- Graphics Note
    - 投影矩阵

Graphics Note

投影矩阵

推到从camera space(Ω_{cam})到NDC space(Ω_{NDC})的投影矩阵，这里NDC space的x, y, z的范围都是$[-1, 1]$。假设在camera space里的坐标为(x, y, x)，我们把这个点投影到film上，投影得到上的坐标为(x_p, y_p, z_p)，在NDC space中的坐标为(x_N, y_N, z_N)， film距离camera的距离为$filmDis$，根据$fovy$以及$filmDis$可以计算出film在camera space里的横坐标范围为$[l, r]$，纵坐标范围是$[b, t]$，定义投影矩阵$M_{proj} : \Omega_{cam} \to \Omega_{NDC}$。并且这里假设近裁剪端和远裁剪端到camera的距离分别为n, f(这里需要了解齐次坐标的知识)

由几何关系

$$\frac{x_p}{x} = \frac{y_p}{y} = \frac{filmDis}{z}$$

可以得到

$$x_p = \frac{filmDis}{z} \cdot x$$
$$y_p = \frac{filmDis}{z} \cdot y$$

对于x_p我们可以得到以下推导

$$l \le x_p \le r$$
$$0 \le x_p - l \le r - l$$
$$0 \le \frac{x_p - l}{r - l} \le 1$$
$$0 \le 2\frac{x_p - l}{r - l} \le 2$$
$$-1 \le \frac{2x_p}{r - l} - \frac{r + l}{r - l} \le 1$$

同理也可以得到

$$-1 \le \frac{2y_p}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} \le 1$$

总结一下，我们可以的得到关于x, y的投影后的关系

$$\begin{cases} -1 \le \frac{2}{r-l} \cdot \frac{filmDis}{z} \cdot x - \frac{r+l}{r-l} \le 1 \\ -1 \le \frac{2}{t-b} \cdot \frac{filmDis}{z} \cdot y - \frac{t+b}{t-b} \le 1 \end{cases}$$

由此我们可以构造出一部分投影矩阵的元素

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A, B为一个待定的元素，注意这里的投影矩阵其实并不是唯一的，还有其他的构造方法。

我们写出从camera space到NDC space的表达式

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2filmDis}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2filmDis}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_p}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \\ \frac{2y_p}{t-b} - \frac{t+b}{t-b} \\ z_pA + B \\ z_p \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_N/w_N \\ y_N/w_N \\ z_N/w_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_p}{r-l} \cdot \frac{1}{z_p} - \frac{r+l}{r-l} \cdot \frac{1}{z_p} \\ \frac{2y_p}{t-b} \cdot \frac{1}{z_p} - \frac{t+b}{t-b} \cdot \frac{1}{z_p} \\ (z_pA + B)/z_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

有裁剪锥体得出，在n处坐标为被映射为-1，在f处坐标映射成1

$$\begin{cases} \dfrac{nA+B}{n} = -1 \\ \dfrac{fA+b}{f} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{f+n}{f-n} \\ B = \dfrac{2nf}{f-n} \end{cases}$$

注意：这个结果和pbrt里的有所不同，原因是pbrt中的范围是$[0,1]$

最后得到完整的投影矩阵：

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \dfrac{2filmDis}{r-l} & 0 & 0 & -\dfrac{r+l}{r-l} \\ 0 & \dfrac{2filmDis}{t-b} & 0 & -\dfrac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{f-n} & \dfrac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一般情况下$r=-l,\ t=-b$，因此投影矩阵可以简化成

$$M_{proj} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{f-n} & \dfrac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$