两维期望、方差、协方差的定义

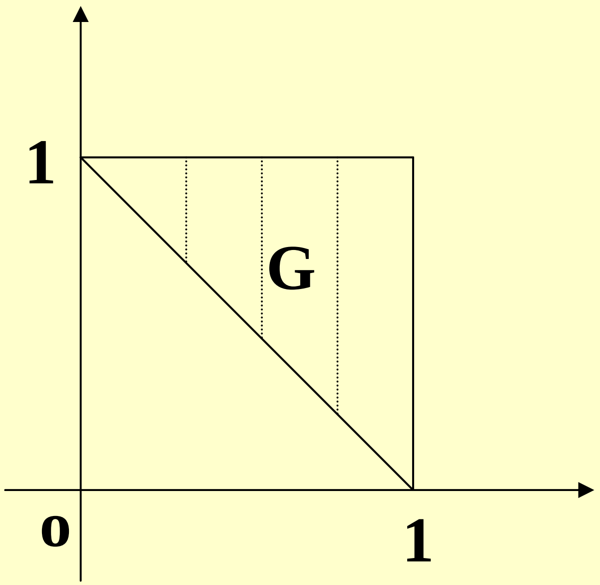
两维期望、方差、协方差的性质

EX1 设(ξ,η)服从三角形区域G上的均匀分布，其中G是以（0，1），（1，0），（1，1）为顶点的xoy平面上的三角形区域（见图），

试求随机变量$\zeta=\xi+\eta$ 的方差。

解一： (ξ,η)的密度函数为

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}2\ , & (x,y)\in G\\ 0\ , & (x,y)\notin G\end{cases},$$



所以

$$E\zeta=E(\xi+\eta)$$

$$=\iint_G (x+y)p_{\xi\eta}(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2(x+y)dy \ =2\int_0^1(x^2-\frac{x^2}{2}+x)dx=\frac{4}{3}$$

$$E\zeta^2 = E(\xi+\eta)^2 = \iint_G (x+y)^2 p_{\xi\eta}(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 2(x+y)^2 dy = \frac{11}{6},$$

从而 $D\zeta = \dfrac{1}{18}$

解二：计算(ξ,η)的边缘分布

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x,y)dy = \begin{cases} \int_{1-x}^1 2dy & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases} = \begin{cases} 2x & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases},$$

由此可得 $E\xi = \int_0^1 x p_\xi(x)dx = \int_0^1 2x^2 dx = \dfrac{2}{3}$ ，

$$E\xi^2 = \int_0^1 x^2 p_\xi(x)dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2} \ ,$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \ 。$$

类似有 $E\eta = \dfrac{2}{3}, D\eta = \dfrac{1}{18}$ ，

由于

$$E\xi\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyp_{\xi\eta}(x, y)dxdy = \iint_G xy \cdot 2dxdy$$

$$= 2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^1 ydy = \frac{5}{12} ,$$

从而

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi \times E\eta = \frac{5}{12} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{36} ,$$

这样 $D\zeta = D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \frac{1}{18}$

EX2 （匹配问题）某人任意地将写好的n张信纸随意地装入n个信封中，记ξ为信纸与信封配对的个数，设法求$E\xi$与$D\xi$。

解：设$\xi=\xi_1+\cdots+\xi_n$，其中当第i张信纸与信封匹配时$\xi_i=1$，当第i张信纸与信封不匹配时$\xi_i=0$.

由于$P(\xi_i=1)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$，

$$P(\xi_i=0)=1-\frac{1}{n},$$

故$E\xi=E\xi_1+\cdots+E\xi_n=n\times(1\times\dfrac{1}{n}+0\times\dfrac{n-1}{n})=1$

由于 $P(\xi_i\xi_j=1)=P(\xi_i=1,\xi_j=1)=\dfrac{(n-2)!}{n!}=\dfrac{1}{n(n-1)}$，

$$P(\xi_i\xi_j=0)=1-P(\xi_i\xi_j=1)=1-\frac{1}{n(n-1)}\quad,$$

故 $$E(\xi_i\xi_j)=0\times P(\xi_i\xi_j=0)+1\times P(\xi_i\xi_j=1)=\frac{1}{n(n-1)}.$$

由此可得

$$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)^2-1^2$$

$$=E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}+2\sum_{1\le i<j\le n}\xi_i\xi_j)-1=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^{\,2}+2\sum_{1\le i<j\le n}E(\xi_i\xi_j)-1$$

$$=\frac{1}{n}\times n+\frac{2}{n(n-1)}\times\binom{n}{2}-1=1$$

3、矩与相关系数

设 k 为正整数，ξ 为随机变量，如果下面的数学期望存在，则

1) 称 $\mu_k = E(\xi^k)$ 为 ξ 的 k 阶原点矩；

2) 称 $v_k = E(\xi - E\xi)^k$ 为 ξ 的 k 阶中心矩.

例如：一阶原点矩就是数学期望，
二阶中心矩就是方差.

例 **1**　试求正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的各阶中心矩与原点矩。

解：设k为正整数，$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，则k阶中心矩为

$$v_k = E(\xi - E\xi)^k = E(\xi-\mu)^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

引进标准化变换$\dfrac{x-\mu}{\sigma} = y$

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^k y^k e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \begin{cases} 0, & k\text{为奇数} \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\sigma^k y^k e^{-\frac{y^2}{2}}dy, & k\text{为偶数} \end{cases}$$

利用 $\chi^2(k+1)$ 的密度规范性：

$$v_k=\frac{2^{\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{2\pi}}\sigma^k=\frac{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi}}\sigma^k$$

注意到 $$\boldsymbol{\Gamma(\frac{k+1}{2})=(\frac{k-1}{2})(\frac{k-3}{2})\cdots(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}$$

故 $$v_k=\frac{(k-1)!!}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\sigma^k=(k-1)!!\sigma^k.$$

综上所述

$$v_k=\begin{cases}0, & k\text{为奇数}\\(k-1)!!\sigma^k & k\text{为偶数}\end{cases}$$

注意到$k=1$时$\mu_1 = E\xi = \mu$。

当$k.>1$时，原点矩为

$$\mu_k = E\xi^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} E(\xi - E\xi)^i \cdot (E\xi)^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} v_i \mu^{k-i}$$

相关系数

定义：称$\dfrac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$为随机变量$\xi$与$\eta$的相关系数，记为$\rho_{\xi\eta}$

即 $$\rho_{\xi\eta}=\frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$$

$\rho_{\xi\eta}$是无量纲的量。

结论：$\rho_{\xi\eta}=Cov(\xi^*,\eta^*)$，其中$\xi^*=\dfrac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}$，$\eta^*=\dfrac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}$

证：$$Cov(\xi^*,\eta^*)=E\xi^*\eta^*-E\xi^*E\eta^*=E(\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}})(\frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}})$$

$$=\frac{E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\rho_{\xi\eta}$$

相关系数的性质

性质 1. 任意两个随机变量的相关系数的绝对值不超过1，即 $|\rho_{\xi\eta}|\le 1$.

证明：设 $\zeta=\xi^*+\eta^*$

$$\because D\zeta = D(\xi^*\pm\eta^*) = D\xi^* + D\eta^* \pm 2\operatorname{cov}(\xi^*,\eta^*)$$

$$= 2\pm 2\rho_{\xi^*\eta^*} = 2(1\pm\rho_{\xi\eta})\ge 0.$$

$$1\pm\rho_{\xi\eta}\ge 0$$

$$-1\le\rho_{\xi\eta}\le 1 \qquad |\rho_{\xi\eta}|\le 1$$

性质 2. $\rho_{\xi\eta}=\pm 1$的充要条件为：ξ与η间“几乎处处”有线性关系，即存在常数 $a(\neq 0)$ 与 b，使

$$P\{\eta=a\xi+b\}=1，\text{ 且 }\rho_{\xi\eta}=\begin{cases}1, & a>0\\ -1, & a<0\end{cases}.$$

证明：(1)必要性：设$\rho_{\xi\eta}=\pm 1$，令$\zeta=\xi^*\mp\eta^*$，由于

$$D\zeta=D(\xi^*\mp\eta^*)=2(1\mp\rho_{\xi\eta}),$$

当$\rho_{\xi\eta}=\pm 1$时$D\zeta=0$。故$P(\zeta=E\zeta)=1$，即

$$P(\xi^*\mp\eta^*=0)=P\left(\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}=\pm\frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)=1。$$

令$a=\pm\dfrac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}$，$b=E\eta\pm\dfrac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}E\xi$后，就有

$$P(\eta=a\xi+b)=1。$$

(2)充分性：设存在常数 a , b , 使 $P\{\eta = a\xi + b\} = 1$，

由于“零概集” $\{\eta \neq a\xi + b\}$ 不影响期望计算，故

$E\eta = E\{a\xi + b\} = aE\xi + b$ ， $D\eta = D(a\xi + b) = a^2 D\xi$

注意到

$$\mathbf{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$$

$$= E(\xi - E\xi)(a\xi - aE\xi) = aE(\xi - E\xi)^2 = aD\xi \text{ ,}$$

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{aD\xi}{\sqrt{D\xi}\sqrt{a^2 D\eta}} = \frac{a}{|a|} \text{。}$$

因此当 $a > 0$ 时 $\rho_{\xi\eta} = 1$， $a < 0$ 时 $\rho_{\xi\eta} = -1$.

注意：随机变量的相关系数实质上只是表示随机变量之间的线性相关性。随机变量之间的线性相关性就是：当一个变量增大时另一变量有按线性关系增大（当$b>0$）或减小（当$b<0$）的趋势。当相关系数愈接近 **1** 或**-1** 时，这种趋势就愈明显。

不相关

定义：若随机变量ξ与η的相关系数为 0, 称ξ与η不相关.

与不相关等价的命题

定理：对随机变量ξ与η下列命题是等价的。

（1）ξ与η不相关

（2）$Cov(\xi,\eta)=0$

(3)$E\xi\eta = E\xi\, E\eta$

(4)$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$

定理：若随机变量 ξ 与 η 独立，则 ξ 与 η 不相关。

证： 若（ξ,η）是连续型随机变量，

$\because \xi$ 与 η 独立， $p(x,y)=p_{\xi}(x)p_{\eta}(y)$

$$\text{则} Cov(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)(y-E\eta)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)p_{\xi}(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E\eta)p_{\eta}(y)dy$$

$$=E(\xi-E\xi)E(\eta-E\eta)=0,$$

即 $\rho_{\xi\eta}=0$， ξ 与 η 不相关。

注意： ξ 与 η 独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ ξ 与 η 不相关，

例 2.设(ξ,η)在以原点为中心，r为半径的圆域R上服从均匀分布，二维概率密度为：

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & x^2+y^2>r^2\end{cases}$$

考察ξ与η之间的独立性。

解: $$E\xi=\iint_R xp(x,y)dxdy=\int_{-r}^{r}dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{x}{\pi r^2}dx=0$$

$$E\eta=\iint_R yp(x,y)dxdy=\int_{-r}^{r}dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{y}{\pi r^2}dy=0$$

$$Cov(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)(y-E\eta)p(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}xy\cdot\frac{1}{\pi r^2}dxdy=\int_{-r}^{r}ydy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{x}{\pi r^2}dx=0$$

ξ,η 的边缘分布密度分别为：

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases}$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\le r\\ 0, & |y|>r\end{cases}$$

$$p(x,y)\ne p_\xi(x)\cdot p_\eta(y)$$

因而，尽管$Cov(\xi,\eta)=0$，但ξ与η不独立。

注意：相关系数描述了随机变量间的线性相关程度. 它只能描述变量间的线性关系，但不一定能描述其它的函数关系。

例 3.设$\xi \sim N(0,1)$，显然，$E\xi = 0$

设$\eta = \xi^2$，显然，ξ与η不独立.

$E(\xi\eta) = E(\xi^3) = E(\xi - E\xi)^3 = 0$，（前面在讲中心矩的时候已经证明，服从正态分布的随机变量的奇数阶中心矩为零。）

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\xi = 0 - 0 \cdot E\eta = 0$$

$$\therefore \rho_{\xi\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = 0 .$$

二维正态分布独立与不相关等价

计算 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 的边际分布间的相关系数

设 $(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

则 $$\rho_{\xi\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho$$

例5. 设$\xi \sim N(1,9)$, $\eta \sim N(0,16)$, $\rho_{\xi\eta} = -\dfrac{1}{2}$, $\zeta = \dfrac{\xi}{3} + \dfrac{\eta}{2}$

求:(1)$E\zeta$, $D\zeta$; (2)ξ与ζ的相关系数$\rho_{\xi\zeta}$。

解: $E\xi = 1$, $D\xi = 9$; $E\eta = 0$, $D\eta = 16$.

$$(1)E\zeta = \frac{E\xi}{3} + \frac{E\eta}{2} = \frac{1}{3}$$

$$D\zeta = \frac{D\xi}{9} + \frac{D\eta}{4} + 2\operatorname{cov}\left(\frac{\xi}{3}, \frac{\eta}{2}\right) = 5 + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \rho_{\xi\eta} \sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta} = 1$$

(2)相关系数 $\rho_{\xi\zeta} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\zeta)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\zeta}} = \dfrac{\frac{1}{3}\operatorname{cov}(\xi,\xi) + \frac{1}{2}\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\zeta}}$

$$= \frac{\frac{1}{3} D\xi + \frac{1}{2} \rho_{\xi\eta} \cdot \sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\zeta}} = 0$$

四、随机变量（向量）函数的概率分布

一、随机变量函数的分布

例**1.** 测量圆轴直径 d，而关心的是截面积 A，

$A=\frac{1}{4}\pi d^2$。已知直径 d 的分布，要求截面积 A 的分布。

问题：如何从已知分布的随机变量出发，去求其函数的分布？

注意：随机变量的函数仍然是随机变量。

1.离散型随机变量函数的分布

若已知 X 分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

则 $Y = f(X)$ 的分布律为：

（1） $f(x_i)$ 各不相等

Y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

（2） $f(x_i)$ 中有相等的，则由概率加法定理，把有相同 $f(x_i)$ 的概率相加，即

$$P(Y = f(x_i)) = \sum_{f(x_k)=f(x_i)} P(X = x_k)$$

例 **2.** 已知随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

求 (1) $Y=-2X$，(2) $Y=(X-1)^2$ 的分布律。

解： (1) $Y=-2X$ 是单值函数，$f(x_i)$ 各不相等，所以有

$$P(Y=2)=P(X=-1)=0.2$$

$$P(Y=0)=P(X=0)=0.3$$

$$P(Y=-2)=P(X=1)=0.1$$

$$P(Y=-4)=P(X=2)=0.4$$

Y	2	0	-2	-4
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

(2) $Y=(X-1)^2$ 不是单值函数，

$$P(Y=0)=P(X=1)=0.1\,,$$

$$P(Y=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.3+0.4=0.7\,,$$

$$P(Y=4)=P(X=-1)=0.2$$

即

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例 **3.**已知随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^n}$	$\cdots$

求 $Y=\sin(\frac{\pi}{2}X)$ 的分布律。

解：Y 的可能取值为 $-1,0,1$，对应的 X 的取值为

$4k-1, 2k, 4k-3, k=1,2,\cdots$

$$P(Y=-1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=4k-1)=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{2}{15}$$

$$P(Y=0)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=4k-3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{8}{15}$$

Y	-1	0	1
p_k	$2/15$	$1/3$	$8/15$

2.连续型随机变量函数的分布

问题：如何根据 X 的密度函数 $p_X(x)$ 寻找 $Y=f(X)$ 的密度函数 $p_Y(y)$？

1）当 $y=f(x)$ 是单调函数时，它的反函数 $x=g(y)$ 也是单调的。

a.若 $f(x)\uparrow$，则 $g(y)\uparrow$，即 $g'(y)>0$。

$$P(Y\le y)=P(f(X)\le y)=P(X\le g(y))$$

$$=\int_{-\infty}^{g(y)}p_X(x)dx$$

上式两边对 y 求导：$p_Y(y)=p_X(g(y))g'(y)\ge 0$

b.若 $f(x)\downarrow$，则 $g(y)\downarrow$，即 $g'(y)<0$。

$$P(Y\le y)=P(f(X)\le y)=P(X\ge g(y))$$

$$=\int_{g(y)}^{+\infty}p_X(x)dx$$

上式两边对 y 求导：$p_Y(y)=-p_X(g(y))g'(y)\ge 0$

上式两边对 y 求导： $p_Y(y) = p_X(g(y))g'(y) \geq 0$

上式两边对 y 求导： $p_Y(y) = -p_X(g(y))g'(y) \geq 0$

综合 a、b 得： $p_Y(y) = p_X(g(y))\,|\,g'(y)\,|$

例 4.随机变量 X 的概率密度为

,
$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $Y=2X+8$ 的概率密度 $\varphi_Y(y)$。

解： $y=2x+8\uparrow$， $\therefore x=g(y)=\dfrac{y-8}{2}\uparrow$，

$$p_Y(y)=p_X(g(y))|g'(y)|=p_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot g'(y)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{y-8}{2}\cdot\dfrac{1}{2}, & 0<\dfrac{y-8}{2}<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

.

$$=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & 8<y<16\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

例 5. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $Y=a+bX,(b\neq 0)$ 的概率密度。

解： $y = f(x) = a + bx$ ， $\therefore x = g(y) = \dfrac{y-a}{b}$

$$p_Y(y) = p_X(g(y))\cdot|g'(y)|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-a}{b}-\mu\right)^2} \cdot \left|\frac{1}{b}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|b|} e^{-\frac{(y-a-\mu b)^2}{2\sigma^2 b^2}}$$

$$\therefore Y \sim N(a+b\mu,\sigma^2 b^2)$$

结论：服从正态分布的随机变量的线性函数仍然服从正态分布。

即：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $a+bX \sim N(a+b\mu,\sigma^2 b^2)$

命题：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

证明：取 $Y = aX + b$

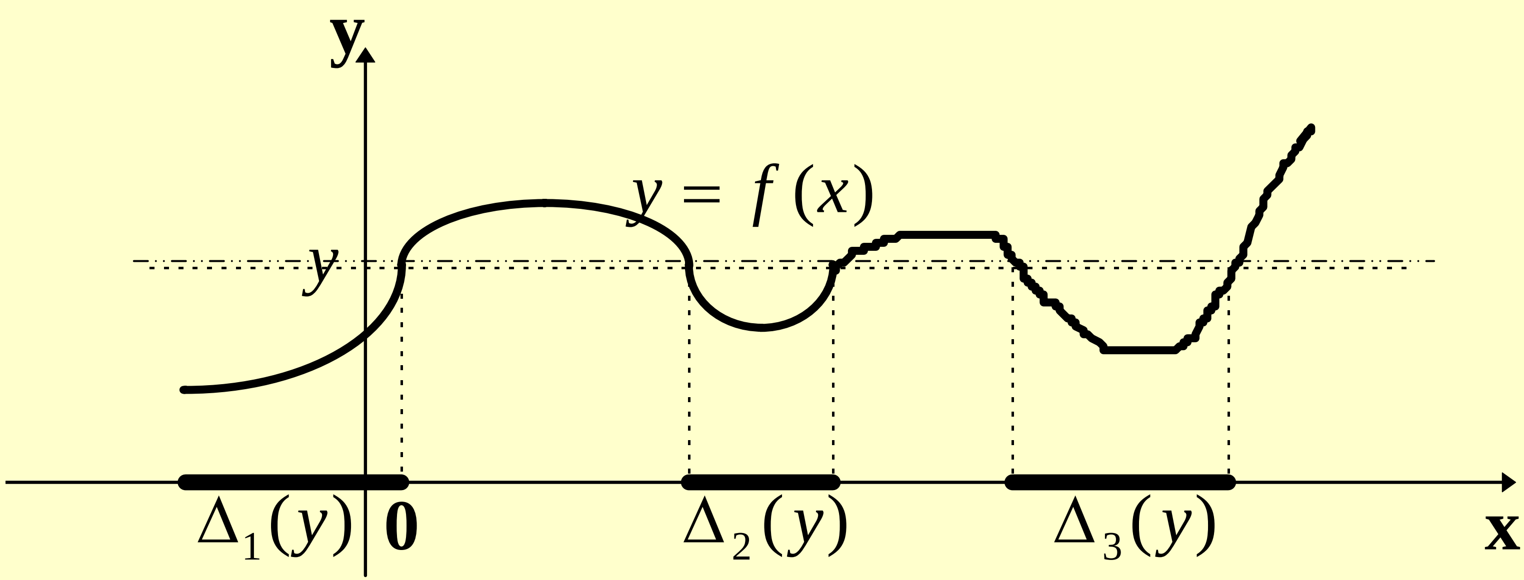
$$EY = a + b\mu = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\mu = 0,$$

$$DY = \sigma^2 b^2 = \sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 = 1$$

$$a + bX = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}X = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$\therefore \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

2）当 $y=f(x)$ 不是单调函数时，求 Y 的概率密度比较复杂，一般从分布函数入手。如图所示：



$$\boldsymbol{P(Y \le y)} = \sum_{i:f(x)<y,\, x\in\Delta_i(y)} P(X \in \Delta_i(y))$$

$$= \sum_{i:f(x)<y,\, x\in\Delta_i(y)} \int_{\Delta_i(y)} p_X(x)dx$$

两边对 y 求导即得 $p_Y(y)$。

例 6. $X \sim N(0,1)$，求 $Y = X^2$ 的概率密度。

解：$p_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$，$p_Y(y) = 0$；

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

两边对 y 求导：

$$p_Y(y) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\therefore p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

这是 $\chi^2(1)$ 分布。

$X \sim \chi^2(k)$——随机变量 X 服从自由度为 k 的卡方分布。

X 的概率密度：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\cdot x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

★Γ函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha>0$

Γ函数的性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$