连续型随机变量的概率密度

非负性

规范性

$F(x) \ldots f(x)$

$P\{a<X<b\}$

2.5　数学期望

1.离散随机变量的数学期望

定义：设离散型随机变量 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 的和为随机变量 X 的数学期望,记为 $E(X)$ 或 EX 。

即 $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 。

例 **1.**甲、乙两人进行打靶，所得分数分别记为 X_1、X_2 它们的分布律分别为

X_1	**0**	**1**	2
p_k	**0**	**0.2**	0.8

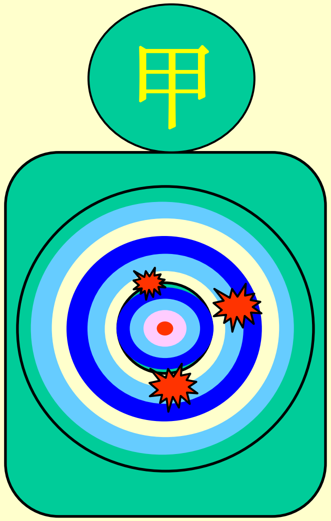
X_2	**0**	**1**	**2**
p_k	**0.6**	**0.3**	**0.1**

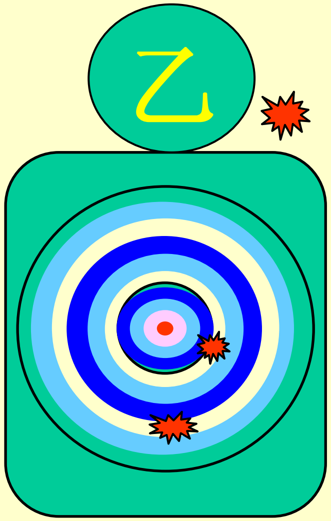
试评定他们的成绩的好坏。

解：$EX_1 = 0\times 0 + 1\times 0.2 + 2\times 0.8 = 1.8$

$EX_2 = 0\times 0.6 + 1\times 0.3 + 2\times 0.1 = 0.5$

即乙的成绩远不如甲的成绩。





注意：随机变量的数学期望与实际进行的试验中所得随机变量的观测值的算术平均值（称为样本平均值）有密切的关系。

设进行 n 次独立试验，得到随机变量 X 的统计分布如下：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_l	总计
频数	m_1	m_2	$\cdots$	m_l	n
频率	$\omega(x_1)$	$\omega(x_2)$	$\cdots$	$\omega(x_l)$	**1**

计算随机变量 X 的样本平均值：

$$\bar{x}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots+x_lm_l}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}x_im_i$$

或者，$\bar{x}=x_1\frac{m_1}{n}+x_2\frac{m_2}{n}+\cdots+x_i\frac{m_l}{n}$

$$=x_1\omega(x_1)+x_2\omega(x_2)+\cdots+x_l\omega(x_l)=\sum_{i=1}^{l}x_i\omega(x_i)$$

与期望 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$ 比较

上式中，只是用频率 $\omega(x_i)$ 代替了概率 p_i

已知，当试验次数很大时，事件 $X=x_i$ 的频率 $\omega(x_i)$ 在对应的概率 p_i 附近摆动，所以，当试验次数很大时，随机变量 X 的样本平均值 $\bar{x}$ 将在随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 附近摆动。

例 2.按规定，某车站每天 **8:00~9:00,9:00~10:00** 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间相互独立。其规律为

到站时间	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	1/6	3/6	2/6

(1)一旅客 **8:00** 到车站，求他候车时间的数学期望.

(2)一旅客 **8:20** 到车站，求他候车时间的数学期望.

解：设旅客的候车时间为 X 分钟，

(1) X 的分布律为

X	10	30	50
p_k	1/6	3/6	2/6

候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times\frac{1}{6}+30\times\frac{3}{6}+50\times\frac{2}{6}=33.33$$（分钟）

(2) X 的分布律为

X	10	30	50	70	90
p_k	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}$

$$E(X)=10\times\frac{3}{6}+30\times\frac{2}{6}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{3}{36}+90\times\frac{2}{36}$$

$$=27.22$$（分钟）

2.连续随机变量的数学期望

定义：设连续型随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$ 绝对收敛（即 $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)dx$ 存在），则称积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$ 的值为随机变量 X 的数学期望。记为 $E(X)$ 或 EX。即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx。$$

数学期望简称为期望，又称为均值。

几何意义：

期望是分布密度曲线与 X 轴之间的平面图形的重心的横坐标。

例 3. 已知随机变量 X 的概率密度函数为:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

求期望 **EX.**

解 $EX=\int_a^b x\cdot\dfrac{1}{b-a}dx=\dfrac{1}{2(b-a)}x^2\Big|_a^b$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

称 X 服从均匀分布，记作 $\boldsymbol{X \sim U(a,b)}$,

$$\boldsymbol{EX=\frac{a+b}{2}}.$$

例 4. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\cdot x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

求期望 **EX**

解

$$EX=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{+\infty}x^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

令 $x=2t$， $dx=2dt$，得

$$EX = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} t^{\frac{k}{2}} e^{-t} dt = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{k}{2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = k$$

注意：并不是所有的随机变量都有数学期望。

例 **6.**设随机变量 X 服从柯西分布，其密度函数为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<+\infty$$

求数学期望 EX 。

解： $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$$

$$\because \int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} \text{ 发散}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx \text{ 发散，即 } \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx \text{ 不绝对收敛。}$$

$\therefore EX$ 不存在。

数学期望的性质

1)随机变量函数的期望

随机变量 Y 是随机变量 X 的函数， $Y = f(X)$

1)随 机 变 量 X 是 离 散 的，

分布律为 $P(X = x_k) = p_k$， $k = 1,2,\cdots,n$

则 $EY = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) p_k$

2)随机变量 X 是连续的，密度函数为 $\varphi(x)$，

定 义： 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\varphi(x)dx$ 收 敛， 则

$$EY = Ef(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

是随机变量 Y 的数学期望。

例 **7.**甲、乙两人进行打靶，所得分数分别记为 X_1、X_2 它们的分布律分别为

X_1	**0**	**1**	**2**
p_k	**0**	**0.2**	**0.8**

X_2	**0**	**1**	**2**
p_k	**0.6**	**0.3**	**0.1**

求 $Y_i = 2X_i - 1$, 和 $Z_i = X_i^2 \ (i = 1,2)$ 的数学期望。

解： $E(Y_1) = (-1) \times 0 + 1 \times 0.2 + 3 \times 0.8 = 2.6$

$$E(Y_2) = (-1) \times 0.6 + 1 \times 0.3 + 3 \times 0.1 = 0$$

$$E(Z_1) = 0 \times 0 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.8 = 3.4$$

$$E(Z_2) = 0 \times 0.6 + 1 \times 0.3 + 4 \times 0.1 = 0.7$$

2) 数学期望的性质

性质 1. $E(aX+b)=aEX+b$

性质 2. $E(f(X)+g(X))=Ef(X)+Eg(X)$

性质 3. 设 $f(x)\le g(x)$， 连续或分段连续，则

$$Ef(X)\le Eg(X)$$

例 **8.** 据统计在一年内健康人的死亡率为 2‰，保险公司开展生命保险业务，参加者每年支付 1200 元保险费，若一年死亡，保险公司赔偿 A 元（$A>1200$），问 A 应为多少，才能使保险公司获益？

解：设保险公司从每个投保者处获得的净收益为随机变量 ξ，则 ξ 的分布列为

ξ	$1200-A$	1200
p	0.002	0.998

期望值 $E\xi=(1200-A)\times 0.002+1200\times 0.998=1200-0.002A$，

为使 $E\xi>0$，必须 $A<600000$，又考虑到 $A>1200$，故当 $1200<A<600000$ 时公司有望获益。

例 **9.**设随机变量ξ与η具有相同的密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2 & , \quad 0<x<2\\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}$$

（**1**）设事件$A=\{\omega \mid \xi(\omega)>a\}$与事件$B=\{\omega \mid \eta(\omega)>a\}$

独立，且$P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，求常数a**；**

（**2**）求$E\dfrac{1}{\xi^2}$。

解：（1）首先 $P(A)=P\{\xi>a\}=\int_a^{+\infty}p(x)dx=P\{\eta>a\}=P(B)$，

得：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-[P(A)]^2=\dfrac{3}{4}$

解出位于**[0, 1]**的解 $P(A)=\dfrac{1}{2}$。于是有

$$\frac{1}{2}=P(A)=\int_a^{+\infty}p(x)dx=\int_a^2\frac{3}{8}x^2dx=\frac{1}{8}x^3\Big|_a^2=\frac{1}{8}(8-a^3)$$

解出 $a=\sqrt[3]{4}$。

（2） $E(\dfrac{1}{\xi^2})=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}p(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2dx=\frac{3}{8}x\Big|_0^2=\frac{3}{4}$。

数学期望的定义

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \text{。}\qquad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx \text{。}$$

数学期望的性质

性质 1. $E(aX+b)=aEX+b$

性质 2. $E(f(X)+g(X))=Ef(X)+Eg(X)$

性质 3. 设 $f(x)\le g(x)$， 连续或分段连续，则

$$Ef(X)\le Eg(X)$$

$$EY=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)p_k \qquad EY=Ef(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$$