华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第七册）

学　院 ____________专　业 ____________班　级 ____________
学　号 ____________姓　名 ____________任课教师____________

第十三次作业

一． 填空题：

1．已知二维随机变量(ξ,η)的联合概率分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	0.1	0.15
1	0.25	0.2
2	0.15	0.15

则

$E\xi=$ __1.05__, $E\eta=$ _0.5__, $E\left(\sin\frac{\pi}{2}(\xi+\eta)\right)=$ __0.25__, $E\left(\max(\xi,\eta)\right)=$ _1.2____,

$D\left(\max(\xi,\eta)\right)=$ _0.36__ 。

2. 设随机变量ξ_1,ξ_2,ξ_3相互独立，$\xi_1\sim U(0,6)$，$\xi_2\sim N(0,4)$，$\xi_3\sim E(3)$，则：

$E(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)=$ ____4___，$D(\xi_1-2\xi_2+3\xi_3)=$ __20__。

3．已知$X\sim N(-2,0.4^2)$，则$E(X+3)^2=$1. 16 。

二．选择题：

1) 设$\xi\sim N(0,1)$，$\eta\sim N(0,4)$，$\varsigma=\xi+\eta$，下列说法正确的是（　B ）。

A. $\varsigma\sim N(0,5)$　　B. $E\varsigma=0$　　C. $D\varsigma=5$　　D. $\sqrt{D\varsigma}=3$

2）设 X_1, X_2, X_3 相互独立同服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布，令 $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$，

则 $E(Y^2) =$（　　C　　　）

A. 1.　　　　　　B. 9.　　　　　　C. 10.　　　　　　D. 6.

3）设 $X \sim P(\lambda)$，且 $E[(X-1)(X-2)] = 1$，则 $\lambda =$　(　　　A　)

A. 1，　　　　　　B. 2，　　　　　　C. 3，　　　　　　D. 0

二．　计算题：

1. 设二维随机变量 (ξ, η) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

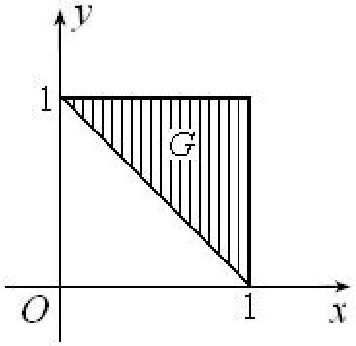
求 $E\xi, E\eta, E(\xi\eta)$。

解：$E\xi = \iint_D xp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 x(x+y)\,\mathrm{d}y = \frac{7}{6} = E\eta$

$$E(\xi\eta) = \iint_D xyp(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{8}\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^2 xy(x+y)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

2. 二维随机变量 (ξ, η) 服从以点(0, 1)，(1, 0)，(1, 1)为顶点的三角形区域上的均匀分布，试求 $E(\xi+\eta)$ 和 $D(\xi+\eta)$。

解:



$$(\xi, \eta) \sim p(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G, \end{cases}$$

$$E(\xi+\eta)=\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 2(x+y)dx=\frac{4}{3},$$

$$E(\xi+\eta)^2=\int_0^1 dy\int_{1-y}^1 2(x+y)^2 dx=\frac{11}{6},$$

$$D(\xi+\eta)=E(\xi+\eta)^2-[E(\xi+\eta)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}$$

3. 有 10 个人同乘一辆长途汽车，沿途有 20 个车站，每到一个车站时，如果没有人下车，则不停车。设每位乘客在各站下车是等可能的，且各乘客是否下车是相互独立的，求停车次数的数学期望。

解：设 $\xi_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{站有人下车},\\ 0, & \text{第}i\text{站没人下车},\end{cases}$

则 $P\{\xi_i=0\}=P$ {10 个人在第 i 站都不下车} $=\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$，

从而 $P\{\xi_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$

于是 $E\xi_i=0\times P\{\xi_i=0\}+1\times P\{\xi_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{10}$，

长途汽车停车次数 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{20}$，故

$$E\xi=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_{20}=20\left(1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}\right)$$

4. 某厂生产一种化工产品，这种产品每月的市场需求量 ξ（单位：吨）服从 $[0,5]$ 上的均匀分布。这种产品生产出来后，在市场上每售出 1 吨可获利 6 万元。如果产量大于需求量，则每多生产 1 吨要亏损 4 万元。如果产量小于需求量，则不亏损，但只有生产出来的那一部分产品能获利。问：为了使每月的平均利润达到最大，这种产品的月产量 a 应该定为多少吨？这时，平均每月利润是多少元？

解：因为 $\xi\sim U(0,5)$,所以 ξ 的概率密度为 $\varphi_\xi(x)=\begin{cases}1/5 & 0\le x\le 5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$。

设月产量为 a（$0\le a\le 5$），每月的利润为 η，则

$$\eta=f(\xi)=\begin{cases}6\xi-4(a-\xi)=10\xi-4a & \text{当}\ \xi\le a\ \text{时}\\ 6a & \text{当}\ \xi>a\ \text{时}\end{cases}。$$

该厂平均每月利润为 $E\eta = Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$

$$= \int_0^a \frac{10x-4a}{5}\mathrm{d}x + \int_a^5 \frac{6a}{5}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{5} + 6a - \frac{6a^2}{5} = 6a - a^2$$ 。

由 $\frac{\mathrm{d}E\eta}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(6a-a^2) = 6-2a = 0$ 可解得 $a=3$（吨）。

可见，要使得每月的平均利润达到最大，这种产品的月产量应该定为 3 吨。这时，平均每月利润是 $E\xi = 6a - a^2 = 6\times 3 - 3^2 = 9$（万元）。

5. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 $X \sim N(0,1/2)$，求 $D|X-Y|$

解：$Z = X - Y \sim N(0,1)$

$$E|Z| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}; E|Z|^2 = EZ^2 = DZ = 1$$

而

$$D|X-Y| = 1 - \frac{2}{\pi}$$

第十四次作业

一. 选择题：

1. 已知随机变量 X 与 Y 独立同分布，记 $U = X + Y$ ，$V = X - Y$ ，则 U 与 V 必（ D ）

   A. 独立　　B. 不独立　　C. 相关　　D.不相关

2. 设随机变量 ξ 与 η 的方差存在且不等于 0，则 $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$ 是 ξ 与 η（ C ）

   A. 独立的充要条件　　B. 独立的充分条件，但不是必要条件
   C. 不相关的充要条件　　D. 不相关的充分条件，但不是必要条件

3. 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$，则 （B ）

   A）$D(XY) = D(X)\cdot D(Y)$　　B）$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

   C）X 和 Y 独立　　D）X 和 Y 不独立

二. 填空题：

1. 已知 $D\xi = 4, D\eta = 9$，则当 $D(\xi-\eta) = 12$ 时，$\rho_{\xi\eta} =$ $\underline{\frac{1}{12}}$；当 $\rho_{\xi\eta} = 0.4$ 时，$D(\xi+\eta) =$ $\underline{17.8}$ 。

2. 设 $D(X) = 25, D(Y) = 36, \rho_{xy} = 0.4$ ，则 $D(X+Y) =$ $\underline{85}$。

3. 设二维随机变量 $(\xi,\eta) \sim N(1,\ 4;\ 1,\ 4;\ 0.5)$ ，$\zeta = \xi - \eta$ ，则 $\mathrm{cov}(\xi,\zeta) =$ $\underline{2}$.

三. 计算题

1. 已知随机变量 ξ、η 的概率分布分别为

ξ	-1	0	1
$P\{\xi = x_i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1
$P\{\eta = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{\xi\eta = 0\} = 1$。

(1)求ξ、η的联合概率分布；(2)问ξ、η是否独立？

(3)求$\zeta=\max(\xi,\eta)$的概率分布。

解： 由于$P(\xi\eta=0)=1$,可以得到$P(\xi=-1,\eta=1)=P(\xi=1,\eta=1)=0$,从而

$$P(\xi=0,\eta=1)=P(\eta=1)=\frac{1}{2},\quad P(\xi=-1,\eta=0)=P(\xi=-1)=\frac{1}{4},$$

$$P(\xi=1,\eta=0)=P(\xi=1)=\frac{1}{4},\quad P(\xi=0,\eta=0)=P(\xi=0)-P(\xi=0,\eta=1)=0,$$

汇总到联合分布列,即

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(2)由于$P(\xi=i,\eta=j)\neq P(\xi=i)\cdot P(\eta=j)$,故$\xi,\eta$不独立.

(3) $P(\zeta=0)=P(\xi=-1,\eta=0)+P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{4}$,

$$P(\zeta=1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=0)+P(\xi=1,\eta=1)=\frac{3}{4}$$

2．已知二维随机变量(ξ,η)的联合概率分布为

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

(1)求$\rho_{\xi\eta}$；(2) ξ与η是否独立？说明理由。

解： (1)边际分布

ξ	1	3
$P(\xi=i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

η	0	1	2	3
$P(\eta=j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

于是,

$E\xi=1\times\frac{3}{4}+3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$, $\quad E\eta=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$,

再由联合分布得 $E\xi\eta=1\times1\times\frac{3}{8}+1\times2\times\frac{3}{8}+3\times3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{4}$,

从而 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=0$, 故 $\rho_{\xi\eta}=0$

(2)由于 $P(\xi=1)\cdot P(\eta=0)=\frac{3}{32}$, 而 $P(\xi=1,\eta=0)=0$, 故 ξ,η 不独立.

3. 设二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x & 0<y<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 ξ 与 η 的相关系数。

解: 先分别求出

$E\xi\eta=\int_0^1dy\int_y^1 3x^2ydx=\frac{3}{10}$, $E\xi=\int_0^1dy\int_y^1 3x^2dx=\frac{3}{4}$, $E\eta=\int_0^1dy\int_y^1 3xydx=\frac{3}{8}$,

$E\xi^2=\int_0^1dy\int_y^1 3x^3dx=\frac{3}{5}$, $E\eta^2=\int_0^1dy\int_y^1 3xy^2dx=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{160}$, $D\xi=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{80}$, $D\eta=\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{19}{320}$,

故 $\rho_{\xi\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\cdot\sqrt{D(\eta)}}=\frac{3/160}{\sqrt{3/80}\cdot\sqrt{19/320}}=\frac{3}{\sqrt{57}}$.

4. 设两个随机变量 ξ,η , $E\xi=-2, E\eta=4, D\xi=4, D\eta=9, \rho_{\xi\eta}=-0.5$, 求

$E(3\xi^2-2\xi\eta+\eta^2-3)$。

解

$$
\begin{aligned}
&E(3\xi^2-2\xi\eta+\eta^2-3)\\
&=3E(\xi^2)-2E(\xi\eta)+E(\eta^2)-3\\
&=3\left(D\xi+(E\xi)^2\right)-2\left(\operatorname{cov}(\xi,\eta)+E\xi E\eta\right)+\left(D\eta+(E\eta)^2\right)-3\\
&=68
\end{aligned}
$$

5. 设二维随机变量(X,Y)的相关系数为ρ_{XY}，而$\xi=aX+b,\eta=cY+d$，其中a,b,c,d为常量，并且已知$ac>0$，试证$\rho_{\xi\eta}=\rho_{XY}$。

证明：$\rho_{\xi\eta}=\dfrac{\operatorname{cov}(aX+b,cY+d)}{\sqrt{D(aX+b)\cdot D(cY+d)}}=\dfrac{ac\operatorname{cov}(X,Y)}{ac\sqrt{DX\cdot DY}}=\rho_{XY}$