

基于分布估计算法的离港航班排序优化

曹嵩¹, 孙富春¹, 胡来红^{1,2}, 刘华平¹, 张学军³

(1. 清华大学 计算机科学与技术系, 智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084;

2. 第二炮兵工程学院 302教研室, 陕西西安 710025; 3. 北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100191)

摘要: 离港排序优化问题指优化离港航班序列以减少终端区离港航班的延误, 是当前空中交通管制领域需要解决的重要问题。该文基于带滑动窗的分布估计算法, 实现了对该问题的求解。算法以飞机优先序列进行编码, 适应度函数考虑了离港飞机起飞延迟因素, 并在传统的优化流程中加入了滑动窗的排序思想, 解决了多架飞机参与排序时编码空间不足的问题。仿真结果表明, 分布估计算法在离港排序优化问题上具有较好的整体性能, 同时, 滑动窗参数的选择对于优化结果具有明显的影响。

关键词: 分布估计算法; 遗传算法; 滑动窗; 离港航班排序

中图分类号: N 945.15

文献标识码: A

文章编号:

Departure aircraft sequence optimization using EDA

CAO Song¹, SUN Fuchun¹, HU Laihong^{1,2},
LIU Huaping¹, ZHANG Xuejun³

(1. Department of Computer Science and Technology, State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Unit 302, Xi'an Research Institute of High-Tech, Xi'an 710025, China;

3. School of Instrumentation Science & Optoelectronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: How to minimize delays of flights in terminal area by optimization of departure aircraft sequence is a critical problem in the field of air traffic control (ATC). In this paper, estimation of distribution algorithm (EDA) with sliding window is implemented to solve this problem. Chromosomes that represents priority list are used in our method and fitness value is determined by average delay of aircrafts. By adding sliding window into traditional optimization process, it has solved the problem of oversized solution space caused by large number of aircrafts to be scheduled. Simulation results show that estimation of distribution algorithm has satisfactory overall performance in departure aircraft sequence optimization, and the sliding window parameters have significant effect on the optimization results.

Key Words: estimation of distribution algorithm (EDA), genetic algorithm (GA), sliding window, departure aircrafts scheduling

随着航空事业的快速发展, 由于机场容量限制而带来的航班延误问题越来越突出。航班延误不仅给旅客带来诸多不便, 使航空公司蒙受经济损失, 而且严重威胁到机场及空域的安全^[1]。机场终端区的管制和优化作为提高航空系统效率的有效途径越来越受到本领域研究人员的重视。目前国内外已经有很多学者提出了对终端区飞机队列进行优化的方法, 例如, 时间提前量算法(time advance, TA)、约束位置交换算法(constrained position shift, CPS)、滑动窗优化算法、模糊模式识别算法、改进的遗传算法(genetic algorithm, GA)等^[2]。

GA是由美国密歇根大学的John Holland教授创立的一种自适应启发式全局寻优算法^[3]。该算法模拟自然界“优胜劣汰”的自然选择过程, 反复迭代寻优, 最终得到问题的较优解。由于其思路简单, 易于实现以及良好的鲁棒性, 很多学者基于该算法提出了针对进港飞机队列优化问题的解决方案^[4-6]。他们大多采用不同的编码方式以及不同的交叉和变异方法来优化进港飞机的序列。另外, 也有学者利用进化算法对进港飞机排序的多目标优化问题进行了研究^[7-9]。而在离港飞机排序优化方面, Capri 和 Ignaccolo 提出了将离港飞机序列引入机场动态模型中, 并运用GA进行排序优化的思想^[10]。

分布估计算法(estimation of distribution algorithm, EDA)是近年来在进化计算领域兴起的一类新型优化算法^[11]。与GA不同, EDA中没有传统的交叉、变异等遗传操作, 而是通过概率模型实现进化操作。与GA相比, 一般情况下EDA能更有效地解决高维问题, 降低时间复杂度^[12]。GA和EDA都是比较典型的启发式优化方法, 已广泛地用于与优化相关的多个领域。而总体来说, 目前GA在飞机排序问题上的研究相对较多, 而EDA在飞机排序问题上的研究还鲜有文章公开发表。本文在分析终端区各运行要素的基础上, 基于带滑动窗的EDA对离港飞机排序优化问题进行了研究, 并与GA作了对比分析。

收稿日期: 2009-06-08

基金项目: 国家杰出青年科学基金(60625304); 国家自然科学基金面上项目 (60572178)。

作者简介: 曹嵩(1986-), 男(汉), 湖北, 博士研究生。

通讯联系人: 孙富春, 教授, E-mail: fcsun@tsinghua.edu.cn

1 问题描述

机场终端区飞机排序的优化主要分为进港飞机排序和离港飞机排序两个方面。进港飞机排序优化的主要目标是通过调整飞机序列和速度的调整和控制，在固定的时间内使尽可能多的飞机降落，并满足实际中的约束条件，例如，国际民航组织(ICAO)规定的不同类型飞机之间的尾流间隔的最小距离标准等^[13]。

离港飞机的序列优化问题与进港飞机的不同。目前实际中应用的大多数离港飞机的调度策略是优先进港飞机占用跑道，然后利用跑道的空闲时隙安排离港飞机适时起飞。因此，在对离港飞机进行排序的过程中，需要考虑进港飞机占用跑道的情况，这与进港飞机的排序问题有很大区别。

本文中的离港飞机排序问题主要是根据进港飞机对跑道的占用情况，离港飞机的准备好时间以及从停机位到达跑道起飞点所需要的时间等因素，合理分配离港飞机占用跑道的的时间，并计算出飞机推出停机位的时间。优化目标是使得起飞航班的平均延误最小。所采用的数学模型描述如下：

1) 进港飞机集合

$$A_a = \{A_a^1, A_a^2, \dots, A_a^m\}. \quad (1)$$

其中，每架进港飞机 $A_a^i (1 \leq i \leq m)$ 对应一个降落时间 T_a^i ，并且在从降落时间 T_a^i 到降落后后的一个固定时间长度 ΔT 内占用跑道，即在 $[T_a^i, T_a^i + \Delta T]$ 的时间区间内不能安排飞机起飞。

2) 离港飞机集合

$$A_d = \{A_d^1, A_d^2, \dots, A_d^n\}. \quad (2)$$

其中，每架离港飞机 $A_d^i (1 \leq i \leq n)$ 对应一个准备好时间 T_r^i ，一个预计起飞时间 T_e^i 和一个到达跑道口所需的滑行时间 t_r^i 。离港飞机 A_d^i 的推出时间 T_p^i 必须在准备好时间 T_r^i 之后，经过滑行时间 t_r^i 后到达跑道口。设离港飞机 A_d^i 的实际起飞时间为 T_d^i ，则跑道在 $[T_d^i, T_d^i + \Delta T']$ 的时间区间内被占用，其中 $\Delta T'$ 为离港飞机起飞时占用跑道的的时间。

3) 离港飞机 A_d^i 的延迟时间 D^i 定义为

$$D^i = \begin{cases} 0, & T_d^i \leq T_e^i; \\ T_d^i - T_e^i, & T_d^i > T_e^i. \end{cases} \quad (3)$$

4) 优化目标是让所有离港飞机的平均实际起飞延误 D_a 最小，即

$$\min D_a = \frac{\sum_{i=1}^n D^i}{n}. \quad (4)$$

2 基于滑动窗的EDA求解

在引言中介绍了EDA的主要思想。下面详细介绍EDA在离港飞机排序优化问题上的具体实现。

2.1 解空间编码

由于二进制码的广泛适用性以及解空间连续等优点，故采用二进制编码方式。下面具体介绍如何运用

序数法^[14]在飞机序列和二进制码之间建立一一对应关系。

由于每个二进制码和十进制整数是一一对应的，所以只需要建立十进制整数和飞机序列之间的对应关系即可。假设有 n 架飞机需要排序，则对应的序列个数为 $n!$ 个，即需要建立 0 到 $n! - 1$ 的 $n!$ 个整数和长度为 n 的排列之间的一一对应关系。而从 0 到 $n! - 1$ 的任意整数 x 可唯一地表示为

$$x = a_{n-1}(n-1)! + a_{n-2}(n-2)! + \dots + a_1 1!. \quad (5)$$

其中， $0 \leq a_i \leq i, i = 1, 2, \dots, n-1$ ，所以从 0 到 $n! - 1$ 的 $n!$ 个整数与式 (6) 一一对应。

$$(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1). \quad (6)$$

下面由 x 计算与其对应的式 (6)，假设

$$\begin{aligned} n_1 &= x, \\ n_{i+1} &= \left\lfloor \frac{n_i}{i+1} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (7)$$

则有

$$a_i = n_i - (i+1)n_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

为了便于编程实现，采用如下规则由计算出的式 (6) 来得到某一系列 $p = p_1 p_2 \dots p_n$ 。假设飞机的编号为 $1, 2, \dots, n$ ，由于 $0 \leq a_{n-1} \leq (n-1)$ ，则从式 (6) 的第一个元素 a_{n-1} 开始，可以在当前的飞机集合中选择第 $a_{n-1} + 1$ 个编号所对应的飞机作为生成序列的第一架飞机，然后，再从剩下的飞机集合中选择第 $a_{n-2} + 1$ 个编号所对应的飞机作为生成序列的第二架飞机，依次类推，直到生成序列的所有飞机都被确定为止。

2.2 适应度函数

EDA产生的解都是飞机的一个序列，下面定义某个飞机序列 $p = p_1 p_2 \dots p_n$ 的适应度值。

对于序列 p ，将其作为一种优先队列，即排在前面的飞机优先考虑安排起飞使其起飞延迟最小。对于离港飞机的集合 A_d ，每一个解代表一个优化后的飞机离港序列。从这个序列的开始到末尾的每一架飞机，采用安排最早可能起飞时间的方式确定飞机的起飞计划。

在确定每一架离港飞机的起飞计划时，采用最早可能起飞时间而不是预计起飞时间的理由是防止产生起飞时隙的“碎片”造成效率降低。例如，图 1 是一种可能出现的对比情况。白色方框代表可用的起飞时隙，而黑色矩形代表离港飞机占用跑道的的时间段。如果按照最早起飞时间的策略安排起飞，可以在该时隙内安排两架飞机起飞，如图 1a 所示。而如果按照最接近预计起飞时间的策略安排起飞，就有可能产生图 1b 中的情况，在前后产生时隙“碎片”，使得本来可以安排两架飞机起飞的时隙变得只能安排一架飞机起飞，降低了跑道的利用率。

根据单架飞机延误时间的定义式 (3) 和平均延误时间的定义式 (4)，只需要得到每架飞机的实际起飞时间 T_{di} ，就可以计算出平均延误时间 D_a 。

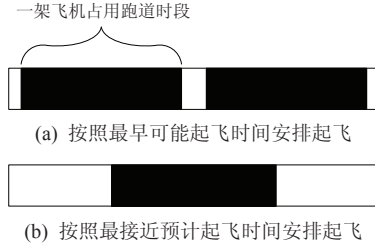


图 1 起飞时间安排策略效果对比图

为了简化起见，假定进港飞机的降落时间没有随机扰动。设任意进港飞机 A_a^i 占用跑道的时间区间为 $[T_a^i, T_a^i + \Delta T]$ ，定义剩下的时间段集合为

$$S = \{s^1, s^2, \dots, s^N\}. \quad (9)$$

其中 $s^i \rightarrow [T_s^{i-l}, T_s^{i-u}]$, $1 \leq i \leq N$ 。

这样，离港飞机按照由进港飞机降落时间确定的推出时间推出，则到达跑道口后即可起飞，即离港飞机 A_d^i 的实际起飞时间 T_d^i 可由式(10)确定。

$$T_d^i = \max \{ \min \{ T_s^{j-l} \}, T_r^i + t_r^i \}, 1 \leq i \leq n. \quad (10)$$

s. t. $1 \leq j \leq N$,

$$T_s^{i-u} - T_s^{i-l} \geq \Delta T',$$

$$T_s^{i-u} - (T_r^i + t_r^i) \geq \Delta T'.$$

其物理意义为，安排的起飞时间必须在离港飞机到达跑道口的最早可能时间 $T_r^i + t_r^i$ 之后，并且时隙的长度必须大于飞机起飞所需要的时间长度 ΔT 。

这样，就可以根据每架飞机的实际起飞时间 T_d^i ，由式(3)和式(4)计算出平均延误时间 D_a 。由于一般优化目标是求极大值，如式(11)定义适应度函数 f 。

$$f = -D_a. \quad (11)$$

同时由式(12)可得到离港飞机 A_a^i 的推出时间

$$T_p^i = T_d^i - t_r^i. \quad (12)$$

2.3 带滑动窗的排序优化

由于采用的编码方式是将飞机序列与二进制码一一对应。所以对于长度为 n 的飞机序列，会产生 $n!$ 个有效解。而随着 n 的增长，解空间的大小会很快超过整型变量的取值范围。事实上，对于所有大于 16 的 n ，解空间已经超出了整型变量的取值范围。

因此，对于少量飞机的排序优化（在本文中指不超过 16 架离港飞机），可以直接使用单次 EDA 求解。而对于大量飞机的排序优化，需要采用一种在解空间和优化效果中取得平衡的方法。

基于滑动窗思想排序优化算法的步骤为：

1) 假设离港飞机数量为 n ，飞机的编号分别为 $1, 2, \dots, n$ ，取飞机集合中的前 k 架飞机 $(1, 2, \dots, k)$, ($k \leq n$) 开始排序。

2) 通过 EDA 计算得到第一组 k 架飞机的最优序列 $(p(1), p(2), \dots, p(k))$ 。再取包含其前 l 架飞机

的子序列 $(p(1), p(2), \dots, p(l))$, ($l < k$) 作为最终排列中长度为 l 的子序列。

3) 再选择剩下飞机集合中的前 k 架飞机 $(1, 2, \dots, k)$ 开始排序。然后重复上一步。

4) 直到飞机集合剩下的飞机数为 k ，此时运用同样的方法得到最优子序列，并将这个最后得到的子序列放到步骤 1)-步骤 3) 已确定飞机序列的最后，从而得到最终优化结果。

滑动窗的引入相当于用 $\lceil \frac{n-k}{l} \rceil + 1$ 次 EDA 求长度为 k 的最优序列的运算，代替直接求长度为 n 的最优序列的运算。由于飞机调度中存在有移位约束，即飞机优化后在序列中的位置相对优化前序列中的位置不宜变动过大，故基于滑动窗思想求得的解较为接近最优解，而且在时间复杂性和空间复杂性上也能有较好的平衡。需要说明的是，如果 k 与 n 相等，则退化为单次使用 EDA 排序的情况。

图 2 所示的是一个离港飞机数量 $n = 7$ 、滑动窗大小 $k = 5$ 、滑动窗移动步长 $l = 1$ 的优化过程示例，其需要进行 $\lceil \frac{n-k}{l} \rceil + 1 = 3$ 次求长度为 5 的最优序列运算。图中白色圆圈代表位置未被确定的飞机，黑色圆圈代表位置已确定的飞机。

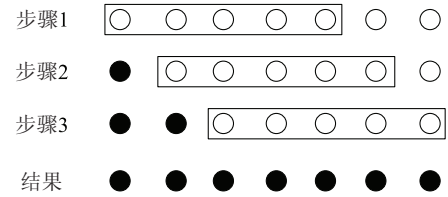


图 2 基于滑动窗的优化过程示意图

3 仿真结果与分析

3.1 参数设置

仿真数据来自于广州白云机场的实际运行数据。根据问题规模 GA 和 EDA 的参数选取如下：GA 种群大小为 10，交叉概率为 50%，变异概率为 1%，最大进化代数为 10000；EDA 种群大小为 10，择优比例为 50%，最大进化代数为 10000。分别对两种场景进行仿真：较小规模不需要采用滑动窗的场景和较大规模需要采用滑动窗的场景。

为了便于比较 GA 和 EDA 的性能，对两种算法采用相同的编码方式和适应度函数。同时，为了使比较更具有代表性，采用了两类算法中比较典型的算法：传统的 GA 和 EDA 中的 UMDA 算法^[15]。

GA 和 EDA 的主要不同之处在于：

1) 选择方法。GA 是采用轮盘赌方式，通过染色体的适应度确定概率分布，从原有的种群中随机选择染色体；而 EDA 是通过适应度择优选取染色体。

2) 进化方法。GA 是通过选择得到的种群进行交叉和变异操作得到新一代种群；而 EDA 是通过概率模型和采样操作使群体的分布朝着优秀个体的方向进化^[12]。

3.2 不需要运用滑动窗的场景

根据前面分析可知，由于采用的编码方式是将飞机序列与二进制码一一对应，当离港飞机数量大于16架时，解空间的大小可能会超出整型变量的取值范围，故不宜直接使用单次EDA进行优化求解。因此本文在较小规模不需要运用滑动窗的场景中，选取了约半个小时内双跑道混合起降、15架离港飞机和10架进港飞机的数据进行仿真。仿真实验中，在没有超出最大进化代数的前提下，当最近的100代最优值没有变化，就认为算法已经收敛，则记录最优值并停止计算。通过100次Monte Carlo实验取平均值，得到的优化结果如表1所示。表中FCFS为先到先服务(first come first serve)序列，即优化前的飞机起飞序列。

3.3 需要运用滑动窗的场景

由前面分析可知，当离港飞机数量大于16架时，可认为是规模相对较大的场景，应该采用滑动窗的思想进行优化求解。故仿真实验选取了约一个小时内双跑道混合起降、32架离港飞机和16架进港飞机的数据进行仿真，滑动窗大小 $k=16$ ，滑动窗移动步长 $l=1$ ，收敛条件也是最近的100代最优值没有变化。通过100次Monte Carlo实验取平均值，得到的优化结果如表2所示。

3.4 优化结果分析

3.4.1 GA与EDA性能比较

由表1和表2的实验结果不难看出，GA和EDA在优化效果上都取得了较为理想的结果。而EDA的平均收敛代数小于GA，EDA所得的最优值方差、收敛代数方差和耗费时间方差都比GA低，表明EDA的稳定性更好。两种算法的收敛曲线如图3所示。其中，横轴代表进化代数，纵轴代表100次Monte Carlo实验在该代产生的最优值的方差。

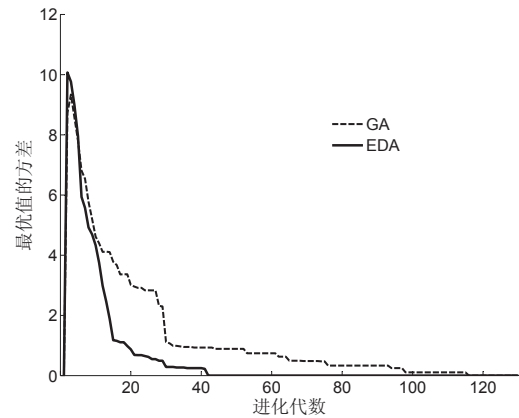


图 3 GA和EDA的收敛曲线

3.4.2 滑动窗参数对优化效果的影响

如2.3节所述，加入滑动窗的GA和EDA主要涉及两个参量：滑动窗的大小 k 、滑动窗的移动步长 l 。针对3.3节中的实验场景，通过改变 k 和 l 这两个参量，可以得到不同的优化效果。优化效果（平均延迟时间减少的百分比值）同这两个参数之间的关系如表3所示。由表3可以看出：

- 1) 在参数相同的情况下，带滑动窗EDA的优化效果整体上要好于带滑动窗GA的优化效果。
- 2) 同一种算法在滑动窗大小确定的情况下，优化效果随滑动窗步长的增加而减小。
- 3) 同一种算法优化效果同滑动窗大小的关系与采用的滑动窗步长有关。滑动窗步长较小时，优化效果受滑动窗大小的影响不大；而当滑动窗步长较大时，优化效果会随着滑动窗的缩小而下降。而且滑动窗步长越大，这种下降的趋势也越明显。

由于在实际的空管调度中，一般希望调整后序列中的每一架飞机的位置与原来序列中的位置偏移不要过大，这不仅保证了一定的公平性，也减轻了空管人员的调度压力^[2]。假设允许的最大位置偏移为 M ，则滑动窗大小 k 可根据需要在 $[M, 2M]$ 取值，从而

表 1 较小规模情形下GA和EDA的优化结果 (未采用滑动窗)

算法	平均延误/s	最优值方差/s	性能提高	平均收敛代数	收敛代数方差	平均耗费时间/ms	耗费时间方差/ms
FCFS	383.93	-	-	-	-	-	-
GA	358.67	≈ 0	6.58%	3.48	4.71	44.12	17.98
EDA	358.67	≈ 0	6.58%	2.45	2.86	41.95	4.36

表 2 较大规模情形下GA和EDA的优化结果 (采用滑动窗)

算法	平均延误/s	最优值方差/s	性能提高	平均收敛代数	收敛代数方差	平均耗费时间/ms	耗费时间方差/ms
FCFS	366.25	-	-	-	-	-	-
GA	350.08	2.03	4.42%	51.76	15.53	1 404.09	254.34
EDA	348.23	0.71	4.92%	35.59	10.04	1 445.05	230.48

表 3 EDA与GA优化效果比较

k	GA优化效果/%			EDA优化效果/%		
	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
16	4.42	2.74	2.15	4.92	3.01	2.39
14	4.77	2.92	2.13	4.89	3.27	2.41
12	4.77	2.57	1.52	4.91	2.73	1.98
10	4.84	2.93	1.51	4.82	2.98	1.51
8	4.93	2.27	0.49	4.94	2.78	0.74

既能得到满足位移约束的较优解，又可减小计算量。对于滑动窗移动步长 l 的选取，则可根据当前起降飞机的密集程度自适应调整。当起降飞机不太密集时，则 l 可选择相对较小的值，从而使得到的结果更优；当起降飞机较为密集时，则 l 可选择相对较大的值，从而节省计算资源。

4 结论

本文研究了基于EDA的离港飞机排序优化问题。运用序数法进行编码，并采用分配最早时隙的策略分配起飞时隙，进而计算适应函数。针对飞机数量较多时解空间超出整型变量取值范围的问题，提出了基于滑动窗优化排序思想的排序方法。最后分别针对飞机规模较小和飞机规模较大两种不同场景进行了仿真对比实验，同时还分析了滑动窗参数对优化效果的影响并给出了相关参数的选取原则。结果表明本文提出的方法能够满足离港航班排序优化问题，优化效果及算法稳定性在整体上要优于GA。

参考文献 (References)

- [1] 姜微微, 崔德光, 舒学智. 空中交通流量管理中的多机场地面等待策略[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2006, 46(1): 137-140.
JIANG Weiwei, CUI Deguang, SHU Xuezhi. Multi-airport ground holding policy in air traffic flow management [J]. *J Tsinghua Univ (Sci and Tech)*, 2006, 46(1): 137-140. (in Chinese)
- [2] Chandran B, Balakrishnan H. A dynamic programming algorithm for robust runway scheduling [C]// Proc 2007 American Control Conf, New York, 2007: 1161-1166.
- [3] Holland J H. Adaptation in Nature and Artificial Systems [M]. Michigan: The University of Michigan Press, 1975.
- [4] Beasley J E, Krishnamoorthy M, Sharaiha Y M, et al. Displacement problem and dynamically scheduling aircraft landings [J]. *J Operational Research Society*, 2004, 55: 54 - 64.
- [5] HU Xiaobing, Paolo E D. An efficient genetic algorithm with uniform crossover for air traffic control [J]. *Computers & Operations Research*, 2009, 36(1): 245-259.
- [6] HU Xiaobing, Paolo E D. Binary-representation-based genetic algorithm for aircraft arrival sequencing and scheduling [J]. *IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems*, 2008, 9(2): 301-310.
- [7] TANG Ke, WANG Zai, CAO Xianbin, et al. A multi-objective evolutionary approach to aircraft landing scheduling problems [C]// 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation, Hong Kong: IEEE Press, 2008: 3650-3656.
- [8] Chen C H, Liu T K, Chou J H, et al. A hybrid multiobjective genetic algorithm on optimizing aircraft schedule recovery problems under short-time response [C]// 2008 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Singapore: IEEE Press, 2008: 915-920.
- [9] Herrero J G, Berlanga A, Lopez J M M. Effective evolutionary algorithms for many-specifications attainment: application to air traffic control tracking filters [J]. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2009, 13(1): 151-168.
- [10] Capri S, Ignaccolo M. Genetic algorithms for solving the aircraft-sequencing problem: the introduction of departures into the dynamic model [J]. *J Air Transport Management*, 2004, 10(5): 345-351.
- [11] Larrañaga P, Lozano J A. Estimation of Distribution Algorithms: A New Tool for Evolutionary Computation [M], Norwell, MA: Kluwer, 2002.
- [12] 周树德, 孙增圻. 分布估计算法综述[J]. 自动化学报, 2007, 33(2): 113-124.
ZHOU Shude, SUN Zengqi. A survey on estimation of distribution algorithms [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(2): 113-124. (in Chinese)
- [13] 陈炜炜, 耿睿, 崔德光. 进近区域到达航班排序和调度的优化[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2006, 46(1): 157-160.
CHEN Weiwei, GENG Rui, CUI Deguang. Optimization of sequencing and scheduling for arrival aircrafts in approach area [J]. *J Tsinghua Univ (Sci and Tech)*, 2006, 46(1): 157-160. (in Chinese)
- [14] 卢开澄, 卢华明. 组合数学[M], 北京: 清华大学出版社, 2002年.
LU Kaicheng, LU Huaming. Combinatorial Mathematics [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. (in Chinese)
- [15] Mühlenbein H. The equation for response to selection and its use for prediction [J]. *Evolutionary Computation*, 1997, 5(3): 303-346.