Lucas Pereira

Relatório Final de Iniciação Científica Voluntário

Blumenau

13 de fevereiro de 2019

Lucas Pereira

Relatório Final de Iniciação Científica Voluntário

Trabalho final de iniciação científica sob orientação do Prof. Dr. Felipe Delfini Caetano Fidalgo.

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Licenciatura em Matemática

Campus Blumenau

Blumenau

13 de fevereiro de 2019

Resumo

Este trabalho é uma apresentação de como foi o período de iniciação científica. O projeto intitulado “Um estudo da álgebra de Quatérnios e Rotações com aplicações em Geometria de Distâncias” tinha o objetivo de explorar este tema que cabe no escopo do conhecimento dos alunos, já que necessita do conhecimento básico do curso de Matemática, como Álgebra Linear (Matrizes e Sistemas Lineares) e Geometria Analítica, além de Álgebra. Esta é a principal justificativa para este projeto: um tema científico-matemático de relevância e com nível palpável de dificuldade para os alunos, tornando-se plenamente factível.

Palavras-chaves: Quatérnios, Geometria

Sumário

1 Introdução

A Álgebra dos Quatérnios consiste em uma estrutura algébrica isomorfa ao espaço Euclidiano de quatro dimensões. Além disso, ela possui uma subálgebra, dos Quatérnios Puros, que é isomorfa ao espaço de três dimensões. Neste subespaço, é possível definir um operador linear que, utilizando o referido isomorfismo, realiza rotações no espaço tridimensional. Tais rotações mostram-se deveras eficientes, inclusive (e, principalmente,) quando se preocupa com composições de rotações sucessivas, como é o caso do Algoritmo BP. Esta álgebra possui uma estrutura matemática de uma beleza ímpar, além de consistir, também, em uma Álgebra de Clifford.

2 Materiais e Métodos

No início da iniciação científica o professor orientador distribuiu materiais para a elaboração de seminários para os quatro alunos que participaram do projeto. Haviam encontros semanais ou quinzenais para tais apresentações, de modo que trabalhamos dois-a-dois nas duas frentes criadas: Quatérnios e Geometria de Distâncias. O aluno autor deste relatório ficou responsável por apresentar uma introdução à “Quaternios” aos demais pesquisadores. Sob os meus cuidados ficou o estudo da parte teórica da Álgebra quaterniônica.

Usei, neste trabalho, o livro do Jack Kuipers que está nas referências sobre o tema.

3 Álgebra dos Quatérnios

1 Álgebra dos Quatérnios

Seja $B_{\mathbb{R}^3} = \{i, j, k\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Assim, define-se um elemento chamado *quatérnio* por

$$q = q_0 + \mathbf{q_v}, \tag{1}$$

onde $q_0 \in \mathbb{R}$ é um escalar e $\mathbf{qv} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ é um vetor de $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.1 (Conjunto dos Quatérnios). O *conjunto dos quatérnios é denotado por* $\mathbb{H}$.

Um elemento $q = q_0 + \mathbf{q_v} \in \mathbb{H}$ também pode ser escrito como um ponto de $\mathbb{R}^4$ da forma

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{2}$$

e vice-versa, ou seja,há uma relação biunívoca entre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{R}^4$.

Podemos definir duas operações iniciais a este conjunto de quatérnios, herdadas da semelhança com a estrutura de $\mathbb{R}^4$.

1. **Adição:** dados dois quatérnios $p = p_0 + \mathbf{p_v}$ e $q = q_0 + \mathbf{q_v}$ em $\mathbb{H}$, define-se a adição de p a q como

$$p + q = (p_0 + q_0) + (\mathbf{p_v} + \mathbf{q_v}) \tag{3}$$

Temos uma proposição que mostra que esta adição está bem-definida no conjunto de quatérnios.

Proposição 1.1 *O conjunto* $\mathbb{H}$ *é fechado para adição.*

Demonstração. Ou seja, o que queremos mostrar é que a soma de dois quatérnios é, por sua vez, um novo quatérnio. De fato: considerando $r = p + q$, podemos escrever o elemento r como

$$r = r_0 + \mathbf{r_v} \tag{4}$$

onde sua parte escalar é dada por $r_0 = p_0 + q_0$ e sua parte vetorial é dada por $\mathbf{r_v} = \mathbf{p_v} + \mathbf{q_v}$.$\blacksquare$

Esta operação possui algumas propriedades. Dados $p, q, r \in \mathbb{H}$ arbitrários, temos as seguintes propriedades para a adição de quatérnios.

(a) **Associatividade:** $(p + q) + r = p + (q + r)$.

Demonstração. Seja $p = p_0 + \mathbf{p_v}, q = q_0 + \mathbf{q_v}, r = r_0 + \mathbf{r_v}$, tal que $p, q, r \in \mathbb{H}$. Partindo de $(p + q) + r$ temos:

$(p+q)+r = [(p_0+\mathbf{p_v})+(q_0+\mathbf{p_v})]+(r_0+\mathbf{r_v}) = [(p_0+q_0)+(\mathbf{p_v}+\mathbf{q_v})]+(r_0+\mathbf{r_v}) = [(p_0+q_0+r_0)+(\mathbf{p_v}+\mathbf{q_v}+\mathbf{r_v})] = [(p_0+q_0+r_0)+(\mathbf{p_v}+\mathbf{q_v}+\mathbf{r_v})] = \{[p_0+(q_0+r_0)]+[\mathbf{p_v}+(\mathbf{q_v}+\mathbf{r_v})]\} = (p_0+\mathbf{p_v})+[(q_0+r_0)+(\mathbf{q_v}+\mathbf{r_v})] = (p_0+\mathbf{p_v})+[(q_0+\mathbf{q_v})+(r_0+\mathbf{r_v})] = p+(q+r)$. $\blacksquare$

(b) **Comutatividade:** $p+q=q+p$

Demonstração. Seja $p=p_0+\mathbf{p_v}, q=q_0+\mathbf{q_v}$, tal que $p,q\in\mathbb{H}$. Partindo de $p+q$, temos:

$p+q=(p_0+\mathbf{p_v})+(q_0+\mathbf{q_v})=(p_0+q_0)+(\mathbf{p_v}+\mathbf{q_v})=(q_0+p_0)+(\mathbf{q_v}+\mathbf{p_v})=q+p.$ ■

(c) **Existência de Elemento Neutro:** Existe um elemento neutro, a saber, $0_{\mathbb{H}}=0_0+\mathbf{0_v}\in\mathbb{H}$, de modo que,

$$p+0_{\mathbb{H}}=0+p=p \tag{5}$$

Demonstração. Seja $p=p_0+\mathbf{p_v}$ e $0_{\mathbb{H}}=0_0+\mathbf{0_v}$, tal que $p,0_{\mathbb{H}}\in\mathbb{H}$. Partindo de $p+0_{\mathbb{H}}$, temos:

$p+0_{\mathbb{H}}=(p_0+\mathbf{p_v})+(0_0+\mathbf{0_v})=(p_0+0_0)+(\mathbf{p_v}+\mathbf{0_v})=(0_0+p_0)+(\mathbf{0_v}+\mathbf{p_v})=p_0+\mathbf{p_v}=p.$ ■

(d) **Existência de Elemento Oposto:** Existe um elemento oposto para cada $p=p_0+\mathbf{p_v}\in\mathbb{H}$, dado por $-p=-p_0-\mathbf{p_v}$, de modo que sua soma com p resulte no elemento neutro da adição do item anterior, ou seja,

$$p+(-p)=(-p)+p=0_{\mathbb{H}} \tag{6}$$

Demonstração. De fato, se partirmos de $p+(-p)$, temos:

$p+(-p)=(p_0+\mathbf{p_v})+(-p_0-\mathbf{p_v})=[p_0+(-p_0)]+[\mathbf{p_v}+(-\mathbf{p_v})]=(p_0-p_0)+(\mathbf{p_v}-\mathbf{p_v})=0_0+\mathbf{0_v}=0_{\mathbb{H}}.$ ■

Como a adição de quatérnios satisfaz estas propriedades, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2. $(\mathbb{H},+)$ é um *grupo abeliano*.

2. **Multiplicação por Escalar:** Dados um quatérnio $q=q_0+\mathbf{q_v}\in\mathbb{H}$ e uma constante escalar real $\alpha\in\mathbb{R}$, define-se a multiplicação de q pelo escalar α da forma

$$\alpha q=(\alpha q_0)+(\alpha\mathbf{q_v}) \tag{7}$$

A próxima proposição mostra que esta operação unindo itens de espaços distintos está bem definida no conjunto dos quatérnios.

Proposição 1.3. O *conjunto* $\mathbb{H}$ *é fechado para a multiplicação de escalares reais.*
Demonstração. Queremos demonstrar que a multiplicação de um escalar por um quatérnio tem por resultado um novo quatérnio. Com efeito: acima, podemos considerar tal multiplicação como o elemento

$$r=r_0+\mathbf{r_v} \tag{8}$$

onde sua parte escalar é dada por $r_0 = \alpha q_0$ e sua parte vetorial é dada por $\mathbf{r_v} = \alpha \mathbf{q_v}$. ■

A multiplicação por escalar também tem uma série de propriedades. Dados os números reais α, β e os quatérnios p e q, temos:

(a) **Associatividade:** $(\alpha\beta)q = \alpha(\beta q)$

Demonstração. De fato, seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $q = q_0 0 + \mathbf{q_v} \in \mathbb{H}$, partindo de $(\alpha\beta)q$ temos:

$(\alpha\beta)q = (\alpha\beta)(q_0 + \mathbf{q_v}) = \alpha\beta q_0 + \alpha\beta\mathbf{q_v} = \alpha(\beta q_0 + \beta\mathbf{q_v}) = \alpha(\beta q)$. ■

(b) **Multiplicação pela unidade:** $1q = q$

Demonstração. Queremos provar que $1q = q$. Para isto, tome $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha = 1$. Partindo de $1q = 1(q_0 + \mathbf{q_v}) = (1q_0 + 1\mathbf{q_v}) = q_0 + \mathbf{q_v} = q$. Logo, $1q = q$. ■

(c) **Distributividade em relação à soma:** estas duas propriedades unem a adição e a multiplicação por escalar e são dadas por

$$(\alpha + \beta)q = \alpha q + \beta q \tag{9}$$

e

$$\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q \tag{10}$$

Demonstração. Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{H}$.Partindo de $(\alpha+\beta)q = ((\alpha+\beta)q_0 + (\alpha+\beta)\mathbf{q_v})$. Deste modo, é fácil ver que $((\alpha+\beta)q_0 + (\alpha+\beta)\mathbf{q_v}) = \alpha(q_0 + \mathbf{q_v}) + \beta(q_0 + \mathbf{q_v}) = \alpha q + \beta q$. Analogamente, se olharmos para $\alpha q + \beta q$. Agora, partindo de $\alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q$. Aplicando as devidas distributividades, temos que $\alpha p + \alpha q = (\alpha p_0 + \alpha\mathbf{p_v}) + (\alpha q_0 + \alpha\mathbf{q_v}) = \alpha p + \alpha q$. Analogamente para $\alpha p + \alpha q$. Portanto, a distributividade é válida. ■

Proposição 1.3 O conjunto de quatérnios $\mathbb{H}$, munido das operações de adição e multiplicação por escalar real, forma uma estrutura de um 4-espaço vetorial real.
Teorema 1.4 O espaço vetorial dos quatérnios $\mathbb{H}$ é isomorfo ao espaço euclidiano de dimensão 4

$$\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^2$$

Definição 1.5 (Produto Algébrico de Quatérnios). Dados dois quatérnios não nulos $p, q \in \mathbb{H} - 0$, o produto algébrico entre p e q é dado por

$$pq = p_0 q_0 - < \mathbf{p_v}, \mathbf{q_v} > + p_0\mathbf{q_v} + q_0\mathbf{p_v} + \mathbf{p_v} \times \mathbf{q_v} \tag{11}$$

Considerando $p = p_0 + \mathbf{p_v}$ e $q = q_0 + \mathbf{q_v}$.

Demonstração. Suponha dois elementos pertencentes a $\mathbb{H} - 0, p = p_0 + \mathbf{p_v}$ e $q = q_0 + \mathbf{q_v}$ e escritos em $B_{\mathbb{H}}$. Sabe-se que podemos escrever $\mathbf{p_v} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{q_v} = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$. Se multiplicarmos os dois elementos termo a termo, como na propriedade distributiva, teremos:

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3)(q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) \\ &= (p_0q_0 + p_0 + \mathbf{i}p_0q_1 + p_1q_0) + \mathbf{j}(p_0q_2 + p_2q_0) \\ +\mathbf{k}(p_0q_3 + p_3q_0) + \mathbf{i}^2p_1q_1 &+ \mathbf{j}^2p_2q_2 + \mathbf{k}^2p_3q_3 + \mathbf{ij}p_1q_2 + \mathbf{ji}p_2q_1 \\ &+\mathbf{ik}p_1q_3 + \mathbf{ki}p_3q_1 + \mathbf{jk}p_2q_3 + \mathbf{kj}p_3q_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Mas podemos utilizar de algumas definições para simplificar a equação acima. Os produtos dos versores a seguir foram definidos por Hamilton por construção a partir de seus três planos retangulares intersectados utilizando de rotações [6].

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}$$

$$\mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}$$

$$\mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}$$

Note que esses são os produtos que fazem com que esta álgebra seja não comutativa no produto. Também são graças a esses produtos que poderemos agrupar os termos comuns em 1. Logo, usando os produtos definidos acima e a fórmula fundamental $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$ temos:

$$\begin{aligned} pq = (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + p_0(\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 + q_0(\mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) \\ +\mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Veja que conseguimos um produto interno no $\mathbb{R}^3$, uma vez que $< \mathbf{pv}, \mathbf{qv} >= p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$, então, por uma questão de estética, para deixar está operação menor:

$$\begin{aligned} pq = p_0q_0 - < \mathbf{pv}, \mathbf{qv} > + p_0\mathbf{q_v} + q_0\mathbf{p_v} + \mathbf{i}(p_2p_3 - p_3p_2) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) \\ +\mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1) \end{aligned} \tag{14}$$

Mais uma vez podemos simplificar esta equação, porém agora utilizando do produto vetorial no $\mathbb{R}^3$. Sabendo que $\mathbf{p_v} \times \mathbf{q_v} = \mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1)$. Assim, chegamos ao produto algébrico de quatérnios, dado por:

$$pq = p_0q_0 - < \mathbf{p_v}, \mathbf{q_v} > + p_0\mathbf{q_v} + q_0\mathbf{p_v} + \mathbf{p_v} \times \mathbf{q_v} \tag{15}$$

Proposição 5.5 O conjunto dos quatérnios é fechado pelo produto algébrico de quatérnios.

Demonstração. De fato. Considerando a equação (11), temos que o quatérnio produto algébrico $r = pq$ pode ser escrito como

$$r = r_0 + \mathbf{r_v}, \tag{16}$$

onde $r_0 = (p_0q_0 - < \mathbf{p_v}, \mathbf{q_v} >)$ e $\mathbf{r_v} = (p_0\mathbf{q_v} + q_0\mathbf{p_v} + \mathbf{p_v} \times \mathbf{q_v})$. Portanto, $r \in \mathbb{H}$ ■

Proposição 1.6 O produto algébrico de quatérnios é associativo. Ou seja, dados $p, q, r \in \mathbb{H}$, temos que

$$(pq)r = p(qr) \tag{17}$$

Proposição 1.7 O produto algébrico de quatérnios é distributivo em relação à adição, ou seja, $p, q, r \in \mathbb{H}$

$$p(q + r) = pq + pr \quad e \quad (p + q)r = pr + qr \tag{18}$$

Teorema 1.7 O conjunto dos quatérnios munido de adição, multiplicação por escalar e do produto algébrico de quatérnios forma uma álgebra associativa chamada **Álgebra dos Quatérnios**.

Proposição 1.7 O conjunto dos quatérnios é fechado para o produto algébrico de Quatérnios.

Demonstração. De fato, pois considerando $p,q \in \mathbb{H}$, sabemos que $pq = p_0q_0 - < p_v,q_v > + p_0q_v + q_0p_v + p_v \times q_v$, assim, podemos denotar $pq = r$ pois, $r_0 + r_v = r = pq$ em que $r_0 = (p_0q_0 - < p_v,q_v >)$ e $r_v = (p_0q_v + q_0p_v + p_v \times q_v)$.Portanto, $r \in \mathbb{H}$ ■.

Proposição 1.8 O produto algébrico de Quatérnios é associativo, ou seja, dados $p,q,r \in \mathbb{H}$, temos $(pq)r = p(qr)$.

Proposição 1.9 O produto algébrico de quatérnios é distributivo em relação à adição, ou seja, dados $p,q,r \in \mathbb{H}$, $p(q+r) = pq + pr$ e $(p+q)r = pr + qr$.

Proposição 1.11 A álgebra de Quatérnios $\mathbb{H}$ não é comutativa. Além disso, temos que esta álgebra possui um elemento unidade dado por $1_{\mathbb{H}} = 1 + 0_v$.

Definição 1.6(Conjugado). Dado um quatérnio $q = q_0 + q_v$, define-se seu conjugado por $q^* = q_0 - q_v$.

Proposição 1.12(Conjugado do produto de Quatérnios). Dados dois quatérnios $p,q,r \in \mathbb{H}$, temos que o conjugado do produto desses quatérnios é dado por $(pq)^* = p^* \cdot q^*$.

Proposição 1.13(Conjugado da soma de Quatérnios). Dados dois quatérnios $p,q \in \mathbb{H}$, temos que o conjugado da soma desses Quatérnios é dado por $(p+q)^* = p^* + q^*$.

Proposição 1.14(Norma do conjugado de um Quatérnio). Dado um quatérnio $p \in \mathbb{H}$, a norma de seu conjugado é igual à sua própria norma. isto é $N(p^*) = N(p)$.

Demonstração. $N(p^*) = N(p)$. Temos que $N(p) = \sqrt{q^*q}$. Assim, partindo de $N(p) = \sqrt{(p^*)^* \cdot p^*} = \sqrt{p \cdot p^*}$, vamos chamar esta equação de Δ_1. Agora partindo de $N(p) = \sqrt{p \cdot p^*} = \sqrt{p \cdot p^*}$, chamando aqui de Δ_2. Logo, comparando Δ_1 com Δ_2, podemos ver que eles são iguais. Portanto, $N(p^*) = N(p)$. ■.

Proposição 1.15(Conjugado do conjugado de um Quatérnio). Dado um quatérnio $q \in \mathbb{H}$, o conjugado do conjugado de q é igual ao próprio q, ou seja, $(q^*)^* = q$.

Demonstração. Partindo de $(q^*)^* = ((q_0 + q_v)^*)^* = (q_0 - q_v)^* = q_0 + q_v = q$. ■

Proposição 1.16 A soma de um quatérnio e seu conjugado é um número real igual a duas vezes a parte real do quatérnio, ou seja, $q + q^* = 2q_0$.

Demonstração. $q + q^* = (q_0 + q_v) + (q_0 - q_v) = (q_0 + q_0) + (q_v - q_v) = 2q_0$. ■

4 Considerações Finais

Este projeto de iniciação científica exigiu muitos conhecimentos sobre Geometria Analítica e Álgebra Linear. Neste sentido, além de estar trabalhando com algo novo, foi uma oportunidade de consolidar o que já havia visto durante a graduação.

O conhecimento dos Quatérnios me permitirá explorar novos aspectos algébricos e geométricos distintos dos curriculares.

Referências

Jack Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, 2000.

Nenhuma citação no texto.