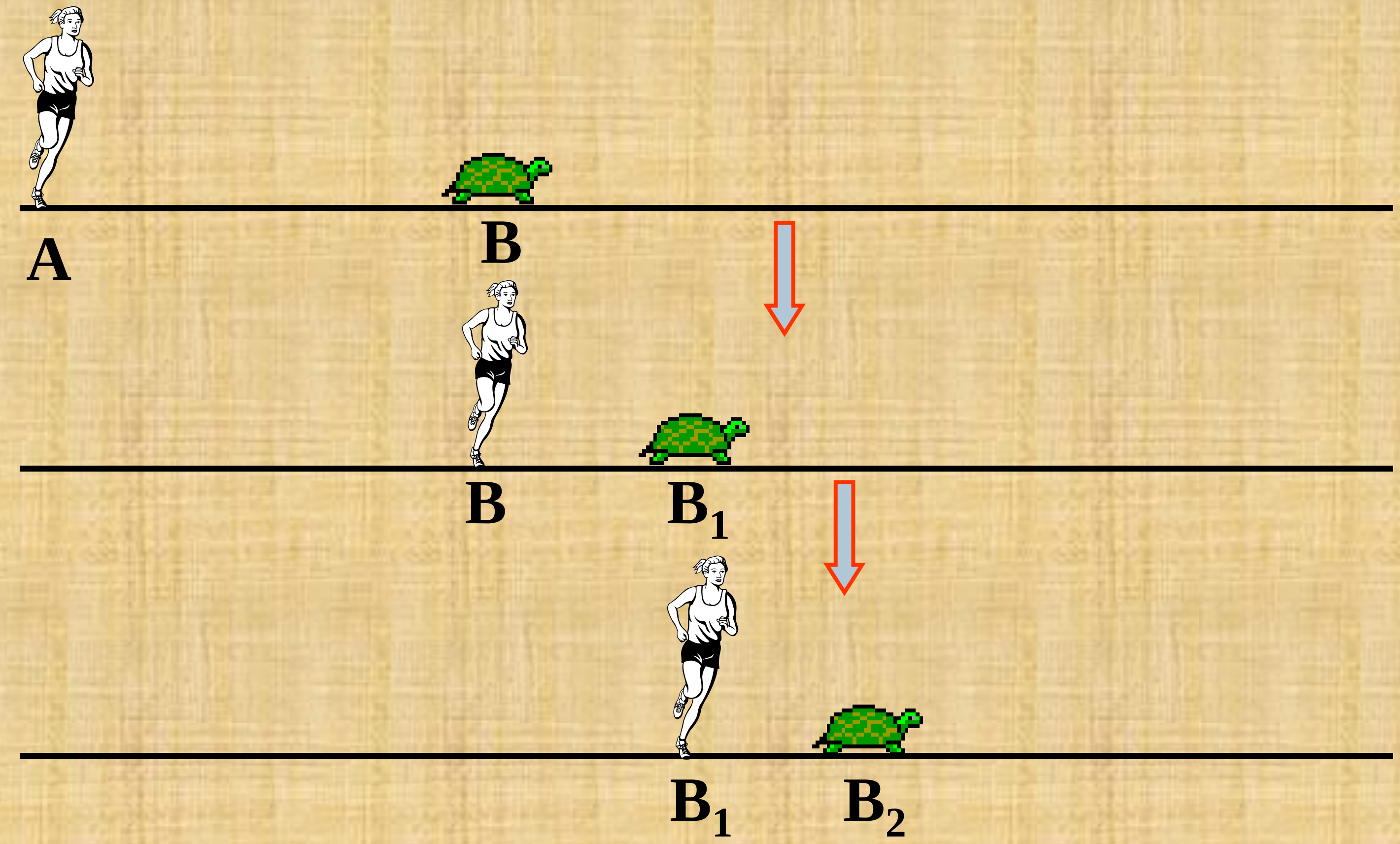
早在两千多年前，人们从生活、生产实际中产生了朴素的极限思想，公元前3世纪，我国的庄子就有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的名言.17世纪上半叶法国数学家笛卡儿（**Descartes**）创建解析几何之后，变量就进入了数学. 随后牛顿（**Newton**、英国）和莱布尼茨（**Leibniz**、德国）集众多数学家之大成，各自独立地发明了微积分，被誉为数学史上划时代的里程碑. 微积分诞生不久，便在许多学科中得到广泛应用，大大推动那个时代科学技术的发展和社会进步. 经过长达两个世纪的自身理论不断完善的过程，才建立了极限理论. 可见“极限”是微积分的基础.

阿基里斯追龟

一位古希腊学者芝诺（**Zenon**，约公元前**496 — **约前**429**）曾提出一个著名的“追龟”诡辩题。大家知道，乌龟素以动作迟缓著称，阿基里斯则是古希腊传说中的英雄和擅长跑步的神仙. 芝诺断言：阿基里斯与龟赛跑，将永远追不上乌龟！



假定阿基里斯现在A处，乌龟现在B处.为了赶上乌龟，阿基里斯先跑到乌龟的出发点B，当他到达B点时，乌龟已前进到B_1点；当他到达B_1点时，乌龟又已前进到B_2点，如此等等。当阿基里斯到达乌龟前次到达过的地方，乌龟已又向前爬动了一段距离.因此，阿基里斯是永远追不上乌龟的！



让我们再看一看乌龟所走过的路程:设阿基里斯的速度是乌龟的十倍，龟在前面10米.当阿基里斯跑了10米时，龟已前进了1米；当阿基里斯再追1米时，龟又前进了0.1米，阿再追0.1米，龟又进了0.01米.....把阿基里斯追赶乌龟的距离列出，便得到一列数：

$$10，1，0.1，0.01，\ldots，10^{2-n}，\ldots$$

这称为**数列**，$a_n=10^{2-n}$ 为**通项**，数列常简记为 $\{a_n\}$.

所以阿基里斯追上乌龟所必须跑过的路程为

$$S=10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}(\text{米}).$$

所以，阿基里斯只要坚持跑到11.2米的路程就可以追上乌龟！

然而芝诺将这样一个直观上都不会产生怀疑的问题与无限纠缠在一起，以至于在相当长时间内不得不把“无限”排除在数学之外.直到19世纪，当反应变量无限变化极限理论建立之后，才可用极限理论回答芝诺的挑战.

一列数：

$$10，1，0.1，0.01，\ldots，10^{2-n}，\ldots$$

称为数列. 10^{2-n}为通项.

以下均为数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots.$$

$$-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots.$$

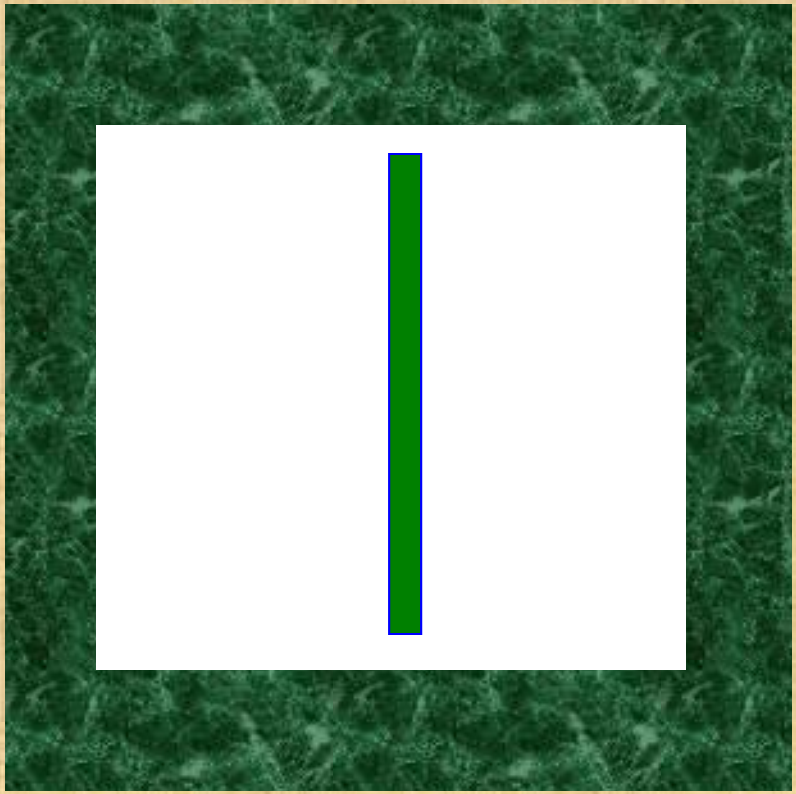
$$2,4,6,\cdots,2n,\cdots.$$

一、数列的极限（问题的引入）：

在《庄子·天下篇》中有“截丈问题”的精彩论述：

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

初始长度为：1

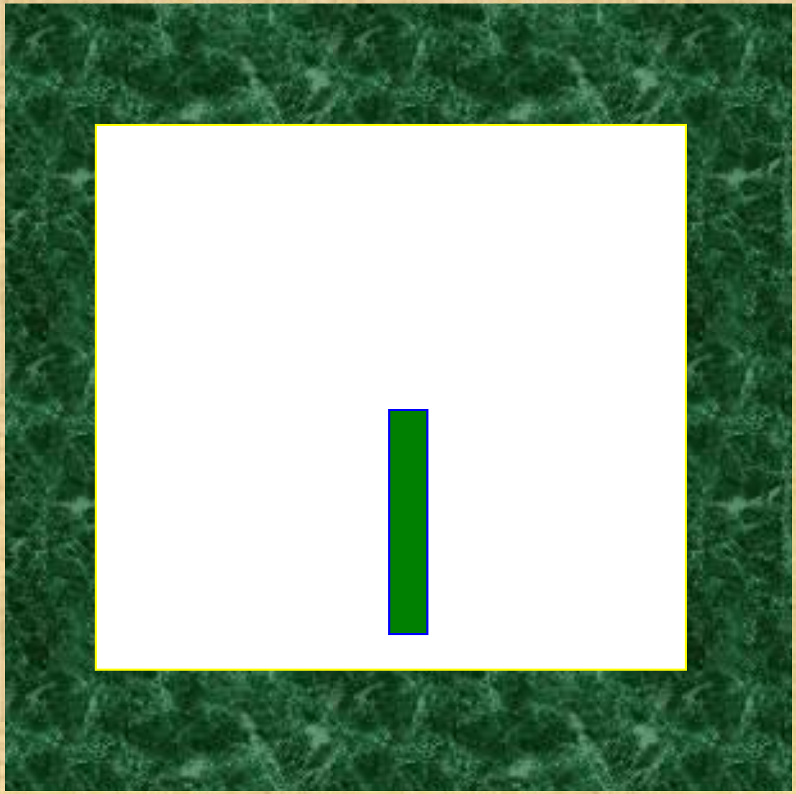


截丈问题：

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

第一天剩的长度为：

$$\frac{1}{2}$$

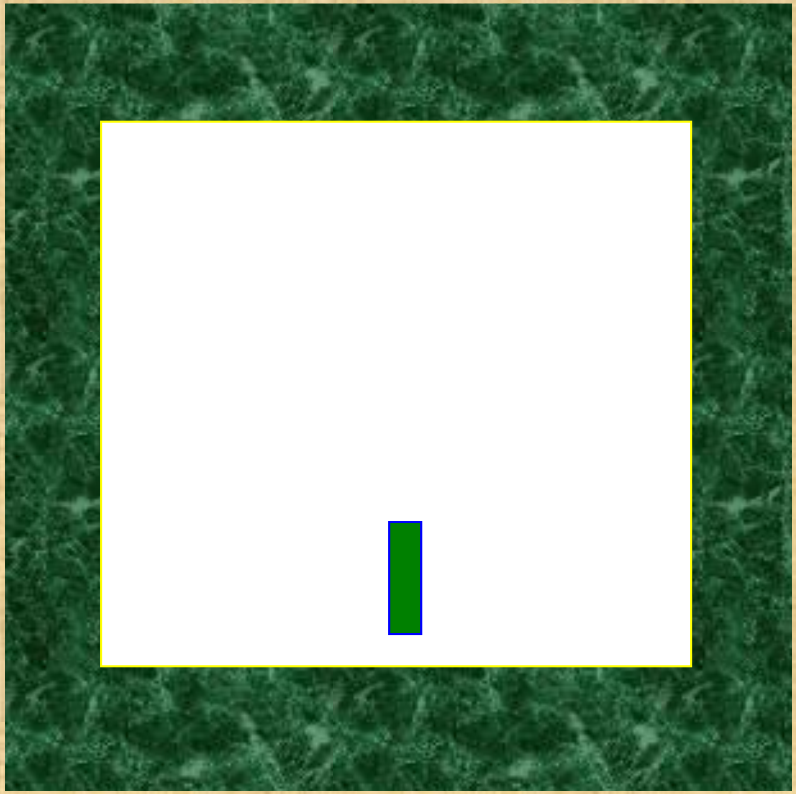


截丈问题：

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

第二天剩的长度为：

$$\frac{1}{2^2}$$

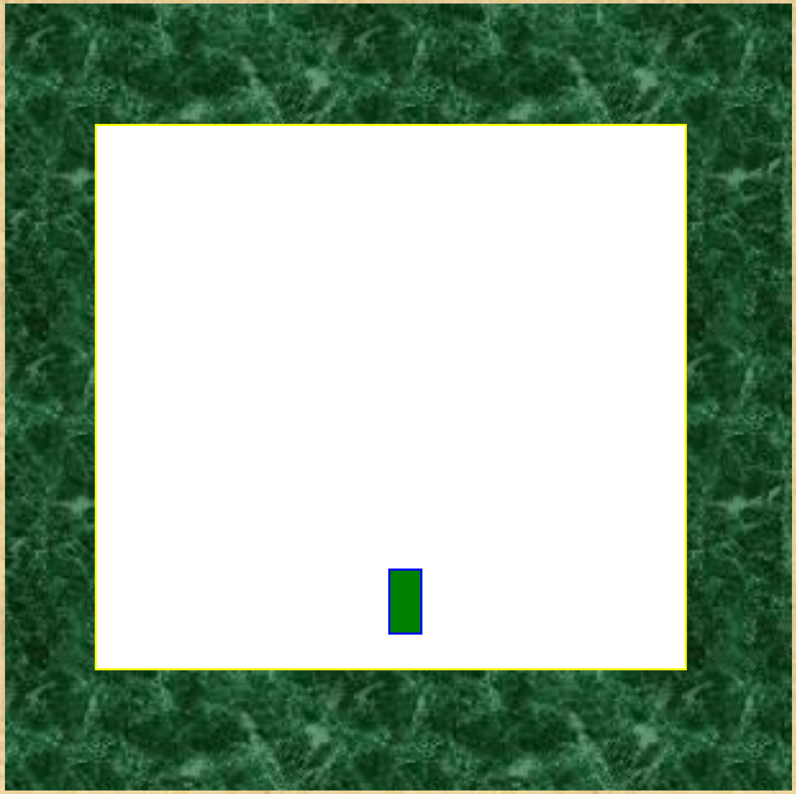


截丈问题：

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

第三天剩的长度为：

$$\frac{1}{2^3}$$

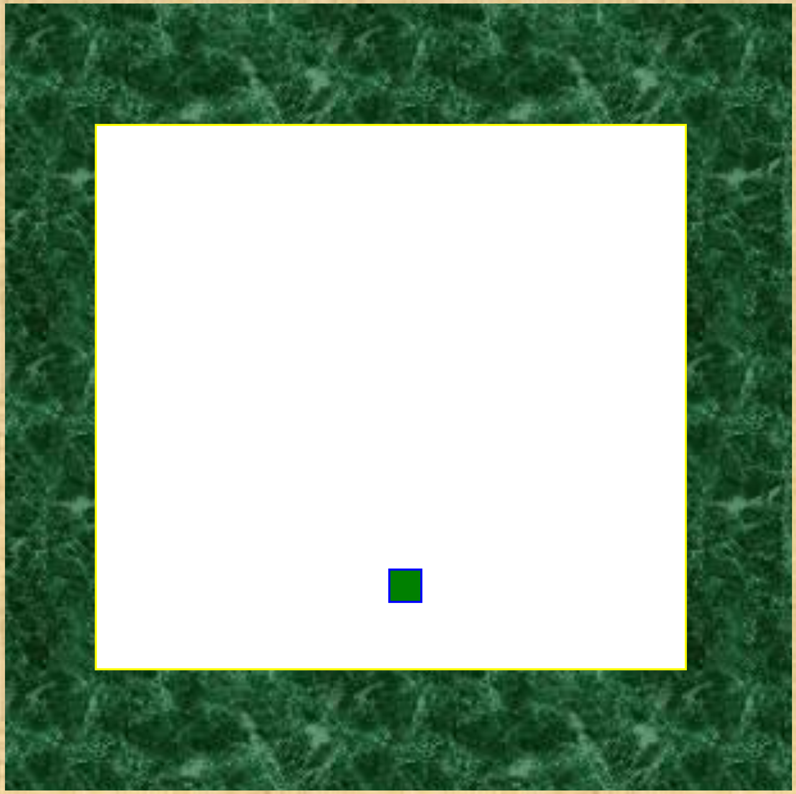


截丈问题：

一尺之棰，日取其半，万世不竭.

第四天剩的长度为：

$$\frac{1}{2^4}$$

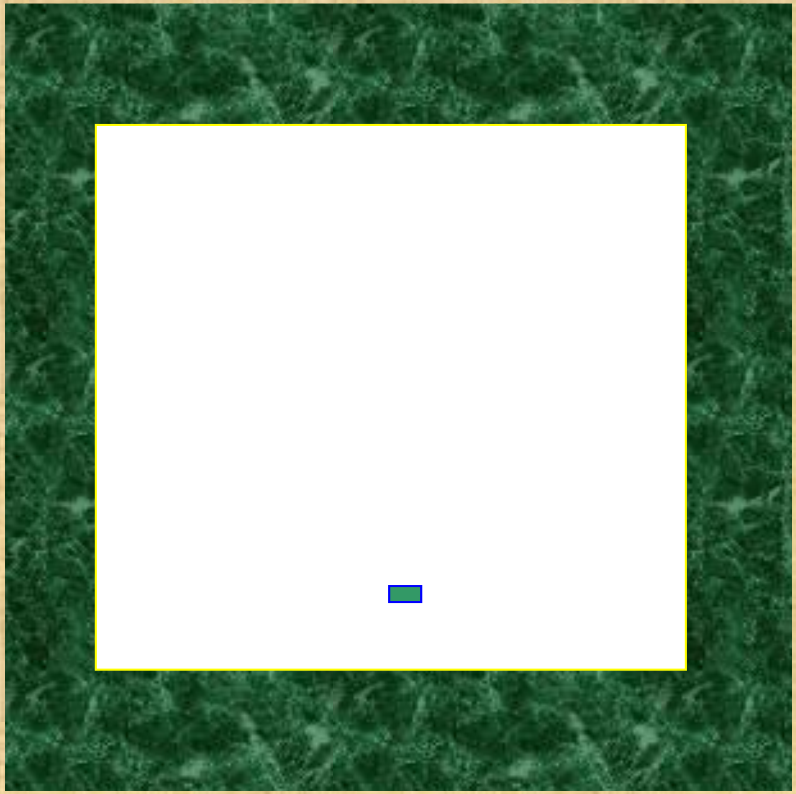


一尺之棰，日取
其半，万世不竭.

这样可以看出第n
天剩的长度为：$\frac{1}{2^n}$

于是得到了数列：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n}\cdots$$



当n 越来越大时,棰越来越短,逐渐趋于0.

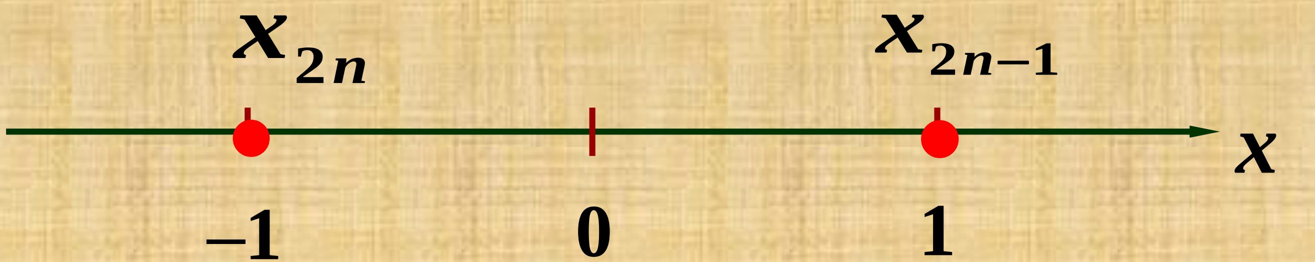
再看一下整个过程.

举例:

① $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

这个数列的通项是:

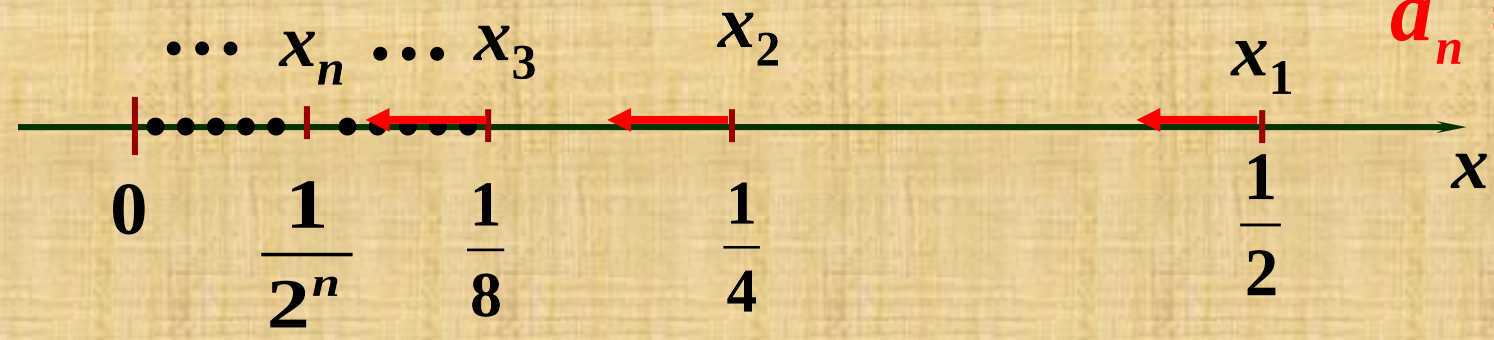
$$a_n=(-1)^{n-1}$$



② $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

这个数列的通项是:

$$a_n=\frac{1}{2^n}$$



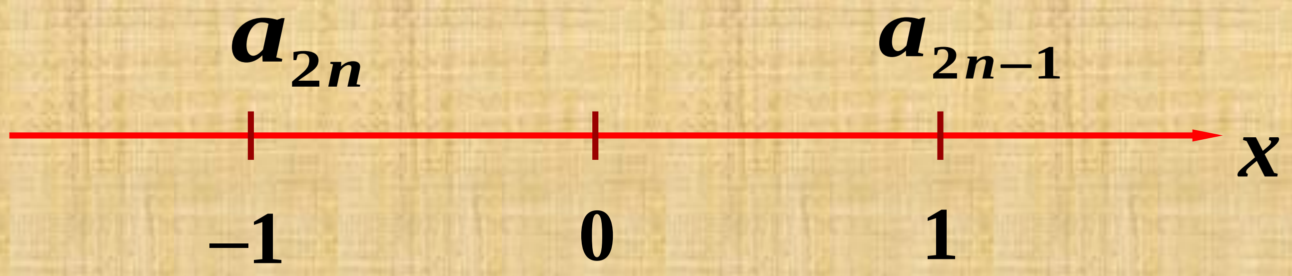
数列极限的定义（定性描述）：

如果当n无限增大时，数列$\{a_n\}$的通项无限趋近于常数a，则称数列以a为极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，或$a_n \to a(n\to\infty)$.

也称该数列收敛.

若该数列不以任何常数为极限，则称这个数列发散.

这个定义是在运动观点的基础上凭借几何图像，直觉用自然语言作出的定性描述.



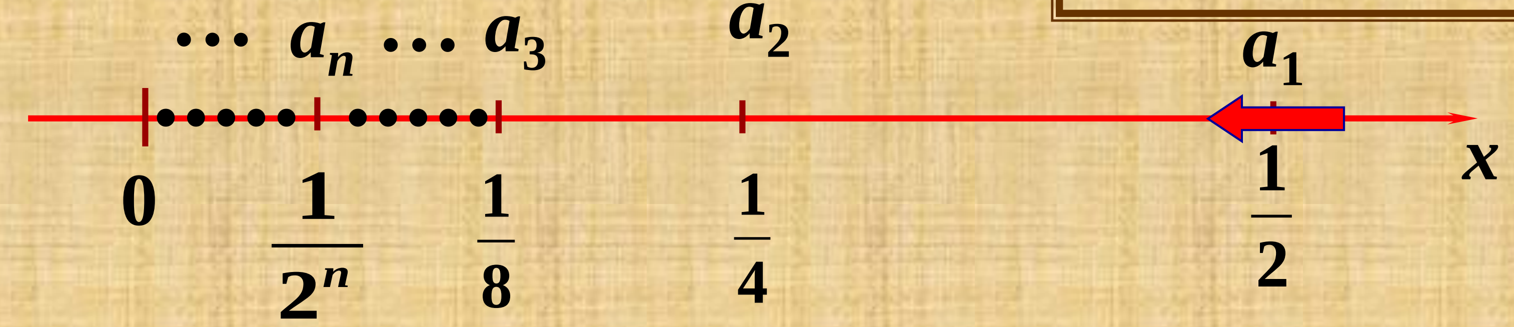
(1)$\{(-1)^{n-1}\}$的极限不存在;

因为当$n\to\infty$时，$\{(-1)^{n-1}\}$反复地取 1和－1,没有明显的变化趋势,是发散的.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

(2)$\{\frac{1}{2^n}\}$的极限是0;

因为当$n\to\infty$时，$\{\frac{1}{2^n}\}$趋近于常数 0 .



③ 2, 4, 6, …, 2*n*, … 这个数列的通项是:

$$a_n = 2n$$

④ 1, 1, …,1,…, 1,… 这个数列的通项是:

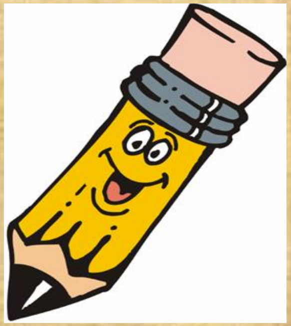
$$a_n = 1$$

注： ④中各项均为相同的数（常数) 1,我们把这样的数列称作常数列.因为不论 n 取何值，每项都是1，因此该数列的极限是1.

数列有以下几种变化趋势：

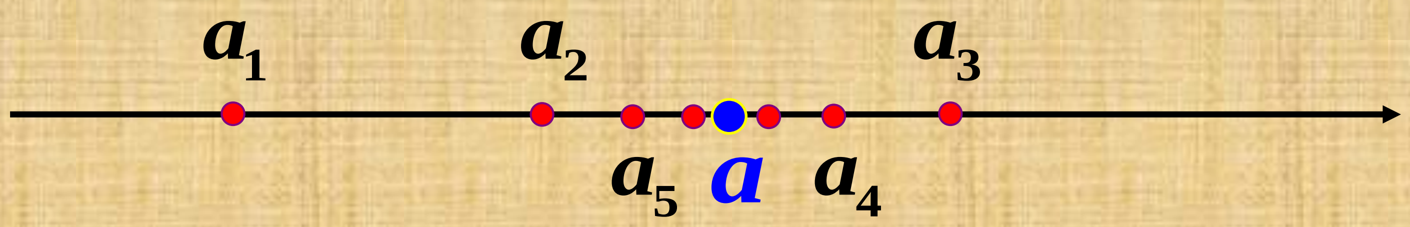
- 数列的变化趋势
  - 有一定的变化趋势
    - 无限接近常数*a* → 收敛
    - 无限增大、无限减少 → 定向发散
  - 无一定的变化趋势 → 不定向发散

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},2,4,16,\frac{1}{2^n},8,1,-1,2n,(-1)^{n-1},\cdots$$



下面我们直观地看一下极限的定义

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$



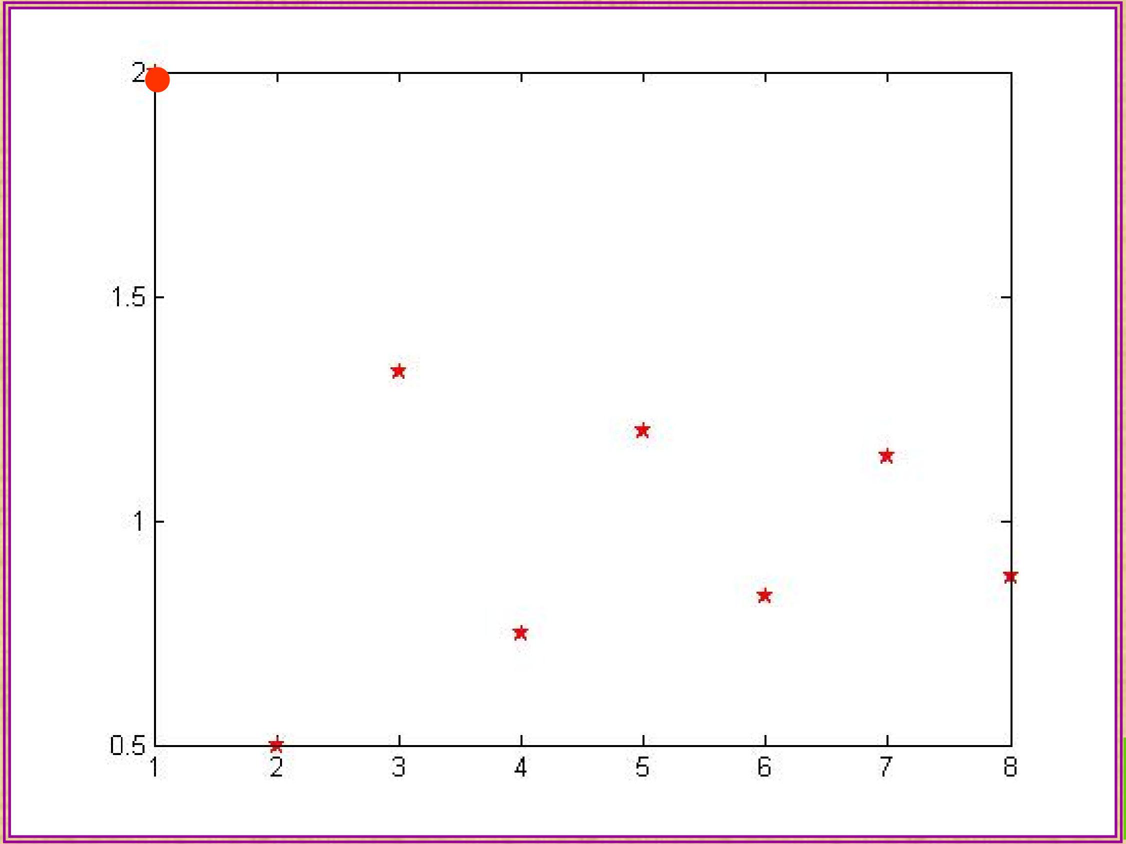
n越大，$|a_n - a|$越小 $\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

不等式$|a_n - a| < \varepsilon$刻画了a_n与a的无限接近.

在数学中一定要力避几何直观可能带来的错误，因此作为微积分逻辑演绎基础的极限概念，必须将凭借直观产生的定性描述转化为用形式化的数学语言表达的，超现实原型的理想化的定量描述.

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.

当n无限增大时,x_n是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?



当 n 无限增大时, $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

"无限接近"意味着什么?如何用数学语言刻画它.

$$\because \quad |a_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\dfrac{1}{100}$, 由 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$, 只要 $n > 100$ 时, 有 $|a_n - 1| < \dfrac{1}{100}$,

给定 $\dfrac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$ 时, 有 $|a_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$,

给定 $\frac{1}{10000}$，只要 $n > 10000$时，有 $\left|a_n - 1\right| < \frac{1}{10000}$，

给定$\varepsilon > 0$，只要 $n > N(\geq \frac{1}{\varepsilon})$时，就有 $\left|a_n - 1\right| < \varepsilon$成立.

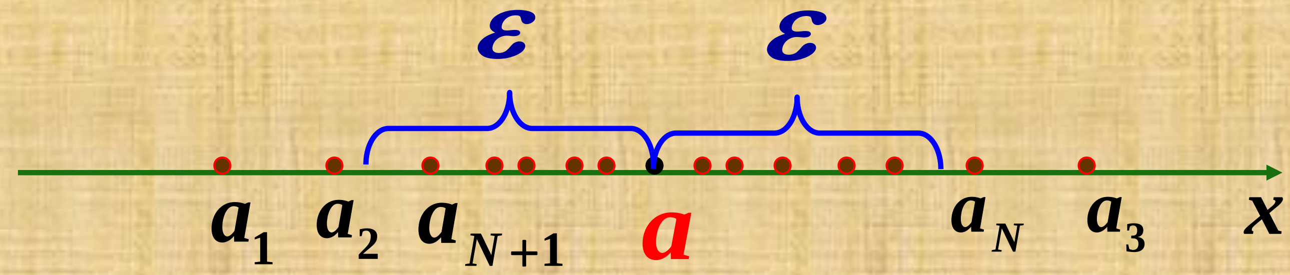
定义 如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着相应正整数N，使得满足$n>N$的一切n，不等式$\left|a_n - a\right| < \varepsilon$恒成立，则称数列$\{a_n\}$以$a$为极限，或者称数列$a_n$收敛于$a$，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{或} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

由不等式$\left|a_n - a\right| < \varepsilon$联想到$U(a,\varepsilon)$,

如图:



当$n > N$时,所有的点a_n都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内,只有有限个(至多只有$N$个)落在其外.

注:1） 定义中的常数ε具有二重性:

具有很小正数的固定性;

具有随意小的任意性.

2） ε是首先给定的，N是由ε确定的，常记作$N = N(\varepsilon)$.

例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证明 $|a_n-1|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$

任给$\varepsilon>0$,要$|a_n-1|<\varepsilon$, 只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,

或$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,取$N\geq\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当$n>N$时,

就有$\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

End

(3)$\{2n\}$的极限不存在(趋于∞);

因为$n\to\infty$ 时，$\{2n\}$ 逐渐变得无穷大，并不趋近于 某个常数.但由于$\{2n\}$ 的变化趋势是逐渐增大的， 所以又可认为该数列趋于无穷大.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$，或表示成$2n \to +\infty(n \to \infty)$.

注： $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\Downarrow$

该数列有一定的发展趋势——趋向于无穷大，并不收敛，所以$\{ 2n \}$无极限.为叙述方便，可以说$\{ 2n \}$的极限是$+\infty$.

Back