方差的定义

方差性质

切比雪夫不等式

常用的
离散型随机变量

0-1分布

③二项分布（贝努里概型）$B(n,p)$

a. X 的可能取值为：$0,1,2,\cdots,n$

b.分布律为：$P(X=m)=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, p+q=1,$

$$m=1,2,\cdots,n$$

其中，$\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=(p+q)^n=1$

c.如果随机变量 X 具有以上的分布律，则称 X 服从二项分布，记 $X\sim B(n,p)$ 。

d.期望 $\boldsymbol{EX=np}$ ，

方差 $\boldsymbol{DX=npq}$

证明：$E(X)=np$。

证 $$EX=\sum_{m=0}^{n} m\cdot C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\sum_{m=0}^{n} m\cdot\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}\cdot p^m(1-p)^{n-m}$$

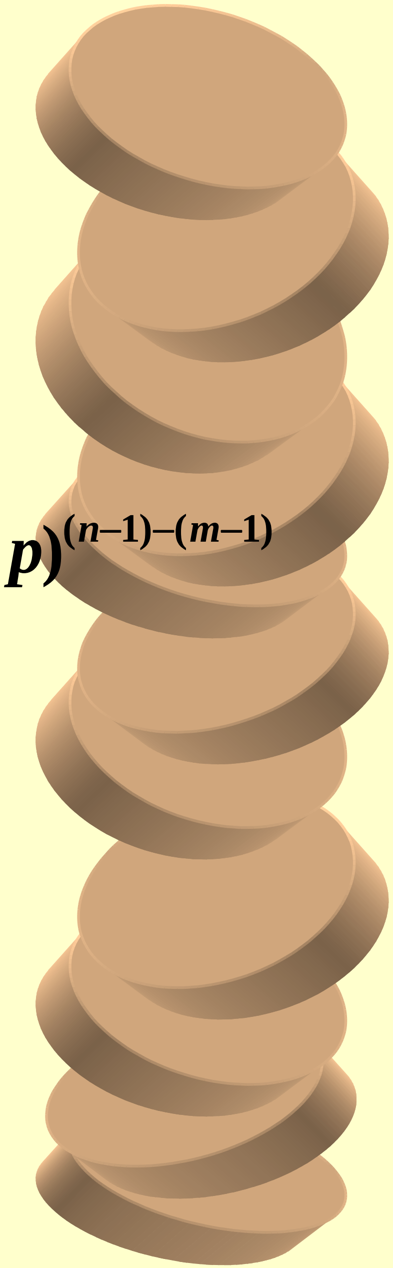
$$=n\cdot p\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(m-1)![(n-1)-(m-1)]!}p^{m-1}(1-p)^{(n-1)-(m-1)}$$

$$=np\cdot\sum_{m-1=0}^{n-1} C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{(n-1)-(m-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}=np$$

类似地可得：$EX^2=n(n-1)p^2+np$，

于是方差 $DX=EX^2-(EX)^2=npq$



例2. 从某大学到火车站途中有6个交通岗, 假设在各个交通岗是否遇到红灯相互独立, 并且遇到红灯的概率都是1/3.

(1) 设X为汽车行驶途中遇到的红灯数, 求X的分布律.

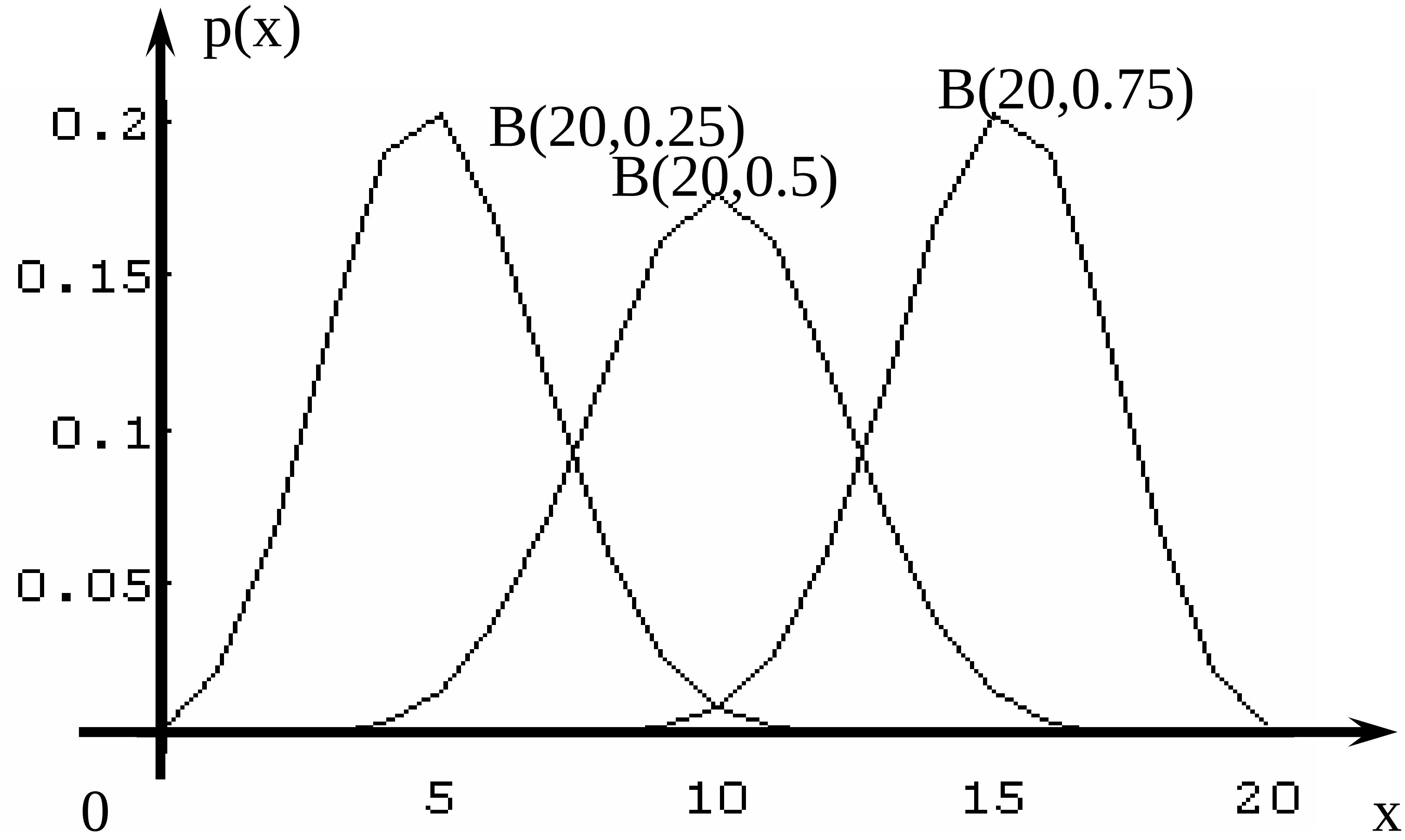
(2) 求汽车行驶途中至少遇到5次红灯的概率.

解:(1) 由题意,X~B(6,1/3), 于是,X的分布律为:

$$P\{X=k\}=C_6^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{6-k}\qquad k=0,1,\ldots,6$$

(2) $$P\{X\geq 5\}=P\{X=5\}+P\{X=6\}$$

$$=C_6^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{13}{729}$$


p(x)
B(20,0.25)
B(20,0.5)
B(20,0.75)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
5
10
15
20
x

例 3. 已知随机变量 $X \sim B(n,p)$，问：当 m 为何值时，$P(X=m)$ 最大？

解：分析：找一个 m，使 $P(X=m-1) \le P(X=m)$，且 $P(X=m+1) \le P(X=m)$。

$$\frac{P(X=m)}{P(X=m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{n-m+1}{m} \cdot \frac{p}{q} = 1 + \frac{(n+1)p-m}{m(1-p)}$$

当 $(n+1)p-m>0$，即 $m<(n+1)p$ 时，$P(X=m-1)<P(X=m)$

当 $(n+1)p-m<0$，即 $m>(n+1)p$ 时，$P(X=m-1)>P(X=m)$

1) 当 $(n+1)p$ 是整数时，取 $m_0=(n+1)p$，

这时，$\dfrac{P(X=m_0)}{P(X=m_0-1)}=1$，

则 $P(X=m_0-1)=P(X=m_0)$ 都是最大值。

2) 当 $(n+1)p$ 不是整数时，取 $m_0=[(n+1)p]<(n+1)p$，

这时有 $P(X=m_0-1)<P(X=m_0)$，而 $m_0+1>(n+1)p$，

所以，$P(X=m_0+1)<P(X=m_0)$。

最后得：$P(X=m_0)$ 是最大值。

例 **4.** 某车间有 **200** 台独立工作的车床，各台车床开工的概率都是 **0.6**，开工时每台车床耗电 **1** kw，问供电所至少要供给此车间多少电力（kw），才能以 **99.9%** 的概率保证车间不会因供电不足而影响生产。

解：设 ξ 为实际开工的车床数，则 $\xi \sim B(n, p)$，其中 $n = 200$， $p = 0.6$。令 x（kw）为供电局的供电数，则问题要求的是使下面不等式成立的最小的整数 x：

$$P\{0 \le \xi \le x\} \ge 0.999$$

可用Excel里的统计函数BINOMDIST来计算

BINOMDIST(number_s, trials, probability_s, cumulative)

Number_s　　为试验成功的次数。

Trials　　为独立试验的总次数。

Probability_s　　为每次试验中成功的概率。

Cumulative= true　　至多 **number_s** 次成功的概率

(即 1 － **number_s** 的累积概率)

= false　　**number_s** 次成功的概率（单次概率）

$BINOMDIST\,(140, 200, 0.6, TRUE) = 0.998687 < 0.999$，

而 $BINOMDIST\,(141, 200, 0.6, TRUE) > 0.999$，

故解 $x = 141$ （kw）。

二项分布常用公式：

事件A发生的次数不到k次的概率：

$$P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(k-1)$$

事件A发生的次数多于k次的概率：

$$P_n(k+1)+P_n(k+2)+\cdots+P_n(n)$$

事件A发生的次数不少于k次的概率：

$$P_n(k)+P_n(k+1)+\cdots+P_n(n)$$

事件A发生的次数不多于k次的概率：

$$P_n(0)+P_n(1)+\cdots+P_n(k)$$

④泊松分布(Poisson) $P(\lambda)$

a. X 的可能取值为： $0,1,2,\cdots$

b. X 的分布律为：

$$P(X=m)=P_\lambda(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\qquad \lambda>0$$

c.记为 $X \sim P(\lambda)$，λ 是参数。

其中，$\sum_{m=0}^{\infty} P(X=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$

$$=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

d.期望 $EX=\lambda$，

方差 $DX=\lambda$

证明$E(X)=\lambda$。

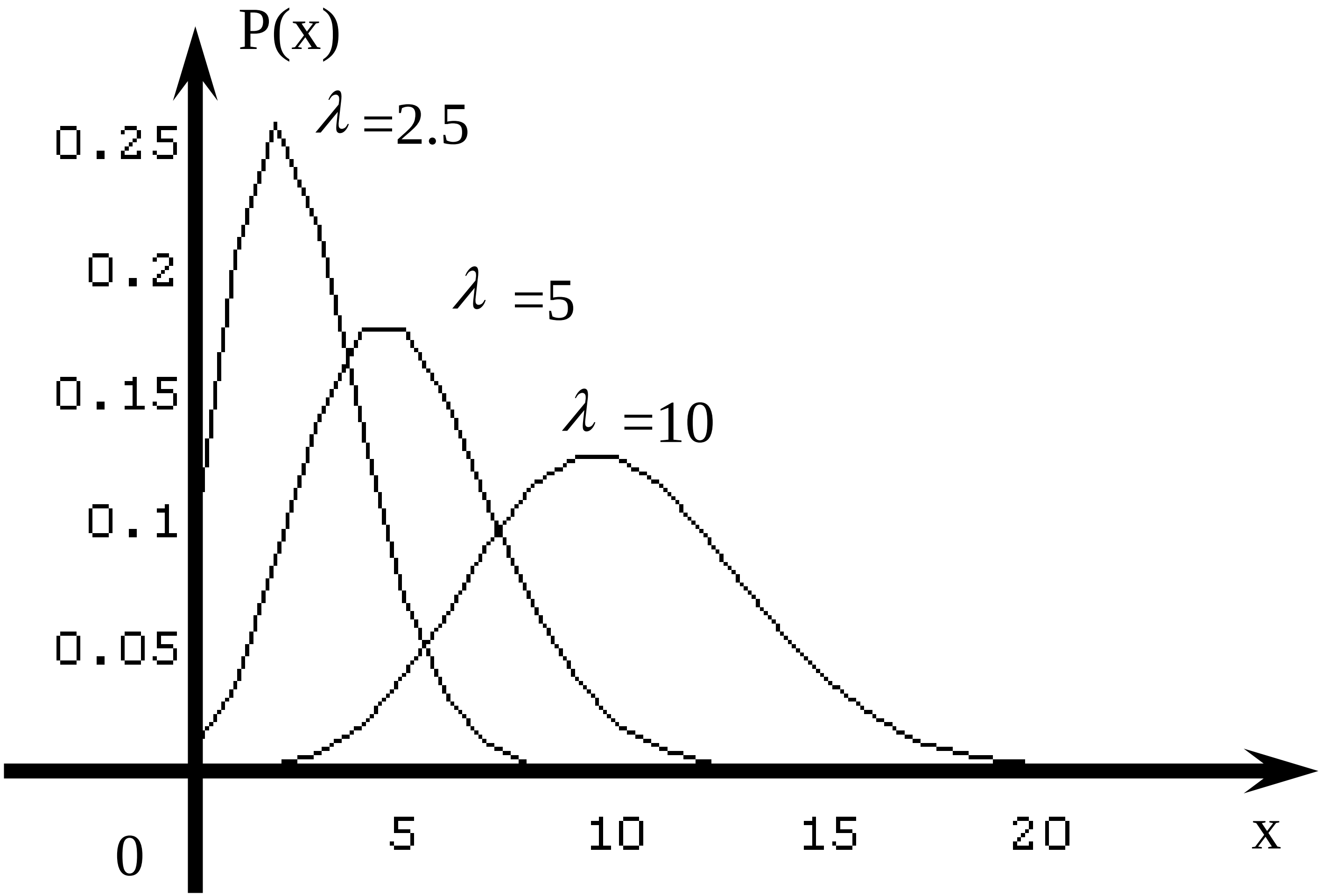
[证] $$E(X)=\sum_{m=0}^{+\infty} m\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}=\sum_{m=1}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m-1=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

类似地可得：$EX^2=\lambda^2+\lambda$，

于是方差$DX=EX^2-(EX)^2=\lambda$



注意：泊松分布是非对称的，但是，λ 越大，非对称性越不明显。

应用：用于稠密性问题中.

例如：

- 某一段时间内电话用户对电话站的呼唤次数
- 某一段时间内候车的旅客数
- 某一段时间内原子放射粒子个数

例1. 设每对夫妇的子女数X服从参数为λ的泊松分布，且知一对夫妇有不超过1个孩子的概率为$3e^{-2}$. 求任选一对夫妇，至少有3个孩子的概率。

解:由题意，

$$\because X \sim p(\lambda), \text{且} P\left(X \le 1\right) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 3e^{-2}$$

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 3e^{-2} \Rightarrow \lambda = 2$$

$$P\{X \ge 3\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 1 - 5e^{-2} \approx 0.323$$

例 2. 由销售记录知道，某种商品每月销售数可用 $\lambda=10$ 的泊松分布描述，（统计中将会介绍如何利用销售记录确定分布类型）为了以 **95%** 以上的概率保证不脱销，问商品在月底至少应该进该种商品多少件？（假设上月没有存货）

解：设月底进货 x 件，每月销售量为 ξ 件，由题意要

求最小整数 x，使 $P(\xi \le x)=\sum_{k=0}^{x}\frac{10^k}{k!}e^{-10}\ge 0.95$，

查表得 $\sum_{k=0}^{14}\frac{10^k}{k!}e^{-10}\approx 0.9166<0.95$ 以及 $\sum_{k=0}^{15}\frac{10^k}{k!}e^{-10}\approx 0.9513>0.95$，

故求得最少进货 $x=15$ 件。

可用Excel里的统计函数Poisson来计算

POISSON(x, mean, cumulative)

x	事件数
mean	参数
cumulative=true	累积概率
=false	单次概率

$$POISSON(14, 10, TRUE) < 0.95,$$

而 $POISSON(15,10, TRUE) > 0.95$,

故解 $x = 15$ （件）。

⑤超几何分布 $H(n, M, N)$

a. 实际背景：一批产品共有 N 个，其中有 M 个次品。现从这批产品中任取 n 个，求取出的 n 个产品中有 m 个次品的概率。

设随机变量 X 表示 n 个产品中的次品数，则

b. X 的取值范围：$0,1,2,\cdots,\min(n, M)$

c. X 的分布律：

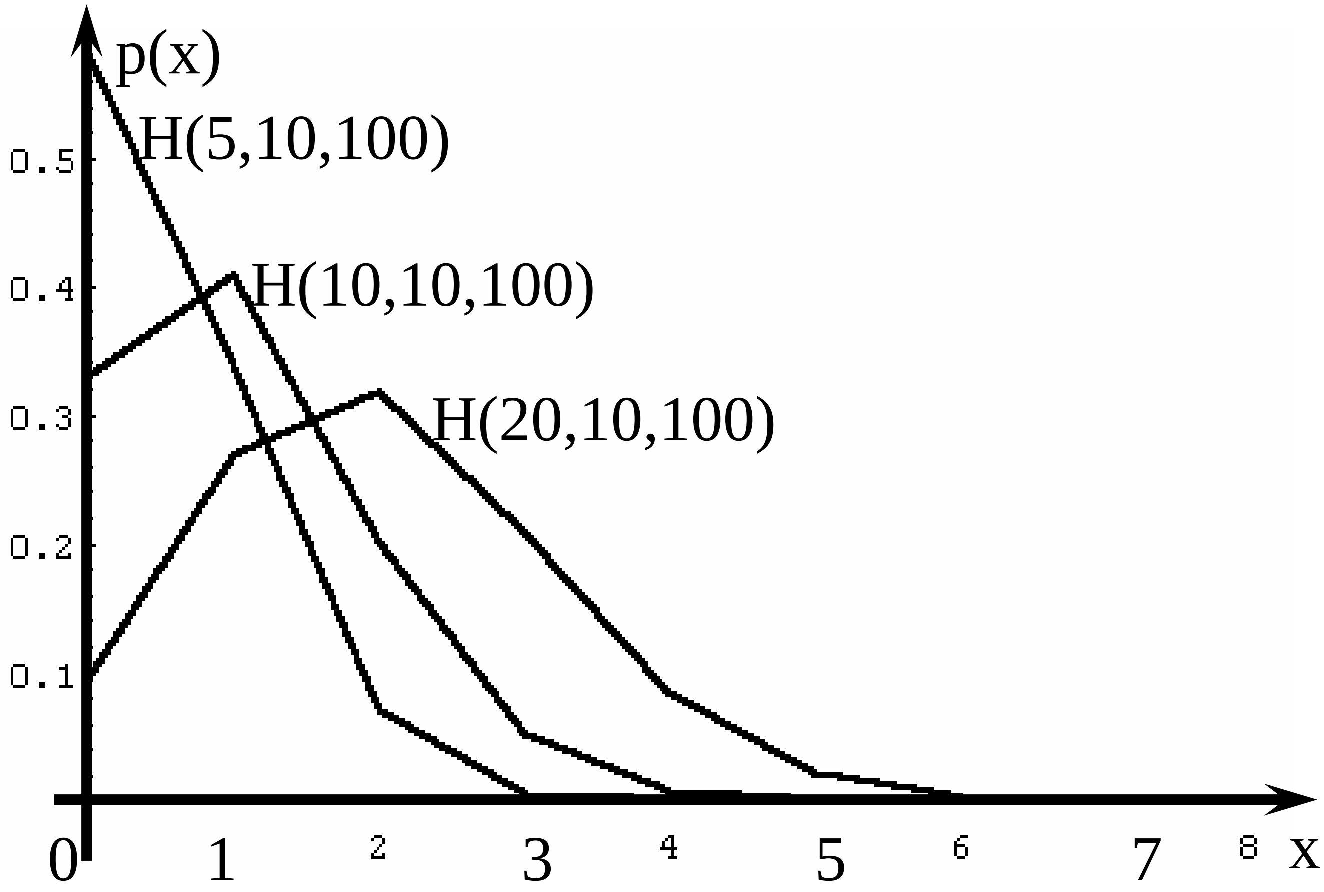
$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

$$m=0,1,2,\cdots,\min(n,M).$$

其中， $\sum_{m=0}^{\min(n,M)} P(X=m)=1$

d. 期望 $EX=\frac{nM}{N}$， 方差 $DX=\frac{nM}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

e.定义：如果随机变量 X 具有以上的分布律，则称记 X 服从超几何分布，记 $X \sim H(n, M, N)$。



⑥几何分布(Geometrical Distribution)$Ge(p)$

a. X 的可能取值为：$1,2,\cdots$

b. X 的分布律为：

$$P(X=m)=(1-p)^{m-1}p, \qquad p>0$$

c.记为 $X \sim Ge(p)$， p 是参数。

其中，$\sum_{m=1}^{\infty} P(X=m)=\sum_{m=1}^{\infty}(1-p)^{m-1}p=1$

d.期望 $EX=\dfrac{1}{p}$，方差 $DX=\dfrac{q}{p^2}$

证明：$E(X)=\dfrac{1}{p}$。

[证] $$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} m\cdot p(1-p)^{m-1}=-p\left(\sum_{m=1}^{+\infty}(1-p)^m\right)'$$

$$=-p\left(\frac{1-p}{1-(1-p)}\right)'=-p\left(\frac{1-p}{p}\right)'=-p\left(-1+\frac{1}{p}\right)'$$

$$=(-p)\cdot\left(-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p}$$

类似地可得：$EX^2=\dfrac{2q}{p^2}+\dfrac{1}{p}$，

于是方差 $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{q}{p^2}$

例1. 进行独立重复试验，每次成功的概率为p，令X表示直到出现第m次成功为止所进行的试验次数，求X的分布律。

解:**m=1**时，$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\ldots$

m>1时,**X**的全部取值为:**m,m+1,m+2,…**

$$P\{X=m\}=p^{m}$$

P{X=m+1}=P{第**m+1**次试验时成功并且

在前**m**次试验中成功了**m-1**次**}**

$$=C_{m}^{m-1}p^{m-1}(1-p)p$$

$$\therefore P\{X=k\}=C_{k-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{k-m}p \quad k=m,m+1,m+2,\ldots$$


常用的
连续型随机变量

(1)均匀分布 $U(a,b)$ (Uniform distribution)

a. 定义

X 的概率密度密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

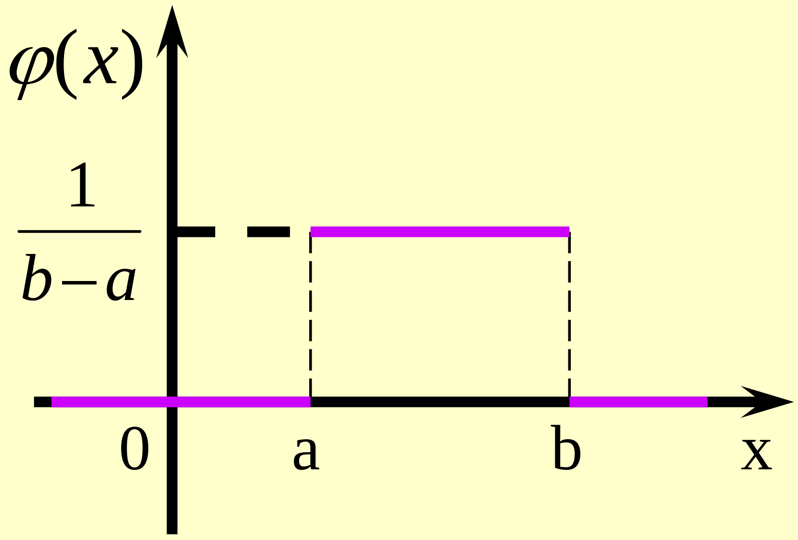
称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布,记为 $X \sim U(a,b)$。

数学期望：

$$EX=\frac{a+b}{2}.$$

方差:

$$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$$



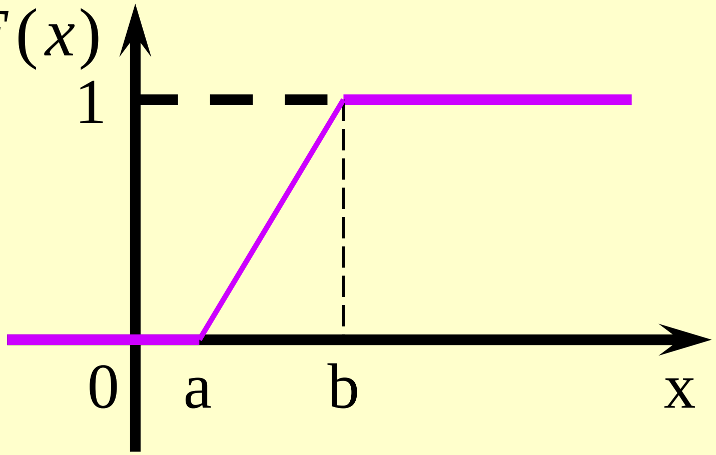
b.意义

X 具有下述意义的等可能性，即 X 落在 (a,b) 中任意等长度的子区间内的可能性是相同的。换句话说，它落在子区间内的概率只依赖于子区间的长度，而与子区间的位置无关。

即 $\forall (c,c+l) \subset (a,b)$,

$$P\{c \le X < c+l\} = \int_c^{c+l} \varphi(x)dx = \frac{l}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

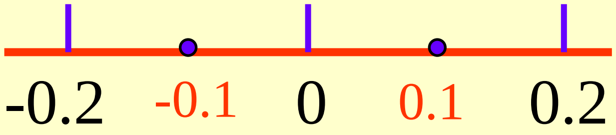


c.应用:

1)读刻度器上读数时，把零头数化为最靠近整分度时所发生的误差.

2) 每隔一定时间有一辆公共汽车通过的汽车停靠站上，乘客候车的时间.

例 1.秒表的最小刻度差为 0.2 秒，如果计时的精确度是取最近的刻度值，求使用该秒表计时产生的随机误差的概率分布，并计算误差的绝对值不超过 0.05 秒的概率。



解：设随机误差 X 可能取得区间(-0.1，0.1)内的任一值，并在此区间内服从均匀分布，则 X 的密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}5, & |x|<0.1\\ 0, & |x|\geq 0.1\end{cases}$$

$$\therefore\ P(|X|\leq 0.05)=\int_{-0.05}^{0.05}5dx=0.5$$

即误差的绝对值不超过 **0.05** 秒的概率为 **0.5**。

例 2. 设随机变量ξ服从$(0,10)$上的均匀分布，现对ξ进行观察，试求在不多于 3 次的观察中至少有一次观察值超过 8 的概率。

解：对ξ进行一次观察发现其值超过 8 的概率

$$p = P(\xi > 8) = \int_8^{10} \frac{1}{10} dx = \frac{1}{5}$$ 。

令η为观察值首次超过 8 的观察次数，则$\eta \sim Ge(p)$，

$$P(\eta \le 3) = P(\eta = 1) + P(\eta = 2) + P(\eta = 3)$$

$$= p + qp + q^2 p = \frac{61}{125}$$ 。

(2)指数分布 $E(\lambda)$ (Exponential distribution)

a.定义

若随机变量 X 的分布密度为

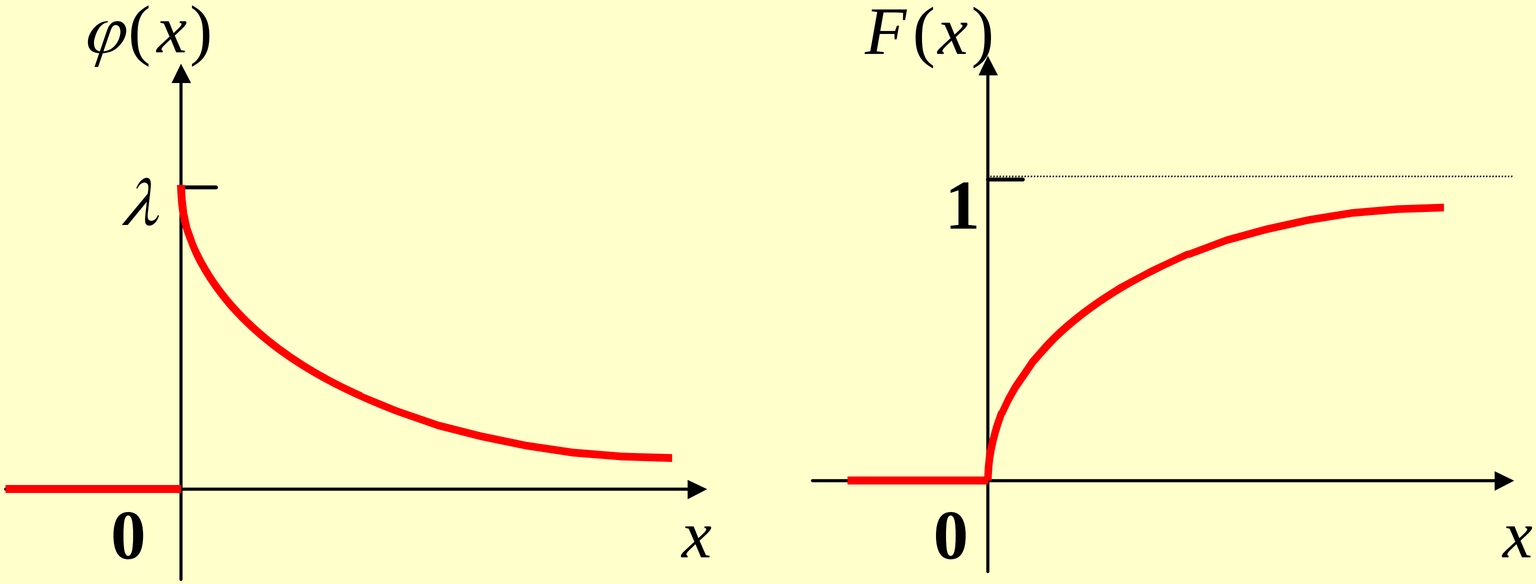
$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}, \quad \lambda>0,$$

则这种分布叫做指数分布，称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $\boldsymbol{X \sim E(\lambda)}$。

分布函数为

$$\boldsymbol{F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}}$$

★密度函数和分布函数的图形：



b.应用：寿命、某种服务的等待时间（如银行取款，售票处买票等）。

数学期望 $EX=\frac{1}{\lambda}$，方差$DX=\frac{1}{\lambda^2}$

因为 $EX=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}(-x)d(e^{-\lambda x})=(-x\cdot e^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-1)e^{-\lambda x}dx$$

$$=0-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{\lambda}\cdot(0-1)=\frac{1}{\lambda}$$

而 $EX^2=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}(-x^2)d(e^{-\lambda x})=(-x^2\cdot e^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-2x)e^{-\lambda x}dx$$

$$=0+2\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{\lambda^2}-(\frac{1}{\lambda})^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

例 **3.**已知某种电子管的寿命 X 服从指数分布，密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求这种电子管能使用 **1000** 小时以上的概率。

解：$$P(X\ge 1000)=\int_{1000}^{+\infty}\varphi(x)dx$$

$$=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{x}{1000}}dx$$

$$=-e^{-\frac{x}{1000}}\Big|_{1000}^{+\infty}=e^{-1}\approx 0.368$$

例 4. 设观察到银行窗口等待服务的时间 ξ（分钟）服从指数分布 $E(\frac{1}{5})$，该顾客在窗口最多等候 10 分钟，如超过 10 分钟他就离开。假设他一个月到该银行 5 次，试求他在一个月内到银行未等到服务而离开窗口的平均次数。

解：设 η 是顾客未等到服务而离开窗口的次数，

（可能取值为 0,1,…,5）　　$\eta \sim B(5, p)$

$$p = P\{\xi \geq 10\} = \int_{10}^{+\infty} p(x)dx = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = e^{-2}$$

所需的离开窗口平均次数为 $E\eta = 5p = 5e^{-2}$。

(3)正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（高斯分布，常态分布）

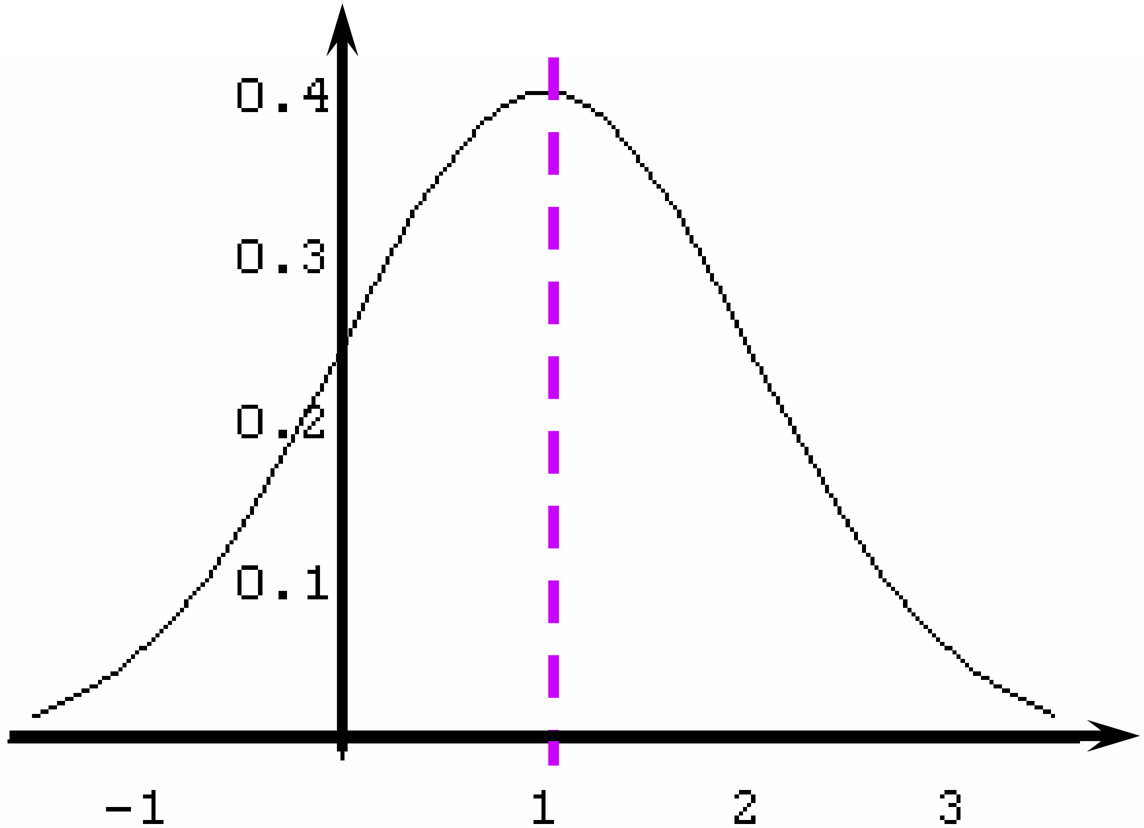
a. 定义

若随机变量 X 的分布密度为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}，\quad \mu,\sigma^2>0\text{是常数，}$$

则称随机变量 X 服从正态分布，记为

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$

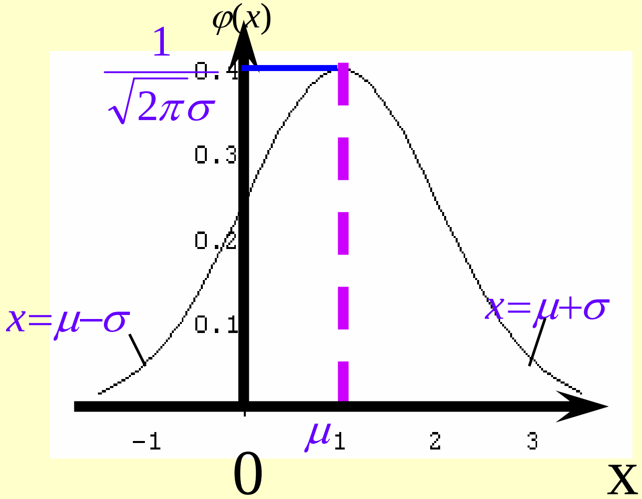


0.4
0.3
0.2
0.1
−1
1
2
3

★密度函数图形特点：

①关于 $x=\mu$ 对称；

②极大值：$\varphi_{极大}=\varphi(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；



③拐点：在 $x=\mu\pm\sigma$ 处；④渐近线：x 轴。

★关于参数的说明：

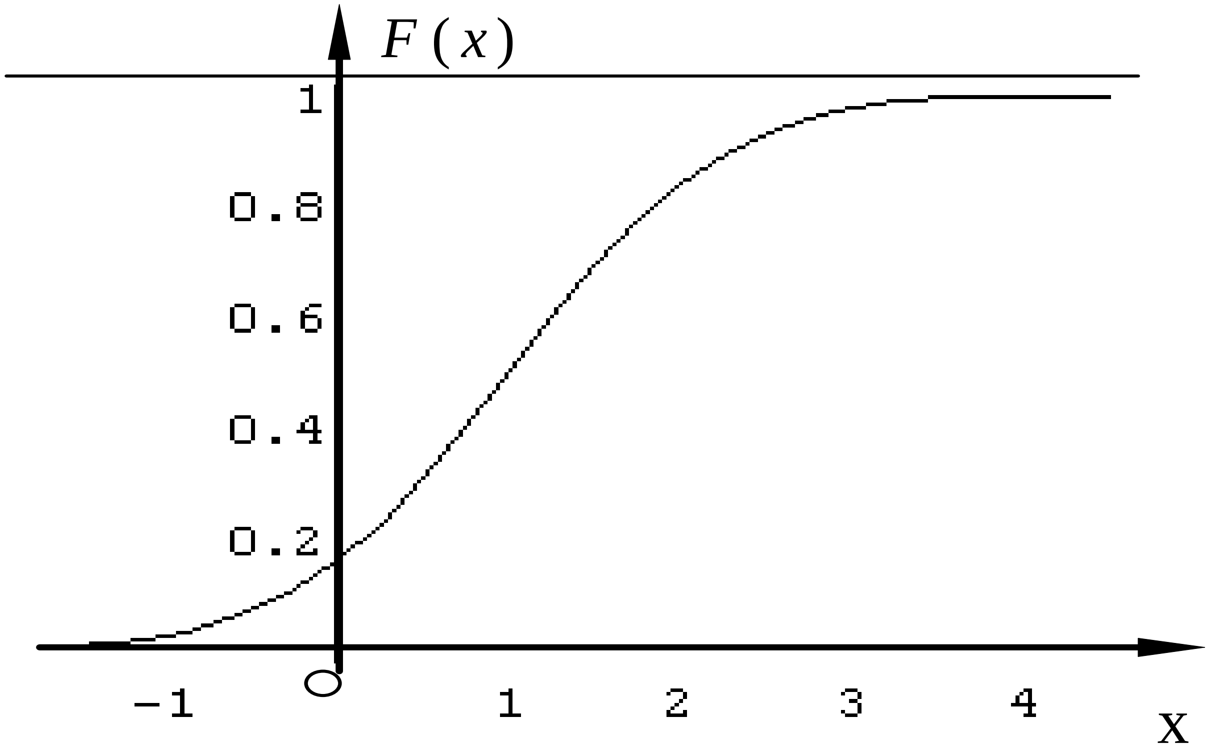
①位置参数 μ（在 x 轴上平移）

②比例参数 σ：σ 大，图形平坦；σ 小，图形呈尖塔形。

b.分布函数：

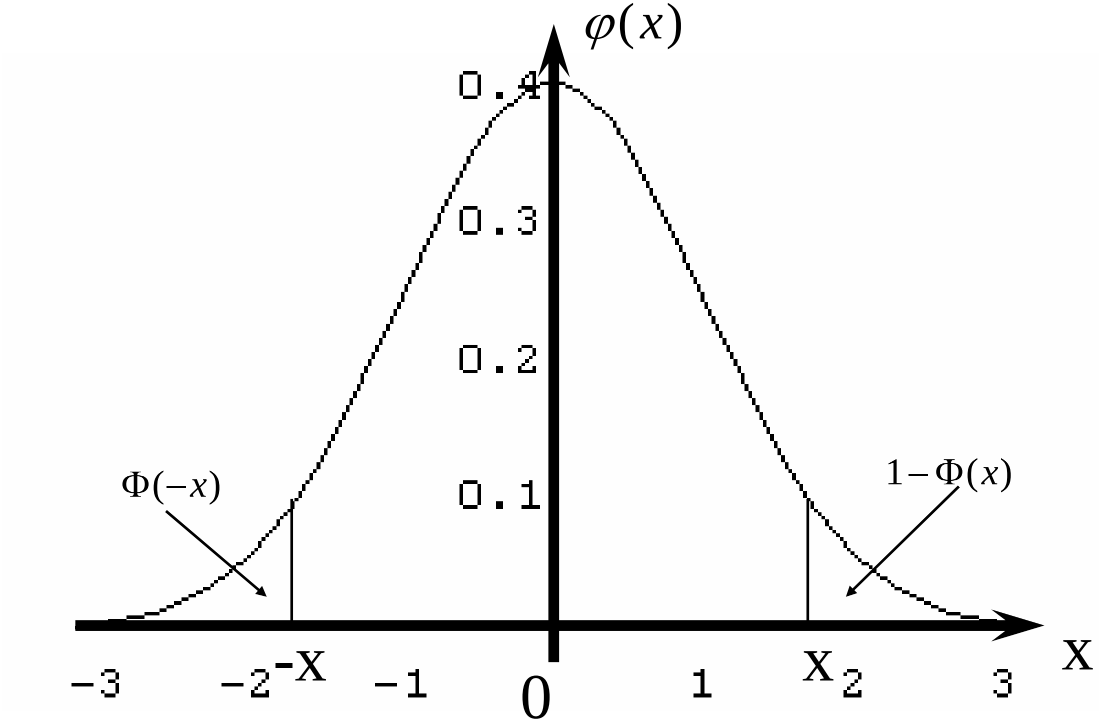
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

分布函数的图形：



★标准正态分布 $X \sim N(0,1)$

分布密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

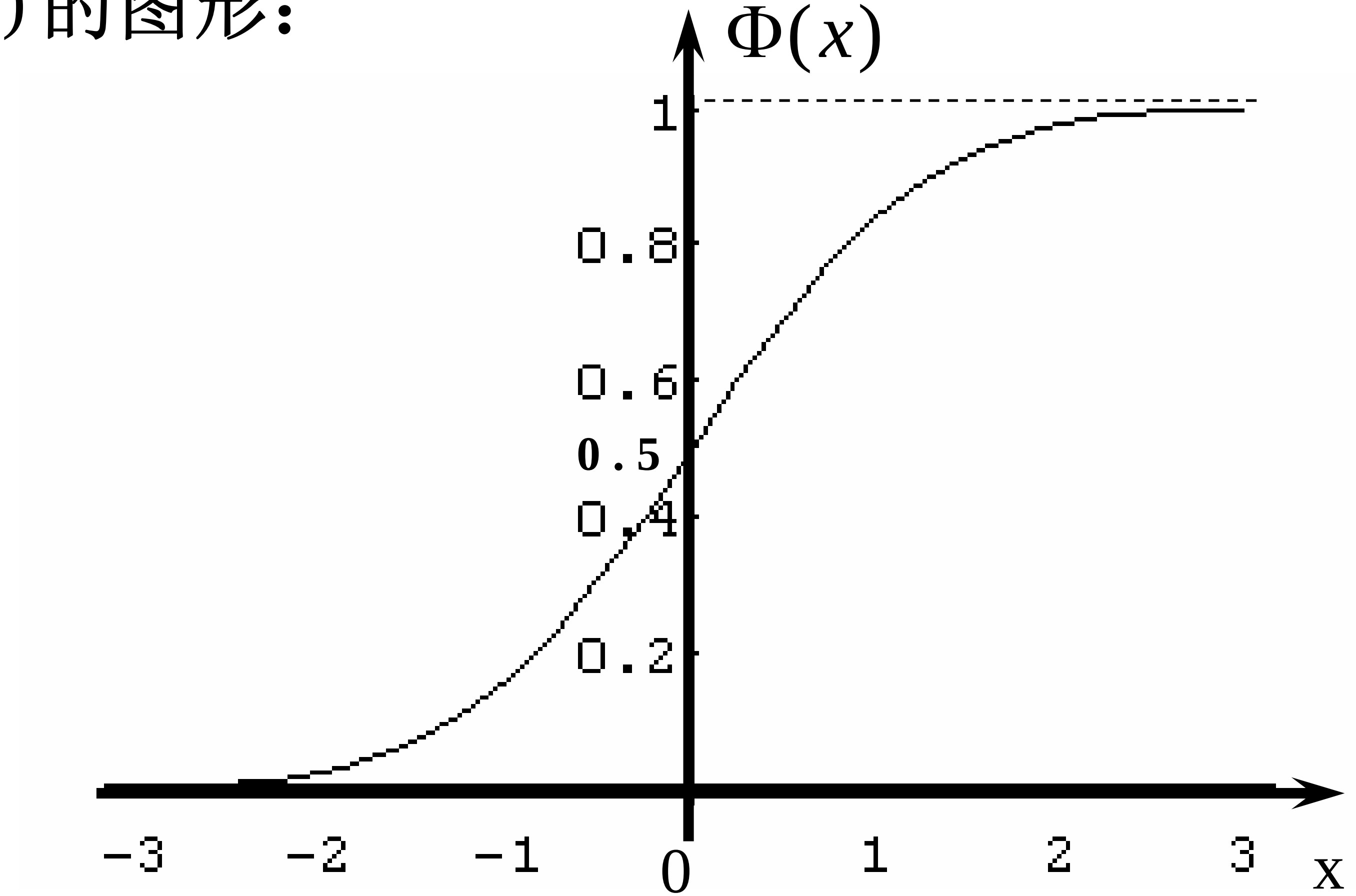


分布函数记为$\Phi(x)$，即$\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。

$\Phi(x)$的性质：

(1) $\Phi(0)=0.5$， **(2)** $\Phi(+\infty)=1$， **(3)** $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

★$\Phi(x)$的图形：



定理 1.若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$， $F(x)=\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$。

证明

$$F(x)=P(X<x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t=(x-\mu)/\sigma}}\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

定理 **2.**若随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 落在区间(x_1,x_2)

内的概率：$P(x_1 < X < x_2) = \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$

证明**:** $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

例 **5.** $X \sim N(1,4)$，求 $P(0 < X \le 1.6)$ 。

解： $P(0 < X \le 1.6) = \Phi(\frac{1.6-1}{2}) - \Phi(\frac{0-1}{2})$

$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$

$= 0.6179 - 1 + 0.6915 = \mathbf{0.3094}$

数学期望 $EX=\mu$.

因为 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$,

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

（$\because te^{-\frac{t^2}{2}}$ 是奇函数，$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$）

方差 $DX=\sigma^2$

因为 $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$,

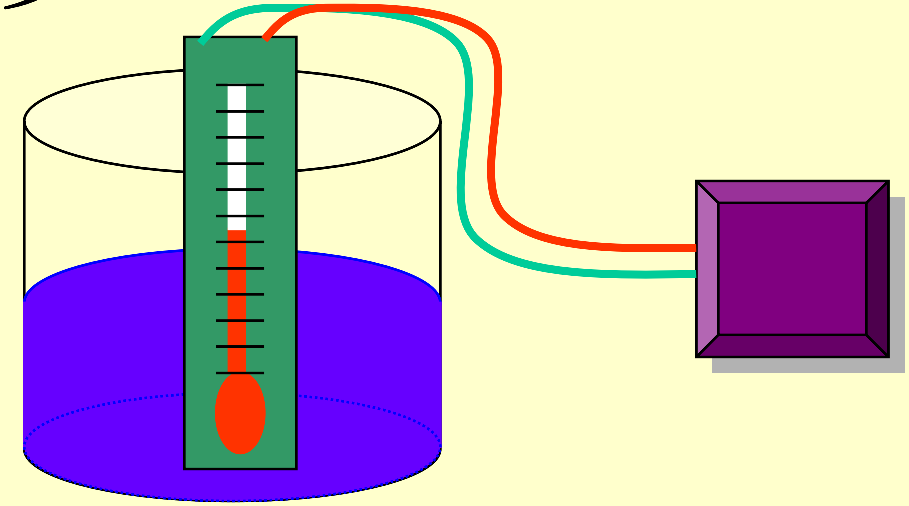
$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\mu^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\mu^2-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu^2+\sigma^2$$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=\mu^2+\sigma^2-\mu^2=\sigma^2$

例 6.将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内，调节器整定在 d ℃，液体的温度 X（以℃计）是一个随机变量，且 $X \sim N(d, 0.5^2)$。（**1**）若 d **=90**，求 X 小于 **89** 的概率；（**2**）若要求保持液体的温度至少为 **80** 的概率不低于 **0.99**，问 d 至少为多少？



解：（1）所求概率为

$$P\{X<89\}=P\left\{\frac{X-90}{0.5}<\frac{89-90}{0.5}\right\}=\Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right)$$

$$=\Phi(-2)=\mathbf{1-\Phi(2)=1-0.9772}=0.0228\text{。}$$

（2）按题意需求 d 满足

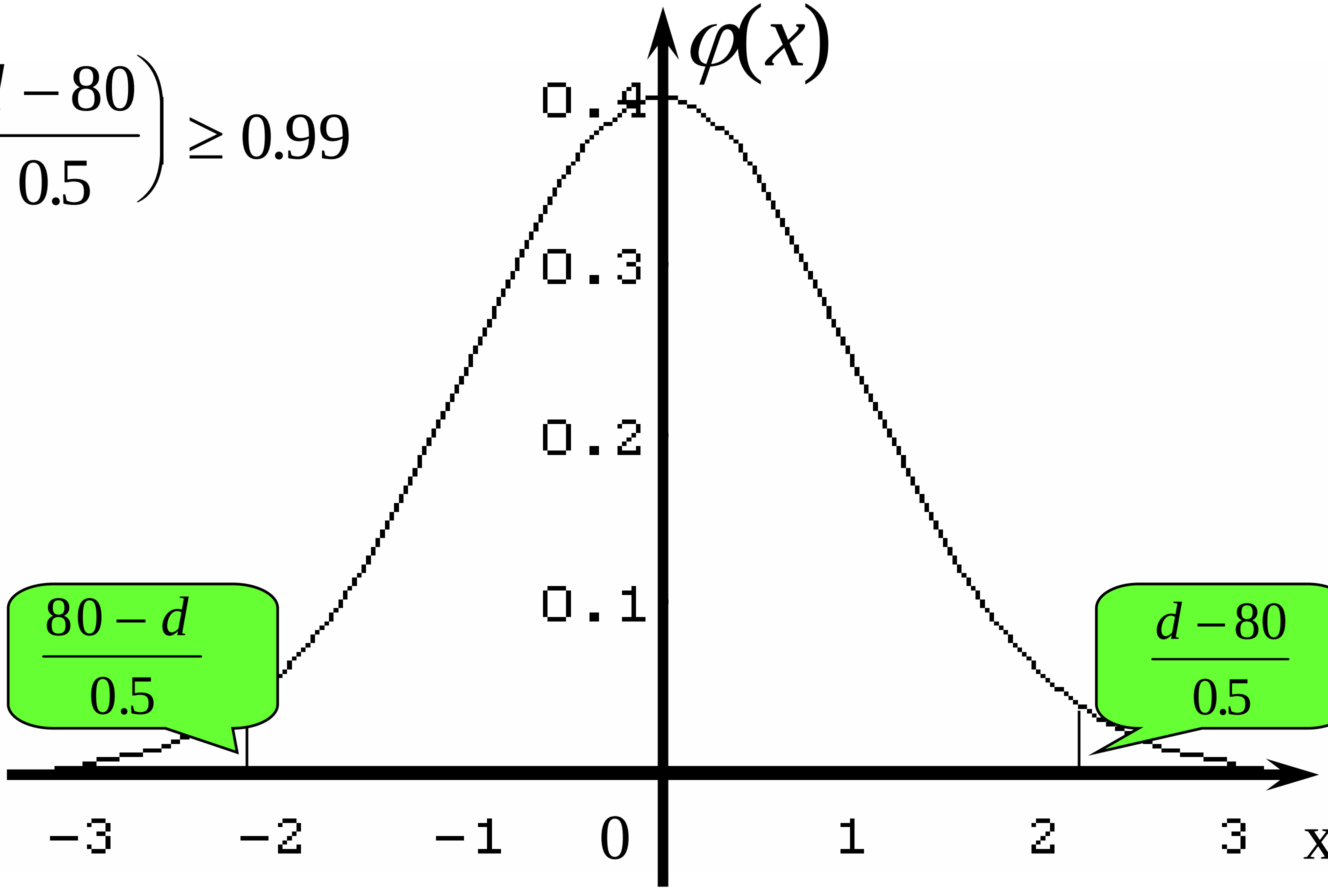
$$0.99\le P\{X>80\}$$

$$=P\left\{\frac{X-d}{0.5}>\frac{80-d}{0.5}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{X-d}{0.5}\le\frac{80-d}{0.5}\right\}=1-\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)$$

即 $\Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right)\le 1-0.99=0.01$

$$\therefore \Phi\left(\frac{d-80}{0.5}\right) \geq 0.99$$



查表的：$\Phi(2.32) = 0.9898$，$\Phi(2.33) = 0.9901$

由插值法得：$\Phi(2.327) = 0.99$

$$\therefore \frac{d-80}{0.5} \geq 2.327$$

即 $d \geq 81.1635$。

例 7.设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 X 落在区间 $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ 内的概率。$(k=1,2,\cdots)$

解: $$P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)=\Phi\left(\frac{\mu+k\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-k\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\Phi(k)-\Phi(-k)=\Phi(k)-[1-\Phi(k)]=2\Phi(k)-1$$

$$=\begin{cases} 0.6826, & k=1 \\ 0.9544, & k=2 \\ 0.9973, & k=3 \\ 0.99994, & k=4 \\ 0.9999994, & k=5 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

3σ 原理

如果随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随机变量 X 落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率小于 **0.003**。通常认为这一概率是很小的。

把区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 看作是随机变量 X 实际可能的取值区间。这一原理叫作“3σ 原理”。

,
,

例 8. 在电源电压不超过 200 伏，在 200～240 伏之间和超过 240 伏的三种情况下，电子元件损坏概率分别为 0.1，0.001 和 0.2，今设电源电压 $\xi \sim N(220, 15^2)$，试求该元件损坏的概率。

解：设事件 A 为“电子元件损坏”，事件

$B_1=\{\xi \le 200\}$ ，$B_2=\{200<\xi \le 240\}$，$B_3=\{240<\xi\}$

$$P(A\mid B_1)=0.1 \qquad P(A\mid B_2)=0.001$$

$$P(A\mid B_3)=0.2$$

$$P(B_1)=P\{\xi\le 200\}=\Phi(\frac{200-220}{15})=0.0918$$

$$P(B_2)=P\{200<\xi\le 240\}=\Phi(\frac{240-220}{15})-\Phi(\frac{200-220}{15})$$

$$=2\Phi(1.33)-1=0.8164$$

$$P(B_3)=P\{240<\xi\}=1-\Phi(\frac{240-220}{15})=1-\Phi(1.33)=0.0918$$

由全概率公式：

$$P(A)=\sum P(B_i)P(A|B_i)=0.0284$$

例 9.（对数正态分布） 设随机变量$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，试求$\eta = e^{\xi}$的数学期望。

解：$E\eta = Ee^{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x p_{\xi}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

使用变换$y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$（注意$\dfrac{\xi-\mu}{\sigma}$相对应）

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu+\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma y-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}+\frac{\sigma^2}{2}} dy = \frac{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}} dy$$

$$= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2}} dy = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$