

Teoria de Grupos: notas de estudo

Guilherme Philippi

22 de janeiro de 2021

Sumário

1	Grupos	2
1.1	Lei de composição	2
1.2	Grupos	3
1.3	Subgrupos	4
1.4	Homomorfismos	5
1.5	Isomorfismos	5
1.6	Relações de Equivalência e Partições	7
1.7	Coclasses	8
1.8	Restrição de um homomorfismo para um subgrupo	9
1.9	Produto de Grupos	10
1.10	Aritmética Modular	11
1.11	Grupos de Quociente	12
	Referências Bibliográficas	13

Capítulo 1

Grupos

1.1 Lei de composição

Definição 1.1.1 (Lei de composição). Uma *lei de composição* sobre um conjunto S é uma função (ou, uma operação binária) $*$: $S \times S \longrightarrow S$.

Observação 1.1.1 (Notação de operação). Usaremos a notação $*(a, b) = a * b$, para simplificar a escrita de propriedades. Também, quando não houver ambiguidade, suprimiremos o símbolo da lei, fazendo $a * b = ab$.

Definição 1.1.2. Para $a, b, c \in S$, uma lei de composição $*$ é dita

- *Associativa*, se $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- *Comutativa*, se $a * b = b * a$.

Proposição 1.1.1. *Seja uma lei associativa dada sobre o conjunto S . Há uma única forma de definir, para todo inteiro n , um produto de n elementos $a_1, \dots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:*

1. *o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;*
2. *o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela lei de composição;*
3. *para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita por indução em n . □

Definição 1.1.3. Dizemos que $e \in S$ é *identidade* para uma lei de composição se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.

Proposição 1.1.2. *O elemento identidade é único.*

Demonstração. Se e, e' são identidades, já que e é identidade, então $ee' = e'$ e, como e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. □

Observação 1.1.2. Usaremos $\bar{1}$ para representar a identidade multiplicativa e $\bar{0}$ para denotar a aditiva.

Definição 1.1.4 (Elemento inverso). Seja uma lei de composição que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado *invertível* se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos *inversa de a* .

Proposição 1.1.3. *Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Observação 1.1.3 (Potências). Usaremos as seguintes notações:

- $a^n = a^{n-1}a$ é a composição de $a \cdots a$ n vezes;
- a^{-n} é a inversa de a^n ;
- $a^0 = \vec{1}$.

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (Isso não induz uma notação de fração $\frac{b}{a}$ a menos que seja uma lei comutativa, visto que ba^{-1} pode ser diferente de $a^{-1}b$). Para falar de uma lei de composição aditiva, usaremos $-a$ no lugar de a^{-1} e na no lugar de a^n .

1.2 Grupos

Definição 1.2.1 (Grupo). Um *grupo* $(G, *)$ é um conjunto G onde uma lei de composição $*$ é dada sobre G tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. (*Associatividade*). Para todo $a, b, c \in G$, tem-se

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

2. (*Existência da identidade*). Existe um elemento $\vec{1} \in G$ tal que, para todo $a \in G$,

$$\vec{1} * a = a * \vec{1} = a;$$

3. (*Existência do inverso*). Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = \vec{1}.$$

Observação 1.2.1. É comum abusar da notação e chamar um grupo $(G, *)$ e o conjunto de seus elementos G pelo mesmo símbolo, omitindo a lei de composição quando não houver necessidade.

Definição 1.2.2 (Grupo abeliano). Um *grupo abeliano* é um grupo com uma lei de composição comutativa. Costuma-se usar a notação aditiva para grupos abelianos.

Proposição 1.2.1 (Lei do cancelamento). *Seja a, b, c elementos de um grupo G . Se $ab = ac$, então $b = c$.*

1.3 Subgrupos

Definição 1.3.1 (Subgrupo). Um subconjunto H de um grupo G é chamado de *subgrupo* de G (e escreve-se $H \leq G$) se possuir as seguintes propriedades:

1. (*Fechado*). Se $a, b \in H$, então $ab \in H$;
2. (*Identidade*). $1 \in H$;
3. (*Inversível*). Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Observação 1.3.1 (Lei de composição induzida). Veja que a propriedade 1 necessita de uma lei de composição. Usamos a lei de composição de G para definir uma lei de composição de H , chamada *lei de composição induzida*. Essas propriedades garantem que H é um grupo com respeito a sua lei induzida.

Definição 1.3.2 (Subgrupo apropriado). Todo grupo G possui dois subgrupos triviais: O subgrupo formado por todos os elementos de G e o subgrupo $\{\vec{1}\}$, formado pela identidade de G . Diz-se que um subgrupo é um *subgrupo apropriado* se for diferente desses dois.

Exemplo 1.3.1. Utilizando da notação multiplicativa, define-se o *subgrupo cíclico* H gerados por um elemento arbitrário x de um grupo G como o conjunto de todas as potências de x : $H = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, \vec{1}, x, x^2, \dots\}$.

Definição 1.3.3. Chama-se *ordem* de um grupo G o número $|G|$ de elementos de G .

Também pode-se definir um subgrupo de um grupo G *gerado por um subconjunto* $U \subset G$. Esse é o menor subgrupo de G que contém U e consiste de todos os elementos de G que podem ser espessos como um produto de uma cadeia de elementos de U e seus inversos.

Exemplo 1.3.2. O *grupo de quaternions* H é o menor subgrupo do conjunto de matrizes 2×2 complexas invertíveis que não é cíclico. Isso consiste nas oito matrizes

$$H = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\},$$

onde

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Os dois elementos \mathbf{i}, \mathbf{j} geram H , e o cálculo leva as formulas

$$\mathbf{i}^4 = 1, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2, \quad \mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{i}^3\mathbf{j}.$$

1.4 Homomorfismos

Definição 1.4.1 (Homomorfismo de grupo). Sejam $(G, *)$ e (G', \cdot) dois grupos. Um *homomorfismo* $\varphi : G \rightarrow G'$ é um mapeamento tal que

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \forall a, b \in G. \quad (\text{propriedade de homomorfismo})$$

Quando isso acontece, dizemos que o mapeamento φ *preserva a estrutura algébrica de grupo*.

Exemplo 1.4.1 (Inclusão). Seja H o subgrupo de um grupo G . O homomorfismo $i : H \rightarrow G$ é dito *inclusão* de H em G , definido por $i(x) = x$.

Proposição 1.4.1. Um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ mapeia a identidade de G à identidade de G' e transforma as inversas de G nas respectivas inversas em G' . Isto é, $\varphi(\tilde{1}) = \tilde{1}$ e $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Definição 1.4.2 (Imagem). A *imagem* de um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ é o subconjunto de G'

$$\text{im } \varphi = \{x \in G' \mid x = \varphi(a), \text{ para algum } a \in G\} = \varphi(G).$$

Proposição 1.4.2. A imagem de um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ é um subgrupo de G' .

Definição 1.4.3 (Núcleo). O *núcleo* do homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ é o subconjunto de G formado pelos elementos que são mapeados pela identidade em G' :

$$\text{nu } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = 1\} = \varphi^{-1}(1).$$

Proposição 1.4.3. O núcleo de um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ é um subgrupo de G .

1.5 Isomorfismos

Definição 1.5.1 (Isomorfismo de grupos). Dois grupos $(G, *)$ e (G', \cdot) são ditos *isomórficos* se possuírem um homomorfismo bijetivo entre si, isto é, há um mapeamento *bijetivo* $\varphi : G \rightarrow G'$ (chamado *relação de isomorfismo*) que respeita a propriedade de homomorfismo:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \text{ para todo } a, b \in G.$$

Observação 1.5.1. Usa-se a notação $G \approx G'$ para dizer que G é isomorfo a G' .

Definição 1.5.2 (Classe de isomorfismo). Diz-se que o conjunto de grupos isomórficos a um dado grupo G é a *classe de isomorfismo* de G .

Proposição 1.5.1. Qualquer dois grupos em uma mesma classe de isomorfismo também são isomorfos entre si.

Definição 1.5.3 (Automorfismo). Quando uma relação de isomorfismo $\varphi : G \rightarrow G$ é definida de um grupo G para ele mesmo, chamamos esse tipo de isomorfismo de *automorfismo* de G .

Exemplo 1.5.1 (Conjugação). Seja $b \in G$ um elemento fixo. Então, a *conjugação de G por b* é o mapeamento φ de G para ele mesmo definido por

$$\varphi_b(x) = bxb^{-1}.$$

Esse é um automorfismo porque:

- é compatível com a propriedade de homomorfismo:

$$\varphi_b(xy) = bxyb^{-1} = bxb^{-1}byb^{-1} = \varphi_b(x)\varphi_b(y);$$

- é um mapa bijetivo visto que existe a função inversa $\varphi_b^{-1}(x) = b^{-1}xb = \varphi_{b^{-1}}(x)$ (isto é, a conjugação por b^{-1}) que, de forma análoga, também é compatível com a propriedade de homomorfismo.

Observação 1.5.2 (Abelianos). Se o grupo é abeliano possui a conjugação trivial: $bab^{-1} = abb^{-1} = a$ (mapa identidade). Porém, qualquer grupo não comutativo tem alguma conjugação não trivial, isto é, existe ao menos um b no grupo tal que $ba \neq ab$ para algum a , portanto, possui pelo menos um automorfismo não trivial: a conjugação do grupo por b .

Definição 1.5.4 (Conjugado). O elemento bab^{-1} é chamado *conjugado de a por b* . Dois elementos $a, a' \in G$ são ditos *conjugados* se existe $b \in G$ tal que $a' = bab^{-1}$.

Observação 1.5.3. O conjugado tem uma interpretação muito útil: Se escrevermos bab^{-1} como a' , então

$$ba = a'b.$$

Ou seja, pode-se pensar na conjugação como a mudança em a que resulta de mover b de um lado para o outro na equação.

Proposição 1.5.2. *Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo. Se $a \in \text{nu } \varphi$ e b é qualquer elemento do grupo G , então o conjugado $bab^{-1} \in \text{nu } \varphi$.*

Definição 1.5.5 (Subgrupo normal). Um subgrupo N de um grupo G é chamado *subgrupo normal* (escreve-se $N \trianglelefteq G$) se para cada $a \in N$ e $b \in G$, o conjugado $bab^{-1} \in N$.

Observação 1.5.4. Fica claro que o núcleo de um homomorfismo é um subgrupo normal. Além disso, todo subgrupo de um grupo abeliano também é um subgrupo normal, porém, isso não é necessariamente verdade em subgrupos de grupos não abelianos (veja Observação 1.5.2).

Definição 1.5.6 (Centro de um grupo). O *centro* $Z(G)$ de um grupo G é o conjunto de elementos que comutam com todo elemento de G :

$$Z(G) = \{z \in G \mid zx = xz \text{ para todo } x \in G\}.$$

Proposição 1.5.3. *O centro de todo grupo é um subgrupo normal do grupo.*

1.6 Relações de Equivalência e Partições

Definição 1.6.1 (Partições). Seja S um conjunto. Uma *partição* P de S é uma subdivisão de S em subconjuntos não vazios e não sobrepostos, isto é, uma união de conjuntos disjuntos.

Exemplo 1.6.1. Pode-se particionar o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} na união de disjuntos $P \cup I$, onde $P = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é par}\}$ e $I = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é ímpar}\}$.

Definição 1.6.2 (Relações de equivalência). Uma *relação de equivalência* sobre um conjunto S é uma relação que se mantém sobre um subconjunto de elementos de S . Escreve-se $a \sim b$ para representar a equivalência de $a, b \in S$, que precisa respeitar as seguintes propriedades:

1. (*Transitiva*). Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$;
2. (*Simétrica*). Se $a \sim b$, então $b \sim a$;
3. (*Reflexiva*). $a \sim a$.

Observação 1.6.1. A noção de partição em S e a relação de equivalência em S são logicamente equivalentes: Dada uma partição P sobre S , pode-se definir uma relação de equivalência R tal que, se a e b estão no mesmo subconjunto partição, então $a \sim b$ e, dada uma relação de equivalência R , podemos definir uma partição P tal que o subconjunto que contém a é o conjunto de todos os elementos b onde $a \sim b$. Esse subconjunto é chamado de *classe de equivalência de a*

$$C_a = \{b \in S \mid a \sim b\}$$

e S é particionado em classes de equivalência.

Proposição 1.6.1. Sejam C_a e C_b duas classes de equivalência do conjunto S . Se existe d tal que $d \in C_a$ e $d \in C_b$, então $C_a = C_b$.

Observação 1.6.2. Seja um conjunto S . Suponha que exista uma relação de equivalência ou uma partição sobre S . Então, pode-se construir um novo conjunto \bar{S} formado pelas classes de equivalência ou os subconjuntos partições de S . Essa construção induz uma notação muito útil: para $a \in S$, a classe de equivalência de a ou o subconjunto partição que contém a serão denotados como o elemento $\bar{a} \in \bar{S}$. Desta forma, a notação $\bar{a} = \bar{b}$ significa que $a \sim b$ e chamamos $a, b \in S$ de *representantes* das respectivas classes de equivalência $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{S}$.

Definição 1.6.3. Seja um mapeamento $\varphi : S \rightarrow T$. Chama-se de *relação de equivalência determinada por φ* a relação dada por $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \sim b$. Além disso, para um elemento $t \in T$, o subconjunto de $\varphi^{-1}(t) = \{s \in S \mid \varphi(s) = t\}$ é dito *imagem inversa de t por φ* .

Proposição 1.6.2. Seja um mapeamento $\varphi : S \rightarrow T$ e $t \in T$ um elemento qualquer de T . Se a imagem inversa $\varphi^{-1}(t)$ é não vazia, então $t \in \text{im } \varphi$ e $\varphi^{-1}(t)$ forma uma classe de equivalência $\bar{\varphi} \in \bar{S}$ através da relação determinada por φ .

Definição 1.6.4 (Congruência). Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo. A relação de equivalência definida por φ é usualmente denotada por \equiv ao invés de \sim e a chamamos de *congruência*:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \equiv b, \text{ para } a, b \in G.$$

Proposição 1.6.3. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo e $a, b \in G$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- $\varphi(a) = \varphi(b)$
- $b = an$, para algum $n \in \text{nu } \varphi$
- $a^{-1}b \in \text{nu } \varphi$.

Definição 1.6.5 (Coclasse em relação ao núcleo). Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo, $a \in G$ e $n \in \text{nu } \varphi$. O conjunto

$$a \text{ nu } \varphi = \{g \in G \mid g = an, \text{ para algum } n \in \text{nu } \varphi\}$$

é dito *coclasse de $\text{nu } \varphi$ em G* .

Observação 1.6.3. Pode-se particionar o grupo G em *classes de congruência*, formadas pelas coclasses $a \text{ nu } \varphi$. Estas são imagens inversas do mapeamento φ .

Proposição 1.6.4. *O homomorfismo de grupo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é injetivo se, e somente se, seu núcleo é o subgrupo trivial $\{1\}$.*

Observação 1.6.4. Esse resultado dá uma forma de verificar se um homomorfismo φ é também um isomorfismo: Se $\text{nu } \varphi = \{1\}$ e $\text{im } \varphi = G'$, então φ é, pelos respectivos motivos, injetiva e sobrejetiva. Então é um isomorfismo.

1.7 Coclasses

Definimos coclasse somente em relação ao núcleo de um homomorfismo mas, na verdade, pode-se definir uma coclasse para qualquer subgrupo H de um grupo G .

Definição 1.7.1 (Coclasse a esquerda). Seja um subgrupo H de um grupo G . O subconjunto da forma

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

é dito *coclasse a esquerda de H em G* .

Proposição 1.7.1. *A coclasse é uma classe de equivalência para a relação de congruência*

$$b = ah \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Observação 1.7.1. Daí segue que, como classes de equivalência particionam um grupo, coclasses a esquerda de um subgrupo particionam o grupo.

Definição 1.7.2 (Índice de um subgrupo). O número de coclasses a esquerda de um subgrupo H em um grupo G chama-se *índice de H em G* e é denotado como $[G : H]$.

Observação 1.7.2. Como há uma bijeção do subgrupo H para a coclasse aH , a cardinalidade de aH tem de ser a mesma de H . Isto é, as coclasses de H particionam G em partes de mesma ordem.

Proposição 1.7.2. *Seja aH a coclasse do subgrupo H no grupo G . Então, a ordem $|G|$ do grupo G é dada por*

$$|G| = |H|[G : H].$$

Proposição 1.7.3 (Teorema de Lagrange). *Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G . A ordem de H divide a ordem de G .*

Definição 1.7.3 (Ordem de um elemento). *Seja G um grupo. A ordem de um elemento $a \in G$ é a ordem do grupo cíclico gerado por a .*

Proposição 1.7.4. *Seja um grupo G com p elementos tal que p é primo e $a \in G$ diferente da identidade. Então G é o grupo cíclico $\{1, a, \dots, a^{p-1}\}$ gerado por a .*

Observação 1.7.3. Também podemos obter uma expressão para calcular a ordem de um grupo de homomorfismo. Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Como as coclasses a esquerda do núcleo de φ são as imagens inversas φ^{-1} , elas estão em uma correspondência biunívoca com a imagem. Daí segue que

$$[G : \text{nu } \varphi] = |\text{im } \varphi|.$$

Proposição 1.7.5. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo onde G e G' são finitos. Então*

$$|G| = |\text{nu } \varphi| \cdot |\text{im } \varphi|.$$

Definição 1.7.4 (Coclasses a direita). Os conjuntos da forma

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

chamam-se *coclasses a direita de um subgrupo H* . Esses são classes de equivalência para a relação de congruência a direita

$$b = ha \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Proposição 1.7.6. *Seja um subgrupo H de um grupo G . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- H é subgrupo normal,
- $aH = Ha$ para todo $a \in G$.

1.8 Restrição de um homomorfismo para um subgrupo

Observação 1.8.1. O objetivo dessa seção é apresentar ferramentas para analisar um subgrupo H do grupo G a fim de garantir propriedades do grupo G . No geral, os subgrupos são mais específicos e menos complexos de se trabalhar.

Proposição 1.8.1. *Sejam K e H dois subgrupos do grupo G tal que a interseção $K \cap H$ é um subgrupo de H . Se K é um subgrupo normal de G , então $K \cap H$ é um subgrupo normal de H .*

Exemplo 1.8.1. Com esse resultado, se G é finito pode-se utilizar o Teorema de Lagrange para obter informações sobre a interseção dos dois subgrupos: a interseção divide $|H|$ e $|K|$. Se $|H|$ e $|K|$ não tem o mesmo fator de divisão, então $K \cap H = \{1\}$.

Definição 1.8.1 (Restrição de um homomorfismo para um subgrupo). Sejam o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ e H um subgrupo de G . Uma *restrição de φ para o subgrupo H* é o homomorfismo $\varphi|_H : H \rightarrow G'$ definido como

$$\varphi|_H(h) = \varphi(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Proposição 1.8.2. Sejam o homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ e H um subgrupo de G . O núcleo de uma restrição $\varphi|_H$ é a interseção do núcleo de φ e H .

Proposição 1.8.3. Sejam $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo, H' um subgrupo de G' e $\varphi^{-1}(H') = \{x \in G \mid \varphi(x) \in H'\}$ a imagem inversa de H' . Então

- $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo de G .
- Se H' é um subgrupo normal de G' , então $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo normal de G .
- $\varphi^{-1}(H')$ contém o núcleo de φ
- A restrição de φ para $\varphi^{-1}(H')$ define um homomorfismo $\varphi^{-1}(H') \rightarrow H'$, de forma que o núcleo desse homomorfismo é o núcleo de φ .

1.9 Produto de Grupos

Definição 1.9.1 (Produto de grupos). Seja G, G' dois grupos. O *produto* $G \times G'$ é um grupo formado pelo produto das componentes dos grupos G e G' , isso é, pela regra

$$(a, a'), (b, b') \rightsquigarrow (ab, a'b'),$$

onde $a, b \in G$ e $a', b' \in G'$. O par $(1, 1)$ é uma identidade e $(a, a')^{-1} = (a^{-1}, a'^{-1})$. A propriedade associativa é preservada em $G \times G'$ pois também é em G e G' .

Proposição 1.9.1. A ordem de $G \times G'$ é o produto das ordens de G e G' .

Observação 1.9.1 (Projeções). O produto de grupos é composto pelos homomorfismos:

$$i : G \rightarrow G \times G', \quad i' : G' \rightarrow G \times G', \quad p : G \times G' \rightarrow G, \quad p' : G \times G' \rightarrow G',$$

definidos como

$$i(x) = (x, 1), \quad i'(x') = (1, x'), \quad p(x, x') = x, \quad p'(x, x') = x'.$$

Os mapeamentos i, i' são injetivos, já os mapeamentos p, p' são sobrejetivos, onde nu $p = 1 \times G'$ e nu $p' = G \times 1$. Esses mapeamentos são chamados de *projeções*. Desde que são núcleos, $G \times 1$ e $1 \times G'$ são subgrupos normais de $G \times G'$.

Proposição 1.9.2 (Propriedades de Mapeamento dos Produtos). *Seja H um grupo qualquer. O homomorfismo $\Phi : H \longrightarrow G \times G'$ tem correspondência biunívoca com o par (φ, φ') de homomorfismos*

$$\varphi : H \longrightarrow G, \quad \varphi' : H \longrightarrow G'.$$

O núcleo de Φ é a interseção $(\text{nu } \phi) \cap (\text{nu } \phi')$.

Observação 1.9.2. É extremamente desejável encontrar uma relação isomorfa entre um grupo G e um produto de outros dois grupos $H \times H'$. Quando isso acontece, e infelizmente não são muitas as vezes, trabalhar com os grupos H e H' costumam ser mais simples que G .

Proposição 1.9.3. *Sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ não divisíveis entre si. Um grupo cíclico de ordem rs é isomorfo ao produto dos grupos cíclicos de ordem r e s .*

Observação 1.9.3. Em contrapartida, um grupo cíclico de ordem par 4, por exemplo, não é isomorfo ao produto de dois grupos cíclicos de ordem 2. Também não podemos afirmar nada com base no resultado anterior sobre grupos não cíclicos.

Definição 1.9.2 (Conjunto de produtos). *Sejam dois subgrupos A, B de um grupo G . Chamamos o conjunto de produtos de elementos de A e B por*

$$AB = \{x \in G \mid x = ab \text{ para algum } a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Proposição 1.9.4. *Sejam H e K os subgrupos de um grupo G .*

- *Se $H \cap K = \{1\}$, o mapeamento de produto $p : H \times K \longrightarrow G$ definido por $p(h, k) = hk$ é injetivo e sua imagem é o subconjunto HK ;*
- *Se um dos subgrupos H ou K é um subgrupo normal de G , então os conjuntos de produtos HK e KH são iguais e HK é subgrupo de G ;*
- *Se ambos H e K são subgrupos normais, $H \cap K = \{1\}$ e $HK = G$, então G é isomorfo ao grupo de produto $H \times K$.*

1.10 Aritmética Modular

Definição 1.10.1 (Congruente modulo n). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que dois inteiros a, b são congruentes modulo n , e escrevemos*

$$a \equiv b \pmod{n},$$

se n divide $b - a$, ou se $b = a + nk$ para algum inteiro k . Chamamos as classes de equivalência definidas por essa relação de classes de equivalência módulo n , ou classes de resíduo módulo n .

Exemplo 1.10.1. A classe de congruência de 0 é o subgrupo $\bar{0}$ de todos os múltiplos de n

$$\bar{0} = n\mathbb{Z} = \{\dots, -n, 0, n, 2n, \dots\}.$$

Proposição 1.10.1. Há n classes de congruência módulo n (denotamos esse conjunto por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), isto é, o índice $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}]$ é n . São elas

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Definição 1.10.2 (Soma e produto). Seja \bar{a} e \bar{b} as classes de congruência representadas pelos inteiros a e b . Define-se a *soma* como a classe de congruência de $a + b$ e o *produto* pela classe de congruência ab , isto é,

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \bar{a}\bar{b} = \overline{ab}.$$

Proposição 1.10.2. Se $a' \equiv b' \pmod{n}$ e $b' \equiv b \pmod{n}$, então $a' + b' \equiv a + b \pmod{n}$ e $a'b' \equiv ab \pmod{n}$.

Observação 1.10.1. Além disso, a soma e produto também continuam respeitando as propriedades associativas, comutativas e distributivas, desde que o mesmo se mantém para soma e multiplicação de inteiros.

Exemplo 1.10.2. Seja $n = 13$, então

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{12}\}.$$

Com isso,

$$(\bar{7} + \bar{9})(\bar{11} + \bar{6}) = \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{12}.$$

1.11 Grupos de Quociente

Proposição 1.11.1. Seja N um subgrupo normal de um grupo G . Então, o produto de duas coclasses aN , bN também é uma coclasse

$$(aN)(bN) = abN.$$

Definição 1.11.1 (Produto de coclasses). Sejam as coclasses C_1, C_2 e os elementos $a \in C_1$ e $b \in C_2$, então $C_1 = aN$ e $C_2 = bN$. Chamamos de *produto das coclasses* C_1 e C_2 a coclasse $C_1C_2 = abN$, isto é, a coclasse que contém ab .

Observação 1.11.1 (Notação para conjunto de coclasses). É conveniente denotar o conjunto de coclasses de um subconjunto normal N de um grupo G pela simbologia

$$G/N = \text{conjunto de coclasses de } N \text{ em } G.$$

Também pode-se usar a notação em barra $G/N = \bar{G}$ e $aN = \bar{a}$, tomando o cuidado para diferenciar que \bar{a} denota a coclasse que contém a .

Proposição 1.11.2. Seja o mapeamento $\pi : G \longrightarrow \bar{G} = G/N$, da forma $a \rightsquigarrow \bar{a} = aN$, isto é, \bar{G} é um grupo e o mapeamento π é um homomorfismo com núcleo N . Então a ordem de G/N é o índice $[G : N]$.

Proposição 1.11.3. Todo subgrupo normal de um grupo G é o núcleo de um homomorfismo.

Proposição 1.11.4. *Sejam G um grupo e S um conjunto qualquer com uma lei de composição. Seja também $\varphi : G \longrightarrow S$ um mapeamento sobrejetivo tal que $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ para todo $a, b \in G$. Então S é um grupo.*

Proposição (Primeiro Teorema do Isomorfismo): Sejam $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo de grupo sobrejetivo e N o núcleo de φ . Então G/N é isomórfico a G' pelo mapeamento $\bar{\varphi}$ que transporta a coclasse $\bar{a} = aN$ para $\varphi(a)$:

$$\bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a).$$

Esse é o método fundamental para identificar grupos de quocientes.

Referências Bibliográficas