Relações e Operações Binárias
um resumo

Guilherme Philippi

6 de fevereiro de 2021

Apresenta-se nesse texto um compilado de definições e resultados envolvendo os conceitos de relações entre conjuntos e operações binárias. Tudo que aqui se apresenta fora extraído de [1, 2, 3], principalmente de [1].

1 Produto Cartesiano e Relações

Definição 1.1 (Produto cartesiano)**.** Sejam A e B conjuntos. O conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

é o *produto cartesiano de A e B.*

Exemplo 1.1. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = 3, 4$, então

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Definição 1.2 (Relação)**.** Uma *relação* entre dois conjuntos A e B é um subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$. Lê-se $(a, b) \in \mathcal{R}$ como "a está relacionado com b" e escreve-se $a\mathcal{R}b$.

Exemplo 1.2 (Relação de igualdade)**.** A realação $=$, chamada *relação de igualdade*, é definida sobre um conjunto S por

$$= \text{ é o subconjunto } \{(x, x) \mid x \in S\} \subset S \times S.$$

Observação 1.1. Sempre que uma relação for definida entre um conjunto S e ele mesmo, como no exemplo 1.2, diremos que esta é uma relação *sobre S*.

Definição 1.3 (Função)**.** Uma *função* φ que mapeia X em Y é uma relação entre X e Y com a propriedade de que cada $x \in X$ só irá aparecer uma única vez, e exatamente uma, em um par ordenado $(x, y) \in \varphi$. Também chamamos φ de *mapa* ou *mapeamento* de X em Y. Escrevemos $\varphi : X \longrightarrow Y$ e expressaremos $(x, y) \in \varphi$ por $\varphi(x) = y$. O *domínio* de φ é o conjunto X e o conjunto Y é dito *contradomínio* de φ. Chama-se de *alcance* de φ o conjunto $\varphi[X] = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$.

Definição 1.4 (Função injetiva e sobrejetiva)**.** Uma função $\varphi : X \longrightarrow Y$ é *injetiva* se $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \iff x_1 = x_2$. Também, φ é dita *sobrejetiva* se o alcance de φ é Y. Se uma função é injetiva e sobrejetiva, então dizemos que a função é *bijetiva*.

Definição 1.5. Sejam S um conjunto $\mathcal{R}$ uma relação sobre S. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação

1. *(reflexiva).* se $a\mathcal{R}a$, para todo $a \in S$;
2. *(simétrica).* se para todo $a, b \in S$ $a\mathcal{R}b \iff b\mathcal{R}a$;
3. *(antissimétrica).* se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a \implies a = b$, para todo $a, b \in S$;
4. *(transitiva).* se $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$, $\forall\ a, b, c \in S$.

2 Relações de Equivalência e Partições

Definição 2.1 (Partições)**.** Seja S um conjunto. Uma *partição* P de S é uma subdivisão de S em subconjuntos não vazios e não sobrepostos, isto é, uma união de conjuntos disjuntos.

Exemplo 2.1. Pode-se particionar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ na união de disjuntos $P \cup I$, onde $P = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é par}\}$ e $I = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é impar}\}$.

Definição 2.2 (Relação de equivalência)**.** Uma *relação de equivalência* $\sim$ sobre um conjunto S é uma relação que precisa ser, para todo $a, b, c \in S$,

1. *(Transitiva).* Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$;
2. *(Simétrica).* Se $a \sim b$, então $b \sim a$;
3. *(Reflexiva).* $a \sim a$.

Observação 2.1. A noção de partição em S e a relação de equivalência em S são lógicamente equivalentes: Dada uma partição P sobre S, pode-se definir uma relação de equivalência R tal que, se a e b estão no mesmo subconjunto partição, então $a \sim b$ e, dada uma relação de equivalência R, podemos definir uma partição P tal que o subconjunto que contêm a é o conjunto de todos os elementos b onde $a \sim b$. Esse subconjunto é chamado de *classe de equivalência de a*

$$C_a = \{b \in S \mid a \sim b\}$$

e S é particionado em classes de equivalência.

Proposição 2.1. *Sejam C_a e C_b duas classes de equivalência do conjunto S. Se existe d tal que $d \in C_a$ e $d \in C_b$, então $C_a = C_b$.*

Observação 2.2 (Representante)**.** Seja um conjunto S. Suponha que exista uma relação de equivalência ou uma partição sobre S. Então, pode-se construir um novo conjunto $\bar{S}$ formado pelas classes de equivalência ou os subconjuntos partições de S. Essa construção induz uma notação muito útil: para $a \in S$, a classe de equivalência de a ou o subconjunto partição que contém a serão denotados como o elemento $\bar{a} \in \bar{S}$. Desta forma, a notação $\bar{a} = \bar{b}$ significa que $a \sim b$ e chamamos $a, b \in S$ de *representantes* das respectivas classes de equivalência $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{S}$.

Definição 2.3. Seja um mapeamento $\varphi : S \longrightarrow T$. Chama-se de *relação de equivalência determinada por* φ a relação dada por $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \sim b$. Além disso, para um elemento $t \in T$, o subconjunto de $\varphi^{-1}(t) = \{s \in S \mid \varphi(s) = t\}$ é dito *imagem inversa de* t *por* φ.

Proposição 2.2. *Seja um mapeamento $\varphi : S \longrightarrow T$ e $t \in T$ um elemento qualquer de T. Se a imagem inversa $\varphi^{-1}(t)$ é não vazia, então $t \in im\ \varphi$ e $\varphi^{-1}(t)$ forma uma classe de equivalência $\bar{\varphi} \in \bar{S}$ através da relação determinada por φ.*

3 Operações binárias

Definição 3.1 (Operação binária)**.** Uma *operação binária* sobre um conjunto S é uma função $* : S \times S \longrightarrow S$.

Observação 3.1 (Notação de operação)**.** Usaremos a notação $*(a, b) = a * b$, para simplificar a escrita de propriedades. Também, quando não houver ambiguidade, suprimiremos o simbolo da operação, fazendo $a * b = ab$.

Definição 3.2. Para $a, b, c \in S$, uma operação binária $*$ é dita

- *Associativa*, se $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- *Comutativa*, se $a * b = b * a$.

Proposição 3.1. *Seja uma operação associativa dada sobre o conjunto S. Há uma única forma de definir, para todo inteiro n, um produto de n elementos $a_1, \dots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:*

1. *o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;*
2. *o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela operação binária;*
3. *para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita por indução em n. □

Definição 3.3. Dizemos que $e \in S$ é *identidade* para uma operação binária se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.

Proposição 3.2. *O elemento identidade é único.*

Demonstração. Se e, e' são identidades, já que e é identidade, então $ee' = e'$ e, como e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. □

Observação 3.2. Usaremos $\vec{1}$ para representar a identidade multiplicativa e $\vec{0}$ para denotar a aditiva.

Definição 3.4 (Elemento inverso)**.** Seja uma operação binária que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado *invertível* se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos *inversa de* a.

Proposição 3.3. *Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Observação 3.3 (Potências)**.** Usaremos as seguintes notações:

- $a^n = a^{n-1}a$ é a composição de $a \cdots a$ n vezes;
- a^{-n} é a inversa de a^n;
- $a^0 = \vec{1}$.

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (Isso não induz uma notação de fração $\frac{b}{a}$ a menos que seja uma operação comutativa, visto que ba^{-1} pode ser diferente de $a^{-1}b$). Para falar de uma operação aditiva, usaremos $-a$ no lugar de a^{-1} e na no lugar de a^n.

Referências

[1] John B Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra.* Pearson, 2014.

[2] Michael Artin. *Algebra.* A Simon and Schuster Company, 1991.

[3] Rudolf R. Maier. *Algebra I (texto de aula).* UFSC, 2005.