C12. Seja $f: E \to F$ e sejam $A \subset E$ e $B \subset E$.

Prove que:

a) se $A \subset B$, então $f(A) \subset f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

d) $A \subset f^{-1}(f(A))$ e $f(f^{-1}(B)) \subset B$

e) f é bijetora se, e somente se, $f(A^C) = (f(A))^C$ para todo $A \subset E$

Lembrete: Se $L \subset Y$, o símbolo L^C representa o complemento de L em relação a Y.

C13. Prove que, se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é inversível e seu gráfico é uma curva simétrica em relação à reta $y = x$, então $f = f^{-1}$.

Dê exemplos de funções f tais que $f = f^{-1}$.

C14. Prove que $f:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$ é bijetora, ou seja, $]-1, 1[$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos equipotentes.

C15. Sejam $f: E \to F$ e $g: F \to G$. Supondo g bijetora, prove que f é injetora se, e somente se, $g \circ f$ é injetora.

C16. Seja $f: E \to F$ e sejam $A \subset F$ e $B \subset F$. Prove que:

a) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

d) $f^{-1}(A^C) = (f^{-1}(A))^C$

e) f é sobrejetora se, e somente se, $f^{-1}(A) \neq \varnothing$ para todo $A \subset F$

C17. Seja $E = \{a, b\}$, com $a \neq b$. Calcule:

a) o número de relações sobre E;

b) o número de relações de equivalência sobre E;

c) o número de relações de ordem sobre E;

d) o número de aplicações de E em E;

e) o número de bijeções de E em E.

III-3 OPERAÇÕES — LEIS DE COMPOSIÇÃO INTERNAS

13. EXEMPLOS PRELIMINARES

1º) Consideremos a aplicação $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x, y) = x + y$, ou seja, f associa a cada par (x, y) de números naturais a sua soma $x + y$. A aplicação f é conhecida como *operação de adição sobre* $\mathbb{N}$.

2º) Pensemos na aplicação $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = x \cdot y$. Ela associa a cada par (x, y) de números reais o seu produto $x \cdot y$. A aplicação g é conhecida como operação de multiplicação sobre $\mathbb{R}$.

3º) Consideremos a aplicação $h: \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, em que $\mathcal{P}(E)$ indica o conjunto das partes de E, tal que $h(X, Y) = X \cap Y$, ou seja, h associa a cada par de conjuntos (X, Y) a sua interseção $X \cap Y$. Essa aplicação é conhecida pelo nome *operação de interseção sobre* $\mathcal{P}(E)$.

14. CONCEITUAÇÃO

Definição 37: Sendo E um conjunto não vazio, toda a aplicação $f: E \times E \to E$ recebe o nome *operação sobre* E (ou em E) ou *lei de composição interna sobre* E (ou em E).

Nas considerações de caráter geral que faremos a seguir neste parágrafo, uma operação f sobre E associa a cada par (x, y) de $E \times E$ um elemento de E que será simbolizado por $x * y$ (lê-se "x estrela y"). Assim $x * y$ é uma forma de indicar $f(x, y)$. Diremos também que E é um conjunto munido da operação $*$.

O elemento $x * y$ é chamado *composto* de x *e* y pela operação $*$. Os elementos x e y do composto $x * y$ são chamados *termos* do composto $x * y$. Os termos x e y do composto $x * y$ são chamados, respectivamente, *primeiro e segundo termos* ou, então, *termo da esquerda e termo da direita.*

Outras notações poderão ser usadas para indicar uma operação sobre E.

a) *Notação aditiva*

Nesse caso, o símbolo da operação é $+$, a operação é chamada *adição*, o composto $x + y$ é chamado *soma*, e os termos x e y são as *parcelas*.

b) *Notação multiplicativa*

Nesse caso, o símbolo da operação é $\cdot$ ou a simples justaposição, a operação é chamada *multiplicação*, o composto $x \cdot y$ ou xy é chamado *produto*, e os termos x e y são os *fatores*.

c) Outros símbolos utilizados para operações genéricas são: $\triangle, \top, \perp, \times, \otimes, \oplus$, etc.

Mais exemplos 25:

1º) A aplicação $f: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $f(x, y) = x^y$ é operação de *potenciação* sobre $\mathbb{N}^*$.

Nota

Quaisquer que sejam os naturais não nulos x e y, o símbolo x^y representa um natural não nulo; portanto, f está bem definida.

Podemos notar que essa operação não pode ser estendida a $\mathbb{Z}^*$, porque, por exemplo, a imagem do par $(2, -1)$ seria $2^{-1} \notin \mathbb{Z}^*$.

2º) A aplicação $f: \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ tal que $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ é a operação de *divisão* sobre $\mathbb{Q}^*$.

A operação de divisão pode ser estendida também a $\mathbb{R}^*$ e $\mathbb{C}^*$.

Deixamos como exercício ao leitor encontrar exemplos que mostrem que a divisão não é uma operação em $\mathbb{N}^*$ ou em $\mathbb{Z}^*$.

3º) A aplicação $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x, y) = x - y$ é a operação de *subtração* sobre $\mathbb{Z}$.

A operação de subtração pode ser estendida a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

4º) A aplicação $f: E \times E \to E$, em que $E = M_{m \times n}(\mathbb{R})$ representa o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ com elementos reais, tal que $f(x, y) = x + y$ é a operação de *adição* sobre $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

5º) A aplicação $f: E \times E \to E$, em que $E = M_n(\mathbb{R})$ representa o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos reais, tal que $f(x, y) = x \cdot y$ é a operação de *multiplicação* sobre $M_n(\mathbb{R})$.

6º) A aplicação $\varphi: E \times E \to E$, em que $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ representa o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $\varphi(f, g) = f \circ g$ é a operação de *composição* sobre $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

15. PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

Seja $*$ uma lei de composição interna em E. Vejamos algumas propriedades que $*$ pode apresentar.

15.1 Propriedade associativa

Definição 38: Dizemos que $*$ goza da *propriedade associativa* se

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in E$.

Exemplos 26:

1º) As adições em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ são operações que gozam da propriedade associativa. (Costuma-se dizer que "são operações associativas".)

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z$$

2º) As multiplicações em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ são operações associativas

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad \forall x, y, z$$

3º) A adição em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ com elementos reais, é operação associativa.

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z), \quad \forall X, Y, Z$$

4º) A multiplicação em $M_n(\mathbb{R})$ é operação associativa.

$$(X Y) Z = X (YZ), \quad \forall X, Y, Z$$

5º) A composição de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é operação associativa.

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h), \quad \forall f, g, h$$

Contra-exemplos 7:

1º) A potenciação em $\mathbb{N}^*$ não é operação associativa, pois:

$2 * (3 * 4) = 2^{(3^4)} = 2^{81}$

$(2 * 3) * 4 = (2^3)^4 = 2^{12}$

2º) A divisão em $\mathbb{R}^*$ não é operação associativa, pois:

$24 * (4 * 2) = 24 : (4 : 2) = 24 : 2 = 12$

$(24 * 4) * 2 = (24 : 4) : 2 = 6 : 2 = 3$

Observação

O fato de uma operação ser associativa possibilita indicar o composto de mais de dois elementos sem necessidade de usar os parênteses, uma vez que qualquer associação entre os elementos presentes conduz ao mesmo resultado. Por exemplo:

$$2 + 4 + 6 + 7 = (2 + 4) + (6 + 7) = 2 + (4 + 6) + 7 = 2 + (4 + 6 + 7) = 19$$

Se uma operação não é associativa, temos a obrigação de usar parênteses para indicar como deve ser calculado um composto de três ou mais elementos, pois, caso contrário, deixamos o composto sem significado. Por exemplo, em $\mathbb{R}^*$, $48 : 6 : 2 : 4$ não tem significado, pois:

$(48 : 6) : (2 : 4) = 8 : \frac{1}{2} = 16$

$((48 : 6) : 2) : 4 = (8 : 2) : 4 = 4 : 4 = 1$

$48 : ((6 : 2) : 4) = 48 : (3 : 4) = 48 : \frac{3}{4} = 64$

15.2 Propriedade comutativa

Definição 39: Dizemos que $*$ goza da *propriedade comutativa* se

$$x * y = y * x,$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$.

Exemplos 27:

1º) As adições em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ são operações que gozam da propriedade comutativa. (Costuma-se dizer que "são operações comutativas".)

$$x + y = y + x, \quad \forall x, y$$

2º) As multiplicações em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ são operações comutativas.

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y$$

3º) A adição em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é operação comutativa.

$$X + Y = Y + X, \quad \forall X, Y$$

Contra-exemplos 8:

1º) A potenciação em $\mathbb{N}^*$ não é comutativa, pois, por exemplo, $2^3 = 8$ e $3^2 = 9$.

2º) A divisão em $\mathbb{R}^*$ não é comutativa, pois, por exemplo, $3 : 6 = \frac{1}{2}$ e $6 : 3 = 2$.

3º) A subtração em $\mathbb{Z}$ não é comutativa, pois, por exemplo, $3-7=-4$ e $7-3=4$.

4º) A multiplicação em $M_2(\mathbb{R})$ não é comutativa, pois, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

5º) A composição de funções em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ não é comutativa, pois, por exemplo, se $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2 + 1$, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(x^2 + 1) = 3x^2 + 3$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (3x)^2 + 1 = 9x^2 + 1$$

Exercícios

105. Em cada caso a seguir, verifique se a operação $*$ sobre E é associativa.

a) $E = \mathbb{R}$ e $x*y = \dfrac{x+y}{2}$

b) $E = \mathbb{R}$ e $x*y = x$

c) $E = \mathbb{R}_+$ e $x*y = \sqrt{x^2+y^2}$

d) $E = \mathbb{R}$ e $x*y = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

e) $E = \mathbb{R}^*$ e $x*y = \dfrac{x}{y}$

f) $E = \mathbb{R}_+$ e $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

g) $E = \mathbb{Z}$ e $x*y = xy + 2x$

h) $E = \mathbb{Q}$ e $x*y = x + xy$

i) $E = \mathbb{R}$ e $x*y = x + y - 2x^2y^2$

j) $E = \mathbb{R}$ e $x*y = x^2 + y^2 + 2xy$

106. Em cada caso a seguir está definida uma operação sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Verifique se ela é associativa:

a) $(a, b) * (c, d) = (ac, 0)$

b) $(a, b) \triangle (c, d) = (a + c, b + d)$

c) $(a, b) \perp (c, d) = (ac, ad + bc)$

d) $(a, b) \circ (c, d) = (a + c, bd)$

e) $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

107. Consideremos a operação $*$ em $\mathbb{R}$ definida pela regra:

$$x*y = ax + by + cxy$$

em que a, b, c são números reais dados.

Determine as condições sobre a, b, c de modo que $*$ seja associativa.

108. Examine novamente as operações do exercício 105 e verifique quais são comutativas.

109. Examine novamente as operações do exercício 106 e verifique quais são comutativas.

110. Retome a operação definida no exercício 107 e estabeleça as condições sobre a, b, c de modo que $*$ seja comutativa.

15.3 Elemento neutro

Definição 40: Se existe $e \in E$ tal que $e * x = x$ para todo $x \in E$, dizemos que e é um *elemento neutro à esquerda* para $*$.

Se existe $e \in E$ tal que $x * e = x$ para todo $x \in E$, dizemos que e é um *elemento neutro à direita* para $*$.

Se e é elemento neutro à direita e à esquerda para a operação $*$, dizemos simplesmente que e é *elemento neutro* para essa operação.

Exemplo 28:

1º) O elemento neutro das adições em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é o número 0, pois $0 + x = x = x + 0$ para qualquer número x.

2º) O elemento neutro das multiplicações em $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é o número 1, pois $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ para qualquer número x.

3º) O elemento neutro da adição em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é $0_{m \times n}$ (matriz nula do tipo $m \times n$), pois $0_{m \times n} + X = X = X + 0_{m \times n}$, qualquer que seja $X \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

4º) O elemento neutro da multiplicação em $M_n(\mathbb{R})$ é I_n (matriz identidade do tipo $n \times n$), pois $I_nX = X = XI_n$, qualquer que seja $X \in M_n(\mathbb{R})$.

5º) O elemento neutro da composição em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é a função $i_{\mathbb{R}}$ (função idêntica em $\mathbb{R}$), pois $i_{\mathbb{R}} \circ f = f = f \circ i_{\mathbb{R}}$, qualquer que seja $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Contra-exemplos 9:

1º) A subtração em $\mathbb{Z}$ admite 0 como elemento neutro à direita pois $x - 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, mas não admite neutro à esquerda, pois não existe e (fixo) tal que $e - x = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.

2º) A divisão em $\mathbb{R}^*$ admite 1 como elemento neutro à direita, pois $x : 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, mas não admite neutro à esquerda, pois não existe e (fixo) tal que $e : x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

3º) Todos os elementos de $\mathbb{R}$ são elementos neutros à esquerda da operação definida por $x * y = y$ sobre esse conjunto. De fato, se $e \in \mathbb{R}$, então $e * y = y$, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$. Mas nenhum número real é elemento neutro à direita para essa operação. De fato, se $e \in \mathbb{R}$ e a é um número real diferente de e, então $a * e = e$.

Proposição 10: Se a operação $*$ sobre E tem um elemento neutro e, então ele é único.

Demonstração: Suponhamos que e e e' sejam elementos neutros da operação $*$.

Como e é elemento neutro e $e' \in E$, então $e * e' = e'$. Por raciocínio análogo, chega-se à conclusão de que $e * e' = e$.

De onde, $e' = e$. #

Exercícios

111. Examine novamente as operações do exercício 105 e determine quais têm elemento neutro.

112. Examine novamente as operações do exercício 106 e determine quais têm elemento neutro.

113. Determine todos os elementos neutros à esquerda para a operação de multiplicação em $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

114. Estabeleça as condições sobre $m, n \in \mathbb{Z}$ de modo que a operação $*$ sobre $\mathbb{Z}$ dada pela lei $x * y = mx + ny$:

a) seja associativa;
b) seja comutativa;
c) admita elemento neutro.

115. Examine novamente a operação definida no exercício 107 e estabeleça as condições sobre a, b, c de modo que a operação tenha elemento neutro.

15.4 Elementos simetrizáveis

Definição 41: Seja $*$ uma operação sobre E que tem elemento neutro e. Dizemos que $x \in E$ é um *elemento simetrizável* para essa operação se existir $x' \in E$ tal que

$$x' * x = e = x * x'$$

O elemento x' é chamado *simétrico de* x para a operação $*$.

Quando a operação é uma adição, o simétrico de x também é chamado *oposto de* x e indicado por $-x$.

Quando a operação é uma multiplicação, o simétrico de x também é chamado *inverso de* x e indicado por x^{-1}.

Exemplos 29 e contra-exemplos10:

1º) 3 é um elemento simetrizável para a adição em $\mathbb{Z}$, e seu simétrico (ou oposto) é -3, pois:

$$(-3) + 3 = 0 = 3 + (-3)$$

2º) 3 é um elemento simetrizável para a multiplicação em $\mathbb{Q}$, e seu simétrico (ou inverso) é $\frac{1}{3}$, pois:

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1 = 3 \cdot \frac{1}{3}$$

0 *não* é simetrizável para a mesma operação, pois não há elemento $x' \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x' \cdot 0 = 1 = 0 \cdot x'$$

3º) Existem apenas dois elementos simetrizáveis para a multiplicação em $\mathbb{Z}$: o 1 e o -1, que são iguais aos seus respectivos inversos.

Já o 3 *não* é simetrizável para a multiplicação em $\mathbb{Z}$, uma vez que não existe $x' \in \mathbb{Z}$ tal que $x' \cdot 3 = 1 = 3 \cdot x'$.

4º) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ é simetrizável para a adição em $M_2(\mathbb{R})$, e seu simétrico é $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

5º) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *não* é simetrizável para a multiplicação em $M_2(\mathbb{R})$, pois, supondo que sua inversa pudesse ser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, teríamos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 3b & 2a + 6b \\ c + 3d & 2c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 2a + 6b = 0 \\ c + 3d = 0 \\ 2c + 6d = 1 \end{cases}$$

e esse sistema não tem solução.

6º) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ é simetrizável para a multiplicação em $M_2(\mathbb{R})$, e seu inverso é $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

7º) A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 3x - 1$ é bijetora e, conseqüentemente, é inversível. Sua inversa é $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$. Temos:

$$f^{-1} \circ f = i_{\mathbb{R}} = f \circ f^{-1} \text{ (lembre-se de que } i_{\mathbb{R}} \text{ é o neutro)}$$

portanto, f é um elemento de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, simetrizável para a composição de funções.

Já qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que não seja bijetora não é inversível e, portanto, não é elemento de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ simetrizável para a mesma operação.

Proposição 11: Seja $*$ uma operação sobre E que é associativa e tem elemento neutro e.

a) Se um elemento $x \in E$ é simetrizável, então o simétrico de x é único.

b) Se $x \in E$ é simetrizável, então seu simétrico x' também é e $(x')' = x$.

c) Se $x, y \in E$ são simetrizáveis, então $x*y$ é simetrizável e $(x*y)' = y'*x'$.

Demonstração:

a) Suponhamos que x' e x'' sejam simétricos de x. Temos:

$$x' = e*x' = (x''*x)*x' = x''*(x*x') = x''*e = x''$$

b) Sendo x' o simétrico de x, temos:

$$x'*x = e = x*x'$$

e, pela definição 41, x é o simétrico de x', ou seja, $x = (x')'$.

c) Para provarmos que $y'*x'$ é o simétrico de $x*y$, devemos mostrar que:

(1) $(y'*x')*(x*y) = e$

(2) $(x*y)*(y'*x') = e$

De fato, temos:

(1) $(y'*x')*(x*y) = [(y'*x')*x]*y = [y'*(x'*x)]*y = (y'*e)*y = y'*y = e$

(2) Analogamente. #

Por indução, pode-se generalizar a propriedade c): se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são elementos de E, então $(a_1*a_2*\ldots*a_n)' = a'_n*a'_{n-1}*\ldots a'_2*a'_1$.

Notação: conjunto dos simetrizáveis

Se $*$ é uma operação sobre E com elemento neutro e, indica-se por $U_*(E)$ o conjunto dos elementos simetrizáveis de E para a operação $*$.

$$U_*(E) = \{x \in E \mid \exists x' \in E : x'*x = e = x*x'\}$$

Exemplos 30:

$U_+(\mathbb{N}) = \{0\}$

$U_+(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$U_.(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$

$U_.(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$

$U_+(M_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$

$U_.(M_n(\mathbb{R})) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}$

$U_0(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ é bijetora}\}$

Podemos notar que $U_*(E) \neq \varnothing$, pois necessariamente $e \in U_*(E)$, uma vez que $e*e = e$.

Exercícios

116. Examine novamente as operações do exercício 105 que têm elemento neutro para determinar os elementos simetrizáveis.

117. Examine novamente as operações do exercício 106 que têm elemento neutro para determinar os elementos simetrizáveis.

118. Sendo $*$ a operação sobre $\mathbb{Z}^3$ dada por $(a, b, c) * (d, e, f) = (ad, be, cf)$, determine seu elemento neutro e o conjunto dos elementos simetrizáveis de $\mathbb{Z}^3$ para $*$.

119. Sejam E e F dois conjuntos em que estão definidas as operações $*$ e $\triangle$, respectivamente, as quais são associativas e têm neutros. Sobre o conjunto $E \times F$, consideremos uma operação $\circ$ assim definida:

$$(a, b) \circ (c, d) = (a * c, b \triangle d)$$

a) Mostre que $\circ$ é associativa e possui elemento neutro.

b) Determine os elementos inversíveis de $E \times F$ para essa operação.

15.5 Elementos regulares

Definição 42: Seja $*$ uma operação sobre E. Dizemos que um elemento $a \in E$ é *regular* (*ou simplificável ou que cumpre a lei do cancelamento*) à esquerda em relação à operação $*$ se, para quaisquer $x, y \in E$ tais que $a * x = a * y$, vale $x = y$.

Dizemos que um elemento $a \in E$ é *regular* (*ou simplificável*) *à direita* relativamente à operação $*$ se, para quaisquer $x, y \in E$ tais que $x * a = y * a$, vale $x = y$.

Se $a \in E$ é um elemento regular à esquerda e à direita para a operação $*$, dizemos simplesmente que a é *regular* para essa operação.

Exemplos 31 e contra-exemplos 11:

1º) 3 é regular para a adição em $\mathbb{N}$, pois:

$$3 + x = 3 + y \Rightarrow x = y$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{N}$.

2º) 3 é regular para a multiplicação em $\mathbb{Z}$, pois:

$$3 \cdot x = 3 \cdot y \Rightarrow x = y$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{Z}$.

3º) 0 *não* é regular para a multiplicação em $\mathbb{Z}$, pois:

$$0 \cdot 2 = 0 \cdot 3 \text{ e } 2 \neq 3$$

4º) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ é regular para a adição em $M_2(\mathbb{R})$, pois:

se $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, então $\begin{pmatrix} 1+a & 2+b \\ 3+c & 4+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a' & 2+b' \\ 3+c' & 4+d' \end{pmatrix}$

e, daí, ($a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ e $d = d'$). De onde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

5º) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *não* é regular para a multiplicação em $M_2(\mathbb{R})$, pois:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposição 12: Se a operação $*$ sobre E é associativa, tem elemento neutro e e um elemento $a \in E$ é simetrizável, então a é regular.

Demonstração: Sejam x e y elementos quaisquer de E tais que $a*x = a*y$ e $x*a = y*a$.

Da primeira dessas hipóteses, segue que $a'*(a*x) = a'*(a*y)$. Daí, considerando-se a associatividade, $(a' * a)*x = (a' * a)*y$, ou seja, $e*x = e*y$. De onde, $x = y$.

Analogamente se prova que, se $x*a = y*a$, então $x = y$. Portanto, a é regular. #

Notação: conjunto dos regulares

Sendo $*$ uma operação sobre E, indica-se com $R_*(E)$ o conjunto dos elementos regulares de E para a operação $*$.

Exemplos 32:

$R_+(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$

$R_\cdot(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^*$

$R_+(M_2(\mathbb{R})) = M_2(\mathbb{R})$

Podemos notar que, se $*$ tem elemento neutro e, então $e \in R_*(E)$ e, portanto, $R_*(E) \neq \varnothing$.

Podemos notar também que, se $*$ é associativa e tem elemento neutro e, então $U_*(E) \subset R_*(E)$, conforme mostrou a proposição 12.

Exercícios

120. Determine o conjunto dos elementos regulares para cada operação definida no exercício 105.

121. Determine os elementos regulares de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para cada operação definida no exercício 106.

122. Mostre que nenhum elemento de $\mathbb{R}$ é regular para a operação $*$ assim definida:

$$x*y = x^2 + y^2 - xy$$

123. Determine os elementos regulares de $\mathbb{R}$ relativamente à operação $*$ assim definida: $x * y = 5x + 3y - 7xy$.

124. Mostre que se $*$ é uma operação associativa sobre E, então $R(E) = \varnothing$ ou $\mathbb{R}_*(E)$ é subconjunto de E fechado para a operação $*$.

15.6 Propriedade distributiva

Definição 43: Sejam $*$ e $\triangle$ duas operações sobre E. Dizemos que $\triangle$ é *distributiva à esquerda* relativamente a $*$ se:

$$x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in E$.

Dizemos que $\triangle$ é *distributiva à direita* relativamente a $*$ se:

$$(y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in E$.

Quando $\triangle$ é distributiva à esquerda e à direita de $*$, dizemos simplesmente que $\triangle$ é *distributiva* relativamente a $*$.

Exemplos 33:

1º) A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é distributiva em relação à adição em $\mathbb{Z}$, pois:

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

2º) A multiplicação em $M_n(\mathbb{R})$ é distributiva em relação à adição em $M_n(\mathbb{R})$, pois:

$$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$$
$$(Y + Z) \cdot X = (Y \cdot X) + (Z \cdot X)$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z \in M_n(\mathbb{R})$.

3º) Em $\mathbb{N}^*$, a potenciação é distributiva à direita em relação à multiplicação, pois:

$$(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Entretanto, a potenciação em $\mathbb{N}^*$ *não* é distributiva à esquerda em relação à multiplicação, pois, por exemplo:

$$2^{3 \cdot 4} \neq 2^3 \cdot 2^4$$

16. PARTE FECHADA PARA UMA OPERAÇÃO

Definição 44: Sejam $*$ uma operação sobre E e A um subconjunto não vazio de E. Dizemos que A é uma parte fechada de E para a operação $*$ se, e somente se, para quaisquer $x, y \in A$ verificar-se $x * y \in A$.

Exemplos 34:

1º) O conjunto $\mathbb{N}$ é uma parte fechada para a adição e a multiplicação em $\mathbb{Z}$, pois:

$$\mathbb{N} \neq \varnothing, \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$
$$\text{e}$$
$$x \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$$
$$x \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{N}$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{N}$.

2º) O conjunto $\mathbb{Q}$ é uma parte fechada para a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$, pois:

$$\mathbb{Q} \neq \varnothing, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
$$\text{e}$$
$$x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$$
$$x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{Q}$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{Q}$.

3º) O conjunto $\mathbb{R}_+$ é uma parte fechada de $\mathbb{R}$ para a operação de multiplicação em $\mathbb{R}$, pois:

$$\mathbb{R}_+ \neq \varnothing, \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R} \text{ e } (x \in \mathbb{R}_+ \text{ e } y \in \mathbb{R}_+) \Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}_+$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}_+$.

4º) O conjunto $D_2(\mathbb{R})$ das matrizes diagonais do tipo 2×2 é uma parte fechada de $M_2(\mathbb{R})$ para a adição e a multiplicação em $M_2(\mathbb{R})$, pois:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a'+b' \end{pmatrix} \in D_2(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & a'b' \end{pmatrix} \in D_2(\mathbb{R})$$

quaisquer que sejam $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$.

5º) O conjunto A das funções bijetoras de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é um subconjunto fechado para a composição de funções em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pois:

$$f \in A \text{ e } g \in A \Rightarrow f \circ g \in A$$

quaisquer que sejam $f, g \in A$.

Contra-exemplos 12:

1º) O conjunto $\mathbb{Z}_-$ é uma parte fechada para a adição em $\mathbb{R}$, mas *não* é parte fechada para a multiplicação, pois, por exemplo:

$$-2 \in \mathbb{Z}_-, -3 \in \mathbb{Z} \quad \text{e } (-2)(-3) \notin \mathbb{Z}_-$$

2º) O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (dos números irracionais) *não* é parte fechada para a adição em $\mathbb{R}$ e para a multiplicação em $\mathbb{R}$, pois, por exemplo:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, -\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ e } \left(\sqrt{2}\right) + \left(-\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
$$\text{e } \left(\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

3º) O conjunto $GL_2(\mathbb{R})$ das matrizes inversíveis *não* é fechado para a adição em $M_2(\mathbb{R})$, pois, por exemplo:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ e } \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R})$$

Exercícios

125. Em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ estão definidas duas operações $*$ e $\triangle$ da seguinte forma:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \triangle (c, d) = (ac, ad + bc)$$

Verifique se $\triangle$ é distributiva em relação a $*$.

126. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a operação $\triangle$ seja distributiva em relação à operação $*$, sendo $\triangle$ e $*$ definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$x \triangle y = my$$
$$x * y = x + y + xy$$

127. Decida: quais dos conjuntos abaixo são partes fechadas de $\mathbb{Z}$ para a operação de adição usual?

a) $\mathbb{Z}_-$
b) $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$
c) $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$
d) $J = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é primo}\}$
e) $K = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{mdc}(x, 10) = 1\}$
f) $L = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3q + 1, q \in \mathbb{Z}\}$

128. Repita o exercício anterior substituindo a adição pela multiplicação usual.

129. Mostre que $A = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ é parte fechada de $M_2(\mathbb{R})$ para a operação de adição.

130. Mostre que $A = \left\{\begin{pmatrix}\cos a & \text{sen } a\\-\text{sen } a & \cos a\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ é subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$ fechado para a multiplicação.

131. Mostre que $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta\}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$ fechado para a multiplicação.

17. TÁBUA DE UMA OPERAÇÃO

Como se constrói

Seja $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com $n > 1$, um conjunto com n elementos. Toda operação sobre E é uma aplicação $f: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ que associa a cada par (a_i, a_j) o elemento $a_i * a_j = a_{ij}$.

Podemos representar o elemento a_{ij}, correspondente ao par (a_i, a_j), numa tabela de dupla entrada construída como segue.

1º) Marcamos na linha fundamental e na coluna fundamental os elementos do conjunto E. Chamamos de i-ésima linha aquela que começa com a_i e de j-ésima coluna a que é encabeçada por a_j.

	a_1	a_2	...	a_i	...	a_j	...	a_n
a_1								
a_2								
...								
a_i								
...								
a_j								
...								
a_n								

← linha fundamental

coluna fundamental

2º) Dado um elemento a_i na coluna fundamental e um elemento a_j na linha fundamental, na interseção da i-ésima linha com a j-ésima coluna, marcamos o composto a_{ij}.

j - ésima coluna

	a_1	a_2	...	a_i	...	a_j	...	a_n
a_1								
a_2								
...								
a_i						a_{ij}		
...								
a_j								
...								
a_n								

i - ésima linha →

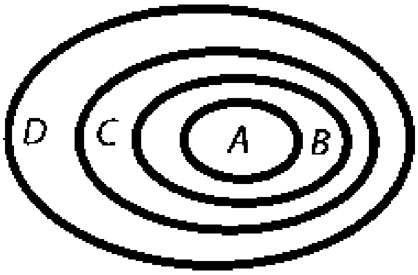
composto a_{ij}

Exemplos 35:

1º) Tábua da multiplicação em $E = \{-1, 0, 1\}$.

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

2º) Tábuas das operações de reunião e de interseção sobre $E = \{A, B, C, D\}$, em que A, B, C, D são conjuntos tais que $A \subset B \subset C \subset D$.



$\cup$	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	B	C	D
C	C	C	C	D
D	D	D	D	D

$\cap$	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	B	B
C	A	B	C	C
D	A	B	C	D

3º) Tábua operação $*$ sobre $E = \{1, 3, 5, 15\}$ tal que $x * y = \text{mdc}(x, y)$.

$*$	1	3	5	15
1	1	1	1	1
3	1	3	1	3
5	1	1	5	5
15	1	3	5	15

4º) Tábua da operação de composição sobre $E = \{f_1, f_2, f_3\}$, em que f_1, f_2, f_3 são funções assim descritas:

$f_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
$f_2 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$
$f_3 = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

Exercícios

132. Em cada caso a seguir está definida uma operação $*$ sobre E. Faça a tábua da operação.

a) $E = \{1, 2, 3, 6\}$ e $x * y = \text{mdc}(x, y)$

b) $E = \{1, 3, 9, 27\}$ e $x * y = \text{mmc}(x, y)$

c) $E = \left\{1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}\right\}$ e $x * y = \min(x, y)$

d) $E = \left\{3\sqrt{2}, \pi, \frac{7}{2}\right\}$ e $x * y = \max(x, y)$

e) $E = \{1, i, -1, -i\}$ e $x * y = x \cdot y$

133. Em cada caso a seguir está definida uma operação $*$ sobre $E = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Construa a tábua da operação.

a) $x * y = x \cup y$

b) $x * y = x \cap y$

c) $x * y = (x \cup y) - (x \cap y)$

134. Construa as tábuas das operações $*$ e $\triangle$ sobre $E = \{0, 1, 2, 3\}$ assim definidas:

a) $x * y$ = resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x + y$ por 4

b) $x \triangle y$ = resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x \cdot y$ por 4

135. Construa as tábuas das operações $\oplus$ e $\odot$ sobre $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ assim definidas:

a) $x \oplus y$ = resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x + y$ por 5

b) $x \odot y$ = resto da divisão em $\mathbb{Z}$ de $x \cdot y$ por 5

136. Construa a tábua da operação de reunião sobre a família de conjuntos $\mathfrak{F} = \{A, B, C, D, E\}$ sabendo que $A \cup B = A$, $C \cup D = B$, $D \cup E = D$ e $E \cup C = C$.

137. Descreva pelas tábuas todas as operações sobre o conjunto $E = \{a, b\}$.

138. A partir da tábua ao lado, da operação $\triangle$ sobre $E = \{1, 2, 3, 4\}$, calcule os seguintes compostos:

a) $(3 \triangle 4) \triangle 2$

b) $3 \triangle (4 \triangle 2)$

c) $[4 \triangle (3 \triangle 3)] \triangle 4$

d) $(4 \triangle 3) \triangle (3 \triangle 4)$

e) $[(4 \triangle 3) \triangle 3] \triangle 4$

$\triangle$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	4	2
4	1	4	2	3

139. Complete a tábua da operação $\circ$ (composição) definida sobre o conjunto de funções reais $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, em que:

$f_1(x) = \frac{1}{x}$

$f_2(x) = -x$

$f_3(x) = -\frac{1}{x}$

$f_4(x) = x$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				

Depois responda:

a) Qual é o elemento neutro?

b) Que elementos têm simétrico?

c) Quais são os valores dos compostos f_1^2, f_2^{-1}, f_3^3 e $f_1^2 \circ f_2^{-1} \circ f_3^3$?

140. Construa a tábua da operação de composição sobre o conjunto de funções $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, sabendo que essas funções são de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, dadas por:

$f_1(x, y) = (x, y)$ $\quad$ $f_3(x, y) = (x, -y)$

$f_2(x, y) = (-x, y)$ $\quad$ $f_4(x, y) = (-x, -y)$

141. Seja $E = \{0, 1\}$. Seja E^E o conjunto das aplicações de E em E. Construa a tábua da operação de composição em E^E.

142. Construa a tábua da operação de composição de funções em $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, em que:

$f_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

$f_2 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

$f_3 = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b)\} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$

$f_4 = \{(a, d), (b, a), (c, b), (d, c)\} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$

Em seguida, calcule:

a) $f_2 \circ f_3 \circ f_4$

b) f_3^2

c) $(f_2 \circ f_4)^3$

d) $(f_3 \circ f_4)^{-1}$

e) f_2^{-1}

f) $f_2^{-1} \circ f_3^{-1}$

Observação: A notação $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$, por exemplo, indica que a imagem de a é c, de b é d, de c é a e de d é b.

143. Construa a tábua da operação de composição de funções em $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, em que:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sugestão: Observe no exercício 142 o significado dessa notação matricial.

Como checar propriedades

Vejamos agora como se pode checar uma a uma as propriedades de uma operação $*$ sobre $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ quando $*$ é dada por meio de uma tábua.

a) Propriedade associativa

É aquela cuja verificação exige maior trabalho. A verificação pode ser feita de dois modos:

1º modo: Calculam-se todos os compostos do tipo $a_i * (a_j * a_k)$, com $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$; calculam-se todos os compostos do tipo $(a_i * a_j) * a_k$, com $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$; comparam-se os compostos que têm os mesmos i, j e k. Como podemos notar, esse método requer o cálculo de $2n^3$ compostos.

2º modo: Encontra-se um conjunto F dotado de uma operação $\triangle$ que se sabe ser associativa de tal forma que exista uma aplicação $f: E \to F$ com as seguintes propriedades:

a) f é bijetora;

b) $f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$ para todos $x, y \in E$.

Se isso ocorrer, a lei $*$ também é associativa, pois, para quaisquer $x, y, z \in E$, temos:

$$f((x*y)*z) = f(x*y) \triangle f(z) = (f(x) \triangle f(y)) \triangle f(z) =$$
$$= f(x) \triangle (f(y) \triangle f(z)) = f(x) \triangle f(y*z) = f(x*(y*z))$$

e, como f é bijetora, vem: $(x*y)*z = x*(y*z)$

Você, estudante, poderá ter uma compreensão maior desse assunto quando estudar os isomorfismos (ver capítulo IV, seção IV.2).

b) Propriedade comutativa

Sabemos que uma operação $*$ é comutativa se $a_i * a_j = a_j * a_i$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Chamando de diagonal principal da tábua da operação $*$ o conjunto formado pelos compostos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, podemos notar que os compostos a_{ij} e a_{ji} ocupam posições simétricas relativamente à diagonal principal. Assim, uma operação $*$ é comutativa desde que sua tábua seja simétrica em relação à diagonal principal, isto é, compostos colocados simetricamente em relação à diagonal são iguais dois a dois.

	a_1	a_2	...	a_i	...	a_j	...	a_n
a_1	a_{11}							
a_2		a_{22}						
...			...					
a_i				a_{ii}		a_{ij}		
...					...			
a_j				a_{ji}		a_{jj}		
...							...	
a_n								a_{nn}

iguais

diagonal principal

Observe os quatro exemplos da página 125. Neles, as operações são comutativas.

Observe agora a tabela abaixo. É um exemplo de operação não comutativa. Note, por exemplo, que $b * c = a$ e $c * b = b$.

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	a
c	a	b	b

c) Elemento neutro

Sabemos que um elemento e é neutro para a operação $*$ quando:

(I) $e * a_i = a_i, \forall a_i \in E$

(II) $a_i * e = a_i$ e $\forall a_i \in E$

Da condição (I) decorre que a linha de e é igual à linha fundamental. Da condição (II) decorre que a coluna de e é igual à coluna fundamental.

	a_1	a_2	a_3	...	e	...	a_n
a_1					a_1		
a_2					a_2		
a_3					a_3		
...					...		
e	a_1	a_2	a_3	...	e	...	a_n
...					...		
a_n					a_n		

linhas iguais

colunas iguais

Assim, uma operação $*$ tem neutro desde que exista um elemento cuja linha e coluna são respectivamente iguais à linha e coluna fundamentais.

Observe novamente os exemplos da página 125. Todos apresentam elemento neutro. Confira os neutros:

1º) 1; 2º) A e D, respectivamente; 3º) 15; 4º) f_1.

Um exemplo de operação sem neutro é dado pela tábua abaixo. Notemos que a é neutro só à esquerda (a linha de a é igual à fundamental).

	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	b
c	b	a	c

d) Elementos simetrizáveis

Sabemos que um elemento $a_i \in E$ é simetrizável para a operação $*$ que tem neutro e quando existe um $a_j \in E$ tal que:

(I) $a_i * a_j = e$

e

(II) $a_j * a_i = e$

Da condição (I) decorre que a linha de a_i na tábua deve apresentar ao menos um composto igual a e.

Da condição (II) decorre que a coluna de a_i deve apresentar ao menos um composto igual a e.

Como $a_{ij} = a_{ji} = e$, decorre que o neutro deve figurar em posições simétricas relativamente à diagonal principal.

	a_1	a_2	...	a_i	...	a_j	...	a_n
a_1								
a_2								
...								
a_i						e		
...								
a_j				e				
...								
a_n								

posições simétricas em relação à diagonal

Assim, um elemento a_i é simetrizável quando o neutro figura ao menos uma vez na linha i e na coluna i da tábua, ocupando posições simétricas em relação à diagonal principal.

Exemplos 36:

1º) Neutro: e

Elementos simetrizáveis: e, a, b, c

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

2º) Neutro: e

Elementos simetrizáveis: e, c, b

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	d	e	c	b
c	a	e	b	d	c
d	a	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e

e) Elementos regulares

Sabemos que um elemento $a \in E$ é regular em relação à operação $*$ quando:

(I) $a * a_i \neq a * a_j$, sempre que $a_i \neq a_j$

e

(II) $a_i * a \neq a_j * a$, sempre que $a_i \neq a_j$.

Isso significa que a é regular quando, composto com elementos distintos de E, tanto à esquerda deles como à direita, produz resultados distintos.

Assim, um elemento a é regular quando na linha e na coluna de a não há elementos iguais.

Exemplos 37:

Os elementos regulares são e, a, d.

Note que na linha e coluna de b ocorrem repetições. Nas de c, também.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	b	c	a
c	c	d	c	a	b
d	d	e	a	b	c

Exercícios

144. A partir das tábuas construídas no exercício 132, responda:

a) Que operações são comutativas?

b) Que operações apresentam elemento neutro?

c) Quais são os elementos simetrizáveis?

d) Quais são os elementos regulares?

145. A tábua abaixo descreve a operação *não associativa* $\triangle$ sobre o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$. Calcule de cinco formas diferentes o composto $a \triangle b \triangle c \triangle d$, ou seja:

a) $(a \triangle b) \triangle (c \triangle d)$

b) $[a \triangle (b \triangle c)] \triangle d$

c) $[(a \triangle b) \triangle c] \triangle d$

d) $a \triangle [(b \triangle c) \triangle d]$

e) $a \triangle [b \triangle (c \triangle d)]$

$\triangle$	a	b	c	d
a	b	b	c	d
b	c	d	d	a
c	d	d	a	b
d	a	b	b	c

146. Construa a tábua da operação de interseção sobre a família de conjuntos $\mathscr{F} = \{A, B, C, D\}$, sabendo que:

$$A \cap B = B, B \cap C = C \text{ e } C \cap D = D$$

Em seguida, estabeleça:

a) qual é o elemento neutro;

b) que elementos são simetrizáveis;

c) que elementos são regulares.

147. A partir de cada tábua abaixo, decida:

i) A operação é comutativa?

ii) Existe elemento neutro?

iii) Que elementos são simetrizáveis?

iv) Que elementos são regulares?

a)

	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

b)

	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	d	d	a	c

c)

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	c	d	a	f	g	h	e
c	c	d	a	b	g	h	e	f
d	d	a	b	c	h	e	f	g
e	e	f	g	h	a	b	c	d
f	f	g	h	e	b	c	d	a
g	g	h	e	f	c	d	a	b
h	h	e	f	g	d	a	b	c

148. Complete a tábua da operação $*$ sobre o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$, sabendo que:

(I) b é o elemento neutro
(II) o simétrico de a é a
(III) o simétrico de c é d
(IV) $a * c = d$
(V) todos os elementos de E são regulares

$*$	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

149. Construa a tábua de uma operação $*$ sobre $E = \{e, a, b, c\}$ de modo a satisfazer às seguintes condições:

(I) $*$ seja comutativa
(II) e seja o elemento neutro
(III) $x * a = a, \forall x$
(IV) $R_*(E) = E - \{a\}$

150. Construa a tábua de uma operação $*$ sobre o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ de modo que satisfaça às condições seguintes:

(I) seja comutativa
(II) a seja o elemento neutro
(III) $U_*(E) = E$
(IV) $R_*(E) = E$
(V) $b * c = a$

151. Complete a tábua da operação $*$ sobre o conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$, sabendo que:

(I) $e * x = x = x * e, \forall x$
(II) $a * x = a = x * a, \forall x$
(III) $x * x = e, \forall x \neq a$
(IV) $b * d = c$
(V) b, c, d são regulares

$*$	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

152. Seja $*$ a operação sobre $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ dada pela lei $x * y = \text{mmc}(x, y)$. Determine os subconjuntos de E que têm três elementos e são fechados em relação a essa operação.

153. Seja $E = \mathcal{P}\{a, b, c\}$. Qual é a condição sobre X e Y, sendo $X \in E$ e $Y \in E$, para que $\{X, Y\}$ seja fechado em relação à operação de interseção sobre E?

154. Dê um exemplo de operação não associativa nem comutativa, mas que tem elemento neutro.

155. Dê um exemplo de operação sobre E (finito) em que todo elemento de E é regular, existe elemento neutro e só ele é simetrizável.

156. Dê um exemplo de operação em que o composto de dois elementos simetrizáveis não é simetrizável.

157. Dê um exemplo de operação sobre E (finito) em que existe elemento neutro e todos os elementos de E, com exceção do neutro, têm dois simétricos.

Exercícios complementares

C18. a) Prove que o número de operações, duas a duas distintas, sobre um conjunto finito e não vazio com n elementos é $n^{(n)^2}$.

b) Prove que o número de operações comutativas, duas a duas distintas, sobre um conjunto finito e não vazio com n elementos é $\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$ expoente de n.

C19. Seja E um conjunto munido de uma operação $*$ que apresenta um elemento neutro e. Prove que $*$ é associativa e comutativa se, e somente se, $a * (b * c) = (a * c) * b$, quaiquer que sejam $a, b, c \in E$.

C20. Uma operação $*$ sobre um conjunto E é dita totalmente não associativa se

$$(a * b) * c \neq a * (b * c)$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in E$.

a) Mostre que tal operação não é comutativa.

b) Mostre que a operação de potenciação ($x * y = x^y$) sobre $E = \{3, 4, \ldots\}$ é totalmente não associativa.

C21. Seja $*$ uma operação sobre E que é associativa e tem neutro. Sendo A um subconjunto não vazio de E, indiquemos com $C(A)$ o conjunto dos elementos $x \in E$ tais que $a * x = x * a$ para todo $a \in A$.

Prove que:

a) $C(A)$ é fechado para a operação $*$.

b) Se $B \subset A$, então $C(B) \supset C(A)$.

c) $C(C(C(A))) = C(A)$

18. OPERAÇÕES EM $\mathbb{Z}_m$

Vamos definir aqui as operações de adição e multiplicação num conjunto $\mathbb{Z}_m$ ($m > 1$) de classes de restos. Em seguida mostraremos algumas propriedades dessas operações.

Definição 45: Dadas duas classes $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, chama-se soma $\bar{a} + \bar{b}$ a classe $\overline{a + b}$.

Definição 46: Dadas duas classes $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, chama-se produto $\bar{a} \cdot \bar{b}$ a classe $\overline{a \cdot b}$.

Observação

Se $\bar{a} = \overline{a'} \in \mathbb{Z}_m$ e $\bar{b} = \overline{b'} \in \mathbb{Z}_m$, então $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$; portanto, $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$ e $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{m}$ e, conseqüentemente, $\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ e $\overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$. Isso mostra que a soma e o produto de classes, conforme as definições 45 e 46, não dependem dos representantes das classes. Dessa forma fica garantido que $\overline{a + b}$ é única e $\overline{a \cdot b}$ também é única, ou seja, as aplicações $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{a + b}$ e $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{a \cdot b}$ são operações sobre $\mathbb{Z}_m$, denominadas *adição* e *multiplicação*, respectivamente.

Propriedades da adição

1) *Associativa*

Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b + c} = \overline{a + (b + c)} =$$
$$= \overline{(a + b) + c} = \overline{a + b} + \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

2) *Comutativa*

Para quaisquer $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}$$

3) *Elemento neutro*

Para qualquer $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{a + 0} = \bar{a}$$

Portanto, $\bar{0}$ é o neutro da adição em $\mathbb{Z}_m$.

4) *Elementos simetrizáveis*

Dado $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$, procuremos seu simétrico $\overline{a'}$.

Devemos ter $\bar{a} + \overline{a'} = \overline{a + a'} = \bar{0}$ e, portanto, $a + a' \equiv 0 \pmod{m}$ ou $a' \equiv -a \pmod{m}$. De onde, $\overline{a'} = \overline{m - a}$.

Isso mostra que todo elemento $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ é simetrizável para a adição e seu simétrico é $\overline{m - a}$.

Propriedades da multiplicação

Analogamente, pode-se provar a associativa e a comutativa.

Para qualquer $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$, temos:

$$\overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a \cdot 1} = \overline{a}$$

Portanto, $\overline{1}$ é o neutro da multiplicação em $\mathbb{Z}_m$.

Provaremos que $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ é simetrizável para a multiplicação se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$.

($\rightarrow$) Seja $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ um elemento inversível. Existe, então, $\overline{a'} \in \mathbb{Z}_m$ tal que $\overline{a} \cdot \overline{a'} = \overline{a \cdot a'} = \overline{1}$. Daí, $aa' \equiv 1 \pmod{m}$ ou $aa' - 1 = mq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. A proposição 2, do capítulo II, garante então que $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$.

($\leftarrow$) Se $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$, então, devido à mencionada proposição, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + my_0 = 1$. Dessa igualdade segue que $ax_0 - 1 = m(-y_0)$ e, portanto, que $ax_0 \equiv 1 \pmod{m}$. De onde, $\overline{ax_0} = \overline{1}$ ou $\overline{a} \cdot \overline{x_0} = \overline{1}$, igualdade que mostra que $\overline{a}$ é inversível e $\overline{x_0}$ é seu inverso.