Teoria de Grupos: notas de estudo

Guilherme Philippi

18 de janeiro de 2021

Sumário

Capítulo 1

Grupos

1.1 Lei de composição

Definição 1.1.1 (Lei de Composição). *Uma Lei de Composição sobre S é uma função $F : S \times S \longrightarrow S$.*

Definição 1.1.2. *Para $a, b, c \in S$, uma Lei de Composição F é dita*

- Associativa *se $F(F(a,b),c) = F(a, F(b,c))$;*
- Comutativa *se $F(a,b) = F(b,a)$.*

Observação 1.1.1. *Usaremos a notação $F(a,b) = ab$, para simplificar a escrita de propriedades.*

Proposição 1.1.1. *Seja uma lei associativa dada sobre o conjunto S. Há uma única forma de definir, para todo inteiro n, um produto de n elementos $a_1, \ldots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:*

1. *o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;*
2. *o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela lei de composição;*
3. *para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita por indução em n. □

Definição 1.1.3. *Dizemos que $e \in S$ é* identidade *para uma lei de composição se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.*

Proposição 1.1.2. *O elemento identidade é único.*

Demonstração. Se e, e' são identidades, já que e é identidade, então $ee' = e'$ e, como e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. □

Observação 1.1.2. *Usaremos $\vec{1}$ para representar a identidade multiplicativa e $\vec{0}$ para denotar a aditiva.*

Definição 1.1.4 (Elemento inverso). *Seja uma lei de composição que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado* invertível *se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos* inversa de *a.*

Proposição 1.1.3. *Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição* $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Observação 1.1.3 (Potências). *Usaremos as seguintes notações:*

- $a^n = a^{n-1}a$ *é a composição de* $a \cdots a$ n *vezes;*
- a^{-n} *é a inversa de* a^n*;*
- $a^0 = \vec{1}$.

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ *e* $(a^r)^s = a^{rs}$. *(Isso não induz uma notação de fração* $\frac{b}{a}$ *a menos que seja uma lei comutativa, visto que* ba^{-1} *pode ser diferente de* $a^{-1}b$*). Para falar de uma lei de composição aditiva, usaremos* $-a$ *no lugar de* a^{-1} *e* na *no lugar de* a^n.

Referências Bibliográficas