随机试验

样本空间

随机事件

事件的关系

$\subset, \cup, -,$ 互不相容，互逆

1.2 几何概型与古典概型

从直观上来看，事件A的概率是指事件A发生的可能性

几何概型

1. 样本空间可以理解为一个可度量的几何图形（含有无限多个样本点）

2. 度量值可以理解为一几何度量（长度、面积、体积等

3. 试验的任一随机事件A发生的概率与表示A的子区域的几何度量μ_A成正比，则事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=\frac{\text{区域}A\text{的几何度量}}{\text{区域}\Omega\text{的几何度量}}$$

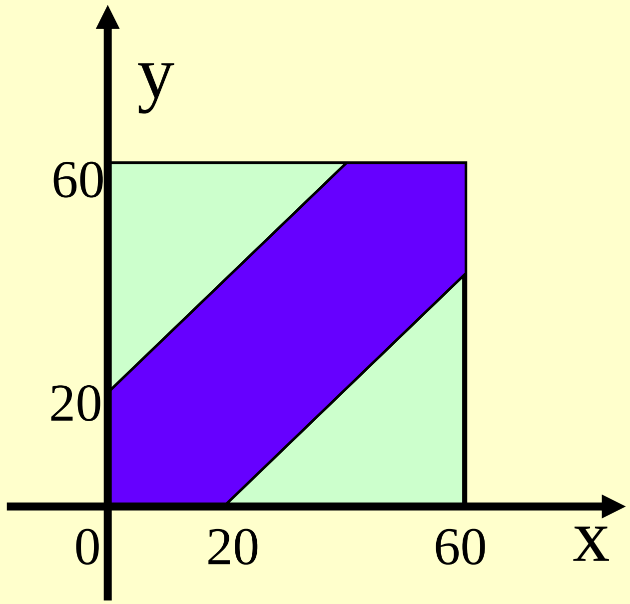
上式称为概率的几何定义。

这种类型的概率问题称为集合概型。

例1：　会面问题

两人相约7时到8时在某地会面，先到者等候另一人20分钟，过时就可离去。试求这两人能会面的概率。

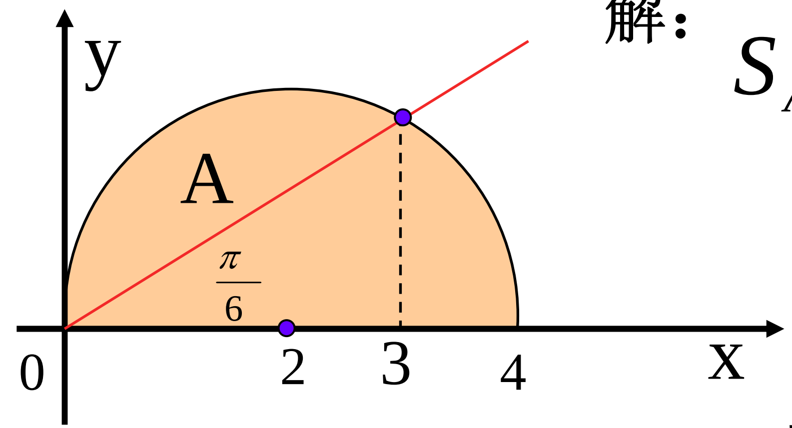
解：以x,y分别表示两人到达的时刻，则会面的充要条件为 $|x-y|\le 20$



则这两人能会面的概率为

$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_\Omega}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$

例2: 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{4x-x^2}$ 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比例，试求该点与原点的连线与x轴的夹角大于 $\pi/6$ 的概率。



解:
$$S_A=\int_0^3\left(\sqrt{4x-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)dx$$
$$=-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$$

则所求事件的概率为

$$P(A)=\frac{-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}{2\pi}$$

古典概型

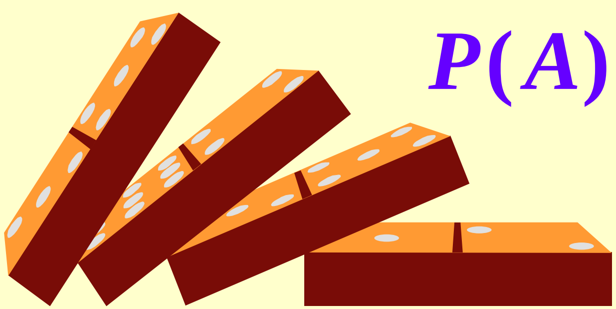
1. 若样本空间Ω的元素只有有限个;
2. 每个基本事件发生的可能性相同,

则这种试验称为等可能概型，即古典概型。

设样本空间Ω中样本点的总数为N,

事件A所包含的样本点个数为M,

则事件A发生的概率为



$$P(A)=\frac{M}{N}$$

--A所包含的样本点个数

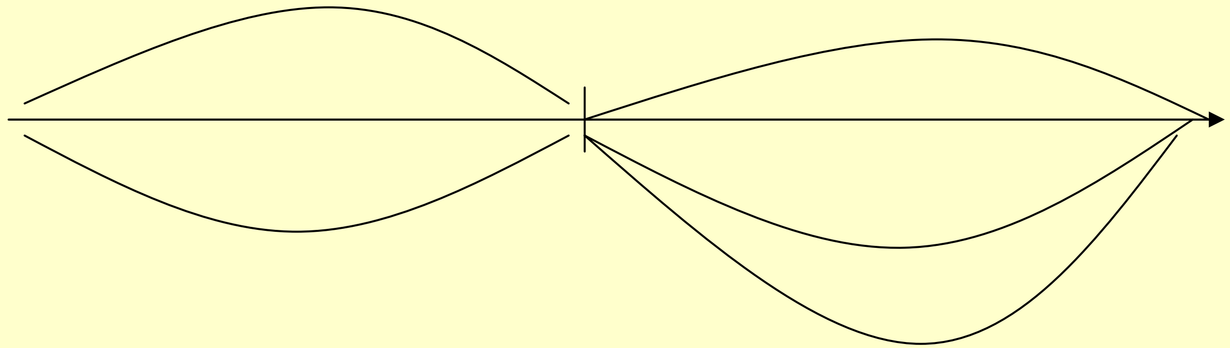
--样本空间的样本点总数

排列与组合的基本概念

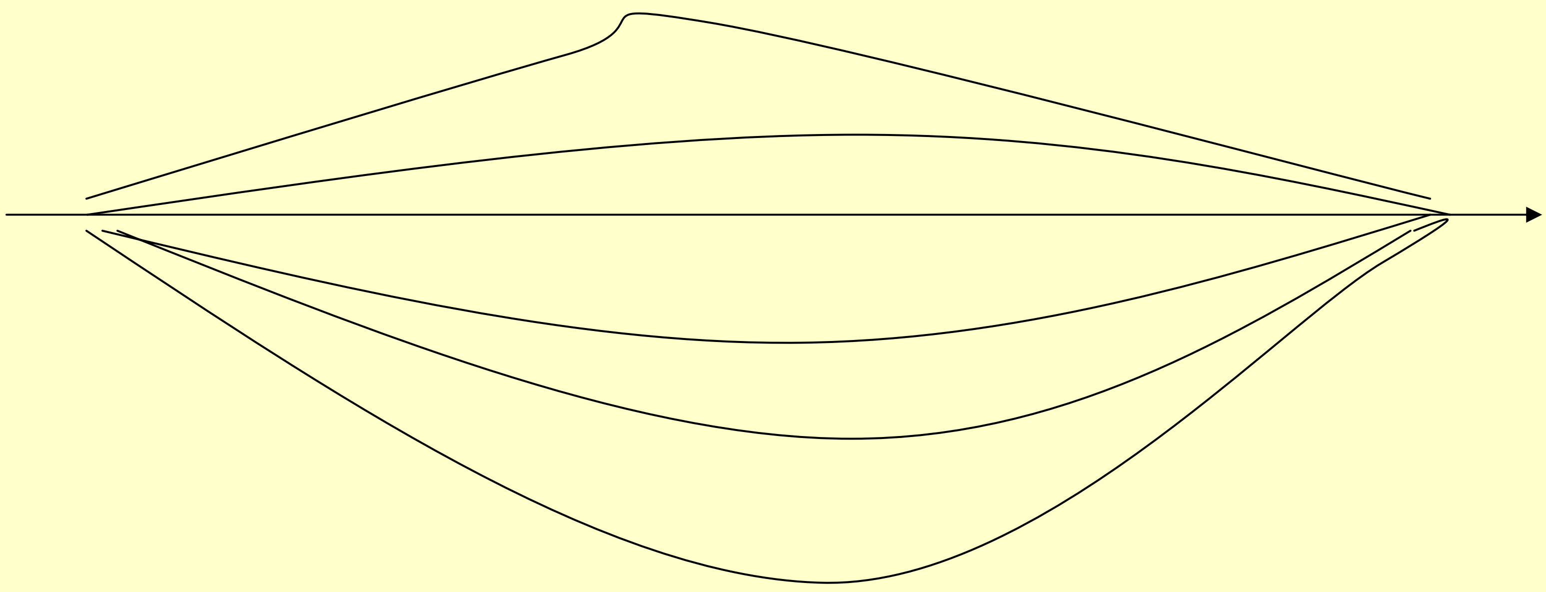
乘法公式：设完成一件事需分两步，

第一步有n_1种方法，第二步有n_2种方法，

则完成这件事共有n_1n_2种方法



加法公式：设完成一件事可有两种途径，第一种途径有n_1种方法，第二种途径有n_2种方法，则完成这件事共有n_1+n_2种方法。



样本点的计数方法

从n个元素中抽取r个元素

- ☞ 放回、 记序 n^r
- ☞ 放回、不记序 C_{n+r-1}^{r}
- ☞ 不放回、 记序 A_n^r
- ☞ 不放回、不记序 C_n^r

例 1. 三白二黑共 5 个球，从中任取两个，则两个都是白球的概率。

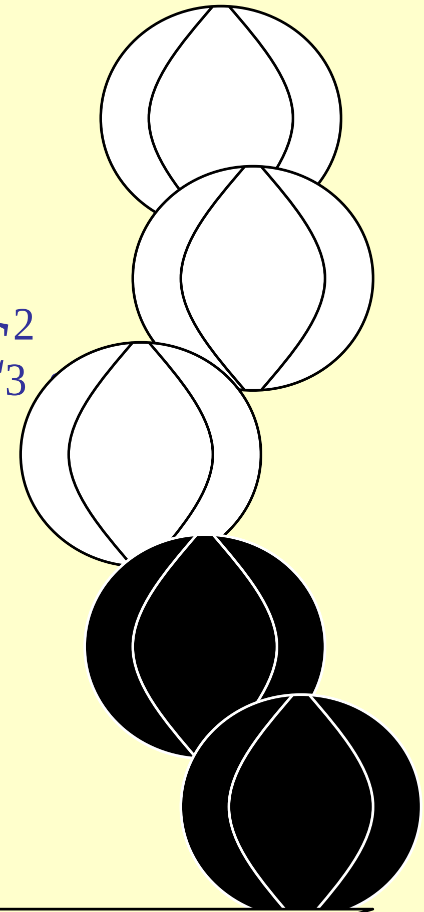
解：设 A 表示两个都是白球，

样本空间中样本点的总数为 C_5^2，

事件 A 所包含的样本点个数为 C_3^2

$$\therefore P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{\frac{5!}{2!3!}} = \frac{3}{10}$$

即：两个都是白球的概率 3/10。



抽球问题

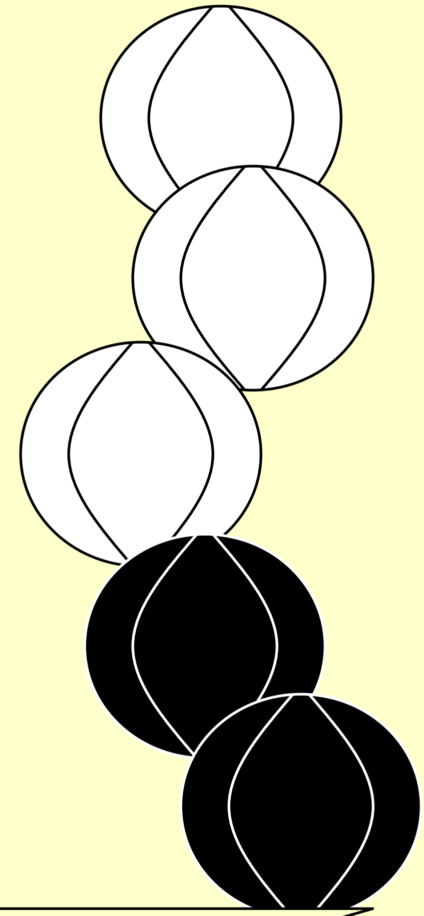
返回

三白二黑共 5 个球，从中任取两个，求取到一白一黑概率。

解:设A---取到一白一黑

$$\therefore \quad P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

答:取到一白一黑的概率为3/5



抽球问题

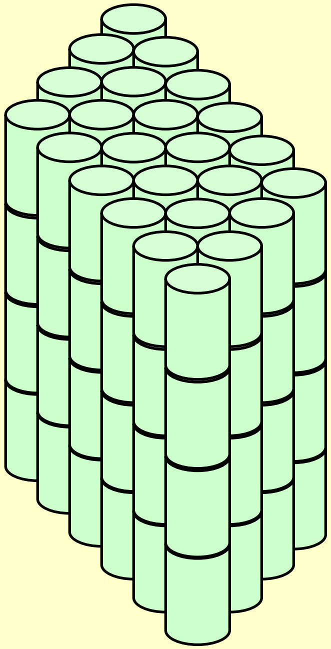
例 2.一批产品共 N 个，其中 M 个为次品，从中任取 n 个产品，求其中恰有 m 个次品的概率。

解:设 A 表示恰有 m 个次品，

样本空间中样本点的总数为 C_N^n，

事件 A 所包含的样本点个数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

$$\therefore P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$



即其中恰有 m 个次品的概率为 $\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

超几何分布

返回

一般地，设盒中有N个球，其中有M个白球，现从中任抽n个球，则这n个球中恰有k个白球的概率是

$$p=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

超几何分布

在实际中，产品的检验、疾病的抽查、农作物的选种等问题均可化为随机抽球问题。

例 3. 袋内有 a 个白球，b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回，连取 k 个球（$k \le a+b$），求第 k 次取得白球的概率。

解法一：**设 A 表示第 k 次取得白球，**

样本空间中样本点的总数为 $(a+b)!$，

事件 A 所包含的样本点个数为 $A_a^1(a+b-1)!$

$$\therefore P(A) = \frac{A_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

结论：取得白球的概率与取球的先后次序无关。

抽签原理

返回

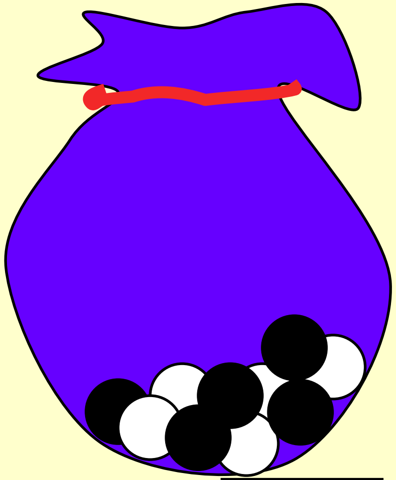
例 3. 袋内有 a 个白球，b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回，连取 k 个球（$k \le a+b$），求第 k 次取得白球的概率。

解法二： 设 A 表示第 k 次取得白球，

样本空间中样本点的总数为 A_{a+b}^{k}，

事件 A 所包含的样本点个数为 $A_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}$.

$$\therefore\ P(A) = \frac{A_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}$$



返回

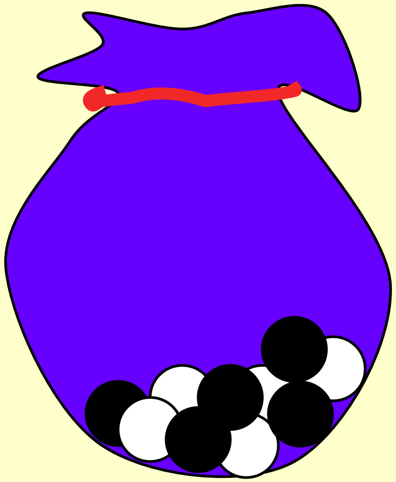
例 3. 袋内有 a 个白球，b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回，连取 k 个球（$k \le a+b$），求第 k 次取得白球的概率。

解法三：设 A 表示第 k 次取得白球，

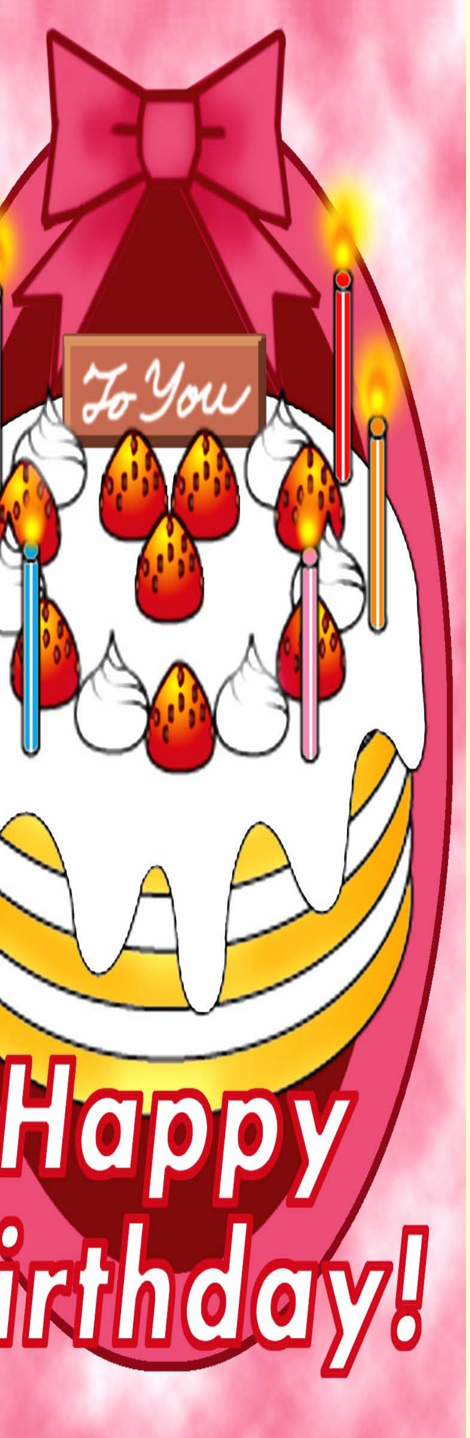
样本空间中样本点的总数为 C_{a+b}^{a}，

事件 A 所包含的样本点个数为 C_{a+b-1}^{a-1}.

$$\therefore P(A) = \frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}} = \frac{a}{a+b}$$



返回



例4.（生日问题）
班级中有n个学生，问：没有人同一天生日的概率是多少？

解：设A表示生日各不相同，

样本空间中样本点的总数为365^n，

事件A所包含的样本点个数为A_{365}^n.

$$\therefore P(A) = \frac{A_{365}^n}{365^n}$$

$$= \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

返回

例 5. (投球问题) n 个球投到 N 个盒子中去(设盒子的容量不限)试求每个盒子至多有一个球的概率。

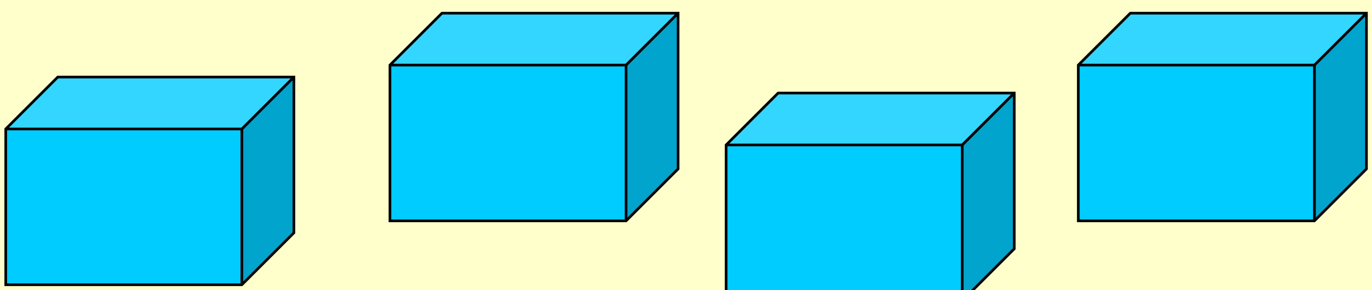
解：设 A 表示每个盒子至多有一个球，

样本空间中样本点的总数为 N^n，

事件 A 所包含的样本点个数为 A_N^n.

$$\therefore P(A) = \frac{A_N^n}{N^n} = \frac{N \times (N-1) \times \cdots \times (N-n+1)}{N^n}$$

即:每个盒子至多有一个球的概率为 $\dfrac{A_N^n}{N^n}$.



例6. 将15名新生（其中3名优秀生）随机地平均分配到三个班级中去，问：（1）每个班级各分到一名优秀生的概率是多少？（2）3名优秀生分在同一个班级的概率是多少？

解： 设 A 表示每一个班级各分配到一名优秀生，

B 表示 3 名优秀生分配在同一个班级。

样本空间中样本点的总数为 $C_{15}^{5}C_{10}^{5}C_{5}^{5}=\dfrac{15!}{5!5!5!}$

（1）先将 3 名优秀生分到 3 个班级去，分法有 $C_3^1C_2^1C_1^1=3!$

将 12 名其他学生分到 3 个班级去，分法有 $C_{12}^4C_8^4C_4^4=\dfrac{12!}{4!4!4!}$

每一个班级各分配到一名优秀生共有 $3!\times\dfrac{12!}{4!4!4!}$

$$\therefore\ P(A)=\frac{3!\times 12!}{4!4!4!}\bigg/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{25}{91}=0.2747,$$

即：每一个班级各分配到一名优秀生的概率是 0.2747。

（2）3 名优秀生分配在同一个班级

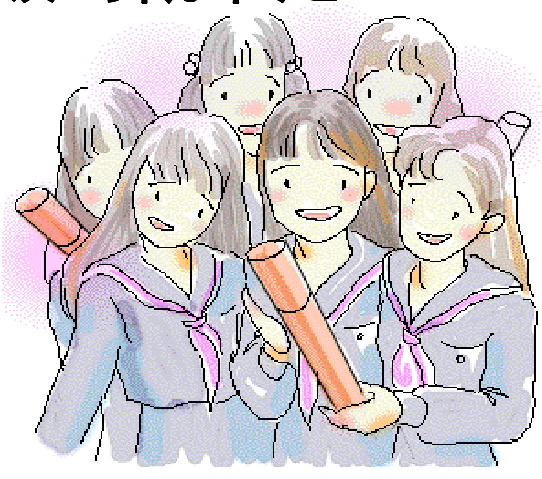
将 3 名优秀生分在同一个班级中，有 C_3^1 种分法，

将 12 名其他学生分到 3 个班级中，有 $C_{12}^2 C_{10}^5 C_5^5 = \dfrac{12!}{2!5!5!}$

3 名优秀生分配在同一个班级共有分法 $3 \times \dfrac{12!}{2!5!5!}$，

$$\therefore P(B) = \frac{3 \times 12!}{2!5!5!} \Big/ \frac{15!}{5!5!5!} = \frac{6}{91} = 0.0659,$$

即：3 名优秀生分配在同一个班级的概率是 0.0659。



例7：袋内放有两张50元、三张20元和五张10元的戏票，任取其中五张，求五张票面值超过100元的概率。

解：总的取法数： $$n_\Omega = C_{10}^5$$

A={五张票面值超过100元}

情形1：2张50元、其余8张中任取3张，取法数为

$$n_1 = C_2^2 C_8^3$$

情形2：1张50元、3张20元、1张10元，取法数为

$$n_2 = C_2^1 C_3^3 C_5^1$$

情形3：1张50元、2张20元、2张10元，取法数为

$$n_3 = C_2^1 C_3^2 C_5^2$$

"五张票面值超过100元"的取法数：

$$n_A = n_1 + n_2 + n_3$$

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_\Omega}$$

$$= \frac{C_2^2 C_8^3 + C_2^1 C_3^3 C_5^1 + C_2^1 C_3^2 C_5^2}{C_{10}^5}$$

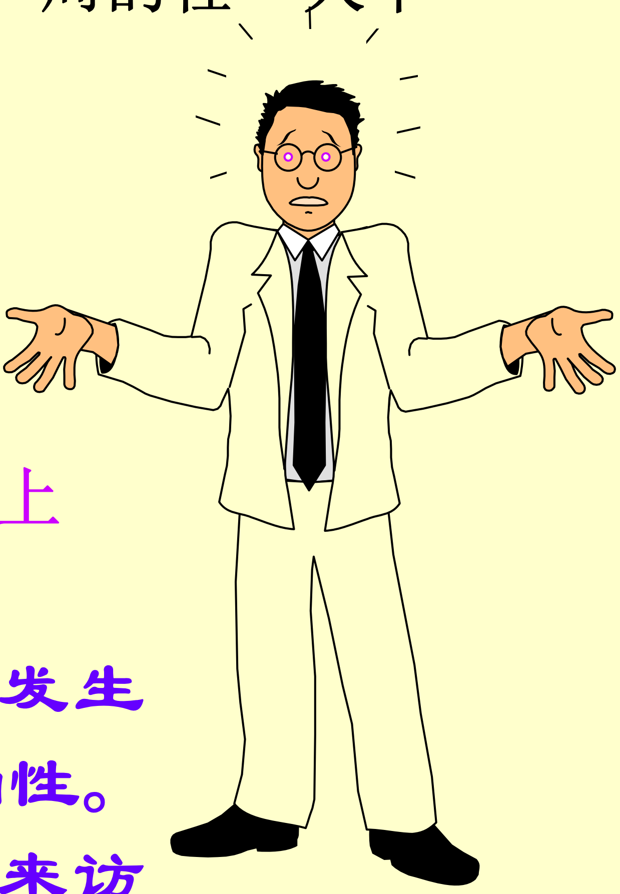
$$= \frac{126}{252} = 0.5$$

例 8.某接待站在同一个周曾接待过 12 次来访，已知这 12 次接待都在周三、周四，问是否可以推断接待时间是有规定的。

解：假设接待时间没有规定,即来访者在一周的任一天中去都是等可能的,

则 12 次都在周二、周四的概率

$$P=\frac{2^{12}}{7^{12}}=0.0000003$$



实际推断原理：

概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不发生。

结论：小概率事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性。即认为接待站不是每天都接待来访者，即认为接待时间是有规定的。

返回

例9：把4个不同的球随机地投入4个盒子，可能出现0、1、2、3个空盒，分别求出空盒数为0、1、2、3的概率。

解：每个球都可以投入4个盒子中的任意一个，故

$$n_\Omega = 4^4$$

没有空盒的投法数： $n_0 = 4!$

1个空盒的投法数： $n_1 = (C_4^1 C_3^2)(C_4^2 A_2^2)$

2个空盒的投法数： $n_2 = (C_4^1 C_3^1) C_4^3 + C_4^2 C_4^2$

3个空盒的投法数： $n_3 = C_4^1$

没有空盒的概率： $$P_0 = \frac{n_0}{n_\Omega} = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}$$

1个空盒的概率：

$$P_1=\frac{n_1}{n_\Omega}=\frac{C_4^1C_3^2C_4^3A_2^2}{4^4}=\frac{9}{16}$$

2个空盒的概率：

$$P_2=\frac{n_2}{n_\Omega}=\frac{C_4^1C_3^1C_4^3+C_4^2C_4^2}{4^4}=\frac{21}{64}$$

3个空盒的概率：

$$P_3=\frac{n_3}{n_\Omega}=\frac{C_4^1}{4^4}=\frac{1}{64}$$