

华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第三册）

学 院 _____ 专 业 _____ 班 级 _____
学 号 _____ 姓 名 _____ 任课教师 _____

第五次作业

一. 填空题:

1. 某班级 12 名女生毕业后第一年的平均月薪分别为

1800 2000 3300 1850 1500 2900
4100 3000 5000 2300 3000 2500

则样本均值为 2770.8 , 样本中位数为 2700 , 众数为 3000 , 极差为 3500 ,

样本方差为 1039299

2. 设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$, 则 $P\{\xi \geq a\} = \underline{1 - F(a-0)}$,

$P\{\xi = a\} = \underline{F(a) - F(a-0)}$

3. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

则常数 $A = \underline{1}$, $P\{0.5 \leq \xi \leq 0.8\} = \underline{0.39}$

二. 选择题:

1. 描述样本数据“中心”的统计量有 (A,B,C), 描述样本数据“离散程度”的统计量有 (D,E)

A. 样本均值 B. 中位数 C. 众数 D. 极差 E. 样本方差

2. 下列表述为错误的有 (C)

A. 分布函数一定是有界函数 B. 分布函数一定是单调函数

C. 分布函数一定是连续函数 D. 不同的随机变量也可能有相同的分布函数

3. 设概率 $P(X > x_1) \geq \beta$, $P(X \leq x_2) \geq \alpha$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $P(x_1 < X \leq x_2)$ (C)

(A) $\leq \alpha + \beta - 1$;

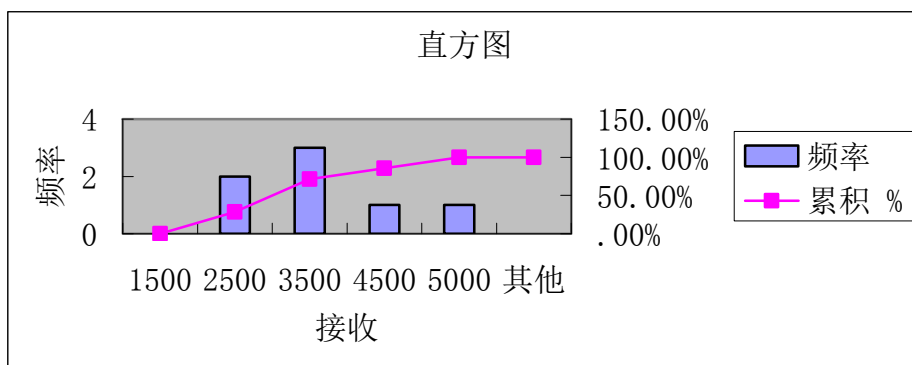
(B) $\leq 1 - (\alpha + \beta)$;

(C) $\geq \alpha + \beta - 1$;

(D) $\geq 1 - (\alpha + \beta)$ 。

三. 计算题:

1. 利用 EXCEL 的数据分析工具验算填空题 1. 的计算结果, 并把样本数据分为四组画出频率直方图 (本题可选做)



2. 设随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{2}, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

试求 $P(\xi < 3)$, $P(\xi \leq 3)$, $P(\xi > 1)$, $P(\xi \geq 1)$

解: 由公式 $P(\xi = x) = F(x) - F(x-0)$, 得

$$P(\xi < 3) = F(3-0) = \frac{1}{3},$$

$$P(\xi \leq 3) = F(3) = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$P(\xi \geq 1) = 1 - F(1-0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3. 已知随机变量 ξ 只能取 -2, 0, 2, 4 四个值, 概率依次为 $\frac{c}{2}, \frac{c}{3}, \frac{c}{4}, \frac{c}{6}$, 求常数 c ,

并计算 $P(\xi < 1 | \xi > -1)$

解: 利用规范性, 有 $\frac{c}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{4} + \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow c = \frac{4}{5}$.

因此 $P(\xi = -2) = \frac{2}{5}, P(\xi = 0) = \frac{4}{15}, P(\xi = 2) = \frac{1}{5}, P(\xi = 4) = \frac{2}{15},$

$$P(\xi < 1 | \xi > -1) = \frac{P\{(\xi > -1) \cap (\xi < 1)\}}{P(\xi > -1)} = \frac{P(\xi = 0)}{P(\xi = 0) + P(\xi = 2) + P(\xi = 4)} = \frac{4}{9}.$$

4. 一批产品，其中有 9 件正品，3 件次品。现逐一取出使用，直到取出正品为止，求在取到正品以前已取出次品数的分布律、分布函数。

解：分布律：

X	0	1	2	3
p_k	3/4	9/44	9/220	1/220

$$\text{分布函数: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3/4, & 0 \leq x < 1 \\ 21/22, & 1 \leq x < 2 \\ 219/220, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}.$$

5. 设连续随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 (1) 常数 a ;

(2) X 的分布函数;

(3) $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$.

$$(1) \text{ 由 } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^1 axdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1 \text{ 得 } a = 1.$$

$$(2) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt = 0;$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 1 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x tdt = 0.5x^2;$$

$$\text{当 } 1 \leq x < 2 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = 2x - 0.5x^2 - 1;$$

$$\text{当 } x \geq 2 \text{ 时, } F(x) = 1.$$

所以 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.5x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 2x - 0.5x^2 - 1, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(3) P(0.5 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(0.5) = 0.75$$

第六次作业

一. 填空题:

1. 若随机变量 $\xi \sim U[1, 6]$, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率为 0.8

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则 $A = \underline{3}$

3. 设离散型随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -10 \\ 0.7 & -10 \leq x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

则 ξ 的分布律为 $P(\xi = -10) = 0.7, P(\xi = 0) = 0.3$

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$\text{则分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{3/2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

二. 选择题:

1. 在下列函数中, 可以作为随机变量的概率密度函数的是 (A)

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{B. } f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{C. } f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{D. } f(x) = \begin{cases} 2e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

2. 下列表述中不正确有 (A, D)

A. $F(x)$ 为离散型随机变量的分布函数的充要条件是 $F(x)$ 为阶梯型函数

B. 连续型随机变量的分布函数一定是连续函数

C. 连续型随机变量取任一单点值的概率为零

D. 密度函数就是分布函数的导数

3. 设随机变量 x 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} K(4x - 2x^2), & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad \text{则 } K = (\text{ D }).$$

A. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

三. 计算题

1. (柯西分布) 设连续随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x) = A + B \arctan x \quad -\infty < x < +\infty$$

求: (1) 系数 A 及 B ;

(2) 随机变量 ξ 落在区间 $(-1, 1)$ 内的概率;

(3) 随机变量 ξ 的概率密度。

解: (1) 按照分布函数的定义, 有

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} A + B \arctan x = A - \frac{\pi}{2} B = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A + B \arctan x = A + \frac{\pi}{2} B = 1,$$

$$\text{得 } A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}.$$

$$(2) P(-1 < \xi < 1) = P(-1 < \xi \leq 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{2}.$$

$$(3) p(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \right)' = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, -\infty < x < +\infty$$

2. 学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量, 单位为小时, 它的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} cx^2 + x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 c ;

(2) 写出 X 的分布函数;

(3) 试求在 20 min 内完成一道作业的概率;

(4) 试求 10 min 以上完成一道作业的概率。

解:

(1) 利用规范性, 有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_0^{0.5} (cx^2 + x)dx = \frac{c}{24} + \frac{1}{8} \Rightarrow c = 24.$$

$$(2) \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0,$$

$$\text{当 } 0 \leq x < 0.5 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt = \int_0^x (24t^2 + t)dt = 8x^3 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\text{当 } x \geq 0.5 \text{ 时, } F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt = \int_0^{0.5} (24t^2 + t)dt = 1,$$

综上所述,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 8x^3 + \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 0.5, \\ 1, & x \geq 0.5. \end{cases}$$

$$(3) P\left(0 < \xi \leq \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \frac{17}{54}.$$

$$(4) P\left(\xi > \frac{1}{6}\right) = 1 - F\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{103}{108} \quad (\text{or } \int_{1/6}^{1/2} (24x^2 + x)dx = \frac{103}{108})$$

3. 袋内有 5 个黑球 3 个白球,每次抽取一个不放回,直到取得黑球为至。记 Y 为抽取次数,求 Y 的概率分布及至少抽取 3 次的概率。

解: (1) Y 的可能取值为 1, 2, 3, 4

$$P(Y=1)=5/8,$$

$$P(Y=2)=3/8 \times 5/7=15/56,$$

$$P(Y=3)=3/8 \times 2/7 \times 5/6=5/56,$$

$$P(Y=4)=3/8 \times 2/7 \times 1/6=1/56.$$

所以 Y 的概率分布为

Y	1	2	3	4
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$(2) P(Y \geq 3) = P(Y=3) + P(Y=4) = 6/56 = 3/28$$

4. 某种灯具的寿命 ξ 具有概率密度:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

任取三只这种灯具, 问 150 小时内, 三只灯具全部完好的概率是多少? 又问 150 小时内, 至少有两只损坏的概率又是多少?

解: 设 p 表示 150 小时内, 一只灯具完好的概率, η 表示损坏灯具的个数,

$$p = P\{\xi < 150\} = \int_{10}^{150} \frac{10}{x^2} dx = -\frac{10}{x} \Big|_{10}^{150} = \frac{14}{15}$$

$$P\{\eta = 0\} = \left(\frac{1}{15}\right)^3 \approx 0.0003$$

$$P\{\eta \geq 2\} = C_3^2 \left(\frac{14}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{15} + \left(\frac{14}{15}\right)^3 \approx 0.987$$

5. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$, $-\infty < x < +\infty$ 。

求系数 a 和分布函数 $F(x)$ 。

解：由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-\lambda|x|}dx = 2 \int_0^{+\infty} ae^{-\lambda x}dx = \frac{2a}{\lambda}$ 可得 $a = \frac{\lambda}{2}$ 。

故 $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$, $-\infty < x < +\infty$ 。

由于 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$,

当 $x < 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$;

当 $x \geq 0$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_0^x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$ 。

所以,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$