Geometria de Distâncias

Guilherme Philippi

29 de abril de 2020

Sumário

1 Geometria de Distâncias Euclidianas

Apresenta-se nesta seção uma introdução a *Geometria de Distâncias Euclidianas*. O nome "Geometria de Distâncias" diz respeito ao conceito desta geometria basear-se em distâncias ao invés de pontos. A palavra "Euclidiana" é importante para caracterizar as arestas — elementos fundamentais associados as distâncias — como segmentos, sem restringir seus ângulos de incidência [1].

1.1 Começo

Por volta de 300 AC, Euclides de Alexandria organizou o conhecimento de sua época acerca da Geometria em uma obra composta por treze volumes, onde construiu, a partir de um pequeno conjunto de axiomas fortemente baseado nos conceitos de pontos e linhas, a chamada *Geometria Euclidiana* [2]. Em contraponto a visão original de Euclides, os primeiros conceitos geométricos *usando apenas distâncias* costumam estar associados aos trabalhos de Heron de Alexandria (10 a 80 DC) [1], com o desenvolvimento de um teorema que leva seu nome, o *Teorema de Heron*: Sejam s o *semiperímetro* de um triângulo (se p é o perímetro, $s = \frac{p}{2}$) e a, b e c os comprimentos dos três lados deste triangulo. Então, a área A do triângulo é

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{Fórmula de Heron}$$

Pode-se dizer que esse foi o nascimento da Geometria de Distâncias (GD).

Algumas centenas de anos depois, em 1841, Arthur Cayley (1821 a 1895) generalizou a Fórmula de Heron através da construção de um determinante que calcula o conteúdo (volume n-dimensional) de um *simplex*[1] em qualquer dimensão [3]. Um

[1]Um simplex é uma generalização do conceito de triangulo a outras dimensões, i.e.: O *0-simples* é um ponto, *1-simplex* é um segmento de reta, *2-simplex* é um triangulo e o *3-simplex* é um tetraedro.

século depois, Karl Menger (1902 a 1985) organizou o trabalho de Cayley tentou desenvolver uma construção axiomática da geometria através de distâncias [4] — por isso, o determinante de Cayley hoje é chamado "*Determinante de Cayley-Menger*".

Definição: Sejam $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $n+1$ pontos que definem os vértices de um n-simplex em um espaço euclidiano k-dimensional, onde $n \leq k$, e d_{ij} a distância entre os vértices A_i e A_j, onde $0 \leq i < j \leq n$. Então, o conteúdo v_n desse n-simplex é

$$v_n^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \begin{bmatrix} 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \ldots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \ldots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \ldots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(Determinante de Cayley-Menger)}$$

Referências

[1] Leo Liberti and Carlile Lavor. *Euclidean Distance Geometry.* Springer, 2017.

[2] Irineu Bicudo et al. *Os elementos.* Unesp, 2009.

[3] Arthur Cayley. A theorem in the geometry of position. *Cambridge Mathematical Journal*, 2:267–271, 1841.

[4] Karl Menger. Untersuchungen über allgemeine metrik. *Mathematische Annalen*, 100(1):75–163, 1928.