

华东理工大学
概率论与数理统计

作业簿（第八册）

学 院 _____ 专 业 _____ 班 级 _____
学 号 _____ 姓 名 _____ 任课教师 _____

第十五次作业

一. 选择题:

1. 设随机变量 ξ 的概率分布律为

ξ	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

则 $\eta = \xi^2 - 1$ 的分布函数 $F(y)$ 为 (B)。

$$\begin{aligned} \text{A、 } F(y) &= \begin{cases} 0, & y < -1, \\ 0.1, & -1 \leq y < 0, \\ 0.6, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} & \text{B、 } F(y) &= \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 0.1, & 1 \leq y < 0, \\ 0.6, & 0 \leq y < 3, \\ 1, & y \geq 3 \end{cases} \\ \text{C、 } F(y) &= \begin{cases} 0, & y < -1, \\ 0.1, & -1 \leq y < 0, \\ 0.6, & 0 \leq y < 3, \\ 1, & y \geq 3 \end{cases} & \text{D、 } F(y) &= \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 0.1, & 1 \leq y < 0, \\ 0.6, & 0 \leq y < 4, \\ 1, & y \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

2. 设随机变量 ξ 密度函数为 $p(x)$ ，则 $\eta = 3\xi - 1$ 的密度函数 $p_\eta(y)$ 为 (A)。

$$\text{A、 } \frac{1}{3}p\left(\frac{y+1}{3}\right) \quad \text{B、 } 3p\left(\frac{y+1}{3}\right) \quad \text{C、 } \frac{1}{3}p(3(y+1)) \quad \text{D、 } 3p\left(\frac{y-1}{3}\right)$$

3. 设随机变量 ξ 密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases},$$

则 $\eta = \xi^2$ 的密度函数 $p_\eta(y)$ 为 (D)。

$$\begin{aligned} \text{A、 } p_{\eta}(y) &= \begin{cases} \frac{1}{2}y, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} & \text{B、 } p_{\eta}(y) &= \begin{cases} 2y, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \\ \text{C、 } p_{\eta}(y) &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{y}}, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} & \text{D、 } p_{\eta}(y) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

4. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 且 $\xi \sim P(\lambda)$, $\eta \sim P(\lambda)$, 则下列 (B) 不成立。

$$\begin{aligned} \text{A. } P\{\xi + \eta = 1\} &= 2\lambda e^{-2\lambda} & \text{B. } P\{\xi + \eta = 0\} &= e^{-\lambda} \\ \text{C. } E(\xi + \eta) &= 2\lambda & \text{D. } D(\xi + \eta) &= 2\lambda \end{aligned}$$

二. 填空题:

1. 已知随机变量 $\xi \sim U(-2, 4)$, 设 $\eta = \frac{\xi}{2} + 1$, 则 η 的概率密度为 $p_{\eta}(y) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}.$$

2. 已知随机变量 $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta = 2\xi - 5$, 则 η 的概率密度为 $p_{\eta}(y) =$

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+5)^2}{8}}.$$

3. 已知随机变量 $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta = e^{\xi}$, 则 η 的概率密度为 $p_{\eta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}.$

4. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 且 $\xi \sim B(2, 0.4)$, $\eta \sim B(3, 0.4)$, 则 $\xi + \eta$ 服从参数为 (5, 0.4) 的二项分布。

三. 计算题

1. 已知随机变量 $\xi \sim U[0, 2]$, 求 $\eta = \xi^2$ 的概率密度。

$$\text{解: } F_{\eta}(y) = P\{\xi^2 \leq y\} = \begin{cases} P\{-\sqrt{y} \leq \xi \leq \sqrt{y}\} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} F_{\xi}(\sqrt{y}) - F_{\xi}(-\sqrt{y}) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$\text{故 } p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(p_{\xi}(\sqrt{y}) - p_{\xi}(-\sqrt{y})) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

2. 设随机变量 X 的概率分布为:

X	1	2	3	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$...	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$...

求 $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的概率分布。

$$\text{解: 由于 } \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1 & x = 4k-1 \\ 0 & x = 2k \\ 1 & x = 4k-3 \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

故随机变量 Y 的可能取值为: -1, 0, 1。

$$\text{随机变量 } Y \text{ 的 } P\{Y = -1\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 4k-1\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k-1}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\frac{1}{2^4} - 1} = \frac{2}{15};$$

$$P\{Y = 0\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 2k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{1}{2^2} - 1} = \frac{1}{3};$$

$$P\{Y = 1\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = 4k-3\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k-3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2^4} - 1} = \frac{8}{15},$$

于是随机变量 Y 的分布律为:

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

3. 已知随机变量 $\xi \sim N(0,1)$, 求 $\eta = |\xi|$ 的概率密度。

解: 先求分布函数 $F_{\eta}(y)$ 。当 $y < 0$ 时, $F_{\eta}(y) = P\{\xi^2 \leq y\} = 0$; 当 $y \geq 0$ 时,

$$F_{\eta}(y) = P\{\xi^2 \leq y\} = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

$$\text{故 } p_{\eta}(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

4. 设 $\xi \sim U(0,1)$, 求 $\eta = \xi^{\ln \xi}$ 的分布。

解: 对应于 $\eta = \xi^{\ln \xi}$, $y = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2} = f(x)$, 由于

$$f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \text{。}$$

当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) < 0$, $x = f^{-1}(y) = e^{-\sqrt{\ln y}}$

$$\varphi_{\eta}(y) = \varphi_{\xi}(x) \big|_{x=f^{-1}(y)} |(f^{-1}(y))'| = \begin{cases} \frac{1}{2y\sqrt{\ln y}} e^{-\sqrt{\ln y}} & , y \in (1,+\infty) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中当 $y \in (-\infty,1]$ 时, $\varphi_{\eta}(y)=0$ 是由 $x \in (0,1)$ 时 $y \in (1,+\infty)$ 而导出的。

5. 已知随机变量 $\xi \sim U(-2,4)$, 求 $\eta = \xi^2$ 的分布函数。

解:

$$F_{\eta}(y) = P\{\xi^2 \leq y\} = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ P\{-\sqrt{y} \leq \xi \leq \sqrt{y}\}, & 0 \leq y < 4 \\ P\{-2 \leq \xi \leq \sqrt{y}\}, & 4 \leq y < 16 \\ 1 & y \geq 16 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \frac{1}{3}\sqrt{y}, & 0 \leq y < 4 \\ \frac{1}{6}(\sqrt{y}+2), & 4 \leq y < 16 \\ 1 & y \geq 16 \end{cases}$$

6. 已知随机变量 ξ 、 η 的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi = x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{\xi\eta = 0\} = 1$ 。

(1)求 ξ 、 η 的联合概率分布；(2)问 ξ 、 η 是否独立？

(3)求 $\zeta = \max(\xi, \eta)$ 的概率分布。

解： 由于 $P(\xi\eta=0)=1$,可以得到 $P(\xi=-1,\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=0$,从而

$$P(\xi=0,\eta=1)=P(\eta=1)=\frac{1}{2}, \quad P(\xi=-1,\eta=0)=P(\xi=-1)=\frac{1}{4},$$

$$P(\xi=1,\eta=0)=P(\xi=1)=\frac{1}{4}, \quad P(\xi=0,\eta=0)=P(\xi=0)-P(\xi=0,\eta=1)=0,$$

汇总到联合分布列,即

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2)由于 $P(\xi=i,\eta=j) \neq P(\xi=i) \cdot P(\eta=j)$,故 ξ, η 不独立.

(3)

$$P(\zeta=0)=P(\xi=-1,\eta=0)+P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{4},$$

$$P(\zeta=1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=0)+P(\xi=1,\eta=1)=\frac{3}{4}$$

第十六次作业

一. 选择题:

1. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 且 $\xi \sim N(-2,4)$ $\eta \sim N(2,8)$, 则 $\xi+2\eta$ 的密度函数 $p(z)$ 为 (C)。

A、 $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{72}}$ B、 $\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{z^2}{24}}$ C、 $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{72}}$ D、 $\frac{1}{2\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{(z-4)^2}{24}}$

2. 设随机变量 (ξ, η) 的联合密度函数为 $p(x, y)$, 则 $\xi+\eta$ 的分布函数 $F(z) =$ (D)。

A、 $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^y p(z-x, y) dx$ B、 $F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(z-x, y) dy$

$$C、F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x p(z-x, y) dy \quad D、F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy$$

3. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 其密度函数分别为 $p_1(x)$ 与 $p_2(y)$, 则 $\frac{\eta}{\xi}$ 的密度函数 $p(z)$ 为 (A)。

$$A、p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| p_1(x) p_2(zx) dx \quad B、p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) p_2(z-x) dx$$

$$C、p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| p_1(zx) p_2(x) dx \quad D、p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z-x) p_2(x) dx$$

4. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 其分布函数分别为 $F_\xi(x)$ 与 $F_\eta(y)$, 则

$\zeta = \max(\xi, \eta)$ 的分布函数 $F_\zeta(z)$ 等于 (B)

$$A. \max\{F_\xi(z), F_\eta(z)\}$$

$$B. F_\xi(z)F_\eta(z)$$

$$C. \frac{1}{2}[F_\xi(z) + F_\eta(z)]$$

$$D. F_\xi(z) + F_\eta(z) - F_\xi(z)F_\eta(z)$$

二. 填空题:

1. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 且 $\xi \sim N(-2, 4)$ $\eta \sim N(-2, 12)$, 则 $\xi - \eta$ 的密度函数

$$p(z) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{32}}$$

2. 设随机变量 ξ 和 η 独立同分布, 均服从 (0,1) 上的均匀分布, 则 $\max(\xi, \eta)$ 的密度函数

$$p(z) = \begin{cases} 2z, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

3. 设随机变量 ξ 和 η 相互独立, 且 $\xi \sim E(1)$, $\eta \sim E(2)$, 则

$$P\{\min(\xi, \eta) \leq 1\} = 1 - e^{-3}$$

三. 计算题

1. 设随机变量 ξ 、 η 相互独立, 其密度函数分别为

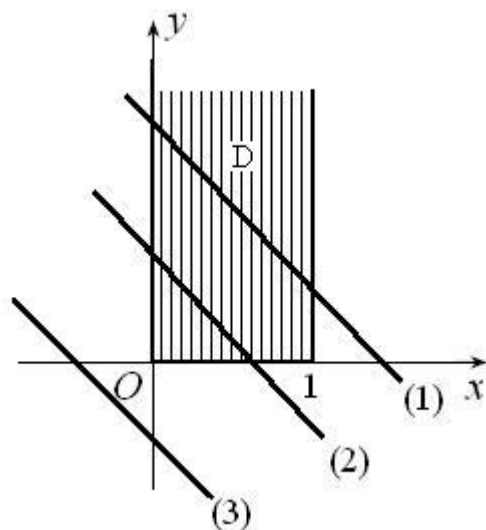
$$p_\xi(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, \quad p_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

求 $\xi + \eta$ 的概率密度函数。

解: 由 ξ, η 相互独立得联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 \leq x \leq 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

密度函数中非零部分对应的 (x, y) 落在区域 D 中, 利用卷积公式,



$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } p_{\zeta}(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = (e-1)e^{-z},$$

$$\text{当 } 0 < z < 1 \text{ 时, } p_{\zeta}(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z},$$

$$\text{当 } z \leq 0 \text{ 时, } p_{\zeta}(z) = 0,$$

$$\text{故 } p_{\zeta}(z) = \begin{cases} (e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

2. 设随机变量 (ξ, η) 的联合概率密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 $\xi + \eta$ 的概率密度函数。

解: 利用卷积公式, 当 $z \leq 0$ 或 $z \geq 2$ 时, $p_{\zeta}(z) = 0$,

$$\text{当 } 0 < z < 1 \text{ 时, } p_{\zeta}(z) = \int_0^z (2-z) dx = 2z - z^2,$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } p_{\zeta}(z) = \int_{z-1}^1 (2-z) dx = (2-z)^2,$$

$$\text{故 } p_{\zeta}(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z < 1, \\ (2 - z)^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

3. 设 ξ, η 是两个相互独立的随机变量，且均服从均匀分布 $U(0,1)$ 的随机变量，求 $\xi - \eta$ 的概率密度函数。

解：由 ξ, η 相互独立得联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

先求分布函数 当 $z \leq -1$ 时, $F_{\zeta}(z) = 0$,

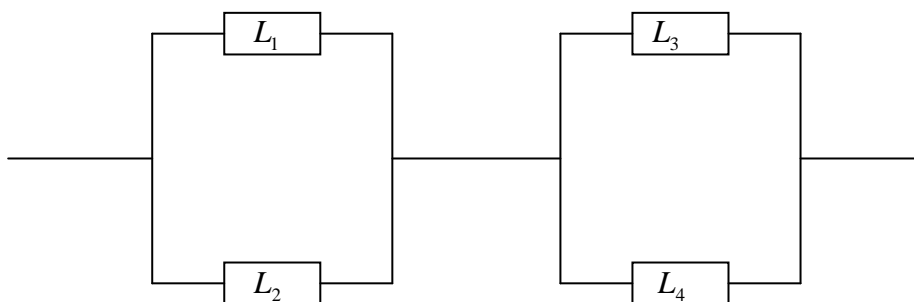
$$\text{当 } -1 < z < 0 \text{ 时, } F_{\zeta}(z) = \int_0^{z+1} dx \int_{x-z}^1 1 dy = \frac{1}{2}(z+1)^2,$$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_{\zeta}(z) = 1 - \int_z^1 dx \int_0^{1-z} 1 dy = 1 - \frac{1}{2}(1-z)^2,$$

当 $z \geq 1$ 时, $F_{\zeta}(z) = 1$,

$$\text{故 } \xi - \eta \text{ 的概率密度函数为 } p_{\zeta}(z) = \begin{cases} z+1, & -1 < z < 0, \\ z-1, & 0 \leq z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

4. 电子仪器由 4 个相互独立的部件 $L_i (i=1,2,3,4)$ 组成，连接方式如图所示。设各个部件的使用寿命 ξ_i 服从指数分布 $E(1)$ ，求仪器使用寿命 ζ 的概率密度。



解： 设各并联组的使用寿命为 $\eta_j (j=1,2)$ ，则

$$\zeta = \min\{\eta_1, \eta_2\}, \quad \eta_1 = \max\{\xi_1, \xi_2\}, \quad \eta_2 = \max\{\xi_3, \xi_4\}$$

由 ξ_i 独立同分布知 η_1, η_2 也独立同分布。现

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

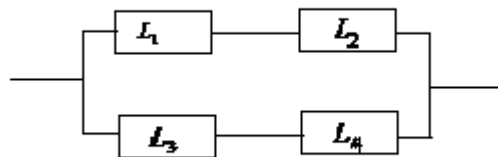
所以 $F_{\eta}(y) = F_{\xi}^2(y) = \begin{cases} (1 - e^{-y})^2 & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$

从而

$$F_{\zeta}(z) = 1 - [1 - F_{\eta}(z)]^2 = \begin{cases} 1 - [1 - (1 - e^{-z})^2]^2 & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-2z} (2 - e^{-z})^2 & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore p_{\zeta}(z) = \begin{cases} 4e^{-2z} (1 - e^{-z})(2 - e^{-z}) & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}.$$

5. 将上题中的电子部件 $L_i (i=1,2,3,4)$ 组成, 按下列方式联接, 求仪器使用寿命 ζ 的概率密度。



解: 设各串联组的使用寿命为 $\eta_j (j=1,2)$, 则

$$\zeta = \max\{\eta_1, \eta_2\}, \quad \eta_1 = \min\{\xi_1, \xi_2\}, \quad \eta_2 = \min\{\xi_3, \xi_4\}$$

由 ξ_i 独立同分布知 η_1, η_2 也独立同分布。现

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

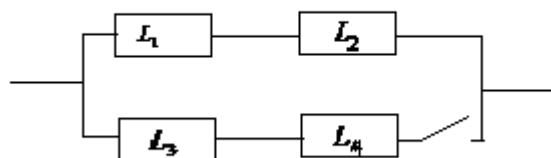
所以 $F_{\eta_i}(y) = 1 - (1 - F_{\xi}(y))^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$

从而

$$F_{\zeta}(z) = [F_{\eta}(z)]^2 = \begin{cases} (1 - e^{-2z})^2 & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore p_{\zeta}(z) = \begin{cases} 4e^{-2z} (1 - e^{-2z}) & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}.$$

6. 将上题中的串联部分加上一个开关, 先用上面部分, 如果坏了, 合上开关再用下面部分, 求仪器使用寿命 ζ 的概率密度。



解: 设各串联组的使用寿命为 $\eta_j (j=1,2)$, 则

$$\zeta = \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 = \min\{\xi_1, \xi_2\}, \quad \eta_2 = \min\{\xi_3, \xi_4\}$$

由 ξ_i 独立同分布知 η_1, η_2 也独立同分布。现

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

所以
$$F_{\eta_i}(y) = 1 - (1 - F_{\xi}(y))^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

从而 η_i 的概率密度为

$$\therefore p_{\eta_i}(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

由 (η_1, η_2) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 4e^{-2(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$\zeta = \eta_1 + \eta_2$ 利用卷积公式,

当 $z \leq 0$ 时, $p_{\zeta}(z) = 0$,

当 $z > 0$ 时, $p_{\zeta}(z) = \int_0^z 4e^{-2z} dx = 4ze^{-2z}$ 。