Teoria de Grupos: notas de estudo

Guilherme Philippi

25 de janeiro de 2021

Sumário

Capítulo 1

Grupos

1.1 Lei de composição

Definição 1.1.1 (Lei de composição)**.** Uma *lei de composição* sobre um conjunto S é uma função (ou, uma operação binária) $* : S \times S \longrightarrow S$.

Observação 1.1.1 (Notação de operação)**.** Usaremos a notação $*(a,b) = a*b$, para simplificar a escrita de propriedades. Também, quando não houver ambiguidade, suprimiremos o simbolo da lei, fazendo $a*b = ab$.

Definição 1.1.2. Para $a,b,c \in S$, uma lei de composição $*$ é dita

- *Associativa*, se $(a*b)*c = a*(b*c)$;
- *Comutativa*, se $a*b = b*a$.

Proposição 1.1.1. *Seja uma lei associativa dada sobre o conjunto S. Há uma única forma de definir, para todo inteiro n, um produto de n elementos $a_1, \dots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:*

1. *o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;*
2. *o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela lei de composição;*
3. *para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita por indução em n. □

Definição 1.1.3. Dizemos que $e \in S$ é *identidade* para uma lei de composição se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.

Proposição 1.1.2. *O elemento identidade é único.*

Demonstração. Se e, e' são identidades, já que e é identidade, então $ee' = e'$ e, como e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. □

Observação 1.1.2. Usaremos $\vec{1}$ para representar a identidade multiplicativa e $\vec{0}$ para denotar a aditiva.

Definição 1.1.4 (Elemento inverso)**.** Seja uma lei de composição que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado *invertível* se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos *inversa de a*.

Proposição 1.1.3. *Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Observação 1.1.3 (Potências)**.** Usaremos as seguintes notações:

- $a^n = a^{n-1}a$ é a composição de $a \cdots a$ n vezes;
- a^{-n} é a inversa de a^n;
- $a^0 = \vec{1}$.

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (Isso não induz uma notação de fração $\frac{b}{a}$ a menos que seja uma lei comutativa, visto que ba^{-1} pode ser diferente de $a^{-1}b$). Para falar de uma lei de composição aditiva, usaremos $-a$ no lugar de a^{-1} e na no lugar de a^n.

1.2 Grupos

Definição 1.2.1 (Grupo)**.** Um *grupo* $(G, *)$ é um conjunto G onde uma lei de composição $*$ é dada sobre G tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. *(Associatividade).* Para todo $a, b, c \in G$, tem-se
$$(a * b) * c = a * (b * c);$$
2. *(Existência da identidade).* Existe um elemento $\vec{1} \in G$ tal que, para todo $a \in G$,
$$\vec{1} * a = a * \vec{1} = a;$$
3. *(Existência do inverso).* Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que
$$a * a' = a' * a = \vec{1}.$$

Observação 1.2.1. É comum abusar da notação e chamar um grupo $(G, *)$ e o conjunto de seus elementos G pelo mesmo simbolo, omitindo a lei de composição quando não houver necessidade.

Definição 1.2.2 (Grupo abeliano)**.** Um *grupo abeliano* é um grupo com uma lei de composição comutativa. Costuma-se usar a notação aditiva para grupos abelianos.

Proposição 1.2.1 (Lei do cancelamento)**.** *Seja a, b, c elementos de um grupo G. Se $ab = ac$, então $b = c$.*

1.3 Subgrupos

Definição 1.3.1 (Subgrupo)**.** Um subconjunto H de um grupo G é chamado de *subgrupo* de G (e escreve-se $H \leq G$) se possuir as seguintes propriedades:

1. *(Fechado).* Se $a, b \in H$, então $ab \in H$;
2. *(Identidade).* $1 \in H$;
3. *(Inversível).* Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Observação 1.3.1 (Lei de composição induzida)**.** Veja que a propriedade 1 necessita de uma lei de composição. Usamos a lei de composição de G para definir uma lei de composição de H, chamada *lei de composição induzida.* Essas propriedades garantem que H é um grupo com respeito a sua lei induzida.

Definição 1.3.2 (Subgrupo apropriado)**.** Todo grupo G possui dois subgrupos triviais: O subgrupo formado por todos os elementos de G e o subgrupo $\{\vec{1}\}$, formado pela identidade de G. Diz-se que um subgrupo é um *subgrupo apropriado* se for diferente desses dois.

Exemplo 1.3.1. Utilizando da notação multiplicativa, define-se o *subgrupo cíclico* H gerados por um elemento arbitrário x de um grupo G como o conjunto de todas as potências de x: $H = \{\ldots, x^{-2}, x^{-1}, \vec{1}, x, x^2, \ldots\}$.

Definição 1.3.3. Chama-se *ordem* de um grupo G o número $|G|$ de elementos de G.

Também pode-se definir um subgrupo de um grupo G *gerado por um subconjunto* $U \subset G$. Esse é o menor subgrupo de G que contém U e consiste de todos os elementos de G que podem ser espressos como um produto de uma cadeia de elementos de U e seus inversos.

Exemplo 1.3.2. O *grupo de quaternions* H é o menor subgrupo do conjunto de matrizes 2×2 complexas invertíveis que não é cíclico. Isso consiste nas oito matrizes

$$H = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\},$$

onde

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Os dois elementos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ geram H, e o calculo leva as formulas

$$\mathbf{i}^4 = 1, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2, \quad \mathbf{ji} = \mathbf{i}^3\mathbf{j}.$$

1.4 Homomorfismos

Definição 1.4.1 (Homomorfismo de grupo)**.** Sejam $(G, *)$ e $(G', \cdot)$ dois grupos. Um *homomorfismo* $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um mapeamento tal que

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \ \forall \ a, b \in G. \qquad \text{(propriedade de homomorfismo)}$$

Quando isso acontece, dizemos que o mapeamento φ *preserva a estrutura algébrica de grupo.*

Exemplo 1.4.1 (Inclusão)**.** Seja H o subgrupo de um grupo G. O homomorfismo $i : H \longrightarrow G$ é dito *inclusão* de H em G, definido por $i(x) = x$.

Proposição 1.4.1. *Um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ mapeia a identidade de G à identidade de G' e transforma as inversas de G nas respectivas inversas em G'. Isto é, $\varphi(\vec{1}) = \vec{1}$ e $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.*

Definição 1.4.2 (Imagem)**.** A *imagem* de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é o subconjunto de G'

$$\text{im } \varphi = \{x \in G' \mid x = \varphi(a), \text{ para algum } a \in G\} = \varphi(G).$$

Proposição 1.4.2. *A imagem de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um subgrupo de G'.*

Definição 1.4.3 (Núcleo)**.** O *núcleo* do homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é o subconjunto de G formado pelos elementos que são mapeados pela identidade em G':

$$\text{nu } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = 1\} = \varphi^{-1}(1).$$

Proposição 1.4.3. *O núcleo de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um subgrupo de G.*

1.5 Isomorfismos

Definição 1.5.1 (Isomorfismo de grupos)**.** Dois grupos $(G, *)$ e $(G', \cdot)$ são ditos *isomórficos* se possuírem um homomorfismo bijetivo entre si, isto é, há um mapeamento *bijetivo* $\varphi : G \longrightarrow G'$ (chamado *relação de isomorfismo*) que respeita a propriedade de homomorfismo:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \text{ para todo } a, b \in G.$$

Observação 1.5.1. Usa-se a notação $G \approx G'$ para dizer que G é isomorfo a G'.

Definição 1.5.2 (Classe de isomorfismo)**.** Diz-se que o conjunto de grupos isomórfos a um dado grupo G é a *classe de isomorfismo de G.*

Proposição 1.5.1. *Qualquer dois grupos em uma mesma classe de isomorfismo também são isomorfos entre si.*

Definição 1.5.3 (Automorfismo)**.** Quando uma relação de isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$ é definida de um grupo G para ele mesmo, chamamos esse tipo de isomorfismo de *automorfismo* de G.

Exemplo 1.5.1 (Conjugação)**.** Seja $b \in G$ um elemento fixo. Então, a *conjugação de G por b* é o mapeamento φ de G para ele mesmo definido por

$$\varphi_b(x) = bxb^{-1}.$$

Esse é um automorfismo porque:

- é compatível com a propriedade de homomorfismo:

$$\varphi_b(xy) = bxyb^{-1} = bx\vec{1}yb^{-1} = bxb^{-1}byb^{-1} = \varphi_b(x)\varphi_b(y);$$

- é um mapa bijetivo visto que existe a função inversa $\varphi_b^{-1}(x) = b^{-1}xb = \varphi_{b^{-1}}(x)$ (isto é, a conjugação por b^{-1}) que, de forma análoga, também é compatível com a propriedade de homomorfismo.

Observação 1.5.2 (Abelianos)**.** Se o grupo é abeliano possui a conjugação trivial: $bab^{-1} = abb^{-1} = a$ (mapa identidade). Porém, qualquer grupo não comutativo tem alguma conjugação não trivial, isto é, existe ao menos um b no grupo tal que $ba \neq ab$ para algum a, portanto, possui pelo menos um automorfismo não trivial: a conjugação do grupo por b.

Definição 1.5.4 (Conjugado)**.** O elemento bab^{-1} é chamado *conjugado de a por b*. Dois elementos $a, a' \in G$ são ditos *conjugados* se existe $b \in G$ tal que $a' = bab^{-1}$.

Observação 1.5.3. O conjugado tem uma interpretação muito útil: Se escrevermos bab^{-1} como a', então

$$ba = a'b.$$

Ou seja, pode-se pensar na conjugação como a mudança em a que resulta de mover b de um lado para o outro na equação.

Proposição 1.5.2. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Se $a \in \operatorname{nu} \varphi$ e b é qualquer elemento do grupo G, então o conjugado $bab^{-1} \in \operatorname{nu} \varphi$.*

Definição 1.5.5 (Subgrupo normal)**.** Um subgrupo N de um grupo G é chamado *subgrupo normal* (escreve-se $N \trianglelefteq G$) se para cada $a \in N$ e $b \in G$, o conjugado $bab^{-1} \in N$.

Observação 1.5.4. Fica claro que o núcleo de um homomorfismo é um subgrupo normal. Além disso, todo subgrupo de um grupo abeliano também é um subgrupo normal, porém, isso não é necessariamente verdade em subgrupos de grupos não abelianos (veja Observação 1.5.2).

Definição 1.5.6 (Centro de um grupo)**.** O *centro* $Z(G)$ de um grupo G é o conjunto de elementos que comutam com todo elemento de G:

$$Z(G) = \{z \in G \mid zx = xz \text{ para todo } x \in G\}.$$

Proposição 1.5.3. *O centro de todo grupo é um subgrupo normal do grupo.*

1.6 Grupos de Permutação

Definição 1.6.1 (Permutação de um conjunto)**.** Uma permutação de um conjunto A é uma função bijetiva $\varphi : A \longrightarrow A$ do conjunto para ele mesmo.

Proposição 1.6.1 (Multiplicação de permutações)**.** *Seja A um conjunto onde duas permutações τ, σ são dadas. A composição de funções $\tau \circ \sigma$ (chamada* multiplicação de permutações*) é uma lei de composição sobre A.*

Proposição 1.6.2. *Sejam A um conjunto não vazio, S_A o conjunto de todas as permutações de A e $\circ$ uma multiplicação de permutações sobre A. Então, $(S_A, \circ)$ é um grupo.*

Definição 1.6.2 (Grupo simétrico sobre n símbolos)**.** Seja A o conjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$. O grupo de todas as permutações de A é um *grupo simétrico sobre os n símbolos* $1, 2, \ldots, n$ e é representado por S_n.

Observação 1.6.1. É importante perceber que S_n possui $n!$ elementos, isso é, a quantidade de toda combinação de n elementos.

Exemplo 1.6.1 (Grupos diedrais)**.** O grupo S_3 de $3! = 6$ elementos forma um grupo de simetrias de um triangulo equilátero com vértices 1, 2 e 3. As 6 permutações que formam esse grupo são as 3 rotações e os 3 espelhamentos possíveis sobre os vértices do triangulo. Também chamamos S_3 de D_3, pois D_3 forma o terceiro *grupo diedral.* O n-ésimo grupo diedral D_n é o grupo de simetrias de um polígono regular de n vértices.

Definição 1.6.3 (Restrição da imagem de uma função)**.** Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma função e H um subconjunto de A. A *imagem de H sob f* é $\{f(h) \mid h \in H\}$ e é representada por $f|_H$.

Lema 1.6.1. *Sejam G e G' grupos e $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo injetivo. Então, $\varphi|_G$ é um subgrupo de G' e φ provê um isomorfismo de G com $\varphi|_G$.*

Teorema 1.6.1 (Teorema de Cayley)**.** *Todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações.*

1.7 Relações de Equivalência e Partições

Definição 1.7.1 (Partições)**.** Seja S um conjunto. Uma *particão P* de S é uma subdivisão de S em subconjuntos não vazios e não sobrepostos, isto é, uma união de conjuntos disjuntos.

Exemplo 1.7.1. Pode-se particionar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ na união de disjuntos $P \cup I$, onde $P = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é par}\}$ e $I = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é impar}\}$.

Definição 1.7.2 (Relações de equivalência)**.** Uma *relação de equivalência* sobre um conjunto S é uma relação que se mantém sobre um subconjunto de elementos de S. Escreve-se $a \sim b$ para representar a equivalência de $a, b \in S$, que precisa respeitar as seguintes propriedades:

1. *(Transitiva).* Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$;

2. *(Simétrica).* Se $a \sim b$, então $b \sim a$;

3. *(Reflexiva).* $a \sim a$.

Observação 1.7.1. A noção de partição em S e a relação de equivalência em S são lógicamente equivalentes: Dada uma partição P sobre S, pode-se definir uma relação de equivalência R tal que, se a e b estão no mesmo subconjunto partição, então $a \sim b$ e, dada uma relação de equivalência R, podemos definir uma partição P tal que o subconjunto que contêm a é o conjunto de todos os elementos b onde $a \sim b$. Esse subconjunto é chamado de *classe de equivalência de a*

$$C_a = \{b \in S \mid a \sim b\}$$

e S é particionado em classes de equivalência.

Proposição 1.7.1. *Sejam C_a e C_b duas classes de equivalência do conjunto S. Se existe d tal que $d \in C_a$ e $d \in C_b$, então $C_a = C_b$.*

Observação 1.7.2. Seja um conjunto S. Suponha que exista uma relação de equivalência ou uma partição sobre S. Então, pode-se construir um novo conjunto $\bar{S}$ formado pelas classes de equivalência ou os subconjuntos partições de S. Essa construção induz uma notação muito útil: para $a \in S$, a classe de equivalência de a ou o subconjunto partição que contém a serão denotados como o elemento $\bar{a} \in \bar{S}$. Desta forma, a notação $\bar{a} = \bar{b}$ significa que $a \sim b$ e chamamos $a, b \in S$ de *representantes* das respectivas classes de equivalência $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{S}$.

Definição 1.7.3. Seja um mapeamento $\varphi : S \longrightarrow T$. Chama-se de *relação de equivalência determinada por φ* a relação dada por $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \sim b$. Além disso, para um elemento $t \in T$, o subconjunto de $\varphi^{-1}(t) = \{s \in S \mid \varphi(s) = t\}$ é dito *imagem inversa de t por φ*.

Proposição 1.7.2. *Seja um mapeamento $\varphi : S \longrightarrow T$ e $t \in T$ um elemento qualquer de T. Se a imagem inversa $\varphi^{-1}(t)$ é não vazia, então $t \in \text{im}\ \varphi$ e $\varphi^{-1}(t)$ forma uma classe de equivalência $\bar{\varphi} \in \bar{S}$ através da relação determinada por φ.*

Definição 1.7.4 (Congruência)**.** Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. A relação de equivalência definida por φ é usualmente denotada por $\equiv$ ao invés de $\sim$ e a chamamos de *congruência*:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \;\Rightarrow\; a \equiv b, \text{ para } a, b \in G.$$

Proposição 1.7.3. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo e $a, b \in G$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- $\varphi(a) = \varphi(b)$
- *$b = an$, para algum $n \in nu\ \varphi$*
- $a^{-1}b \in nu\ \varphi$.

Definição 1.7.5 (Coclasse em relação ao núcleo)**.** Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo, $a \in G$ e $n \in \text{nu}\ \varphi$. O conjunto

$$a \text{ nu } \varphi = \{g \in G \mid g = an, \text{ para algum } n \in \text{nu } \varphi\}$$

é dito *coclasse de nu φ em G*.

Observação 1.7.3. Pode-se particionar o grupo G em *classes de congruência*, formadas pelas coclasses a nu φ. Estas são imagens inversas do mapeamento φ.

Proposição 1.7.4. *O homomorfismo de grupo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é injetivo se, e somente se, seu núcleo é o subgrupo trivial $\{1\}$.*

Observação 1.7.4. Esse resultado da uma forma de verificar se um homomorfismo φ é também um isomorfismo: Se nu $\varphi = \{1\}$ e im $\varphi = G'$, então φ é, pelos respectivos motivos, injetiva e sobrejetiva. Então é um isomorfismo.

1.8 Orbitas, ciclos e grupos alternados

Definição 1.8.1 (Órbita)**.** Seja σ uma permutação de um conjunto A. Chamamos de *órbitas de σ* a classe de equivalência em A determinada pela relação de equivalência $\sim$:

$$\text{para } a, b \in A,\ a \sim b \iff b = \sigma^n(a), \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}.$$

Observação 1.8.1. A relação apresentada na Definição 1.8.1 é, de fato, uma relação de equivalência. Como segue:

- é reflexiva, já que $a = \sigma^0(a) \implies a \sim a$;
- é simétrica pois, se $a \sim b \implies \exists\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = \sigma^n(a)$, então $a = \sigma^{-n}(b)$. Como $-n \in \mathbb{Z}$, então $b \sim a$;
- é transitiva, visto que $a \sim b \implies b = \sigma^n(a)$ e $b \sim c \implies c = \sigma^m(b)$, para algum $n, m \in \mathbb{Z}$, então $c = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{m+n}(a) \implies a \sim c$.

Exemplo 1.8.1 (Órbita trivial)**.** Já que a permutação identidade i de A leva cada elemento de A para a mesma posição, as órbitas de i são os subconjuntos de apenas um elemento de A.

Definição 1.8.2 (Ciclo)**.** Uma permutação $\sigma \in S_n$ é um *ciclo* se possuir no máximo uma órbita contendo mais que um elemento. O *comprimento* de um ciclo é o número de elementos de sua maior órbita.

Exemplo 1.8.2. Seja a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Como a órbita $(1, 3, 6)$ é a única que contém mais de um elemento, essa permutação sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é um ciclo de comprimento 3.

Observação 1.8.2 (Notação de ciclos)**.** Podemos representar um ciclo com a notação de uma única linha, da forma

$$\mu = (1, 3, 6),$$

indicando apenas os elementos da maior órbita do ciclo. Perceba que as demais órbitas não precisam ser representadas pois serão os índices fixos da permutação.

Exemplo 1.8.3 (Produto de ciclos)**.** Pode-se construir uma permutação como um multiplicação de ciclos (veja a definição 1.6.1). Por exemplo,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,6)(2,8)(4,7,5).$$

Proposição 1.8.1. *Toda permutação σ de um conjunto finito é um produto de ciclos disjuntos.*

Definição 1.8.3 (Transposição)**.** Um ciclo de comprimento 2 é uma transposição.

Corolário 1.8.1. *Qualquer permutação de um conjunto finito de pelo menos dois elementos é um produto de transposições.*

Definição 1.8.4 (Permutações pares e impares)**.** Uma permutação de um conjunto finito é *par* ou *impar* se pode ser expressa, respectivamente, por um número par ou impar de produtos de permutações.

Proposição 1.8.2. *Uma permutação em S_n pode ser expressa como um produto de um número impar de transposições se e somente se não puder ser expressa como um número par de transposições e vice-versa.*

Proposição 1.8.3. *Seja o grupo simétrico S_n com $n \geq 2$. Então, a coleção de todas as permutações impares de $\{1, 2, \ldots, n\}$ forma um subgrupo de S_n de ordem $\frac{n!}{2}$.*

Definição 1.8.5 (Grupo alternado)**.** O subgrupo de S_n formado pelas permutações impares de n símbolos é chamado *grupo alternado A_n*.

Observação 1.8.3. Os grupos S_n e A_n são muito importantes. O teorema de Cayley mostra que todo grupo finito G é estruturalmente idêntico a algum subgrupo de S_n, para $n = |G|$. Pode-se mostrar que não há formulas envolvendo apenas radicais para solucionar uma equação polinomial de grau $n \geq 5$. Por mais que isso não seja óbvio, esse fato se deve, na verdade, a estrutura de A_n.

1.9 Coclasses

Definimos coclasse somente em relação ao núcleo de um homomorfismo mas, na verdade, pode-se definir uma coclasse para qualquer subgrupo H de um grupo G.

Definição 1.9.1 (Coclasse a esquerda)**.** Seja um subgrupo H de um grupo G. O subconjunto da forma

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

é dito *coclasse a esquerda de H em G.*

Proposição 1.9.1. *A coclasse é uma classe de equivalência para a relação de congruência*

$$b = ah \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Observação 1.9.1. Daí segue que, como classes de equivalência particionam um grupo, coclasses a esquerda de um subgrupo particionam o grupo.

Definição 1.9.2 (Índice de um subgrupo)**.** O número de coclasses a esquerda de um subgrupo H em um grupo G chama-se *índice de H em G* e é denotado como $[G:H]$.

Observação 1.9.2. Como há uma bijeção do subgrupo H para a coclasse aH, a cardinalidade de aH tem de ser a mesma de H. Isto é, as coclasses de H particionam G em partes de mesma ordem.

Proposição 1.9.2. *Seja aH a coclasse do subgrupo H no grupo G. Então, a ordem $|G|$ do grupo G é dada por*

$$|G| = |H|[G:H].$$

Proposição 1.9.3 (Teorema de Lagrange)**.** *Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G. A ordem de H divide a ordem de G.*

Definição 1.9.3 (Ordem de um elemento)**.** Seja G um grupo. A *ordem de um elemento $a \in G$* é a ordem do grupo cíclico gerado por a.

Proposição 1.9.4. *Seja um grupo G com p elementos tal que p é primo e $a \in G$ diferente da identidade. Então G é o grupo cíclico $\{1, a, \ldots, a^{p-1}\}$ gerado por a.*

Observação 1.9.3. Também podemos obter uma expressão para calcular a ordem de um grupo de homomorfismo. Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Como as coclasses a esquerda do núcleo de φ são as imagens inversas φ^{-1}, elas estão em uma correspondência biunívoca com a imagem. Daí segue que

$$[G : \text{ nu } \varphi\ ] = |\text{ im } \varphi\ |.$$

Proposição 1.9.5. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo onde G e G' são finitos. Então*

$$|G| = |\textit{ nu } \varphi\ | \cdot |\textit{ im } \varphi\ |.$$

Definição 1.9.4 (Coclasses a direita)**.** Os conjuntos da forma

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

chamam-se *coclasses a direita de um subgrupo H*. Esses são classes de equivalência para a relação de congruência a direita

$$b = ha \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Proposição 1.9.6. *Seja um subgrupo H de um grupo G. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *H é subgrupo normal,*
- *$aH = Ha$ para todo $a \in G$.*

1.10 Restrição de um homomorfismo para um subgrupo

Observação 1.10.1. O objetivo dessa seção é apresentar ferramentas para analisar um subgrupo H do grupo G a fim de garantir propriedades do grupo G. No geral, os subgrupos são mais específicos e menos complexos de se trabalhar.

Proposição 1.10.1. *Sejam K e H dois subgrupos do grupo G tal que a interseção $K \cap H$ é um subgrupo de H. Se K é um subgrupo normal de G, então $K \cap H$ é um subgrupo normal de H.*

Exemplo 1.10.1. Com esse resultado, se G é finito pode-se utilizar o Teorema de Lagrange para obter informações sobre a interseção dos dois subgrupos: a interseção divide $|H|$ e $|K|$. Se $|H|$ e $|K|$ não tem o mesmo fator de divisão, então $K \cap H = \{1\}$.

Definição 1.10.1 (Restrição de um homomorfismo para um subgrupo)**.** Sejam o homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ e H um subgrupo de G. Uma *restrição de φ para o subgrupo H* é o homomorfismo $\varphi|_H : H \longrightarrow G'$ definido como

$$\varphi|_H(h) = \varphi(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Proposição 1.10.2. *Sejam o homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ e H um subgrupo de G. O núcleo de uma restrição $\varphi|_H$ é a interseção do núcleo de φ e H.*

Proposição 1.10.3. *Sejam $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo, H' um subgrupo de G' e $\varphi^{-1}(H') = \{x \in G \mid \varphi(x) \in H'\}$ a imagem inversa de H'. Então*

- *$\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo de G.*
- *Se H' é um subgrupo normal de G', então $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo normal de G.*
- *$\varphi^{-1}(H')$ contém o núcleo de φ*
- *A restrição de φ para $\varphi^{-1}(H')$ define um homomorfismo $\varphi^{-1}(H') \longrightarrow H'$, de forma que o núcleo desse homomorfismo é o núcleo de φ.*

1.11 Produto de Grupos

Definição 1.11.1 (Produto de grupos)**.** Seja G, G' dois grupos. O *produto* $G \times G'$ é um grupo formado pelo produto das componentes dos grupos G e G', isso é, pela regra

$$(a, a'), (b, b') \rightsquigarrow (ab, a'b'),$$

onde $a, b \in G$ e $a', b' \in G'$. O par $(1, 1)$ é uma identidade e $(a, a')^{-1} = (a^{-1}, a'^{-1})$. A propriedade associativa é preservada em $G \times G'$ pois também é em G e G'.

Proposição 1.11.1. *A ordem de $G \times G'$ é o produto das ordens de G e G'.*

Observação 1.11.1 (Projeções)**.** O produto de grupos é composto pelos homomorfismos:

$$i : G \longrightarrow G \times G', \quad i' : G' \longrightarrow G \times G', \quad p : G \times G' \longrightarrow G, \quad p' : G \times G' \longrightarrow G',$$

definidos como

$$i(x) = (x, 1), \quad i'(x') = (1, x'), \quad p(x, x') = x, \quad , p'(x, x') = x'.$$

Os mapeamentos i, i' são injetivos, já os mapeamentos p, p' são sobrejetivos, onde nu $p = 1 \times G'$ e nu $p' = G \times 1$. Esses mapeamentos são chamados de *projeções*. Desde que são núcleos, $G \times 1$ e $1 \times G'$ são subgrupos normais de $G \times G'$.

Proposição 1.11.2 (Propriedades de Mapeamento dos Produtos)**.** *Seja H um grupo qualquer. O homomorfismo $\Phi : H \longrightarrow G \times G'$ tem correspondência biunívoca com o par (φ, φ') de homomorfismos*

$$\varphi : H \longrightarrow G, \quad \varphi' : H \longrightarrow G'.$$

O núcleo de Φ é a interseção (nu ϕ) $\cap$ (nu ϕ').

Observação 1.11.2. É extremamente desejável encontrar uma relação isomorfa entre um grupo G e um produto de outros dois grupos $H \times H'$. Quando isso acontece, e infelizmente não são muitas as vezes, trabalhar com os grupos H e H' costumam ser mais simples que G.

Proposição 1.11.3. *Sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ não divisíveis entre si. Um grupo cíclico de ordem rs é isomorfo ao produto dos grupos cíclicos de ordem r e s.*

Observação 1.11.3. Em contrapartida, um grupo cíclico de ordem par 4, por exemplo, não é isomorfo ao produto de dois grupos cíclicos de ordem 2. Também não podemos afirmar nada com base no resultado anterior sobre grupos não cíclicos.

Definição 1.11.2 (Conjunto de produtos)**.** Sejam dois subgrupos A, B de um grupo G. Chamamos o *conjunto de produtos de de elementos de A e B* por

$$AB = \{x \in G \mid x = ab \text{ para algum } a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Proposição 1.11.4. *Sejam H e K os subgrupos de um grupo G.*

- *Se $H \cap K = \{1\}$, o mapeamento de produto $p : H \times K \longrightarrow G$ definido por $p(h, k) = hk$ é injetivo e sua imagem é o subconjunto HK;*
- *Se um dos subgrupos H ou K é um subgrupo normal de G, então os conjuntos de produtos HK e KH são iguais e HK é subgrupo de G;*
- *Se ambos H e K são subgrupos normais, $H \cap K = \{1\}$ e $HK = G$, então G é isomorfo ao grupo de produto $H \times K$.*

1.12 Aritmética Modular

Definição 1.12.1 (Congruente modulo n)**.** Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que dois inteiros a, b são *congruentes modulo* n, e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n},$$

se n divide $b - a$, ou se $b = a + nk$ para algum inteiro k. Chamamos as classes de equivalência definidas por essa relação de *classes de equivalência módulo* n, ou *classes de resíduo módulo* n.

Exemplo 1.12.1. A classe de congruência de 0 é o subgrupo $\bar{0}$ de todos os múltiplos de n

$$\bar{0} = n\mathbb{Z} = \{\dots, -n, 0, n, 2n, \dots\}.$$

Proposição 1.12.1. *Há* n *classes de congruência módulo* n *(denotamos esse conjunto por* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*), isto é, o índice* $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}]$ *é* n*. São elas*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Definição 1.12.2 (Soma e produto)**.** Seja $\bar{a}$ e $\bar{b}$ as classes de congruência representadas pelos inteiros a e b. Define-se a *soma* como a classe de congruência de $a + b$ e o *produto* pela classe de congruência ab, isto é,

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \bar{a}\bar{b} = \overline{ab}.$$

Proposição 1.12.2. *Se* $a' \equiv b' \pmod{n}$ *e* $b' \equiv b \pmod{n}$*, então* $a' + b' \equiv a + b \pmod{n}$ *e* $a'b' \equiv ab \pmod{n}$*.*

Observação 1.12.1. Além disso, a soma e produto também continuam respeitando as propriedades associativas, comutativas e distributivas, desde que o mesmo se mantém para soma e multiplicação de inteiros.

Exemplo 1.12.2. Seja $n = 13$, então

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{12}\}.$$

Com isso,

$$(\bar{7} + \bar{9})(1\bar{1} + \bar{6}) = \bar{3} \cdot \bar{4} = 1\bar{2}.$$

1.13 Estrutura de grupos abelianos finitamente gerados

Teorema 1.13.1 (Teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados)**.** *Todo grupo abeliano finitamente gerado* G *é isomorfo a um produto de grupos cíclicos na forma*

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

onde os p_i *são primos, não necessariamente distintos, e os* r_i *são inteiros positivos. O produto é único, exceto por possíveis rearranjos dos fatores; isso é, o número (chamado* número Betti de G*) de fatores* $\mathbb{Z}$ *é único e as potências de primos* $(p_i)^{r_i}$ *são únicas.*

Exemplo 1.13.1. Queremos encontrar todos os grupos abelianos de ordem 360, *a menos de isomorfismos*. Dizer *a menos de isomorfismo* significa que qualquer grupo abeliano de ordem 360 deve ser estruturalmente idêntico — isto é, isomorfo — a um

Solução. Já qe nossos grupos são da ordem finita 360, não aparecerão $\mathbb{Z}$ no produto. Primeiro, vamos expressar 360 como um produto de potências de primos: $360 = 2^3 3^2 5$. Então, pelo Teorema 1.13.1, temos as seguintes possibilidades

1. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
2. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
3. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
4. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$
5. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
6. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

Então, esses são os seis diferentes grupos abelianos (a menos de isomorfismos) de ordem 360. △

Definição 1.13.1 (Grupo redutível e irredutível)**.** Um grupo é dito *redutível* se ele é isomorfo a um produto direto de dois subgrupos não triviais. Do contrário, é dito *irredutível.*

Proposição 1.13.1. *Os grupos abelianos finitos irredutíveis são exatamente os grupos cíclicos que possuem a ordem de uma potência prima.*

Proposição 1.13.2. *Se m divide a ordem de um grupo abeliano finito G, então G tem um subgrupo de ordem m.*

Proposição 1.13.3. *Se m é um* quadrado inteiro livre*, isto é, m não é divisível por nenhum quadrado de primo, então todo grupo abeliano de ordem m é cíclico.*

1.14 Grupos de Quociente

Proposição 1.14.1. *Seja N um subgrupo normal de um grupo G. Então, o produto de duas coclasses aN, bN também é uma coclasse*

$$(aN)(bN) = abN.$$

Definição 1.14.1 (Produto de coclases)**.** Sejam as coclasses C_1, C_2 e os elementos $a \in C_1$ e $b \in C_2$, então $C_1 = aN$ e $C_2 = bN$. Chamamos de *produto das coclasses C_1 e C_2* a coclasse $C_1C_2 = abN$, isto é, a coclasse que contém ab.

Observação 1.14.1 (Notação para conjunto de coclasses)**.** É conveniente denotar o *conjunto de coclasses de um subconjunto normal N de um grupo G* pela simbologia

$$G/N = \text{conjunto de coclasses de } N \text{ em } G.$$

Também pode-se usar a notação em barra $G/N = \bar{G}$ e $aN = \bar{a}$, tomando o cuidado para diferenciar que $\bar{a}$ denota a coclasse que contém a.

Proposição 1.14.2. *Seja o mapeamento* $\pi : G \longrightarrow \bar{G} = G/N$, *da forma* $a \rightsquigarrow \bar{a} = aN$, *isto é,* $\bar{G}$ *é um grupo e o mapeamento* π *é um homomorfismo com núcleo* N. *Então a ordem de* G/N *é o índice* $[G : N]$.

Proposição 1.14.3. *Todo subgrupo normal de um grupo* G *é o núcleo de um homomorfismo.*

Proposição 1.14.4. *Sejam* G *um grupo e* S *um conjunto qualquer com uma lei de composição. Seja também* $\varphi : G \longrightarrow S$ *um mapeamento sobrejetivo tal que* $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ *para todo* a, $b \in G$. *Então* S *é um grupo.*

Proposição (Primeiro teorema do isomorfismo): Sejam $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo de grupo sobrejetivo e N o núcleo de φ. Então G/N é isomórfico a G' pelo mapeamento $\bar{\varphi}$ que transporta a coclasse $\bar{a} = aN$ para $\varphi(a)$:

$$\bar{\varphi}(\bar{a}) = \varphi(a).$$

Esse é o método fundamental para identificar grupos de quocientes.

Referências Bibliográficas