Graphics Notes

Xiaoyu Xue

2020 年 12 月 8 日

1 Transform

1.1 Projection

1.1.1 Perspective

推导从 camera space(Ω_{cam}) 到 NDC space(Ω_{NDC}) 的投影矩阵，这里 NDC space 的 x, y, z 的范围都是 $[-1, 1]$。假设在 camera space 里的坐标为 (x, y, x)，我们把这个点投影到 film 上 (x_p, y_p, z_p)，在 NDC space 中的坐标为 (x_N, y_N, z_N) film 距离 camera 的距离为 $filmDis$，根据 $fovy$ 以及 $filmDis$ 可以计算出 film 在 camera space 里的横坐标范围为 $[l, r]$，纵坐标范围是 $[b, t]$，定义投影矩阵 M_{proj} : $\Omega_{cam} \to \Omega_{NDC}$。并且这里假设近裁剪端和远裁剪端到 camera 的距离分别为 n, f(这里需要了解齐次坐标的知识)

由几何关系

$$\frac{x_p}{x} = \frac{y_p}{y} = \frac{filmDis}{z}$$

可以得到

$$x_p = \frac{filmDis}{z} \cdot x$$
$$y_p = \frac{filmDis}{z} \cdot y$$

对于 x_p 我们可以得到以下推导

$$l \leq x_p \leq r$$
$$0 \leq x_p - l \leq r - l$$
$$0 \leq \frac{x_p - l}{r - l} \leq 1$$
$$0 \leq 2\frac{x_p - l}{r - l} \leq 2$$
$$-1 \leq \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1$$

同理也可以得到

$$-1 \leq \frac{2y_p}{t - b} - \frac{t + b}{t - b} \leq 1$$

总结一下，我们可以的得到关于 x, y 的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{2}{r-l} \cdot \frac{filmDis}{z} \cdot x - \frac{r+l}{r-l} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{2}{t-b} \cdot \frac{filmDis}{z} \cdot y - \frac{t+b}{t-b} \leq 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出一部分投影矩阵的元素

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 A, B 为一个待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出从 camera space 到 NDC space 的表达式

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2filmDis}{r-l} \cdot x - \dfrac{r+l}{r-l} \cdot z \\ \dfrac{2filmDis}{t-b} \cdot y - \dfrac{t+b}{t-b} \cdot z \\ zA + B \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_N/w_N \\ y_N/w_N \\ z_N/w_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{r-l} \cdot \frac{1}{z} - \frac{r+l}{r-l} \\ \frac{2y}{t-b} \cdot \frac{1}{z} - \frac{t+b}{t-b} \\ (zA+B)/z \\ 1 \end{bmatrix}$$

有裁剪锥体得出，在 n 处坐标为被映射为 -1，在 f 处坐标映射成 1

$$\begin{cases} \dfrac{nA+B}{n} = & -1 \\ \dfrac{fA+B}{f} = & 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{f+n}{f-n} \\ B = \dfrac{2nf}{f-n} \end{cases}$$

注意：这个结果和 pbrt 里的有所不同，原因是 pbrt 中的范围是 $[0, 1]$

最后得到完整的投影矩阵:

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一般情况下 $r = -l$，$t = -b$，因此投影矩阵可以简化成:

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$