第二节　　函数极限

主要内容：

一、函数极限的概念

二、无穷大量与无穷小量

三、极限的四则运算及两个重要极限

一、$x \to x_0$ 时（自变量趋于有限数）

(1) $f(x) = x + 1$, $\quad x \to 1$

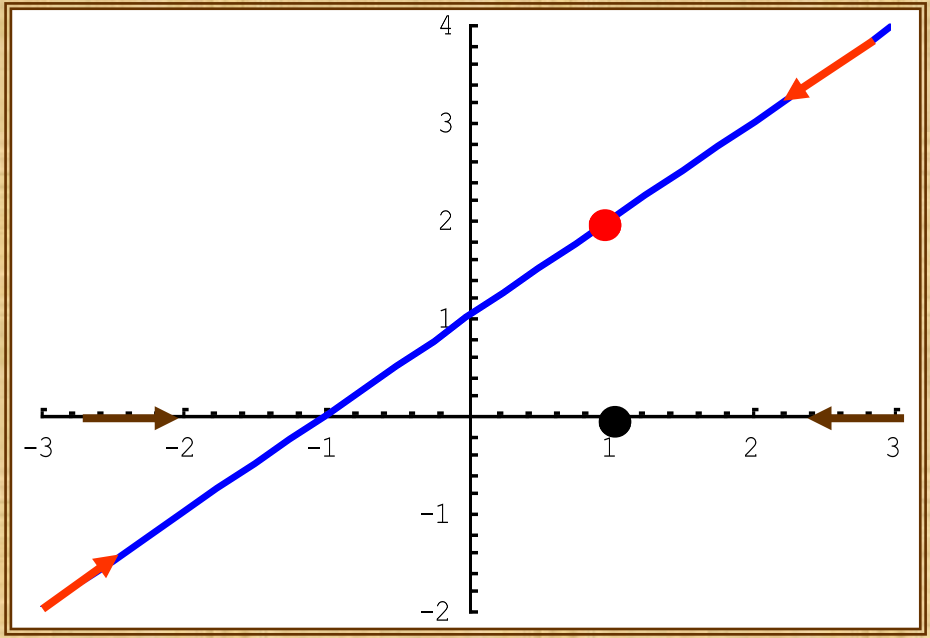
把$x_0 = 1$附近的自变量x与它对应的函数值$f(x)$列表:

x	0.9	0.98	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.02	1.1
$f(x)=x+1$	1.9	1.98	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.02	2.1

当x从$x_0 = 1$的左右近旁越来越接近于1时，函数$f(x)$越来越接近于2，并且要多接近就会有多接近.

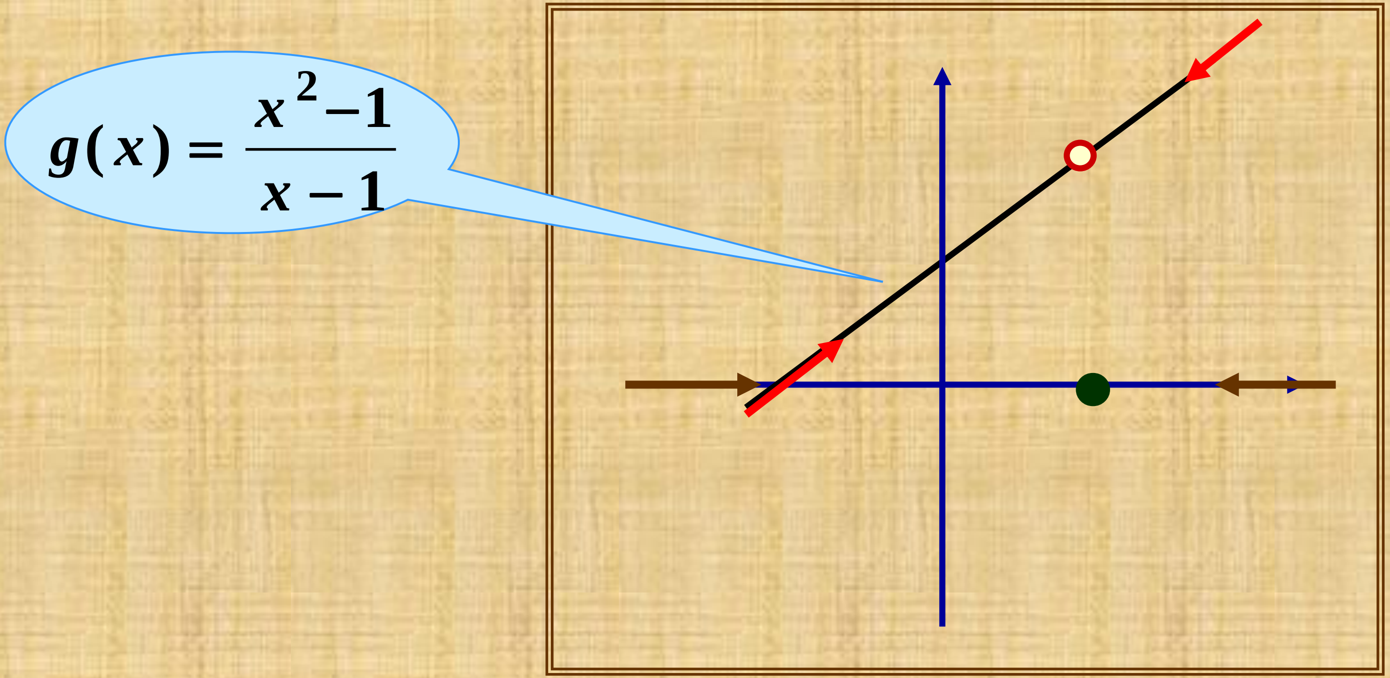
当 $|x-1|$ 无限变小时，$|f(x)-2|$ 也无限变小.

$$f(x) = x + 1 \qquad x \to 1$$



x	0.9	0.98	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.02	1.1
$f(x)=x+1$	1.9	1.98	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.02	2.1

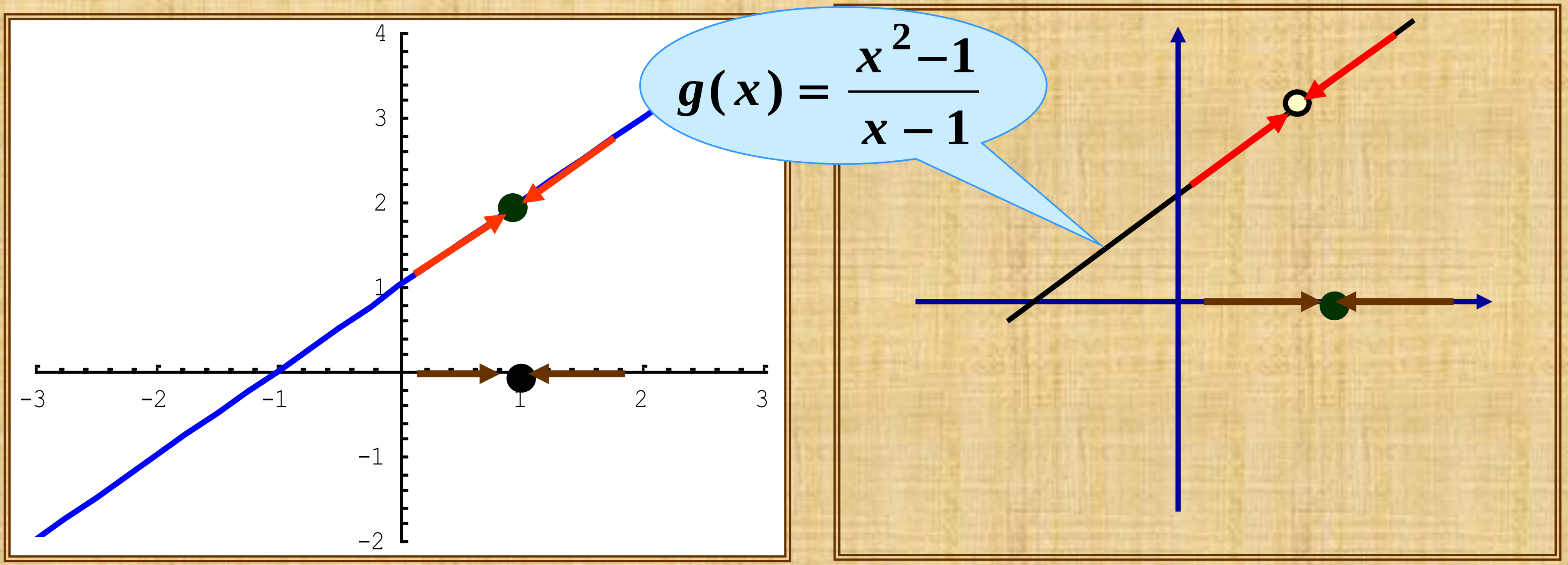
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$



$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x_0=1$处无定义,当$x\neq 1$

时$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$.当$x\to 1$时,$g(x)\to 2$.

这表明,$x\to x_0$时,$g(x)$的极限与$g(x)$在x_0点是否有定义并无关系.



$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$x\to1 \Rightarrow x-1\neq0$$

$$= \lim_{x\to1}(x+1)$$

$$= 2$$

有关函数极限的说明：

★ 函数在某点的极限与函数在这点的函数值是否存在，以及取值是多少并没有关系.

★ 函数在某点的极限只与函数在这点附近的变化趋势有关系.

定义 设函数 $f(x)$ 在点 $U^{\circ}(x_0,\delta)$ 内有定义，如果对于任意正数 ε （不论它多么小），总存在正数 δ，使得满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，能使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，或称函数 $f(x)$ 在 x_0 点有极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(x\to x_0).$$

该定义称为“$\varepsilon-\delta$”定义.

对于任意的

存在

该定义的简洁表示方法：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$

使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

注意: 1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.δ与任意给定的正数ε有关.

几何解释:

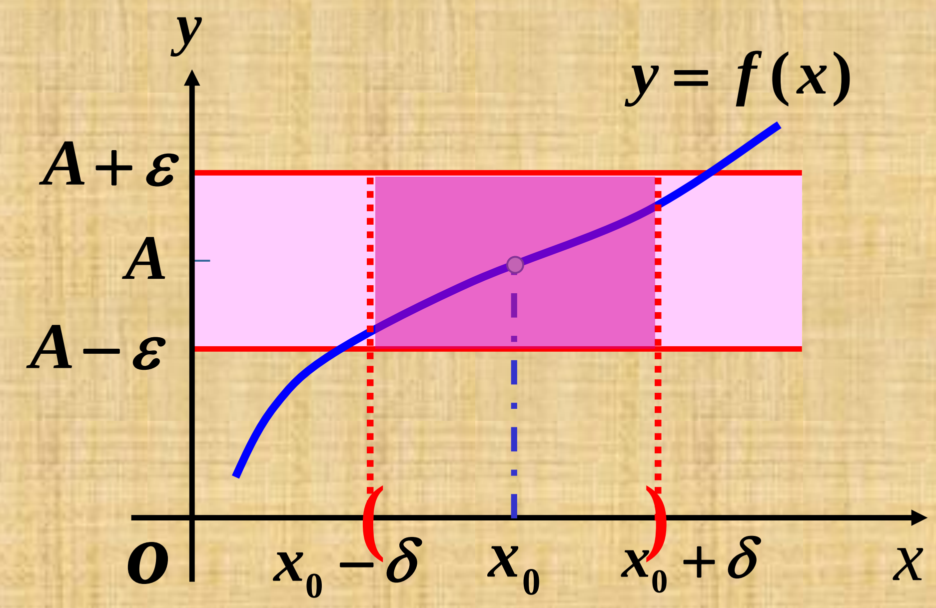
当x在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$时,

$y = f(x)$图形完全

落在以直线$y = A$为

中心线,宽为2ε的带

形区域内.



例1 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (C为常数).

证明 任给$\varepsilon > 0$,任取$\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$|f(x) - A| = |C - C| = 0 < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

即常数的极限就是该常数.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

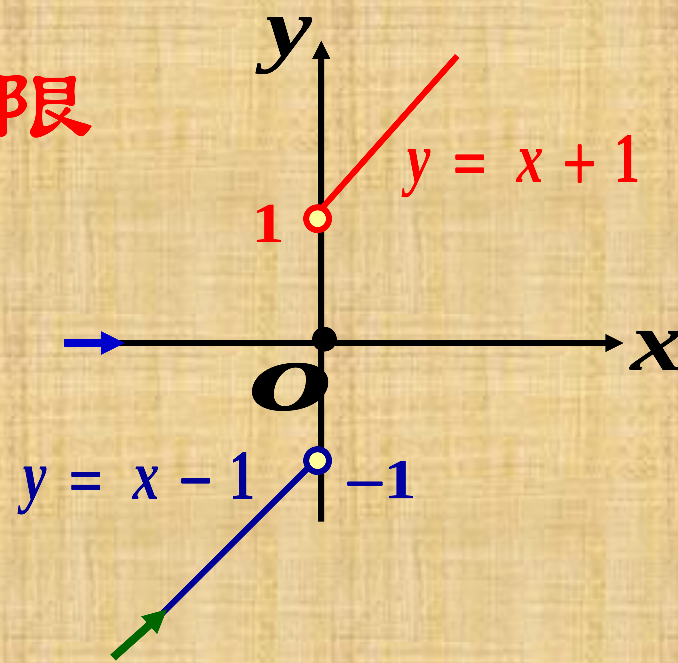
证明 $\because |f(x) - A| = |x - x_0|$, 任给$\varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$时,

$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$成立, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

二、单侧极限——左右极限

设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0\quad, & x=0, \\ x+1, & x>0. \end{cases}$



讨论当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限：

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 点断开，是分段函数

分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论：

x 从 x_0 左侧无限趋近 x_0, $f(x)$ 的极限称为左极限，

记作 $x\to x_0^{-}$;

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

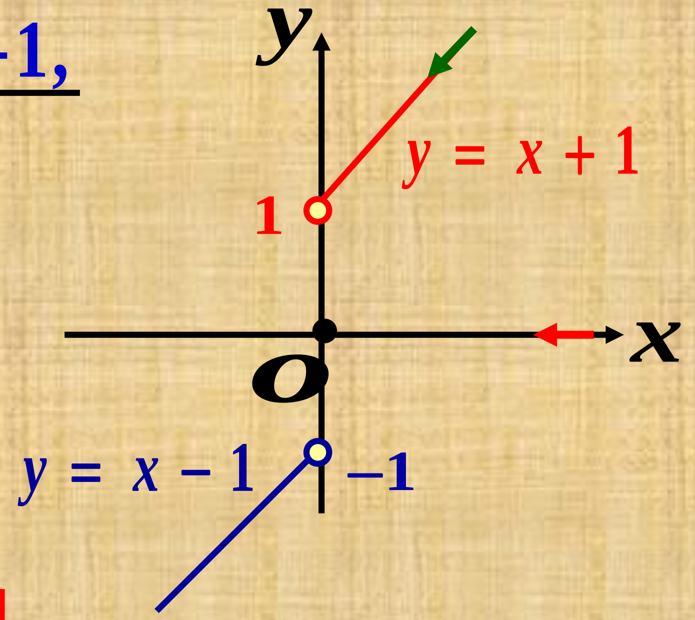
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-1) = -1,$$

x从x_0右侧无限趋近x_0,

$f(x)$的极限称为右极限,

记作$x \to x_0^+$;

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+1) = 1,$$



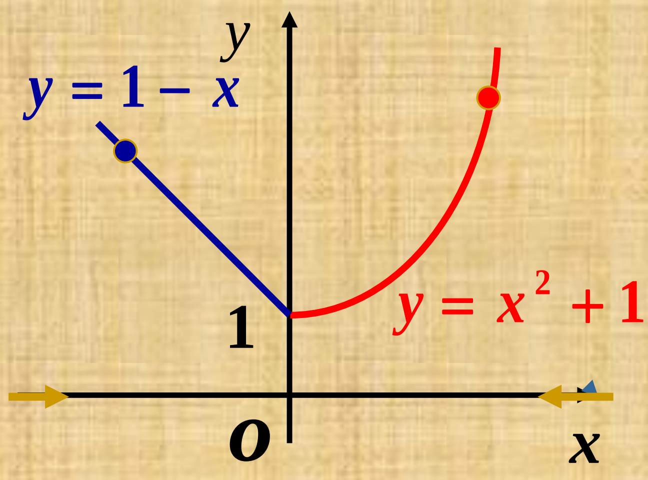
定理

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

上题中由于$f(x)$的左、右极限不相等,

因此当$x \to 0$时, $f(x)$无极限.

例3 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+1, & x\ge 0,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



提示与分析:由于已知函数是分段函数，根据前定理，考虑左、右极限.

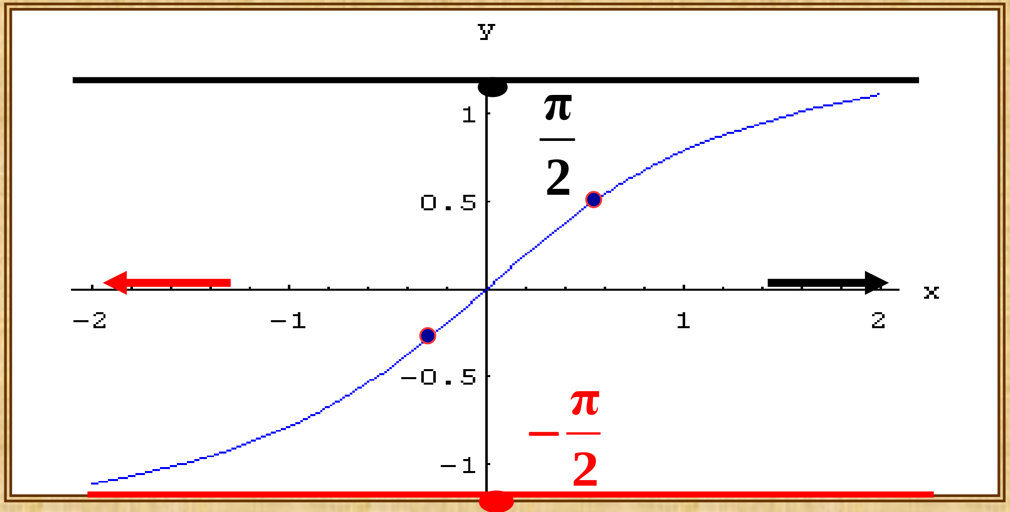
证 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

三、$|x| \to \infty$ 时（自变量的绝对值无限增大时的情形）

(1) $f(x) = \arctan x$



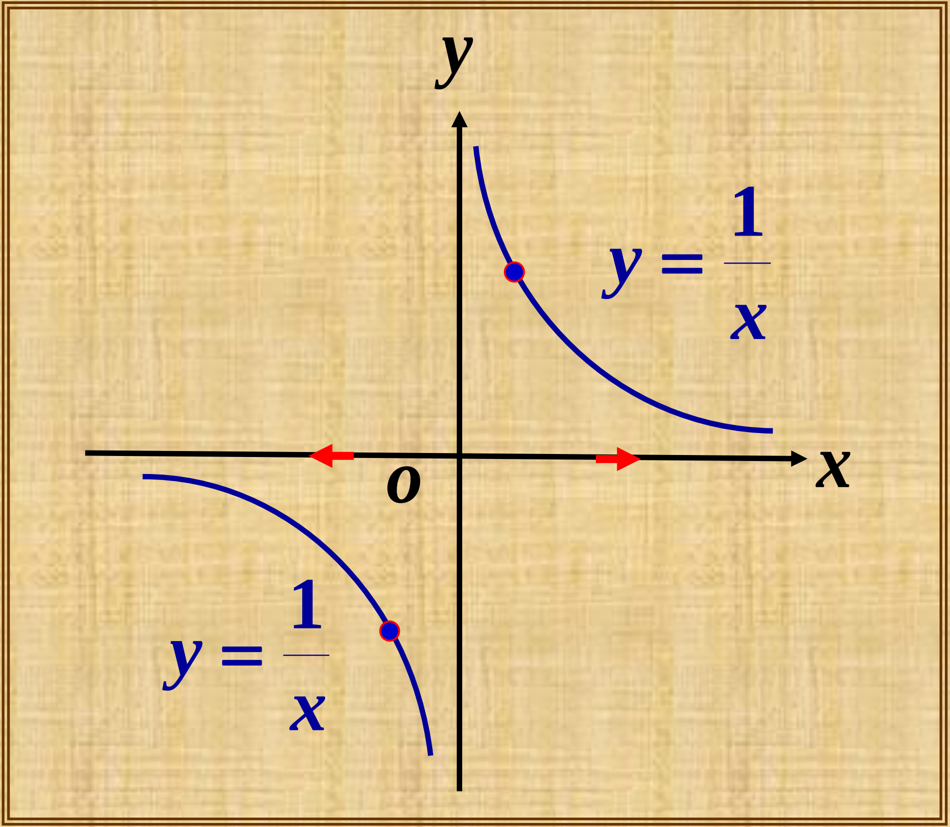
$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$x \to +\infty$，表示$x > 0$，$|x|$无限变大，即x沿x轴正方向无限变远；$x \to -\infty$，表示$x < 0$，$|x|$无限变大.

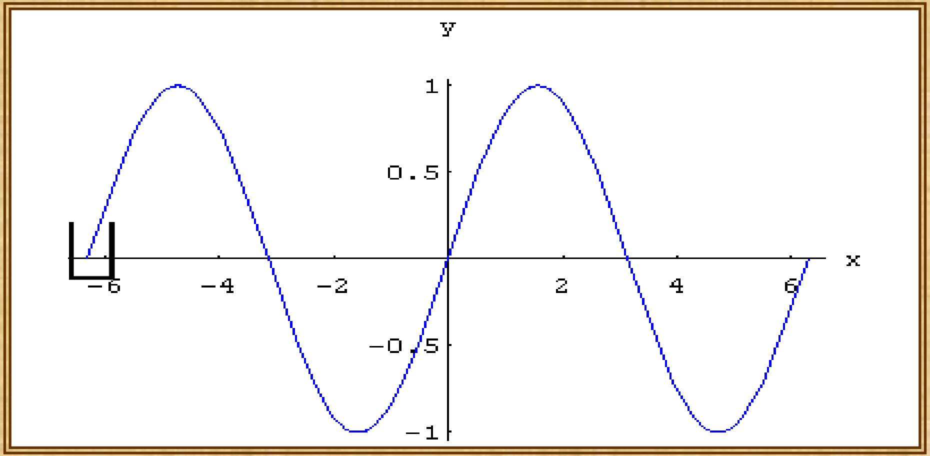
由于 $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x \neq \lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x$，$\therefore \lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$不存在.

定义 如果$|x|$无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于常数a，则称$f(x)$在$x\to\infty$时，以a为极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$



还有一种极限不存在的情形: $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$不存在, 这与$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$情况不同.



在$x\to\infty$时，$\sin x$并不向某个点逼近，所以无极限.

四、函数极限的性质

下面仅对$x \to x_0$的变化过程讨论函数极限的性质，对$x \to \infty$的情形有类似结论.

定理　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且$A > 0$(或$A < 0$),则存在$x_0$点某邻域$U^{\circ}(x_0,\delta)$,对一切$x \in U^{\circ}(x_0,\delta)$,恒有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

证明　$\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$,由"$\varepsilon - \delta$定义",

若取任意正数$\varepsilon = A$,　则存在相应δ,

由于在$x \in U^{\circ}(x_0,\delta)$,　恒有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$),称该定理为局部保号性定理.

定理 若$f(x)\geq 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么$A\geq 0$.

要注意的是，若$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,

那么$A\geq 0$.

比如，当$x\neq 1$时, 函数$f(x)=(x-1)^2>0$,

但$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$.

推论 若$f(x)\leq g(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,

那么$A\leq B$.

只需令$F(x)=g(x)-f(x)\geq 0$,

由上定理知$\lim\limits_{x\to x_0} F(x)\geq 0$,

即$A\leq B$.

五、无穷大量与无穷小量

1) 无穷大量

定义 若在某个变化过程中，函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$变得越来越大，且想多大就会有多大，则称$f(x)$的极限是无穷大，

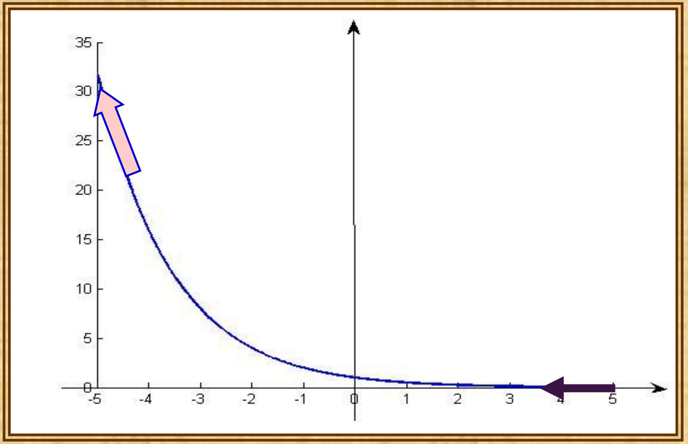
记作$f(x)\to\infty$（$x\to x_0$或$x\to\infty$）.

$f(x)$称为无穷大量，简称无穷大.

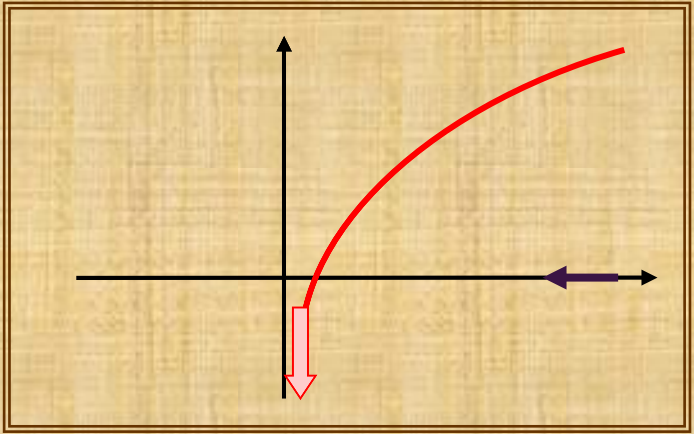
注:无穷大是变量,不能与很大的数混淆.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^x}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty,$$

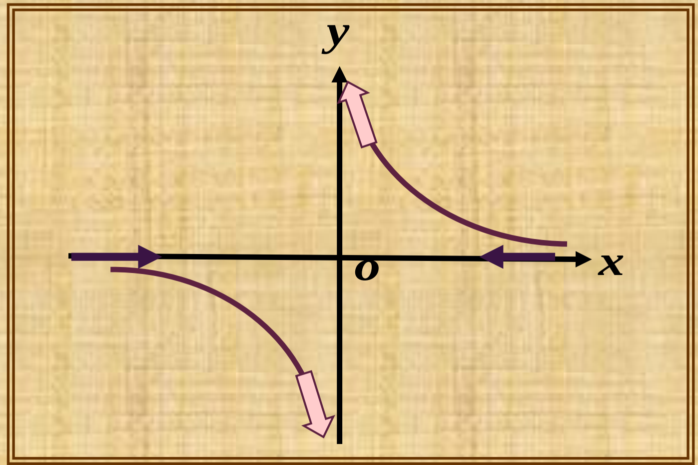
函数$f(x)=\dfrac{1}{2^x}, g(x)=\ln x, h(x)=\dfrac{1}{x}$分别称为$x\to-\infty, x\to0^+, x\to0$过程中的无穷大量.



$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{2^{x}}=+\infty$$



$$\lim_{x\to 0^{+}}\ln x=-\infty$$



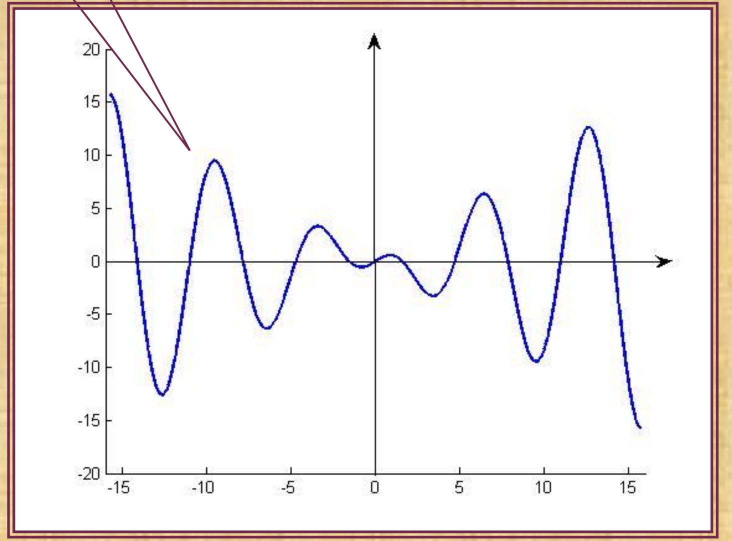
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

注意: （1）无穷大是**变量**,不能与很大的数混淆;

（2）切勿将 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 认为极限存在;

（3）无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

$f(x) = \boxed{x\cos x}(x \to \infty)$ 是无界变量,但不是无穷大量.



2)无穷小量

若在某个变化过程中，函数$f(x)$的绝对值$|f(x)|$变得越来越小，且想多小就会有多小.

如,2008年北京奥运会倒计时.

定义：在某个变化过程中，以零为极限的变量为无穷小量. 简称无穷小.

注:

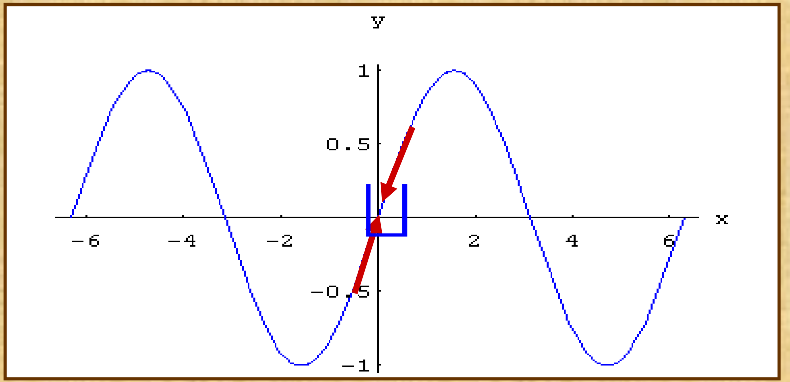
（1）极限为零的数列$\{x_n\}$也可称为$n \to \infty$时的无穷小量.

（2）无穷小是变量,不能与很小的数混淆. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

（3）零是可以作为无穷小的唯一的数.

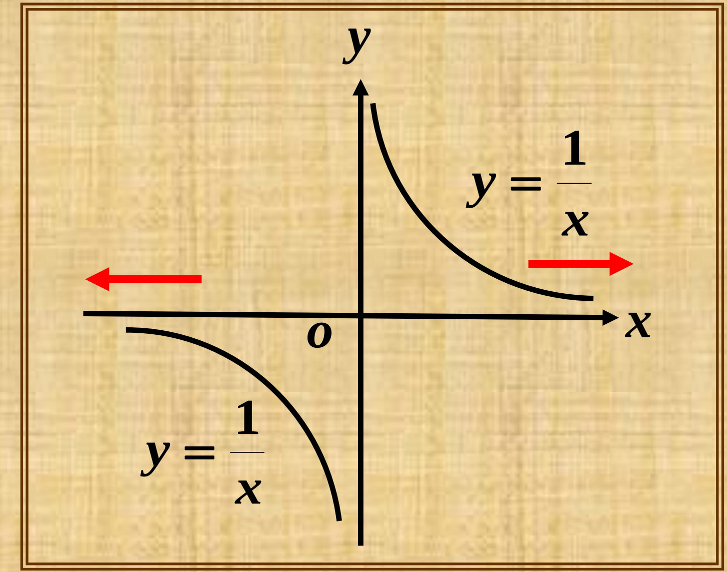
例4

$\because \lim_{x \to 0} \sin x = 0,$



$\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$



$\therefore$ 函数 $\frac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

无穷小量与函数极限的关系:

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)\to o\ (x\to x_0).$

证明 必要性

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

因而$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$ $\therefore f(x)=A+\alpha(x).$

充分性

若$f(x)=A+\alpha(x),$ 其中$\alpha(x)\to o\ (x\to x_0),$

于是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x))$

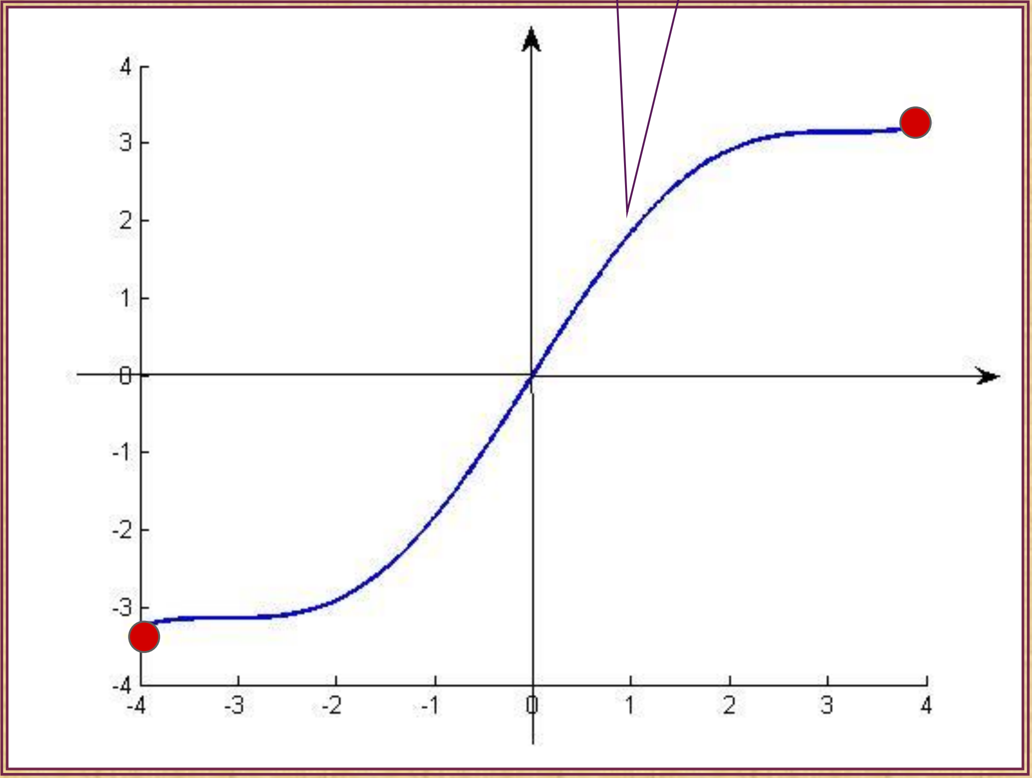
$$=A+\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=A.$$

无穷小量的性质：

1.有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

例5 当$x \to 0$时，x与$\sin x$都是无穷小量，

所以，当$x \to 0$时，$x + \sin x$是无穷小量.



2.无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x\right) = 0\,.$$

无 穷 小 量　　　　有界变量

3.有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

例6　当 $x\to 0$时，x^2与 $\tan x$都是无穷小量，

所以$x^2\tan x$是无穷小量.

4.常量与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

例7当 $x\to 0$时,$\sin x$ 是无穷小量，所以3 $\sin x$

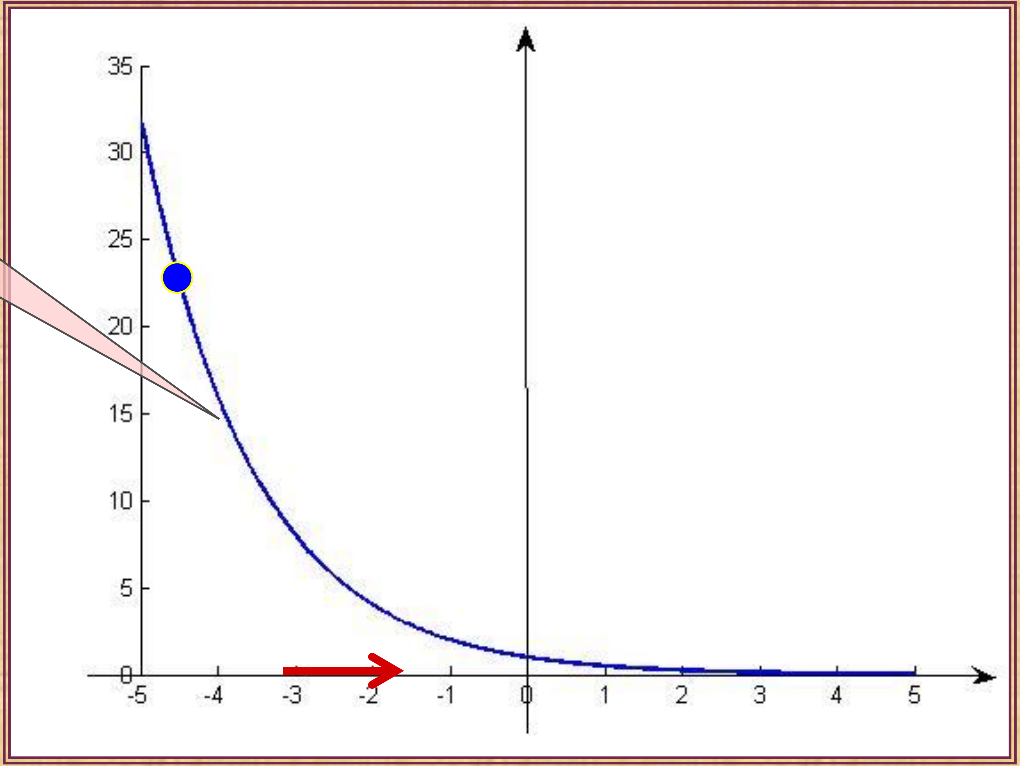
是当$x\to 0$时的无穷小量.

无穷小与无穷大的关系

在 x 变化同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

意义：关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

如 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$



$f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0$$

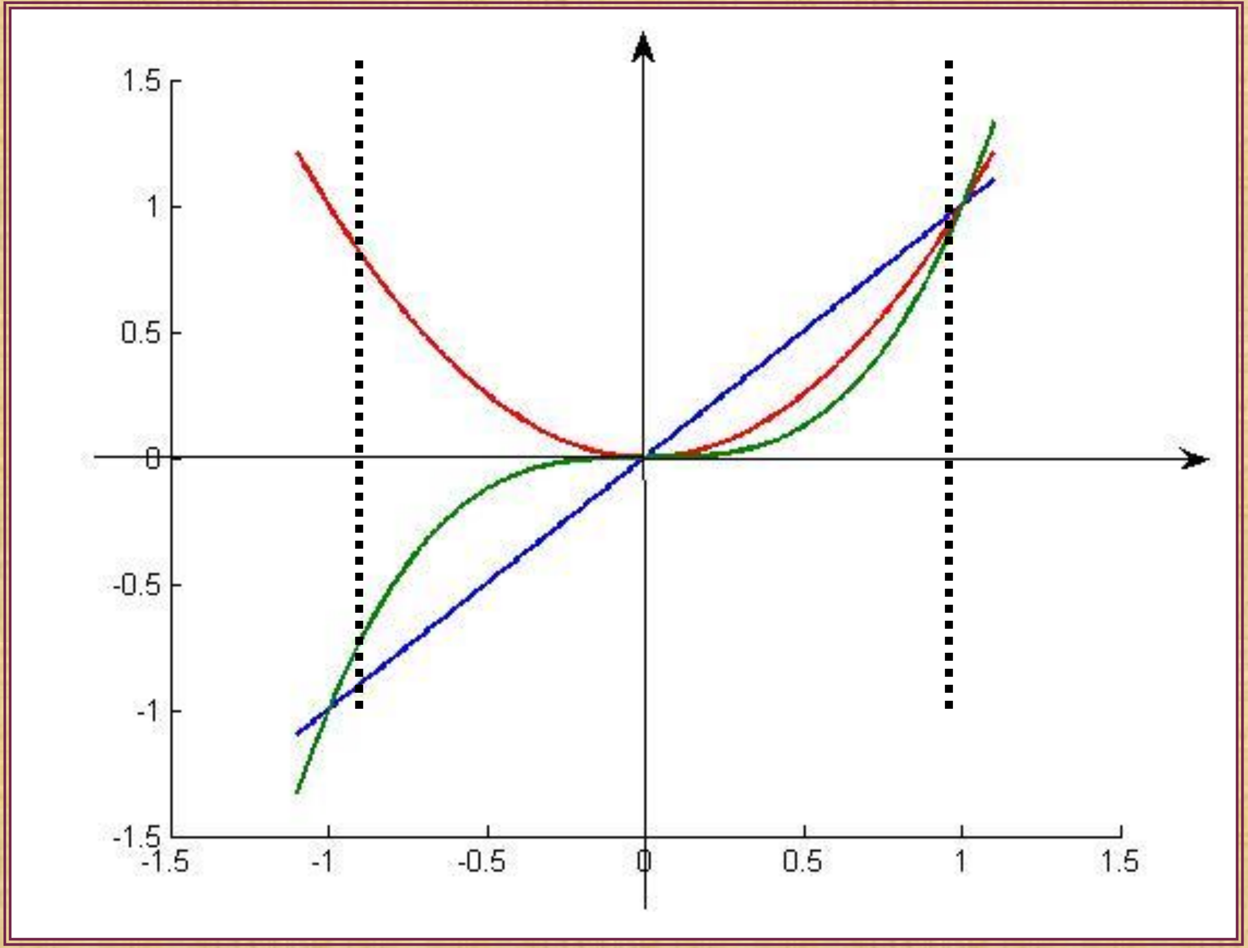
$x\to+\infty$时, $2^x\to\infty$, $\therefore \dfrac{1}{2^x}\to 0$

无穷大量

无穷小量

无穷小量阶的比较

三个函数$y=x^3$, $y=x^2$, $y=x$, 当$x\to 0$时, 都趋近于0.

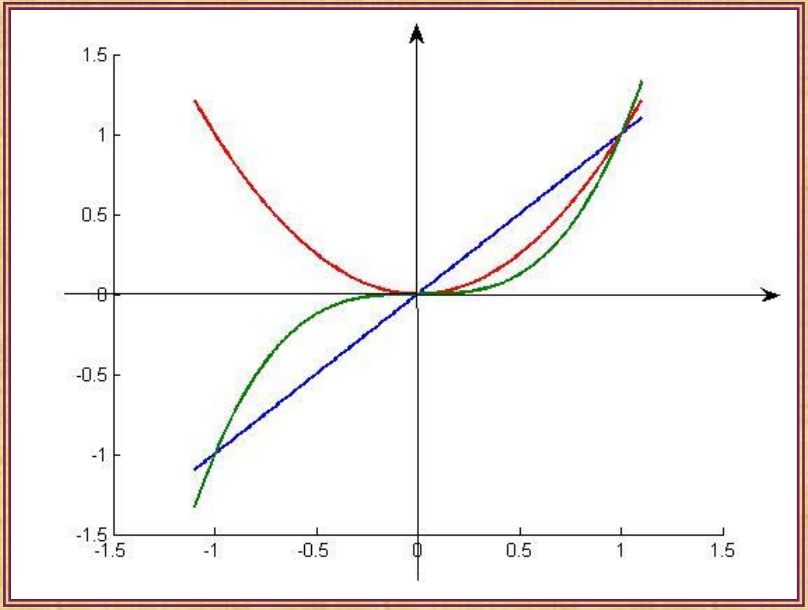


下面观察它们趋于0的快慢程度.

观察各极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$ x^2比x趋近于0的速度要快得多.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\infty,$$ x比x^3趋近于0的速度要慢得多.



$y = x$

$y = x^2$

$y = x^3$

极限值的不同, 反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

定义 设 α,β 是自变量同一变化过程中的无穷小，

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}(\dfrac{0}{0}) = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小.

记作 $\beta = o(\alpha)$.

不定式

观察各极限

$\because \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{3x} = 0,$ 即 $x^2 = o(3x)\ (x \to 0)$.

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小.

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}(\dfrac{0}{0}) = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

观察各极限

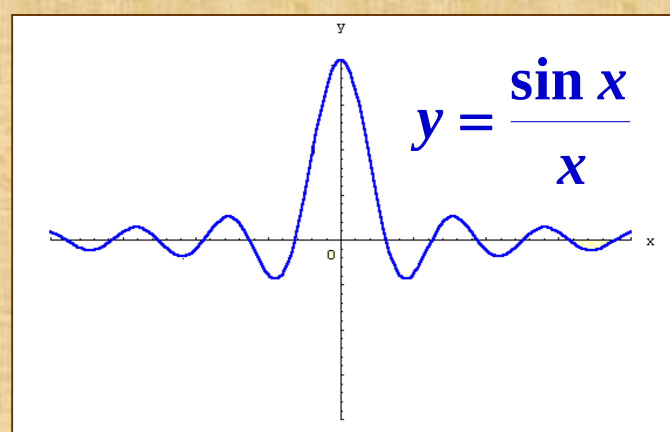
若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C$，则称 β 是 α 的同阶无穷小.

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 是 α 的等价无穷小，

记作 $\alpha \sim \beta$.

$\because \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$， 即 $\sin x \sim x \ (x \to 0)$.

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

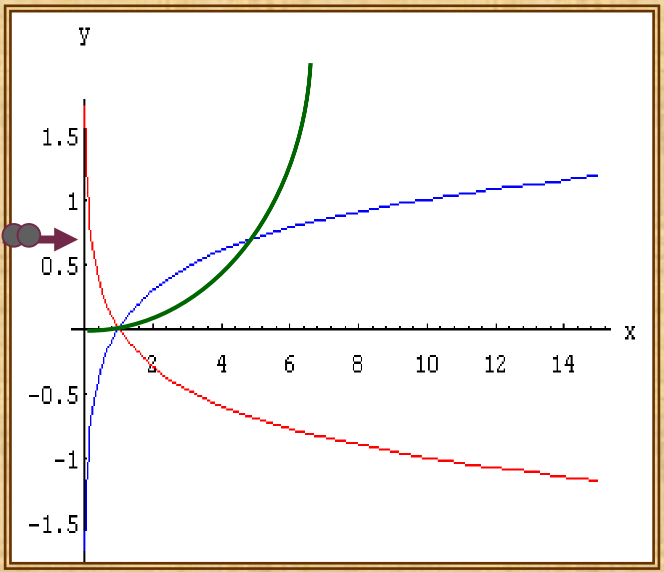


两个无穷大量之比也是不定式，称为

$\frac{\infty}{\infty}$型不定式.

类似地可以作出两个无穷大量阶的比较。

如：$x \to +\infty$时，$\frac{\ln x}{x^2}$属于$\frac{\infty}{\infty}$型不定式.



End

六、极限的四则运算

定理 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

$$(1)\ \lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2)\ \lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3)\ \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{其中} B \neq 0.$$

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 c 为常数,则

$$\lim[\quad f(x)] = c\lim f(x).$$

这意味着,常数因子可以提到极限符号的外面.

推论2

如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

这意味着, 求一个函数 n 次幂的极限等于该函数极限值的n 次幂.

例10 $\lim_{x \to 1}(2x^2 + 3x - 4)$

$$= \lim_{x \to 1}(2x^2) + \lim_{x \to 1} 3x + \lim_{x \to 1}(-4)$$

$$= 2\lim_{x \to 1} x^2 + 3\lim_{x \to 1} x - 4$$

$$= 2(\lim_{x \to 1} x)^2 + 3 - 4$$

$$= 1.$$

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$$

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

代数和的极限等于极限的代数和.

例11 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to 1}(x+2)\neq 0$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-1}{\lim\limits_{x\to 1}x+2}$$

$$=\frac{1-1}{1+2}=0.$$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$,其中$B\neq 0$.

在对商求极限时,若分母不为0，商的极限等于先求极限后,再做除法.

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{其中} B \neq 0.$$

例12 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

由于 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)=0$,

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cancel{(2x-1)}(2x+1)}{\cancel{(2x-1)}}$$

不能写成 $\dfrac{\lim(4x^2-1)}{\lim(2x-1)}$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x+1)$$

而在 $x \to \dfrac{1}{2}$ 时, $2x-1 \neq 0$,

可以约分.

$$= 2.$$

当分母的极限为 0 的情形,

要看分子, 分母能否因式分解, 并约分.

例13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$,

x^2-4可以因式分解

但与分子不能约分,

需要另外想办法.

$\because \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{5x}=0$

注意当$x\to 2$时,分母是

无穷小量,分子是常数.

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x}{x^2-4}=\infty.$

对于分母求极限为0的情形,

1. 要看能否因式分解;

2. 考虑利用无穷小的倒数是无穷大这一性质.

七、两个重要的极限

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$x\to 0$时，$\sin x$与x为等价无穷小量，它们趋于0的速度一样.

例15 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot \dfrac{3x}{\sin 3x}$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}.$$

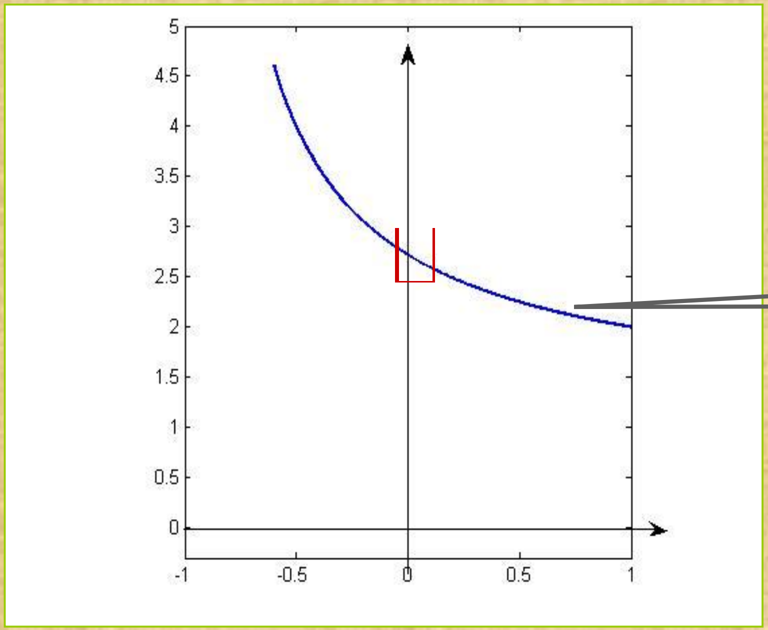
其中，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} \xrightarrow{t=2x} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}.$

e 是一个无理数，

$\mathrm{e} = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$$



$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

例16

$$1)\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x/3})^{\frac{x}{3}}]^3$$

$$\xrightarrow{t=\frac{x}{3}} \lim_{t\to\infty}[(1+\frac{1}{t})^t]^3 = e^3.$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}$$

$$= e^{-1}.$$