

刘维烨专用资料

Xiaoyu Xue

2017 年 9 月 30 日

1 数学

1.1 数学符号

1. 求和: $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + \dots + a_n$
2. 坐标: 三维坐标用 (x, y, z) 表示
3. 向量: \vec{a} 或者 \mathbf{a} , 三维向量 $\mathbf{a} = (x, y, z)$
4. 有限元差分: 用 Δx 来表示两个物理量 x_1, x_2 的变化量
5. 导数: $f(x)$ 的导数为 $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

1.2 向量

1.2.1 向量的长度

$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, 向量 \mathbf{a} 的长度为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

1.2.2 向量加法

$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 三角形或者平行四边形法则, 如图 1

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

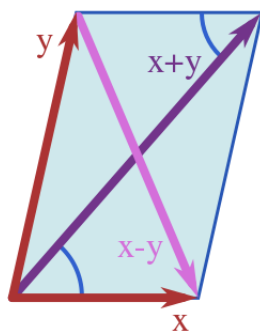


Figure 1: 平行四边形法则

1.2.3 向量数乘

一个数乘一个向量的结果是一个向量

$$c\mathbf{a} = c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

1.2.4 向量点乘

向量点乘的结果是一个标量:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

1.2.5 向量叉乘

向量叉乘的结果是一个向量，长度为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

向量为:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)$$

向量的方向根据坐标系选择左右手法则（不满足交换律），如图 2

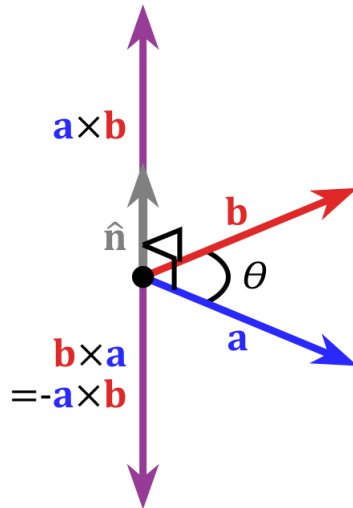


Figure 2: 向量叉乘

2 位移、速度和加速度

2.1 位移

定义：由初位置到末位置的一段有向线段（向量），单位：m

假设点 A 的位置为 $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ，点 B 的位置为 $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，A 到 B 的位移为 $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

2.2 速度

定义：一个物体的速度定义成在某个参考系下它的位置的变换率，是一个随时间变化的函数，可以用 $\mathbf{v}(t)$ 表示，单位：m/s

2.2.1 平均速度 (Average velocity)

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}$$

其中 $\Delta \mathbf{x}$ 表示位移， Δt 表示经历的时间

2.2.2 瞬时速度 (Instantaneous velocity)

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

因此位移可以通过瞬时速度的积分求得

$$\mathbf{x} = \int \mathbf{v} dt$$

2.3 加速度

定义：加速度为速度随时间的变化率（向量），是一个时间的函数，用 $\mathbf{a}(t)$ 表示，单位 m/s^2

2.3.1 平均加速度 (Average acceleration)

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

其中 $\Delta \mathbf{v}$ 为速度差， Δt 为经历的时间

2.3.2 瞬时加速度 (Instantaneous acceleration)

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

可以看出瞬时加速度是速度随时间的导数，速度是位移随时间的导数，所以加速度是位移随时间的二阶导数

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

3 受力分析

3.1 力

在物理学中，力是任何导致自由物体历经速度、方向或外型的变化影响。初中时候说过力的三要素：大小，方向和作用点。从这里就可以看出力是一个向量，力的字母表示通常是 \mathbf{F} ，经典力学通常涉及到牛顿运动定律，我们讨论的也都是经典力学的范围。力的单位为：牛顿 (N)

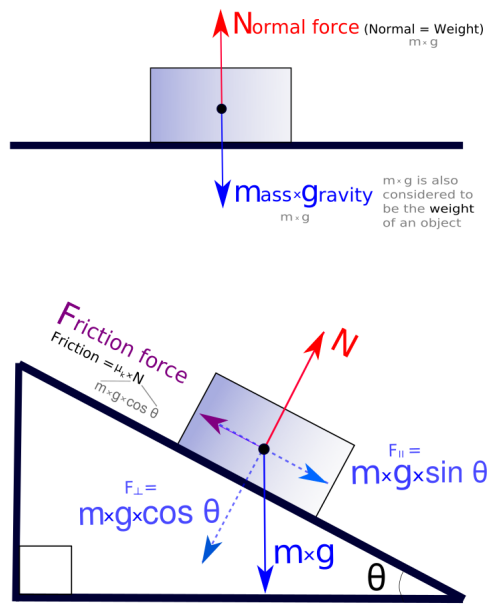


Figure 3: 受力分析

3.2 力的种类

3.2.1 重力

现在所称的重力，直到艾萨克·牛顿的工作之前，都没有被认定是万有的。这个朝向地球表面的由重力产生的加速度通常以 \mathbf{g} 标示，有一个大约是 9.81 米每平方秒的大小（这个是从海平面测量且跟位置有关）且指向地心。这个观测意味着地球表面上作用在物体上的重力直接地与物体质量成正比。因此一个有质量为 m 的物体所受的重力为

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$$

3.2.2 压力

定义：物理学上的压力，是指发生在两个物体的接触表面的作用力，或者是气体对于固体和液体表面的垂直作用力，或者是液体对于固体表面的垂直作用力。

3.2.3 摩擦力

定义：摩擦力指两个表面接触的物体相对滑动时抵制它们的相对移动的力，是经典力学的一个名词。摩擦力又可以分为：静摩擦，滑动摩擦和滚动摩擦。

滑动摩擦力的大小可以用如下公式计算

$$F = \mu F_N$$

其中 μ 为摩擦系数, F_N 为接触面的压力大小。

3.2.4 弹力

定义: 弹力是指发生弹性形变的物体由于要恢复原状, 对他接触的物体产生的力。

弹力大小用胡克定律计算: 弹簧发生弹性形变时, 弹力的大小 F 跟弹簧伸长 (或缩短) 的长度 x 成正比

$$F = -kx$$

其中 k 是弹簧劲度系数, 单位为 N/m

4 牛顿运动定律

4.1 牛顿第一定律

牛顿第一定律表明, 存在某些参考系, 在其中, 不受外力的物体都保持静止或匀速直线运动。

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

其中 \mathbf{F}_i 是第 i 个外力, \mathbf{v} 是速度, t 是时间。

4.2 牛顿第二定律

牛顿第二定律表明, 物体的加速度与施加的合外力成正比, 与物体的质量成反比, 方向与合外力方向相同。这定律又称为“加速度定律”。数学上, 牛顿第二定律通常表达为:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

其中 m 为物体的质量, \mathbf{a} 为加速度, 从这里可以看出 $1N = 1kg \cdot m/s^2$

4.3 牛顿第三定律

牛顿第三定律表明, 当两个物体互相作用时, 彼此施加于对方的力, 其大小相等、方向相反:

$$\sum \mathbf{F}_{AB} = \sum \mathbf{F}_{BA}$$

其中 \mathbf{F}_{AB} 是物体 B 施加于物体 A 的力, \mathbf{F}_{BA} 是物体 A 施加于物体 B 的力。

5 圆周运动

5.1 角速度

定义: 在物理学中定义为角位移的变化率, 描述物体转动时, 在单位时间内转过多少角度以及转动方向的向量, 用符号 ω 表示, 单位: 弧度每秒 (rad/s)

与速度的关系: 在半径为 r 的圆上, 角速度与速度的关系是 $\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{v} / |\mathbf{r}|^2$, 它们的大小关系为 $\omega = v \sin \theta / r$

5.2 匀速圆周运动

匀速圆周运动中, 物体的角速度恒定, 速度的大小也恒定, 所以有关系 $v = \omega r$

5.2.1 向心力

定义: 当物体沿着圆周或者曲线轨道运动时, 指向圆心 (曲率中心) 的合外力作用力在匀速圆周运动中, 向心力的大小为:

$$F = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r} = ma$$

5.3 非匀速圆周运动

非匀速圆周运动的加速度可以分成法向加速度 \mathbf{a}_\perp 和切向加速度 \mathbf{a}_\parallel , 对于已知速度大小为 $v(t)$, 半径为 r 的圆周运动:

$$|a_\perp| = \frac{v^2}{r}$$
$$|a_\parallel| = \frac{dv(t)}{dt}$$

总加速度 \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel$$
$$|a| = \sqrt{|a_\perp|^2 + |a_\parallel|^2}$$

6 动力学

6.1 动量

定义：动量定义为质量和速度的乘积，是一个向量用 \mathbf{p} 表示

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

6.1.1 冲量

冲量是作用在物体上的力在时间上的累积，用符号 \mathbf{I} 表示：

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F} dt$$

6.1.2 动量定理

动量定理：一个物体的冲量为动量的变化量

$$\mathbf{F}\Delta t = m\Delta\mathbf{v}$$

6.2 角动量

6.2.1 角加速度

定义：描述角速度的变化率，也是一个向量，用符号 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示，单位： rad/s^2

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

6.2.2 转动惯量

转动惯量是一个物体对于其旋转运动的惯性大小的量度。用符号 I 表示
对于一个质点

$$I = mr^2$$

$I = mr^2$ ，其中 m 为质量， r 是质点和转轴的垂直距离

对于刚体有

$$I = \int_Q r^2 dm$$

6.2.3 角动量

定义：角动量定义为转动惯量和角速度的乘积，用符号 \mathbf{L} 表示

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

6.2.4 力矩

通常来说，一个力矩作用在一个质点上可以表达为：

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

其中 \mathbf{r} 是质点的位置向量， \mathbf{F} 为作用在质点上的力

运用牛顿第二定律可以得到力矩类似于力的表达式

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\alpha$$

6.3 动能与角动能

动能：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

角动能：

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

6.3.1 如何记忆

1. 转动惯量 I 类比于质量 m
2. 角速度 ω 类比于速度 v
3. 角加速度 α 类比于加速度 a
4. 力矩 τ 类比于力 F
5. 角动量 L 类比于动量 p
6. 牛顿第二定律，动量定理，动能定理两边同样适用

7 Try your best !

