☞ 矩：

设 k 为正整数，ξ 为随机变量，如果下面的数学期望存在，则

1) 称 $\mu_k = E(\xi^k)$ 为 ξ 的 k 阶原点矩；

2)称 $v_k = E(\xi - E\xi)^k$ 为 ξ 的 k 阶中心矩.

☞ 相关系数：

称 $\dfrac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$ 为随机变量 ξ 与 η 的相关系数，记为 $\rho_{\xi\eta}$

即
$$\rho_{\xi\eta} = \frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$$

不相关：

定义：若随机变量ξ与η的相关系数为 **0**, 称ξ与η不相关.

随机变量函数的分布：

离散型：列表归纳法

连续型：单调函数的密度公式，由**F**求**p.**

当$y=f(x)$是单调函数时，它的反函数$x=g(y)$。

$$p_\eta(y)=p_\xi(g(y))\,|\,g'(y)\,|$$

EX1 设随机变量X与Y满足:

$$D(X)=D(Y)=1 \text{ 而且 } \rho_{XY}=\tfrac{1}{2}$$

令 $U=aX,\ V=bX+cY$

求常数a,b,c的值，使得 $D(U)=D(V)=1$，而且U与V不相关.

答：$\boldsymbol{a=\pm 1, b=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, c=-\frac{b}{2}=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}}$

EX2 随机变量Θ在区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内服从均匀分布，求$V=A\sin\Theta$的概率密度。

解：$v=A\sin\theta$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调增加.

$\theta=\arcsin\frac{v}{A}$也是单调增加的（$|v|<A$）.

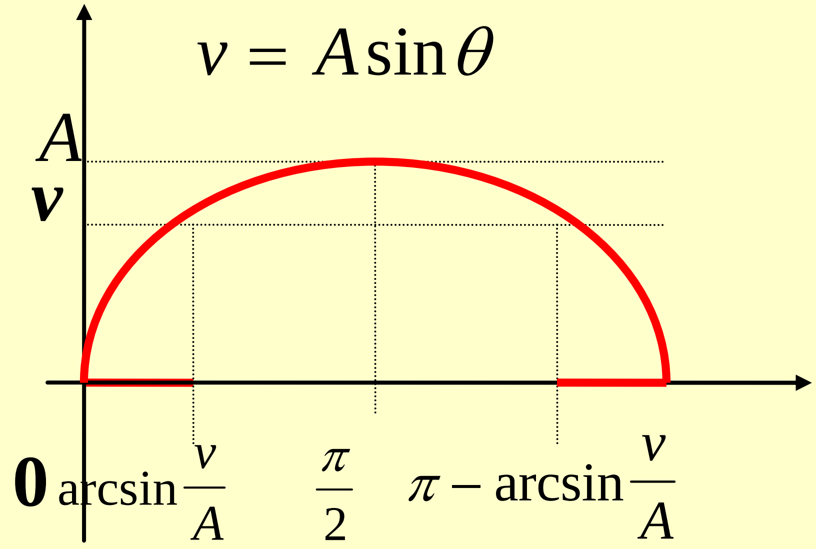
$$\boldsymbol{p_\Theta(\theta)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\pi}} \qquad |\theta|<\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{p_V(v)=\frac{1}{\pi}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}\right|=\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-v^2}}} \qquad |v|<A$$

$$\therefore \boldsymbol{p_V(v)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{A^2-v^2}}, & |v|<A\\ 0, & |v|\geq A\end{cases}}$$

EX3 随机变量 Θ 在区间 $(0,\pi)$ 内服从均匀分布，求 $V=A\sin\Theta$ 的概率密度。

解：注意：$v=A\sin\theta$ 在 $(0,\pi)$ 内不是单调的，因而不能直接用定理.



①当 $v\le 0$ 时，

$$F(v)=P(V\le v)=0$$

②当 $0<v<A$ 时，

$$F(v)=P(V\le v)$$

$$=P(A\sin\Theta\le v)$$

$$=P(0\le\Theta\le\arcsin\frac{v}{A})+P(\pi-\arcsin\frac{v}{A}\le\Theta\le\pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin\frac{v}{A}}\frac{1}{\pi}d\theta+\int_{\pi-\arcsin\frac{v}{A}}^{\pi}\frac{1}{\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{v}{A} + \frac{1}{\pi}[\pi - (\pi - \arcsin\frac{v}{A})]$$

$$= \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{v}{A}$$

③当 $v \geq A$ 时， $F(v) = \boldsymbol{P(V \leq v) = 1}$

$$\therefore F(v) = \begin{cases} 0 \quad , & v \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\dfrac{v}{A}, & 0 < v < A \\ 1 \quad , & v \geq A \end{cases},$$

(2)再求概率密度函数 $\varphi(v)$

$$\varphi(v) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{A^2 - v^2}} \quad , & 0 < v < A \\ 0 \quad , & \text{其它} \end{cases}$$

2. 随机向量函数的分布

问题：已知(ξ,η)的分布，如何求$\zeta = f(\xi,\eta)$的分布？

主要内容

1.和（差）的分布$\zeta=\xi+\eta$

2.平方和分布$\zeta=\xi^2+\eta^2$

3.商的分布$\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$

4.最大值与最小值分布

1.和（差）的分布$\zeta=\xi+\eta$

a. 离散

设ζ的可能取值为z_k， $z_k=x_i+y_j$，

则$p_\zeta(z_k)=P(\zeta=z_k) = P(\xi+\eta=z_k)$

$$=\sum_{x_i+y_i=z_k} P(\xi=x_i,\eta=y_j)$$

$$=\sum_i P(\xi=x_i,\eta=z_k-x_i)=\sum_i p(x_i,z_k-x_i)$$

或者，

$$p_\zeta(z_k)=\sum_j P(\xi=z_k-y_j,\eta=y_j)=\sum_j p(z_k-y_j,y_j)$$

若ξ与η独立，则

$$p_\zeta(z_k)=\sum_i p_\xi(x_i)p_\eta(z_k-x_i)$$

或者， $p_\zeta(z_k)=\sum_j p_\xi(z_k-y_j)p_\eta(y_j)$

例 1.设 $X \sim B(2,\frac{1}{2})$， $Y \sim B(2,\frac{1}{3})$， X 与 Y 独立.

求 $Z = X + Y$ 的分布。

解： X 与 Y 的分布律如下：

X	0	1	2
p_X	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2
p_Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

Z 的一切可能取值为 $0,1,2,3,4$.

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$$

$$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{6}{36}$$

$$P(Z=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)$$

$$+P(X=2,Y=0)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{13}{36}$$

$$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)$$

$$=\frac{2}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{12}{36}$$

$$P(Z=4)=P(X=2,Y=2)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{36}$$

$\therefore Z$的分布律为：

Z	0	1	2	3	4
p_Z	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{36}$

例 2.设 $X \sim P(\lambda_1)$， $Y \sim P(\lambda_2)$， X 与 Y 独立.

求 $Z = X + Y$ 的分布。

解： Z 的一切可能取值为 $0,1,2,3,\cdots$

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$\therefore Z \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

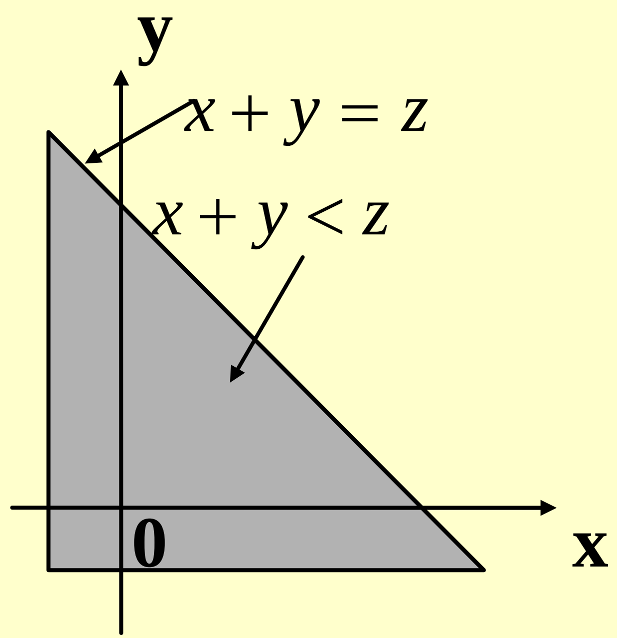
结论：独立的服从泊松分布的随机变量之和仍服从泊松分布，且参数为前两个参数之和。

b. 连续

$$F_\zeta(z) = P(\xi + \eta \le z)$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} p(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x,y)dy$$



上式两边对 z 求导：

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z-x)dx \, .$$

同理：$F_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} p(x,y)dx$

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z-y, y)dy$$

★若 ξ 与 η 独立，则 $p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) \cdot p_\eta(z-x)dx$

或者，$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z-y) \cdot p_\eta(y)dy$

例 3. ξ 与 η 独立，且都服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布，求 $\zeta=\xi+\eta$ 的分布。

解：

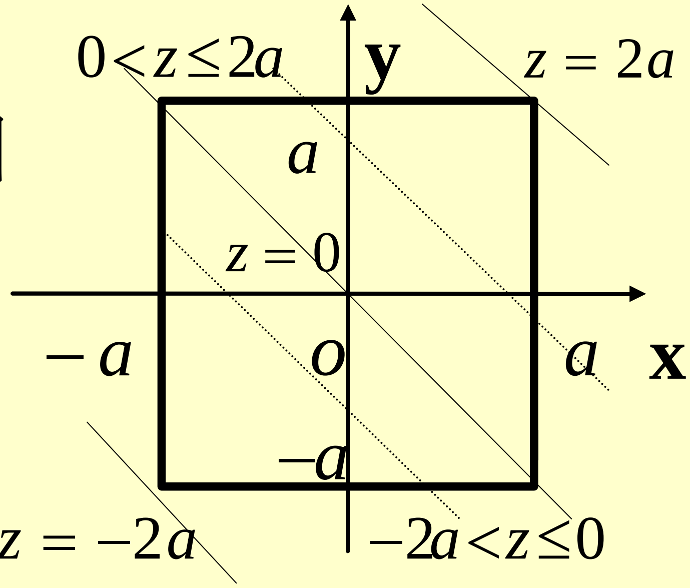
$$p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4a^2}, & |x|\le a, |y|\le a\\ 0, & 其它\end{cases}$$

方法一：从分布函数入手。

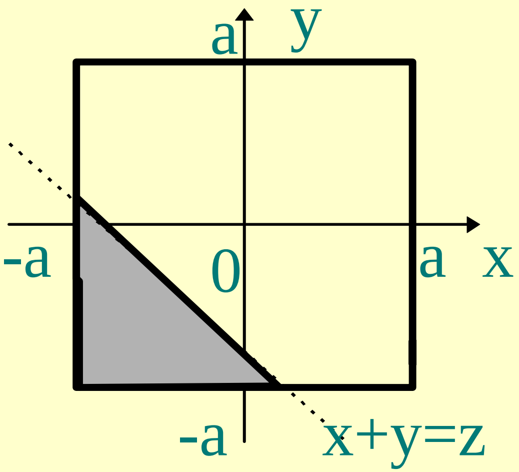
$\zeta=\xi+\eta$ 的取值范围在 $[-2a,2a]$。

① $z\le -2a$， $F_\zeta(z)=0$

$(\because \zeta<z$ 是不可能事件)



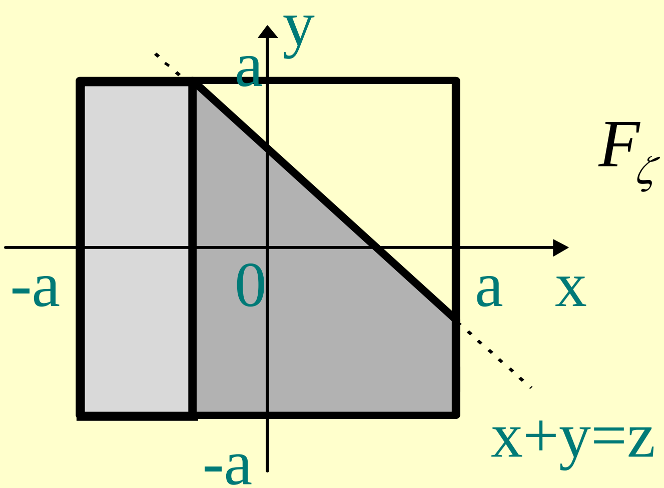
② $-2a < z \le 0$



$$F_\zeta(z) = \int_{-a}^{z+a} dx \int_{-a}^{z-x} \frac{1}{4a^2} dy$$

$$= \frac{(z+a)^2}{8a^2} + \frac{z}{4a} + \frac{3}{8}$$

③ $0 < z \le 2a$



$$F_\zeta(z) = \int_{-a}^{z-a} dx \int_{-a}^{a} \frac{1}{4a^2} dy + \int_{z-a}^{a} dx \int_{-a}^{z-x} \frac{1}{4a^2} dy$$

$$= \frac{1}{4a^2}(2az - \frac{1}{2}z^2 + 2a^2)$$

④ $z > 2a$

$\because \zeta < z$ 是必然事件， $\therefore F_\zeta(z) = 1$

综合①②③④得：

$$F_\zeta(z)=\begin{cases} 0 \quad , & z\le -2a \\ \dfrac{(z+a)^2}{8a^2}+\dfrac{z}{4a}+\dfrac{3}{8} \quad , & -2a<z\le 0 \\ \dfrac{1}{4a^2}(2az-\dfrac{1}{2}z^2+2a^2) \quad , & 0<z\le 2a \\ 1 \quad , & z>2a \end{cases}$$

所以，ζ 的密度函数为：

$$p_\zeta(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{4a^2}(z+2a) \quad , & -2a<z\le 0 \\ \dfrac{1}{4a^2}(-z+2a) \quad , & 0<z\le 2a \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

方法二：直接用卷积公式。

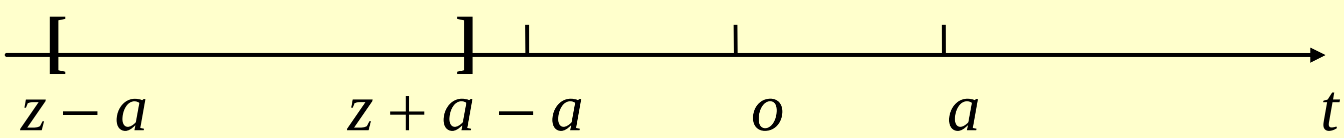
$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |x|\le a\\ 0\quad, & |x|>a\end{cases},\qquad p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |y|\le a\\ 0\quad, & |y|>a\end{cases}$$

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x)p_\eta(z-x)dx=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}p_\eta(z-x)dx$$

令 $\boldsymbol{z-x=t}$， 则 $\boldsymbol{dx=-dt}$， $\boldsymbol{t:z+a\to z-a}$

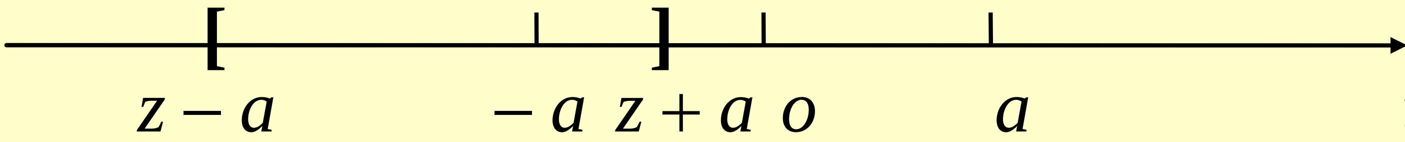
$$\therefore\ p_\zeta(z)=\frac{1}{2a}\int_{z+a}^{z-a}p_\eta(t)(-dt)=\frac{1}{2a}\int_{z-a}^{z+a}p_\eta(t)(dt)$$

① $z+a<-a\Rightarrow z<-2a$， $p_\eta(t)=0$， $\therefore\ p_\zeta(z)=0$。



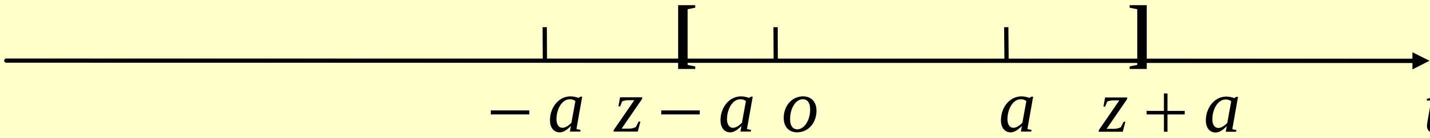
② $z-a \le -a \le z+a \Rightarrow -2a \le z \le 0$

$$p_\zeta(z) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{z+a}\frac{1}{2a}dt = \frac{1}{4a^2}(z+2a)$$



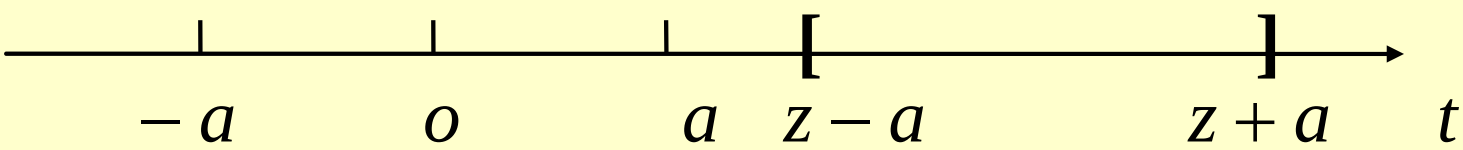
③ $z-a \le a < z+a \Rightarrow 0 < z \le 2a$

$$p_\zeta(z) = \frac{1}{2a}\int_{z-a}^{a}\frac{1}{2a}dt = \frac{1}{4a^2}(-z+2a)$$



④ $a < z-a \Rightarrow z > 2a$

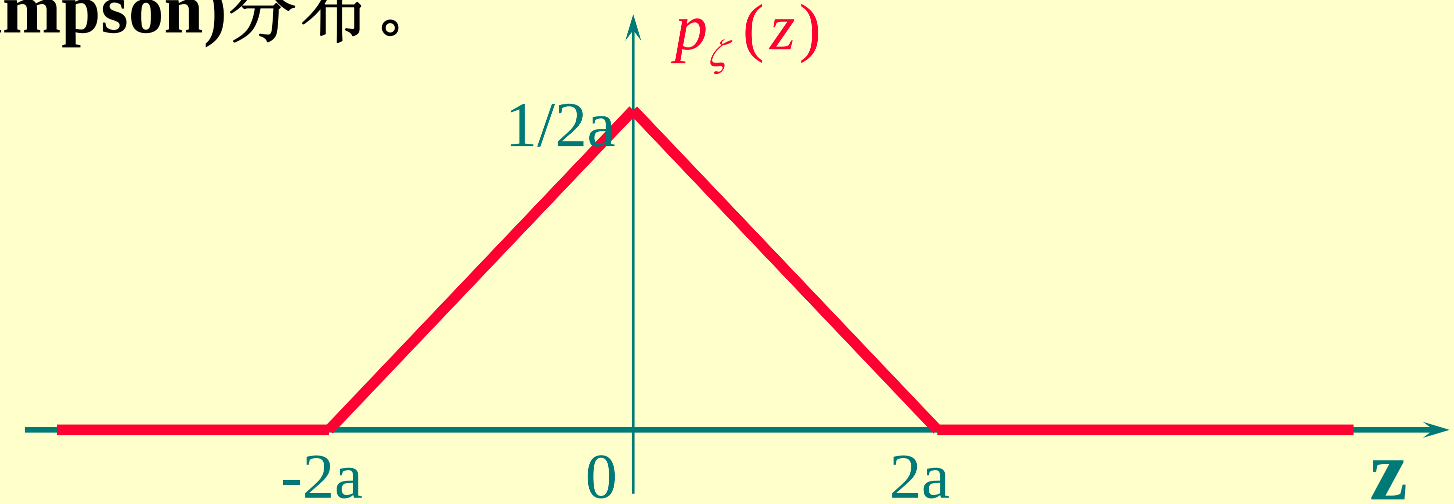
$p_\eta(t) = 0$, $\quad \therefore\ p_\zeta(z) = 0$



综合①②③④得：

$$p_{\zeta}(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{4a^2}(z+2a) & , \quad -2a\le z\le 0\\ \dfrac{1}{4a^2}(-z+2a) & , \quad 0<z\le 2a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

具有以上密度函数的随机变量的分布称为辛普森(**Simpson**)分布。



例 **4.** $\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\xi$ 与 η 独立，求 $\zeta=\xi+\eta$ 的分布。

解：
$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad p_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(Ax^2-2Bx+C)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{AC-B^2}{A}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1/2A}}e^{-\frac{(x-\frac{B}{A})^2}{2\cdot(\sqrt{1/2A})^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{-\frac{AC-B^2}{A}}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right),\quad B=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}+\frac{z-\mu_2}{\sigma_2^2}\right),\quad C=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(z-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)$$

$$\therefore p_\zeta(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}e^{-\frac{[z-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

$$\therefore \zeta \sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

结论：两个独立的正态随机变量之和仍为正态分布。

推论：有限个独立的正态随机变量之和仍为正态分布。

即： 相互独立的$\xi_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，

则$\sum_{i=1}^n \xi_i \sim N(\sum_{i=1}^n \mu_i,\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.

2.平方和分布 $\zeta = \xi^2 + \eta^2$

已知 (ξ,η) 的联合概率密度为 $p(x, y)$，

则 $F_\zeta(z) = P(\zeta \le z) = P(\xi^2 + \eta^2 \le z)$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le z} p(x, y)dxdy$$

上式对 z 求导，得 $p_\zeta(z) = \dfrac{dF_\zeta(z)}{dz}$

例 5. ξ 与 η 独立，且 $\xi \sim N(0,1)$， $\eta \sim N(0,1)$，
求 $\zeta = \xi^2 + \eta^2$ 的概率密度。

解： $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$， $p_\eta(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

当 $z \le 0$ 时， $F_\zeta(z) = 0$， $p_\zeta(z) = 0$

当 $z > 0$ 时，

$$F_\zeta(z) = \iint\limits_{x^2+y^2<z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot (-1) e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\sqrt{z}} = 1 - e^{-\frac{z}{2}}$$

$\therefore p_\zeta(z) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}$ $\qquad \therefore \zeta \sim E(\dfrac{1}{2})$

或者， $\zeta \sim \chi^2(2)$

$$\therefore p_\zeta(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

或者， $\zeta \sim \Gamma(1, \dfrac{1}{2})$

2.商的分布 $\zeta = \dfrac{\xi}{\eta}$

已知 (ξ,η) 的联合概率密度为 $p(x,y)$，

则 $F_\zeta(z) = P(\zeta \le z) = P(\dfrac{\xi}{\eta} \le z)$

$$= \iint\limits_{\frac{x}{y} \le z} p(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{\infty} p(x,y)dx + \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} p(x,y)dx$$

上式对 z 求导，得

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(yz, y) \cdot |y| dy .$$

★若 ξ 与 η 独立，则 $p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(yz) \cdot p_\eta(y) \cdot |y| dy$

例 6. 设 ξ 与 η 独立，都服从指数分布 $E(\lambda)$，试求

$\zeta=\dfrac{\xi}{\eta}$ 的分布

解：$p_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，$p_\eta(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

$$p_\zeta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot p_\xi(yz)p_\eta(y)dy=\int_0^{+\infty}y\cdot\lambda p_\xi(yz)\lambda e^{-\lambda y}dy$$

当 $z\le 0$ 时，由于 $p_\xi(yz)=0$，故 $p_\zeta(z)=0$

当 $z>0$ 时

$$p_\zeta(z)=\int_0^{+\infty}y\lambda^2e^{-\lambda yz}e^{-\lambda y}dy=\int_0^{+\infty}y\cdot\lambda^2e^{-\lambda(z+1)y}dy=\frac{1}{(z+1)^2}$$

归并后得到

$$p_\zeta(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(z+1)^2}, & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

4.最大值与最小值分布

设ξ与η独立，它们的分布函数为$F_\xi(x)$和$F_\eta(y)$.

(1)最大值$\zeta=\max(\xi,\eta)$的分布

$$\because \{\max(\xi,\eta)\le z\}=\{\xi\le z\}\bigcap\{\eta\le z\}$$

$$\therefore F_{\max}(z)=P\{\max(\xi,\eta)\le z\}=P(\xi\le z,\eta\le z)$$

$$=P(\xi\le z)P(\eta\le z)=F_\xi(z)F_\eta(z)$$

推论：设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立，它们的分布函数为

$F_{\xi_i}(x_i), i=1,2,\cdots,n$，则

$\max(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布函数为：

$$F_{\max}(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{\xi_i}(z)$$

特别：当$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立同分布时，设

$F_{\xi_i}(z)=F(z)$，则$F_{\max}(z)=[F(z)]^n$

(2)最小值$\zeta=\min(\xi,\eta)$的分布

$$F_{\min}(z)=P\{\min(\xi,\eta)\le z\}=1-P(\min(\xi,\eta)>z)$$
$$=1-P(\xi>z,\eta>z)=1-P(\xi>z)P(\eta>z)$$
$$=1-[1-P(\xi\le z)][1-P(\eta\le z)]$$
$$=1-[1-F_{\xi}(z)][1-F_{\eta}(z)]$$

推论：设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立，它们的分布函数为 $F_{\xi_i}(x_i), i=1,2,\cdots,n$，则

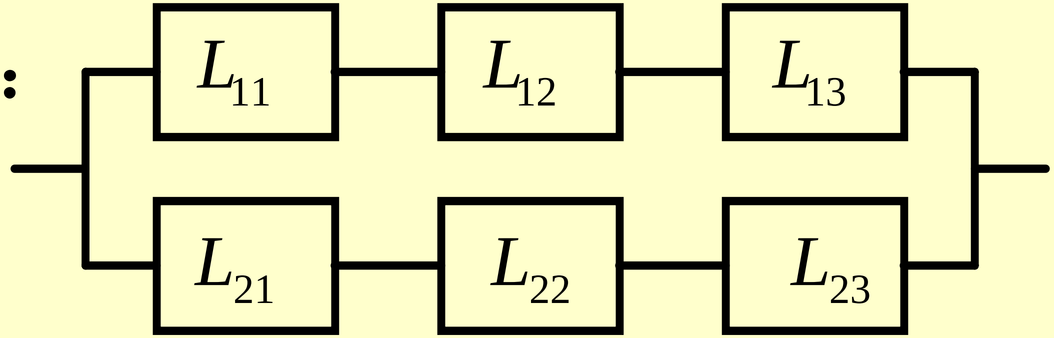
$\min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的分布函数为：

$$F_{\min}(z)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{\xi_i}(z)]$$

特别：当$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立同分布时，设

$F_{\xi_i}(z)=F(z)$，则$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n$

例 7. 系统如图所示：6 个元件相互独立，L_{ij} 的使用寿命 X_{ij} $(i=1,2;j=1,2,3)$ 均服从指数分布 $E(\lambda)$，求系统使用寿命 Z 的概率密度。



解：设 X 为由 L_{11}，L_{12}，L_{13} 串联而成的子系统的寿命，$X=\min(X_{11},X_{12},X_{13})$；设 Y 为由 L_{21}，L_{22}，L_{23} 串联而成的子系统的寿命，$Y=\min(X_{21},X_{22},X_{23})$，则整个系统的寿命 $Z=\max(X,Y)$。

$\because X_{ij}\,(i=1,2;j=1,2,3)$ 独立同分布于 $E(\lambda)$，

$$\therefore F_{X_{ij}}(z)=F(z)=\begin{cases}1-e^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases},\quad (i=1,2;j=1,2,3)$$

X 与 Y 也独立同分布，且它们的分布函数为：

$$F_X(z) = F_Y(z) = 1 - [1 - F(z)]^3 = G(z)$$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 系统的使用寿命 Z 的分布函数为：

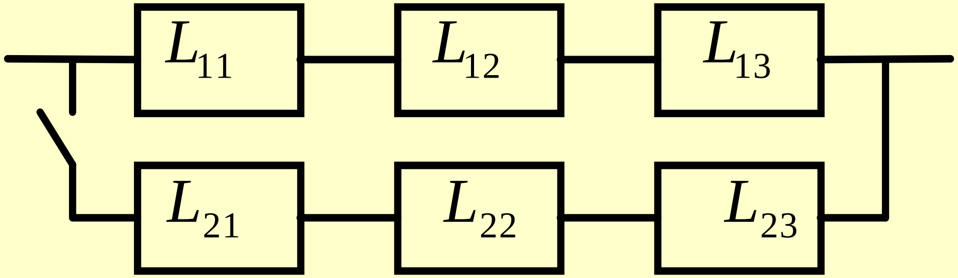
$$F_Z(z) = [G(z)]^2$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-3\lambda z})^2, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

Z 的密度函数为：

$$\varphi_Z(z) = \begin{cases} 6\lambda e^{-3\lambda z}(1 - e^{-3\lambda z}), & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

若系统如下图所示，则系统的寿命又如何？



这时，系统的寿命应为 $Z = X + Y$.

$$\varphi_X(x) = \varphi_Y(x) = \varphi(x) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

由卷积公式：当 $z > 0$ 时，密度函数为

$$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x)\varphi_Y(z-x)dx = \int_0^z 3\lambda e^{-3\lambda x} 3\lambda e^{-3\lambda(z-x)} dx$$

$$= 9\lambda^2 \int_0^z e^{-3\lambda z} dx = 9\lambda^2 z e^{-3\lambda z}$$

当 $z \le 0$ 时，密度函数 $\varphi_Z(z) = 0$

$$\therefore \varphi_Z(z) = \begin{cases} 9\lambda^2 z e^{-3\lambda z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$