

Álgebra: notas de estudo

Guilherme Philippi

19 de março de 2021

Sumário

1	Álgebra Abstrata	2
1.1	Relações entre conjuntos	2
1.2	Lei de composição	3
1.3	Grupos	4
1.4	Subgrupos	4
1.5	Homomorfismos	5
1.6	Isomorfismos	6
1.7	Grupos de Permutação	7
1.8	Relações de Equivalência e Partições	8
1.9	Orbitas, ciclos e grupos alternados	10
1.10	Classe lateral	11
1.11	Restrição de um homomorfismo para um subgrupo	12
1.12	Produto de Grupos	13
1.13	Aritmética Modular	14
1.14	Estrutura de grupos abelianos finitamente gerados	15
1.15	Grupos Quociente	16
1.16	Anéis	17
1.17	Homomorfismos de anéis	19
1.18	Corpos	21
1.19	Espaço Vetorial	21
1.20	Álgebra	22
2	Álgebras de Clifford	23
	Referências Bibliográficas	23

Capítulo 1

Álgebra Abstrata

1.1 Relações entre conjuntos

Definição 1.1.1 (Produto cartesiano). Sejam A e B conjuntos. O conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

é o *produto cartesiano* de A e B .

Exemplo 1.1.1. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = 3, 4$, então

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Definição 1.1.2 (Relação). Uma *relação* entre dois conjuntos A e B é um subconjunto $\mathcal{R} \subset A \times B$. Lê-se $(a, b) \in \mathcal{R}$ como “ a está relacionado com b ” e escreve-se $a\mathcal{R}b$.

Exemplo 1.1.2 (Relação de igualdade). A relação $=$, chamada *relação de igualdade*, é definida sobre um conjunto S por

$$= \text{ é o subconjunto } \{(x, x) \mid x \in S\} \subset S \times S.$$

Observação 1.1.1. Sempre que uma relação for definida entre um conjunto S e ele mesmo, como no exemplo 1.1.2, diremos que esta é uma relação *sobre* S .

Definição 1.1.3 (Função). Uma *função* φ que mapeia X em Y é uma relação entre X e Y com a propriedade de que cada $x \in X$ só irá aparecer uma única vez, e exatamente uma, em um par ordenado $(x, y) \in \varphi$. Também chamamos φ de *mapa* ou *mapeamento* de X em Y . Escrevemos $\varphi : X \longrightarrow Y$ e expressaremos $(x, y) \in \varphi$ por $\varphi(x) = y$. O *domínio* de φ é o conjunto X e o conjunto Y é dito *contradomínio* de φ . Chama-se de *alcance* de φ o conjunto $\varphi[X] = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$.

Definição 1.1.4 (Função injetiva e sobrejetiva). Uma função $\varphi : X \longrightarrow Y$ é *injetiva* se $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \iff x_1 = x_2$. Também, φ é dita *sobrejetiva* se o alcance de φ é Y . Se uma função é injetiva e sobrejetiva, então dizemos que a função é *bijetiva*.

1.2 Lei de composição

Definição 1.2.1 (Lei de composição). Uma *lei de composição* sobre um conjunto S é uma função (ou, uma operação binária) $*$: $S \times S \longrightarrow S$.

Observação 1.2.1 (Notação de operação). Usaremos a notação $*(a, b) = a * b$, para simplificar a escrita de propriedades. Também, quando não houver ambiguidade, suprimiremos o símbolo da lei, fazendo $a * b = ab$.

Definição 1.2.2. Para $a, b, c \in S$, uma lei de composição $*$ é dita

- *Associativa*, se $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- *Comutativa*, se $a * b = b * a$.

Proposição 1.2.1. *Seja uma lei associativa dada sobre o conjunto S . Há uma única forma de definir, para todo inteiro n , um produto de n elementos $a_1, \dots, a_n \in S$ (diremos $[a_1 \cdots a_n]$) com as seguintes propriedades:*

1. *o produto $[a_1]$ de um elemento é o próprio elemento;*
2. *o produto $[a_1 a_2]$ de dois elementos é dado pela lei de composição;*
3. *para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, $[a_1 \cdots a_n] = [a_1 \cdots a_i][a_{i+1} \cdots a_n]$.*

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita por indução em n . □

Definição 1.2.3. Dizemos que $e \in S$ é *identidade* para uma lei de composição se $ea = ae = a$ para todo $a \in S$.

Proposição 1.2.2. *O elemento identidade é único.*

Demonstração. Se e, e' são identidades, já que e é identidade, então $ee' = e'$ e, como e' é uma identidade, $ee' = e$. Logo $e = e'$, isto é, a identidade é única. □

Observação 1.2.2. Usaremos $\vec{1}$ para representar a identidade multiplicativa e $\vec{0}$ para denotar a aditiva.

Definição 1.2.4 (Elemento inverso). Seja uma lei de composição que possua uma identidade. Um elemento $a \in S$ é chamado *invertível* se há um outro elemento $b \in S$ tal que $ab = ba = 1$. Desde que b exista, ela é única e a denotaremos por a^{-1} e a chamaremos *inversa de a* .

Proposição 1.2.3. *Se $a, b \in S$ possuem inversa, então a composição $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.*

Observação 1.2.3 (Potências). Usaremos as seguintes notações:

- $a^n = a^{n-1}a$ é a composição de $a \cdots a$ n vezes;
- a^{-n} é a inversa de a^n ;
- $a^0 = \vec{1}$.

Com isso, tem-se que $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$. (Isso não induz uma notação de fração $\frac{b}{a}$ a menos que seja uma lei comutativa, visto que ba^{-1} pode ser diferente de $a^{-1}b$). Para falar de uma lei de composição aditiva, usaremos $-a$ no lugar de a^{-1} e na no lugar de a^n .

1.3 Grupos

Definição 1.3.1 (Grupo). Um *grupo* $(G, *)$ é um conjunto G onde uma lei de composição $*$ é dada sobre G tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. (*Associatividade*). Para todo $a, b, c \in G$, tem-se

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

2. (*Existência da identidade*). Existe um elemento $\bar{1} \in G$ tal que, para todo $a \in G$,

$$\bar{1} * a = a * \bar{1} = a;$$

3. (*Existência do inverso*). Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que

$$a * a' = a' * a = \bar{1}.$$

Observação 1.3.1. É comum abusar da notação e chamar um grupo $(G, *)$ e o conjunto de seus elementos G pelo mesmo símbolo, omitindo a lei de composição na falta de ambiguidade.

Definição 1.3.2 (Grupo abeliano). Um *grupo abeliano* é um grupo com uma lei de composição comutativa. Costuma-se usar a notação aditiva para grupos abelianos.

Proposição 1.3.1 (Lei do cancelamento). *Seja a, b, c elementos de um grupo G . Se $ab = ac$, então $b = c$.*

1.4 Subgrupos

Definição 1.4.1 (Subgrupo). Um subconjunto H de um grupo G é chamado de *subgrupo* de G (e escreve-se $H \leq G$) se possuir as seguintes propriedades:

1. (*Fechado*). Se $a, b \in H$, então $ab \in H$;
2. (*Identidade*). $1 \in H$;
3. (*Inversível*). Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Observação 1.4.1 (Lei de composição induzida). Veja que a propriedade 1 necessita de uma lei de composição. Usamos a lei de composição de G para definir uma lei de composição de H , chamada *lei de composição induzida*. Essas propriedades garantem que H é um grupo com respeito a sua lei induzida.

Definição 1.4.2 (Subgrupo apropriado). Todo grupo G possui dois subgrupos triviais: O subgrupo formado por todos os elementos de G e o subgrupo $\{\bar{1}\}$, formado pela identidade de G . Diz-se que um subgrupo é um *subgrupo apropriado* se for diferente desses dois.

Definição 1.4.3 (Centro de um grupo). O *centro* $Z(G)$ de um grupo G é o conjunto de elementos que comutam com todo elemento de G :

$$Z(G) = \{z \in G \mid zx = xz \text{ para todo } x \in G\}.$$

Exemplo 1.4.1. Utilizando da notação multiplicativa, define-se o *subgrupo cíclico* H gerados por um elemento arbitrário x de um grupo G como o conjunto de todas as potências de x : $H = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, \bar{1}, x, x^2, \dots\}$.

Definição 1.4.4. Chama-se *ordem* de um grupo G o número $|G|$ de elementos de G .

Também pode-se definir um subgrupo de um grupo G *gerado por um subconjunto* $U \subset G$. Esse é o menor subgrupo de G que contém U e consiste de todos os elementos de G que podem ser expressos como um produto de uma cadeia de elementos de U e seus inversos.

Exemplo 1.4.2. O *grupo de quaternions* H é o menor subgrupo do conjunto de matrizes 2×2 complexas invertíveis que não é cíclico. Isso consiste nas oito matrizes

$$H = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\},$$

onde

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Os dois elementos \mathbf{i}, \mathbf{j} geram H , e o cálculo leva as formulas

$$\mathbf{i}^4 = 1, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2, \quad \mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{i}^3\mathbf{j}.$$

1.5 Homomorfismos

Definição 1.5.1 (Homomorfismo de grupo). Sejam $(G, *)$ e (G', \cdot) dois grupos. Um *homomorfismo* $\varphi : G \rightarrow G'$ é um mapeamento tal que

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \forall a, b \in G. \quad (\text{propriedade de homomorfismo})$$

Exemplo 1.5.1 (Inclusão). Seja H o subgrupo de um grupo G . O homomorfismo $i : H \rightarrow G$ é dito *inclusão* de H em G , definido por $i(x) = x$.

Proposição 1.5.1. Um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow G'$ mapeia a identidade de G à identidade de G' e transforma as inversas de G nas respectivas inversas em G' . Isto é, as seguintes propriedades valem

- $\varphi(\bar{1}) = \bar{1}$ e
- $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Observação 1.5.1. Por conta da Proposição 1.5.1, dizemos que o mapeamento φ *preserva a estrutura algébrica de grupo*.

Exemplo 1.5.2. Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupo sobrejetivo de G em G' . Queremos mostrar que, se G é abeliano, então G' deve ser abeliano. Isto é, seja $a', b' \in G'$, queremos mostrar que $a'b' = b'a'$. Como φ é sobrejetiva, existe $a, b \in G$ tal que $\varphi(a) = a'$ e $\varphi(b) = b'$. Pela propriedade de homomorfismo, $a'b' = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ e, se G é abeliano, $\varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = b'a'$. Segue que G' deve ser abeliano.

Definição 1.5.2 (Imagem). A *imagem* de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é o subconjunto de G'

$$\text{im } \varphi = \{x \in G' \mid x = \varphi(a), \text{ para algum } a \in G\} = \varphi(G).$$

Proposição 1.5.2. A *imagem* de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um subgrupo de G' .

Definição 1.5.3 (Núcleo). O *núcleo* do homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é o subconjunto de G formado pelos elementos que são mapeados pela identidade em G' :

$$\text{nu } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = \vec{1}\} = \varphi^{-1}(\vec{1}).$$

Proposição 1.5.3. O *núcleo* de um homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ é um subgrupo de G .

1.6 Isomorfismos

Definição 1.6.1 (Isomorfismo de grupos). Dois grupos $(G, *)$ e (G', \cdot) são ditos *isomorfos* se possuírem um homomorfismo bijetivo entre si, isto é, há um mapeamento *bijetivo* $\varphi : G \longrightarrow G'$ (chamado *relação de isomorfismo*) que respeita a propriedade de homomorfismo:

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \text{ para todo } a, b \in G.$$

Observação 1.6.1. Usa-se a notação $G \approx G'$ para dizer que G é isomorfo a G' .

Definição 1.6.2 (Classe de isomorfismo). Diz-se que o conjunto de grupos isomórfos a um dado grupo G é a *classe de isomorfismo* de G .

Proposição 1.6.1. Qualquer dois grupos em uma mesma classe de isomorfismo também são isomorfos entre si.

Definição 1.6.3 (Automorfismo). Quando uma relação de isomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$ é definida de um grupo G para ele mesmo, chamamos esse tipo de isomorfismo de *automorfismo* de G .

Exemplo 1.6.1 (Conjugação). Seja $b \in G$ um elemento fixo. Então, a *conjugação* de G por b (também chamado *automorfismo interno* de G por g) é o mapeamento φ de G para ele mesmo definido por

$$\varphi_b(x) = bxb^{-1}.$$

Esse é um automorfismo porque:

- é compatível com a propriedade de homomorfismo:

$$\varphi_b(xy) = bxyb^{-1} = bx\vec{1}yb^{-1} = bxb^{-1}byb^{-1} = \varphi_b(x)\varphi_b(y);$$

- é um mapa bijetivo visto que existe a função inversa $\varphi_b^{-1}(x) = b^{-1}xb = \varphi_{b^{-1}}(x)$ (isto é, a conjugação por b^{-1}) que, de forma análoga, também é compatível com a propriedade de homomorfismo.

Observação 1.6.2 (Abelianos). Se o grupo é abeliano possui a conjugação trivial: $bab^{-1} = abb^{-1} = a$ (mapa identidade). Porém, qualquer grupo não comutativo tem alguma conjugação não trivial, isto é, existe ao menos um b que não está no centro do grupo, portanto, ao menos o automorfismo não trivial dado pela conjugação do grupo por b existe.

Definição 1.6.4 (Conjugado). O elemento bab^{-1} é chamado *conjugado de a por b* . Dois elementos $a, a' \in G$ são ditos *conjugados* se existe $b \in G$ tal que $a' = bab^{-1}$.

Observação 1.6.3. O conjugado tem uma interpretação muito útil: Se escrevermos bab^{-1} como a' , então

$$ba = a'b.$$

Ou seja, pode-se pensar na conjugação como a mudança em a que resulta de mover b de um lado para o outro na equação.

Proposição 1.6.2. *Seja $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo. Se $a \in \text{nu } \varphi$ e b é qualquer elemento do grupo G , então o conjugado $bab^{-1} \in \text{nu } \varphi$.*

Definição 1.6.5 (Subgrupo normal). Um subgrupo N de um grupo G é chamado *subgrupo normal* (escreve-se $N \trianglelefteq G$) se para cada $a \in N$ e $b \in G$, o conjugado $bab^{-1} \in N$.

Observação 1.6.4. Fica claro que o núcleo de um homomorfismo é um subgrupo normal. Além disso, todo subgrupo de um grupo abeliano também é um subgrupo normal, porém, isso não é necessariamente verdade em subgrupos de grupos não abelianos (veja Observação 1.6.2).

Proposição 1.6.3. *O centro de todo grupo é um subgrupo normal do grupo.*

1.7 Grupos de Permutação

Definição 1.7.1 (Permutação de um conjunto). Uma permutação de um conjunto A é uma função bijetiva $\varphi : A \longrightarrow A$ do conjunto para ele mesmo.

Proposição 1.7.1 (Multiplicação de permutações). *Seja A um conjunto onde duas permutações τ, σ são dadas. A composição de funções $\tau \circ \sigma$ (chamada multiplicação de permutações) é uma lei de composição sobre A .*

Proposição 1.7.2. *Sejam A um conjunto não vazio, S_A o conjunto de todas as permutações de A e \circ uma multiplicação de permutações sobre A . Então, (S_A, \circ) é um grupo.*

Definição 1.7.2 (Grupo simétrico sobre n símbolos). Seja A o conjunto finito $\{1, 2, \dots, n\}$. O grupo de todas as permutações de A é um *grupo simétrico sobre os n símbolos* $1, 2, \dots, n$ e é representado por S_n .

Observação 1.7.1. É importante perceber que S_n possui $n!$ elementos, isso é, a quantidade de toda combinação de n elementos.

Exemplo 1.7.1 (Grupos diedrais). O grupo S_3 de $3! = 6$ elementos forma um grupo de simetrias de um triangulo equilátero com vértices 1, 2 e 3. As 6 permutações que formam esse grupo são as 3 rotações e os 3 espelhamentos possíveis sobre os vértices do triangulo. Também chamamos S_3 de D_3 , pois D_3 forma o terceiro *grupo diedral*. O n -ésimo grupo diedral D_n é o grupo de simetrias de um polígono regular de n vértices.

Definição 1.7.3 (Restrição da imagem de uma função). Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma função e H um subconjunto de A . A *imagem de H por f* é $\{f(h) \mid h \in H\}$ e é representada por $f|_H$.

Lema 1.7.1. Sejam G e G' grupos e $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo injetivo. Então, $\varphi|_G$ é um subgrupo de G' e φ provê um isomorfismo de G com $\varphi|_G$.

Teorema 1.7.1 (Teorema de Cayley). Todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações.

1.8 Relações de Equivalência e Partições

Definição 1.8.1 (Partições). Seja S um conjunto. Uma *partição* P de S é uma subdivisão de S em subconjuntos não vazios e não sobrepostos, isto é, uma união de conjuntos disjuntos.

Exemplo 1.8.1. Pode-se particionar o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} na união de disjuntos $P \cup I$, onde $P = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é par}\}$ e $I = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ é ímpar}\}$.

Definição 1.8.2 (Relações de equivalência). Uma *relação de equivalência* sobre um conjunto S é uma relação que se mantém sobre um subconjunto de elementos de S . Escreve-se $a \sim b$ para representar a equivalência de $a, b \in S$, que precisa respeitar os seguintes axiomas:

1. (*Transitiva*). Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$;
2. (*Simétrica*). Se $a \sim b$, então $b \sim a$;
3. (*Reflexiva*). $a \sim a$.

Observação 1.8.1. A noção de partição em S e a relação de equivalência em S são logicamente equivalentes: Dada uma partição P sobre S , pode-se definir uma relação de equivalência R tal que, se a e b estão no mesmo subconjunto partição, então $a \sim b$ e, dada uma relação de equivalência R , podemos definir uma partição P tal que o subconjunto que contém a é o conjunto de todos os elementos b onde $a \sim b$. Esse subconjunto é chamado de *classe de equivalência de a*

$$C_a = \{b \in S \mid a \sim b\}$$

e S é particionado em classes de equivalência.

Proposição 1.8.1. Sejam C_a e C_b duas classes de equivalência do conjunto S . Se existe d tal que $d \in C_a$ e $d \in C_b$, então $C_a = C_b$.

Observação 1.8.2 (Representante). Seja um conjunto S . Suponha que exista uma relação de equivalência ou uma partição sobre S . Então, pode-se construir um novo conjunto \bar{S} formado pelas classes de equivalência ou os subconjuntos partições de S . Essa construção induz uma notação muito útil: para $a \in S$, a classe de equivalência de a ou o subconjunto partição que contém a serão denotados como o elemento $\bar{a} \in \bar{S}$. Desta forma, a notação $\bar{a} = \bar{b}$ significa que $a \sim b$ e chamamos $a, b \in S$ de *representantes* das respectivas classes de equivalência $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{S}$.

Definição 1.8.3 (Equivalência induzida por aplicação). Seja um mapeamento $\varphi : S \rightarrow T$. Chama-se de *relação de equivalência determinada por φ* a relação dada por $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \sim b$. Além disso, para um elemento $t \in T$, o subconjunto de $\varphi^{-1}(t) = \{s \in S \mid \varphi(s) = t\}$ é dito *imagem inversa de t por φ* .

Proposição 1.8.2. *Seja um mapeamento $\varphi : S \rightarrow T$ e $t \in T$ um elemento qualquer de T . Se a imagem inversa $\varphi^{-1}(t)$ é não vazia, então $t \in \text{im } \varphi$ e $\varphi^{-1}(t)$ forma uma classe de equivalência $\bar{\varphi} \in \bar{S}$ através da relação determinada por φ .*

Definição 1.8.4 (Congruência). Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo. A relação de equivalência definida por φ é usualmente denotada por \equiv ao invés de \sim e a chamamos de *congruência*:

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a \equiv b, \text{ para } a, b \in G.$$

Proposição 1.8.3. *Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo e $a, b \in G$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- $\varphi(a) = \varphi(b)$
- $b = an$, para algum $n \in \text{nu } \varphi$
- $a^{-1}b \in \text{nu } \varphi$.

Definição 1.8.5 (classe lateral em relação ao núcleo). Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo, $a \in G$ e $n \in \text{nu } \varphi$. O conjunto

$$a \text{ nu } \varphi = \{g \in G \mid g = an, \text{ para algum } n \in \text{nu } \varphi\}$$

é dito *classe lateral de $\text{nu } \varphi$ em G* .

Observação 1.8.3. Pode-se particionar o grupo G em *classes de congruência*, formadas pelas classes laterais $a \text{ nu } \varphi$. Estas são imagens inversas do mapeamento φ .

Proposição 1.8.4. *O homomorfismo de grupo $\varphi : G \rightarrow G'$ é injetivo se, e somente se, seu núcleo é o subgrupo trivial $\{\bar{1}\}$.*

Observação 1.8.4. Esse resultado dá uma forma de verificar se um homomorfismo φ é também um isomorfismo: Se $\text{nu } \varphi = \{1\}$ e $\text{im } \varphi = G'$, então φ é, pelos respectivos motivos, injetiva e sobrejetiva. Então é um isomorfismo.

1.9 Órbitas, ciclos e grupos alternados

Definição 1.9.1 (Órbita). Seja σ uma permutação de um conjunto A . Chamamos de *órbitas de σ* a classe de equivalência em A determinada pela relação de equivalência \sim :

$$\text{para } a, b \in A, \quad a \sim b \iff b = \sigma^n(a), \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}.$$

Observação 1.9.1. A relação apresentada na Definição 1.9.1 é, de fato, uma relação de equivalência. Como segue:

- é reflexiva, já que $a = \sigma^0(a) \implies a \sim a$;
- é simétrica pois, se $a \sim b \implies \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = \sigma^n(a)$, então $a = \sigma^{-n}(b)$. Como $-n \in \mathbb{Z}$, então $b \sim a$;
- é transitiva, visto que $a \sim b \implies b = \sigma^n(a)$ e $b \sim c \implies c = \sigma^m(b)$, para algum $n, m \in \mathbb{Z}$, então $c = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{m+n}(a) \implies a \sim c$.

Exemplo 1.9.1 (Órbita trivial). Já que a permutação identidade i de A leva cada elemento de A para a mesma posição, as órbitas de i são os subconjuntos de apenas um elemento de A .

Definição 1.9.2 (Ciclo). Uma permutação $\sigma \in S_n$ é um *ciclo* se possuir no máximo uma órbita contendo mais que um elemento. O *comprimento* de um ciclo é o número de elementos de sua maior órbita.

Exemplo 1.9.2. Seja a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Como a órbita $(1, 3, 6)$ é a única que contém mais de um elemento, essa permutação sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ é um ciclo de comprimento 3.

Observação 1.9.2 (Notação de ciclos). Podemos representar um ciclo com a notação de uma única linha, da forma

$$\mu = (1, 3, 6),$$

indicando apenas os elementos da maior órbita do ciclo. Perceba que as demais órbitas não precisam ser representadas pois serão os índices fixos da permutação.

Exemplo 1.9.3 (Produto de ciclos). Pode-se construir uma permutação como um multiplicação de ciclos (veja a definição 1.7.1). Por exemplo,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1, 3, 6)(2, 8)(4, 7, 5).$$

Proposição 1.9.1. Toda permutação σ de um conjunto finito é um produto de ciclos disjuntos.

Definição 1.9.3 (Transposição). Um ciclo de comprimento 2 é uma transposição.

Corolário 1.9.1. *Qualquer permutação de um conjunto finito de pelo menos dois elementos é um produto de transposições.*

Definição 1.9.4 (Permutações pares e ímpares). Uma permutação de um conjunto finito é *par* ou *ímpar* se pode ser expressa, respectivamente, por um número par ou ímpar de produtos de transposições.

Proposição 1.9.2. *Uma permutação em S_n pode ser expressa como um produto de um número ímpar de transposições se e somente se não puder ser expressa como um número par de transposições e vice-versa.*

Proposição 1.9.3. *Seja o grupo simétrico S_n com $n \geq 2$. Então, a coleção de todas as permutações ímpares de $\{1, 2, \dots, n\}$ forma um subgrupo de S_n de ordem $\frac{n!}{2}$.*

Definição 1.9.5 (Grupo alternado). O subgrupo de S_n formado pelas permutações ímpares de n símbolos é chamado *grupo alternado* A_n .

Observação 1.9.3. Os grupos S_n e A_n são muito importantes. O teorema de Cayley mostra que todo grupo finito G é estruturalmente idêntico a algum subgrupo de S_n , para $n = |G|$. Pode-se mostrar que não há formulas envolvendo apenas radicais para solucionar uma equação polinomial de grau $n \geq 5$. Por mais que isso não seja óbvio, esse fato se deve, na verdade, a estrutura de A_n .

1.10 Classe lateral

Definimos classe lateral somente em relação ao núcleo de um homomorfismo mas, na verdade, pode-se definir uma classe lateral para qualquer subgrupo H de um grupo G .

Definição 1.10.1 (classe lateral a esquerda). Seja um subgrupo H de um grupo G . O subconjunto da forma

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

é dito *classe lateral a esquerda de H em G* .

Proposição 1.10.1. *A classe lateral é uma classe de equivalência para a relação de congruência*

$$b = ah \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Observação 1.10.1. Daí segue que, como classes de equivalência particionam um grupo, classes laterais a esquerda de um subgrupo particionam o grupo.

Definição 1.10.2 (Índice de um subgrupo). O número de classes laterais a esquerda de um subgrupo H em um grupo G chama-se *índice de H em G* e é denotado como $[G : H]$.

Observação 1.10.2. Como há uma bijeção do subgrupo H para a classe lateral aH , a cardinalidade de aH tem de ser a mesma de H . Isto é, as classes laterais de H particionam G em partes de mesma ordem.

Proposição 1.10.2. *Seja aH a classe lateral do subgrupo H no grupo G . Então, a ordem $|G|$ do grupo G é dada por*

$$|G| = |H|[G : H].$$

Proposição 1.10.3 (Teorema de Lagrange). *Seja G um grupo finito e H um subgrupo de G . A ordem de H divide a ordem de G .*

Definição 1.10.3 (Ordem de um elemento). *Seja G um grupo. A ordem de um elemento $a \in G$ é a ordem do grupo cíclico gerado por a .*

Proposição 1.10.4. *Seja um grupo G com p elementos tal que p é primo e $a \in G$ diferente da identidade. Então G é o grupo cíclico $\{1, a, \dots, a^{p-1}\}$ gerado por a .*

Observação 1.10.3. Também podemos obter uma expressão para calcular a ordem de um grupo de homomorfismo. Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo. Como as classes laterais à esquerda do núcleo de φ são as imagens inversas φ^{-1} , elas estão em uma correspondência biunívoca com a imagem. Daí segue que

$$[G : \text{nu } \varphi] = |\text{im } \varphi|.$$

Proposição 1.10.5. *Seja $\varphi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo onde G e G' são finitos. Então*

$$|G| = |\text{nu } \varphi| \cdot |\text{im } \varphi|.$$

Definição 1.10.4 (classes laterais à direita). Os conjuntos da forma

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

chamam-se *classes laterais à direita de um subgrupo H* . Esses são classes de equivalência para a relação de congruência à direita

$$b = ha \Rightarrow a \equiv b, \text{ para algum } h \in H.$$

Proposição 1.10.6. *Seja um subgrupo H de um grupo G . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- H é subgrupo normal,
- $aH = Ha$ para todo $a \in G$.

1.11 Restrição de um homomorfismo para um subgrupo

Observação 1.11.1. O objetivo dessa seção é apresentar ferramentas para analisar um subgrupo H do grupo G a fim de garantir propriedades do grupo G . No geral, os subgrupos são mais específicos e menos complexos de se trabalhar.

Proposição 1.11.1. *Sejam K e H dois subgrupos do grupo G tal que a interseção $K \cap H$ é um subgrupo de H . Se K é um subgrupo normal de G , então $K \cap H$ é um subgrupo normal de H .*

Exemplo 1.11.1. Com esse resultado, se G é finito pode-se utilizar o Teorema de Lagrange para obter informações sobre a interseção dos dois subgrupos: a interseção divide $|H|$ e $|K|$. Se $|H|$ e $|K|$ não tem o mesmo fator de divisão, então $K \cap H = \{1\}$.

Definição 1.11.1 (Restrição de um homomorfismo para um subgrupo). Sejam o homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ e H um subgrupo de G . Uma *restrição de φ para o subgrupo H* é o homomorfismo $\varphi|_H : H \longrightarrow G'$ definido como

$$\varphi|_H(h) = \varphi(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Proposição 1.11.2. Sejam o homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G'$ e H um subgrupo de G . O núcleo de uma restrição $\varphi|_H$ é a interseção do núcleo de φ e H .

Proposição 1.11.3. Sejam $\varphi : G \longrightarrow G'$ um homomorfismo, H' um subgrupo de G' e $\varphi^{-1}(H') = \{x \in G \mid \varphi(x) \in H'\}$ a imagem inversa de H' . Então

- $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo de G .
- Se H' é um subgrupo normal de G' , então $\varphi^{-1}(H')$ é um subgrupo normal de G .
- $\varphi^{-1}(H')$ contém o núcleo de φ
- A restrição de φ para $\varphi^{-1}(H')$ define um homomorfismo $\varphi^{-1}(H') \longrightarrow H'$, de forma que o núcleo desse homomorfismo é o núcleo de φ .

1.12 Produto de Grupos

Definição 1.12.1 (Produto de grupos). Seja G, G' dois grupos. O *produto* $G \times G'$ é um grupo formado pelo produto das componentes dos grupos G e G' , isso é, pela regra

$$(a, a'), (b, b') \mapsto (ab, a'b'),$$

onde $a, b \in G$ e $a', b' \in G'$. O par $(1, 1)$ é uma identidade e $(a, a')^{-1} = (a^{-1}, a'^{-1})$. A propriedade associativa é preservada em $G \times G'$ pois também é em G e G' .

Proposição 1.12.1. A ordem de $G \times G'$ é o produto das ordens de G e G' .

Observação 1.12.1 (Projeções). O produto de grupos é composto pelos homomorfismos:

$$i : G \longrightarrow G \times G', \quad i' : G' \longrightarrow G \times G', \quad p : G \times G' \longrightarrow G, \quad p' : G \times G' \longrightarrow G',$$

definidos como

$$i(x) = (x, 1), \quad i'(x') = (1, x'), \quad p(x, x') = x, \quad p'(x, x') = x'.$$

Os mapeamentos i, i' são injetivos, já os mapeamentos p, p' são sobrejetivos, onde nu $p = 1 \times G'$ e nu $p' = G \times 1$. Esses mapeamentos são chamados de *projeções*. Já que são núcleos, $G \times 1$ e $1 \times G'$ são subgrupos normais de $G \times G'$.

Proposição 1.12.2 (Propriedades de Mapeamento dos Produtos). *Seja H um grupo qualquer. O homomorfismo $\Phi : H \longrightarrow G \times G'$ tem correspondência biunívoca com o par $\Phi(h) = (\varphi(h), \varphi'(h))$ de homomorfismos*

$$\varphi : H \longrightarrow G, \quad \varphi' : H \longrightarrow G'.$$

O núcleo de Φ é a interseção $(\text{nu } \varphi) \cap (\text{nu } \varphi')$.

Observação 1.12.2. É extremamente desejável encontrar uma relação isomorfa entre um grupo G e um produto de outros dois grupos $H \times H'$. Quando isso acontece, e infelizmente não são muitas as vezes, trabalhar com os grupos H e H' costumam ser mais simples que G .

Proposição 1.12.3. *Sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ não divisíveis entre si. Um grupo cíclico de ordem rs é isomorfo ao produto dos grupos cíclicos de ordem r e s .*

Observação 1.12.3. Em contrapartida, um grupo cíclico de ordem par 4, por exemplo, não é isomorfo ao produto de dois grupos cíclicos de ordem 2. Também não podemos afirmar nada com base no resultado anterior sobre grupos não cíclicos.

Definição 1.12.2 (Conjunto de produtos). Sejam dois subgrupos A, B de um grupo G . Chamamos o *conjunto de produtos de elementos de A e B* por

$$AB = \{x \in G \mid x = ab \text{ para algum } a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Proposição 1.12.4. *Sejam H e K subgrupos de um grupo G .*

- *Se $H \cap K = \{1\}$, o mapeamento de produto $p : H \times K \longrightarrow G$ definido por $p(h, k) = hk$ é injetivo e sua imagem é o subconjunto HK ;*
- *Se um dos subgrupos H ou K é um subgrupo normal de G , então os conjuntos de produtos HK e KH são iguais e HK é subgrupo de G ;*
- *Se ambos H e K são subgrupos normais, $H \cap K = \{1\}$ e $HK = G$, então G é isomorfo ao grupo de produto $H \times K$.*

1.13 Aritmética Modular

Definição 1.13.1 (Congruente modulo n). Seja $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que dois inteiros a, b são *congruentes modulo n* , e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n},$$

se n divide $b - a$, ou se $b = a + nk$ para algum inteiro k . Chamamos as classes de equivalência definidas por essa relação de *classes de equivalência módulo n* , ou *classes de resíduo módulo n* .

Exemplo 1.13.1. A classe de congruência de 0 é o subgrupo $\bar{0}$ de todos os múltiplos de n

$$\bar{0} = n\mathbb{Z} = \{\dots, -n, 0, n, 2n, \dots\}.$$

Proposição 1.13.1. Há n classes de congruência módulo n (denotamos esse conjunto por $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), isto é, o índice $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}]$ é n . São elas

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Definição 1.13.2 (Soma e produto). Seja \bar{a} e \bar{b} as classes de congruência representadas pelos inteiros a e b . Define-se a *soma* como a classe de congruência de $a + b$ e o *produto* pela classe de congruência ab , isto é,

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \bar{a}\bar{b} = \overline{ab}.$$

Proposição 1.13.2. Se $a' \equiv b' \pmod{n}$ e $a \equiv b \pmod{n}$, então $a' + b' \equiv a + b \pmod{n}$ e $a'b' \equiv ab \pmod{n}$.

Observação 1.13.1. Além disso, a soma e produto também continuam respeitando as propriedades associativas, comutativas e distributivas, desde que o mesmo se mantém para soma e multiplicação de inteiros.

Exemplo 1.13.2. Seja $n = 13$, então

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{12}\}.$$

Com isso,

$$(\bar{7} + \bar{9})(\bar{11} + \bar{6}) = \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{12}.$$

1.14 Estrutura de grupos abelianos finitamente gerados

Teorema 1.14.1 (Teorema fundamental dos grupos abelianos finitamente gerados). Todo grupo abeliano finitamente gerado G é isomorfo a um produto de grupos cíclicos na forma

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

onde os p_i são primos, não necessariamente distintos, os r_i são inteiros positivos e o conjunto $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. O produto é único, exceto por possíveis rearranjos dos fatores; isso é, o número (chamado número Betti de G) de fatores \mathbb{Z} é único e as potências de primos $(p_i)^{r_i}$ são únicas.

Exemplo 1.14.1. Queremos encontrar todos os grupos abelianos de ordem 360, a menos de isomorfismos. Dizer a menos de isomorfismo significa que qualquer grupo abeliano de ordem 360 deve ser estruturalmente idêntico — isto é, isomorfo — a algum presente no conjunto solução.

Solução. Já que nossos grupos são da ordem finita 360, não aparecerão \mathbb{Z} no produto. Primeiro, vamos expressar 360 como um produto de potências de primos: $360 = 2^3 3^2 5$. Então, pelo Teorema 1.14.1, temos as seguintes possibilidades

1. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
2. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
3. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

4. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

5. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$

6. $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$

Então, esses são os seis diferentes grupos abelianos (a menos de isomorfismos) de ordem 360. \triangle

Definição 1.14.1 (Grupo decomponível e indecomponível). Um grupo é dito *decomponível* se ele é isomorfo a um produto direto de dois subgrupos não triviais. Do contrário, é dito *indecomponível*.

Proposição 1.14.1. *Os grupos abelianos finitos indecomponíveis são exatamente os grupos cíclicos que possuem a ordem de uma potência prima.*

Proposição 1.14.2. *Se m divide a ordem de um grupo abeliano finito G , então G tem um subgrupo de ordem m .*

Proposição 1.14.3. *Se m é um quadrado inteiro livre, isto é, m não é divisível por nenhum quadrado de primo, então todo grupo abeliano de ordem m é cíclico.*

1.15 Grupos Quociente

Definição 1.15.1 (Produto de classes laterais). Sejam $N \trianglelefteq G$ e as classes laterais $\bar{a} = aN$ e $\bar{b} = bN$, para $a, b \in G$. Chamamos de *produto das classes laterais* \bar{a} e \bar{b} a classe lateral $\bar{a}\bar{b} = abN$, isto é, a classe lateral que contém ab .

Proposição 1.15.1. *Sejam G um grupo e S um conjunto qualquer com uma lei de composição. Seja também $\varphi : G \rightarrow S$ um mapeamento sobrejetivo tal que $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ para todo $a, b \in G$. Então S é um grupo.*

Definição 1.15.2 (Operação induzida por bijeção). Seja um grupo G e um conjunto S com a mesma cardinalidade de G . Por conta disso, há uma correspondência injetiva \leftrightarrow entre S e G . Podemos definir uma *operação binária sobre S induzida pela relação com os elementos de G* , da forma

$$\text{se } x \leftrightarrow g_1, y \leftrightarrow g_2 \text{ e } z \leftrightarrow g_1g_2 \text{ então } xy = z,$$

onde $x, y, z \in S$ e $g_1g_2 \in G$. Também, a direção \rightarrow da correspondência biunívoca $s \leftrightarrow g$ define uma função bijetiva $\mathcal{U} : S \rightarrow G$, isto é

$$\text{se } \mathcal{U}(x) = g_1, \mathcal{U}(y) = g_2 \text{ e } \mathcal{U}(z) = g_1g_2 \text{ então } xy = z.$$

Assim, como $\mathcal{U}(xy) = \mathcal{U}(z) = g_1g_2 = \mathcal{U}(x)\mathcal{U}(y)$, a Proposição 1.15.1 garante que S é um grupo e, além disso, \mathcal{U} representa um isomorfismo que mapeia o grupo S no grupo G .

Teorema 1.15.1 (Grupo quociente). *Seja $\phi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupos com núcleo H . O conjunto de todas as classes laterais de H formam o chamado grupo de quociente G/H (lê-se G sobre H , não confundir com G dividido por H), onde $(aH)(bH) = (ab)H$, para todo $a, b \in G$. Também, o mapa $\mathcal{U} : G/H \rightarrow \phi[G]$ definido por $\mathcal{U}(aH) = \phi(a)$ é um isomorfismo. Tanto a multiplicação de classes laterais como \mathcal{U} estão bem definidos, isto é, independem das escolhas de a e b .*

Proposição 1.15.2. *Seja H um subgrupo de um grupo G . Então, a multiplicação da classe lateral a esquerda é bem definida pela equação*

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

se e somente se H é um subgrupo normal de G .

Corolário 1.15.1. *Se $N \trianglelefteq G$, então as classes laterais de N formam um grupo G/N sobre a operação binária $(aN)(bN) = (ab)N$.*

Definição 1.15.3 (Grupo quociente). O grupo G/H no corolário 1.15.1 se chama *grupo quociente* (ou, *grupo fator*) de G por H .

Exemplo 1.15.1. Como \mathbb{Z} é um grupo abeliano, $n\mathbb{Z}$ é um subgrupo normal. O corolário 1.15.1 permite a construção do grupo quociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sem citar um homomorfismo.

Proposição 1.15.3 (Homomorfismo induzido por grupo quociente). *Seja $H \trianglelefteq G$. Então $\gamma : G \rightarrow G/H$ dado por $\gamma(x) = xH$ é um homomorfismo com núcleo H .*

Corolário 1.15.2. *Todo subgrupo normal de um grupo G é o núcleo de um homomorfismo.*

Teorema 1.15.2 (Teorema fundamental do homomorfismo). *Seja $\phi : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupo com núcleo H . Então $\phi[G]$ é um grupo e $\mu : G/H \rightarrow \phi[G]$ dado por $\mu(gH) = \phi(g)$ é um isomorfismo. Se $\gamma : G \rightarrow G/H$ é o homomorfismo dado por $\gamma(g) = gH$, então $\phi(g) = \mu\gamma(g)$ para cada $g \in G$.*

1.16 Anéis

Definição 1.16.1 (Anel). Um *anel* $(R, +, \cdot)$ é um conjunto R acompanhado de duas operações binárias $+$ e \cdot definidas sobre R tais que os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. $(R, +)$ é um grupo abeliano.
2. A operação \cdot é associativa.
3. Para todo $a, b, c \in R$ vale a *lei da distributividade à esquerda* e a *lei de distributividade à direita*, respectivamente,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{e} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Exemplo 1.16.1. Todo subconjunto dos números complexos que é fechado para a adição e multiplicação usual dos complexos é um anel. Por exemplo, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são todos anéis. Outro exemplo interessante é de um anel contendo apenas o elemento 0. Chamamos esse de *anel trivial*.

Observação 1.16.1 (Notação). Da mesma forma que com os grupos, costuma-se denotar o anel $(R, +, \cdot)$ apenas por seu conjunto R . Também, para um anel $(R, +, \cdot)$, chama-se sua primeira operação $+$ de *adição do anel* e sua segunda operação \cdot de *multiplicação do anel*. O grupo $(R, +)$ é chamado *grupo aditivo de R* .

Proposição 1.16.1. Se R é um anel com identidade aditiva $\vec{0}$, então, $\forall a \in R$,

$$\vec{0} \cdot a = a \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Demonstração. Pelas propriedades do grupo $(R, +)$,

$$a\vec{0} + a\vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a\vec{0} = \vec{0} + a\vec{0}.$$

E, pela lei de cancelamento do grupo,

$$a\vec{0} + a\vec{0} = \vec{0} + a\vec{0} \implies a\vec{0} = \vec{0}.$$

De forma semelhante,

$$\vec{0}a + \vec{0}a = (\vec{0} + \vec{0})a = \vec{0}a = \vec{0} + \vec{0}a \implies \vec{0}a = \vec{0}.$$

Daí, segue que $a\vec{0} = \vec{0}a = \vec{0}$. □

Proposição 1.16.2. Se R é um anel, então, para todo $a, b \in R$ vale

- $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ e
- $(-a)(-b) = ab$.

Definição 1.16.2 (Anel associativo).

Definição 1.16.3 (Anel comutativo).

Definição 1.16.4 (Anel com identidade).

Definição 1.16.5 (subanel). Um subconjunto S de um anel R é um subanel de R (escreve-se $S \leq R$) se, e somente se, valem os seguintes axiomas:

1. (Existência do elemento nulo). $0 \in S$;
2. (Subtração fechada). $a - b \in S$, para todo $a, b \in S$;
3. (Produto fechado). $ab \in S$, para todo $a, b \in S$.

Proposição 1.16.3. Seja $(S, +, \cdot)$ um subanel de $(R, +, \cdot)$. Então $(S, +, \cdot)$ é um anel.

Definição 1.16.6 (Divisor de zero). pag 2 hazenwinkel;

Definição 1.16.7 (Domínio de integridade). Um anel R é chamado *domínio de integridade* se $ab \neq 0$ para todo elemento não-nulo $a, b \in R$. Isto é, se R não possuir divisores de zero.

Definição 1.16.8 (Unidade).

Proposição 1.16.4 (Grupo multiplicativo). O conjunto das unidades R^* de um anel R formam um grupo com respeito a multiplicação. Chamamos (R^*, \cdot) de grupo multiplicativo.

Definição 1.16.9 (Elemento idempotente). Um elemento e de um anel R é chamado *idempotente* se $e^2 = e$. Além disso, dois elementos idempotentes e, f são ditos *ortogonais* se $ef = fe = 0$.

Exemplo 1.16.2. Seja um anel R com identidade. Então $0, 1 \in R$ são elementos idempotentes e ortogonais.

Definição 1.16.10 (Anel de divisão). Um *anel de divisão* D é um anel não trivial onde todos os elementos não-nulos de D formam um grupo sobre a multiplicação.

Proposição 1.16.5. Um anel não trivial D é anel de divisão se, e somente se, todo elemento não-nulo de D é uma unidade.

1.17 Homomorfismos de anéis

Definição 1.17.1 (Homomorfismo de anéis). Sejam dois anéis $(R, +, \cdot)$ e $(R', +', \cdot')$. Um mapa $\phi : R \rightarrow R'$ é um *homomorfismo* se a *propriedade de homomorfismo* vale para ambas as operações, isso é, se, para todo $a, b \in R$,

$$\phi(a + b) = \phi(a) +' \phi(b) \quad \text{e} \quad \phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot' \phi(b).$$

Exemplo 1.17.1 (Homomorfismo trivial). Sejam os anéis R , R' e o elemento neutro $\vec{0}$ da adição do anel R' . A aplicação $\phi : R \rightarrow R'$ definida por $\phi(a) = \vec{0}$, para todo $a \in R$, é um homomorfismo de anéis porque

$$\phi(a + b) = \vec{0} = \vec{0} +' \vec{0} = f(a) +' f(b) \quad \text{e} \quad f(a \cdot b) = \vec{0} = \vec{0} \cdot' \vec{0} = f(a) \cdot' f(b).$$

A essa aplicação dá-se o nome *homomorfismo trivial de anéis*.

Definição 1.17.2 (Homomorfismo injetivo e sobrejetivo). Chama-se de *homomorfismo injetivo* e *homomorfismo sobrejetivo* um homomorfismo de anéis definido, respectivamente, por uma função injetiva ou uma função sobrejetiva.

Exemplo 1.17.2. Seja o homomorfismo de anéis $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $\phi(n) = (n, 0)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Perceba que, para cada $(n, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tem-se um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(n) = (n, 0)$, daí, ϕ é injetiva e esse é um homomorfismo injetivo. Também, seja $\mu : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo tal que $\mu(n, m) = n$ para todo $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. É fácil perceber que para todo $z \in \mathbb{Z}$, existirá $(z, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde μ é um homomorfismo sobrejetivo.

Proposição 1.17.1. Se $\phi : R \rightarrow R'$ é um homomorfismo de anéis, então, para todo $a, b \in A$,

- $\phi(0_R) = 0_{R'}$,
- $\phi(-a) = -\phi(a)$ e
- $\phi(a - b) = \phi(a) - \phi(b)$.

Demonstração. Como $\phi(a) = \phi(a + 0_R) = \phi(a) + \phi(0_R)$, pela propriedade de homomorfismo, então,

$$\phi(a) = \phi(a) + \phi(0_R) \implies -\phi(a) + \phi(a) = -\phi(a) + \phi(a) + \phi(0_R),$$

isto é, $0_{R'} = \phi(0_R)$.

Daí segue que,

$$0_{R'} = \phi(0_R) = \phi(a - a) = \phi(a) + \phi(-a),$$

e como $0_{R'} = \phi(a) + \phi(-a)$,

$$\phi(-a) = -\phi(a).$$

Fica evidente que

$$\phi(a - b) = \phi(a) + \phi(-b) = \phi(a) - \phi(b).$$

□

Proposição 1.17.2. *Seja $\phi : R \leftarrow R'$ um homomorfismo de anéis onde $1_R \in R$ é identidade do produto de R . Então*

- *R' possui identidade multiplicativa $1_{R'}$ e $\phi(1_R) = 1_{R'}$;*
- *se $a \in R$ possui inversa multiplicativa a^{-1} , então $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$.*

Definição 1.17.3 (Imagem de homomorfismo de anéis). A *imagem* de um homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow R'$ é o subconjunto de R'

$$\text{im } \phi = \{x \in R' \mid x = \phi(a), \text{ para algum } a \in R\} = \phi(R).$$

Proposição 1.17.3. *Seja um homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow R'$, então a imagem $\phi(R) \leq R'$ e, além disso, se $S \leq R$ então $\phi(S) \leq R'$.*

Demonstração. Como S é um subanel de R , então $0_R \in S$ e $\phi(0_R) = 0_{R'}$ implica que $0_{R'} \in \phi(S)$. Além disso, sejam $a, b \in \phi(S)$, então existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $\phi(s_1) = a$, $\phi(s_2) = b$ e, como S é anel, $s_1 - s_2 \in S$ e segue que $\phi(s_1 - s_2) \in \phi(S)$. Como $\phi(s_1 - s_2) = \phi(s_1) - \phi(s_2) = a - b$, $a - b \in \phi(S)$. De forma semelhante para o produto, $a, b \in \phi(S) \implies s_1 s_2 \in S \implies ab \in \phi(S)$. \square

Proposição 1.17.4. *Sejam $\phi : R \rightarrow T$ e $\mu : T \rightarrow R'$ homomorfismos de anéis. Então, $\mu \circ \phi : R \rightarrow R'$ também é um homomorfismo de anéis.*

Demonstração. Sejam $a, b \in R$. Como ϕ é homomorfismo, segue que

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \text{ e } \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Portanto, aplicando μ ,

$$\mu \circ \phi(a + b) = \mu(\phi(a) + \phi(b)) \text{ e } \mu \circ \phi(ab) = \mu(\phi(a)\phi(b)),$$

Mas como μ também respeita a propriedade de homomorfismo, segue que

$$\mu(\phi(a) + \phi(b)) = \mu(\phi(a)) + \mu(\phi(b)) = \mu \circ \phi(a) + \mu \circ \phi(b) \text{ e}$$

$$\mu(\phi(a)\phi(b)) = \mu(\phi(a))\mu(\phi(b)) = \mu \circ \phi(a)\mu \circ \phi(b).$$

\square

Definição 1.17.4 (Núcleo). O *núcleo* do homomorfismo de anéis $\phi : R \rightarrow R'$ é o subconjunto de R formado pelos elementos que são mapeados pelo elemento nulo em R' :

$$\text{nu } \phi = \{a \in R \mid \phi(a) = 0\}.$$

Exemplo 1.17.3. Seja $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $\phi(a, b) = a$. Então ϕ é um homomorfismo de anéis e

$$\text{nu } \phi = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = 0\}.$$

Proposição 1.17.5. *Seja um homomorfismo $\phi : R \rightarrow R'$ com núcleo $\text{nu } \phi$ e seja 0_R o elemento nulo de R . Então $0_R \in \text{nu } \phi$.*

Proposição 1.17.6. *Seja $\phi : R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis. Então*

- *$\text{nu } \phi \leq R$;*
- *ϕ é injetor se, e somente se, $\text{nu } \phi = \{0_R\}$.*

Definição 1.17.5 (Isomorfismo de anéis).

1.18 Corpos

Definição 1.18.1 (Corpo). Um *corpo* $(F, +, \cdot)$ é um anel onde (F, \cdot) é um grupo abeliano.

Proposição 1.18.1. *Um corpo $(F, +, \cdot)$ é um anel de divisão comutativo.*

Proposição 1.18.2. *Todo domínio de integridade finito é um corpo.*

Definição 1.18.2 (Subcorpo). Seja um corpo F . Um corpo $k \leq F$ é dito *subcorpo* de F e F é dito *extensão* de k .

Definição 1.18.3 (Elemento algébrico e transcendente). Um elemento α de um corpo de extensão E de um corpo F é dito *algébrico sobre F* se $f(\alpha) = 0$ para algum polinômio não-nulo $f(x) \in F[x]$. Se α não é algébrico sobre F , então α é *transcendente sobre F* .

Definição 1.18.4 (Extensão algébrica). Um corpo de extensão E de um corpo F é uma *extensão algébrica de F* se todo elemento em E é algébrico sobre F .

1.19 Espaço Vetorial

Definição 1.19.1 (Espaço vetorial). Seja F um corpo. Um *espaço vetorial sobre F* (ou um *F -espaço vetorial*) consiste de um grupo abeliano V sob adição junto com uma operação de multiplicação escalar de cada elemento de V por cada elemento de F pela esquerda, tal que para todo $a, b \in F$ e $\alpha, \beta \in V$, valem os seguintes axiomas:

1. $a\alpha \in V$;
2. $a(b\alpha) = (ab)\alpha$;
3. $(a + b)\alpha = (a\alpha) + (b\alpha)$;
4. $a(\alpha + \beta) = (a\alpha) + (a\beta)$;
5. $1\alpha = \alpha$.

Os elementos de V são chamados *vetores* e os elementos de F são chamados *escalares*.

Observação 1.19.1. Na falta de ambiguidades, iremos omitir referências a F e apenas nos referenciaremos ao espaço vetorial.

Definição 1.19.2 (Extensão finita). Se um corpo de extensão E de um corpo F é de dimensão finita n como um espaço vetorial sobre F , então E é uma *extensão finita de grau n sobre F* . Denotaremos por $[E : F]$ o grau n de E sobre F .

Proposição 1.19.1. *Se o grau de uma extensão $[E : F]$ é n , então para qualquer elemento $a \in E$, os elementos $1, \alpha, \dots, \alpha^n$ são linearmente dependentes sobre F e, portanto, α é uma raiz de algum polinômio $f(x) \in F[x]$.*

Proposição 1.19.2. *Um corpo de extensão finito E sobre um corpo F é uma extensão algébrica de F .*

Proposição 1.19.3. *Se E é um corpo de extensão finito de um corpo F e K é um corpo de extensão finito de E , então K é um corpo de extensão finita de F e*

$$[K : F] = [K : E][E : F].$$

1.20 Álgebra

Definição 1.20.1 (k -álgebra). Uma *álgebra sobre um corpo k* (ou, uma k -álgebra) é um conjunto A que é um anel e um espaço vetorial sobre k de tal maneira que as estruturas d grupo aditivo são as mesmas e o axioma

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$$

é satisfeito para todo $\lambda \in k$ e $a, b \in A$.

Capítulo 2

Álgebras de Clifford

Referências Bibliográficas