Graphics Notes

Xiaoyu Xue

2020 年 12 月 11 日

目录

1 Transform

1.1 Projection

投影是指从 camera space(Ω_{cam}) 到 NDC space(Ω_{NDC}) 的变换，其中 NDC space 的 x, y, z 的范围都是 $[-1, 1]$。假设某个点在 camera space 里的坐标为 (x, y, x)，我们把这个点投影到 film 上 (x_p, y_p, z_p)，然后再经过 normalization，得到 NDC space 中的坐标 (x_N, y_N, z_N)。定义 film 到 camera 的距离为 $filmDis$，根据 $fovy$，$filmDis$ 以及 $aspect$，可以计算出 film 在 camera space 里的横坐标范围 $[l, r]$，纵坐标范围 $[b, t]$。定义投影矩阵 $M_{proj} : \Omega_{cam} \to \Omega_{NDC}$，$\mathbf{x} = [x, y, z, 1]^T$，$\mathbf{x}_p = [x_p, y_p, z_p, 1]^T$，$\mathbf{x}_N = [x_N, y_N, z_N, 1]^T$ (这里需要了解齐次坐标的知识)。由投影矩阵的定义可得 $\mathbf{x}_N = M_{proj}\mathbf{x}$。并且这里假设近裁剪端和远裁剪端到 camera 的距离分别为 n, f

1.1.1 Orthographic

1.1.2 Perspective

由几何关系

$$\frac{x_p}{x} = \frac{y_p}{y} = \frac{filmDis}{z}$$

可以得到

$$x_p = \frac{filmDis}{z} \cdot x$$
$$y_p = \frac{filmDis}{z} \cdot y$$

对于 x_p 我们可以得到以下推导

$$l \leq x_p \leq r$$
$$0 \leq x_p - l \leq r - l$$
$$0 \leq \frac{x_p - l}{r - l} \leq 1$$
$$0 \leq 2\frac{x_p - l}{r - l} \leq 2$$
$$-1 \leq \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1$$

同理也可以得到

$$-1 \leq \frac{2y_p}{t - b} - \frac{t + b}{t - b} \leq 1$$

总结一下，我们可以的得到关于 x, y 的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{2}{r - l} \cdot \dfrac{filmDis}{z} \cdot x - \dfrac{r + l}{r - l} \leq 1 \\ -1 \leq \dfrac{2}{t - b} \cdot \dfrac{filmDis}{z} \cdot y - \dfrac{t + b}{t - b} \leq 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出一部分投影矩阵的元素

$$M_{proj}=\begin{bmatrix}\frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0\\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0\\ 0 & 0 & A & B\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

其中 A, B 为一个待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出从 camera space 到 NDC space 的表达，然后再进行 normalization：

$$\begin{bmatrix}x'_N\\ y'_N\\ z'_N\\ w_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0\\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0\\ 0 & 0 & A & B\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2filmDis}{r-l}\cdot x-\dfrac{r+l}{r-l}\cdot z\\ \dfrac{2filmDis}{t-b}\cdot y-\dfrac{t+b}{t-b}\cdot z\\ zA+B\\ z\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_N\\ y_N\\ z_N\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_N/w_N\\ y'_N/w_N\\ z'_N/w_N\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2filmDis}{r-l}\cdot\frac{1}{z}\cdot x-\frac{r+l}{r-l}\\ \frac{2filmDis}{t-b}\cdot\frac{1}{z}\cdot y-\frac{t+b}{t-b}\\ (zA+B)/z\\ 1\end{bmatrix}$$

由裁剪锥体的性质可得，在 n 处坐标为被映射为 -1，在 f 处坐标映射成 1

$$\begin{cases}\dfrac{nA+B}{n} &= -1\\ \dfrac{fA+B}{f} &= 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{f+n}{f-n}\\ B=\dfrac{2nf}{f-n}\end{cases}$$

注意：这个结果和 pbrt 里的有所不同，原因是 pbrt 中的范围是 $[0,1]$

最后得到完整的投影矩阵:

$$M_{proj}=\begin{bmatrix}\frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0\\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

一般情况下 $r=-l$，$t=-b$，并且 $t=filmDis\cdot\tan{(fovy/2)}$，$r=t\cdot aspect$ 因此投影矩阵可以简化成:

$$M_{proj}=\begin{bmatrix}\frac{filmDis}{r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{filmDis}{t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\tan{(fovy/2)}\cdot aspect} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\tan{(fovy/2)}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$