Seminário I: Álgebra Geométrica

Guilherme Philippi

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau

Orientado por Felipe Fidalgo

PIBIC ciclo 2021/2022
Teoria e prática em Distance Geometry e Clifford Algebras com aplicações

18 de fevereiro de 2022

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

1. Preliminares - recordar é viver
2. Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno
3. Espaços métricos
4. Álgebra Geométrica
   - Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
   - O produto regressivo
   - O produto escalar de Blades
   - Contrações
   - O produto Geométrico
   - Dualidade
5. Modelos de Geometria
   - Modelo Euclidiano
   - Modelo Homogêneo
   - Modelo Conforme
6. Referências

Inicio da seção 1

1. Preliminares - recordar é viver
2. Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno
3. Espaços métricos
4. Álgebra Geométrica
   - Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
   - O produto regressivo
   - O produto escalar de Blades
   - Contrações
   - O produto Geométrico
   - Dualidade
5. Modelos de Geometria
   - Modelo Euclidiano
   - Modelo Homogêneo
   - Modelo Conforme
6. Referências

Recordar é viver

Definição (R-Módulo)

Seja $(R, +, \cdot)$ um anel. Um grupo abeliano $(M, \oplus)$ é chamado de *módulo sobre um anel R* (ou, simplesmente R-módulo) se existir uma aplicação

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (r, m) & \mapsto & rm \end{array},$$

chamada *multiplicação por escalar*, tal que para todo $r, r' \in R$ e $m, m' \in M$ valham

1. $0_R m = 0_M$;
2. se R tem identidade 1, então $1m = m$;
3. $(r + r')m = (rm) \oplus (r'm)$;
4. $r(m \oplus m') = (rm) \oplus (rm')$;
5. $(r \cdot r')m = r(r'm)$.

Recordar é viver

Exemplo ($\mathbb{Z}$-módulo)

Seja o anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Podemos fazer qualquer grupo abeliano $(A, +)$ virar um $\mathbb{Z}$-módulo através do seguinte produto escalar: para $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in A$,

$$na = \begin{cases} a + a + \cdots + a \quad (n \text{ vezes}), & \text{se } n > 0 \\ 0, & \text{se } n = 0 \\ -a - a - \cdots - a \quad (-n \text{ vezes}), & \text{se } n < 0 \end{cases} .$$

Definição (Espaço vetorial)

Seja o grupo abeliano E um K-módulo. Se K é um corpo, dizemos que E é um *espaço vetorial sobre o corpo K*. Também, passamos a nos referenciar aos elementos de K por *escalares* e aos de E por *vetores*.

E assim ganhamos a possibilidade de "contrair" elementos de E, em relação a elementos de K "contraídos".

Inicio da seção 2

1. Preliminares - recordar é viver
2. Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno
3. Espaços métricos
4. Álgebra Geométrica
   - Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
   - O produto regressivo
   - O produto escalar de Blades
   - Contrações
   - O produto Geométrico
   - Dualidade
5. Modelos de Geometria
   - Modelo Euclidiano
   - Modelo Homogêneo
   - Modelo Conforme
6. Referências

Espaços vetoriais com produto interno

Vamos incrementar os espaços vetoriais com uma aplicação adicional.

Definição (Espaço com produto interno)

Seja E um espaço vetorial sobre K. Um *produto interno* sobre E é uma função $\langle , \rangle : E \times E \longrightarrow K$ tal que valham

1. *(Positividade)* Para todo $v \in E$,
$$\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0;$$
2. *(Simetria)* Para todo $v, u \in E$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$; [a]
3. *(Linearidade no primeiro argumento)* Para todo $v, u, w \in E$ e $r, s \in K$,
$$\langle ru + sv, w \rangle = r \langle u, w \rangle + s \langle v, w \rangle .$$

O espaço vetorial E sobre K, junto do produto interno $\langle , \rangle$, é chamado K *espaço com produto interno*.

[a] mais geralmente, quando K é um corpo complexo, $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

Espaços vetoriais com produto interno: implicações

Se $K = \mathbb{R}$, então as propriedades (2) e (3) mostram que o produto interno é bilinear. Caso K seja complexo, tem-se algo que chamamos linearidade conjugada, da forma

$$\langle w, ru + sv \rangle = \overline{\langle ru + sv, w \rangle} = \overline{r} \langle w, u \rangle + \overline{s} \langle w, v \rangle .$$

Definição (Norma)

A *norma* de $v \in E$ é definida como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Proposição

$\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Proposição

Para todo $r \in K$ e $v \in E$,

$$\|rv\| = |r| \, \|v\|.$$

Espaços vetoriais com produto interno: implicações

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Para todo $u, v \in E$*,*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Teorema (Desigualdade triangular)

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Proposição

As igualdades dos teoremas acima só acontecem quando $v = \alpha u$*, com* $\alpha \in K$*.*

Teorema (A lei do paralelogramo)

Para todo $u, v \in E$*,*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Inicio da seção 3

1 Preliminares - recordar é viver
2 Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno
3 Espaços métricos
4 Álgebra Geométrica
- Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
- O produto regressivo
- O produto escalar de Blades
- Contrações
- O produto Geométrico
- Dualidade

5 Modelos de Geometria
- Modelo Euclidiano
- Modelo Homogêneo
- Modelo Conforme

6 Referências

Espaços métricos

Definição (Espaço métrico)

Chamamos de *espaço métrico* um espaço com produto interno M sobre $\mathbb{R}$, monido de uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa pares de vetores a um número real que chamamos de distância entre esses pontos, tal que valham, $\forall\ u, v, w \in M$,

1. $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0 \iff u = v$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Exemplo

Seja $d(u, v)$ a distância entre os dois vetores u e $v \in E$ definida como

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Pseudométricas

Definição (Espaço pseudométrico)

Chamamos de *espaço pseudométrico* um espaço com produto interno M sobre $\mathbb{R}$, monido de uma função de distância $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que valham, $\forall\ u, v, w \in M$,

1. $d(u, v) \geq 0$ e $u = v \implies d(u, v) = 0$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Proposição

Um espaço pseudométrico é métrico se, e somente se, $d(u, v) > 0$ *sempre que* $u \neq v$.

Assinatura de uma métrica

Uma maneira prática para representar uma métrica Q é pelo uso de uma **matriz de métrica** M, ou tensor métrico,

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \cdots & \mu_{n,n} \end{pmatrix},$$

simétrica que codifica a distância entre os pares dos vetores de base $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ do espaço métrico, *i.e.*, $\mu_{i,j} = d(e_i, e_j)$, para $1 \leq i,\ j \leq n$.
Perceba que quando a função de distância for dada pelo produto interno a matriz de métrica codificará o produto interno entre estes elementos de base.

Inicio da seção 4

1 Preliminares - recordar é viver

2 Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno

3 Espaços métricos

4 Álgebra Geométrica
- Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
- O produto regressivo
- O produto escalar de Blades
- Contrações
- O produto Geométrico
- Dualidade

5 Modelos de Geometria
- Modelo Euclidiano
- Modelo Homogêneo
- Modelo Conforme

6 Referências

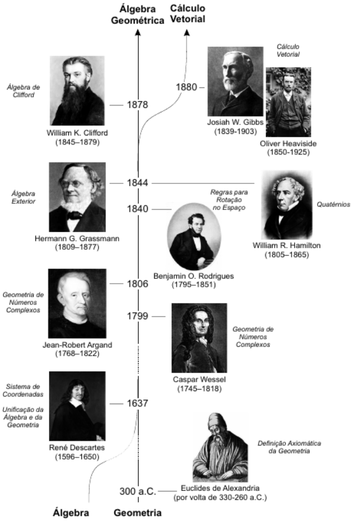
Álgebra Geométrica: introdução

espaço físico $\times$ espaço de representação

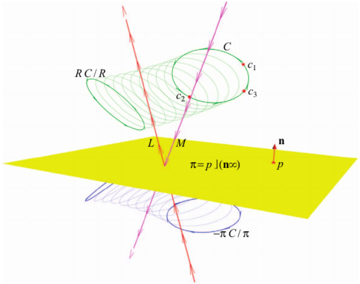
O espaço de representação da **Álgebra Linear** é construída a partir do **conceito de vetor**, isso é, **pontos no espaço de representação**.
Já a **Álgebra Geométrica** é construída sobre o conceito de **subespaços vetoriais**, o que implica uma nova natureza de seus objetos elementares.

A partir das ideias de **Grassmann**, com sua Álgebra Exterior, **pode-se codificar elementos de dimensões variadas**, produto dos elementos de sua própria álgebra. Combinando este produto de Grassmann com o produto interno (clássico da álgebra linear), **dá-se origem a um novo produto**, capaz de codificar transformações nesse novo espaço de maneira **muito mais simples** (eficiente?) do que na Álgebra Linear.
Não só, mas esse novo produto **permite interpretar tais transformações (operadores) como objetos geométricos e vice versa**!

Álgebra Geométrica: introdução



Cronologia das descobertas, incluindo os cientistas que mais influenciaram no desenvolvimento da Álgebra Geométrica.

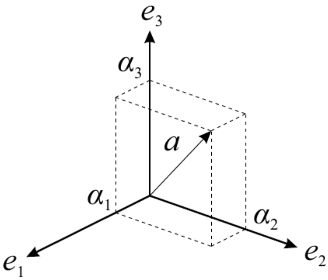


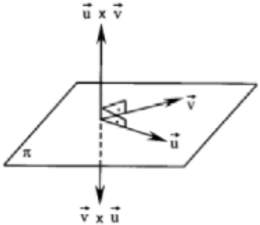
A rotação do círculo C (determinado por três pontos c_1, c_2 e c_3) ao redor da linha L, e suas reflexões através de um plano Π.

Subespaços orientados como primitivas: o produto externo

Em Álgebra Linear, assumindo base $\{e_i\}_{i=1}^n$ para $\mathbb{R}^n$, um vetor a arbitrário pode ser escrito como a *combinação linear* dos elementos da base. Para $n = 3$,

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathbb{R}^3$$



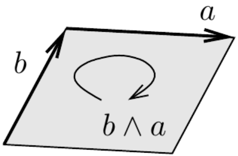


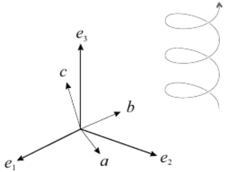
Na Álgebra Linear temos o produto vetorial, limitado a vetores no $\mathbb{R}^3$, onde um o produto de dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gera um novo vetor $\vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ perpendicular aos outros dois.

Uma dúvida natural é: existe algum produto que generalize o produto vetorial para qualquer dimensão?

Subespaços orientados como primitivas: o produto externo

Grassmann define um produto que nos permite construir subespaços de dimensionalidade mais alta a partir de vetores: o **produto externo** $b \wedge a$ entre os vetores b e a pode ser usado para representar o subespaço 2-dimensional





$D_{\langle 3 \rangle} = a \wedge b \wedge c \equiv e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

No geral, em Álgebra Geométrica, podemos gerar tais subespaços com dimensão k a partir de k vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Chamamos tais subespaços de k-**blades**, onde k é o **grau** do blade. Estes serão os elementos primitivos da Álgebra Geométrica. Veja que isso generaliza a Álgebra Vetorial, onde possuíamos apenas os 0-blades e 1-blades, isso é, escalares e vetores.

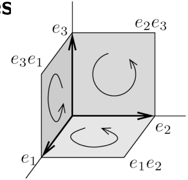
O espaço Multivetorial $\bigwedge \mathbb{R}^n$

Assim, a partir dos elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, **podemos construir um espaço multivetorial** $\bigwedge \mathbb{R}^n$. Isso é, temos $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ k-combinações dos vetores de base de $\mathbb{R}^n$, que descrevem 2^n **blades de base** para $\bigwedge \mathbb{R}^n$. No caso $n = 3$, temos

$$\left\{ \underbrace{1,}_{\substack{\text{Valores}\\\text{Reais}}} \quad \underbrace{e_1, \quad e_2, \quad e_3,}_{\substack{\text{Espaço}\\\text{Vetorial}}} \quad \underbrace{e_1 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_3, \quad e_2 \wedge e_3,}_{\substack{\text{Espaço}\\\text{Bivetorial}}} \quad \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}_{\substack{\text{Espaço}\\\text{Trivetorial}}} \right\}.$$

$$\mathbb{R} = \bigwedge^0 \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R}^3 = \bigwedge^1 \mathbb{R}^3 \qquad \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \qquad \bigwedge^3 \mathbb{R}^3$$

A combinação linear destes elementos formam os **multivetores**



Perceba a simetria entre $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ e $\bigwedge^{n-k} \mathbb{R}^n$.
Por conta de tal simetria, chamamos os elementos de $\bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n$ de **pseudovetores** e os elementos de $\bigwedge^n \mathbb{R}^n$ de **pseudoescalares**.

Assim, um 2-**vetor** (não necessáriamente 2-blade) pode ser escrito como

$$C_{\langle 2 \rangle} = \alpha_1 e_1 \wedge e_2 + \alpha_2 e_1 \wedge e_3 + \alpha_3 e_2 \wedge e_3$$

Conhecendo o espaço multivetorial $\bigwedge \mathbb{R}^n$ podemos definir formalmente o produto externo, como o mapeamento:

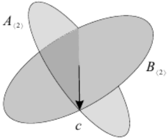
$$\wedge : \bigwedge^r \mathbb{R}^n \times \bigwedge^s \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{r+s} \mathbb{R}^n,$$

definido a partir de um pequeno conjunto de propriedades:

$$\begin{aligned}
\textit{antissimetria}: &\quad a \wedge b = -b \wedge a \qquad (\text{que implica } c \wedge c = 0),\\
\textit{distributividade}: &\quad a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c,\\
\textit{associatividade}: &\quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c,\\
\textit{comutatividade de escalares}: &\quad a \wedge (\beta b) = \beta (a \wedge b).
\end{aligned}$$

O produto regressivo

Com o **produto regressivo** podemos construir subespaços orientados k-dimensionais a partir de $(n-k)$ pseudovetores. Por exemplo, para $n = 3$, $c = A_{\langle 2\rangle} \vee B_{\langle 2\rangle}$



O produto regressivo é um mapeamento:

$$\vee : \bigwedge^{n-r} \mathbb{R}^n \times \bigwedge^{n-s} \mathbb{R}^n \to \bigwedge^{n-(r+s)} \mathbb{R}^n,$$

com propriedades similares àquelas observadas no produto externo:

$$\begin{aligned}
\textit{antissimetria}: &\ A_{\langle n-1\rangle} \vee B_{\langle n-1\rangle} = -B_{\langle n-1\rangle} \vee A_{\langle n-1\rangle} \\
&\qquad \text{(que implica } C_{\langle n-1\rangle} \vee C_{\langle n-1\rangle} = 0), \\
\textit{distributividade}: &\ A_{\langle n-1\rangle} \vee (B_{\langle n-1\rangle} + C_{\langle n-1\rangle}) = A_{\langle n-1\rangle} \vee B_{\langle n-1\rangle} \\
&\qquad + A_{\langle n-1\rangle} \vee C_{\langle n-1\rangle}, \\
\textit{associatividade}: &\ A_{\langle n-1\rangle} \vee (B_{\langle n-1\rangle} \vee C_{\langle n-1\rangle}) = \\
&\qquad (A_{\langle n-1\rangle} \vee B_{\langle n-1\rangle}) \vee C_{\langle n-1\rangle}, \\
\textit{comutatividade de escalares}: &\ A_{\langle n-1\rangle} \vee (\beta B_{\langle n-1\rangle}) = \beta(A_{\langle n-1\rangle} \vee B_{\langle n-1\rangle}).
\end{aligned}$$

Perceba que o produto regressivo é calculado encontrando o subespaço $C_{\langle t\rangle}$ compartilhado por $A_{\langle r\rangle}$ e $B_{\langle s\rangle}$. Isso pode ser algo complicado fora da AG.

Inicio da seção 5

1 Preliminares - recordar é viver

2 Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno

3 Espaços métricos

4 Álgebra Geométrica
- Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
- O produto regressivo
- O produto escalar de Blades
- Contrações
- O produto Geométrico
- Dualidade

5 Modelos de Geometria
- Modelo Euclidiano
- Modelo Homogêneo
- Modelo Conforme

6 Referências

Inicio da seção 6

1. Preliminares - recordar é viver
2. Álgebra dos subespaços vetoriais com produto interno
3. Espaços métricos
4. Álgebra Geométrica
    - Subespaços orientados como primitivas: o produto externo
    - O produto regressivo
    - O produto escalar de Blades
    - Contrações
    - O produto Geométrico
    - Dualidade
5. Modelos de Geometria
    - Modelo Euclidiano
    - Modelo Homogêneo
    - Modelo Conforme
6. Referências

Obrigado!

Contato: g.philippigrad.ufsc.br
UFSC - Blumenau