Teoria de Grupos: notas de estudo

Guilherme Philippi

18 de janeiro de 2021

Sumário

Capítulo 1

Grupos

1.1 Lei de composição

Definição 1.1.1 (Lei de Composição)**.** Uma *Lei de Composição* sobre S é uma função $F : S \times S \longrightarrow S$.

Definição 1.1.2. Para $a, b, c \in S$, uma Lei de Composição F é dita

- *Associativa* se $F(F(a,b),c) = F(a,F(b,c))$;
- *Comutativa* se $F(a,b) = F(b,a)$.

Observação 1.1.1. Usaremos a notação $F(a,b) = ab$, para simplificar a escrita de propriedades.

Proposição 1.1.1. *Seja uma lei associativa dada sobre o conjunto S. Há uma única forma de definir, para todo inteiro n, um produto de n elementos $a_1, \ldots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:*

1. *o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;*
2. *o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela lei de composição;*
3. *para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita por indução em n. □

Definição 1.1.3. Dizemos que $e \in S$ é *identidade* para uma lei de composição se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.

Proposição 1.1.2. *O elemento identidade é único.*

Demonstração. Se e, e' são identidades, já que e é identidade, então $ee' = e'$ e, como e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. □

Observação 1.1.2. Usaremos $\vec{1}$ para representar a identidade multiplicativa e $\vec{0}$ para denotar a aditiva.

Definição 1.1.4 (Elemento inverso)**.** Seja uma lei de composição que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado *invertível* se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos *inversa de a*.

Proposição 1.1.3. *Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Observação 1.1.3 (Potências)**.** Usaremos as seguintes notações:

- $a^n = a^{n-1}a$ é a composição de $a \cdots a$ n vezes;
- a^{-n} é a inversa de a^n;
- $a^0 = \vec{1}$.

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (Isso não induz uma notação de fração $\frac{b}{a}$ a menos que seja uma lei comutativa, visto que ba^{-1} pode ser diferente de $a^{-1}b$). Para falar de uma lei de composição aditiva, usaremos $-a$ no lugar de a^{-1} e na no lugar de a^n.

1.2 Grupos

Definição 1.2.1 (Grupo)**.** Um *Grupo* é um conjunto G onde uma lei de composição associativa é dada sobre G tal que exista uma identidade e todo elemento possua uma inversa.

Observação 1.2.1. É comum abusar da notação e chamar um grupo e o conjunto de seus elementos pelo mesmo simbolo, por exemplo, G.

Definição 1.2.2 (Grupo abeliano)**.** Um *grupo abeliano* é um grupo com uma lei de composição comutativa. Costuma-se usar a notação aditiva para grupos abelianos.

Proposição 1.2.1 (Lei do cancelamento)**.** *Seja a, b, c elementos de um grupo G. Se $ab = ac$, então $b = c$.*

1.3 Subgrupos

Definição 1.3.1 (Subgrupo)**.** Um subconjunto H de um grupo G é chamado de *subgrupo* de G se possuir as seguintes propriedades:

1. *(Fechado).* Se $a, b \in H$, então $ab \in H$;
2. *(Identidade).* $1 \in H$;
3. *(Inversível).* Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Observação 1.3.1 (Lei de composição induzida)**.** Veja que a propriedade 1. necessita de uma lei de composição. Usamos a lei de composição de G para definir uma lei de composição de H, chamada *lei de composição induzida.* Essas propriedades garantem que H é um grupo com respeito a sua lei induzida.

Definição 1.3.2 (Subgrupo apropriado)**.** Todo grupo G possui dois subgrupos triviais: O subgrupo formado por todos os elementos de G e o subgrupo $\{\vec{1}\}$, formado pela identidade de G. Diz-se que um subgrupo é um *subgrupo apropriado* se for diferente desses dois.

Exemplo 1.3.1. Utilizando da notação multiplicativa, define-se o *subgrupo cíclico* H gerados por um elemento arbitrário x de um grupo G como o conjunto de todas as potências de x: $H = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, \vec{1}, x, x^2, \dots\}$.

Definição 1.3.3. Chama-se *ordem* de um grupo G o número $|G|$ de elementos de G.

Também pode-se definir um subgrupo de um grupo G *gerado por um subconjunto* $U \subset G$. Esse é o menor subgrupo de G que contém U e consiste de todos os elementos de G que podem ser espressos como um produto de uma cadeia de elementos de U e seus inversos.

Exemplo 1.3.2. O *grupo de quaternions* H é o menor subgrupo do conjunto de matrizes 2×2 complexas invertíveis que não é cíclico. Isso consiste nas oito matrizes

$$H = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\},$$

onde

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Os dois elementos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ geram H, e o calculo leva as formulas

$$\mathbf{i}^4 = 1, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2, \quad \mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{i}^3\mathbf{j}.$$

Referências Bibliográficas