Untitled

April 20, 2021

1 Grupos

1.1 Lei de composição

Definição: Uma *Lei de Composição* sobre S é uma função $F : S \times S \longrightarrow S$.

Definição: Para $a, b, c \in S$, uma Lei de Composição é dita

- *lei associativa* se $F(F(a,b),c) = F(a,F(b,c))$;
- *lei comutativa* se $F(a,b) = F(b,a)$.

Usaremos a notação $F(a,b) = ab$, para simplificar a escrita de propriedades.

Proposição: Seja uma lei associativa dada sobre o conjunto S. Há uma única forma de definir, para todo inteiro n, um produto de n elementos $a_1, \ldots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:

1. o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;
2. o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela lei de composição;
3. para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.

A demonstração dessa proposição é feita por indução em n.

Definição: Dizemos que $e \in S$ é *identidade* para uma lei de composição se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.

Se e, e' são identidades então, desde que e é identidade, $ee' = e'$, e desde que e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. Usaremos 1 para representar a identidade multiplicativa e 0 para denotar a aditiva (não são os números, apenas uma notação).

Definição: Seja uma lei de composição que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado *invertível* se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos *inversa de a*.

Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Usaremos as seguintes notações: - $a^n = a^{n-1}a$ é a composição de $a \cdots a$ n vezes; - $a^0 = 1$ - a^{-n} é a inversa de a^n

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (Isso não induz uma notação de fração $\frac{b}{a}$ a menos que seja uma lei comutativa, visto que ba^{-1} pode ser diferente de $a^{-1}b$). Para falar de uma lei de composição aditiva, usaremos $-a$ no lugar de a^{-1} e na no lugar de a^n.

1.2 Grupo

Definição: Um *Grupo* é um conjunto G onde uma lei de composição associativa é dada sobre G, tal que exista uma identidade e todo elemento possua uma inversa.

É comum abusar da notação e chamar um grupo G e o conjunto G de seus elementos pelo mesmo simbolo.

Definição: Um *grupo abeliano* é um grupo com uma lei de composição comutativa. Costuma-se usar a notação aditiva para grupos abelianos.

Proposição (lei do cancelamento): Seja a, b, c elementos de um grupo G. Se $ab = ac$, então $b = c$.

1.3 Subgrupos

Definição: Um subconjunto H de um grupo G é chamado de *subgrupo* de G se possuir as seguintes propriedades:

1. Fechado: Se $a, b \in H$, então $ab \in H$;
2. Identidade: $1 \in H$.
3. Inversível: Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Veja que a propriedade 1. necessita de uma lei de composição. Usamos a lei de composição de G para definir uma lei de composição de H, chamada *lei de composição induzida*. Essas propriedades garantem que H é um grupo com respeito a sua lei induzida.

Todo grupo G possui dois subgrupos triviais: O subgrupo formado por todos os elementos de G e o subgrupo $\{1\}$, formado pela identidade de G. Diz-se que um subgrupo é um *subgrupo apropriado* se for diferente desses dois.

Exemplo: Utilizando da notação multiplicativa, define-se o *subgrupo cíclico* H gerados por um elemento arbitrário x de um grupo G como o conjunto de todas as potências de x: $H = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, \dots\}$.

Definição: Chama-se *ordem* de um grupo G o número $|G|$ de elementos de G.

Também pode-se definir um subgrupo de um grupo G *gerado por um subconjunto* $U \subset G$. Esse é o menor subgrupo de G que contém U e consiste de todos os elementos de G que podem ser espressos como um produto de uma cadeia de elementos de U e seus inversos.

Exemplo: O *grupo de quaternions* H é o menor subgrupo do conjunto de matrizes 2×2 complexas invertíveis que não é cíclico. Isso consiste nas oito matrizes

$$H = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\},$$

onde

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Os dois elementos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ geram H, e o calculo leva as formulas

$$\mathbf{i}^4 = 1, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2, \quad \mathbf{ji} = \mathbf{i}^3\mathbf{j}.$$

1.4 Isomorfismos

Se dois grupos G e G' estão relacionados por uma *correspondência biunívoca* entre seus elementos, compatível com suas leis de composição, isto é, uma correspondência

$$G \longleftrightarrow G'$$

tendo a seguinte propriedade: Se $a, b \in G$ corresponde respectivamente a $a', b' \in G'$, então o produto $ab \in G$ corresponde ao produto $a'b' \in G'$. Quando isso acontece, então dizemos que *todas as propriedades da estrutura de um grupo se mantém no outro*.

Comumente escreve-se a correspondência acima de forma assimétrica como uma função, ou um mapeamento $\varphi : G \longrightarrow G'$. Assim, um isomorfismo G para G' é um mapeamento bijetivo que é compatível com as leis de composição:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \Rightarrow (ab)' = a'b', \text{ para todo } a, b \in G.$$

Definição: Dois grupos G e G' são ditos *isomórfos* se há uma relação de isomorfismo $\varphi : G \longleftrightarrow G'$. Também usa-se a notação $\approx$:

$$G \approx G'.$$

Definição: Diz-se que o conjunto de grupos isomórfos a um dado grupo G é a *classe de isomorfismo de* G. Qualquer dois grupos em uma mesma classe de isomorfismo também são isomorfos entre si.

Também, dada uma relação de isomorfismo $\varphi : G \longleftrightarrow G$ de um grupo G para ele mesmo, chamamos esse tipo de isomorfismo de *automorfismo* de G.

Exemplo: Seja $b \in G$ um elemento fixo. Então, a *conjugação de G por b* é o mapeamento φ de G para ele mesmo definido por

$$\varphi(x) = bxb^{-1}.$$

Esse é um automorfismo porque: - é compatível com a multiplicação no grupo:

$$\varphi(xy) = bxyb^{-1} = bxb^{-1}byb^{-1} = \varphi(x)\varphi(y);$$

- é um mapa bijetivo desde que possui uma função inversa (chamada conjugação por b^{-1}).

Se o grupo é abeliano, a conjugação é o mapa identidade: $bab^{-1} = abb^{-1} = a$. Porém, qualquer grupo não comutativo tem alguma conjugação não trivial, logo possui também um automorfismo não trivial. O elemento bab^{-1} é chamado *conjugado de a por b*. Dois elementos $a, a' \in G$ são ditos *conjugados* se existe $b \in G$ tal que $a' = bab^{-1}$.

O conjugado tem uma interpretação muito útil: Se escrevermos bab^{-1} como a', então

$$ba = a'b.$$

Ou seja, pode-se pensar na conjugação como a mudança em a que resulta de mover b de um lado para o outro na equação.

1.5 Homomorfismos

Definição: Sejam G e G' dois grupos. Um *homomorfismo* $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um mapeamento tal que

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \ \forall \ a, b \in G.$$

Ou seja, é a mesma condição do isomorfismo, porém, agora não há mais a necessidade de sobrejetividade.

Exemplo: Seja H o subgrupo de um grupo G. O homomorfismo $i : H \longrightarrow G$ é dito *inclusão* de H em G, definido por $i(x) = x$.

Proposição: Um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ leva a identidade à identidade e inversas às inversas. Isto é, $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Definição: A *imagem* de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é o subgrupo de G'

$$\text{im } \varphi = \{x \in G \mid x = \varphi(a), \text{ para algum } a \in G\} = \varphi(G).$$

Definição: O *núcleo* de φ é o subconjunto de G formado pelos elementos que são mapeados pela identidade em G':

$$\text{nu } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = 1\} = \varphi^{-1}(1).$$

Proposição: Se $a \in \text{nu } \varphi$ e b é qualquer elemento do grupo G, então o conjugado $bab^{-1} \in \text{nu } \varphi$.

Definição: Um subgrupo N de um grupo G é chamado *subgrupo normal* se para cada $a \in N$ e $b \in G$, o conjugado $bab^{-1} \in N$.

Fica claro que o núcleo de um homomorfismo é um subgrupo normal. Além disso, todo subgrupo de um grupo abeliano também é um subgrupo normal (se G é abeliano, então $bab^{-1} = a$). Mas isso não é necessáriamente verdade em subgrupos de grupos não abelianos.

Definição: O *centro* $Z(G)$ de um grupo G é o conjunto de elementos que comutam com todo elemento de G:

$$Z(G) = \{z \in G \mid zx = xz \text{ para todo } x \in G\}.$$

Proposição: O centro de todo grupo é um subgrupo normal do grupo.

1.6 Relações de Equivalência e Partições

Definição: Seja S um conjunto. Uma *partição* P de S é uma subdivisão de S em subconjuntos não vazios e não sobrepostos, isto é, uma união de conjuntos disjuntos.

Exemplo: Pode-se particionar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ na união de disjuntos $P \cup I$, onde $P = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é par}\}$ e $I = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é impar}\}$.

Definição: Uma *relação de equivalência* sobre um conjunto S é uma relação que se mantém sobre um subconjunto de elementos de S. Escreve-se $a \sim b$ para representar a equivalência de $a, b \in S$, que precisa respeitar as seguintes propriedades:

1. Transitividade: Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$;
2. Simétrica: Se $a \sim b$, então $b \sim a$;
3. Reflexiva: $a \sim a$.

A noção de partição em S e a relação de equivalência em S são lógicamente equivalentes: Dada uma partição P sobre S, pode-se definir uma relação de equivalência R tal que, se a e b estão no mesmo subconjunto partição, então $a \sim b$ e, dada uma relação de equivalência R, podemos definir uma partição P tal que o subconjunto que contêm a é o conjunto de todos os elementos b onde $a \sim b$. Esse subconjunto é chamado de *classe de equivalência de a*

$$C_a = \{b \in S \mid a \sim b\}$$

e S é particionado em classes de equivalência.

Proposição: Sejam C_a e C_b duas classes de equivalência do conjunto S. Se existe d tal que $d \in C_a$ e $d \in C_b$, então $C_a = C_b$.

Seja um conjunto S. Suponha que exista uma relação de equivalência ou uma partição sobre S. Então, pode-se construir um novo conjunto $\bar{S}$ formado pelas classes de equivalência ou os subconjuntos partições de S. Essa construção induz uma notação muito útil: para $a \in S$, a classe de equivalência de a ou o subconjunto partição que contém a serão denotados como o elemento $\bar{a} \in \bar{S}$. Desta forma, a notação $\bar{a} = \bar{b}$ significa que $a \sim b$ e chamamos $a, b \in S$ de *representantes* das respectivas classes de equivalência $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{S}$.

Definição: Seja um mapeamento $\varphi : S \longrightarrow T$. Chama-se de *relação de equivalência determinada por* φ a relação dada por $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \sim b$. Além disso, para um elemento $t \in T$, o subconjunto de $\varphi^{-1}(t) = \{s \in S \mid \varphi(s) = t\}$ é dito *imagem inversa de t por* φ.

Proposição: Seja um mapeamento $\varphi : S \longrightarrow T$ e $t \in T$ um elemento qualquer de T. Se a imagem inversa $\varphi^{-1}(t)$ é não vazia, então $t \in \text{im } \varphi$ e $\varphi^{-1}(t)$ forma uma classe de equivalência $\bar{\varphi} \in \bar{S}$ através da relação determinada por φ.

Definição: Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. A relação de equivalência definida por φ é usualmente denotada por $\equiv$ ao invés de $\sim$ e a chamamos de *congruência*:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \;\Rightarrow\; a \equiv b, \text{ para } a, b \in G.$$

Proposição: Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo e $a, b \in G$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- $\varphi(a) = \varphi(b)$
- $b = an$, para algum $n \in \text{nu } \varphi$
- $a^{-1}b \in \text{nu } \varphi$.

Definição: Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo, $a \in G$ e $n \in \text{nu } \varphi$. O conjunto

$$a \text{ nu } \varphi = \{g \in G \mid g = an, \text{ para algum } n \in \text{nu } \varphi\}$$

é dito *coclasse de nu φ em G*.

Pode-se particionar o grupo G em *classes de congruência*, formadas pelas coclasses a nu φ. Estas são imagens inversas do mapeamento φ.

Proposição: O homomorfismo de grupo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é injetivo se, e somente se, seu núcleo é o subgrupo trivial $\{1\}$.

Esse resultado da uma forma de verificar se um homomorfismo φ é também um isomorfismo: Se nu $\varphi = \{1\}$ e im $\varphi = G'$, então φ é, pelos respectivos motivos, injetiva e sobrejetiva. Então é um isomorfismo.

1.7 Coclasses

Definimos coclasse somente em relação ao núcleo de um homomorfismo mas, na verdade, pode-se definir uma coclasse para qualquer subgrupo H de um grupo G.

Definição: Seja um subgrupo H de um grupo G. O subconjunto da forma

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

é dito *coclasse a esquerda de H em G*.

Proposição: A coclasse é uma classe de equivalência para a relação de congruência

$$b = ah \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Daí segue que, como classes de equivalência particionam um grupo, coclasses a esquerda de um subgrupo particionam o grupo.

Definição: O número de coclasses a esquerda de um subgrupo H em um grupo G chama-se *índice de H em G* e é denotado como $[G : H]$.

Como há uma bijeção do subgrupo H para a coclasse aH, a cardinalidade de aH tem de ser a mesma de H. Isto é, as coclasses de H particionam G em partes de mesma ordem, o que nos permite enunciar o seguinte resultado:

Proposição: Seja aH a coclasse do subgrupo H no grupo G. Então, a ordem $|G|$ do grupo G é dada por

$$|G| = |H|[G : H].$$

Proposição (Teorema de Lagrange): Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G. A ordem de H divide a ordem de G.

Definição: Seja G um grupo. A *ordem de um elemento* $a \in G$ é a ordem do grupo cíclico gerado por a.

Proposição: Seja um grupo G com p elementos tal que p é primo e $a \in G$ diferente da identidade. Então G é o grupo cíclico $\{1, a, \ldots, a^{p-1}\}$ gerado por a.

Também podemos obter uma expressão para calcular a ordem de um grupo de homomorfismo. Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Como as coclasses a esquerda do núcleo de φ são as imagens inversas φ^{-1}, elas estão em uma correspondência biunívoca com a imagem. Daí segue que

$$[G : \text{ nu } \varphi] = |\text{ im } \varphi|.$$

Proposição: Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo onde G e G' são finitos. Então

$$|G| = |\text{ nu } \varphi| \cdot |\text{ im } \varphi|.$$

Definição: Os conjuntos da forma

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

chamam-se *coclasses a direita de um subgrupo* H. Esses são classes de equivalência para a relação de congruência a direita

$$b = ha \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Proposição: Seja um subgrupo H de um grupo G. As seguintes afirmações são equivalentes:

- H é subgrupo normal,
- $aH = Ha$ para todo $a \in G$.

1.8 Restrição de um Homomorfismo para um Subgrupo

O objetivo aqui é apresentar ferramentas para analisar um subgrupo H do grupo G a fim de garantir propriedades do grupo G. No geral, os subgrupos são mais específicos e menos complexos de se trabalhar.

Proposição: Sejam K e H dois subgrupos do grupo G tal que a interseção $K \cap H$ é um subgrupo de H. Se K é um subgrupo normal de G, então $K \cap H$ é um subgrupo normal de H.

Com esse resultado, por exemplo, se G é finito pode-se utilizar o Teorema de Lagrange para obter informações sobre a interseção dos dois subgrupos: a interseção divide $|H|$ e $|K|$. Se $|H|$ e $|K|$ não tem o mesmo fator de divisão, então $K \cap H = \{1\}$.

Definição: Sejam o homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ e H um subgrupo de G. Uma *restrição de* φ *para o subgrupo* H é o homomorfismo $\varphi|_H : H \longrightarrow G'$ definido como

$$\varphi|_H(h) = \varphi(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Proposição: Sejam o homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ e H um subgrupo de G. O núcleo de uma restrição $\varphi|_H$ é a interseção do núcleo de φ e H.

Proposição: Sejam $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo, H' um subgrupo de G' e $\varphi^{-1}(H') = \{x \in G \mid \varphi(x) \in H'\}$ a imagem inversa de H'. Então

- $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo de G.
- Se H' é um subgrupo normal de G', então $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo normal de G.
- $\varphi^{-1}(H')$ contém o núcleo de φ
- A restrição de φ para $\varphi^{-1}(H')$ define um homomorfismo $\varphi^{-1}(H') \longrightarrow H'$, de forma que o núcleo desse homomorfismo é o núcleo de φ.

1.9 Produto de Grupos

Definição: Seja G, G' dois grupos. O *produto* $G \times G'$ é um grupo formado pelo produto das componentes dos grupos G e G', isso é, pela regra

$$(a, a'), (b, b') \rightsquigarrow (ab, a'b'),$$

onde $a, b \in G$ e $a', b' \in G'$. O par $(1, 1)$ é uma identidade e $(a, a')^{-1} = (a^{-1}, a'^{-1})$. A propriedade associativa é preservada em $G \times G'$ pois também é em G e G'.

Proposição: A ordem de $G \times G'$ é o produto das ordens de G e G'.

O produto de grupos é composto pelos homomorfismos:

$$i : G \longrightarrow G \times G', \quad i' : G' \longrightarrow G \times G', \quad p : G \times G' \longrightarrow G, \quad p' : G \times G' \longrightarrow G',$$

definidos como

$$i(x) = (x, 1), \quad i'(x') = (1, x'), \quad p(x, x') = x, \quad , p'(x, x') = x'.$$

Os mapeamentos i, i' são injetivos, já os mapeamentos p, p' são sobrejetivos, onde nu $p = 1 \times G'$ e nu $p' = G \times 1$. Esses mapeamentos são chamados de *projeções*. Desde que são núcleos, $G \times 1$ e $1 \times G'$ são subgrupos normais de $G \times G'$.

Proposição (Propriedades de Mapeamento dos Produtos): Seja H um grupo qualquer. O homomorfismo $\Phi : H \longrightarrow G \times G'$ tem correspondência biunívoca com o par (φ, φ') de homomorfismos

$$\varphi : H \longrightarrow G, \quad \varphi' : H \longrightarrow G'.$$

O núcleo de Φ é a interseção $(\text{nu } \phi) \cap (\text{ nu } \phi')$.

É extremamente desejável encontrar uma relação isomorfa entre um grupo G e um produto de outros dois grupos $H \times H'$. Quando isso acontece, e infelizmente não são muitas as vezes, trabalhar com os grupos H e H' costumam ser mais simples que G.

Proposição: Sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ não divisíveis entre si. Um grupo cíclico de ordem rs é isomorfo ao produto dos grupos cíclicos de ordem r e s.

Em contra partida, um grupo cíclico de ordem par 4, por exemplo, não é isomorfo ao produto de dois grupos cíclicos de ordem 2. Também não podemos afirmar nada com base no resultado anterior sobre grupos não cíclicos.

Definição: Sejam dois subgrupos A, B de um grupo G. Chamamos o conjunto de produtos de de elementos de A e B por

$$AB = \{x \in G \mid x = ab \text{ para algum } a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Proposição: Sejam H e K os subgrupos de um grupo G. - Se $H \cap K = \{1\}$, o mapeamento de produto $p : H \times K \longrightarrow G$ definido por $p(h, k) = hk$ é injetivo e sua imagem é o subconjunto HK. - Se um dos subgrupos H ou K é um subgrupo normal de G, então os conjuntos de produtos HK e KH são iguais e HK é subgrupo de G. - Se ambos H e K são subgrupos normais, $H \cap K = \{1\}$ e $HK = G$, então G é isomorfo ao grupo de produto $H \times K$.

1.10 Aritmética Modular

Definição: Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que dois inteiros a, b são *congruentes modulo n*, e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n},$$

se n divide $b - a$, ou se $b = a + nk$ para algum inteiro k. Chamamos as classes de equivalência definidas por essa relação de *classes de equivalência módulo n*, ou *classes de resíduo módulo n*.

Exemplo: A classe de congruência de 0 é o subgrupo $\bar{0}$ de todos os múltiplos de n

$$\bar{0} = n\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, 0, n, 2n, \ldots\}.$$

Proposição: Há n classes de congruência módulo n (denotamos esse conjunto por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), isto é, o índice $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}]$ é n. São elas

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Definição: Seja $\bar{a}$ e $\bar{b}$ as classes de congruência representadas pelos inteiros a e b. Define-se a *soma* como a classe de congruência de $a + b$ e o *produto* pela classe de congruência ab, isto é,

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \bar{a}\bar{b} = \overline{ab}.$$

Proposição: Se $a' \equiv b' \pmod{n}$ e $b' \equiv b \pmod{n}$, então $a' + b' \equiv a + b \pmod{n}$ e $a'b' \equiv ab \pmod{n}$.

Além disso, a soma e produto também continuam respeitando as propriedades associativas, comutativas e distributivas, desde que o mesmo se mantém para soma e multiplicação de inteiros.

Exemplo: Seja $n = 13$, então

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{12}\}.$$

Com isso,

$$(\bar{7} + \bar{9})(\bar{11} + \bar{6}) \;=\; \bar{3} \cdot \bar{4} \;=\; \bar{12}.$$

1.11 Grupos de Quociente

Definição: Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Então, o produto de duas coclasses aN, bN também é uma coclasse

$$(aN)(bN) = abN.$$

Definição: Sejam as coclasses C_1, C_2 e os elementos $a \in C_1$ e $b \in C_2$, então $C_1 = aN$ e $C_2 = bN$. Chamamos de *produto das coclasses* C_1 *e* C_2 a coclasse $C_1C_2 = abN$, isto é, a coclasse que contém ab.

Definição: Assim como usado na seção anterior, é conveniente denotar o *conjunto de coclasses de um subconjunto normal* N *de um grupo* G pela simbologia

$$G/N = \text{conjunto de coclasses de } N \text{ em } G.$$

Também pode-se usar a notação em barra $G/N = \bar{G}$ e $aN = \bar{a}$, tomando o cuidado para diferenciar que $\bar{a}$ denota a coclasse que contém a.

Proposição: Seja o mapeamento $\pi : G \longrightarrow \bar{G} = G/N$, da forma $a \rightsquigarrow \bar{a} = aN$, isto é, $\bar{G}$ é um grupo e o mapeamento π é um homomorfismo com núcleo N. Então a ordem de G/N é o índice $[G : N]$.

Proposição: Todo subgrupo normal de um grupo G é o núcleo de um homomorfismo.

Proposição: Sejam G um grupo e S um conjunto qualquer com uma lei de composição. Seja também $\varphi : G \longrightarrow S$ um mapeamento sobrejetivo tal que $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ para todo $a, b \in G$. Então S é um grupo.

O construção do conceito de *grupo de quociente* é relacionado ao homomorfismo geral de grupo $\varphi : G \longrightarrow G'$, como segue:

Proposição (Primeiro Teorema do Isomorfismo): Sejam $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo de grupo sobrejetivo e N o núcleo de φ. Então G/N é isomórfico a G' pelo mapeamento $\bar{\varphi}$ que transporta a coclasse $\bar{a} = aN$ para $\varphi(a)$:

$$\bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a).$$

Esse é o método fundamental para identificar grupos de quocientes.