

## Motivação

Percebe-se uma tendência de mercado na adoção de sistemas autônomos móveis como solução para diversos problemas de engenharia, como o controle do estoque em um armazém, sistemas de logística, de transporte ou o cultivo de grandes áreas de plantio. A maior motivação deste trabalho decorre de que, seja o sistema autônomo ou não, o controle desses objetos se dá a partir da obtenção de suas localizações e por vezes tais objetos estão limitados a medir distâncias [1]. Isto é, tem-se um problema inverso, onde deseja-se calcular localizações através dos dados de distâncias.

## Geometria de Distâncias

A *Geometria de Distâncias*, termo cunhado por Leonard Blumenthal em 1953, se preocupa com os aspectos geométricos da disposição de objetos em determinado espaço métrico. Blumenthal se baseou nos trabalhos de Arthur Cayley que, em 1841, generalizou a fórmula de Herão (que relaciona a área de um triângulo com dados de distâncias) através da construção de um determinante que calcula o conteúdo (volume  $n$ -dimensional) de um  $k$ -simplex, tema que fora reestudado por Karl Menger em 1928, trabalhando numa construção axiomática da geometria através de distâncias. Blumenthal acreditava que o problema mais importante nesta área era o *Problema de Subconjunto*, que consistia em encontrar condições necessárias e suficientes a fim de decidir quando uma matriz simétrica era uma *Matriz de Distâncias*. A restrição desse problema à métrica euclidiana chama-se *Problema de Matrizes de Distâncias Euclidianas*, que foi flexibilizado por Yemini em 1979 ao considerar um conjunto de distâncias esparsas, o que possibilitou a reformulação do problema fundamental utilizando Teoria de Grafos [2].

**Definição 1** (Problema de Geometria de Distâncias, ou DGP). Dados um grafo simples, ponderado e conectado  $G = (V, E, d)$  e um inteiro  $K > 0$ , encontre uma realização  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^K$  tal que:

$$\forall \{u, v\} \in E, \quad \|x(u) - x(v)\| = d(u, v). \quad (1)$$

Diversas aplicações do DGP surgiram na literatura, induzindo novos subproblemas. Um estudo taxonômico deles foi realizado por Liberti *et. al.* em [2] e a aplicação que aqui nos interessa é conhecido como *Wireless Sensor Network Localization* (WSNL).

## Localização de Sensores

**Definição 2** (Problema WSNL). Obter solução única do DGP com  $K = 2$  ou  $3$ , onde são fornecidos os *Vértices Âncoras*  $A \subset V$  que já possuem uma posição em  $\mathbb{R}^k$  conhecida.

A unicidade está relacionada com a rigidez do grafo que define o problema [3]. A *trilateração* é um método para solucionar um WSNL definido por um  $(K + 2)$ -clique onde  $(K + 1)$  vértices são âncoras [4]. Nele, a solução do problema restringe-se a resolver um sistema linear do tipo  $Ay = b$ , *i.e.*, se  $A$  não é singular, a posição do  $(K + 2)$ -ésimo vértice é obtido calculando-se  $y = A^{-1}b = x_{K+2}$ . No geral, a singularidade de  $A$  está relacionada com a existência de vértices com posições coincidentes. Portanto, dado um  $(K + 2)$ -clique, sabe-se que se ele possuir uma realização em  $\mathbb{R}^K$  e não possuir vértices coincidentes, ela é única a menos de rotações e translações. Com isso, pode-se utilizar a trilateração de forma iterativa para realizar de forma única um grafo completo e, além disso, estende-se esse resultado com o objetivo de aplicar a trilateração em grafos “completos por partes” ao definir uma ordenação conveniente nos vértices do grafo.

**Definição 3** (Ordem de  $K$ -Lateração). Se  $<$  é uma ordem em  $V$  e  $v \in V$  é um vértice qualquer, então  $\gamma(v) = \{u \in V \mid u < v\}$  é dito conjunto de antecessores de  $v$  em relação a  $<$ ,  $N_G(v)$  é o conjunto de vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  e  $\rho(v) = |\gamma(v)| + 1$  é dito posto de  $v$  em  $<$ . Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma ordenação  $<$  sobre  $V$  é chamada *Ordem de  $K$ -Lateração* se:

- os primeiros  $K + 1$  vértices de  $<$  induzem um  $(K + 1)$ -clique  $G_o$  em  $G$ ;
- todo vértice  $v$ , com  $\rho(v) > K + 1$ , tem  $|N_G(v) \cap \gamma(v)| \geq K + 1$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é dito  *$K$ -Laterativo* se há uma ordem de  $K$ -lateração sobre  $V$  e não há vértices coincidentes. Como a existência de uma ordem de  $K$ -lateração garante que sempre haverá ao menos  $K + 1$  vértices já realizados antecessores a todo vértice  $v \in V$ , com  $\rho(v) > K + 1$ , será possível aplicar a trilateração a todo vértice, viabilizando o seguinte resultado:

**Teorema 1.** Se um grafo  $K$ -laterativo em  $\mathbb{R}^K$  possuir realização, ela é única.

## Simulações Computacionais

Assim, define-se o Algoritmo 1 para solucionar problemas de WSNL sobre grafos  $K$ -laterativos em tempo polinomial [4]. A fim de se realizar simulações computacionais, implementou-se este algoritmo em C, bem como um segundo para criar exemplares artificiais do problema com coordenadas aleatórias e um conjunto limitável de arestas extras.

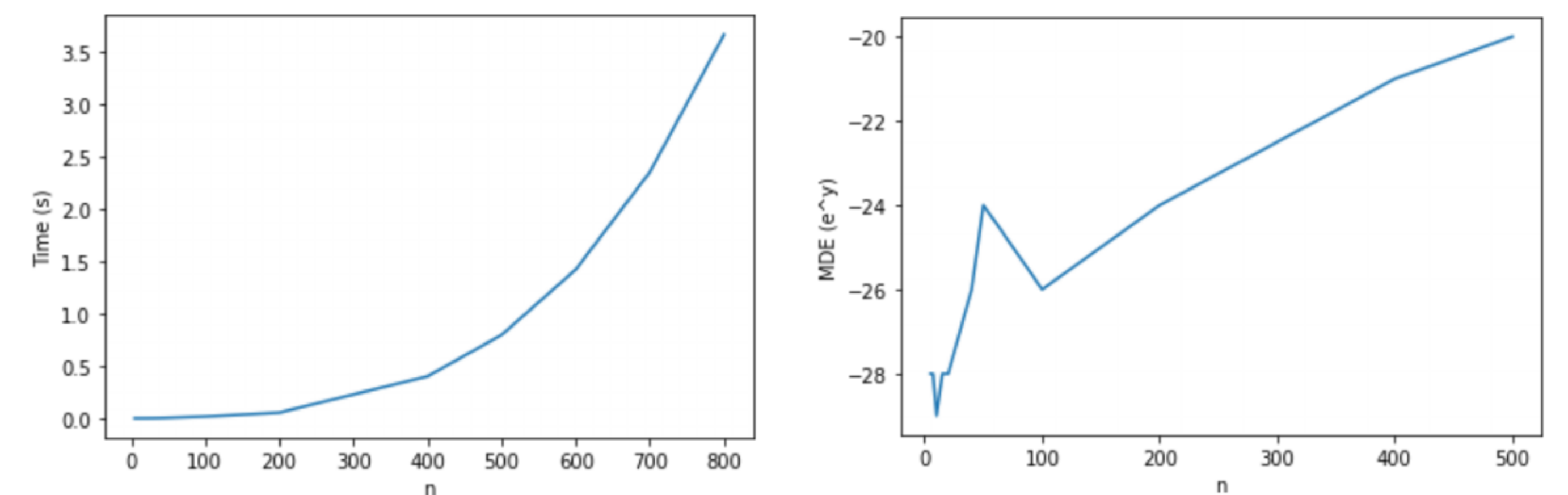
**Algorithm 1:**  $x = \text{RealizacaoIterativa}(G, d, K, x)$ , adaptado de [4]

```

1 for  $i \in \{K + 2, \dots, n\}$  do
2   sejam  $U \subset |N_G(v) \cap \gamma(v)|$ , com  $|U| = K + 1$ , e  $W = \{x_j \mid j \in U\}$ ;
3    $x_i \leftarrow \text{Trilateracao}(W)$ ;
4   for  $\{j \in \{(N_G(v) \cap \gamma(v)) \setminus U\} ; j < i\}$  do
5     if  $\|x_i - x_j\| \neq d_{ij}$  then
6        $x_i = \emptyset$ ;
7       break;
8     end
9   end
10  if  $x_i = \emptyset$  then
11    return  $\emptyset$ ;
12  end
13 end
14 return  $x$ ;
```

Com isso, para exemplares de  $n$  vértices e com 1% de arestas extras, a Figura 1 mostra o tempo decorrido para cada realização. Como utiliza-se vértices já realizados para realizar novos, acumula-se erros no processo. Podemos calcular esses erros com o chamado *mean distance error*.

**Definição 4** (*Mean Distance Error*, ou MDE). Seja  $G = (V, E, d)$  um grafo ponderado que define uma instância DGP. Se  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é um conjunto que define uma realização dos  $n$  vértices de  $G$  então,  $MDE(x) = \frac{1}{|d|} \sum_{i,j} \frac{||x_i - x_j|| - d_{i,j}}{d_{i,j}}$ .



**Figura 1:** A esquerda o tempo de processo e, a direita, a ordem de grandeza associada ao MDE das soluções.

Observe que há uma linearização no gráfico que representa o MDE da solução, pois este cresceu exponencialmente e variou sua ordem de grandeza entre  $10^{-28}$  a  $10^{-20}$  de 5 a 500 vértices. Esse comportamento se deu por conta dos erros acumulados entre as iterações. Também, o tempo de processamento cresceu polinomialmente, conforme o proposto.

## Referências

- [1] Savvides, A., Han, C. C., e Strivastava, M. B. Dynamic fine-grained localization in ad-hoc networks of sensors. *In Proceedings of the 7th annual international conference on Mobile computing and networking*, 166-179. DOI: 10.1145/381677.381693
- [2] Liberti, L., Lavor, C., Maculan, N., e Mucherino, A. (2014). Euclidean distance geometry and applications. *SIAM review*, 56:3-69. DOI:10.1137/120875909
- [3] Eren, T., Goldenberg, O. K., Whiteley, W., Yang, Y. R., Morse, A. S., Anderson, B. D., e Belhumeur, P. N. Rigidity, computation, and randomization in network localization. *IEEE INFOCOM 2004 volume 4*, pp. 2673-2684. DOI: 10.1109/INF-COM.2004.1354686
- [4] Liberti, L.; Lavor, C. *Euclidean Distance Geometry*. Springer, Berlin, 2017.

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq – Brasil. Agradecemos a organização do evento e a UFSC.