

Graphics Notes

Xiaoyu Xue

2020 年 12 月 15 日

目录

1	Transform	3
1.1	Rotation	3
1.2	Scale	3
1.3	Translation	3
1.4	Projection	3
1.4.1	Orthographic	3
1.4.2	Perspective	5

1 Transform

1.1 Rotation

1.2 Scale

1.3 Translation

1.4 Projection

投影是指从 camera space(Ω_{cam}) 到 NDC space(Ω_{NDC}) 的变换, 其中 NDC space 的 x, y, z 的范围都是 $[-1, 1]$ 。假设某个点在 camera space 里的坐标为 (x, y, x) , 我们把这个点投影到 film 上 (x_p, y_p, z_p) , 然后再经过 normalization, 得到 NDC space 中的坐标 (x_N, y_N, z_N) 。定义 film 到 camera 的距离为 $filmDis$, 根据 $fovy$, $filmDis$ 以及 $aspect$, 可以计算出 film 在 camera space 里的横坐标范围 $[l, r]$, 纵坐标范围 $[b, t]$ 。定义投影矩阵 $M_{proj} : \Omega_{cam} \rightarrow \Omega_{NDC}$, $\mathbf{x} = [x, y, z, 1]^T$, $\mathbf{x}_p = [x_p, y_p, z_p, 1]^T$, $\mathbf{x}_N = [x_N, y_N, z_N, 1]^T$ (这里需要了解齐次坐标的知识)。由投影矩阵的定义可得 $\mathbf{x}_N = M_{proj}\mathbf{x}$ 。并且这里假设近裁剪端和远裁剪端到 camera 的距离分别为 n, f

1.4.1 Orthographic

由几何关系可得

$$x_p = x$$

$$y_p = y$$

对于 x_p 我们可以得到以下推导

$$\begin{aligned} l &\leq x_p \leq r \\ 0 &\leq x_p - l \leq r - l \\ 0 &\leq \frac{x_p - l}{r - l} \leq 1 \\ 0 &\leq 2\frac{x_p - l}{r - l} \leq 2 \\ -1 &\leq \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \end{aligned}$$

同理也可以得到

$$-1 \leq \frac{2y_p}{t - b} - \frac{t + b}{t - b} \leq 1$$

总结一下, 我们可以得到关于 x, y 的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{2}{r - l} \cdot x - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{2}{t - b} \cdot y - \frac{t + b}{t - b} \leq 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出投影矩阵的一部分

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & C \\ 0 & 0 & B & D \end{bmatrix}$$

其中 A, B, C, D 为待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出投影变换的公式

$$M_{proj} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & A & C \\ 0 & 0 & B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} \cdot x - \frac{r+l}{r-l} \\ \frac{2}{t-b} \cdot y - \frac{t+b}{t-b} \\ Az + C \\ Bz + D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ Az + C \\ Bz + D \end{bmatrix}$$

这里我们直接令 $B = 0, D = 1$ 可得

$$M_{proj} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ Az + C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \\ 1 \end{bmatrix}$$

由裁剪关系可知，在 n 处坐标被映射为-1，在 f 处坐标映射成 1

$$\begin{cases} An + C = -1 \\ Af + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{f-n} \\ B = -\frac{f+n}{f-n} \end{cases}$$

最后得到完整的投影矩阵

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般情况下 $r = -l$, $t = -b$ ，并且令 $w = 2r$ (film 的宽)， $h = 2t$ (film 的高) 可得

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{1}{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.2 Perspective

由几何关系

$$\frac{x_p}{x} = \frac{y_p}{y} = \frac{filmDis}{z}$$

可以得到

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{filmDis}{z} \cdot x \\ y_p &= \frac{filmDis}{z} \cdot y \end{aligned}$$

对于 x_p 我们可以得到以下推导

$$\begin{aligned} l &\leq x_p \leq r \\ 0 &\leq x_p - l \leq r - l \\ 0 &\leq \frac{x_p - l}{r - l} \leq 1 \\ 0 &\leq 2 \frac{x_p - l}{r - l} \leq 2 \\ -1 &\leq \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \end{aligned}$$

同理也可以得到

$$-1 \leq \frac{2y_p}{t - b} - \frac{t + b}{t - b} \leq 1$$

总结一下，我们可以得到关于 x, y 的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{2}{r - l} \cdot \frac{filmDis}{z} \cdot x - \frac{r + l}{r - l} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{2}{t - b} \cdot \frac{filmDis}{z} \cdot y - \frac{t + b}{t - b} \leq 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出一部分投影矩阵的元素

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 A, B 为一个待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出从 camera space 到 NDC space 的表达，然后再进行 normalization:

$$\begin{bmatrix} x'_N \\ y'_N \\ z'_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} \cdot x - \frac{r+l}{r-l} \cdot z \\ \frac{2filmDis}{t-b} \cdot y - \frac{t+b}{t-b} \cdot z \\ zA + B \\ z \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_N/w_N \\ y'_N/w_N \\ z'_N/w_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} \cdot \frac{1}{z} \cdot x - \frac{r+l}{r-l} \\ \frac{2filmDis}{t-b} \cdot \frac{1}{z} \cdot y - \frac{t+b}{t-b} \\ (zA+B)/z \\ 1 \end{bmatrix}$$

由裁剪锥体的性质可得，在 n 处坐标为被映射为 -1 ，在 f 处坐标映射成 1

$$\begin{cases} \frac{nA+B}{n} = -1 \\ \frac{fA+B}{f} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{f+n}{f-n} \\ B = \frac{2nf}{f-n} \end{cases}$$

注意：这个结果和 pbrt 里的有所不同，原因是 pbrt 中的范围是 $[0, 1]$

最后得到完整的投影矩阵：

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一般情况下 $r = -l$ ， $t = -b$ ，并且 $t = filmDis \cdot \tan(fovy/2)$ ， $r = t \cdot aspect$ 因此投影矩阵可以简化成：

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{filmDis}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{filmDis}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tan(fovy/2) \cdot aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(fovy/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$