华东理工大学

概率论与数理统计

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________

学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第九次作业

一． 填空题

1. 设 X 服从泊松分布，若 $EX^2=6$，则 $P(X>1)=$ ___$1-3e^{-2}$___。

解　$X\sim P(\lambda),\ 6=EX^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$　故　$\lambda=2$.

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-e^{-2}-2e^{-2}=1-3e^{-2}.$$

2. 设随机变量 $\xi\sim B(n,p)$，已知 $E\xi=2.4,\quad D\xi=1.44$，则参数 $n=$___6___，$p=$___0.4___。

解　$\begin{cases} E\xi=np=2.4, \\ D\xi=npq=1.44, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=6, \\ p=0.4. \end{cases}$

3. 某保险公司的某人寿保险险种有 1000 人投保，每个人在一年内死亡的概率为 0.005，且每个人在一年内是否死亡是相互独立的，欲求在未来一年内这 1000 个投保人死亡人数不超过 10 人的概率。用 Excel 的 **BINOMDIST** 函数计算。**BINOMDIST**（10 , 1000, 0.005, TRUE）= 0.986531 。

4. 运载火箭运行中进入其仪器仓的粒子数服从参数为 4 的泊松分布，用 Excel 的 **POISSON** 函数求进入仪器舱的粒子数大于 10 的概率。
POISSON（10 , 4 ， TRUE）=0.9972, 所求概率 p= 0.0028 。

5. $\xi\sim P(4)$，由切比雪夫不等式有 $P(|\xi-4|<6)\ge$ ___8/9___。

二． 选择题

1. 在相同条件下独立的进行 3 次射击，每次射击击中目标的概率为 $\frac{2}{3}$，则至少击中一次的概率为　　（ D ）

　A. $\frac{4}{27}$　　B. $\frac{12}{27}$　　C. $\frac{19}{27}$　　D. $\frac{26}{27}$

2. 设随机变量 X 服从泊松分布，且已知 P{X=1}=P{X=2} ，则 P{X=4}=（ C ）。

　A. $\frac{1}{3}e^{-1}$　　B. $\frac{1}{3}e^{-1}$　　C. $\frac{2}{3}e^{-2}$　　D. $\frac{4}{3}e^{-2}$

3、某种灯管的使用寿命ξ服从参数为 0.002 的指数分布$E(0.002)$，现任取三只这种灯管，则在 500 小时内，三只灯管中至多有两只损坏的概率为（ A ）

（A）$1-(1-e^{-1})^3$　（B）$3e^{-2}(1-e^{-1})$　（C）$1-e^{-3}$　（D）$3e^{-1}(1-e^{-2})$

三．计算题

1. 设随机变量ξ的密度函数是

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对ξ独立的随机观察 4 次，η表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求

（1）η的概率分布（分布律），

（2）$E\eta$和$D\eta$。

解　$\eta\sim B\left(4,p\right)$。

（1）设 A=“观察值大于$\frac{\pi}{3}$”，则　$p=P(A)=P(\xi\ge\frac{\pi}{3})=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$,

所以η的概率分布为：$P(\eta=k)=\binom{4}{k}\frac{1}{2}^k(1-\frac{1}{2})^{4-k}$，$(k=0,1,2,3,4)$。

或

η	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

（2）　$E\eta=4\times\frac{1}{2}=2,\quad D\eta=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$

2. 随机变量ξ服从参数为p的几何分布，即

$$P(\xi=k)=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

（1）　求　$P(\xi>s)$，其中 s 是一个非负整数；

（2） 试证 $P(\xi > s+t \mid \xi > s) = P(\xi > t)$，其中 s，t 是非负整数。（几何分布具有无记忆性）。

解 （1）$P(\xi > s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} P(\xi = k) = \sum_{k=s+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$

$$= p(1-p)^s \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p(1-p)^s \frac{1}{p} = (1-p)^s$$

或者：$P(\xi > s) = 1 - P(\xi \le s) = 1 - \sum_{k=1}^{s} p(1-p)^{k-1} = 1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^s}{1-(1-p)} = (1-p)^s$

（2） $P(\xi > s+t \mid \xi > s) = \frac{P(\{\xi > s+t\} \cap \{\xi > s\})}{P(\xi > s)} = \frac{P(\xi > s+t)}{P(\xi > s)}$

$$= \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s} = (1-p)^t = P(\xi > t)。$$

3. 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X \le 1) = 4P(X = 2)$，求 $P(X = 3)$。

解：$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}$, $P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$

由 $P(X \le 1) = 4P(X = 2)$ 知 $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 2\lambda^2 e^{-\lambda}$

即 $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 解得 $\lambda = 1$，故

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} e^{-1}.$$

4. 设在时间 t (单位：min)内，通过某路口的汽车服从参数与 t 成正比的泊松分布。已知在 1 分钟内没有汽车通过的概率为 0.2，求在 2 分钟内至少有 2 辆车通过的概率。（提示：设 ξ_t =“t 时间内汽车数”,则 $\xi_t \sim P(\lambda t)$）

解: 设 ξ_t =“t 时间内汽车数”,则 $\xi_t \sim P(\lambda t)$,

那么 $P(\xi_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$,

由已知,得 $P(\xi_1 = 0) = \frac{(\lambda)^0 e^{-\lambda}}{0!} = 0.2 \Rightarrow \lambda = \ln 5$,

所以 $P(\xi_2 \ge 2) = 1 - P(\xi_2 = 0) - P(\xi_2 = 1) = 1 - \frac{(2\lambda)^0 e^{-2\lambda}}{0!} - \frac{(2\lambda)^1 e^{-2\lambda}}{1!}$

$$=1-e^{-2\lambda}-(2\lambda)e^{-2\lambda}=\frac{24-2\ln 5}{25}.$$

5. 在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，把这个试验独立重复做两次。在下列两种情况下分别求 p 的值：

（1） 已知事件 A 至多发生一次的概率与事件 A 至少发生一次的概率相等；

（2）已知事件 A 至多发生一次的条件下事件 A 至少发生一次的概率为 $\frac{1}{2}$。

解 设 ξ 为两次试验中事件 A 发生的次数，则 $\xi\sim B(2,p)$。

（1）由题意知，$P(\xi\ge 1)=P(\xi\le 1)$，即

$$P(\xi=1)+P(\xi=2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)$$

得 $P(\xi=2)=P(\xi=0)$，亦即 $C_2^2p^2=C_2^0(1-p)^2$，解得 $p=\frac{1}{2}$。

（2）由条件概率公式

$$P(\xi\ge 1\,|\,\xi\le 1)=\frac{P(\{\xi\ge 1\}\bigcap\{\xi\le 1\})}{P(\xi\le 1)}=\frac{P(\xi=1)}{P(\xi\le 1)}=\frac{2p(1-p)}{1-p^2}=\frac{2p}{1+p},$$

根据题意，$\frac{2p}{1+p}=\frac{1}{2}$，解出，$p=\frac{1}{3}$。

第十次作业

一． 填空题：

1．若 ξ 在 $[0,5]$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+\xi^2-3\xi=0$ 有实根的概率 0.8 。

2．设随机变量 X 在区间[2，6]上服从均匀分布，现对 X 进行了 3 次独立试验，则正好有 2 次观测值大于 4 的概率为 $\frac{3}{8}$ 。

3．设每人每次打电话的时间（单位：min）服从 $E(1)$，则在 808 人次的电话中有 3 次或以上超过 6 分钟的概率为 0.324

二． 选择题：

1．设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$（ C ）。

A.单调增大 B.单调减少 C.保持不变 D. 增减不定

2．若灯管的寿命$\xi \sim E(\lambda)$，则该灯管已使用了$a(a>0)$小时,能再使用b小时的概率（　A　）。

A. 与a无关　　B. 与a有关　　C. 无法确定　　D. 以上答案都不对

3．随机变量 X 的概率密度函数为$p(x)$，且$p(x)=p(-x)$，$F(x)$是X的分布函数，则对任意实数a，有（　B　）。

A. $F(-a)=1-\int_0^a p(x)dx$　　　　B. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a p(x)dx$

C. $F(-a)=F(a)$　　　　D. $F(-a)=2F(a)-1$

三．　计算题：

1．某地区 18 岁的女青年的血压服从$N(110,121)$。在该地区任选一 18 岁的女青年，测量她的血压，

（1）　求$P(X\le 100)$,　$P(105.5\le X\le 121)$

（2）　确定最小的x，使$P(X>x)\le 0.05$

解：设女青年的血压为ξ，则$\xi \sim N(110,121)$，$\frac{\xi-110}{11}\sim N(0,1)$

（1）$$P(X<100)=P(\frac{X-110}{11}<\frac{100-110}{11})=\Phi(-0.091)$$
$$=1-\Phi(0.091)=1-0.5359=0.4641$$

$$P(105.5\le X\le 121)=\Phi(\frac{121-110}{11})-\Phi(\frac{105.5-110}{11})=\Phi(1)-\Phi(-0.5)$$
$$=\Phi(1)+\Phi(0.5)-1=0.8413+0.6915-1=0.5328$$

（2）要使$P(X>x)\le 0.05$，只须$P(X\le x)>0.95$

$$\because \Phi(1.65)=0.95 \therefore \frac{x-110}{11}>1.65 \Rightarrow x>128.15$$

2．修理某机器所需时间（单位：小时）服从参数为$\frac{1}{2}$的指数分布。试问：

（1）　修理时间超过 2 小时的概率是多少？

（2）　若已持续修理了 9 小时，总共需要至少 10 小时才能修好的条件概率是多少？

解：设ξ是修理时间，$\xi \sim E(\frac{1}{2})$，ξ的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$。

（1）$P\{\xi>2\}=1-P\{\xi\le 2\}=1-F(2)=1-(1-e^{-\frac{2}{2}})=e^{-1}\ \approx\ 0.367879$　；

（2）$P\{\xi > 10 | \xi > 9\} = \dfrac{P\{\xi > 10\}}{P\{\xi > 9\}} = \dfrac{1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{10}{2}})}{1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}})} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{10}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{9}{2}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.606531$ 。

3．假设测量的随机误差$\xi \sim N(0,10^2)$，试求在 100 次独立重复测量中，至少有二次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率α。

解：$P(|\xi|>19.6) = P(\xi > 19.6) + P(\xi < -19.6) = 2[1-\Phi(\frac{19.6}{10})] = 0.05$

令η为 100 次独立重复测量中，误差的绝对值大于 19.6 的次数，

则$\eta \sim b(100, 0.05)$

$$P(\eta \geq 2) = 1 - P(\eta = 0) - P(\eta = 1) = 1 - (0.95)^{100} - C_{100}^{1}(0.05)(0.95)^{99} = 0.9629$$

4. 若$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$且$P(\xi < 89) = 0.90$，$P(\xi < 94) = 0.95$，求$\mu$和$\sigma^2$.

解：根据

$0.90 = P(\xi < 89) = \Phi(\dfrac{89-\mu}{\sigma})$，和 $0.95 = P(\xi < 94) = \Phi(\dfrac{94-\mu}{\sigma})$，

利用随机变量分布函数的单调性，有

$\dfrac{89-\mu}{\sigma} = 1.2816$，和 $\dfrac{94-\mu}{\sigma} = 1.6449$，

解得$\mu = 71.3617$，$\sigma = 13.7627$，即$\sigma^2 = 189.4128$

5．测量至某一目标的距离时发生的随机误差X（米）的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{20\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{800}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

求在三次测量中至少有一次误差的绝对值不超过 20 米的概率.

解：　X~N(10,202)

设Y为三次测量中误差绝对值不超过$20m$的次数，则$Y \sim B(3,p)$，其中

$$p = P(|X|<20) = P(-20 < X < 20 = \Phi(\frac{20-10}{20}) - \Phi(\frac{-20-10}{20})$$
$$= \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(0.5) + \Phi(1.5) - 1 = 0.6915 + 0.9332 - 1 = 0.6247$$

所求概率为$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1-p)^3 = 1 - (1-0.6274)^3 = 0.9471.$