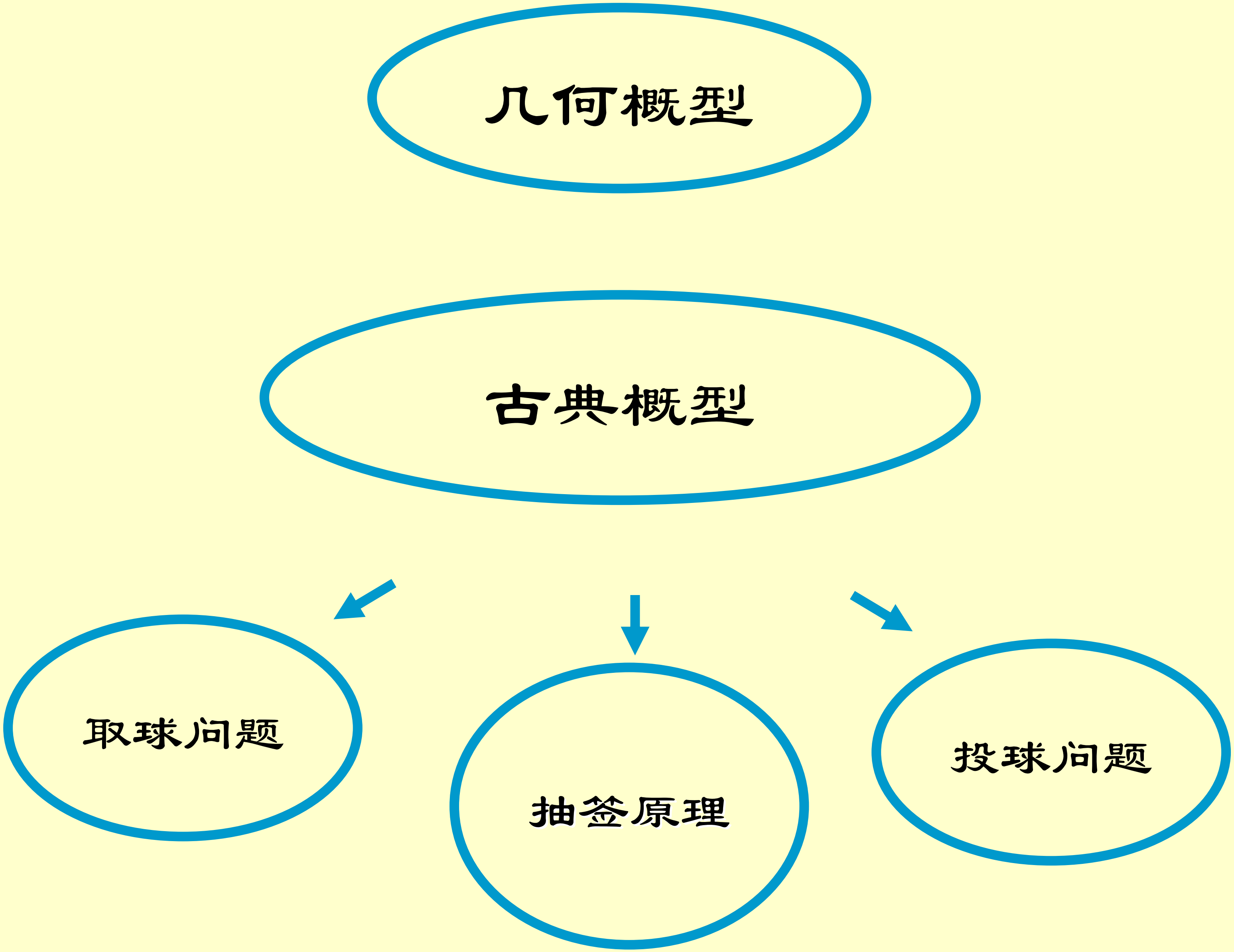

几何概型
古典概型
取球问题
抽签原理
投球问题

1.3 概率的定义及其性质

在一次试验中，事件发生的可能性究竟有多大?

复习

1.频率

定义： $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ $\begin{array}{l} --A\text{发生的频数} \\ --\text{总的试验次数} \end{array}$

频率表示事件A发生的频繁程度。

历史上曾有人做过试验,试图证明抛掷匀质硬币时，出现正反面的机会均等。

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

基本性质：

1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

2) $f_n(\Omega) = 1, f_n(\varnothing) = 0$;

3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两不相容事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + \cdots + f_n(A_k)$$

可用Excel进行抛掷均匀硬币的实验：

RANDBETWEEN(-1000,1000)产生随机数，按所得数的正负，分别计算频率，观察频率的稳定性。

概率是频率的稳定值。

2.概率的统计定义

在不变条件下重复做n次试验，记m为n次试验中事件A发生的次数。当试验次数n很大时，如果频率m/n稳定在某一数值p的附近摆动，而且一般说来，随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈来愈小，此时数值p称为随机事件A发生的概率，记作$P(A)=p$。

3．概率的公理化定义：

随机试验的样本空间Ω对于随机事件A，赋于一实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

1)对于任一事件A，有$P(A)\geq 0$。

2) $P(\Omega)=1$

3)设$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件，即对于$i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i, j=1,2,\cdots$则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

在定义中涉及问题：可列无穷个随机事件的并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 到底是否仍是随机事件？

设 Ω 为一样本空间，$\mathcal{F}$ 为 Ω 某些子集所组成的集合类，如果 $\mathcal{F}$ 满足：

（1）$\Omega \in \mathcal{F}$；

（2）若 $A \in \mathcal{F}$，则对立事件 $\overline{A} \in \mathcal{F}$；

（3）若 $A_n \in \mathcal{F}$，$n = 1, 2, \cdots$，则可列并 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 为一个由事件所组成的“事件域”或“σ 一代数” $(\Omega, \mathcal{F})$ 称为可测空间。“概率空间” $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

概率的性质：

1) $P(\varnothing)=0$

证明:设 $A_n=\varnothing, n=1,2,\cdots,$ ，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing,$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots=P(\varnothing),$$

$$\because \quad P(\varnothing)\geq 0$$

$$\therefore \quad P(\varnothing)=0$$

2) $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

证明:设 $A_i = \varnothing, i = n+1, n+2, \cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup \varnothing \cup \cdots \cup \varnothing \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{n} A_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

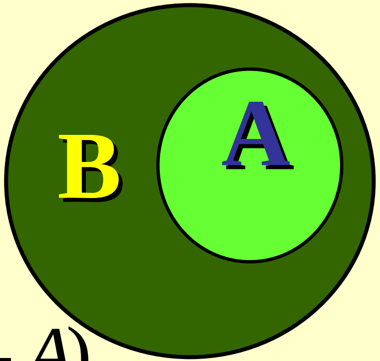
$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + \cdots$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

$$\therefore P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

3) 设$A \subset B$，则$P(B-A)=P(B)-P(A)$且

$P(B) \geq P(A)$。



证明: $\because B = A \cup (B-A)$, 且$A(B-A)=\varnothing$

由性质 2)：

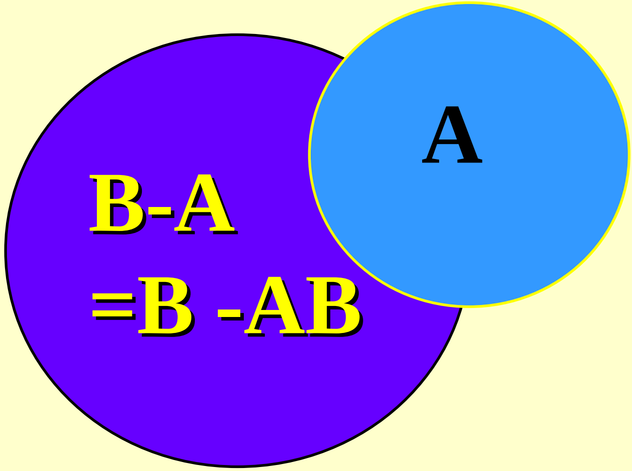
$$P(B)=P(A\cup(B-A))=P(A)+P(B-A)$$

$$\therefore P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$\because P(B-A)\geq 0$$

$$\therefore P(B)-P(A)\geq 0$$

即 $P(B)\geq P(A)$



推论: $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

证明: $\because B-A=B-AB$

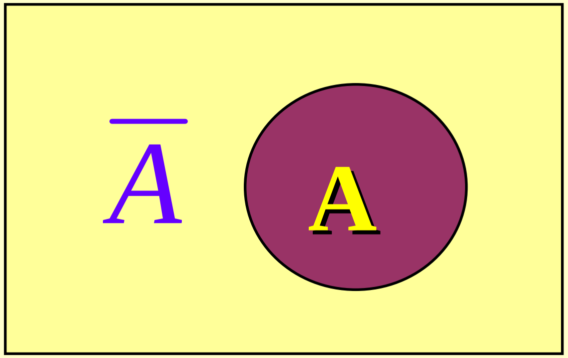
$$AB \subset B$$

$$\therefore P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

4) $P(A) \leq 1$

证明： $\because A \subset \Omega, \quad P(\Omega) = 1$

$\therefore P(A) \leq P(\Omega) = 1$



5) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

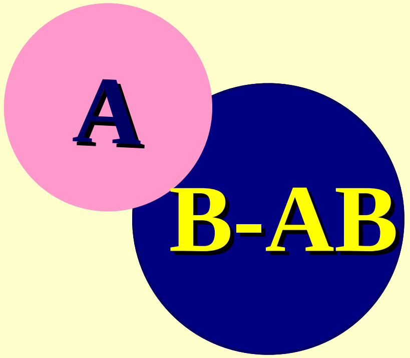
证明: $\because A \cup \overline{A} = \Omega, A\overline{A} = \varnothing$

$\therefore P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$\therefore P(A) = 1 - P(\overline{A})$

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

证明：$P(A \cup B)$



$$= P(A \cup (B - AB))$$

$$= P(A) + P(B - AB)$$

$$= P(A) + P(B) - P(AB)$$

推广： **1)** $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$$- P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_3)$$

$$+ P(A_1 A_2 A_3)$$

2) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i, j \le n} P(A_i A_j) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

例 1.设 A 与 B 为两个随机事件，$P(A) = \mathbf{0.4}$，

$P(A \cup B) = \mathbf{0.7}$，当 A、B 互不相容时，求 $P(B)$。

解：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\because A$，B 互不相容

$\therefore P(AB) = P(\varnothing) = 0$

又 $P(A) = \mathbf{0.4}$，$P(A \cup B) = \mathbf{0.7}$

$$\therefore P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(AB)$$

$$= 0.7 - 0.4 + 0$$

$$= 0.3$$

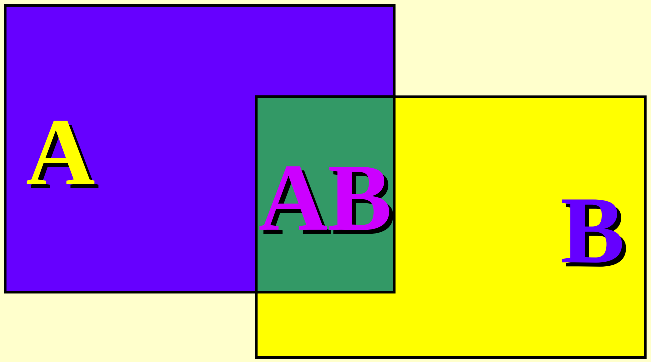
例 2.设 A， B 为随机事件，已知 $P(A) = \mathbf{0.7}$，$P(B) = \mathbf{0.5}$， $P(A-B) = \mathbf{0.3}$, 求 $P(AB)$ 和 $P(B-A)$.

解： $AB \subset A$, $\quad A - B = A - AB$

则 $P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$

$$\therefore P(AB) = P(A) - P(A-B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$$

$$P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.4 = 0.1$$



例3. 在1~2000的整数中随机地取一个数，问取到的整数既不能被6，又不能被8整除的概率是多少？

解： 设 A 表示取到的整数能被 6 整除，
B 表示取到的整数能被 8 整除，则
AB 表示取到的整数既能被 6 整除，又能被 8 整除;
$\overline{A}\overline{B}$ 表示取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除.

$$\because \frac{2000}{6}=333\frac{2}{6}, \quad \frac{2000}{8}=250, \quad \frac{2000}{24}=83\frac{8}{24},$$

$$\therefore P(A)=\frac{333}{2000}, \quad P(B)=\frac{250}{2000}, \quad P(AB)=\frac{83}{2000},$$

$$\therefore P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$$

$$=1-(\frac{333}{2000}+\frac{250}{2000}-\frac{83}{2000})=\frac{1500}{2000}=0.75$$

即所求概率为 **0.75** 。

1.4 条件概率

复习 返回

1.定义

条件概率——考虑 A 已发生的条件下，B 发生的概率。

例 1.一枚硬币抛两次，观察其正反面出现的次数。

解：样本空间 Ω ={正正，正反，反正，反反}

事件 A 表示至少有一次为正面，

事件 B 表示两次都是同一面，则

A={正正，正反，反正}，B={正正，反反}

现在，求已知 A 发生的条件下，B 发生的概率。

注意：A 发生，样本空间 Ω 缩小为

Ω'={正正，正反，反正} $= A$

其中，只有一个"正正" $\in B$，

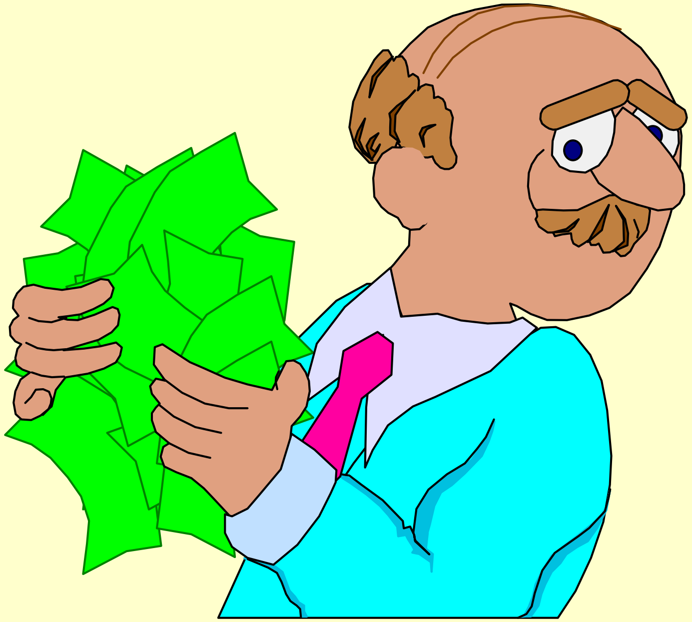
$$\therefore\ P(B|A) = \frac{1}{3}$$

5分　国徽

$$\because P(A)=\frac{3}{4}, \qquad P(AB)=\frac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$



?

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 恒成立吗？

古典概型的情形

设试验的基本事件总数（即样本空间的容量）为 n，

事件 A 所包含的基本事件数为 $m(m>0)$，

事件 AB 所包含的基本事件数为 k，

则
$$P(B\mid A)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义： 设 A、B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率。

$P(\cdot|A)$符合概率定义中的三个条件：

1)对每一个事件 B， $P(B|A)\geq 0$

2) $P(\Omega|A)=1$

3)设 $B_1,B_2,\cdots,B_n\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$$

$P(\cdot|A)$具有概率的重要结果：

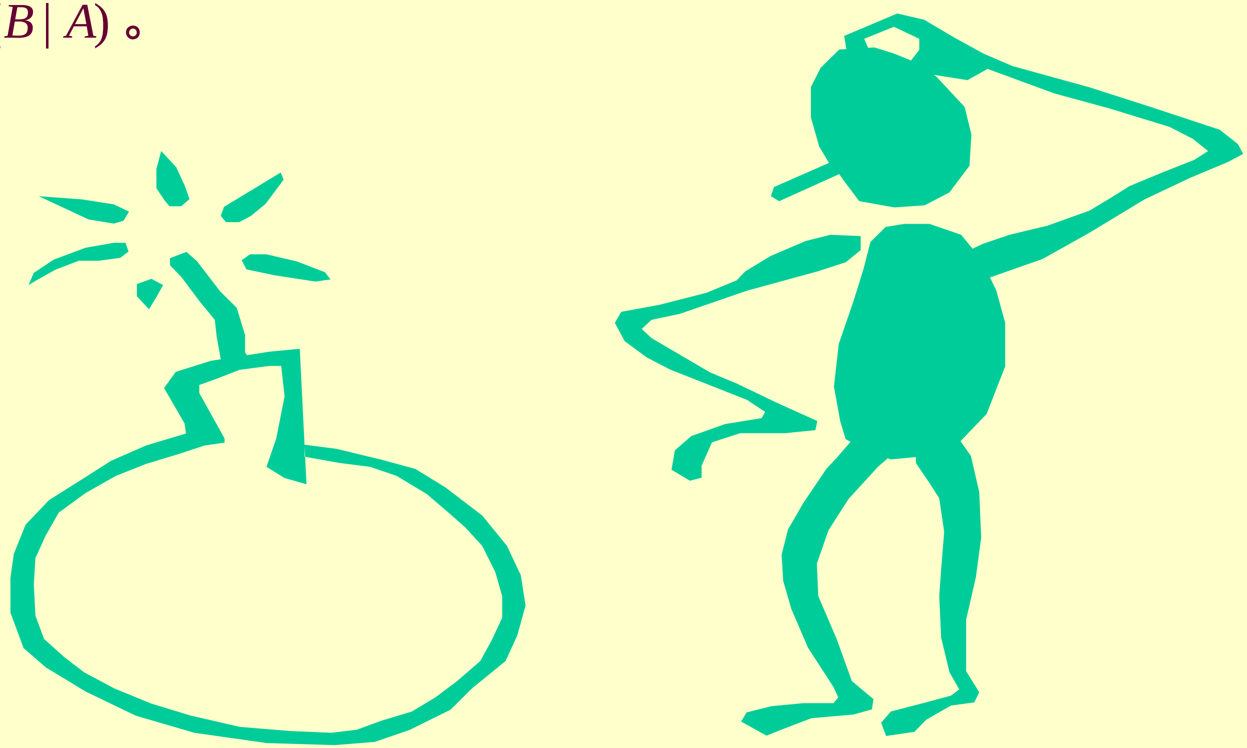
1) 如 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\mid A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i\mid A)$$

2)若 B_1,B_2 是对立事件，则 $P(B_2|A)=1-P(B_1|A)$

3) $\forall B_1,B_2$， $P(B_1\cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$

例 2：一盒装有 **5** 只产品，其中有 **3** 只是一等品，**2** 只二等品，从中取产品两次，每次任取一只，作不放回抽样，设事件 A 为“第一次取到的是一等品”，事件 B 为“第二次取到的是一等品”。试求条件概率 $P(B|A)$。



解：方法一：条件概率的定义。

$$P(A)=\frac{3}{5},\quad P(AB)=\frac{C_3^1C_2^1}{A_5^2}=\frac{6}{20}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/20}{3/5}=\frac{1}{2}$$

方法二:给产品编号，**1,2,3** 为一等品，**4,5** 为二等品，

则 $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$。

在 A 已经发生的条件下，第二次只能从剩余的 **2** 只一等品、**2** 只二等品中抽取，

所以，这时抽到一等品的概率为

$$P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

2.乘法定理： $P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)$

注意：条件 $P(A)>0$

推广：

1) $P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)\cdot P(A)$

注意：条件 $P(AB)>0$

2) $P(A_1A_2\cdots A_n) \quad =P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

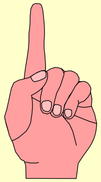
$\cdot P(A_{n-1}|A_1\cdots A_{n-2})\cdots\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$

注意：条件 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

例 3.一批零件共 100 个，次品率 10%，每次从其中任取一个，取出的不再放回，求第三次才取得合格品的概率。

解: 设 A_i 表示第 i 次取得合格品

则 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})P(A_3 \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$



$$= \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} = 0.0083$$

即：第三次才取得合格品的概率为 **0.0083.**

例 **4**．眼镜落地，第一次落下打破的概率为 **1/2**；第一次未打破，第二次落下被打破的概率为 **7/10**；若前二次未打破，第三次落下打破的概率为 **9/10**，试求：眼镜在三次落下内打破的概率。

解：设 A_i 表示眼镜第 i 次落下打破，B 表示眼镜落下三次内打破，则 $B = A_1 + A_2\overline{A_1} + A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2}$

方法一：直接计算。

$$P(B) = P(A_1) + P(A_2\overline{A_1}) + P(A_3\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$= P(A_1) + P(A_2|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) + P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{197}{200} = 0.985$$

方法二：先算对立事件的概率。

$$\overline{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$$

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1}) = \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{200}$$

$$\therefore P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{200} = \frac{197}{200} = 0.985$$

即：眼镜在三次落下 内打破的概率为**0.985**。

$P(AB)$与$P(B \mid A)$的区别:

1.$\boldsymbol{P(AB)}$**的样本空间是**$\boldsymbol{\Omega}$

$\boldsymbol{P(B \mid A)}$**的样本空间是**$\boldsymbol{\Omega_A}$

2. $P(AB):$事件A, B同时发生

$P(B \mid A): A, B$之间有"包含"或"主从","先后"

条件关系.

概率的公理化定义：

(1)定义：随机试验的样本空间Ω对于随机事件A，赋于一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率，如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

1)对于任一事件A，有$P(A)\geq 0$。

2) $P(\Omega)=1$

3)设$A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件，即对于$i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

(2)性质:

1) $P(\varnothing)=0$

2) $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

3)设 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 且

$P(B) \geq P(A)$。

推论: $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

4) $P(A) \leq 1$

5) $P(A)=1-P(\bar{A})$

6) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推广： 1) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$$- P(A_1 A_2) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_3)$$

$$+ P(A_1 A_2 A_3)$$

2) $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i, j \le n} P(A_i A_j) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

返回

条件概率

设A、B为两事件，且$P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下，事件B发生的概率。

$P(\cdot|A)$符合概率定义中的三个条件：

1)对每一个事件B，$P(B|A)\geq 0$

2) $P(\Omega|A)=1$

3)设$B_1,B_2,\cdots,B_n\cdots$是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$$

$P(\cdot|A)$具有概率的重要性质。

乘法定理 $P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)$

注意：条件 $P(A) > 0$

推广：

1) $P(ABC) = P(C|AB)P(B|A) \cdot P(A)$

注意：条件 $P(AB) > 0$

2) $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1})$

$\cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdots A_{n-2}) \cdots \cdots P(A_2 | A_1) P(A_1)$

注意：条件 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$

$P(AB)$与$P(B|A)$的区别

1. $\boldsymbol{P(AB)}$**的样本空间是**$\boldsymbol{\Omega}$

   $\boldsymbol{P(B|A)}$**的样本空间是**$\boldsymbol{\Omega_A}$

2. $P(AB)$:事件A, B同时发生

   $P(B|A)$:A, B之间有"包含"或"主从","先后"条件关系

作业 P30 16 ,17,19 20,21,23,25

课 堂 练 习

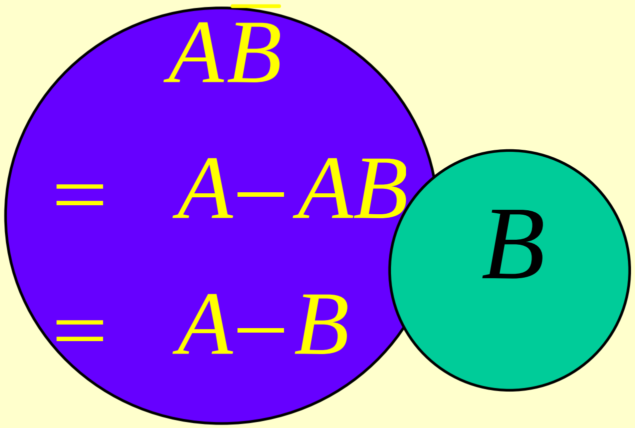
1.已知 **P(**A**)= 0.4， P(**B**)= 0.3, P(**$A\cup B$**)= 0.6，** 求 **P(**$A\bar{B}$**)**。

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=0.4+0.3-0.6=0.1$$

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)$$

$$=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$$



2.已知事件 A 和 B 满足条件 **P(**AB**)=P(**$\bar{A}\bar{B}$**)，** 且 **P(**A**)=**p**，** 求 **P(**B**)**。

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB)$$

$$\therefore 1-P(A)-P(B)=0 \quad \therefore\ P(B)=1-P(A)=1-p$$

返回