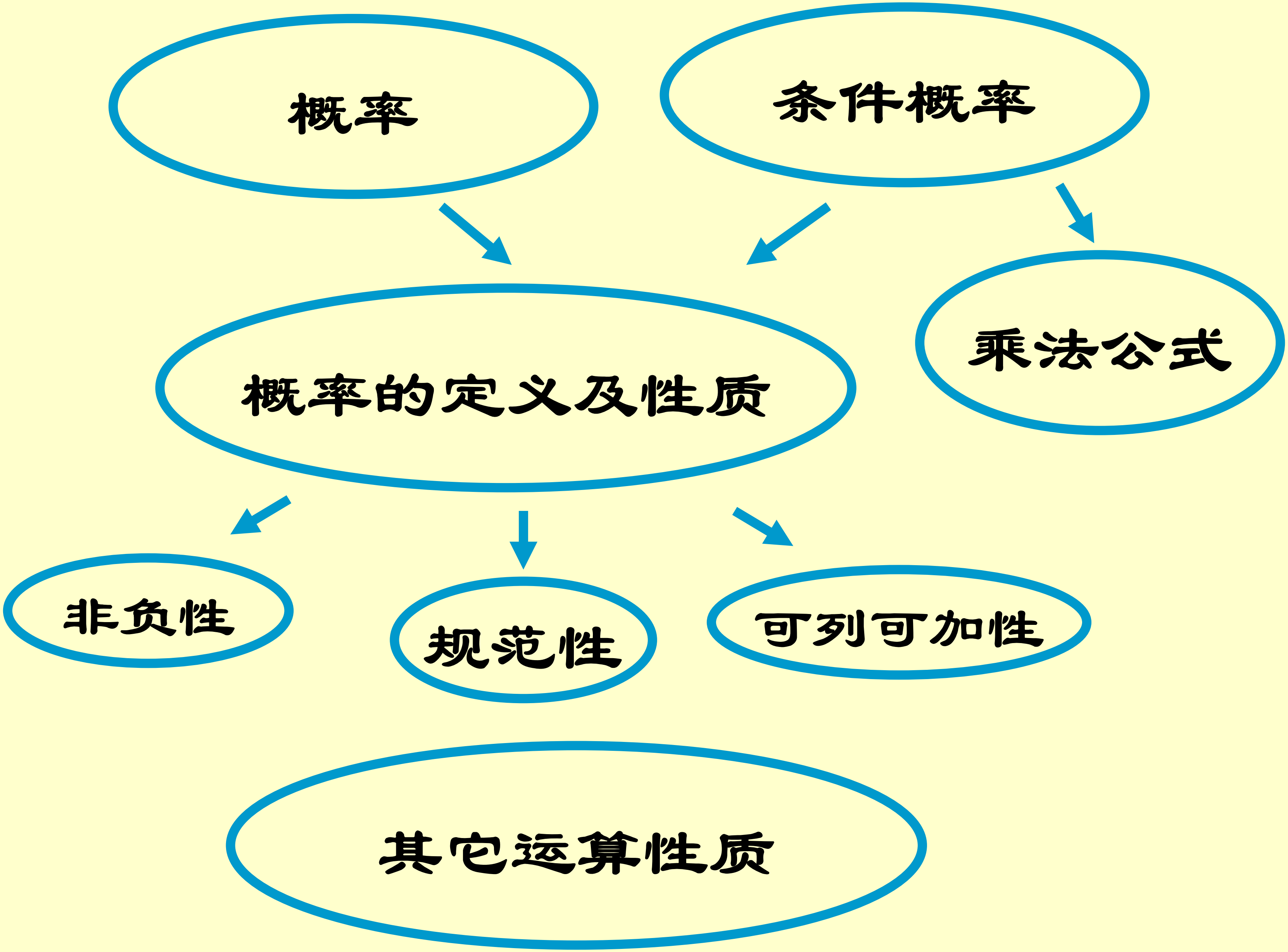

概率
条件概率
概率的定义及性质
乘法公式
非负性
规范性
可列可加性
其它运算性质

1.5 独立性

返回复习

设 A、B 是两个随机事件

一般 $P(B|A) \neq P(B)$，即 A 的发生对 B 发生有影响，若这种影响不存在，则 $P(B|A)=P(B)$

独立的定义

对于随机事件 A、B，若有

$P(AB)=P(A)P(B)$，

则称 A 与 B 相互独立。否则 A 与 B 相互不独立。

独立性的另一种定义

$$P(B|A)=P(B)$$

注意：

若 $P(A)P(B)>0$，则“A、B互不相容”与“A、B相互独立”不能同时成立。

（“A、B互不相容” $\Rightarrow P(AB)=P(\varnothing)=0$，

“A、B相互独立” $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)>0$。）

互不相容　相互独立

注意区别

性质： 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

证明 A 与 $\overline{B}$ 相互独立

证明：
$$
\begin{aligned}
P(A\overline{B}) &= P(A - AB) \\
&= P(A) - P(AB) \\
&= P(A) - P(A)P(B) \\
&= P(A)(1 - P(B)) \\
&= P(A)P(\overline{B})
\end{aligned}
$$

即 A 与 $\overline{B}$ 相互独立.

例 1. 设有甲、乙两名射手，他们命中目标的概率分别为 0.8 和 0.7，现两人同时向该目标射击一次，试求：（1）目标被击中的概率； (2) 若已知目标被击中，问它是甲命中的概率是多少？

解：设 $A=${甲命中目标}, $B=${乙命中目标}, $C=${目标被命中}

(1) $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$=0.94.

也可用对立事件计算，

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A}\overline{B})$$

$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=0.94.$$

（2）所求为条件概率 $P(A|C)$，

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{0.8}{0.94}=\frac{40}{47}.$$

推广:

(1)三个事件 A,B,C 两两独立:

若满足 $P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$

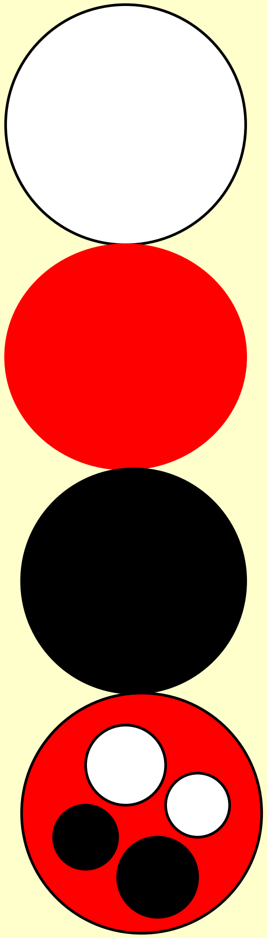
(2) A,B,C 相互独立:

若满足 $P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$
$$P(AC)=P(A)P(C)$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

注意: 两两独立 $\neq$ 相互独立.

例 2.有四个球，其中一个红，一个白，一个黑，还有一个是红白黑三色球，任取一球，设 A,B,C 分别表示取到的球上有红、白、黑色，问 A,B,C 是否相互独立。



解： $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2};$

$\therefore P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$

$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(AC)=P(A)P(C)$

$P(BC)=P(B)P(C)$

$\therefore A,B,C$ 是两两独立的。

$\because P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(AP(B)P(C)=\frac{1}{8}$

$\therefore A,B,C$ 不是相互独立的。

推广： $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立：

如果对任意的 m， $2 \le m \le n$，

任取 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$

有 $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m})$

（共有等式 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots C_n^n = (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1$

$= 2^n - 1 - n$ 个）

例 3.加工零件要三道工序，三道工序的次品率分别为 2%、3%和 5%，各道工序互不影响，问加工出来的零件的次品率是多少？

解：设 A_i 表示第 i 道工序出次品，则 A_1, A_2, A_3 相互独立，

$$P(A_1) = 2\%, P(A_2) = 3\%, P(A_3) = 5\%$$

三道工序中只要有一道工序出次品，加工出来的零件就是次品，

即

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1)P(A_2) - P(A_2)P(A_3)$$

$$- P(A_1)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$= 0.09693$$

或者，$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$= 1 - (1 - 2\%) \times (1 - 3\%) \times (1 - 5\%)$$

$$= 1 - 0.90307 = 0.09693$$

加工出来的零件的次品率是**0.09693**。

试验的独立性

设有两个试验 E_1 和 E_2，试验 E_1 的任一结果（事件 A）与试验 E_2 的任一结果（事件 B）都是独立时，称这两个试验是独立的。

推广到多个试验的相互独立性。对试验 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 而言，如果 E_1 的任一结果，E_2 的任一结果，$\cdots$ E_n 的任一结果都是相互独立的，则称这 n 个试验相互独立。

如果这 n 个独立试验是同一种试验，称为 n 重复独立试验。进一步，若每次试验的结果只有两个，则这种试验称为 n 重伯努利试验。

1.6 全概率公式
和
贝叶斯公式

1. 样本空间的划分：

Ω 为试验 **E** 的样本空间，

$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 **E** 一组事件，若

(1) $B_i B_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \cdots, n; i \neq j$ **;**

(2) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分。

即：将 Ω 划分成一组互不相容的事件。

例 **1.**掷一骰子，观察其点数。

解：样本空间 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$B_1 = \{1,2,3\}$， $B_2 = \{4,5\}$， $B_3 = \{6\}$ 是 Ω 的一个划分

$C_1 = \{1,2,3\}$， $C_2 = \{3,4\}$， $C_3 = \{5,6\}$ 不是 Ω 的划分。

2. 全概率公式

A为一事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为Ω的一个划分，

且$P(B_i) > 0$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

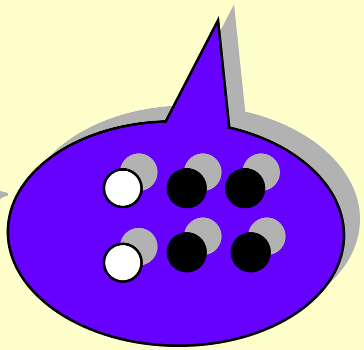
证明：$\boldsymbol{P(A) = P(A\Omega) = P(A(B_1 + B_2 + \cdots B_n))}$

$$= P(AB_1 + AB_2 + \cdots AB_n)$$

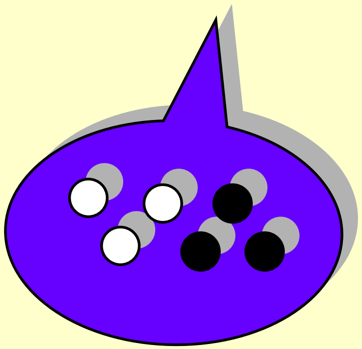
$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots P(A|B_n)P(B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

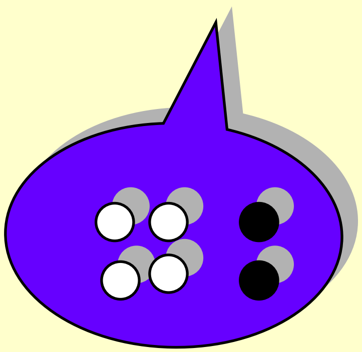
2个



3个



5个



例4.有十个袋子，装球情况如左图所示。任选一个袋子，并从中任取两球.求取出的两球都是白球的概率。

解：设 A 表示取出的 **2** 个球都是白球，

B_i 表示所选的袋子中装球的情况属于第 i 种（$i=1,2,3$）。

$$P(B_1)=\frac{2}{10},\qquad P(A|B_1)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15};$$

$$P(B_2)=\frac{3}{10},\qquad P(A|B_2)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15};$$

$$P(B_3)=\frac{5}{10},\qquad P(A|B_3)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}.$$

$$\therefore P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$$

$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{15}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{15}+\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{15}=\frac{41}{150}=0.273$$

例 5.某工厂生产的产品以 **100** 个为一批。在进行抽样调查时，只从每批中抽取 **10** 个来检查，如果发现其中有次品，则认为这批产品是不合格的。假定每一批产品中的次品最多不超过 **4** 个，并且其中恰有 $i(i=0,1,2,3,4)$ 个次品的概率如下：

一批产品中有次品数	0	1	2	3	4
概　　率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求各批产品通过检查的概率。

解：设事件B_i表示一批产品中有i个次品（$i=0,1,2,3,4$），

则 $P(B_0)=0.1, P(B_1)=0.2, P(B_2)=0.4,$

$P(B_3)=0.2, P(B_4)=0.1.$

设事件A表示这批产品通过检查，即抽样检查的 **10** 个产品都是合格品，则 $P(A|B_0)=1,$

$$P(A|B_1)=\frac{C_{99}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.900, \quad P(A|B_2)=\frac{C_{98}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.809,$$

$$P(A|B_3)=\frac{C_{97}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.727, \quad P(A|B_4)=\frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.652$$

$$\therefore P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(A|B_i)P(B_i)=0.8142$$

继续

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

$P(B_i)$——试验前的假设概率。（$i=0,1,2,\cdots,n$ ）

如果进行一次试验，事件 A 确实发生了，则应当重新估计事件的概率，即求 $P(B_i|A)$ 。

$P(B_i|A)$——试验后的假设概率。（$i=0,1,2,\cdots,n$ ）

3. 贝叶斯公式:

A 为一事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且

$P(A)>0,\qquad P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$

则 $$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}, i=1,2,\cdots,n$$

例6. 商店论箱出售玻璃杯，每箱20只，其中每箱含0，1，2只次品的概率分别为0.8，0.1，0.1，某顾客选中一箱，从中任选4只检查，结果都是好的，便买下了这一箱. 问这一箱含有一个次品的概率是多少？

解: 设A:从一箱中任取4只检查,结果都是好的.

B_0，B_1，B_2分别表示事件每箱含0，1，2只次品

已知:$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$ $P(A|B_0)=1$

由Bayes公式:

$$P(A|B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5} \quad P(A|B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{12}{19}$$

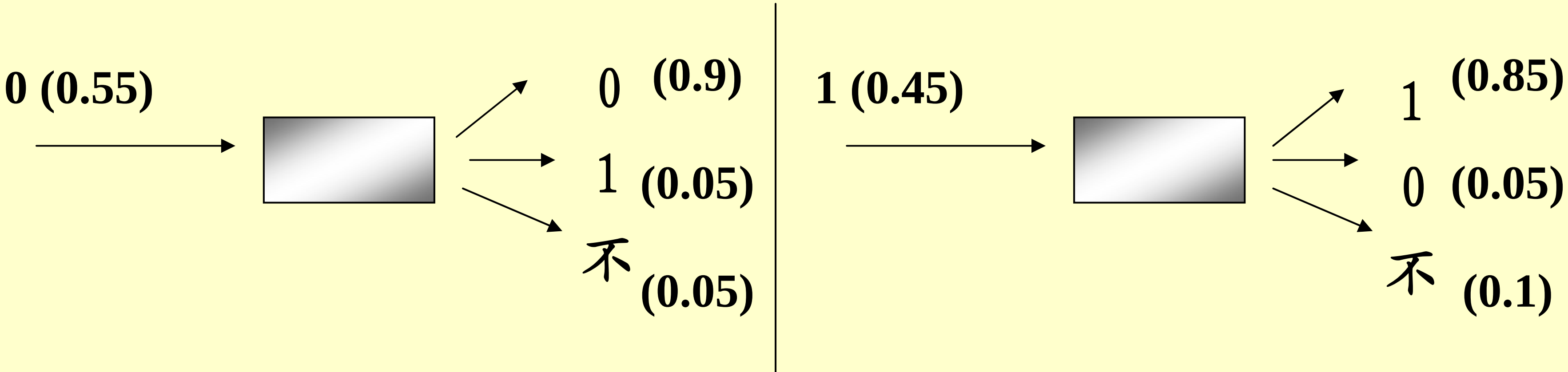
$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.1\times 4/5}{0.8\times 1+0.1\times 4/5+0.1\times 12/19}\approx 0.0848$$

例7.　数字通讯过程中，信源发射0、1两种状态信号，其中发0的概率为0.55，发1的概率为0.45。由于信道中存在干扰，在发0的时候，接收端分别以概率0.9、0.05和0.05接收为0、1和“不清”。在发1的时候，接收端分别以概率0.85、0.05和0.1接收为1、0和“不清”。现接收端接收到一个“1”的信号。问发端发的是0的概率是多少?

解：设A---发射端发射0，

B--- 接收端接收到一个“1”的信号.

$$P(A\mid B)=\frac{P(B\mid A)P(A)}{P(B\mid A)P(A)+P(B\mid \overline{A})P(\overline{A})}=\frac{0.05\times 0.55}{0.05\times 0.55+0.85\times 0.45}=0.067$$



例 **8.**临床诊断记录表明，利用某种试验坚持检查癌症具有如下的效果：对癌症患者进行试验结果呈阳性反应者占 **95%**，对非癌症患者进行试验呈阴性反应者占 **96%**。现在用这种试验对某市居民进行癌症普查，如果该市癌症患者数约占居民总数的 **4‰**，求：（1）试验结果呈阳性反应的被检查者确实患有癌症的概率；（2）试验结果呈阴性反应的被检查者确实未患癌症的概率。

解：设事件A表示试验结果呈阳性反应，事件B表示被检查者患有癌症，

则据题意：

$$P(B)=0.004,\quad P(A|B)=0.95,\quad P(\overline{A}|\overline{B})=0.96$$

$$\therefore P(\overline{B})=0.996,\ \ P(\overline{A}|B)=0.05,\ \ P(A|\overline{B})=0.04$$

$$(1)\,P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

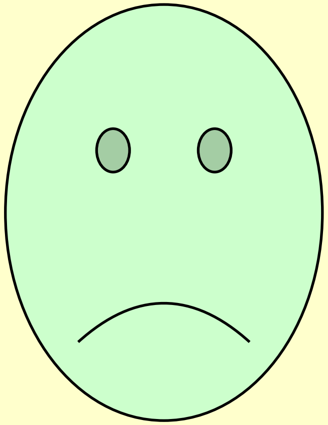
$$=\frac{0.004\times0.95}{0.004\times0.95+0.996\times0.04}=0.0871$$

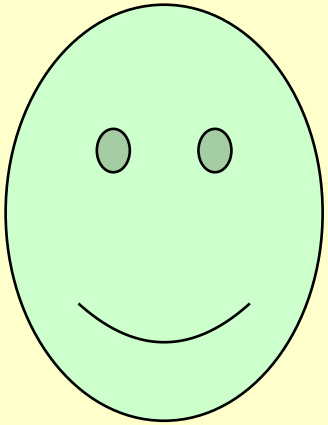
说明：试验结果呈阳性反应的被检查者确实患有癌症的可能性并不大，还需要通过进一步的检查才能确诊。

$$(2)\,P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}{P(B)P(\overline{A}|B)+P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}$$

$$=\frac{0.996\times 0.96}{0.004\times 0.05+0.996\times 0.96}=0.9998$$

说明:试验结果呈阴性反应的被检查者未患有癌症的可能性极大。





返回

应 用 案 例

返 回

例 9.某工厂生产的产品以 **100** 个为一批。在进行抽样调查时，只从每批中抽取 **10** 个来检查，如果发现其中有次品，则认为这批产品是不合格的。假定每一批产品中的次品最多不超过 **4** 个，并且其中恰有 $i(i=0,1,2,3,4)$ 个次品的概率如下：

一批产品中有次品数	0	1	2	3	4
概　　　　率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求通过检查的各批产品中恰有 i（$i=0,1,2,3,4$）个次品的概率。

解：设事件 A 表示这批产品通过检查，即抽样检查的 **10** 个产品都是合格品，则

$$P(A)=0.8142$$

设事件 B_i 表示一批产品中有 i 个次品（$i=0,1,2,3,4$），

$$P(B_0)=0.1, P(B_1)=0.2, P(B_2)=0.4,$$

$$P(B_3)=0.2, P(B_4)=0.1.$$

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}, i=0,1,2,3,4$$

一批产品中有次品数	0	1	2	3	4
概 率 $P(B_i \mid A)$	**0.123**	**0.221**	**0.397**	**0.179**	**0.080**

比较 $P(B_i \mid A)$ 与 $P(B_i)$

一批产品中有次品数	0	1	2	3	4
概 率 $P(B_i)$	**0.1**	**0.2**	**0.4**	**0.2**	**0.1**

比较： $P(B_0 \mid A) > P(B_0)$， $P(B_1 \mid A) > P(B_1)$，

$P(B_2 \mid A) < P(B_2)$， $P(B_3 \mid A) < P(B_3)$，

$P(B_4 \mid A) < P(B_4)$.

结论：没有次品的必然通过检查，较少次品的较易通过检查；次品较多的较难通过检查。检查前后的次品数的概率分布是有所不同的。

例 10.验收一批（100 件）乐器，验收方案如下：自该批乐器中随机地取 3 件测试（设 3 件乐器的测试是相互独立的），如果 3 件中至少有一件在测试中被认为音色不纯，则这批乐器就被拒绝接受。设一件音色不纯的乐器经测试查出其为音色不纯的概率为 0.95；而一件音色纯的乐器经测试被误认为不纯的概率为 0.01。如果已知这 100 件乐器中恰有 4 件是音色不纯的，试问：这批乐器被接受的概率是多少？

解：设 A 表示乐器被接受，各件乐器彼此独立。

设 H_i 表示三件中恰有 i 件音色不纯，$i=0,1,2,3$，

这批乐器被接受，可能是三件中有 i（$i=0,1,2,3$）件音色不纯但被误认为音色纯，即

$$A=\sum_{i=0}^{3} AH_i,$$

一件音色不纯的经测试被误认为音色纯的概率为 **0.05**，

一件音色纯的经测试被认为纯的概率为 **0.99**，

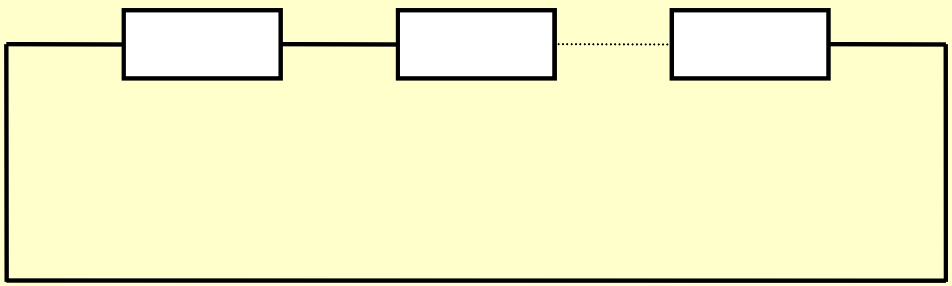
$$\because P(A\mid H_i)=(0.99)^{3-i}(0.05)^i,\quad P(H_i)=\frac{C_4^i C_{96}^{3-i}}{C_{100}^3},i=0,1,2,3$$

$$\therefore P(A)=\sum_{i=0}^{3} P(A|H_i)P(H_i)=\sum_{i=0}^{3}(0.99)^{3-i}(0.05)^i\frac{C_4^i C_{96}^{3-i}}{C_{100}^3}$$

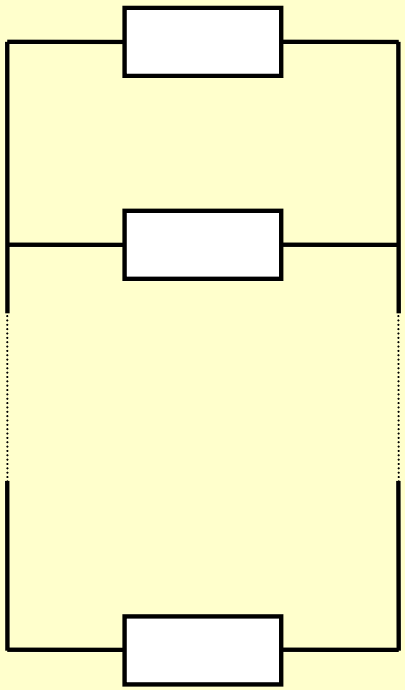
$$=0.8574+0.0055+0+0=0.8629$$

例 11.考察由 n 个相互独立的元件构成的系统的可靠性，1）串联系统；2）并联系统。

（元件的可靠性是指一个电子元件能正常工作的概率；系统的可靠性是指由若干个电子元件构成的系统能正常工作的概率。）



(1)串联系统



(2)并联系统

解：设 A_i 表示第 i 个元件可靠，$P(A_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,n$

1） 串联情况下只有当每个元件都可靠时，系统才会可靠，所以串联系统可靠性为：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=p_1p_2\cdots p_n$$

2） 并联情况下，只要有一个元件是可靠的，系统就是可靠的，所以并联系统的可靠性为：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

$$=1-(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_n)$$

若这 n 个元件（相互独立）相同，$P(A_i)=p$

$i=1,2,\cdots,n$

则串联: $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=p^n$

并联: $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-(1-p)^n$

例 **12.**将三个字母 **A,B,C** 之一输入信道，输出为原字母的概率为 α，而输出为其它字母的概率都是 $\dfrac{1-\alpha}{2}$。今将字母串 **AAAA, BBBB, CCCC** 之一输入信道，输入 **AAAA, BBBB, CCCC** 的概率分别为 $p_1, p_2, p_3 (p_1 + p_2 + p_3 = 1)$。已知输出为 **ABCA**，问输入的是 **AAAA** 的概率是多少？**(**设信道传输每个字母的工作是相互独立的。**)**

AAAA BBBB CCCC

解: 设 A 表示输入 **AAAA**， B 表示输入 **BBBB**， C 表示输入 **CCCC**， D 表示输出 **ABCA**，

已知 $P(A)=p_1, P(B)=p_2, P(C)=p_3$

$$P(D|A)=\alpha^2\cdot\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2, \quad P(D|B)=\alpha\cdot\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3,$$

$$P(D|C)=\alpha\cdot\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$$

$$P(D)=P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)$$

$$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}$$

$$=\frac{2p_1\alpha}{3\alpha p_1-p_1+1-\alpha}$$

独 立 性

事件 A、B 称为相互独立，如果 A、B 满足下面三个等式之一：

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

定理 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

注意：两两独立 $\neq$ 相互独立.

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立

全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$

$P(B_i)$——试验前的假设概率。（$i=0,1,2,\cdots,n$）

$P(B_i|A)$——试验后的假设概率。（$i=0,1,2,\cdots,n$）

贝叶斯公式

A为一事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$为Ω的一个划分，且 $P(A)>0$，

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},i=1,2,\cdots,n$$