# Graphics Notes

Xiaoyu Xue

2020 年 12 月 24 日

# 目录

# 1 Transform

## 1.1 Rotation

## 1.2 Scale

## 1.3 Translation

## 1.4 Projection

投影是指从 camera space($\Omega_{cam}$) 到 NDC space($\Omega_{NDC}$) 的变换，其中 NDC space 的 $x, y, z$ 的范围都是 $[-1, 1]$。假设某个点在 camera space 里的坐标为 $(x, y, x)$，我们把这个点投影到 film 上 $(x_p, y_p, z_p)$，然后再经过 normalization，得到 NDC space 中的坐标 $(x_N, y_N, z_N)$。定义 film 到 camera 的距离为 $filmDis$，根据 $fovy$，$filmDis$ 以及 $aspect\_ratio$(简称 $aspect$)，可以计算出 film 在 camera space 里的横坐标范围 $[l, r]$，纵坐标范围 $[b, t]$。定义投影矩阵 $M_{proj} : \Omega_{cam} \to \Omega_{NDC}$，$\mathbf{x} = [x, y, z, 1]^T$，$\mathbf{x}_p = [x_p, y_p, z_p, 1]^T$，$\mathbf{x}_N = [x_N, y_N, z_N, 1]^T$ (这里需要了解齐次坐标的知识)。由投影矩阵的定义可得 $\mathbf{x}_N = M_{proj}\mathbf{x}$。并且这里假设近裁剪端和远裁剪端到 camera 的距离分别为 $n, f$

### 1.4.1 Orthographic

由几何关系可得

$$x_p = x$$
$$y_p = y$$

对于 $x_p$ 我们可以得到以下推导

$$l \le x_p \le r$$
$$0 \le x_p - l \le r - l$$
$$0 \le \frac{x_p - l}{r - l} \le 1$$
$$0 \le 2\frac{x_p - l}{r - l} \le 2$$
$$-1 \le \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \le 1$$

同理也可以得到

$$-1 \le \frac{2y_p}{t - b} - \frac{t + b}{t - b} \le 1$$

总结一下，我们可以的得到关于 $x, y$ 的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \le \frac{2}{r - l} \cdot x - \frac{r + l}{r - l} \le 1 \\ -1 \le \frac{2}{t - b} \cdot y - \frac{t + b}{t - b} \le 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出投影矩阵的一部分

$$M_{proj}=\begin{bmatrix}\frac{2}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0\\ 0 & \frac{2}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0\\ 0 & 0 & A & C\\ 0 & 0 & B & D\end{bmatrix}$$

其中 $A,B,C,D$ 为待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出投影变换的公式

$$M_{proj}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l}\\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b}\\ 0 & 0 & A & C\\ 0 & 0 & B & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{r-l}\cdot x-\frac{r+l}{r-l}\\ \frac{2}{t-b}\cdot y-\frac{t+b}{t-b}\\ Az+C\\ Bz+D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_N\\ y_N\\ Az+C\\ Bz+D\end{bmatrix}$$

这里我们直接令 $B=0,D=1$ 可得

$$M_{proj}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_N\\ y_N\\ Az+C\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_N\\ y_N\\ z_N\\ 1\end{bmatrix}$$

由裁剪关系可知，在 n 处坐标被映射为-1，在 f 处坐标映射成 1

$$\begin{cases}An+C= & -1\\ Af+C= & 1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{2}{f-n}\\ B=-\dfrac{f+n}{f-n}\end{cases}$$

最后得到完整的投影矩阵

$$M_{proj}=\begin{bmatrix}\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l}\\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b}\\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

一般情况下 $r=-l$，$t=-b$，并且令 $w=2r$(film 的宽)，$h=2t$(film 的高) 可得

$$M_{proj}=\begin{bmatrix}\frac{1}{w} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

### 1.4.2 Perspective

由几何关系

$$\frac{x_p}{x} = \frac{y_p}{y} = \frac{filmDis}{z}$$

可以得到

$$x_p = \frac{filmDis}{z} \cdot x$$
$$y_p = \frac{filmDis}{z} \cdot y$$

对于 $x_p$ 我们可以得到以下推导

$$l \le x_p \le r$$
$$0 \le x_p - l \le r - l$$
$$0 \le \frac{x_p - l}{r - l} \le 1$$
$$0 \le 2\frac{x_p - l}{r - l} \le 2$$
$$-1 \le \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \le 1$$

同理也可以得到

$$-1 \le \frac{2y_p}{t - b} - \frac{t + b}{t - b} \le 1$$

总结一下，我们可以的得到关于 $x, y$ 的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{2}{r - l} \cdot \dfrac{filmDis}{z} \cdot x - \dfrac{r + l}{r - l} \le 1 \\ -1 \le \dfrac{2}{t - b} \cdot \dfrac{filmDis}{z} \cdot y - \dfrac{t + b}{t - b} \le 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出一部分投影矩阵的元素

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $A, B$ 为一个待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出从 camera space 到 NDC space 的表达，然后再进行 normalization：

$$\begin{bmatrix} x'_N \\ y'_N \\ z'_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2filmDis}{r - l} \cdot x - \dfrac{r + l}{r - l} \cdot z \\ \dfrac{2filmDis}{t - b} \cdot y - \dfrac{t + b}{t - b} \cdot z \\ zA + B \\ z \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$
\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_N/w_N \\ y'_N/w_N \\ z'_N/w_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} \cdot \frac{1}{z} \cdot x - \frac{r+l}{r-l} \\ \frac{2filmDis}{t-b} \cdot \frac{1}{z} \cdot y - \frac{t+b}{t-b} \\ (zA+B)/z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

由裁剪锥体的性质可得，在 $n$ 处坐标为被映射为 $-1$，在 $f$ 处坐标映射成 1

$$
\begin{cases} \dfrac{nA+B}{n} = & -1 \\ \dfrac{fA+B}{f} = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{f+n}{f-n} \\ B = \dfrac{2nf}{f-n} \end{cases}
$$

注意：这个结果和 pbrt 里的有所不同，原因是 pbrt 中的范围是 $[0, 1]$

最后得到完整的投影矩阵:

$$
M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & -\frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

一般情况下 $r = -l$，$t = -b$，并且 $t = filmDis \cdot \tan(fovy/2)$，$r = t \cdot aspect$ 因此投影矩阵可以简化成:

$$
M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{filmDis}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{filmDis}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tan(fovy/2) \cdot aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(fovy/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & \frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

# 2 Rendering

## 2.1 Radiometry

## 2.2 Integrator

## 2.3 Material