



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Centro Tecnológico, de Ciências Exatas e Educação  
Departamento de Matemática

PIBIC  
RELATÓRIO FINAL

Geometria de Distâncias e Álgebras Geométricas: novas perspectivas  
geométricas, computacionais e aplicações

---

**Disposição de Robôs Móveis no espaço  
Euclidiano 3D: uma aplicação de Geometria  
de Distâncias**

---

Guilherme Philippi (guilherme.philippi@hotmail.com),

ORIENTADOR: Felipe Delfini Caetano Fidalgo (felipe.fidalgo@ufsc.br).

26 de agosto de 2020

Ao meu pai,  
por me apresentar  
à matemática.

# Agradecimentos

Sou grato por todo o apoio e ternura de minha melhor amiga e esposa, Denise. Obrigado por me acompanhar nos momentos conturbados do ano de desenvolvimento desse trabalho. Em especial, ano esse que compartilhamos os cuidados do primeiro ano de nosso primeiro filho, Gael. Obrigado, filho, por toda felicidade nos entregue e pela paciência nos momentos de trabalho do papai.

Agradeço também ao meu amigo, professor e orientador Felipe, pela paciência, incentivo, confiança e por tantas horas cedidas em sua sala enquanto conversávamos sobre a ciência, a vida e tudo mais. Obrigado por toda a ajuda, por me apresentar à Geometria de Distâncias e por todas as xícaras de café.

Por fim, agradeço ao CNPq pela bolsa e por tanto proporcionar as condições para a pesquisa no país.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Materiais e Métodos</b>	<b>2</b>
2.1	Teoria de Grafos . . . . .	2
2.1.1	Descoberta (Eureka!) . . . . .	2
2.1.2	Definições e Resultados Principais . . . . .	4
2.2	Geometria de Distâncias Euclidianas . . . . .	8
2.2.1	Como tudo Começou . . . . .	8
2.2.2	O Problema Fundamental . . . . .	14
2.2.3	Os Diferentes Problemas em DG . . . . .	14
2.2.4	A Busca de uma Solução . . . . .	17
2.2.5	Ferramentas Combinatórias na Solução do DGP . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>27</b>
3.1	Robótica Móvel . . . . .	27
3.1.1	Sensores . . . . .	28
3.1.2	Como medir distâncias . . . . .	29
3.1.3	Sobre o conjunto de sensores . . . . .	31
3.2	Medindo erros . . . . .	31
3.3	Exemplares utilizados . . . . .	32
3.4	Simulações . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>36</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>38</b>
<b>A</b>	<b>Métricas</b>	<b>42</b>
<b>B</b>	<b>Rigidez</b>	<b>43</b>

## Abstract

In this work, the application of the so called Distance Geometry Problem to the Sensor Location Problem was studied, as well as the necessary tools for its understanding, from Graph Theory to the characteristics of systems involving mobile robotics. An overview of Distance Geometry was presented, which enabled the correct definition of the problem and polynomial algorithms to solve it. The text ends with an analysis of computer simulations of the problem, using different geometries, as well as an algorithm to generate them.

**Keywords:** Distance Geometry, Mobile Robotics.

## Resumo

Neste trabalho, estudou-se o assim chamado Problema de Geometria de Distâncias aplicado ao Problema de Localização de Sensores, bem como as ferramentas necessárias para sua compreensão, passando da teoria de grafos às características de sistemas envolvendo robótica móvel. Apresentou-se uma visão geral de Geometria de Distâncias, o que possibilitou a correta definição do problema e de algoritmos polinomiais para solucioná-lo. O texto se encerra com uma análise de simulações computacionais do problema, utilizando diferentes geometrias, bem como um algoritmo para gerá-las.

**Palavras-chave:** Geometria de Distâncias, Robótica Móvel.

# Capítulo 1

## Introdução

Percebe-se uma tendência de mercado em se adotar sistemas autônomos móveis para realizar funções que dependem de um grande número de máquinas, como o controle do estoque em um armazém, um sistema de entrega ou o cultivo e tratamento de grandes áreas de plantio [1]. O estudo da localização de robôs móveis é vasta na literatura [2, 3], o que demonstra a importância deste tema. Qualquer solução de engenharia móvel, seja autônoma ou não, precisa definir uma forma de localizar seu objeto de estudo. Por conta disso, no decorrer desse texto, estuda-se algumas soluções envolvendo Geometria de Distâncias para a obtenção de localização.

A Geometria de Distâncias (GD) é uma matéria de interesse relativamente recente da Ciência [4], disposta em uma vasta interseção entre diversas áreas do conhecimento. Em suma, ela se preocupa com os aspectos geométricos decorrentes dos objetos que estão dispostos em algum espaço e possuam uma relação de distância mensurável, advindas de origens tão variáveis quanto se queira. Como é o caso de estudo deste texto: distâncias entre robôs móveis com seu meio e, em particular, outros robôs móveis.

Para poder representar essas distâncias, apresenta-se na Seção 2.1 um estudo sobre a Teoria de Grafos — que demonstrou-se uma ferramenta importante para GD, em contraponto à utilização da representação matricial [4]. Em seguida, na Seção 2.2, enuncia-se o problema fundamental deste trabalho utilizando grafos e faz-se um estudo sobre algoritmos descritos na literatura para solucioná-lo.

Na última parte deste trabalho há uma introdução à robótica móvel, na Seção 3.1, onde apresenta-se um estudo sobre os sensores existentes para a obtenção de distâncias, seguidos por algumas simulações computacionais do problema, na Seção 3.4. Por fim, há discussões envolvendo esses resultados. O texto também contém dois apêndices, podendo serem usados como consulta, o que inclui algumas ferramentas matemáticas utilizadas.

Uma revisão bibliográfica completa pode ser encontrada no fim do documento, antes dos apêndices, na Página 38.

# Capítulo 2

## Materiais e Métodos

### 2.1 Teoria de Grafos

Esta seção tem como objetivo apresentar um breve resumo da *Teoria de Grafos*, tema amplamente estudado por diversos matemáticos e aplicado em diversas áreas do conhecimento como computação, engenharia e matemática [5].

#### 2.1.1 Descoberta (Eureka!)

Costuma-se dizer que a teoria se iniciou em 1736, com base no artigo publicado por Leonhard Euler (1707 a 1783) sobre as 7 pontes de Königsberg [6], representada na Figura 2.1. Conta a história que os moradores daquela região perguntavam-se sobre a possibilidade de atravessar todas as sete pontes do local sem ter que repetir alguma delas. Esse é um problema muito usado para introduzir o tema [7] — propõe-se o desafio de ligar todos os pontos de um desenho sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes no mesmo ponto. Para o caso das pontes de Königsberg, Euler provou que era impossível fazer isso ao formular matematicamente o problema, dando origem a esta teoria.

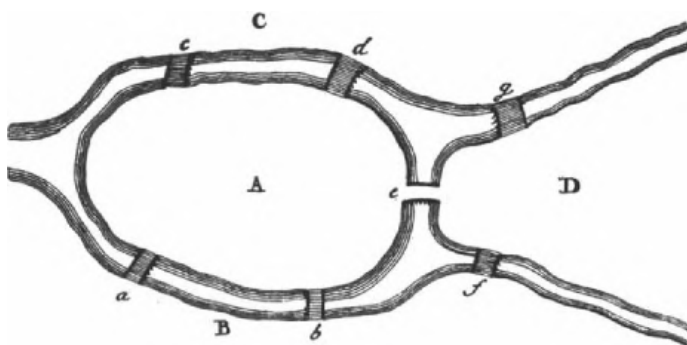


Figura 2.1: Ilustração original do problema [6].



Figura 2.2: Euler.

A grande ideia de Euler foi abstrair o problema: vê-lo de uma forma elementar, como um conjunto de pontos conectados por curvas. Isso pode ser representado por um “gráfico”, conforme a Figura 2.3 — é daí a origem do termo em inglês “Graph”, que é tradução literal de “Gráfico”. Essa representação facilita a análise e a busca por uma solução. Com isso, Euler percebeu que só seria possível solucionar o problema se houvesse exatamente nenhum ou apenas dois pontos conectados por um número

ímpar de curvas (ou pontes) — o par de caminhos está associado com o ato de entrar e sair de um ponto [6]. Note que o caso de Königsberg, não possui solução.

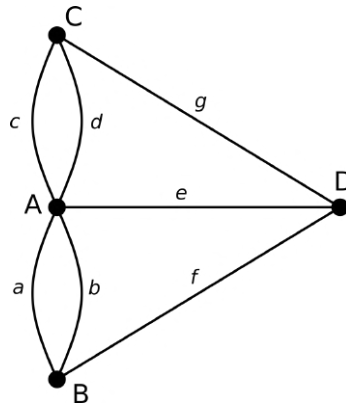


Figura 2.3: Grafo representando o caso da ponte de Königsberg.

Mas não se pode deixar todo o mérito com Euler. O conceito de grafo é muito intuitivo e foi proposto por diversas mentes brilhantes como forma de solucionar problemas que, em essência, são muito parecidos. Após Euler, a teoria foi redescoberta por Gustav Kirchhoff (1824 a 1887) e Arthur Cayley (1821 a 1895) [8]. Kirchhoff desenvolveu esse conceito por volta de 1847, enquanto solucionava sistemas de equações lineares que relacionavam as correntes que percorriam as malhas de um circuito elétrico [9]. Dez anos depois, em 1857, foi a vez de Cayley, que estudava diferentes estruturas em bioquímica formadas por carbonos (com quatro ligações químicas) e hidrogênios (com apenas uma ligação), onde conseguiu formular seu problema introduzindo o conceito de *árvore* em grafos [10].

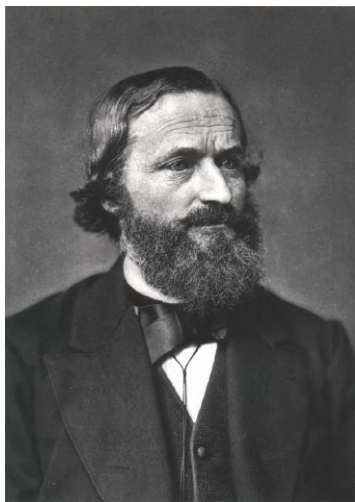


Figura 2.4: Gustav Kirchhoff.

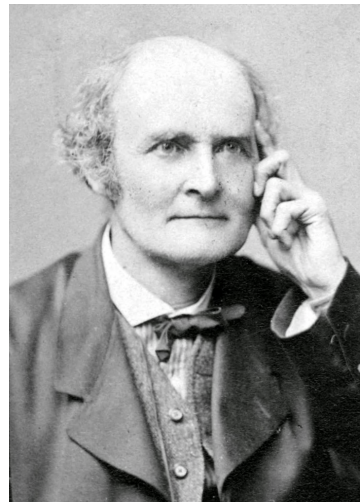


Figura 2.5: Arthur Cayley.

Além dessas, muitas outras situações reais podem ser convenientemente representadas por simples diagramas contendo um conjunto de pontos e um conjunto de relações entre pares desses pontos. Por exemplo, pode-se definir o conjunto  $P = \{a, b, c\}$  das pessoas  $a, b$  e  $c$  e um conjunto  $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$  como o conjunto de amizades entre essas pessoas — no caso,  $a$  é amigo de  $b$ , que é amigo de  $c$ , porém



$a$  não é amigo de  $c$ . Esta análise se torna muitíssimo útil quando se deseja estudar como uma informação se propaga em redes sociais.

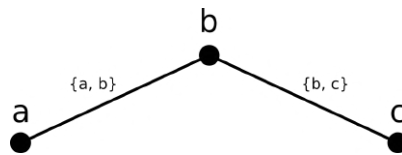


Figura 2.6: Grafo representando a relação entre as pessoas  $\{a, b, c\}$ .

### 2.1.2 Definições e Resultados Principais

Não há um forte consenso sobre as terminologias usadas pelos autores sobre grafos. Essa confusão se deve tanto pela sua vasta disseminação em diversas áreas como pela enorme abstração que ela carrega. Cayley poderia chamar as relações entre pontos de ligações químicas enquanto Kirchhoff chamaria de curto-circuitos. No que se segue, há aqui um apanhado de definições sobre a Teoria de Grafos fortemente baseado em [8] e [5]. Mas não sobre toda ela. Essa é uma grande área da matemática e não cabe aborda-lá completamente nesse texto. Trata-se apenas do essencial para que o leitor possa progredir sem ter que consultar uma bibliografia complementar sobre grafos.

**Definição:** Um *Grafo*  $G$  é uma tripla ordenada da forma  $(V_G, E_G, \psi_G)$ , composta por um *Conjunto de Vértices*  $V_G$ , um *Conjunto de Arestas*  $E_G$  e uma *Função de Incidência*  $\psi_G$  que, por sua vez, associa a cada elemento de  $E_G$  um par não ordenado de elementos (nem sempre distintos) de  $V_G$ .

Nesse texto, porém, abstraiu-se a função de incidência  $\psi_G$  pois entende-se que o conjunto de arestas  $E_G$  é tal que, se  $e \in E_G$ , então  $e = \{a, b\}$  onde  $a, b \in V_G$ . Fica implícita, portanto, a associação dos elementos de  $V_G$  e  $E_G$ .

Aos elementos dos conjuntos  $V_G$  e  $E_G$ , refere-se-os por *Vértices* e *Arestas*, respectivamente. Também, para uma aresta  $e \in E_G$ , onde  $e = \{u, v\}$ , diz-se que  $u$  e  $v$  são *Vértices Adjacentes*. Chama-se  $u$  e  $e$  de *Incidentes*, assim como  $v$  e  $e$ . À quantidade de vértices adjacentes a  $v$  dá-se o nome *Grau* de  $v$ . Para um vértice  $v \in V_G$ , define-se o *Conjunto Vizinhaça*  $N_G(v)$  como o conjunto de todos os vértices  $u \in V_G$  adjacentes a  $v$ . Também, se duas arestas distintas  $e_1$  e  $e_2$  são incidentes com um vértice em comum, diz-se que  $e_1$  e  $e_2$  são *Arestas Adjacentes*.

Seja um grafo com  $m$  vértices e  $n$  arestas, dizer-se-á que este é um  $(m, n)$  *grafo*. Isto é, a Figura 2.6, para ilustrar, contém um  $(3, 2)$  grafo onde os vértices  $a$  e  $b$  são adjacentes, assim como as arestas  $\{a, b\}$  e  $\{b, c\}$ , porém, os vértices  $a$  e  $c$  não são. Define-se o  $(1, 0)$  Grafo como *Trivial*.

Existem muitas variações de grafos. A definição de grafo permite *Loops* (também chamado de *Lazo*, uma aresta da forma  $e = \{v, v\}$ , ou seja,  $v$  é adjacente a si mesmo) e *Múltiplas Arestas* (mais do que uma aresta ligando os mesmos dois vértices). Grafos que não permitem múltiplas arestas ou loops são ditos *Simples*. Grafos que permitem múltiplas arestas, mas não loops, são chamados de *Multigrafos*. Caso

também permitam os loops, os chamamos de *Pseudografos*. Na Figura 2.3 (do problema das pontes de Königsberg) temos um multigrafo e na Figura 2.7 um pseudografo.

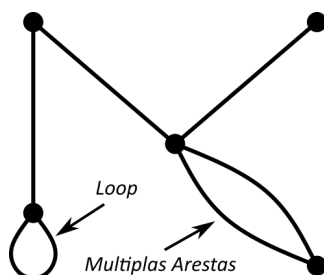


Figura 2.7: Exemplo de pseudografo contendo 5 vértices e 6 arestas.

Porém, para esse trabalho não interessa o estudo de multigrafos ou pseudografos. Por isso, adotou-se uma definição alternativa para grafos, visando restringir sua aplicação, como segue:

**Definição:** Um *Grafo Simples*  $G$  é uma dupla ordenada da forma  $(V_G, E_G)$ , composta por um conjunto não nulo e finito  $V_G$  e outro conjunto finito  $E_G$  de pares não ordenados de elementos **distintos** pertencentes a  $V_G$ .

Diz-se que um  $(m, n)$  grafo  $G$  é *Rotulado* quando pode-se distinguir seus  $m$  vértices ao nomeá-los — algo como  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . Por exemplo, os grafos da Figura 2.8 são rotulados, enquanto o grafo da Figura 2.7 não é. Quando não é dito o contrário, considera-se todo grafo como rotulado.

Dois grafos  $G = (V_G, E_G)$  e  $H = (V_H, E_H)$  são ditos *Isomorfos* (escreve-se  $G \cong H$ ) quando existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos de vértices  $V_G$  e  $V_H$  que preserve suas adjacências. A Figura 2.8 ilustra essa situação, com a correspondência  $v_i \longleftrightarrow v_i$ .

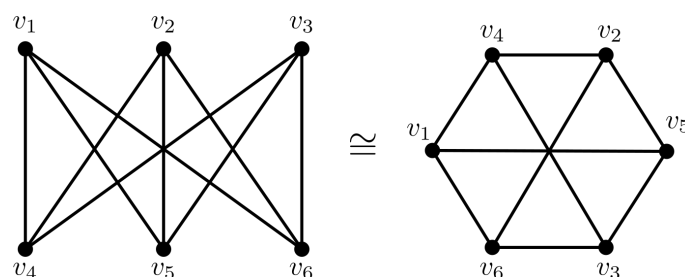


Figura 2.8: Diferentes representações isomórficas de um  $(6, 9)$  grafo.

O isomorfismo é uma relação de equivalência. Fica claro que, por mais que seja útil, a representação gráfica de um grafo existe apenas como um apelo intuitivo. A forma geométrica formada pelos vértices é escolha de quem desenha. Vários são os casos em que problemas envolvendo grafos são facilmente solucionáveis apenas rearranjando a forma como se desenha — como o caso das pontes de Königsberg. A resposta salta aos olhos.

## Subgrafos

Diz-se que o grafo  $G_1 = (V_{G_1}, E_{G_1})$  é *Subgrafo* de  $G = (V_G, E_G)$  se  $V_{G_1} \subset V_G$  e  $E_{G_1} \subset E_G$ . Se  $G_1$  é subgrafo de  $G$ , então  $G$  é *Supergrafo* de  $G_1$ . Para qualquer  $V \subset V_G$ , existe um *Subgrafo Induzido*  $\langle V \rangle$  definido por  $(V, E)$ , onde  $E \subset E_G$  contém todas as arestas  $(v_1, v_2) \in E_G$  tal que  $v_1, v_2 \in V$ . Fica claro que dois vértices em  $\langle V \rangle$  são adjacentes se, e somente se, forem também adjacentes em  $G$ .

Pode-se *remover um vértice*  $v$  de um grafo  $G = (V_G, E_G)$ , que resulta no subgrafo induzido  $G - v = \langle V_G \setminus \{v\} \rangle$ . Da mesma forma, pode-se *remover uma aresta*  $e$  de um grafo  $G = (V_G, E_G)$ , resultando no grafo  $G - e = (V_G, E_G \setminus \{e\})$ .

## Caminhos

Um *Passeio* em  $G$  é uma sequência finita não nula  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ , onde seus termos são alternados entre vértices e arestas, tal que, para  $1 \leq i \leq k$ , antes e depois de  $e_i$  vem  $v_{i-1}$  e  $v_i$ , respectivamente. Diz-se que  $W$  é um passeio de  $v_0$  para  $v_k$ , ou um  $(v_0, v_k)$ -passeio. Os vértices  $v_0$  e  $v_k$  são chamados origem e fim do passeio, respectivamente, e  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  são os vértices internos. O número  $k$  é o comprimento de  $W$ . Em um grafo simples, um passeio  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$  é determinado suficientemente pela sequência dos vértices que o constitui  $v_0 v_1 v_2 \dots v_k$ .

Se  $W = v_0 v_1 \dots v_k$  e  $W' = v_k v_{k+1} \dots v_l$  são passeios, o passeio  $W^{-1} = v_k v_{k-1} \dots v_0$  é dito *Passeio Reverso* de  $W$  e o passeio  $WW' = v_0 v_1 \dots v_l$  é dito *Concatenação* de  $W$  com  $W'$ . Chama-se *Seção* do passeio  $W$  uma subsequência  $(v_i, v_j)$ -seção  $= v_i v_{i+1} \dots v_j$  de termos consecutivos de  $W$ .

Se as arestas  $e_1, e_2, \dots, e_k$  de um passeio  $W$  são todas distintas — o que sempre ocorre em grafos simples — chama-se  $W$  de *Trilha*. Se, adicionalmente, os vértices da trilha  $W$  forem todos distintos, chama-se  $W$  de *Caminho* (também conhecido como *Caminho Simples*).

## Conectividade

Dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são ditos *Conectados* se existe um  $(u, v)$ -passeio em  $G$ . A conectividade induz uma relação de equivalência sobre o conjunto de vértices  $V$ : Há uma partição de  $V$  em subconjuntos não vazios  $V_1, V_2, \dots, V_\omega$  tal que dois vértices  $u$  e  $v$  são conectados se, e somente se,  $u$  e  $v$  pertencem ambos ao mesmo subconjunto  $V_i$ . Os subgrafos induzidos  $\langle V_1 \rangle, \langle V_2 \rangle, \dots, \langle V_\omega \rangle$  são chamados *Componentes de  $G$* . Se  $G$  tem exatamente uma única componente, então  $G$  é dito *Conectado*; e, do contrário,  $G$  é dito *Desconectado*.

A Figura 2.9 mostra dois grafos: O grafo da esquerda é conectado — possui uma única componente  $\langle \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \rangle$ ; porém, o da direita não é — pois possui duas componentes  $\langle \{v_1, v_2, v_3\} \rangle, \langle \{v_4\} \rangle$ .

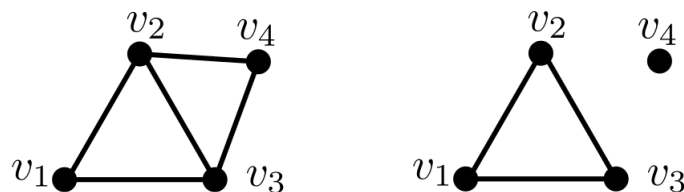


Figura 2.9: A esquerda um grafo conectado e, a direita, um grafo desconectado

## Grafos Completos

Introduze-se agora uma classe especial de grafos: Um grafo é dito *Completo* se possui todas as suas arestas possíveis, i.e., para cada par de vértices distintos  $u, v \in V_G$ ,  $u$  é adjacente a  $v$  (vide Figura 2.10).

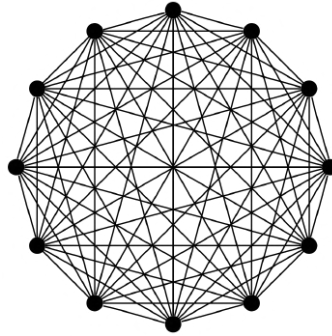


Figura 2.10: Diagrama de um grafo completo com 12 vértices ( $|V| = 12$ ).

Usando combinatória, sabe-se que todo grafo completo com  $n$  vértices possui  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  arestas.

Em particular, chama-se de  $k$ -Clique um subgrafo  $G'$  de  $G$ , com  $k$  vértices, tal que  $G'$  é completo, independente se seu supergrafo  $G$  é ou não completo. Por exemplo, selecionando arbitrariamente quaisquer dois vértices do grafo da Figura 2.10, pode-se gerar um 2-clique induzido por estes e, caso toma-se 3 vértices, pode-se gerar um 3-clique (veja a Figura 2.11).

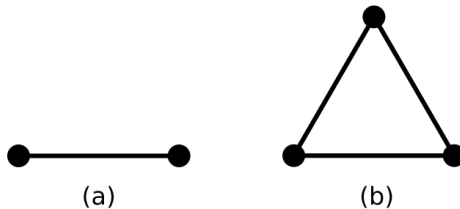


Figura 2.11: (a) 2-clique e (b) 3-clique.

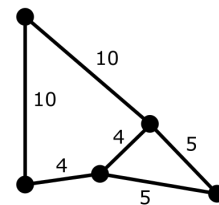


Figura 2.12: Grafo ponderado.

## Grafos Ponderados

As arestas  $e \in E$  de um grafo  $G$  pode estar associadas com um número real  $d(e)$ , chamado de *Peso da Aresta*  $e$  (veja a Figura 2.12). Quando  $G$  tem todas as suas arestas associadas com pesos, define-se  $G$  como um *Grafo Ponderado*. Grafos ponderados são frequentemente associados com aplicações em teoria de grafos [11].

Costuma-se definir uma *Função Ponderação*  $d : E \rightarrow \mathbb{R}$  para mapear o conjunto de arestas  $E$  no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  [12]. Escreve-se  $G = (V_G, E_G, d)$  como um grafo ponderado  $(V_G, E_G)$  e função ponderação  $d$ .

## 2.2 Geometria de Distâncias Euclidianas

Apresenta-se nesta seção uma introdução a *Geometria de Distâncias Euclidianas*, seguindo principalmente o estudo feito em [12] e [4]. O nome “Geometria de Distâncias” diz respeito ao fato desta geometria basear-se em distâncias ao invés de pontos. A palavra “Euclidiana” é importante para caracterizar as arestas — elementos fundamentais associados as distâncias — como segmentos de reta, sem restringir seus ângulos de incidência.

### 2.2.1 Como tudo Começou

Por volta de 300 AC, Euclides de Alexandria organizou o conhecimento de sua época acerca da Geometria em uma obra composta por treze volumes, onde construiu, a partir de um pequeno conjunto de axiomas fortemente baseado nos conceitos de pontos e linhas, a chamada *Geometria Euclidiana* [13]. Em contraponto à visão original de Euclides, os primeiros conceitos geométricos usando *apenas distâncias* costumam estar associados aos trabalhos de Herão de Alexandria (10 a 80 d.C.), com o desenvolvimento de um teorema que leva seu nome, como segue:

**Teorema de Herão:** Sejam  $s$  o *Semiperímetro* de um triângulo (se  $p$  é o perímetro,  $s = \frac{p}{2}$ ) e  $a, b$  e  $c$  os comprimentos dos três lados deste triângulo. Então, a área  $A$  do triângulo é

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (\text{Fórmula de Herão})$$

**Demonstração** baseada em [14]: Considere um triângulo com lados  $a, b, c$  (opostos aos vértices  $A, B, C$ , respectivamente) e seu círculo inscrito centrado na origem  $O$  do sistema e raio  $r$  (Figura 2.13). As perpendiculares da origem até os lados do triângulo, dividindo os lados  $a$  em  $y, z$ , o  $b$  em  $x, z$  e o  $c$  em  $x, y$ . Seja  $u, v, w$  os segmentos indo da origem  $O$  até os vértices  $A, B, C$ , respectivamente.

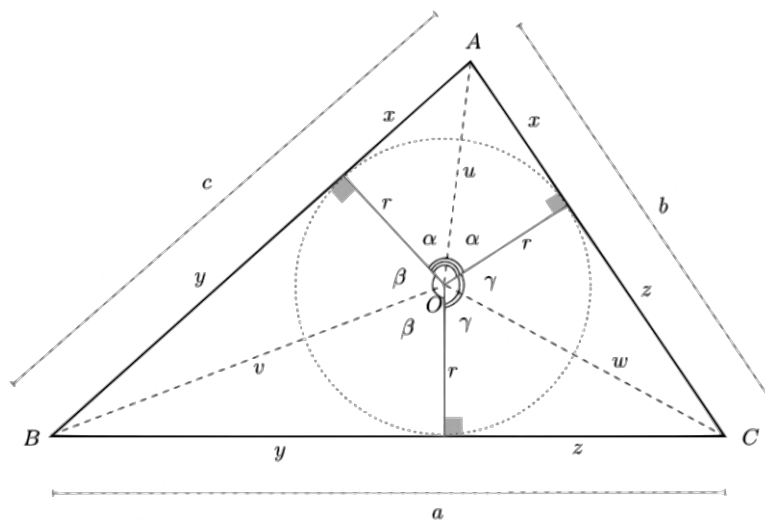


Figura 2.13: Fórmula de Herão: uma demonstração usando números complexos. [14]

Primeiro, nota-se que  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$ , o que implica  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Depois, as

seguintes identidades complexas são facilmente verificadas na Figura 2.13:

$$r + ix = ue^{i\alpha}, \quad r + iy = ve^{i\beta}, \quad r + iz = we^{i\gamma}.$$

Isso implica que:

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz) = (uvw)e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = uvwe^{i\pi},$$

e, conhecendo a identidade de Euler  $e^{i\pi} = -1$ ,

$$uvwe^{i\pi} = -uvw.$$

Como  $-uvw$  é um número real, a parte imaginária de  $(r + ix)(r + iy)(r + iz)$  deve ser zero. Expandindo o produto e rearranjando seus termos, tem-se que  $r^2(x + y + z) = xyz$ . Ao isolar  $r$ , cai-se na raiz não negativa

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}. \quad (2.1)$$

Pode-se escrever o semiperímetro do triângulo  $ABC$  como  $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(y + z + x + z + x + y) = x + y + z$ . Além disso,

$$s - a = x + y + z - y - z = x, \quad s - b = x + y + z - x - z = y, \quad s - c = x + y + z - x - y = z,$$

portanto  $xyz = (s - a)(s - b)(s - c)$ , implicando que a Equação 2.1 se torna:

$$r = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}.$$

Então escreve-se a área  $A$  do triângulo  $ABC$  como soma das áreas dos triângulos  $AOB$ ,  $BOC$  e  $COA$ , gerando

$$A = \frac{1}{2}(ra + rb + rc) = r \frac{a + b + c}{2} = rs = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

□

Pode-se dizer que esse foi o nascimento da *Geometria de Distâncias* (*Distance Geometry*, ou DG) [14].

Algumas centenas de anos depois, em 1841, Arthur Cayley (1821 a 1895) generalizou a Fórmula de Herão através da construção de um determinante que calcula o conteúdo (volume  $n$ -dimensional) de um *Simplex*<sup>1</sup> em qualquer dimensão [15, 16]. Um século depois, em 1928, o matemático austríaco Karl Menger (1902 a 1985) re-organizou as ideias de Cayley e trabalhou em uma construção axiomática da geometria através de distâncias [17] — originando a alteração no nome do determinante de Cayley para como é conhecido hoje: “*Determinante de Cayley-Menger*”.

<sup>1</sup>Um simplex é uma generalização do conceito de triângulo a outras dimensões, i.e., é a envoltória convexa ao redor dos pontos: O *0-simplex* é um ponto, *1-simplex* é um segmento de reta, *2-simplex* é um triângulo e o *3-simplex* é um tetraedro.

**Definição:** O *Determinante de Cayley-Menger* de um conjunto de  $n + 1$  pontos  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , onde  $d_{ij}$  corresponde a distância entre os pontos  $p_i$  e  $p_j$ , é dado por

$$D_{CM}(p_0, \dots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & d_{01}^2 & \dots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{Determinante de Cayley-Menger})$$

**Lema:** Considere um  $K$ -simplex em  $\mathbb{R}^K$  de vértices  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ , cujas coordenadas  $x_i^j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) são conhecidas. O *Volume Orientado*  $\mathbb{V}$  desse  $K$ -simplex é dado pela expressão

$$\mathbb{V} = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^K & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^K & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_K^1 & x_K^2 & \dots & x_K^K & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

**Demonstração** baseada em [16]: Em  $\mathbb{R}^2$ , três pontos não colineares determinam um triângulo. Se esses pontos possuem coordenadas as coordenadas  $x_0, x_1$  e  $x_2$ , utilizando Geometria Analítica, sabe-se que a área orientada do paralelogramo definido pelos vetores coluna  $x_1 - x_0$  e  $x_2 - x_0$  é dada por

$$A = \begin{vmatrix} (x_1 - x_0)^T \\ (x_2 - x_0)^T \end{vmatrix}.$$

Portanto, a área orientada  $\mathbb{V}_2$  do triângulo induzido pelos vetores  $x_1 - x_0$  e  $x_2 - x_0$  é

$$\mathbb{V}_2 = \frac{1}{2} |A|.$$

De forma semelhante, quatro pontos afimemente independentes em  $\mathbb{R}^3$  formam um tetraedro. Se a coordenadas de seus pontos forem  $x_0, x_1, x_2$  e  $x_3$ , o volume orientado  $\mathbb{V}_3$  deste tetraedro é dado por

$$\mathbb{V}_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} (x_1 - x_0)^T \\ (x_2 - x_0)^T \\ (x_3 - x_0)^T \end{vmatrix}.$$

Assim como em [18], a fórmula para o cálculo de um volume orientado  $\mathbb{V}_n$  de um  $n$ -simplex pode ser generalizada (por indução) a partir daqui. Um fator multiplicativo inversamente proporcional a  $K!$  aparece na expressão, de modo a ter-se

$$\mathbb{V}_K = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} (x_1 - x_0)^T \\ (x_2 - x_0)^T \\ \vdots \\ (x_K - x_0)^T \end{vmatrix}.$$

Ainda, pela expansão de Laplace, tem-se que

$$\mathbb{V}_K = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} (x_0)^T & 1 \\ (x_1 - x_0)^T & 0 \\ (x_2 - x_0)^T & 0 \\ \vdots & \vdots \\ (x_K - x_0)^T & 0 \end{vmatrix},$$

e pode-se somar a primeira linha as outras, sem alterar o valor do determinante, chegando ao nosso objetivo:

$$\mathbb{V}_K = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} (x_0)^T & 1 \\ (x_1)^T & 1 \\ (x_2)^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ (x_K)^T & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^K & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^K & 1 \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^K & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_K^1 & x_K^2 & \dots & x_K^K & 1 \end{vmatrix}.$$

□

Com isso, pode-se enunciar o seguinte resultado:

**Teorema:** Considere os  $K + 1$  pontos  $p_0, \dots, p_K$  que definem os vértices de um  $K$ -simplex em um espaço euclidiano  $K$ -dimensional. Então, o quadrado do conteúdo  $\mathbb{V}_K$  desse  $K$ -simplex é

$$\mathbb{V}_K^2(p_0, \dots, p_K) = \frac{(-1)^{K+1}}{(K!)^2 2^K} D_{CM}(p_0, \dots, p_K). \quad (2.3)$$

**Demonstração** também baseada em [16]: Pelo Lema anterior, tem-se que

$$\mathbb{V} = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^K & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^K & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_K^1 & x_K^2 & \dots & x_K^K & 1 \end{vmatrix}.$$

Pode-se utilizar o modelo de *Coordenadas Homogêneas* para descrever a matriz do determinante acima em um *Hiperplano Afim* de uma dimensão superior, ao introduzirmos uma borda de zeros com um 1 na diagonal, o que não altera o valor do determinante. Obtêm-se, então

$$\mathbb{V} = \frac{1}{K!} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^K & 1 & 0 \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^K & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_K^1 & x_K^2 & \dots & x_K^K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Agora, permuta-se as duas últimas colunas da matriz (o que altera o sinal do determinante) e, como  $\det(A) = \det(A^T)$ , pode-se tomar a transposta, da forma

$$\mathbb{V} = -\frac{1}{K!} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 & \dots & x_K^1 & 0 \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_K^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_0^K & x_1^K & \dots & x_K^K & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$



Sabendo que  $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T)$ , e que ambas a matriz do determinante acima tem dimensão  $(K+2) \times (K+2)$ , pode-se multiplicar a Equação 2.4 pela Equação 2.5 e obter

$$\mathbb{V}^2 = -\left(\frac{1}{K!}\right)^2 \begin{vmatrix} x_0^T x_0 & x_0^T x_1 & \dots & x_0^T x_K & 1 \\ x_1^T x_0 & x_1^T x_1 & \dots & x_1^T x_K & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_K^T x_0 & x_K^T x_1 & \dots & x_K^T x_K & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

E, sabendo que  $x_i^T x_j = \frac{1}{2}(x_i^T x_i + x_j^T x_j - d_{ij}^2)$ , pode-se alterar cada linha  $i$ , com  $0 \leq i \leq K$ , pela soma dela com a última linha multiplicada por  $-\frac{1}{2}x_i^T x_i$  (o que não altera o valor do determinante, por ser uma operação elementar). Também, pode-se fazer processo semelhante com as colunas: substituir cada coluna  $j$ , com  $0 \leq j \leq K$ , pela sua soma com a multiplicação da última coluna por  $-\frac{1}{2}x_j^T x_j$ . O que gera

$$\mathbb{V}^2 = -\left(\frac{1}{K!}\right)^2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}d_{00}^2 & -\frac{1}{2}d_{01}^2 & \dots & -\frac{1}{2}d_{0K}^2 & 1 \\ -\frac{1}{2}d_{01}^2 & -\frac{1}{2}d_{11}^2 & \dots & -\frac{1}{2}d_{1K}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}d_{0K}^2 & -\frac{1}{2}d_{1K}^2 & \dots & -\frac{1}{2}d_{KK}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Visto que ao multiplicar uma coluna da matriz do determinante por um escalar  $\alpha$ , o próprio determinante é multiplicado por  $\alpha^{-1}$ , pode-se multiplicar as primeira  $K+1$  colunas da matriz acima por -2, obtendo:

$$\mathbb{V}^2 = \frac{-1}{(K!)^2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{K+1} \begin{vmatrix} d_{00}^2 & d_{01}^2 & \dots & d_{0K}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & d_{11}^2 & \dots & d_{1K}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0K}^2 & d_{1K}^2 & \dots & d_{KK}^2 & 1 \\ -2 & -2 & \dots & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Como uma propriedade semelhante existe para multiplicações de linhas da matriz de um determinante, pode-se dividir a última linha da matriz anterior por -2. Também, ajustando os coeficientes, tem-se

$$\mathbb{V}^2 = (-2) \frac{-1}{(K!)^2} \frac{(-1)^{K+1}}{2^{K+1}} \begin{vmatrix} d_{00}^2 & d_{01}^2 & \dots & d_{0K}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & d_{11}^2 & \dots & d_{1K}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0K}^2 & d_{1K}^2 & \dots & d_{KK}^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Por fim, como a distância  $d_{ii} = 0$  para qualquer valor de  $i$  (pela definição de métrica), obtêm-se a expressão final, tal qual como desejava-se,

$$\mathbb{V}^2 = \frac{(-1)^{K+1}}{2^K (K!)^2} \begin{vmatrix} 0 & d_{01}^2 & \dots & d_{0K}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & \dots & d_{1K}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0K}^2 & d_{1K}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{K+1}}{2^K (K!)^2} D_{CM}(p_0, \dots, p_K).$$

□

Mas foi só com Leonard Blumenthal (1901 a 1984) que, em 1953, o termo Geometria de Distâncias foi cunhado — com a publicação de seu livro “*Theory and Applications of Distance Geometry*” [19]. Blumenthal dedicou sua vida de trabalho para clarificar, organizar e traduzir as obras originais em alemão. Ele acreditava que o problema mais importante nesta área era o “*Problema de Subconjunto*” (ou *Subset Problem*, originalmente), que consistia em encontrar condições necessárias e suficientes a fim de decidir quando uma matriz simétrica era, de fato, uma *Matriz de Distâncias*<sup>2</sup>. Uma restrição desse problema à métrica euclidiana chama-se *Problema de Matrizes de Distâncias Euclidianas* (ou EDMP, do inglês *Euclidean Distance Matrix Problem*), como segue definida:

**Problema de Matrizes de Distâncias Euclidianas:** Determinar se, para uma dada matriz quadrada  $D_{n \times n} = (d_{ij})$ , existe um inteiro  $K$  e um conjunto  $\{p_1, \dots, p_n\}$  de pontos em  $\mathbb{R}^K$  tal que  $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$  para todo  $i, j \leq n$ .

Condições necessárias e suficientes para que uma matriz seja, de fato, uma matriz de distância euclidiana são dados em [20]. Para isso, apresenta-se um teorema onde se utiliza o Determinante de Cayley-Menger na criação de duas condições afirmando que, afim de  $D_{n \times n}$  ser uma matriz de distâncias euclidianas, deve haver um  $K$ -simplex  $S$  de referência com conteúdo  $v_K \neq 0$  em  $\mathbb{R}^K$  e que todos os  $(K+1)$ -simplex e  $(K+2)$ -simplex contendo  $S$  como uma das faces devem estar contidos em  $\mathbb{R}^K$  [4].

Blumenthal percebeu a importância em se respeitar as restrições métricas estabelecidas pelas matrizes de distâncias.

*Quando temos como dado um conjunto de distâncias entre pares de pontos, a geometria das distâncias pode dar uma dica para encontrar um conjunto de coordenadas correto para pontos no espaço Euclidiano tridimensional, satisfazendo as restrições de distâncias dadas.*

(Blumenthal, 1953, [19])

Pode-se dizer que resolver o Problema de Matrizes de Distâncias Euclidianas está intimamente relacionado com descobrir as coordenadas dos pontos que definem suas distâncias. Perceba que este é um problema inverso, onde o “problema direto” correspondente é calcular distâncias associadas a pares de pontos dados. Note que este estudo tem enorme aplicabilidade.

Adiante, em 1979, Yemini (atualmente professor emérito de Ciência da Computação na Universidade de Columbia) foi o primeiro a flexibilizar a definição do EDMP ao considerar um conjunto de distâncias esparso [21] — i.e., que não se tem todas as distâncias dadas a priori. Com isso, introduziu-se o que se chamou de *Problema Posição - Localização*, onde deseja-se calcular a localização de todos os objetos imersos em um espaço geográfico.

Assim, foi possível reformular o problema fundamental de Geometria de Distâncias, o qual pode ser caracterizado de forma mais moderna pela utilização da Teoria de Grafos.

---

<sup>2</sup>Seja o par  $(\mathcal{X}, d)$  um *Espaço Métrico* (vide Apêndice A), onde  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Uma *Matriz de Distância sobre  $\mathcal{X}$*  é uma matriz quadrada  $D_{n \times n} = (d_{uv})$  onde, para todo  $u, v \leq n$ , temos  $d_{uv} = d(x_u, x_v)$ .

## 2.2.2 O Problema Fundamental

Uma *Realização* é uma função que mapeia um conjunto de vértices de um grafo  $G$  para um espaço euclidiano de alguma dimensão dada.

**Problema de Geometria de Distâncias (DGP):** Dados um grafo simples, ponderado e conectado  $G = (V, E, d)$  e um inteiro  $K > 0$ , encontre uma realização  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^K$  tal que:

$$\forall \{u, v\} \in E, \quad \|x(u) - x(v)\| = d(u, v). \quad (2.6)$$

Desde que uma realização seja encontrada, também dá-se a ela o nome de *Solução* do DGP. Por simplicidade — claramente um abuso de notação — pode-se escrever  $x_u$  e  $d_{uv}$  no lugar de  $x(u)$  e  $d(u, v)$ , respectivamente.

A principal diferença desta definição para o EDMP está acerca de que uma matriz de distância essencialmente representa um *Grafo Ponderado Completo*. Em contraponto, o DGP não empoe qualquer estrutura em  $G^3$ , seguindo o conceito de matriz esparsa estabelecido por Yemini.

Por fim, na equação 2.6, utiliza-se a norma euclidiana  $\|\cdot\|$  como métrica (ver Apêndice A), donde pode-se reescrever esta equação como

$$\forall \{u, v\} \in E, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^K (x_{ui} - x_{vi})^2} = d_{uv}.$$

Como a definição de métrica garante a positividade das distâncias, pode-se esconder a raiz quadrada na equação acima, i.e.

$$\forall \{u, v\} \in E, \quad \sum_{i=1}^K (x_{ui} - x_{vi})^2 = d_{uv}^2. \quad (2.7)$$

## 2.2.3 Os Diferentes Problemas em DG

Em 2014, Leo Liberti *et al.* publicaram um ótimo compendio sobre a *Geometria de Distâncias Euclidianas e suas Aplicações* e, em particular, desenvolveram um estudo taxonômico muito interessante sobre os problemas clássicos da área. No que se segue, devido a grande quantidade de siglas e variações dentro de DG, apresenta-se parte desse estudo, visando organizar os conceitos.

As principais aplicações em DG são no *Calculo de Estruturas Moleculares* [22], na *Localização de Sensores em Redes Sem Fio* (*Wireless Sensor Network Localization*, ou WSNL) [23], em *Cinemática Inversa* (*Inverse Kinematic*, ou IK) [24] e em *Escalonamento Multidimensional* (*Multidimensional Scaling*, ou MDS) [25].

### Escalonamento Multidimensional

O problema de *Escalonamento Multidimensional* (*Multidimensional Scaling*, ou MDS) é definido como: Dado um conjunto  $X$  de vetores, encontre um conjunto  $Y$  de

---

<sup>3</sup>A menos, é claro, no que diz respeito a seus vértices estarem conectados. Porém, caso  $G$  não seja conectado, então ele consiste de um conjunto de diferentes subgrafos conectados, donde, a fim de solucionar o DGP, pode-se realizar cada subgrafo separadamente.

vetores com menor dimensão (com  $|X| = |Y|$ ) tal que a distância entre cada  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo vetores de  $Y$  tenham, aproximadamente, a mesma distância que seus pares de vetores correspondentes em  $X$ .

Esse problema é muito aplicado na análise de dados em Big Data [12]. É um meio de facilitar a visualização do nível de similaridade entre casos individuais — que não necessariamente precisam ter uma conexão aparente — em um conjunto de dados. Pode-se usá-lo, por exemplo, para visualizar em uma escala bidimensional ( $\mathbb{R}^2$ ) a evolução da locomoção de animais no espaço tridimensional utilizando dados de séries temporais (espaço em diferentes tempos, logo, dados em  $\mathbb{R}^4$ ).

## Conformações Moleculares

Existe uma relação muito forte com a forma geométrica das moléculas e suas funções em organismos vivos [26]. Projetar drogas para curar uma doença específica se trata basicamente de conhecer o que uma certa proteína pode fazer em um organismo [12]. Proteínas se ligam em outras moléculas através do equilíbrio de forças agindo entre elas<sup>4</sup>, portanto, suas ligações dependem do seu formato.

Proteínas são constituídas por um grande conjunto de átomos e, alguns pares destes, trocam ligações químicas — sabe-se quais são esses átomos através de experimentos de cristalografia [28]. Então, se os átomos de uma molécula forem rotulados da forma  $1, 3, 4, \dots, n$ , então é possível inferir:

- O conjunto de ligações  $\{u, v\}$ , onde  $u, v$  são átomos em  $\{1, \dots, n\}$ ;
- A distância entre  $u$  e  $v$  (para cara par ligado);
- O ângulo interno  $\theta_v$  definido por duas ligações  $\{u, v\}$  e  $\{v, w\}$ , com um átomo  $v$  em comum.

Além desses dados, também é possível obter informações a partir de experimentos mais sofisticados, como a *Ressonância Magnética Nuclear* (RMN). Neste experimento é escolhida uma faixa de radiofrequência para bombardear uma amostra que está imersa em um campo magnético bastante intenso. Dependendo da radiofrequência utilizada (costuma-se usar a do hidrogênio), alguns núcleos atômicos irão absorver energia e outros não. Caso atinja-se uma frequência exata de ressonância dentro destes núcleos atômicos, é possível medir essa ressonância como um sinal de radiofrequência enviado dos núcleos atômicos — para calcular distâncias entre átomos próximos, com distâncias menores que  $5\text{\AA}$ .

De posse dessas informações, deseja-se realizar (localizar) todos os átomos da molécula. Esse problema, com todas as informações moleculares disponíveis, denomina-se *Estrutura Proteica a Partir de Dados Brutos* (*Protein Structure from Raw Data*, ou PSRD)

Em particular, como as coordenadas atômicas pertencem ao  $\mathbb{R}^3$ , há uma particularização do DGP para o caso molecular, chamado *Problema de Geometria de Distâncias Moleculares* (*Molecular DGP*, ou MDGP). Trata-se do DGP com  $K = 3$  fixo.

---

<sup>4</sup>Ou seja, o equilíbrio da energia potencial das moléculas, proporcional, principalmente, as variações nos comprimentos das ligações covalentes, as variações nos ângulos entre duas ligações covalentes consecutivas, as rotações sobre as ligações covalentes e as interações de van der Waals e interações eletrostáticas entre átomos [27].

## Localização de Sensores

O *Problema de Localização de Sensores em Rede sem Fio* (ou *WSNL Problem*) surge quando é necessário localizar um conjunto de objetos equipados com sensores eletrônicos capazes de medir distâncias entre si, geograficamente distribuídos, usando apenas medidas de distâncias entre pares destes objetos [23].

Por exemplo, *smartphones* com WIFI ativo podem criar uma rede conhecida por *Rede Ad-Hoc*, *i.e.*, eles conseguem criar uma rede para comunicar-se entre si, de forma *Peer-to-Peer*, sem a necessidade de uma torre central — cada aparelho funciona como uma pequena torre, de forma que a distância entre os aparelhos não pode ser excessiva. Dessa forma, os *smartphones* podem estimar a distância  $r$  de emparelhamento das suas conexões ao medir, por exemplo, qual a potência de transmissão do sinal, uma vez que sabe-se que a potência  $P$  de uma transmissão eletromagnética cai da forma

$$P = \frac{X}{r^n}, \quad (2.8)$$

onde  $X$  e  $n$  são constantes e dependem muito das condições do experimento, sendo obtidas experimentalmente [29].

Em essência, um problema do tipo WSNL segue a mesma definição do DGP, porém, com um subconjunto  $A \subset V$  de vértices (chamados *Âncoras*), onde os elementos de  $A$  tem uma posição em  $\mathbb{R}^k$  dada a priori — isso é feito pois, normalmente, interessa saber a posição relativa de um objeto a outro, como é o caso do Sistema de Posicionamento Global, onde temos os satélites como âncoras e desejamos saber a posição dos aparelhos GPS em relação aos satélites.

Por motivos práticos — semelhantes ao caso molecular — as variações de interesse desse problema tem o  $K$  fixo em  $K = 2$  ou  $K = 3$ . É comum, também, que se defina um WSNL como *Solucionável* somente se seu grafo possua uma única realização válida — noção conhecida como *Globalmente Rígido*: Diz-se que um grafo é *Globalmente Rígido* quando ele possui uma realização genérica  $x$  e, para todas as outras realizações  $x'$ ,  $x$  é congruente a  $x'$ .

## Dinâmicas em Cinemática Inversa

Muito utilizada em robótica e animação computadorizada, a cinemática inversa cerne sobre mecanismos e seus movimentos rígidos, onde restringe-se os movimentos de forma a preservar a geometria do sistema. Sem o auxílio computacional e matemático a manipulação de mecanismos com muitos graus de liberdade pode ser inviável: Imagine a manipulação manual de cem vértices em uma haste simulando o comportamento de um braço articulado em uma animação. Com o auxílio da DG, um animador pode apenas configurar a posição final de um pequeno grupo de vértices (como os da extremidade da aresta, por exemplo) e um algoritmo de cinemática inversa é capaz de verificar se aquela posição é ou não viável e, se viável, qual a realização de todo o conjunto de vértices em razão da posição configurada [24].

Visando tal restrição mecânica, define-se o *Problema de Cinemática Inversa* (*Inverse Kinematic Problem*, ou IKP) como uma variação do WSNL — logo, tem o objetivo de descobrir posições em relação a certos pontos previamente realizados — com uma restrição no grafo que define o problema: deve ser um caminho simples com seus vértices finais sempre sendo âncoras.

## 2.2.4 A Busca de uma Solução

A abordagem mais simples, pode-se pensar, para encontrar um conjunto de soluções que satisfaça a equação 2.7 é resolver o sistema de equações diretamente [30]. Infelizmente, para  $K \geq 2$ , há evidências de que uma solução de forma fechada onde todo componente de  $x$  é expresso por raízes, não é possível.

No entanto, pode-se reformular o problema como um Problema de Otimização Global, onde o objetivo é minimizar a soma dos *Erros*<sup>5</sup> entre as distâncias dadas a priori e as calculadas. Para isso, pode-se considerar uma única expressão que englobe todos os  $n$  erros, da forma

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in E} (\|x_i - x_j\|^2 - d_{ij}^2)^2. \quad (2.9)$$

Fica claro que encontrar uma solução para o DGP é equivalente a encontrar realizações  $x_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Visto que esta função se trata de uma soma de quadrados e que não há restrições nesse problema de Otimização Global, 0 é o valor mínimo de  $f$ . Deseja-se, portanto, minimizar a função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto é,

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n). \quad (2.10)$$

E, no caso da métrica euclidiana (vide Apêndice A), o problema 2.10 torna-se

$$\min_{x_j \in \mathbb{R}^n} \sum_{(u,v) \in E} \left( \sum_{i=1}^K (x_{ui} - x_{vi})^2 - d_{uv}^2 \right)^2. \quad (2.11)$$

Perceba que a introdução conveniente de quadrados nas distâncias da função 2.9 eliminou o cálculo da raiz na norma euclidiana presente na Equação 2.11 — uma otimização, principalmente por (i) multiplicação tem um custo numérico inferior ao da radiciação [31] e (ii) a radiciação pode apresentar alguns problemas numéricos para valores próximos de zero [32]. Portanto, a equação 2.11 tem como objetivo a minimização de um polinômio de múltiplas variáveis de grau quatro.

Um dos desafios da Otimização Global é que muitos dos métodos existentes — em especial, os mais eficientes — não garantem que uma otimização *global* será encontrada. Isso se dá pois podem existir muitos ótimos locais e, visto que os métodos de otimização contínua dispõem apenas de informações locais, estes não conseguem diferenciá-los de um global [30] (vide Figura 2.14).

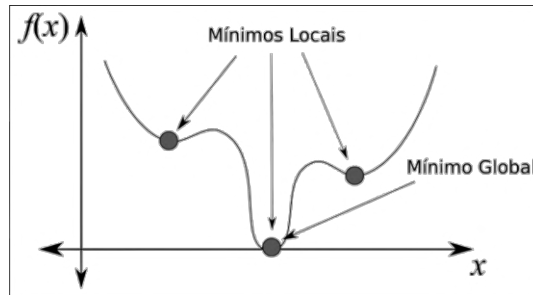


Figura 2.14: Diferenças entre mínimos locais e globais [30].

<sup>5</sup>Em otimização, vê-se a equação 2.6 de forma não exata:  $\|x_u - x_v\| = d_{uv} + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é chamado *Erro*. Ou seja, para minimizar o erro, precisa-se minimizar a expressão  $f(x_u, x_v) = \|x_u - x_v\| - d_{uv}$ .

Infelizmente, essa abordagem via Otimização Global é custosa do ponto de vista computacional — como mostrado em [33], onde Carlile *et. al.* citam as limitações dos métodos contínuos. Saxe demonstrou em 1979 [34] que resolver um DGP para qualquer dimensão — i.e., para qualquer valor de  $K$  — tem a complexidade computacional da classe **NP-Hard**. Em outras palavras, isso significa que a quantidade de mínimos locais de um DGP cresce exponencialmente proporcional a  $|V|$  [35].

## A Quantidade de Soluções do Problema

Seja  $\bar{X} = \{x : V \rightarrow \mathbb{R}^K \mid x \text{ satisfaça (2.6)}\}$  o conjunto de todas as soluções de uma instância DGP. Então, para qualquer transformação ortogonal  $T$  de  $\mathbb{R}^K$  (por exemplo, uma rotação ou translação) tem-se que, pela própria definição de ortogonalidade, se  $x \in \bar{X}$  então  $T(x) \in \bar{X}$ . Define-se uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $\bar{X}$  como  $\bar{x} \sim \bar{y}$  se e somente se existir uma transformação ortogonal  $T$  tal que  $\bar{y} = T\bar{x}$ . Finalmente, define-se  $X = \bar{X} / \sim$  e identifica-se a classe de equivalência de  $X$  com um de seus representantes  $x \in \bar{X}$ . Em [33] o conjunto  $X$  é identificado como o conjunto de “interesse” para as soluções de uma instância DGP, pois este não leva em consideração soluções “redundantes” advindas de transformações ortogonais — e pode-se obter facilmente um número incontável de transformações ortogonais [32].

Mesmo que a definição da classe de equivalência acima possa remover uma quantidade não enumerável de soluções do problema,  $|X|$  não é necessariamente finito. No geral, a quantidade de soluções do DGP depende da estrutura geométrica do grafo que a define: (i) podem não haver nenhuma realização; (ii) uma única realização; (iii) uma quantidade finita (não única) de realizações; ou, (iv) um número incontável de realizações. Perceba que, curiosamente, a quantidade de soluções de um DGP somente não pode ser um número infinito e enumerável — sabe-se isso através de estudos em *Geometria Algébrica Real* [36].

Ou seja, supondo que o conjunto solução de um DGP seja não vazio, sabe-se que ele é não enumerável ou finito. Se for não enumerável, pode-se tentar fazer uma busca contínua no espaço euclidiano — como o algoritmo *spatial Branch-and-Bound* (sBB), que é faz uma  $\epsilon$ -aproximação para solucionar *Nonlinear Programs* (NLPs) não convexos e *Mixed-Integer NLPs* [4]. Se for finito (normalmente o caso desejado), além de poder aplicar métodos de Otimização Global — já definidos como custosos computacionalmente —, pode-se explorar outras abordagens, como a Otimização Combinatória.

### 2.2.5 Ferramentas Combinatórias na Solução do DGP

Nesta seção, estuda-se sobre as condições que garantem a finitude do conjunto solução do problema ao analisar o espaço de busca por uma solução. Em particular, para um DGP definido em um espaço euclidiano de dimensão  $K$ , apresenta-se uma classe de grafos com propriedades muito interessantes: dos  $(K + 2)$ -cliques, ou seja, dos grafos completos com dois vértices a mais do que o número de dimensões do seu espaço.

## Realização de Grafos Completos

Dependendo da estrutura do grafo que define um DGP, obter uma solução do problema pode garantir a unicidade desta solução [2]. A noção que estuda a unicidade de uma realização é a de rigidez: diz-se que um grafo é *Globalmente Rígido* se ele tem uma realização genérica  $x$  e, para todas as outras realizações  $x'$ ,  $x$  é *Congruente* a  $x'$  (veja Apêndice B). Um grafo globalmente rígido tem realização única [37]. Essa característica é de fundamental importância para algumas classes de problemas em DG, como o caso da WSNL, onde somente realizações únicas são consideradas como soluções.

A seguir, baseado em [12] e [38], apresenta-se um método para calcular uma realização de um  $(K + 2)$ -clique em  $\mathbb{R}^K$ .

Considere um 3-clique ponderado com  $V = \{1, 2, 3\}$ , onde  $d_{12} = d_{23} = 1$  e  $d_{13} = 2$ . Então, uma possível realização sobre a reta real  $\mathbb{R}$  que satisfaça todas as distâncias é  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 2$  (conforme Figura 2.15). Uma forma de obter o valor de  $x_3$ , dado os valores de  $x_1$  e  $x_2$  e as distâncias  $d_{13}$  e  $d_{23}$ , é a *Trilateração*.

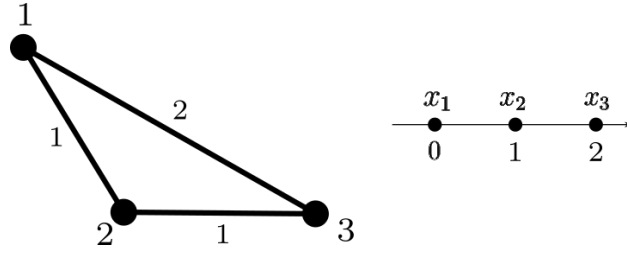


Figura 2.15: Representação do Grafo (esquerda) e sua realização na reta (direita).

## Trilateração

Vamos desenvolver este conceito a partir do exemplo mencionado acima. Se deseja encontrar as posições  $x_1, x_2$  e  $x_3$  de modo que satisfaçam as condições do DGP  $d_{13} = \|x_3 - x_1\| = 2$  e  $d_{23} = \|x_3 - x_2\| = 1$ . Usando a norma Euclidiana,  $\|u - v\|^2 = (u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ , tem-se

$$x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 = 4 \quad \text{e} \quad (2.12)$$

$$x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2 = 1. \quad (2.13)$$

Subtraindo a equação 2.13 da 2.12, obtém-se

$$2(x_1 - x_2)x_3 = x_1^2 - x_2^2 - 3 \Rightarrow 2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2.$$

Pode-se generalizar esse exemplo facilmente para  $(K + 2)$ -cliques em  $\mathbb{R}^K$ :

Seja um DGP definido a partir de um  $(K + 2)$ -clique  $G$ . Conhece-se previamente as posições  $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{R}^K$  de  $K + 1$  vértices de  $G$  e deseja-se descobrir a posição  $y \in \mathbb{R}^K$  do  $(K + 2)$ -ésimo vértice de  $G$ . Pela definição do DGP,  $y$  deve respeitar as  $K + 1$  equações quadráticas  $\|x_j - y\|^2 = d_{j,K+2}^2$ ,  $1 \leq j \leq K + 1$ , com as  $K$  componentes vetoriais de  $y$  como incógnitas:



$$\begin{cases} \|y\|^2 - 2x_1y + \|x_1\|^2 = d_{1,K+2}^2 \\ \vdots \\ \|y\|^2 - 2x_{K+1}y + \|x_{K+1}\|^2 = d_{K+1,K+2}^2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Subtraindo as  $K$  primeiras equação do sistema de equações 2.14 pela  $(K+1)$ -ésima equação

$$\begin{cases} \|y\|^2 - 2x_1y + \|x_1\|^2 - (\|y\|^2 - 2x_{K+1}y + \|x_{K+1}\|^2) = d_{1,K+2}^2 - d_{K+1,K+2}^2 \\ \vdots \\ \|y\|^2 - 2x_Ky + \|x_K\|^2 - (\|y\|^2 - 2x_{K+1}y + \|x_{K+1}\|^2) = d_{K,K+2}^2 - d_{K+1,K+2}^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

pode-se formar um novo sistema, contendo  $K$  equações com as mesmas  $K$  incógnitas:

$$\begin{cases} 2(x_1 - x_{K+1}) \cdot y = \|x_1\|^2 - \|x_{K+1}\|^2 - d_{1,K+2}^2 + d_{K+1,K+2}^2 \\ \vdots \\ 2(x_K - x_{K+1}) \cdot y = \|x_K\|^2 - \|x_{K+1}\|^2 - d_{K,K+2}^2 + d_{K+1,K+2}^2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Seja a matriz quadrada  $A = (2(x_{ij} - x_{K+1j}))$ , com  $i, j \leq K$  como índices de linha e coluna (componentes vetoriais), respectivamente. Seja também o vetor coluna  $b = (\|x_i\|^2 - \|x_{K+1}\|^2 - d_{i,K+2}^2 + d_{K+1,K+2}^2)^T$ , onde  $1 \leq i \leq K$ . Então, pode-se reescrever o sistema de equações 2.16 como o sistema linear

$$Ay = b. \quad (2.17)$$

Diferentes métodos para solução de sistemas lineares como a equação 2.17 são encontrados na bibliografia [39] — no geral, a escolha do melhor depende de propriedades da matriz  $A$ , como sobre sua singularidade, esparsidade, entre outros. Em particular, se  $A$  não é uma matriz singular, então ela possui uma inversa  $A^{-1}$ . Pode-se, portanto, obter a posição do  $(K+2)$ -ésimo vértice fazendo

$$Ay = b \Rightarrow A^{-1}Ay = A^{-1}b \Rightarrow y = A^{-1}b = x_{K+2}. \quad (2.18)$$

No entanto, se  $A$  é singular, isso quer dizer que as linhas  $a_i = x_i - x_{K+1}$  (para  $i \leq K$ ) não são todas linearmente independentes [39]. Essa situação mostra algumas propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, se  $K = 1$ , significa que  $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ , ou seja, que o segmento entre  $x_1$  e  $x_2$  é um simples ponto. Como estamos imersos no  $\mathbb{R}^K = \mathbb{R}$  (i.e., a reta real), geometricamente, a situação é que ou  $x_3$  está posicionado a direita ou a esquerda de  $x_1 = x_2$ , mas não se pode escolher (veja a Figura 2.16). Numericamente, é possível obter tais soluções ao utilizar a pseudoinversa de  $A$  [40].

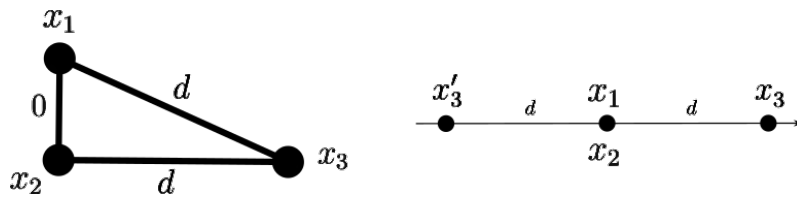


Figura 2.16: Representação da singularidade da matriz  $A$  em  $\mathbb{R}$ .

Não obstante, se  $K = 2$ , a singularidade de  $A$  implica que o triângulo definido por  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  é apenas um segmento no plano (caso o rank de  $A$  é 1) ou um simples ponto (caso o rank for 0). No primeiro caso,  $x_4$  pode estar posicionado em ambos os lados da linha que contém o segmento e, no segundo caso,  $x_4$  pode estar em qualquer um dos pontos formados pela circunferência com centro  $x_1 = x_2 = x_3$  e raio  $d_{14} = d_{24} = d_{34}$ , conforme ilustra a Figura 2.17. Essa característica geométrica vale para valores maiores de  $K$ : a singularidade de  $A$  está relacionada a existência de vértices coincidentes e implica que há sempre múltiplas soluções para  $x_{K+2}$ .

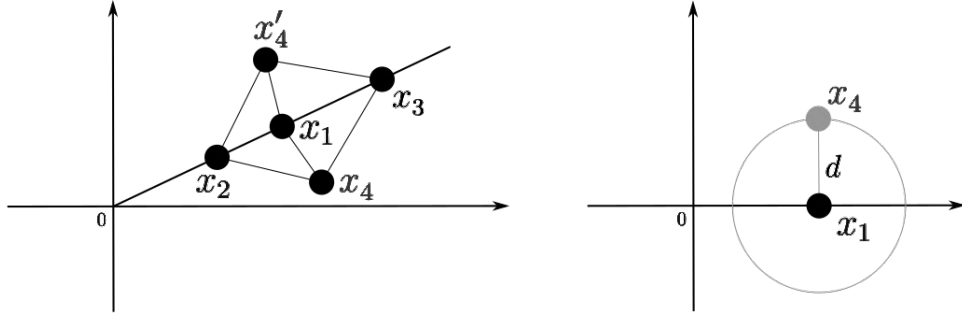


Figura 2.17: Representação da singularidade da matriz  $A$  em  $\mathbb{R}^2$ . A esquerda, caso o rank de  $A$  for 1 e, a direita, caso for 0.

Por fim, é importante mencionar que a partir da equação 2.14 podemos chegar no sistema linear 2.17, mas a recíproca não é verdadeira. Em particular, se o sistema 2.14 tem uma solução, então o sistema 2.17 tem a mesma solução. Porém, mesmo que o sistema 2.14 não tenha solução, o sistema 2.17 sempre terá uma solução única — desde que  $A$  não seja singular. Sendo assim, para verificar a factibilidade de uma solução  $x_{K+2}$  advinda do sistema linear 2.17, deve-se verificar se as distâncias aos  $K + 1$  vértices foram respeitadas — ou seja, se

$$\|x_i - x_{K+2}\| = d_{i,K+2},$$

para todo  $i \leq K + 1$ .

Conclusão: Dado um  $(K + 2)$ -clique, sabe-se que *se ele possuir* uma realização em  $\mathbb{R}^K$  e não possui vértices coincidentes, no geral, *ela é única* a menos de rotações e translações [41, 42].

## Devagar e Sempre

Utilizando o método da trilateração apresentado, é possível descobrir a posição de apenas um vértice de um grafo completo, dado que se conhece as realizações de outros pontos. No entanto, como o objetivo é uma realização total do grafo, a seguir relembra-se uma característica dos grafos completos que contorna essa limitação de uma forma engenhosa.

Relembre o grafo completo da Figura 2.18(a), formado pelo conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e arestas  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$ . Perceba que esse é um 4-clique e, ao removermos o vértice  $v_4$ , obtemos um 3-clique

formado pelos vértices restantes  $\{v_1, v_2, v_3\}$  e arestas  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$  (Figura 2.18(b)). Caso for retirado o vértice  $v_3$  desse 3-clique, obtemos o 2-clique  $(\{v_1, v_2\}, \{\{v_1, v_2\}\})$  (Figura 2.18(c)).

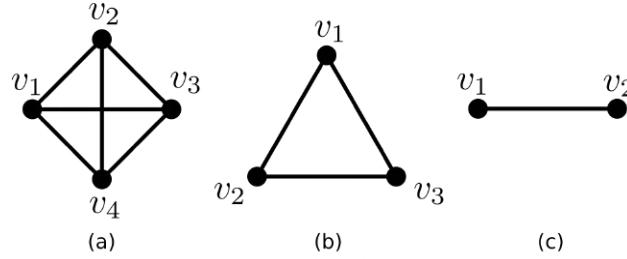


Figura 2.18: Em ordem: (a) 4-clique; (b) 3-clique; (c) 2-clique.

Perceba a existência de uma estrutura recursiva nos grafos completos, que se mantém para o caso geral: sendo  $G_{K+1} = \{V_G, E_G\}$  um  $(K+1)$ -clique e  $v \in V_G$  um vértice qualquer de  $G_{K+1}$ , sempre pode-se obter um  $K$ -clique como o subgrafo induzido  $\langle V_G \setminus \{v\} \rangle$ . Por conta disso, podemos utilizar essas estruturas como “blocos básicos de construção” para planejar uma realização iterativa do grafo como um todo, usando a trilateração para realizar um novo vértice em cada iteração.

### Realização Iterativa de Grafos Completos

A seguir, apresenta-se um algoritmo para realizar em  $\mathbb{R}^K$  todos os  $n$  vértices de um  $(n, \frac{n^2-n}{2})$ -grafo completo  $G$ , com  $n > K$ , tendo como entrada a posição dos  $(K+1)$  primeiros vértices também em  $\mathbb{R}^K$ .

Primeiro, assume-se que exista um  $(K+1)$ -clique  $G_o \subset G$ , chamado clique inicial, que conhecemos a realização — em WSNL, por exemplo, comumente se utiliza nós ancoras como clique inicial [2, 29]. Sem perda de generalidade, seja  $\{1, \dots, K+1\}$  o conjunto dos vértices que formam a clique inicial  $G_o$ , com realizações  $\{x_1, \dots, x_{K+1}\}$ . Seja, também,  $N(i)$  o conjunto de vértices adjacentes ao  $i$ -ésimo vértice. Então, pode-se encontrar uma realização total de  $G$  através do Algoritmo 1.

---

**Algorithm 1:**  $x = \text{RealizacaoIterativa}(G, d, K, x)$  [12]

---

```
// Realize os próximos vértices iterativamente
1 for  $i \in \{K+2, \dots, n\}$  do
    /* Utilize o  $(K+1)$ -clique dos  $(K+1)$  antecessores imediatos
       de  $i$  para calcular a realização  $x_i$ . Caso não haja
       solução, atribuir  $\emptyset$  */
2    $x_i = \text{Trilateracao}(x_{i-K-1}, \dots, x_{i-1})$ ;
   // verifique se  $x_i$  é factível com relação as demais
   distâncias
3   for  $\{j \in N(i) ; j < i\}$  do
4     if  $\|x_i - x_j\| \neq d_{ij}$  then
5       // Sinalizar como não factível e sair do loop
6        $x_i = \emptyset$ ;
7       break;
8   end
9   if  $x_i = \emptyset$  then
10    // Retornar que a realização não é factível
11    return  $\emptyset$ ;
12 end
// Retornar a realização factível
13 return  $x$ ;
```

---

Note que o Algoritmo 1 tem a complexidade de seu pior caso como  $\mathcal{O}(K^3n)$ , i.e., para todos os  $n$  vértices, deve-se resolver um sistema linear  $K \times K$  (trilateração). Se não existir realização factível para  $G$  em  $\mathbb{R}^K$ , Algoritmo 1 retorna  $\emptyset$ .

**Definição([2]):** Esse processo de trilateração iterativa em  $\mathbb{R}^K$ , descrita pelo Algoritmo 1, é chamado *K-Lateração*.

### Sobre o clique inicial $G_o$ e unicidade

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é um exemplo de WSNL que pode utilizar da trilateração para descobrir a localização dos aparelhos de GPS (sensores móveis) [43]. Como o objetivo é encontrar posições no  $\mathbb{R}^3$ , precisa-se de 4 vértices âncoras para compor o clique inicial  $G_o$ , que, no caso, é formado por um conjunto de satélites com posições bem conhecidas. Fica claro que, em algumas aplicações, a quantidade de vértices necessários no clique inicial pode significar um projeto de engenharia bastante custoso.

Além disso, em um primeiro momento pode parecer pouco razoável necessitar da realização prévia do clique inicial  $G_o$ . De fato, se o problema possuir apenas  $K+1$  vértices, essa solução não faz sentido. Felizmente, em geral, os problemas de estudo costumam ser maiores [4].

É importante perceber que os  $K+1$  vértices do clique inicial (já realizados), juntamente com o vértice a se realizar, determinam um simplex no espaço  $\mathbb{R}^K$  que,

garantida a desigualdade triangular  $d_{i,j} \leq d_{i,u} + d_{u,j}$ , para todo  $i, j, u \leq K + 1$ , possui um volume  $K$ -dimensional  $\geq 0$  (veja a Figura 2.19) diretamente proporcional ao determinante de Cayley-Menger (como mostrado na Equação 2.3). Caso esse volume seja zero, que é o que acontece com  $(K + 2)$ -simplex em  $\mathbb{R}^K$ , tem-se o chamado *Simplex Achatado* (*Flat Simplex*) com no máximo uma realização (como ilustra a Figura 2.19, a direita).

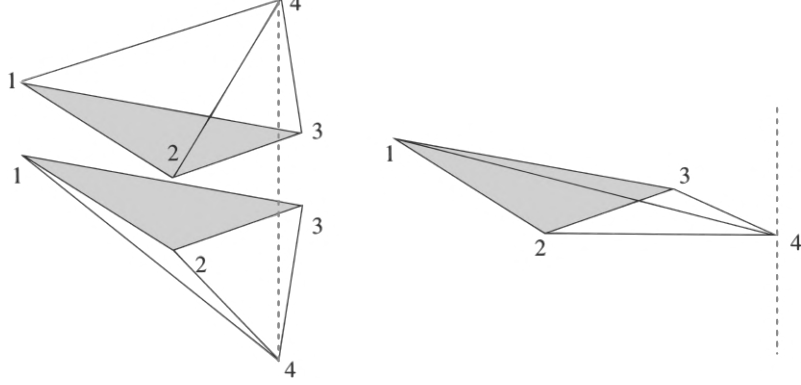


Figura 2.19: Note que as duas realizações de um mesmo 4-clique em  $\mathbb{R}^3$  (esquerda) são possíveis por respeitarem as distâncias entre os vértices, mas somente uma realização é possível em  $\mathbb{R}^2$  (direita) [12].

De fato, através da relação entre o volume de um simplex com a existência de uma realização para um grafo completo (que pode ou não formar um simplex), permite-se estabelecer condições necessárias e suficientes para a realização de cliques:

**Teorema** ([44]): Uma condição necessária e suficiente para que um  $(n + 1)$ -clique tenha uma realização em  $\mathbb{R}^K$ , para  $K \leq n$ , é que todos os determinantes de Cayley-Menger, não nulos, de  $m + 1$  pontos tenham sinal dado por  $(-1)^{m+1}$ , para todo  $m = 1, 2, \dots, K$ . Além disso, os determinantes de Cayley-Menger de mais de  $K + 1$  pontos devem ser nulos.

Uma demonstração detalhada desse resultado pode ser encontrada em [44].

### Realizando grafos $K$ -laterativos em $\mathbb{R}^K$

No Algoritmo 1, fica implícita a existência de uma ordem no conjunto de vértices  $V$  do grafo  $G$ . Se  $G$  é completo, de fato, qualquer ordem  $(v_1, \dots, v_n)$  em  $V$  é tal que  $v_i$  é adjacente a todos os seus antecessores — isto é, para todo  $i > K + 1$ , tem-se no mínimo os  $K + 1$  antecessores necessários para a  $K$ -lateração. Por outro lado,  $G$  não precisa ser necessariamente completo para garantir isso.

**Definição:** Se  $<$  é uma ordem em  $V$  e  $v \in V$  é um vértice qualquer, então  $\gamma(v) = \{u \in V \mid u < v\}$  é dito conjunto de antecessores de  $v$  em relação a  $<$  e  $\rho(v) = |\gamma(v)| + 1$  é dito posto de  $v$  em  $<$ . Dado um grafo  $G = (V, E)$ , uma ordenação  $<$  sobre  $V$  é chamada *Ordem de  $K$ -Lateração* se:

1. os primeiros  $K + 1$  vértices de  $<$  induzirem um  $(K + 1)$ -clique  $G_o$  em  $G$ ;
2. todo vértice  $v$ , com  $\rho(v) > K + 1$ , tem  $|N_G(v) \cap \gamma(v)| \geq K + 1$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é dito  $K$ -Laterativo se há uma ordem de  $K$ -latação sobre  $V$ . Perceba que um grafo  $K$ -laterativo não precisa ser completo e, mesmo assim, ainda é possível aplicar a  $K$ -latação em todo vértice  $v \in V$ , com posto  $\rho(v) > K + 1$ , como é o caso ilustrado da Figura 2.20 para  $K = 2$ . Seguindo a ordenação  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ , pode-se utilizar a 3-clique  $\{v_1, v_2, v_3\}$  para realizar o vértice  $v_4$  e utilizar a 3-clique  $\{v_2, v_3, v_4\}$  para realizar o vértice  $v_5$ .

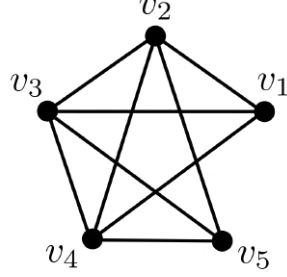


Figura 2.20: Grafo  $K$ -laterativo não completo, de 5 vértices e  $K = 2$ .

Como a existência de uma ordem de  $K$ -latação garante, por definição, que sempre haverá ao menos  $K + 1$  vértices já realizados antecessores a todo vértice  $v \in V$ , com  $\rho(v) > K + 1$ , sempre será possível aplicar a  $K$ -latação. O que nos leva ao enunciado principal dessa seção:

**Teorema:** Um grafo  $K$ -laterativo em  $\mathbb{R}^K$  é genericamente globalmente rígido em  $\mathbb{R}^K$  [2]. Ou seja, se possuir realização, ela é única.

A partir desses conceitos, no que se segue define-se uma subclasse do problema central e uma adaptação do Algoritmo 1 para solucioná-lo.

**O Trilaterativo DGP (TDGP):** Um DGP  $(G, d, K)$  é chamado *Trilaterativo* se uma ordem de  $K$ -latação sobre  $G$  for dada.

Dado um TDGP  $(G, d, K)$ , seja  $\{x_1, \dots, x_{K+1}\}$  o conjunto de realizações dos primeiros  $K + 1$  vértices em relação a ordem de  $K$ -latação. Uma realização  $x$  de  $G$  em  $\mathbb{R}^K$  pode ser encontrada (ou mostrada que não existe) pelo Algoritmo 2.

---

**Algorithm 2:**  $x = \text{RealizacaoTrilaterativa}(G, d, K, x)$ , adaptado de [12]

---

```
1 for  $i \in \{K + 2, \dots, n\}$  do
    // Procure os primeiros  $K + 1$  predecessores adjacentes
2   sejam  $U \subset |N_G(v) \cap \gamma(v)|$ , com  $|U| = K + 1$ , e  $W = \{x_j \mid j \in U\}$ 
    // Utilize o  $(K + 1)$ -clique definido por  $W$  para realizar  $x_i$ 
3    $x_i = \text{Trilateracao}(W)$ ;
4   for  $\{j \in \{(N_G(v) \cap \gamma(v)) \setminus U\} ; j < i\}$  do
5       if  $\|x_i - x_j\| \neq d_{ij}$  then
6            $x_i = \emptyset$ ;
7           break;
8       end
9   end
10  if  $x_i = \emptyset$  then
11      return  $\emptyset$ ;
12  end
13 end
14 return  $x$ ;
```

---

Há três características que fazem desta uma boa solução para instâncias WSNL:  
(i) O  $(K + 1)$ -clique inicial necessita de uma realização dada a priori; (ii) sempre possuirá ou nenhuma (se não existe realização em  $\mathbb{R}^K$ ), ou exatamente uma solução; (iii) é resolvido em tempo polinomial.

# Capítulo 3

## Resultados e Discussão

### 3.1 Robótica Móvel

Um *Robô Móvel* é contrastante com os chamados *Robôs Industriais*, ou *Robôs de Manipulação com Base Fixa*, comumente aplicados em grandes indústrias como soluções de automação — potentes braços mecânicos empregando movimentos repetitivos, como a montagem de automóveis, aviões, montagem de componentes eletrônicos, pintura e outros. São diversos os tipos de robôs móveis: podem viajar em ambientes fechados, no solo, na superfície de fluidos, por dentro de fluidos, no ar e até no espaço. Essa capacidade de mobilidade fez destes soluções para vários problemas complicados de engenharia, elevando consideravelmente a pesquisa da área nas últimas décadas [1].

Existem várias classificações diferentes para robôs móveis [3] (veja a Figura 3.1). Robôs terrestres são distinguidos principalmente por *Robôs Móveis com Rodas* (WMRs, do inglês *Wheeled Mobile Robots*) e *Robôs Móveis com Pernas* (LMRs, de *Legged Mobile Robots*). Também existem os *Veículos Aéreos Não Tripulados* (VANTs, ou UAVs de *Unmanned Aerial Vehicles*, popularmente conhecidos como *Drones*) e os *Veículos Subaquáticos Autônomos* (AUVs, de *Autonomous Underwater Vehicles*).



Figura 3.1: Exemplos de robôs móveis. Em ordem: Um WMR usado para navegar pelo terreno de marte; Um LMR que imita o comportamento canino; Um VANT, drone com quatro hélices; Um AUV usado em elevadas profundezas marítimas.

Os WMRs são muito populares devido sua baixa complexidade mecânica e pouco consumo de energia [45], porém, os VANTs ganharam parte interessante do mercado devido o barateamento pela fabricação em escala industrial e grande interesse da po-



pulação. Há empresas, por exemplo, aplicando a utilização de VANTs como soluções de logística para entregas [46]. Uma interessante apresentação histórica da evolução dos robôs móveis é feita em [3].

De qualquer forma, como nesse texto tem-se um interesse geral por robôs móveis, não necessariamente limitados a uma aplicação específica, recorrentemente os abstrairmos como *Sensores*. Como geralmente robôs móveis devem executar suas tarefas de forma autônoma, é de extrema importância para sua supervisão, funcionamento e controle o conhecimento de suas posições. Uma vez que estabelece-se uma coordenada de destino, é de extrema importância que estes utilizem de seus conjuntos de sensores para se localizar e estabilizar sua navegação.

### 3.1.1 Sensores

Variados tipos de sensores são comumente empregados para auxiliar na locomoção de robôs [47]. Existem sensores de controle local, que auxiliam na locomoção do robô, garantindo que este se mantenha no melhor trajeto e não cause danos a si mesmo ou ao ambiente ao seu redor; e existem os sensores de controle global, que orientam o robô no espaço.

- **Controle Local**

**À distância:** Utilizados para determinar a presença (e estimar distância) de obstáculos e objetos sólidos no geral. Pode-se mencionar sensor infravermelho, de ultrassom, radar, radar laser e sistemas de visão computacional como exemplos;

**Por contato ou proximidade:** Informam a presença de um objeto ao alcance do robô. Alguns exemplos são bumpers, switches, animal whiskers, sensores eletromagnéticos, indutivos e capacitivos.

**De deslocamento e velocidade:** Possibilitam a predição da posição e *Orientação Relativa* do robô. Sensores de inércia (giroscópio e acelerômetros), odômetros (encoders ópticos ou por contato; contadores de giro), sensores de efeito doppler, trilateração não ancorada e sensores baseados em visão computacional também são comuns.

- **Controle Global**

**De posição e orientação:** Determinam a posição e *Orientação Absoluta* do robô. Módulos de GPS (Sistema de Posicionamento Global, trilateração por satélites), bússolas, módulos de trilateração usando âncoras, visão computacional (indoor) e guias fixas pré-estabelecidas (como faixas pintadas no chão) são técnicas muito empregadas.

Nota-se que visão computacional pode ser aplicada para resolver vários dos problemas de engenharia envolvendo navegação autônoma. De fato, é com essa técnica que muitos dos animais se baseia para a locomoção. Infelizmente, esta ainda é uma solução muito custosa computacionalmente, se tornando inviável para a muitas aplicações embarcadas [48] e que necessitam de um controle em tempo real (críticas).

Em específico, nesse texto, interessa aplicar conceitos de Geometria de Distâncias no controle de *Posicionamento Absoluto* de um robô móvel. Para isso, baseando em

[2] e [29], define-se o problema como um grafo ponderado  $G = (V, E, d)$ , onde  $V$  é formado pelo conjunto de sensores no espaço e  $E$  define o conjunto de sensores que estão hábeis a se comunicar, respeitando suas limitações, e as distâncias entre si.

### 3.1.2 Como medir distâncias

Os métodos mais populares para estimar distância entre dois sensores são: *Indicador de Força de Sinal Recebido* (RSSI, de *Received Signal Strenght Indicator*) e *Métodos Baseados em Tempo* [29].

#### Intensidade de Sinal

Seja por fio ou não, a comunicação entre sensores móveis é feita por ondas eletromagnéticas que tem sua potência alterada entre o envio e recebimento. Isso se dá pois a intensidade de um sinal eletromagnético  $I$  é definido como a potência da fonte  $P$  sobre área de propagação  $A$ , i.e.,  $I = \frac{P}{A}$  [49]. Supondo que se utilize comunicação sem fio, então o sinal é propagado pelo ar em todas as direções. Como estamos no  $\mathbb{R}^3$ , a área de propagação do sinal é a superfície da esfera com centro na fonte, ou seja,

$$A(r) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos(\theta) d\theta = 4\pi r^2 \Rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Portanto, a intensidade de sinal recebido é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a fonte do sinal e o receptor. Fixando a potência do transmissor e medindo a intensidade do sinal recebido, pode-se estimar a distância  $r$ . Esse é o processo baseado em RSSI.

Savvides *et al.* [29] desenvolveram um protótipo para testar a eficiência desse método e, infelizmente, não obtiveram bons resultados. Constataram que existem muitas fontes de interferência na intensidade do sinal eletromagnético, implicando em muitas condições sobre o funcionamento. Por exemplo, a estimativa muda se houver obstáculos entre os sensores, se estiverem em um ambiente fechado ou aberto, se houver vegetação e se houver diferença de altura.

#### Atraso no sinal

Outra característica da comunicação entre dois sensores é que há um tempo para que o sinal saia do transmissor e chegue no receptor. Visto que os sinais eletromagnéticos são transmitidos na velocidade da luz, de fato, esse atraso da comunicação não é facilmente mensurável para curtas distâncias. Porém, pode-se utilizar outras fontes de sinal com velocidades menores afim de medir esse atraso. Esse é o princípio do sensor ultrassônico (vide Figura 3.2), que emite uma onda sonora em alta frequência (inaudível por nós, mas com velocidade constante de  $\approx 340\text{m/s}$ ) e mede o tempo que a onda demora para ecoar em objetos e voltar para o sensor [47].

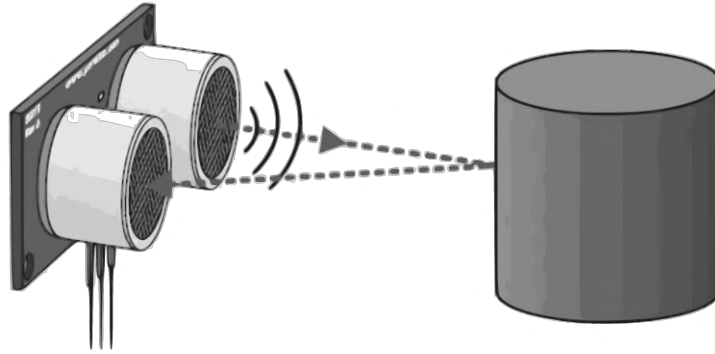


Figura 3.2: Funcionamento do sensor ultrassônico. Um alto-falante emite a onda sonora enquanto o outro recebe.

Os métodos de estimar distâncias baseados em tempo são conhecidos por *Tempo de Chegada* (ToA, de *Time-of-Arrival*) e *Diferença de Tempo de Chegada* (TDoA, *Time-Difference-of-Arrival*).

Pode-se utilizar a transmissão de dois sinais simultâneos com velocidades diferentes e conhecidas para estimar distâncias. É o que se faz, por exemplo, para saber a que distância um trovão caiu. Quando um trovão aparece, dois sinais com velocidades diferentes são enviados: um sinal luminoso (que viaja a velocidade da luz) e um sinal sonoro (que viaja a velocidade do som). Medindo a diferença entre o recebimento dos dois sinais, faz-se a estimativa da distância (veja a Figura 3.3).

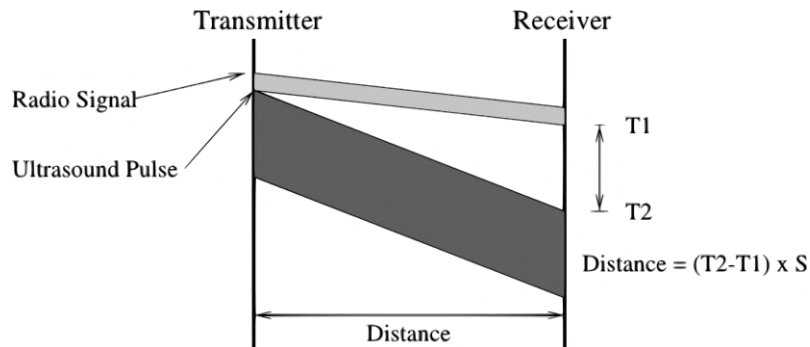


Figura 3.3: Estimativa de distância usando a diferença entre um sinal ultrassônico e um de rádio [29].

Savvides *et al.* [29] construíram outro protótipo, chamado Medusa, utilizando deste princípio. Para grandes distâncias, infelizmente, a utilização de sensores ultrassônicos mostrou-se ser um problema [47]. Porém, para pequenas distâncias os resultados foram promissores, com precisões de dois centímetros para sensores separados por três metros.

Em curtas distâncias, portanto, utilizar métodos baseados em atraso do tempo de recebimento mostrou-se uma boa alternativa frente aos métodos de medição da intensidade do sinal.

### 3.1.3 Sobre o conjunto de sensores

Tendo estabelecida uma forma de obter as distâncias, como discutido na seção 13, precisa-se definir um conjunto de sensores como âncoras para poder calcular a realização dos demais sensores. Afim de aplicar o Algoritmo 2, caso o problema seja definido em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , precisa-se de 3 e 4 sensores como âncoras, respectivamente. Em [50], Fekete e Jordán apresentam um estudo sobre geometrias mínimas para as âncoras que continuam garantindo a unicidade da solução.

Além disso, também deve-se garantir que estes sensores estejam próximos o suficiente para que se possa estimar distâncias (garantindo a existência de  $K+1$ -cliques). Por isso, deve-se pensar em um conjunto de restrições no posicionamento das âncoras e movimento dos robôs móveis de forma a garantir que sempre haverá uma ordem de  $K$ -lateração. Eren *et al.* [2] apresenta um estudo sobre a realização de grafos com geometrias aleatórias.

Afim de ilustrar e averiguar a eficiência do que foi apresentado aqui, realizou-se algumas simulações computacionais implementando os Algoritmos 1 e 2 em C.

Tais simulações foram executadas em um computador pessoal utilizando o sistema operacional Manjaro (uma distribuição Linux baseada em Arch), equipado com um processador Intel Core i5-8600K (6 núcleos operando em 4.1Ghz) e um pente de memória DDR4 2666MHz de 8Gb em *Single-Channel* (operando, portanto, em 1333Mhz).

Para a eficiência dos algoritmos, fez-se uso da biblioteca de código aberto LAPACK, que é uma interface para o LAPACK (*Linear Algebra Package*) em C, onde encontra-se algumas implementações muito otimizadas de operações elementares envolvendo Álgebra Linear. Por exemplo, possui funções para solucionar sistemas matriz-vetor  $Ax = b$ , através da decomposição matricial LU [39], que pôde ser usada para solucionar o sistema linear 2.17, discutido na seção 2.2.5.

## 3.2 Medindo erros

Como tanto o algoritmo 1 quanto o 2 calculam posições em função de realizações previamente calculadas, é inevitável o acúmulo de erros entre essas realizações. Mesmo que a solução teórica seja perfeita, na prática os valores não são representados exatamente. Isso se dá pois o computador não trabalha no conjunto dos números reais, ou, pior, para qualquer  $i \in \mathbb{R}$ , a possibilidade de  $i$  não pode ser representado por um computador tem probabilidade 1. Por isso, gera-se a necessidade de analisar o quão perto as soluções calculadas estão das reais.

Neste texto, a principal medida de confiabilidade de uma solução será calculada através da *Mean Distance Error*, como segue [51].

**Mean Distance Error (MDE):** Seja  $G = (V, E, d)$  um grafo ponderado que defina uma instância DGP. Se  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é um conjunto que define uma realização dos  $n$  vértices de  $G$  e então,

$$MDE(x) = \frac{1}{|d|} \sum_{i,j} \frac{||x_i - x_j|| - d_{i,j}}{d_{i,j}}.$$

### 3.3 Exemplos utilizados

Para a entrada das simulações, implementou-se o Algoritmo 3, que gera um grafo  $K$ -laterativo com  $n$  vértices de coordenadas aleatórias  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{iK}) \in \mathbb{R}^K$  e provê um conjunto limitável de arestas. Essa limitação é definida pelo parâmetro  $\mathcal{P} \in [0, 1]$ , como coeficiente de probabilidade de uma aresta ser ou não acessível entre dois vértices  $v_i$  e  $v_j$ , com  $i, j > K + 1$  (garantindo que sempre haverá ao menos um  $(K+1)$ -clique adjacente a todo vértice).

---

**Algorithm 3:**  $G = \text{criaInstancia}(n, \mathcal{P})$

---

```

// Percorra todos os vértices
1 for  $i \in \{0, \dots, n\}$  do
    // Varie entre cada coordenada de  $x_i \in \mathbb{R}^K$ 
2     for  $j \in 1, \dots, K$  do
        /* Atribua um valor aleatório para cada co. A função
           Aleatorio( $m$ ) gera valores entre 0 e  $m$ . */
3          $x_{ij} = \text{Aleatorio}(m)$ ;
4     end
5 end
// Para cada vértice, percorra todos os seus antecessores
6 for  $x_i \in \{x_n, \dots, x_1\}$  do
7     for  $x_j \in \{x_1, \dots, x_{i-1}\}$  do
        // Gere um número  $a \in [0, 1]$  aleatório.
8         Seja  $a = \text{Aleatorio}(1)$ ;
        // Verifique se  $a > \mathcal{P}$  e se  $i, j > K$ 
9         if  $a > \mathcal{P}$  and  $i > K$  and  $j > K$  then
            // Defina uma aresta entre  $x_i$  e  $x_j$ 
10             $e_{i,j} = \|x_i - x_j\|$ ;
11        end
12    end
13 end
14 return  $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{e_{1,2}\}, \dots, \{e_j\}\})$ ;

```

---

Por exemplo, com o Algoritmo 3 gerou-se a instância mostrada na Figura 3.4.

x	y	z					
(33,	36,	27)	0.000000	20.904545	23.000000	26.832816	31.208973
(15,	43,	35)	20.904545	0.000000	25.258662	32.572995	47.592016
(36,	42,	49)	23.000000	25.258662	0.000000	40.112342	49.000000
(21,	12,	27)	26.832816	32.572995	40.112342	0.000000	23.790755
(40,	9,	13)	31.208973	47.592016	49.000000	23.790755	0.000000

Figura 3.4: A esquerda, as coordenadas dos vértices gerados e, a direita, a matriz de distância a eles associados.

### 3.4 Simulações

Primeiramente, para gerar instâncias do algoritmo 1, deve-se usar o algoritmo 3 com  $\mathcal{P} = 100$ . Assim pode-se garantir a geração de um grafo completo. Criou-se, então, instâncias com tamanhos variados:  $n \in \{5, 6, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 400, 500\}$ . A seguir apresenta-se alguns gráficos sobre os resultados.

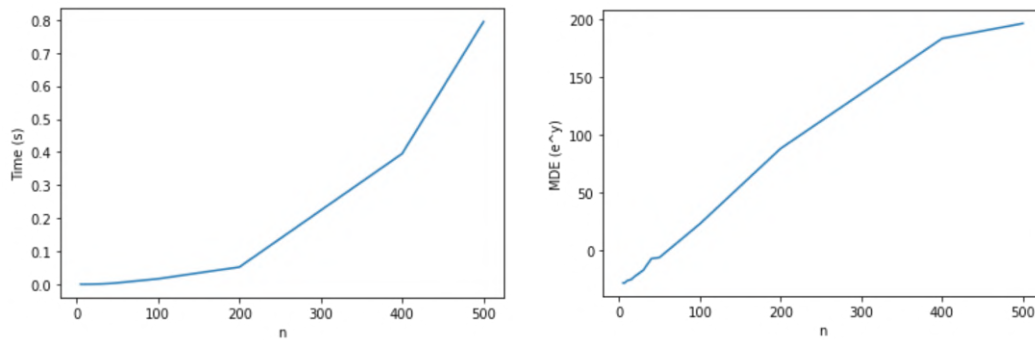


Figura 3.5: A esquerda, o tempo de processo e, a direita, a ordem de grandeza associada ao MDE das soluções.

Veja o comportamento mostrado na Figura 3.5. Teve-se que fazer uma linearização no gráfico que representa o MDE da solução, pois este cresceu exponencialmente e foi para a ordem de  $10^{200}$  em 500 vértices. Esse comportamento se deu por conta dos erros acumulados entre as iterações.

Uma proposta pensada para contornar essa situação infeliz foi alterar o valor de  $\mathcal{P}$ , deixando o menor, obrigando o algoritmo a calcular realizações utilizando vértices iniciais. Porém, isso implicaria em um grafo não completo, o que não condiz definição do Algoritmo 1.

Outra solução proposta fora de utilizar sempre os primeiros vértices no lugar dos antecessores mais próximos. Isso significaria utilizar sempre os vértices âncoras para realizar os demais, semelhante com o que é feito no sistema GPS. Com isso, tivemos os resultados satisfatórios apresentados pela Figura 3.6. Mesmo com 500 vértices ainda obteve-se resultados com  $MDE$  na ordem de  $10^{-20}$ .

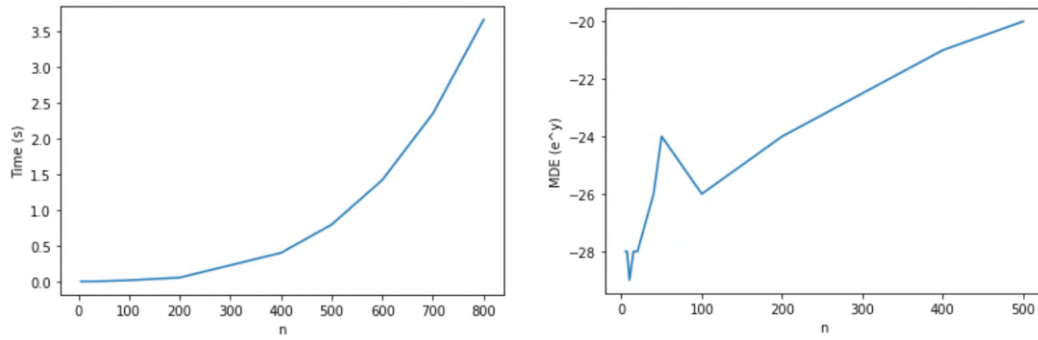


Figura 3.6: A esquerda, o tempo de processo e, a direita, a ordem de grandeza associada ao MDE das soluções.

Também simulou-se o Algoritmo 2, que teve um comportamento muito similar ao Algoritmo 1, como era de se esperar. Também usou-se instâncias  $n$  variando em  $\{5, 6, 7, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 400, 500\}$ . Porém, agora, com uma busca inteligente por vértices adjacentes, pode-se variar  $\mathcal{P}$  afim de analisar diferentes geometrias para o problema, como apresenta-se a seguir.

#### Instâncias com 70% de arestas

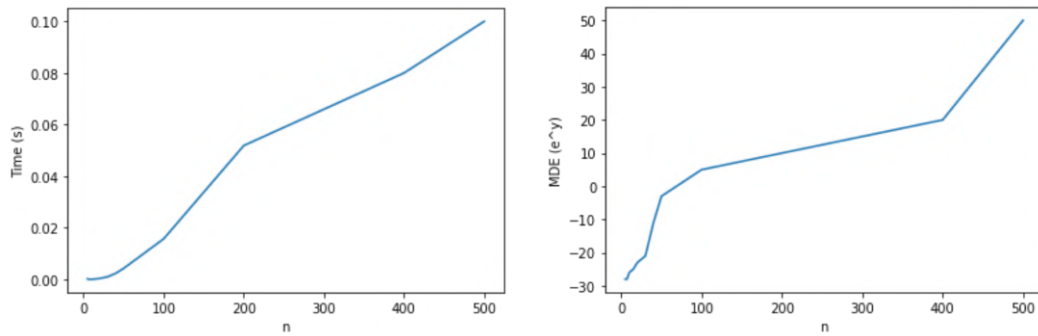


Figura 3.7: A esquerda, o tempo de processo e, a direita, a ordem de grandeza associada ao MDE das soluções. Utilizou-se  $\mathcal{P} = 0.7$ .

### Instâncias com 5% de arestas

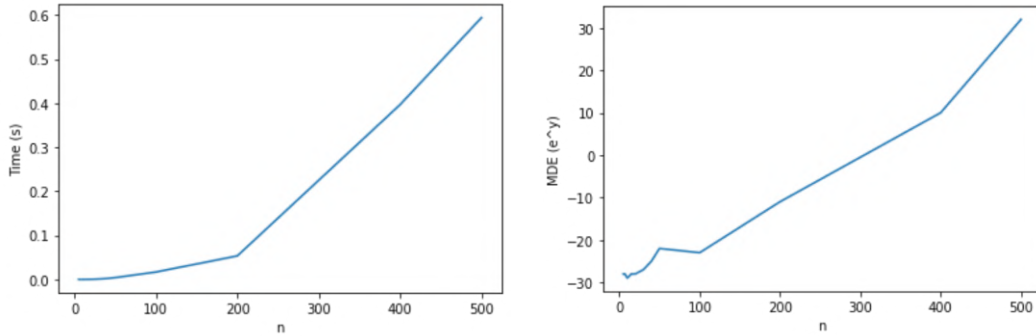


Figura 3.8: A esquerda, o tempo de processo e, a direita, a ordem de grandeza associada ao MDE das soluções. Utilizou-se  $\mathcal{P} = 0.05$ .

Como esperado, é perceptível uma grande melhora na MDE das soluções conforme se diminui o valor de  $\mathcal{P}$ .

Também deve-se perceber que o tempo não obedeceu um padrão perfeito. Podemos relacionar esse fato com a aleatoriedade das instâncias, como pode-se notar que o Algoritmo 2 teve maiores volatilidade no padrão temporal. Mesmo assim, há um consenso. As soluções mostradas nas Figuras 3.6 e 3.8, por exemplo, demonstram claramente um padrão polinomial, indo de encontro com o que foi apresentado na seção 13.



# Capítulo 4

## Considerações Finais

Com isso, concluí-se o estudo sobre a Geometria de Distâncias aplicada ao problema de localização de sensores no contexto de robôs móveis, tal qual teve como resultado um algoritmo que garante encontrar a solução do problema (se houver).

Nos cabe, nesse momento, voltarmos atenção às propostas levantadas internamente no início do projeto e verificar se elas foram cumpridas. Seguem o conjunto de objetivos específicos desse projeto, munidos de breve conclusão:

1. Estudar formas viáveis (pelos vieses energético, de construção e precisão da medida) para obtenção das distâncias entre os elementos do sistema físico:

Fortemente embasado em [29] e [47], faz-se uma apresentação sobre esses conceitos na Seção 3.1.2.

2. Estudar as possíveis distribuições dos Robôs Móveis em um sistema genérico, visando verificar quais conjuntos de dados possam ser garantidos como entradas para a construção do problema:

Além de estudar distribuições genéricas, como em [2], desenvolve-se na Seção 3 o Algoritmo 3, que cria instâncias aleatórias com diferentes densidades de ligações.

3. Verificar a solução do Discretizable Vertex Order Problem [4] aplicado ao problema proposto e estudar o ordenamento de vértices que se adeque aos objetivos do trabalho:

Durante o desenvolvimento da Seção 2.2, percebeu-se que uma ordem de discretização não seria necessária, visto que a definição do problema necessita de uma única solução [12]. Por conta disso, definiu-se a ordem de  $K$ -lateração, que garante a unicidade de solução.

4. Caso consiga-se uma boa ordenação para os vértices, verificar a aplicação do algoritmo Branch-And-Prune [52] para a solução do problema proposto. Se não for possível, estudar outros algoritmos que possam solucionar o problema:

Visto que o problema não era discreto, não fora possível aplicar o algoritmo Branch-And-Prune. Ao invés disso, se propôs o Algoritmo 2, que utiliza a trilateração como núcleo e garante no máximo uma solução.

5. Estudar a complexidade computacional do algoritmo proposto aplicado as possíveis distribuições:

Isso foi feito no fim das Seções 2.2 e 3, onde verificou-se que o algoritmo pode ser resolvido em tempo polinomial. Também mostrou-se um estudo sobre diferentes visões da geometria do problema afim de minimizar os erros associados.

6. Simular computacionalmente o algoritmo para solução do problema com instâncias artificialmente geradas, dominando cada passo utilizado:

Simulações apresentadas, de forma satisfatória, na Seção 3.

7. Aplicar o algoritmo estudado em estruturas de pequena escala, como instâncias reais do problema:

Não fora possível cumprir este último objetivo. Infelizmente, a manufatura de robôs móveis usando sensores de distância se demonstrou excessivamente custosa [29].

Vale lembrar, porém, que a utilização de instâncias artificiais genéricas se mostrou de grande importância. Pode-se averiguar e discutir sobre diferentes geometrias, mesmo sem a prototipação de fato.

Como experiências futuras, deseja-se estudar mais sobre a obtenção e tratamento de dados de distâncias, visto que esses possuem erros de medida [47] (não levados em consideração nesse trabalho). Alguns trabalhos relacionados à Geometria de Distâncias aplicada ao caso intervalar são mostrados em [53]. Há curiosidade em ver como medida MDE se comporta para uma quantidade grande de vértices associados a erros de medida.

Também deseja-se fazer estudos sobre geometrias mínimas para o problema, como feito em [50]. É de grande interesse dos autores desse trabalho verificar um conjunto de condições que restringem o movimento de um robô móvel, afim de garantir que este ainda possa ser localizado.

Afim de validar os resultados práticos da participação desse trabalho de pesquisa, além de ter a oportunidade de compartilhar sua experiência com os colegas da área, o autor desse trabalho está inscrito para realizar uma apresentação oral no *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional* (ERMAC) — congresso que será sediado pela UFMS em setembro, em parceria com a SBMAC. Também planeja-se submeter um artigo para publicação em revista especializada de Iniciação Científica com os resultados obtidos neste trabalho.

Não menos importante, por fim, pretende-se participar de apresentações em seminários internos da UFSC, como o trigésimo Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UFSC, contribuindo com a divulgação da área de pesquisa entre os colegas.

# Referências Bibliográficas

- [1] Gerald Cook and Feitian Zhang. *Mobile Robots: Navigation, Control and Sensing, Surface Robots and AUVs*. John Wiley & Sons, 2020.
- [2] Tolga Eren, OK Goldenberg, Walter Whiteley, Yang Richard Yang, A Stephen Morse, Brian DO Anderson, and Peter N Belhumeur. Rigidity, computation, and randomization in network localization. In *IEEE INFOCOM 2004*, volume 4, pages 2673–2684. IEEE, 2004.
- [3] Spyros G Tzafestas. *Introduction to mobile robot control*. Elsevier, 2013.
- [4] Leo Liberti, Carlile Lavor, Nelson Maculan, and Antonio Mucherino. Euclidean distance geometry and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 56(1):3–69, February 2014.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory With Applications*. Elsevier Science Publishing, New York, 5 edition, 1982.
- [6] Leonhard Euler. Leonhard euler and the königsberg bridges. *Scientific American*, 189(1):66–72, 1953.
- [7] W.W. Rouse Ball. *Hsm coxeter mathematical recreations and essays*, 1956.
- [8] Frank Harary. *Graph Theory*. Westview Press, 1969.
- [9] Gustav Kirchhoff. Ueber die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen vertheilung galvanischer ströme geführt wird. *Annalen der Physik*, 148(12):497–508, 1847.
- [10] A Cayley. On the theory of the analytical forms called trees, math, 1897.
- [11] Jayme Luiz Szwarcfiter. *Teoria computacional de grafos: Os algoritmos*. Elsevier Brasil, 2018.
- [12] Leo Liberti and Carlile Lavor. *Euclidean Distance Geometry*. Springer, 2017.
- [13] Irineu Bicudo et al. *Os elementos*. Unesp, 2009.
- [14] Leo Liberti and Carlile Lavor. Six mathematical gems from the history of distance geometry. *International Transactions in Operational Research*, 23(5):897–920, 2016.
- [15] Arthur Cayley. A theorem in the geometry of position. *Cambridge Mathematical Journal*, 2:267–271, 1841.

- [16] Douglas S Gonçalves. *Geometria de Distâncias: aspectos teóricos e computacionais*, volume 91. São Carlos, SP : SBMAC, Notas em Matemática Aplicada, 2020.
- [17] Karl Menger. Untersuchungen über allgemeine metrik. *Mathematische Annalen*, 100(1):75–163, 1928.
- [18] Andrew J Hanson. Geometry for n-dimensional graphics., 1994.
- [19] Leonard M Blumenthal. *Theory and applications of distance geometry*. Oxford University Press, Oxford, 1953.
- [20] Manfred J Sippl and Harold A Scheraga. Cayley-menger coordinates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(8):2283–2287, 1986.
- [21] Yechiam Yemini. Some theoretical aspects of position-location problems. In *20th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (sfcs 1979)*, pages 1–8. IEEE, 1979.
- [22] Gordon M Crippen, Timothy F Havel, et al. *Distance geometry and molecular conformation*, volume 74. Research Studies Press Taunton, 1988.
- [23] Yechiam Yemini. The positioning problem-a draft of an intermediate summary. Technical report, UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA MARINA DEL REY INFORMATION SCIENCES INST, 1978.
- [24] Deepak Tolani, Ambarish Goswami, and Norman I Badler. Real-time inverse kinematics techniques for anthropomorphic limbs. *Graphical models*, 62(5):353–388, 2000.
- [25] Jan de Leeuw and Willem Heiser. 13 theory of multidimensional scaling. *Handbook of statistics*, 2:285–316, 1982.
- [26] David L Nelson and Michael M Cox. *Lehninger principles of biochemistry*. W.H.Freeman and Company, 2013.
- [27] Carlile Lavor. *Uma abordagem determinística para minimização global da energia potencial de moléculas*. PhD thesis, PhD thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2001.
- [28] GN Ramachandran, AS Kolaskar, C Ramakrishnan, and V Sasisekharan. The mean geometry of the peptide unit from crystal structure data. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA)-Protein Structure*, 359(2):298–302, 1974.
- [29] Andreas Savvides, Chih-Chieh Han, and Mani B Strivastava. Dynamic fine-grained localization in ad-hoc networks of sensors. In *Proceedings of the 7th annual international conference on Mobile computing and networking*, pages 166–179. ACM, 2001.
- [30] C. Lavor, N. Maculan, M. Souza, and R. Alves. *Álgebra e Geometria no Cálculo de Estrutura Molecular*. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 31<sup>o</sup> colóquio brasileiro de matemática edition, 2017.

- [31] Agner Fog et al. Instruction tables: Lists of instruction latencies, throughputs and micro-operation breakdowns for intel, amd and via cpus. *Copenhagen University College of Engineering*, 93:110, 2011.
- [32] Leo Liberti, Carlile Lavor, Antonio Mucherino, and Nelson Maculan. Molecular distance geometry methods: from continuous to discrete. *International Transactions in Operational Research*, 18(1):33–51, 2011.
- [33] Carlile Lavor, Leo Liberti, Nelson Maculan, and Antonio Mucherino. Recent advances on the discretizable molecular distance geometry problem. *European Journal of Operational Research*, 219(3):698–706, 2012.
- [34] James B Saxe. Embeddability of weighted graphs in k-space is strongly np-hard. In *Proc. of 17th Allerton Conference in Communications, Control and Computing, Monticello, IL*, pages 480–489, 1979.
- [35] Carlile Lavor, Leo Liberti, Weldon A Lodwick, and Tiago Mendonça da Costa. *An Introduction to Distance Geometry applied to Molecular Geometry*. Springer, 2017.
- [36] Riccardo Benedetti and Jean-Jacques Risler. In real algebraic and semi-algebraic sets. *Berlin, Hermann, Paris*, 1990.
- [37] Ana Flávia da Cunha Lima. Rigidez de grafos e aplicações. Master’s thesis, UNICAMP, IMECC, Campinas, SP, 2015.
- [38] Qunfeng Dong and Zhijun Wu. A linear-time algorithm for solving the molecular distance geometry problem with exact inter-atomic distances. *Journal of Global Optimization*, 22(1-4):365–375, 2002.
- [39] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. SBM, Rio de Janeiro : IMPA, 1a edition, 2014.
- [40] Lloyd N Trefethen and David Bau III. *Numerical linear algebra*, volume 50. Siam, 1997.
- [41] Bruce Hendrickson. Conditions for unique graph realizations. *SIAM journal on computing*, 21(1):65–84, 1992.
- [42] Robert Connelly. On generic global rigidity, applied geometry and discrete mathematics, 147–155. *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci*, 4, 1991.
- [43] Bernhard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger, and James Collins. *Global positioning system: theory and practice*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [44] Fernando Correia et al. Condições necessárias e suficientes para a realização de um conjunto de distâncias através de determinantes de cayley-menger. 2016.
- [45] Gregor Klancar, Andrej Zdesar, Saso Blazic, and Igor Skrjanc. *Wheeled mobile robotics: from fundamentals towards autonomous systems*. Butterworth-Heinemann, 2017.

- [46] James F Campbell, Don Sweeney, and Juan Zhang. Strategic design for delivery with trucks and drones. *Supply Chain Analytics Report SCMA (04 2017)*, 2017.
- [47] HR Everett. *Sensors for mobile robots*. CRC Press, 1995.
- [48] Eduardo Bayro-Corrochano. *Geometric computing: for wavelet transforms, robot vision, learning, control and action*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.
- [49] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Eletromagnetismo (vol. 3)*, volume 3. Editora Blucher, 2015.
- [50] Zsolt Fekete and Tibor Jordán. Uniquely localizable networks with few anchors. In *International Symposium on Algorithms and Experiments for Sensor Systems, Wireless Networks and Distributed Robotics*, pages 176–183. Springer, 2006.
- [51] Antonio Mucherino, Leo Liberti, and Carlile Lavor. Md-jeep: an implementation of a branch and prune algorithm for distance geometry problems. In *International Congress on Mathematical Software*, pages 186–197. Springer, 2010.
- [52] Leo Liberti, Carlile Lavor, and Nelson Maculan. A branch-and-prune algorithm for the molecular distance geometry problem. *International Transactions in Operational Research*, 15(1):1–17, 2008.
- [53] Anthony Man-Cho So and Yinyu Ye. Theory of semidefinite programming for sensor network localization. *Mathematical Programming*, 109(2-3):367–384, 2007.

# Apêndice A

## Métricas

Como esse texto utiliza fortemente o conceito de distância, é necessário e bem vindo que se gaste algum espaço para uma construção formal dessa ideia. A noção de distância está relacionada com o conceito de *métrica*, como segue.

Seja  $\mathcal{X}$  um espaço vetorial  $K$ -dimensional sobre  $\mathbb{R}$ . *Métrica* é uma função de dois argumentos que mapeia pares ordenados de elementos em  $\mathcal{X}$  para um número real não negativo. Precisamente, para todo  $x, y$  e  $z \in \mathcal{X}$ , uma função  $d(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$  é uma métrica se satisfaz os seguintes axiomas:

1.  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;
4.  $d(x, y) \geq 0$

Nesse trabalho, quando não é especificado qual métrica se está usando, fica implícita a utilização da *Métrica Euclidiana*, definida em função da *Norma Euclidiana*:

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^K (x_i - y_i)^2}. \quad (\text{Norma Euclidiana})$$

O par  $(\mathcal{X}, d)$  é chamado *espaço métrico*. A noção de métrica não depende de espaços vetoriais, donde pode ser facilmente generalizada fazendo  $\mathcal{X}$  um conjunto qualquer.

# Apêndice B

## Rigidez

O conceito de rigidez em grafos é pouco simples e suficientemente extenso para que não nos caiba abordá-lo completamente nesse texto. Em contrapartida, visto que o objeto central desse texto (soluções de instâncias WSNL) tem estreita relação com a definição de *rigidez global*, no que segue, apresentar-se-á satisfatoriamente esta definição.

Para um maior aprofundamento, recomenda-se [12, 37].

O conceito de *rigidez* está associado com a ideia de *movimento rígido* entre as possíveis realizações de um grafo.

**Definição:** Um *framework*  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{R}^K$  é um par  $(G, x)$ , onde  $x$  é uma realização de  $G$  em  $\mathbb{R}^K$ .

**Definição:** Um *movimento do framework*  $(G, x)$  é uma função contínua  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{nK}$ , tal que:

- $y(0) = x$ ;
- $y(t)$  é uma realização válida de  $G$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Definição:** Duas realizações  $x, y$  de um grafo  $G = (V, E)$  são ditos *congruentes* se, para todo  $u, v \in V$ , tem-se  $\|x_u - x_v\| = \|y_u - y_v\|$ . Se  $x, y$  não são congruentes, então eles são *incongruentes*.

**Definição:** Uma *flexão* de um framework  $(G, x)$  é um deslocamento  $y$  de  $x$  tal que  $y(t)$  é incongruente a  $x$  para qualquer  $t \in (0, 1]$ .

**Definição:** Um framework é *flexível* se possuir uma flexão; do contrário, é dito *rígido*.

**Definição:** Dois frameworks  $\mathcal{F} = (G, x)$  e  $\mathcal{F}' = (G', x')$  são *equivalentes* em  $\mathbb{R}^K$  se há uma bijeção entre os conjuntos de vértices  $V$  e  $V'$  que preservem os comprimentos das arestas associados a esses.

**Definição:** Um framework  $\mathcal{F} = (G, x)$  é *globalmente rígido* em  $\mathbb{R}^K$  se, quando  $\mathcal{F}$  é equivalente a  $\mathcal{F}' = (G, x')$ , então  $x$  é congruente a  $x'$ .