

华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第六册）

学 院 _____ 专 业 _____ 班 级 _____
学 号 _____ 姓 名 _____ 任课教师 _____

第十一次作业

一. 填空题:

1. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} ae^{-(x+y)}, & 0 < x, y < +\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 $a =$
1, $P(X \leq 2, Y \leq 1) = \underline{1 - e^{-1} - e^{-2} + e^{-3}}$.

2. 若二维随机变量 (X, Y) 的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

则 随 机 变 量 (X, Y) 的 联 合 分 布 函 数 为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ or } y < 0 \\ 1/6, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 5/12, & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ 1/2, & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

3. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, 且满足 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$,

则 $P(X_1 = X_2) = \underline{0}$.

二. 选择题

(1) 设 (X, Y) 服从二维均匀分布, 联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & 0 < x < 1, |y| < x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \text{则常数 } A = (\quad A \quad). \quad \text{B}$$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4.

(2) 设 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 则 $P\{X \geq a, Y > b\} = (\quad C \quad)$

A. $F(a, b)$ B. $1 - F(a, b)$

C. $1 + F(a - 0, b) - F(+\infty, b) - F(a - 0, +\infty)$

D. $1 + F(a, b) - F(+\infty, b) - F(a, +\infty)$

(3) 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度为 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数, 则可以作为某个连续随机变量的概率密度函数的是 ($\quad D \quad$)

A. $f_1(x)f_2(x)$

B. $2f_1(x)f_2(x)$

C. $f_1(x)F_2(x)$

D. $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

三. 计算题

1. 设二维随机向量 (ξ, η) 仅取 $(1, 1), (2, 3), (4, 5)$ 三个点, 且取它们的概率相同, 求 (ξ, η) 的联合分布列。

解:

$\xi \backslash \eta$	1	3	5
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	0
4	0	0	$\frac{1}{3}$

2. 某箱装有 100 件产品, 其中一、二、三等品分别为 80, 10, 10 件, 现在从中

随机抽取一件，记 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{抽到} i \text{等品} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, (i=1,2,3)$

试求随机变量 X_1 和 X_2 的联合概率分布。

解：令 $A_i = \text{"抽到} i \text{等品"}$ ， $i=1,2,3$ ，则 A_1, A_2, A_3 两两不相容。

$$P(A_1) = 0.8, \quad P(A_2) = P(A_3) = 0.1$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(A_3) = 0.1$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(A_2) = 0.1$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(A_1) = 0.8$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(\phi) = 0$$

3. 将一硬币抛掷 3 次， X 表示 3 次中出现正面的次数， Y 表示 3 次中出现正面次数与反面次数之差的绝对值，求 X 和 Y 的联合分布率。

解：当连抛三次出现三次反面时， (X, Y) 的取值为 $(0, 3)$ ；

出现一次正面两次反面时， (X, Y) 的取值为 $(1, 1)$ ；

出现两次正面一次反面时， (X, Y) 的取值为 $(2, 1)$ ；

出现三次正面时， (X, Y) 的取值为 $(3, 3)$ 。

$$\text{并且 } P\{X = 0, Y = 3\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}; \quad P\{X = 1, Y = 1\} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8};$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}; \quad P\{X = 3, Y = 3\} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

所以， (X, Y) 的联合概率分布为：

$\begin{matrix} \text{Y} \\ \text{X} \end{matrix}$	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0

3	0	$\frac{1}{8}$
---	---	---------------

4. 设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} A(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 A ; (2) 求 $P\{X < 1, Y < 3\}, P\{X + Y < 4\}$

解: (1) 根据规范性有 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1 \therefore A = \frac{1}{8}$

$$(2) P\{X < 1, Y < 3\} = \frac{1}{8} \int_0^1 \int_2^3 (6-x-y) dx dy = \frac{3}{8}$$

$$P(X + Y \leq 4) = \frac{1}{8} \int_0^2 \int_2^{4-x} (6-x-y) dy dx = \frac{2}{3}$$

5. 若随机变量 X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且满足 $P(X^2 = Y^2) = 1$ 。求二维随机变量 (X, Y) 的联合概率分布。

解: 由于 $P(X^2 = Y^2) = 1$, 故 $P(X^2 \neq Y^2) = 0$ 。故有

$$P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0, Y = -1) = 0,$$

易得 (X, Y) 的联合概率分布如下:

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$

第十二次作业

一. 填空题:

1. 如果随机向量 (ξ, η) 的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	0.1	b
1	a	0.4

并且 $P(\xi=1|\eta=1)=\frac{2}{3}$, 则 $a=\underline{0.3}$, $b=\underline{0.2}$.

2. (ξ, η) 的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
-1	$\frac{1}{15}$	t	$\frac{1}{5}$
1	s	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若 ξ, η 相互独立, 则 $(s, t) = (0.1, \frac{2}{15})$ 。

3. 设 (X, Y) 在以原点为中心, r 为半径的圆域 R 上服从均匀分布, 求 X 的边缘概

率密度为
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2}, & |x| \leq r \\ 0, & |x| > r \end{cases}.$$

二. 选择题

(1) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, 4^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu, 5^2)$,

记 $p_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$, $p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则 (A)

(A) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 = p_2$

(B) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 < p_2$

(C) 仅对 μ 的个别值, 有 $p_1 = p_2$

(D) 对任何实数 μ , 都有 $p_1 > p_2$

(2) 设随机变量 X 的可能取值为 x_1, x_2 , Y 的可能取值为 y_1, y_2, y_3 , 若

$P(X = x_1, Y = y_1) = P(X = x_1)P(Y = y_1)$, 则随机变量 X 和 Y (C)

A. 一定独立 B. 一定不独立 C. 不一定独立 D. 以上答案都不对

(3). 设随机变量 X, Y 相互独立, 服从相同的两点分布 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, 则 (A)

A. $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$ B. $P\{X=Y\}=\frac{1}{3}$ C. $P\{X=Y\}=0$ D. $P\{X=Y\}=\frac{1}{4}$

三. 计算题

1. 设随机变量 ξ, η 的联合分布列为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	0

(1) 求边缘分布列;

(2) 在 $\eta=1$ 的条件下, ξ 的条件分布列;

(3) 问 ξ 和 η 是否独立?

解: (1)

ξ	0	1	2
P	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

η	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$(2) \quad P(\xi=0|\eta=1) = \frac{P(\xi=0, \eta=1)}{P(\eta=1)} = \frac{4}{7}$$

$$P(\xi=1|\eta=1)=\frac{P(\xi=1,\eta=1)}{P(\eta=1)}=\frac{3}{7}$$

$$P(\xi=2|\eta=1)=\frac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\eta=1)}=0$$

$$(3) \because P(\xi=0,\eta=0) \neq P(\xi=0)P(\eta=0)$$

$\therefore \xi$ 和 η 不独立

2. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy & (x,y) \in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $G=\{(x,y)|0 \leq x \leq 2, 0 < y \leq x\}$,

- (1) 求系数 A ;
- (2) X 和 Y 的边缘密度函数;
- (3) $f_{X|Y}(x|y)$;
- (4) X 和 Y 是否独立, 为什么?

解: (1) 根据规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1 \quad \therefore A = \frac{1}{2}$

$$(2) f_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} xy dy = \frac{x^3}{4}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_y^2 \frac{1}{2} xy dx = y - \frac{y^3}{4}, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{4-y^2} & (x,y) \in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(4) $\because G$ 不是矩形区间, $\therefore X$ 和 Y 不独立

3. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度为: $\phi(x,y) = \begin{cases} C & |x| < 1, |y| < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

试求: ①常数 C ; ② $P\{X+Y > \frac{1}{2}\}$ 及 $P\{X^2+Y^2 \leq 1\}$; ③ X 和 Y 的边缘密度函数

解：① $\because \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) dx dy = 1, \therefore 4C = 1$, 得常数 $C = \frac{1}{4}$;

$$\textcircled{2} P\{X + Y > \frac{1}{2}\} = \iint_{x+y > \frac{1}{2}} \phi(x, y) dx dy = \frac{9}{32};$$

$$P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \phi(x, y) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{4} dx dy = \frac{\pi}{4};$$

$$\textcircled{3} X \text{ 和 } Y \text{ 的边缘密度函数分别为: } \varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |y| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$