

# Geometria de Distâncias

Guilherme Philippi

30 de abril de 2020

## Sumário

<b>1 Geometria de Distâncias Euclidianas</b>	<b>1</b>
1.1 Como tudo Começou . . . . .	1
<b>Referências</b>	<b>3</b>
<b>A Métricas</b>	<b>4</b>

## 1 Geometria de Distâncias Euclidianas

Apresenta-se nesta seção uma introdução a *Geometria de Distâncias Euclidianas*. O nome “Geometria de Distâncias” diz respeito ao conceito desta geometria basear-se em distâncias ao invés de pontos. A palavra “Euclidiana” é importante para caracterizar as arestas — elementos fundamentais associados as distâncias — como segmentos, sem restringir seus ângulos de incidência [1].

### 1.1 Como tudo Começou

Por volta de 300 AC, Euclides de Alexandria organizou o conhecimento de sua época acerca da Geometria em uma obra composta por treze volumes, onde construiu, a partir de um pequeno conjunto de axiomas fortemente baseado nos conceitos de pontos e linhas, a chamada *Geometria Euclidiana* [2]. Em contraponto a visão original de Euclides, os primeiros conceitos geométricos usando *apenas distâncias* costumam estar associados aos trabalhos de Heron de Alexandria (10 a 80 DC) [1], com o desenvolvimento de um teorema que leva seu nome, como segue:

**Teorema de Heron:** Sejam  $s$  o *semiperímetro* de um triângulo (se  $p$  é o perímetro,  $s = \frac{p}{2}$ ) e  $a$ ,  $b$  e  $c$  os comprimentos dos três lados deste triângulo. Então, a área  $A$  do triângulo é

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (\text{Fórmula de Heron})$$

Pode-se dizer que esse foi o nascimento da Geometria de Distâncias (GD).

Algumas centenas de anos depois, em 1841, Arthur Cayley (1821 a 1895) generalizou a Fórmula de Heron através da construção de um determinante que cal-

cula o conteúdo (volume  $n$ -dimensional) de um *simplex*<sup>1</sup> em qualquer dimensão [3]. Um século depois, em 1928, o matemático austríaco Karl Menger (1902 a 1985) re-organizou as ideias de Cayley e trabalhou em uma construção axiomática da geometria através de distâncias [4] — donde a alteração no nome do determinante de Cayley para como é conhecido hoje: “*Determinante de Cayley-Menger*”.

**Definição:** Sejam  $A_0, A_1, \dots, A_n$   $n+1$  pontos que definem os vértices de um  $n$ -simplex em um espaço euclidiano  $K$ -dimensional, onde  $n \leq K$ , e seja  $d_{ij}$  a distância entre os vértices  $A_i$  e  $A_j$ , onde  $0 \leq i < j \leq n$ . Então, o conteúdo  $v_n$  desse  $n$ -simplex é

$$v_n^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \begin{vmatrix} 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \dots & d_{0n}^2 & 1 \\ d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 & 1 \\ d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{Determinante de Cayley-Menger})$$

Mas foi só com Leonard Blumenthal (1901 a 1984) que, em 1953, o termo Geometria de Distâncias foi cunhado — com a publicação de seu livro “*Theory and Applications of Distance Geometry*” [5]. Blumenthal dedicou sua vida de trabalho para clarificar, organizar e traduzir as obras originais em alemão [1]. Ele acreditava que o problema mais importante nesta área era o “*Problema de Subconjunto*” (ou *Subset Problem*, originalmente), que consistia em encontrar condições necessárias e suficientes a fim de decidir quando uma matriz simétrica era, de fato, uma *matriz de distâncias*<sup>2</sup> [6]. Uma restrição desse problema à métrica euclidiana chama-se *Problema de Matrizes de Distâncias Euclidianas* (ou EDMP, do inglês *Euclidean Distance Matrix Problem*), como segue definida:

**Problema de Matrizes de Distâncias Euclidianas:** Determinar se, para uma dada matriz quadrada  $D_{n \times n} = (d_{ij})$ , existe um inteiro  $K$  e um conjunto  $\{p_1, \dots, p_n\}$  de pontos em  $\mathbb{R}^K$  tal que  $d_{ij} = \|p_i - p_j\|$  para todo  $i, j \leq n$ .

Condições necessárias e suficientes para que uma matriz seja, de fato, uma matriz de distância euclidiana são dados em [7]. Para isso, apresenta-se um teorema onde se utiliza o Determinante de Cayley-Menger na criação de duas condições afirmando que, afim de  $D_{n \times n}$  ser uma matriz de distâncias euclidianas, deve haver um  $K$ -simplex  $S$  de referência com conteúdo  $v_K \neq 0$  em  $\mathbb{R}^K$  e que todos os  $(K+1)$ -simplex e  $(K+2)$ -simplex contendo  $S$  como uma das faces devem estar contidos em  $\mathbb{R}^K$  [6].

<sup>1</sup>Um simplex é uma generalização do conceito de triângulo a outras dimensões, i.e.: O  $0$ -simplex é um ponto,  $1$ -simplex é um segmento de reta,  $2$ -simplex é um triângulo e o  $3$ -simplex é um tetraedro.

<sup>2</sup>Seja o par  $(\mathcal{X}, d)$  um *espaço métrico* (vide Apêndice A), onde  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Uma *matriz de distância sobre  $\mathcal{X}$*  é uma matriz quadrada  $D_{n \times n} = (d_{uv})$  onde, para todo  $u, v \leq n$ , temos  $d_{uv} = d(x_u, x_v)$  [6].

## Referências

- [1] Leo Liberti and Carlile Lavor. *Euclidean Distance Geometry*. Springer, 2017.
- [2] Irineu Bicudo et al. *Os elementos*. Unesp, 2009.
- [3] Arthur Cayley. A theorem in the geometry of position. *Cambridge Mathematical Journal*, 2:267–271, 1841.
- [4] Karl Menger. Untersuchungen über allgemeine metrik. *Mathematische Annalen*, 100(1):75–163, 1928.
- [5] Leonard M Blumenthal. Theory and applications of distance geometry. 1953.
- [6] Leo Liberti, Carlile Lavor, Nelson Maculan, and Antonio Mucherino. Euclidean distance geometry and applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 56(1):3–69, February 2014.
- [7] Manfred J Sippl and Harold A Scheraga. Cayley-menger coordinates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(8):2283–2287, 1986.

## A Métricas

Como esse texto utiliza fortemente o conceito de distância, é necessário e bem vindo que se gaste algum espaço para uma construção formal dessa ideia. A noção de distância está relacionada com o conceito de *métrica*, como segue.

Seja  $\mathcal{X}$  um espaço vetorial  $K$ -dimensional sobre  $\mathbb{R}$ . *Métrica* é uma função de dois argumentos que mapeia pares ordenados de elementos em  $\mathcal{X}$  para um número real não negativo. Precisamente, para todo  $x, y$  e  $z \in \mathcal{X}$ , uma função  $d(\cdot, \cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$  é uma métrica se satisfaz os seguintes axiomas:

1.  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ;
4.  $d(x, y) \geq 0$

Nesse trabalho, sempre que não é especificado qual métrica se está usando, fica implícita a utilização da *Métrica Euclidiana*, definida in função da *Norma Euclidiana*:

$$\forall x, y \in \mathcal{X}, d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\langle x, y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^K (x_i - y_i)^2}. \quad (\text{Norma Euclidiana})$$

O par  $(\mathcal{X}, d)$  é chamado *espaço métrico*. A noção de métrica não depende de espaços vetoriais, donde pode ser facilmente generalizada fazendo  $\mathcal{X}$  um conjunto qualquer.