

第三章

变量变化速度与局部改变量

估值问题——导数与微分

数学中研究导数、
微分及其应用的部分，
叫做微分学。

研究不定积分、定
积分及其应用的部分，
叫做积分学。

16世纪应
用萌生

微积分学

可追溯到古
希腊和我国
魏晋时期

本章介绍导数、微分的概念及其运算法则。

第一节

函数的局部变化率——导数

主要内容：

- 一、导数的概念与几何意义
- 二、可导与连续的关系
- 三、高阶导数的定义

一、抽象导数概念的现实原型

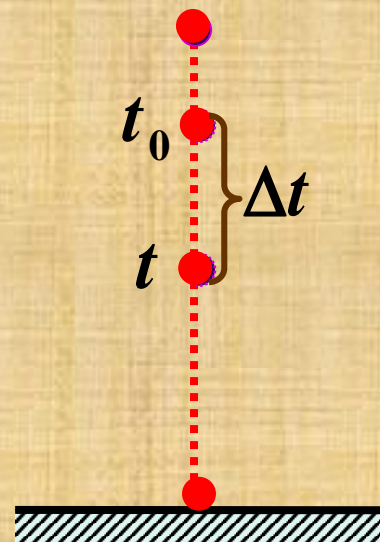
原型一 自由落体的瞬时速度

取邻近 t_0 的时刻 t , 运动时间 Δt , 平均

$$\text{速度 } \bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{g}{2}(t_0 + t).$$

当 $t \rightarrow t_0$ 时, 取极限得

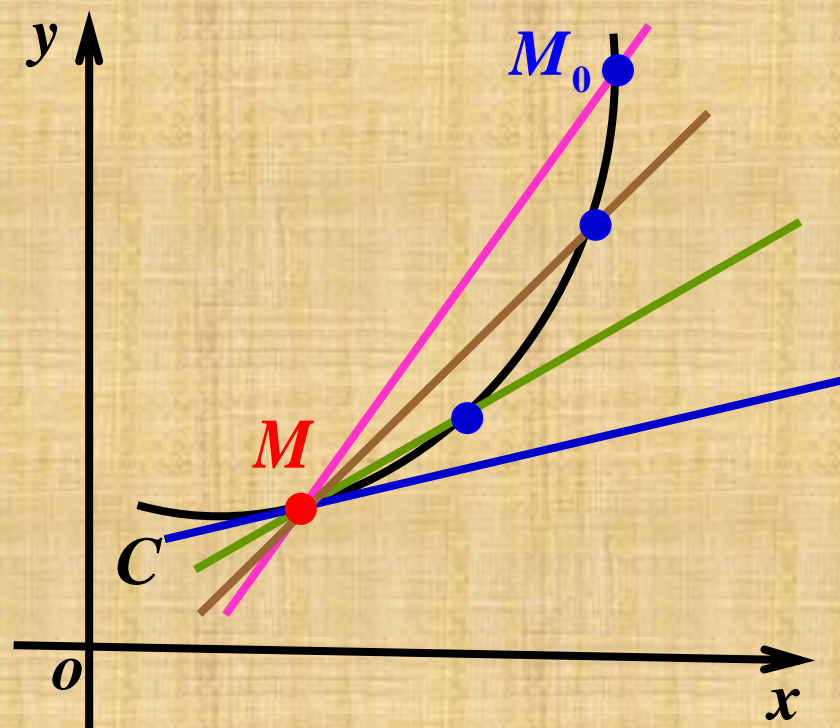
$$\begin{aligned} \text{瞬时速度 } v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g \cdot (t_0 + t)}{2} = gt_0. \end{aligned}$$



瞬时速度是位移函数关于时间变化率的极限。

原型二 平面上曲线的切线

曲线 C 在点 M 处的切线为点 M_0 沿着曲线 C 趋近于点 M 时割线 MM_0 的极限位置.



二、导数的概念与几何意义

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,函数 $f(x)$ 有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,若当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在,则称该极限值为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的

导数,记作 $y'|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$.

$$y'|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

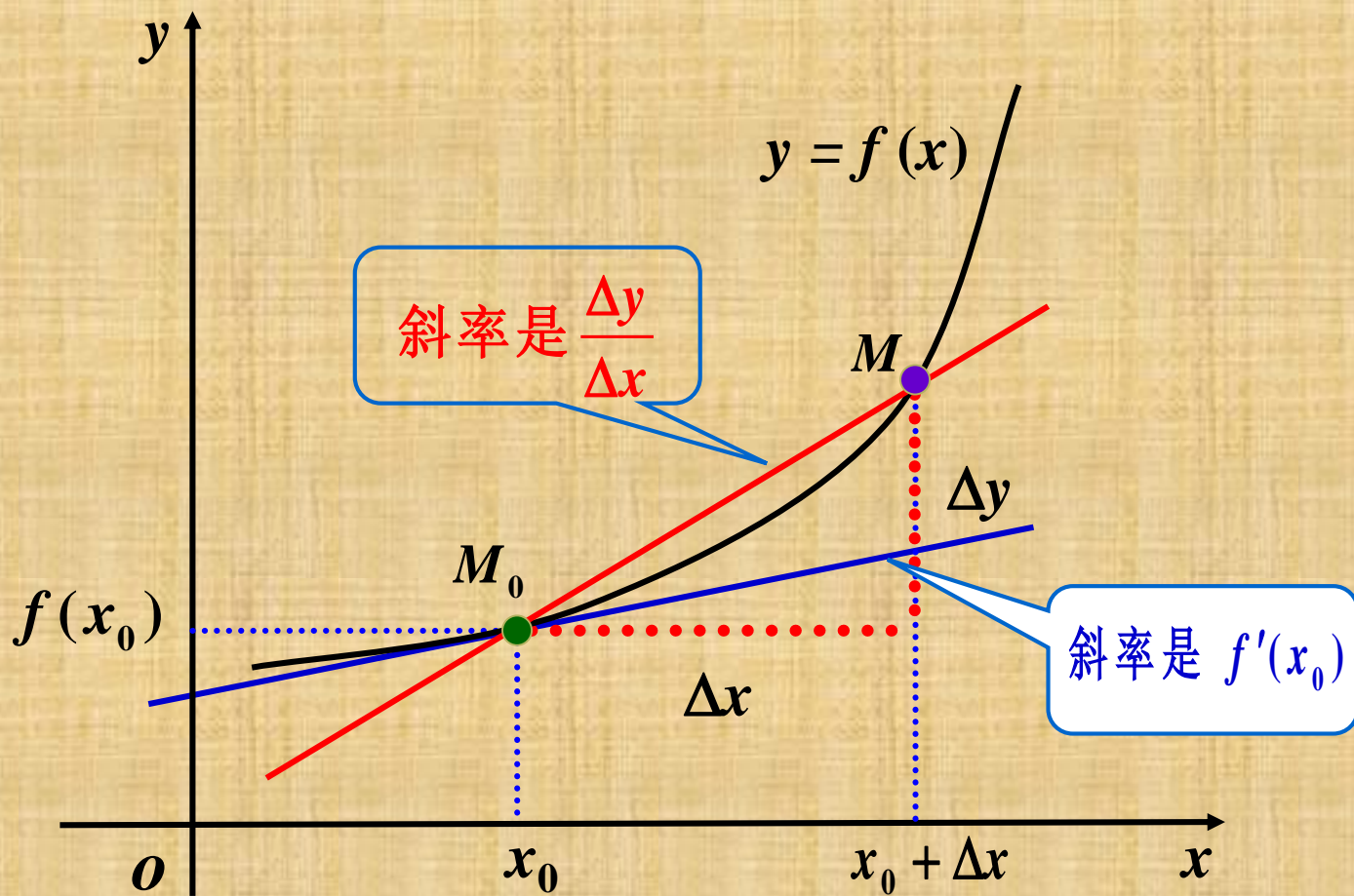
$$\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$$

若令 $x = x_0 + \Delta x$, 该定义也可以写成

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

若该极限不存在, 则称函数在点 x_0 处不可导.

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$.



注意: (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是平均变化率

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是瞬时变化率

导数是平均变化率的极限

(2) $\frac{dy}{dx}$ 是表示导数的一个整体符号.

(3) 点导数是因变量在这点的变化率, 它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

回顾原型一与原型二

1.自由落体运动的瞬时速度问题

$$\text{瞬时速度 } v \Big|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = S'(t_0).$$

2.切线问题

切线的斜率为 $k = \tan \alpha$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0). \end{aligned}$$

定义 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都可导, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导. 这时, 函数 $f(x)$ 对于区间 (a,b) 内每一 x 值都对应着一个确定的导数, 则 $f'(x)$ 是 x 的函数, 称为函数 $f(x)$ 的**导函数**, 在不致引起混淆的情况下, 导函数也简称为**导数**, 记作 y' , $f'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx}$.

即
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

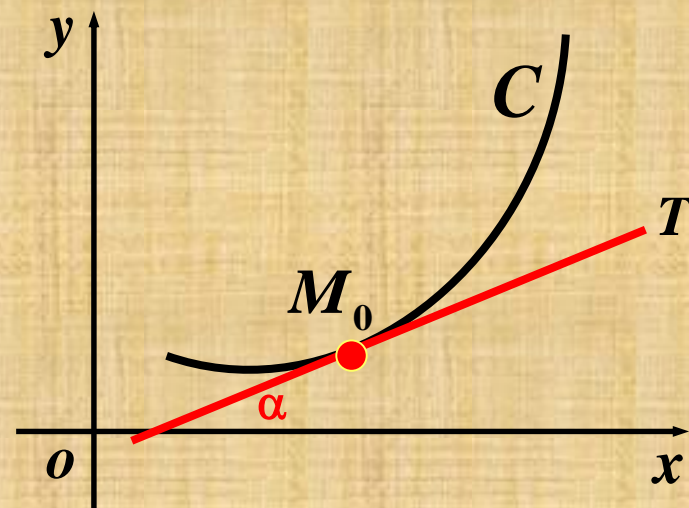
导数的几何意义

$y = f(x)$ 在 x_0 处的导数是 $f'(x_0)$ 的曲线 C 在 M_0

点切线的斜率，因而

$f(x)$ 在 M_0 点的切线方程是：

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



三、由定义求导数

步骤:

(1) 求增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$

(2) 算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$

(3) 求极限 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$

例1 求常数函数 $y = C$ 的导数.

解 因为函数值恒为常数, 所以当自变量从任意一点 x 变到 $x + \Delta x$ 时, 函数增量为0,

即 $\Delta y = 0$, 从而 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$,

算比值

求增量

于是, $y' = (C)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

求极限

注: 常数的导数等于零.

例2 求函数 $f(x) = x^2$ 在点 $x = 2$ 处的导数.

解 给 $x = 2$ 一个增量 Δx , 则:

(1) 求增量

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = 4\Delta x + (\Delta x)^2;$$

(2) 算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + \Delta x;$

(3) 求极限

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

例3 求函数 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $x = 1$ 处的导数.

解一 先求导函数. 给任意一点 x 增量 Δx , 得

求增量

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

算比值

由于 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)},$

$$\text{所以 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

求极限



再求函数在 $x = 1$ 点的导数

$$y'|_{x=1} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\bigg|_{x=1} = -1.$$

从而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $x = 1$ 处的导数为 -1 .

此外，我们也可以用例2的方法求解此题。

例3 求函数 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $x = 1$ 处的导数.

解二 给 $x = 1$ 一个增量 Δx , 则:

(1) 求增量

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = -\frac{\Delta x}{1 + \Delta x};$$

(2) 算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{1 + \Delta x};$

(3) 求极限

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{1 + \Delta x} = -1.$$

例4 求函数 $y = \sqrt{x}$ 的导数.

解 任取一点 $x \in (0, +\infty)$, 给 x 一个增量 Δx ,

得 $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x},$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

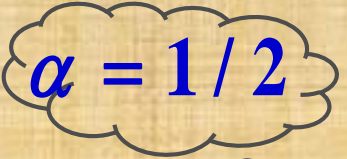
$$= \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

例2—例4的结果可以推广到幂函数

$$y = x^{\alpha} (\alpha \text{ 为任一实数}).$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$


$$\alpha = 1/2$$

例如, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$


$$\alpha = 3$$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

例5 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

解 $(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

第一重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\cos x$ 是连续函数

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

四、左导数和右导数

左导数:

$\Delta x \rightarrow 0^-$ 表示 x 从点 x_0 的左端趋近

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

右导数:

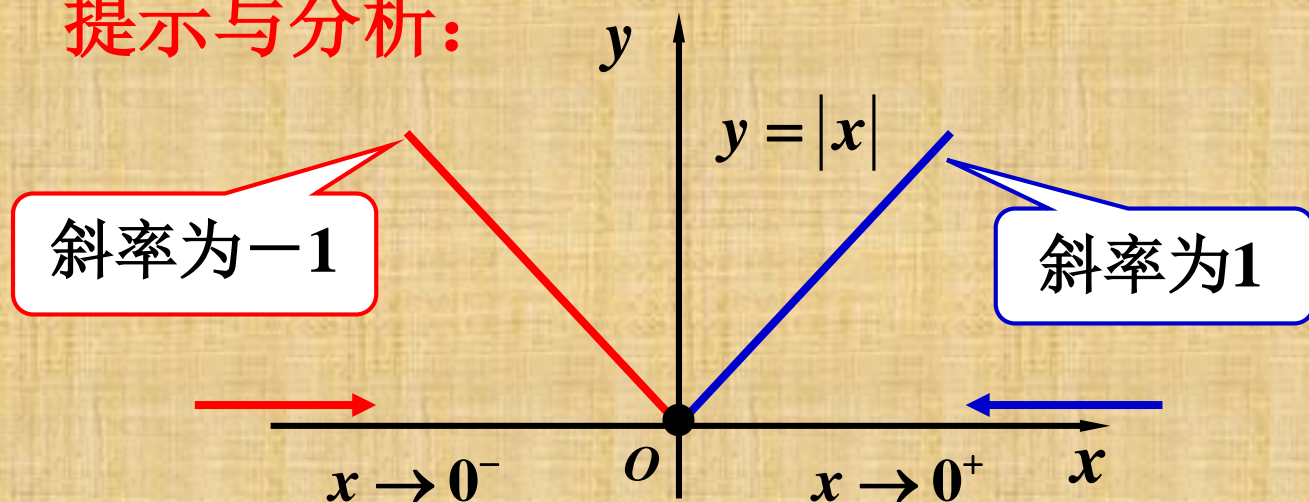
$\Delta x \rightarrow 0^+$ 表示 x 从点 x_0 的右端趋近

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

定理 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数存在且相等.

例7 证明函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 点不可导.

提示与分析：



五、可导与连续的关系

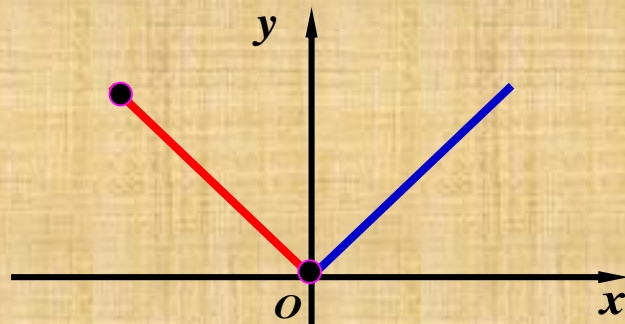
定理 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 那么
 $y = f(x)$ 在点 x 处连续.

反之不一定成立.

可导一定连续, 连续不一定可导.

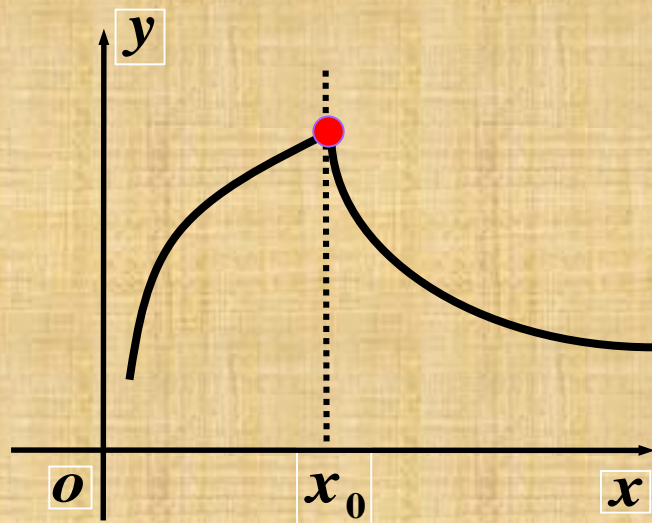
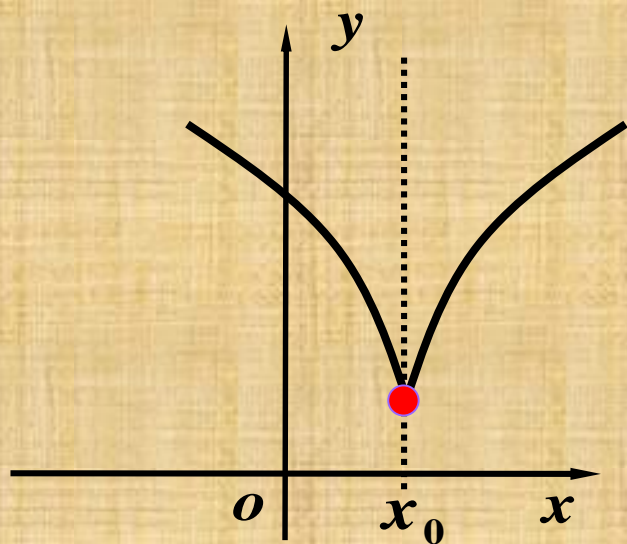
比如例6中的 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 连续但不可导.

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$$



$x = 0$ 点称为 $f(x) = |x|$ 的尖点.

以下两种都是存在“尖点”的情况：



存在处处连续而不可微函数

1872年德国数学家魏尔斯特拉斯构造出一个处处连续但处处不可导函数的例子

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

其中 $0 < a < 1$, b 为正奇数 , 且满足
 $ab > 1 + 3\pi/2$

https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function

六、高阶导数的定义

定义 函数 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的导数 $[f'(x)]'$

叫做函数 $y = f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y'' , $f''(x)$

或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

相应的， $y = f(x)$ 称为**零阶导数**；

$f'(x)$ 称为**一阶导数**。

例如 设 $y = x$, 则 $y' = (x)' = 1$, $y'' = (1)'' = 0$;

设 $y = \sin x$, 则 $y' = (\sin x)' = \cos x$,

$y'' = (\cos x)' = -\sin x$,

再例如 在自由落体运动中, $s = \frac{1}{2}gt^2$,

$s' = gt$, $s'' = g$.

二阶导数为重力加速度 g .

定义 设函数 $y = f(x)$ 存在 $n-1$ 阶导数, 并且 $n-1$ 阶导数可导, 那么 $y^{(n-1)} = f^{(n-1)}(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的 **n 阶导数**,

$$\text{记作 } y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.