第四节

定积分魅力的显示——在若干学科中的应用

主要内容：

一、微元法

二、定积分在几何中的应用

一、 微元法

积分的所有应用问题,一般总可按“分割,近似求和,取极限”三个步骤把所求量表示为定积分的形式,常简称为“微元法”.

设$y = f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数,现求与$f(x)$有关的量Q.

先选取任意小的区间作为代表:

$$[x, x+\mathrm{d}x] \subset [a,b] ,$$

使$\Delta Q \approx f(x)\mathrm{d}x$,且$\mathrm{d}Q = f(x)\mathrm{d}x$,

然后,写出定积分,即$Q = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.这就是微元法.

用微元

面积、体积、平面曲线的弧长、利润、成本、收益

等变量均可用微元法解决.

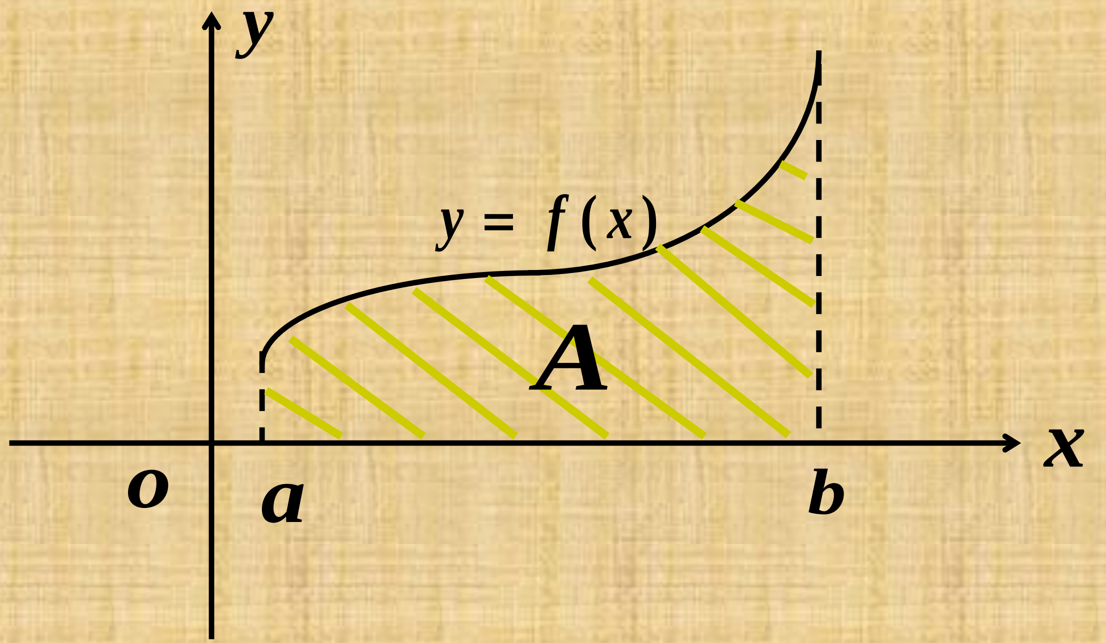
二、在几何学中的应用

1. 平面图形的面积

由定积分的几何意义知：当 $f(x)\geq 0$ 时，

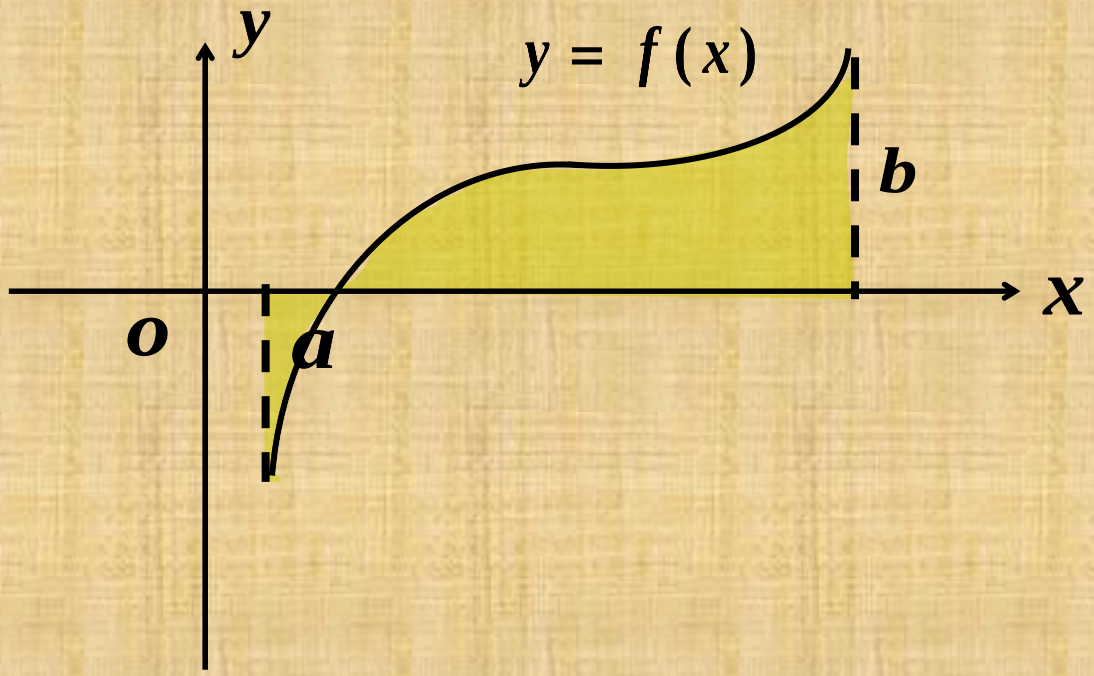
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 表示由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，

x 轴所围的曲边梯形的面积.

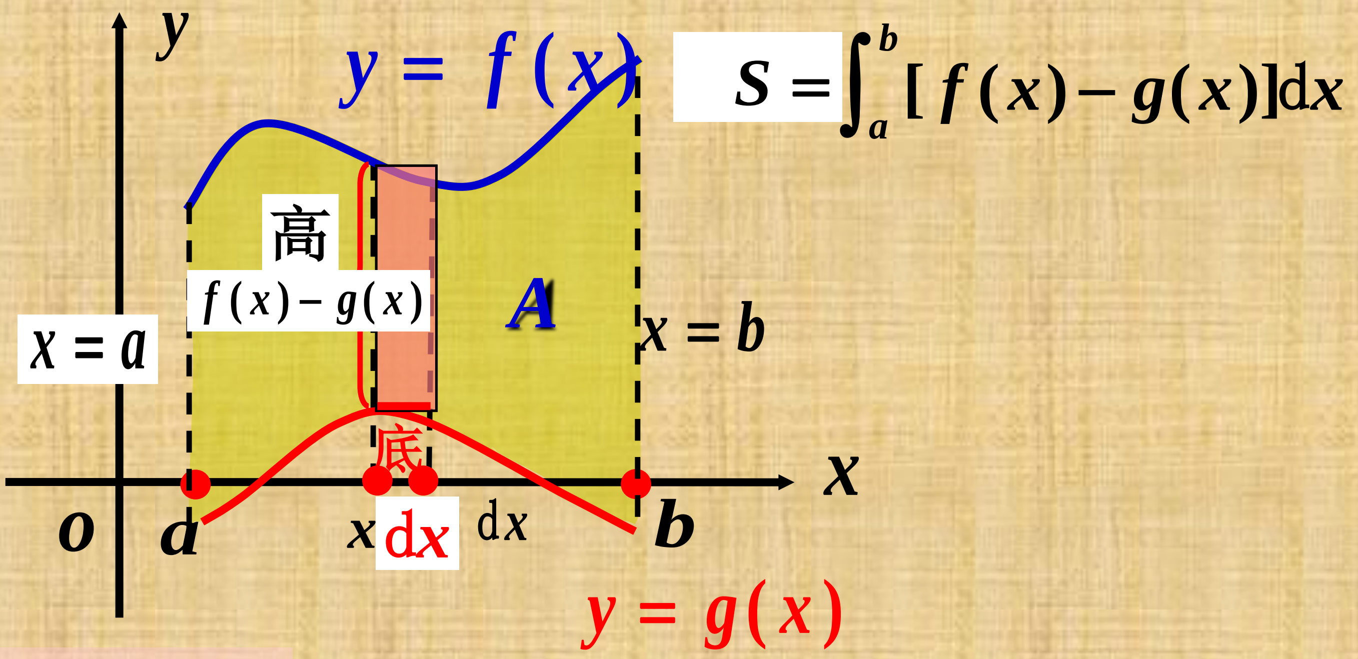


若$f(x)$在$[a,b]$有正有负,则所围成的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\ .$$



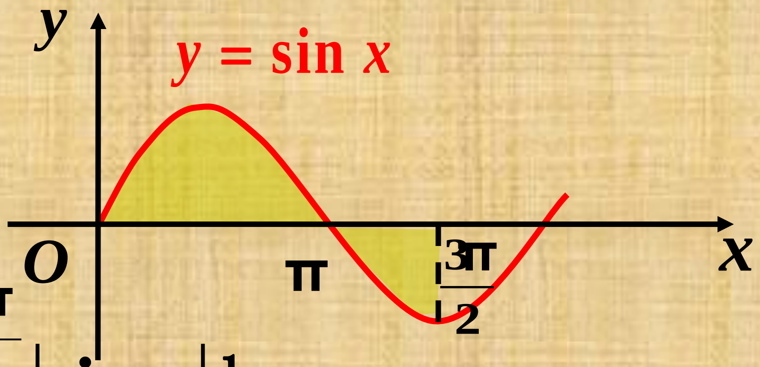
$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$



更一般地，

A是由$y=f(x)$, $y=g(x)(f(x)\geqslant g(x))$, $x=a$, $x=b$所围成的平面图形的面积.

例1 求由正弦曲线$y=\sin x$与直线$x=0, y=0$及$x=\frac{3\pi}{2}$所围图形的面积.



解 $$s=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x$$

利用积分区间的可加性

$$=\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin x)\mathrm{d}x$$

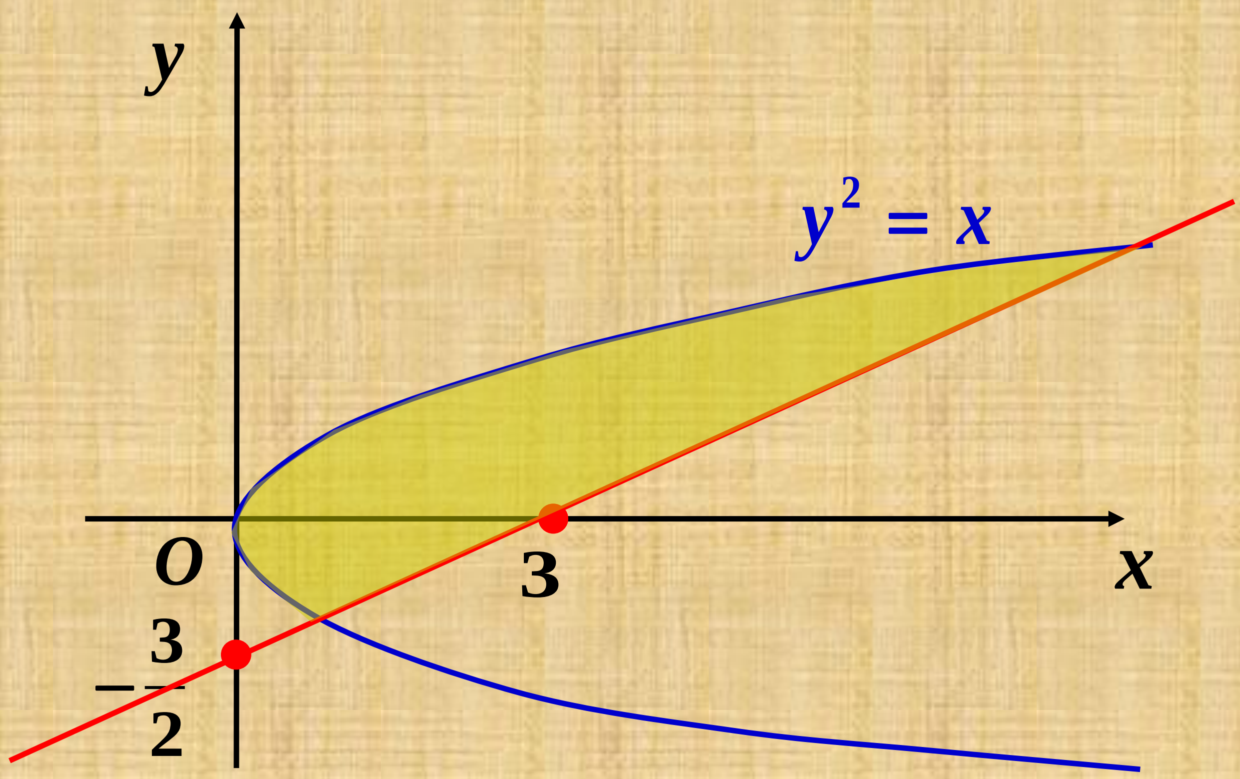
$$=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=3.$$

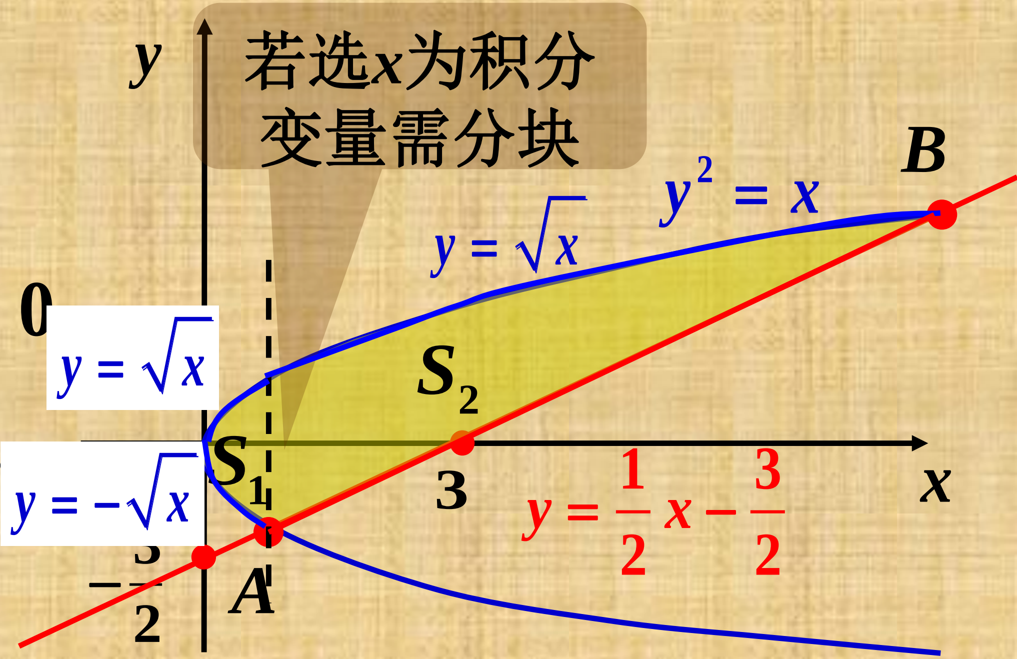
通常我们在求两个以上曲线围成的面积时,我们首先要将这些函数两两联立,找出交点,从而决定积分上下限.

例2　求抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 所围的平面图形的面积.

提示与分析：先画出图形，确定所围面积；再联立方程求出交点，得出积分区域.



例2　求抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x-2y-3=0$ 所围的平面图形的面积.



解一 $\begin{cases} y^2 = x, \\ x-2y-3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow A(1,-1), B(9,3)$.

$S = S_1 + S_2$

$$= \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]\mathrm{d}x + \int_1^9 [\sqrt{x} - (\frac{1}{2}x - \frac{3}{2})]\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_1^9 (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})\mathrm{d}x$$

选y为积分变量

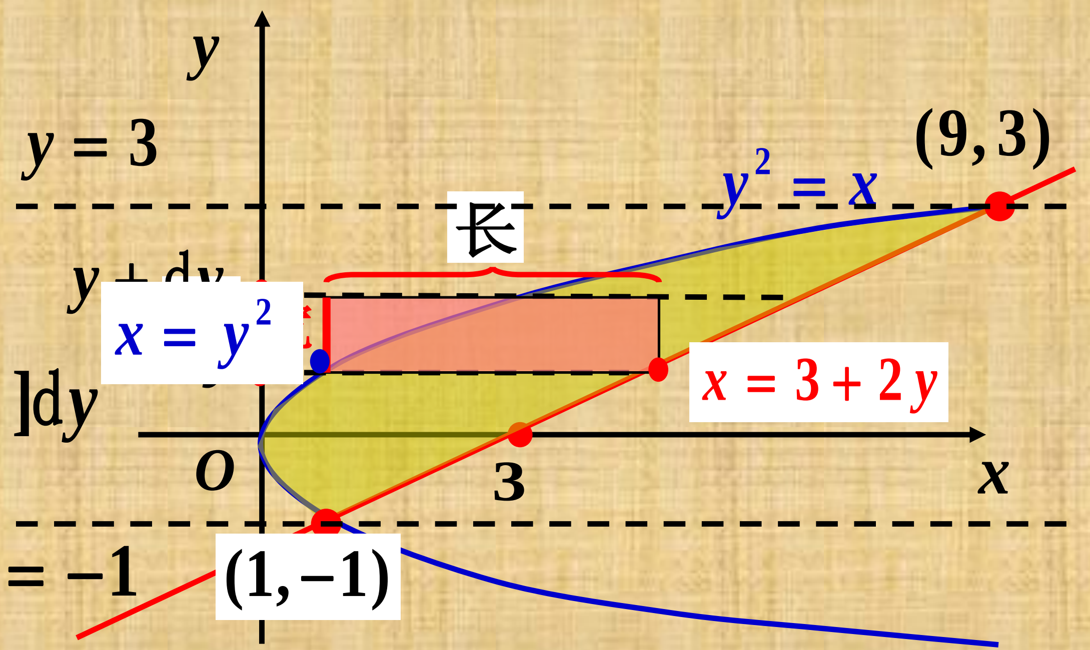
$$= 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 - x^2\Big|_1^9 + \frac{3}{2}\times 8 = \frac{32}{3} .$$

例2　求抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $x - 2y - 3 = 0$ 所围的平面图形的面积.

解二 选y为积分变量，

$y \in [-1, 3]$ ，

$$\mathrm{d}S = [(3 + 2y) - y^2]\mathrm{d}y$$



$$S = \int_{-1}^{3}(3 + 2y - y^2)\mathrm{d}y$$

$$= 3y\Big|_{-1}^{3} + y^2\Big|_{-1}^{3} - \frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}\ .$$

2. 由截面面积求立体体积

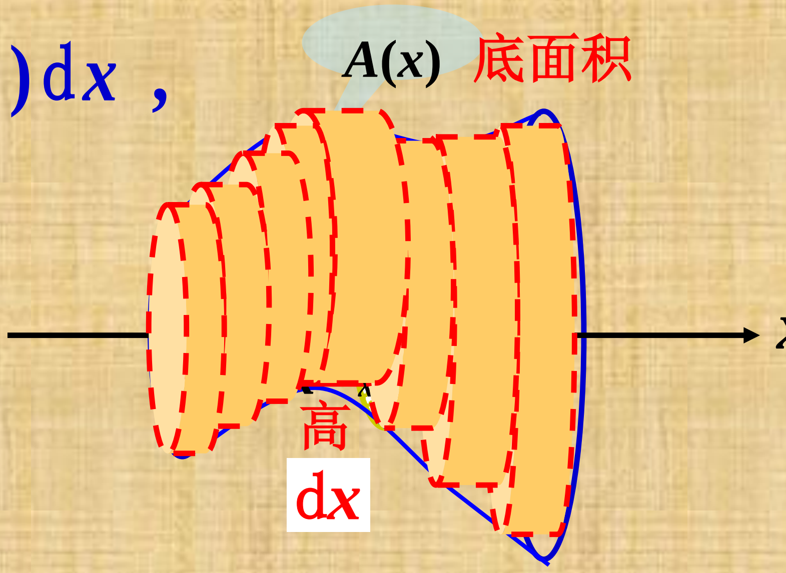
设所给立体垂直于x 轴的截面面积为$A(x)$,

$A(x)$在$[a,b]$上连续,则对应于小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$

的体积元素为$\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$,

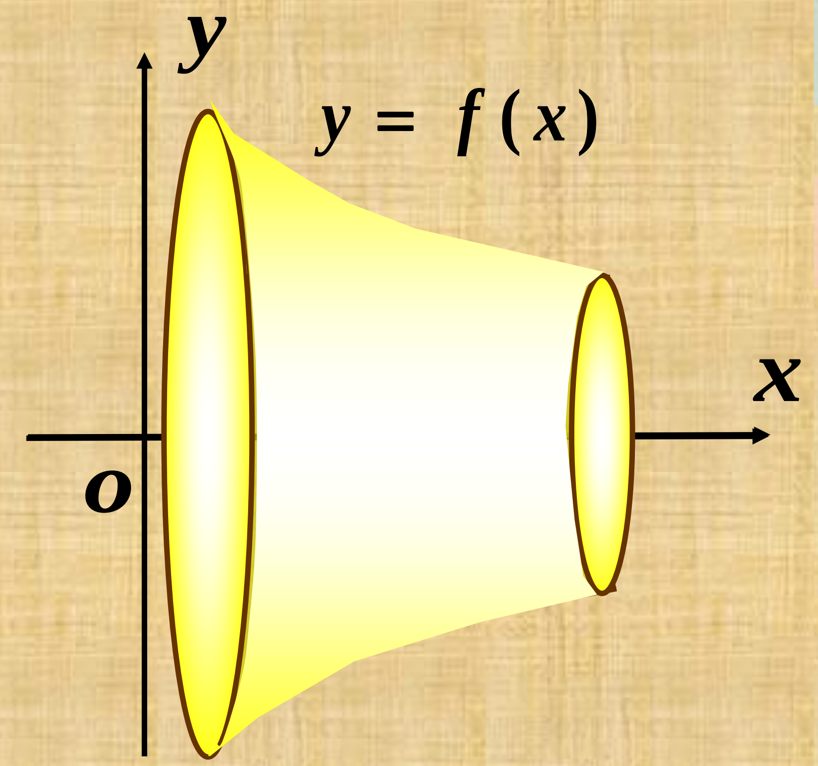
所以,所求立体体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x\ .$$



用柱体体积近似代替小立体体积

特别地，设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则由曲线$y=f(x)$、直线$x=a, x=b(a \le x \le b)$和x轴所围成的曲边梯形，绕x轴旋转一周而形成旋转体.



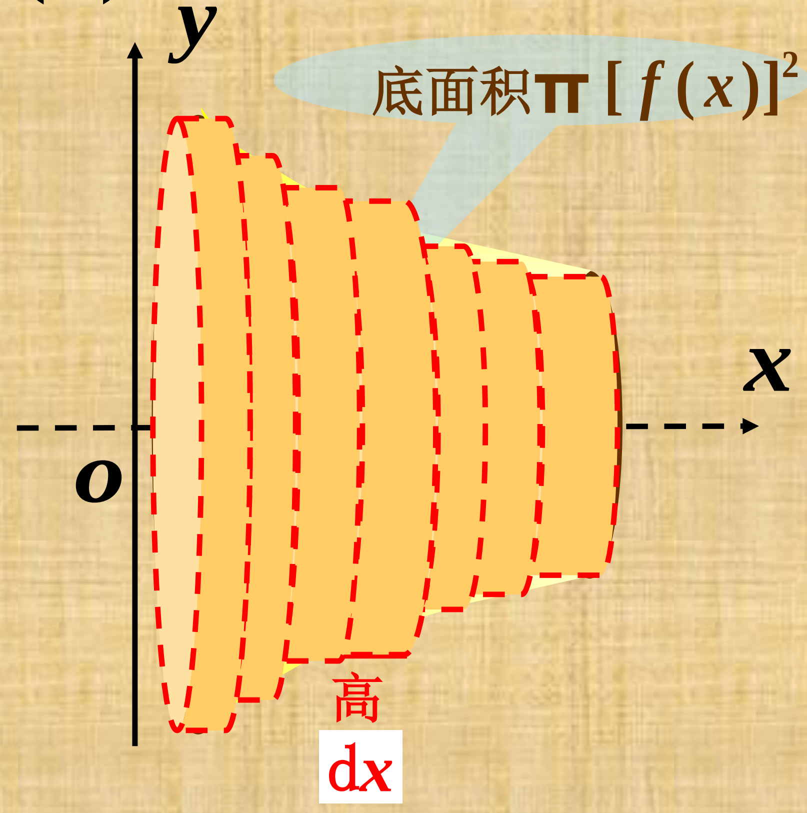
体积 $V=?$

采用微元法

取x为积分变量,它的变化区间是$[a,b]$,任一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$, $\mathrm{d}V = \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$,

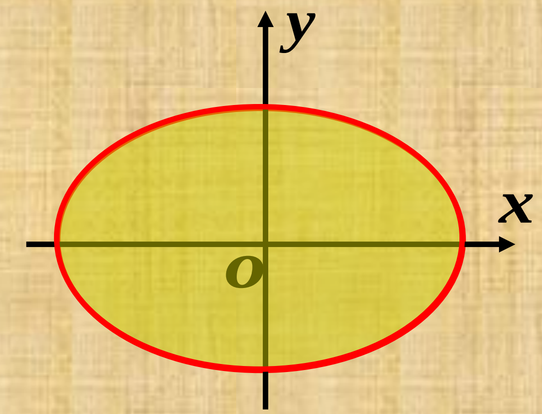
旋转体体积 : $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

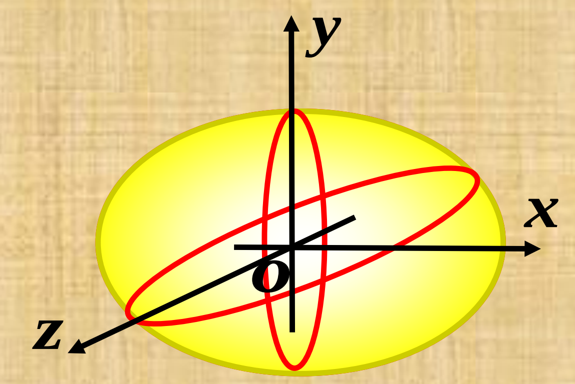
用圆柱体体积近似代替小立体体积

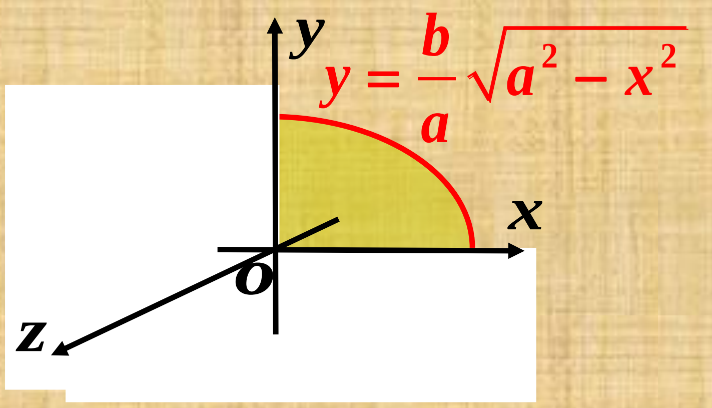


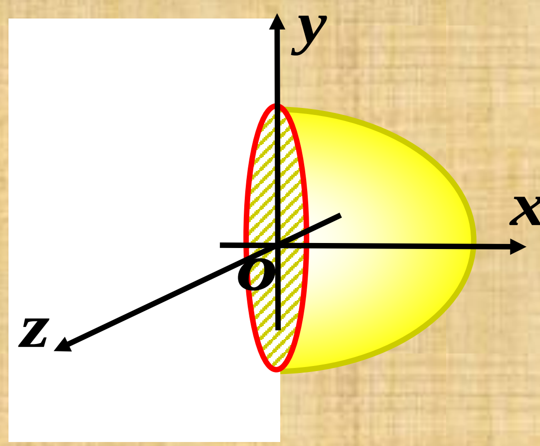
例3 求 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 椭圆绕 x 轴旋转一周所形成的椭球的体积 V.

提示与分析: 由对称性可得，椭球体的体积可由第一象限的图形绕 x 轴旋转而成半椭圆的2倍.

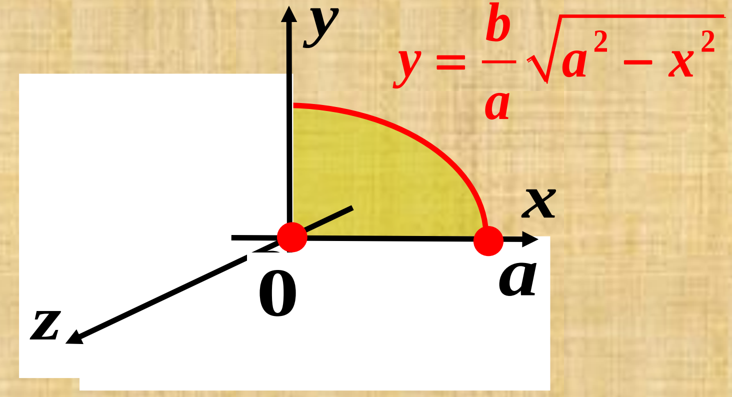








例3 求 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 椭圆绕 x 轴旋转一周所形成的椭球的体积 V.



解 $V=2V_1$

$$=2\pi\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

当 $a=b=R$ 时，可得

半径为 R 的球体体积

公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

课后作业

习题 六 (page 168)

6(2)， 7(1) , 8(1)