Homomorfismos de Anéis
um resumo

Guilherme Philippi

2 de março de 2021

Esse texto pretende ser uma introdução aos conceitos fundamentais entorno de homomorfismos de anéis. Tudo que aqui se apresenta fora extraído de [1, 2, 3], principalmente de [3].

1 Anéis

Definição 1.1 (Grupo)**.** Um *grupo* $(G, *)$ é um conjunto G onde uma lei de composição $*$ é dada sobre G tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. *(Associatividade).* Para todo $a, b, c \in G$, tem-se
$$(a * b) * c = a * (b * c);$$
2. *(Existência da identidade).* Existe um elemento $\vec{1} \in G$ tal que, para todo $a \in G$,
$$\vec{1} * a = a * \vec{1} = a;$$
3. *(Existência do inverso).* Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que
$$a * a' = a' * a = \vec{1}.$$

Definição 1.2 (Grupo abeliano)**.** Um *grupo abeliano* é um grupo G com uma *lei de composição comutativa*, isto é, $a * b = b * a$, para todo $a, b \in G$.

Definição 1.3 (Anel)**.** Um *anel* $(R, +, \cdot)$ é um conjunto R acompanhado de duas operações binárias $+$ e $\cdot$ definidas sobre R tais que os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. $(R, +)$ é um grupo abeliano.
2. A operação $\cdot$ é associativa.
3. Para todo $a, b, c \in R$, valem a *lei da distributividade à esquerda*
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
e a *lei de distributividade à direita*
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Observação 1.1 (Notação)**.** É comum abusar da notação e chamar um grupo $(G, *)$ e o conjunto de seus elementos G pelo mesmo simbolo, omitindo a lei de composição na falta de ambiguidade. Da mesma forma, costuma-se denotar o anel $(R, +, \cdot)$ apenas por seu conjunto R.

2 Homomorfismos de anéis

Definição 2.1 (Homomorfismo de anéis)**.** Sejam dois anéis $(R, +, \cdot)$ e $(R', +', \cdot')$. Um mapa $\phi : R \longrightarrow R'$ é um *homomorfismo* se a *propriedade de homomorfismo* vale para ambas as operações, isso é, se, para todo $a, b \in R$,

$$\phi(a + b) = \phi(a) +' \phi(b) \text{ e } \phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot' \phi(b).$$

Referências

[1] John B Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra.* Pearson, 2014.

[2] Michael Artin. *Algebra.* A Simon and Schuster Company, 1991.

[3] GELSON IEZZI and Hygino H DOMINGUES. Álgebra moderna. *São Paulo: Atual Editora*, 2003.