第四章

导数的应用问题——洛必达法则、函数的性质和图像

著名美国数学家、哲学家、数理逻辑学家怀特黑德（Whitehead,1861—1947)曾说过：“只有将数学应用于社会科学的研究之后，才能使得文明社会的发展成为可控制的现实.”第三章介绍的“导数是函数的变化率”在研究函数变化的形态中有着十分重要的意义，因而在自然科学、工程技术及社会科学领域中得到广泛的应用.

第四章在介绍中值定理的基础上，以导数为工具，解决一类特殊极限的计算、函数的增减性、极值与最值等问题.

第一节

联结局部与整体的纽带

—— 中值定理

主要内容：

一、费马定理

二、中值定理

局部概念

一、费马定理

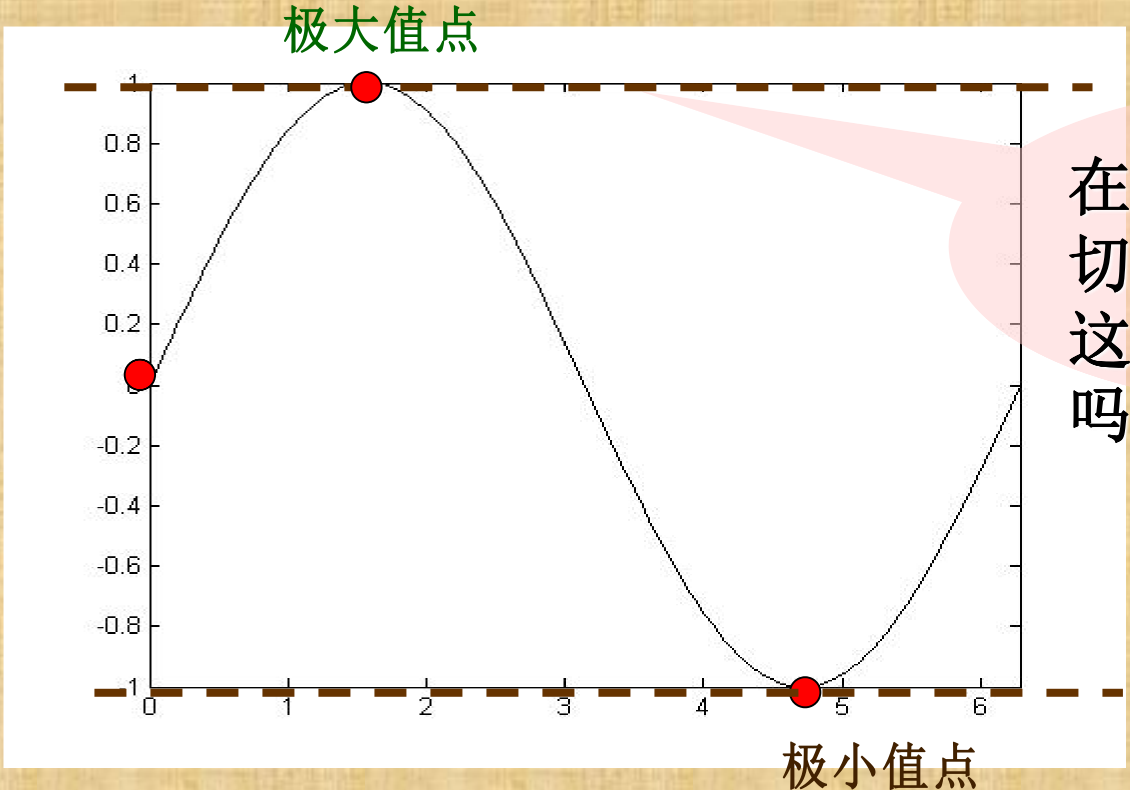
定义 设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域有定义，如果对于该邻域内任意异于x_0的x值，都有 $f(x) \le f(x_0)$ (或$f(x) \ge f(x_0)$)，则称函数$f(x)$在点x_0处取得极大值（或极小值）$f(x_0)$，而x_0称为函数$f(x)$的极大点（或极小点）.

极大值和极小值统称为函数的极值.

极大点和极小点统称为函数的极值点.

例如,

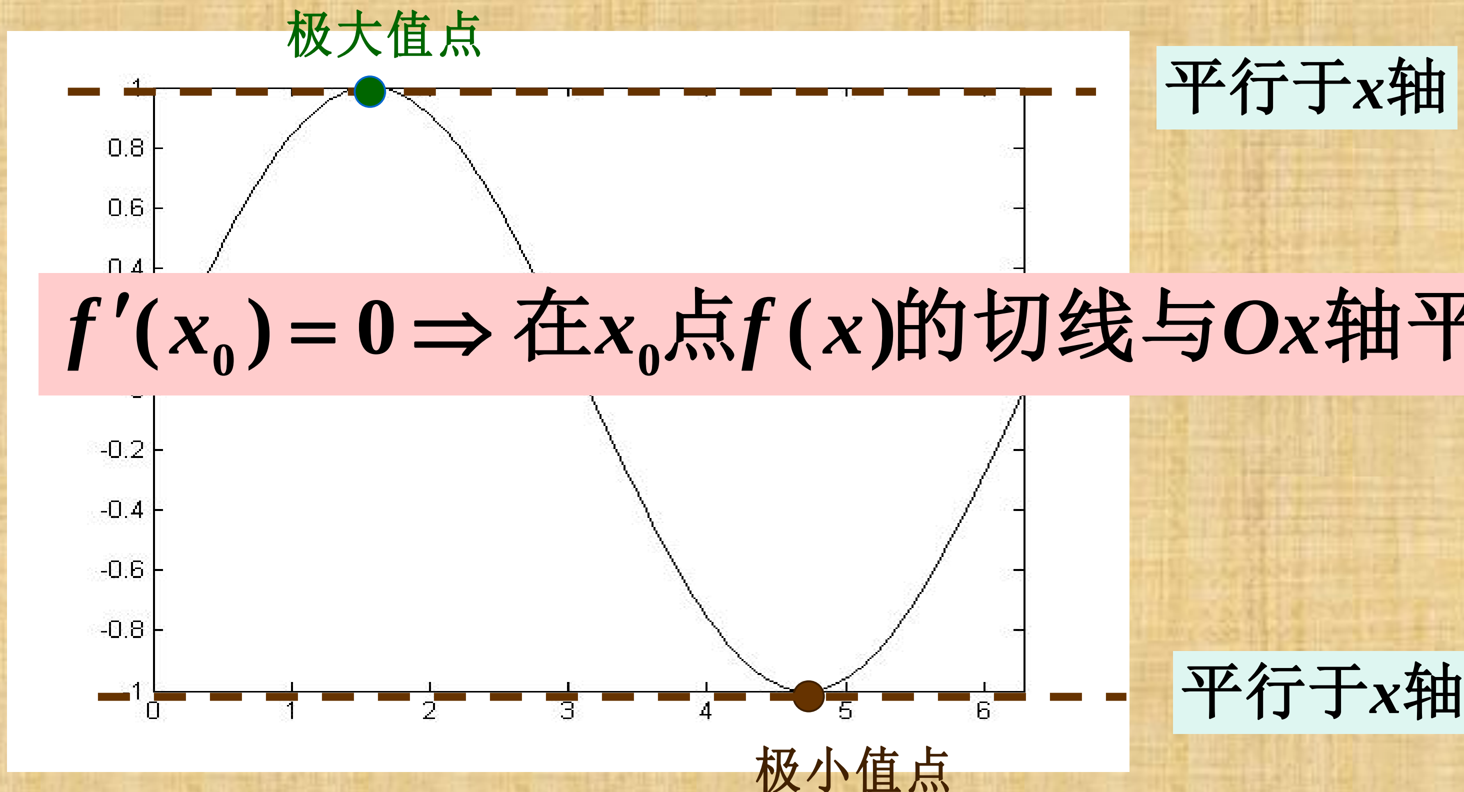
在$[0, 2\pi]$上, $y = 1 + \sin x$的极大值为2，极小值为0.



在极值点处的切线是水平的，这是一种偶然吗？

费马定理 如果x_0是函数$f(x)$的极值点，并且$f(x)$在该点可导，那么$f'(x_0)=0$.

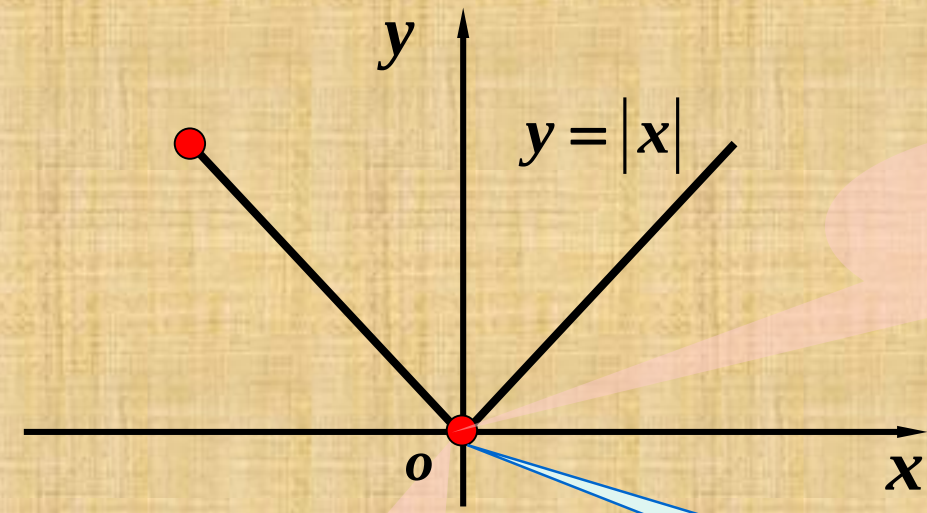
驻点



$f'(x_0)=0 \Rightarrow$ 在x_0点$f(x)$的切线与Ox轴平行.

注： 已知条件中$f(x)$在该点可导是重要的.

$x=0$是极小值点，
但在该点不可导.



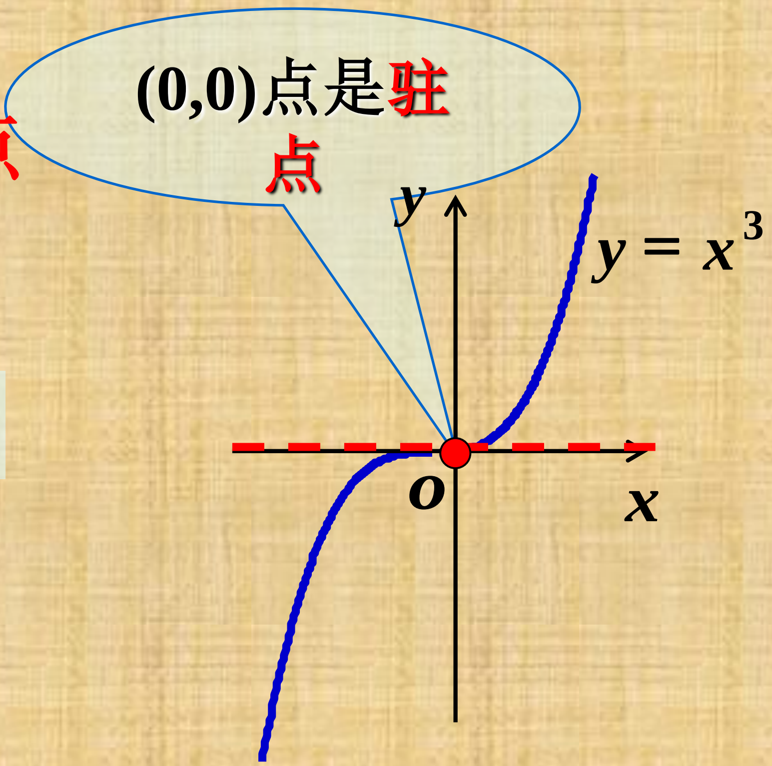
在(0,0)右侧的
切线斜率k=1.

在(0,0)左侧的
切线斜率k=－1.

在(0,0)点不光
滑，出现尖点.

$$\text{极值点}\begin{cases}\text{可导点} \Rightarrow \text{驻点} \\ \quad\text{不可导点}\end{cases}$$

但驻点不一定是极值点.



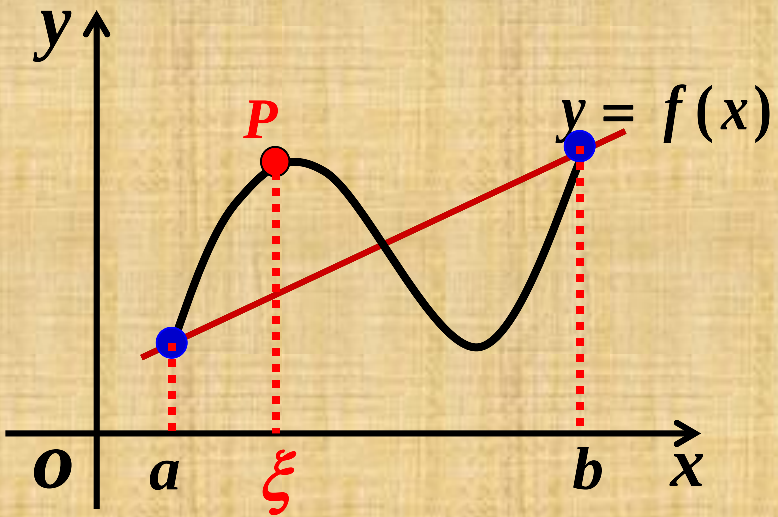
$$(x^3)'\big|_{x=0} = 3x^2\big|_{x=0} = 0,$$

但是 $f(x) = x^3$在$(-\infty,+\infty)$上是单增函数,

$x = 0$并不是$f(x)$的极值点.

二、中值定理

观察右图



在函数$y = f(x)$的曲线

上总有一点P,使曲线

在该点的切线与连接A、B两点的直线平行.

由此我们可以得到拉格朗日中值定理.

中值定理(拉格朗日)如果函数$f(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)上可导,

那么在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (\xi\in(a,b)).$$

此公式称为拉格朗日公式.

$f(x)$在$[a,b]$上整体变化的平均变化率

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$$

中值定理是联结局部与整体的纽带.

物理含义：$v(\xi) = \dfrac{S(b) - S(a)}{b - a}$

拉格朗日中值定理告诉我们，在$t = a$到$t = b$的时间段内，连续运动的物体至少会在某一时刻达到它的平均速度.

推论 如果函数$f(x)$在区间(a,b)内的$f'(\xi)=0$为零，那么$f(x)$是区间(a,b)内的常数函数.

即证 $\forall x_1, x_2 \in (a,b), f(x_1)=f(x_2).$

证明 设 x_1, x_2 是(a,b)内的任意两点，

并且 $x_1 < x_2$，

易知 $f(x)$在$[x_1, x_2]$上满足中值定理条件，故有

$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$

$$f(x_2)-f(x_1)= 0 \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

由条件 $f'(\xi)=0$,于是 $f(x_1)=f(x_2)$.

再由x_1,x_2的任意性，可知区间(a,b)内任意点处的值都相等,

即 $f(x)$为区间 (a,b) 内的常数函数.

常数函数的导数为零,

导数为零的函数是常数函数.

常数函数 $\Leftrightarrow$ 导数为零

例1　对函数$f(x)=x^2-2x-3$在区间$[0,4]$上验证拉格朗日中值定理的正确性.

解　$\because D: 0 \le x \le 4$, 且在$[0,\ 4]$上连续,

又　$f'(x)=2x-2$ 在$(0,\ 4)$内处处存在,

$\therefore$ 函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在 $[0,4]$ 上满足拉格朗日定理的条件.

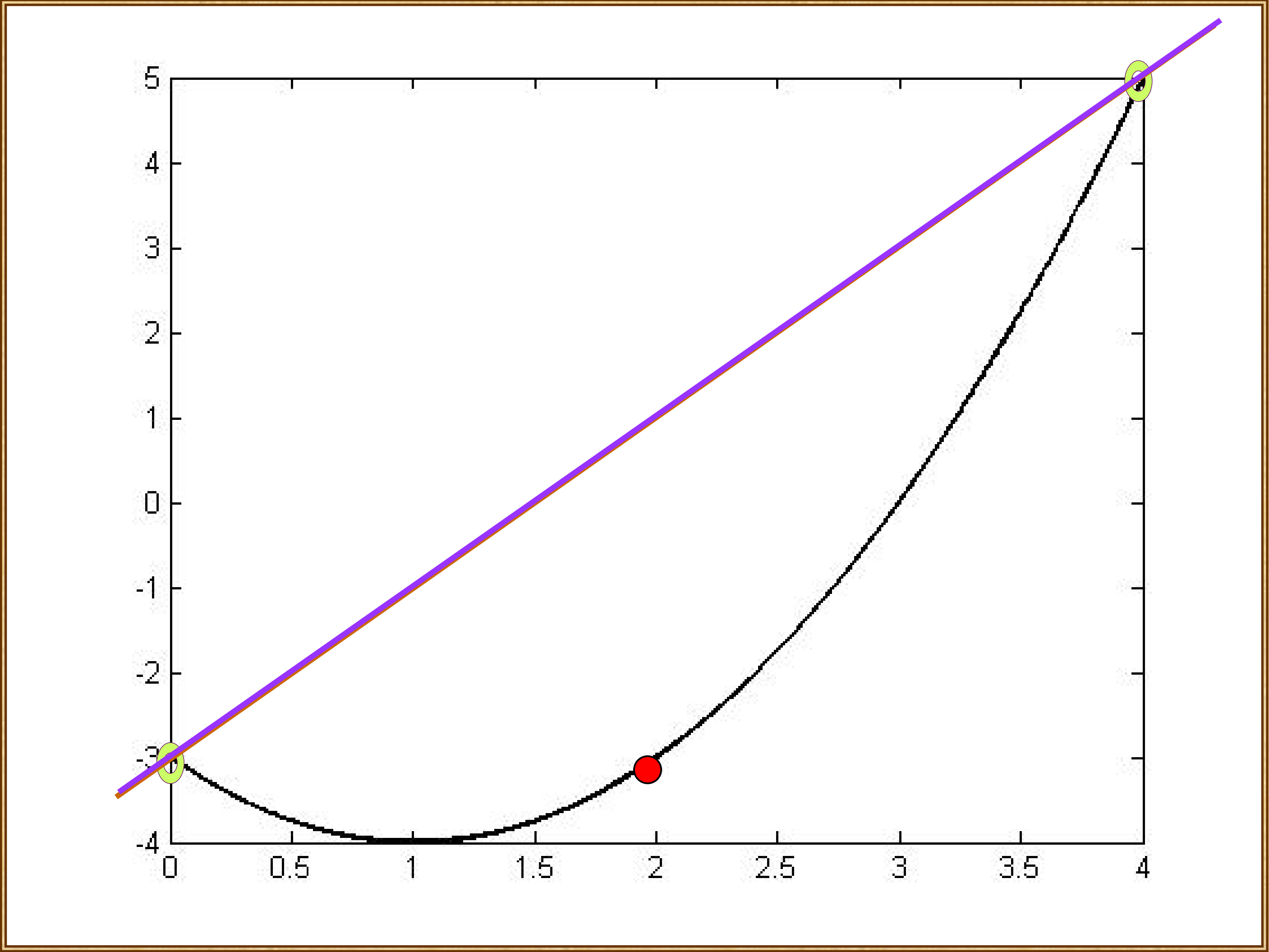
$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$

由　$f'(x)=2x-2=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=2,$

在$(0,4)$内显然有解$x=2$.

取 $\xi=2$, 则 $f'(\xi)=2$.

这就验证了命题的正确性.



5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

例2 试证不等式

$$f(x_2)-f(x_1) \le x_2 - x_1 \ (x_1 < x_2).$$

证明 设$f(x)=\arctan x$,这是基本初等函数,

由拉格朗日公式, 在开区间 (x_1, x_2)

内至少存在一点ξ, 使得

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 = f'(\xi)\cdot(x_2 - x_1)$$

$$\because f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \ \therefore f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}\le 1,$$

从而 $\arctan x_2 - \arctan x_1 = \dfrac{1}{1+\xi^2}\cdot(x_2 - x_1)$