华东理工大学

概率论与数理统计

作业簿（第十一册）

学　院 ____________专　业 ____________班　级 ____________
学　号 ____________姓　名 ____________任课教师____________

第二十二次作业

一. 选择题

1. 关于“参数μ的95%的置信区间为(a,b)”的正确理解的是　　　　（　A　）

   A. 至少有95%的把握认为(a,b)包含参数真值μ；

   B. 恰好有95%的把握认为(a,b)包含参数真值μ；

   C. 恰好有95%的把握认为参数真值μ落在区间(a,b)内；

   D. 若进行100次抽样，必有95次参数真值μ落在区间(a,b)内

2. 设总体$\xi \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma_0^2)$，其中$\sigma_0$已知。在样本容量n和置信水平$1-\alpha$确定的情况下，

   对不同的样本观测值，若样本均值$\overline{X}$增大，则总体期望μ的置信区间的长度　（ C　）

   A. 变长　　　　B. 变短

   C. 不变　　　　D. 不能确定

3. 设从总体$\xi \sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$和总体$\eta \sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$中分别抽取容量为 9，16 的独立样本，以$\overline{x}$，$\overline{y}$，$S_x^2$，$S_y^2$分别表示两个独立样本的样本均值和样本方差，若已知$\sigma_1=\sigma_2$，则$\mu_1-\mu_2$的95%的置信区间为　　　　（　D　）

   A. $(\overline{x}-\overline{y}-u_{0.975}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{9}+\dfrac{\sigma_2^2}{16}}$，$\overline{x}-\overline{y}+u_{0.975}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{9}+\dfrac{\sigma_2^2}{16}})$

   B. $(\overline{x}-\overline{y}-u_{0.975}\sqrt{\dfrac{S_x^2}{9}+\dfrac{S_y^2}{16}}$，$\overline{x}-\overline{y}+u_{0.975}\sqrt{\dfrac{S_x^2}{9}+\dfrac{S_y^2}{16}})$

   C. $(\overline{x}-\overline{y}-\dfrac{t_{0.975}(25)S_w}{5}$，$\overline{x}-\overline{y}+\dfrac{t_{0.975}(25)S_w}{5})$，其中$S_w=\sqrt{\dfrac{9S_x^2+16S_y^2}{25}}$

   D. $(\overline{x}-\overline{y}-t_{0.975}(23)S_w\dfrac{5}{12}$，$\overline{x}-\overline{y}+t_{0.975}(23)S_w\dfrac{5}{12})$，其中$S_w=\sqrt{\dfrac{8S_x^2+15S_y^2}{23}}$

二、填空题

1. 将合适的数字填入空格，其中：（1）置信水平α，（2）置信水平$1-\alpha$，（3）精确度，（4）准确度。

置信区间的可信度由<u>（2）</u>控制，而样本容量可用来调整置信区间的<u>（3）</u> 。

2．有一大批糖果，先从中随机地取 16 袋，称的重量（单位：g ）如下：

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则总体均值μ的置信水平为95%的置信区间为<u>[500.4,507.1]</u>，总体标准差σ的置信水平为 95%的置信区间为<u>[4.582,9.599]</u>。

3. 设总体$\xi\sim N(\mu,4)$，样本均值$\overline{X}$，要使总体均值μ 的置信水平为 95％ 的置信区间为[$\overline{X}$-0.56，$\overline{X}$+0.56]，样本容量（观测次数）n 至少为 <u>49</u>.

三、计算题

1．设某地旅游者日消费额服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且标准差$\sigma=12$，今对该地旅游者的日平均消费额进行估计，为了能以 95%的置信水平相信这种估计误差小于 2（元），问至少需要调查多少人？

解：由于总体为正态分布,且标准差$\sigma(=12)$已知,又由$1-\alpha=0.95$,即$\alpha=0.05$,

查表可得$U_{1-\frac{\alpha}{2}}=U_{0.975}=1.96$，

误差小于 2 即$U_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}<2\Rightarrow 1.96\cdot\dfrac{12}{\sqrt{n}}<2\Rightarrow n>138.2976$，

故至少要调查 139 人。

2. 设某炼铁厂炼出的铁水含碳量（单位：%）服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，根据长期积累的资料，已知其中$\sigma=0.108$。现测量 5 炉铁水，测得含碳量为：4.28，4.40，4.42，4.35，4.37. 求总体均值μ的水平为 95％的置信区间.

解：据题意，要求μ的置信度为 95%的置信区间，且方差已知:

则μ的置信度为 95%的置信上下限为:

$$\bar{x}\pm u_{0.975}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4.364\pm1.96\times\frac{0.108}{\sqrt{5}}=[4.2693,\quad 4.4587].$$

3．设某种清漆的干燥时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。现有该清漆的 9 个样本，干燥时间分别为 6.0，5.7，5.8，6.5，7.0，6.3，5.6，6.1，5.0。试求该种清漆平均干燥时间的置信度为 95%的置信区间。

解：据题意，要求μ的置信度为 95%的置信区间，且方差未知。

由样本得：$n=9$，$\bar{x}=6$，$s_{n-1}^2=0.33$，查t分布表得$t_{0.975}(8)=2.06$

则μ的置信度为 95%的置信上下限为

$$\bar{x}\pm t_{0.975}(8)\cdot\frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}=6\pm 2.06\times\frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{9}}=6\pm 0.44$$

即该种清漆平均干燥时间的置信度为 95%的置信区间为[5.56, 6.44]。

4．某厂生产一批圆形药片，已知药片直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 16 粒药片，测得样本均值$\bar{x}=4.87$ mm，样本标准差$s=0.32$ mm，求总体的方差σ^2在置信水平为 0.95 下的置信区间。

解：由样本值得$s=0.32$,$n=16$，$\alpha=0.05$，自由度为$n-1=15$。

查表得$\chi_{0.025}^2(15)=6.262$，$\chi_{0.975}^2(15)=27.488$。所以，

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.975}^2(15)}=\frac{15\times 0.32^2}{27.488}=0.0559,$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.025}^2(15)}=\frac{15\times 0.32^2}{6.262}=0.2453.$$

即σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为：$\left[0.0559,\quad 0.2453\right]$。

5. 为了测试某药物的疗效，随机抽取 10 人测量其服用药物前后某指标的数据：

服用前 X:	41	60.3	23.9	36.2	52.7	22.5	67.5	50.3	50.9	24.6
服用后 Y:	49.6	64.5	33.3	36	43.5	56.8	60.7	57.3	65.4	41.9

假设服用前后该指标测量值分别都服从正态分布：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

根据上述数据经计算得服用前的样本均值为: $\overline{X}=42.99$, 样本标准差$S_X=15.93$

服用后的样本均值为: $\overline{Y}=50.90$, 样本标准差$S_Y=11.72$

令$Z=Y-X$，根据服药前后的样本数据算得：$\overline{Z}=7.91$，样本标准差$S_Z=12.56$.

1) 证明若服药前后的样本容量均为 n，则有 $\dfrac{Z-(\mu_2-\mu_1)}{S_z}\sqrt{n}\sim t(n-1)$

2) 求$\mu_2-\mu_1$的置信水平为95%的置信区间

证明： 1) $Z=Y-X\sim N(\mu_2-\mu_1,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

$$Z\sim N(\mu_2-\mu_1,\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}), \qquad A=:\frac{Z-(\mu_2-\mu_1)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

$B=:\dfrac{(n-1)S_Z^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 S_Z与$\overline{Z}$相互独立.

$$\frac{A}{\sqrt{B/(n-1)}}=\frac{\overline{Z}-(\mu_2-\mu_1)}{S_z^*}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$

2) $$[\overline{Z}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}},\overline{Z}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}]=$$

$$=[7.91-t_{0.975}(9)\,\frac{12.56}{\sqrt{10}},\quad 7.91+t_{0.975}(9)\,\frac{12.56}{\sqrt{10}}]=[-1.074,\quad 16.894] \quad .$$

第二十三次作业

一．选择题

1. 假设检验中分别用 $\boldsymbol{H_0}$ 和 $\boldsymbol{H_1}$ 表示原假设和备择假设，则犯第一类错误的概率是指 (C)

   A. $\boldsymbol{P\{接受H_0 \mid H_0为真\}}$　　　B. $P\{接受H_0 \mid H_0不真\}$

   C. $\boldsymbol{P\{拒绝H_0 \mid H_0为真\}}$　　　D. $P\{拒绝H_0 \mid H_0不真\}$

2. 一个显著性的假设检验问题，检验的结果是拒绝原假设还是接受原假设,与之有关的选项中, 正确的 (D)

   A. 与显著性水平有关　　　B. 与检验统计量的分布有关

   C. 与样本数据有关　　　D. 与上述三项全有关

3. 一个显著性水平为 α 的假设检验问题，如果原假设 $\boldsymbol{H_0}$ 被拒绝,则 (B)

   A. 原假设 $\boldsymbol{H_0}$ 一定不真　　　B. 这个检验犯第一类错误的概率不超过 α

   C. 这个检验也可能会犯第二类错误　　　D. 这个检验两类错误都可能会犯

二. 填空题:

1．假设检验的基本思想是基于 小概率反例否定法(或 小概率事件原理)

2. 选择原假设最重要的准则是 含有等号

3. 假设检验中可能犯的两类错误的关系为, 一定条件下若降低了犯第一类错误的概率,会增加犯第二类错误的概率,(反之亦然).

三. 计算题:

1．已知在正常生产情况下某厂生产的汽车零件的直径服从正态分布 $N(54, 0.75^2)$，在某日生产的零件中随机抽取 10 件，测得直径（cm）如下：

54.0 ，55.1 ，53.8，54.2 ，52.1 ，54.2，55.0 ，55.8，55.1，55.3

如果标准差不变，在显著水平 $\alpha = 0.05$ 情况下,能否认为该日生产零件直径的均值与标准值 54cm 无显著差异？ 并问这个检验可能犯的错误是哪一类?

解：由样本观测值计算,得 $\overline{X} = 54.46$，本问题相当于要检验

$$H_0: \mu = 54.46, H_1: \mu \neq 54.46,$$

考虑到总体服从正态分布$N(54, 0.75^2)$,故采用双侧 U 检验法，

取检验统计量的测试值为$\hat{U} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = \dfrac{54.46 - 54}{0.75/\sqrt{10}} = 1.9395$，

由水平$\alpha = 0.05$,查表得$U_{1-\frac{\alpha}{2}} = U_{0.975} = 1.96$,由于$|\hat{U}| < U_{0.975}$，

故接受H_0，即该日生产得零件直径的均值与标准值没有显著差异。

因原假设被接受,故这个检验可能犯的错误是第二类.

2．从一批矿砂中，抽取 5 个样品，测得它们的镍含量（单位：%）如下：

3.25　3.24　3.26　3.27　3.24

设镍含量服从正态分布，问：能否认为这批矿砂中镍含量的平均值为 3.25（显著水平$\alpha = 0.05$）。

解:由样本观测值计算,得$\overline{X} = 3.252, S_{n-1} = 0.013$，本问题相当于要检验

$$H_0: \mu = 3.25, \quad H_1: \mu \neq 3.25$$

考虑到总体服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$,其中方差σ^2未知,故采用双侧 t 检验法，

取检验统计量的测试值为$\hat{T} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} = \dfrac{3.252 - 3.25}{0.013/\sqrt{5}} = 0.3440$，

由水平$\alpha = 0.05$，查表得$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(4) = 2.776$，

由于$|\hat{T}| < t_{0.975}(4)$，故接受H_0，

即可以认为这批矿砂中的镍含量得平均值为 3.25。

3．用热敏电阻测温仪间接测量地热勘探井底温度 7 次。测得温度（$^\circ C$）：

112.0，113.4，111.2，112.0，114.5，112.9，113.6

而用某精确办法测得温度为 112.6（可看作温度真值），试问热敏电阻测温仪的间接测量有无系统偏差？（显著水平$\alpha = 0.05$）。

解：由样本观测值计算，得$\overline{X} = 112.8, S_{n-1} = 1.1358$，

本问题相当于要检验$H_0: \mu = 112.6, H_1: \mu \neq 112.6$，

考虑到方差σ^2未知，故采用双侧 t 检验法。

计算检验统计量的值为$\hat{T} = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1}/\sqrt{n}} = \dfrac{112.8 - 112.6}{1.1358/\sqrt{7}} = 0.4659$，

由水平$\alpha = 0.05$，查表得$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(6) = 2.4469$，

由于$\left|\hat{T}\right| < t_{0.975}(6)$，故接受$H_0$，

即可以认为热敏电阻测温仪间接测温无系统偏差.

4. 某工厂生产的铜丝的折断力（N）服从标注差为 40 的正态分布，某日抽取 10 根铜丝进行折断力试验，测得结果如下：

2830，2800，2795，2820，2850，2830，2890，2860，2875, 2785

在显著性水平$\alpha = 0.05$情况下,能否认为该日生产的铜丝折断力的标准差无显著性改变？

解：由样本观测值计算，得$\overline{X} = 2833.5, S_{n-1}^2 = 1228.0556$，

本问题相当于要检验$H_0: \sigma = 40,\quad H_1: \sigma \neq 40$，

考虑到均值μ未知，故采用双侧χ^2检验法，

取检验统计量的测试值为$\hat{\chi}^2 = \dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9 \times 1228.0556}{40^2} = 6.9078$

由水平$\alpha = 0.05$，查表得

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(9) = 19.023, \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(9) = 2.700，$$

由于$\chi_{0.025}^2(9) < \hat{\chi}^2 < \chi_{0.975}^2(9)$，故接受$H_0$，

即可以认为该日生产的铜丝折断力的标准差无显著性改变。

5. 某种饮料的罐装量$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，这里$\mu, \sigma^2$未知。现从中随机抽取 10 瓶，测得饮料的体积（单位：ml）为

100，101, 96, 92, 97, 95 98, 97, 104, 101

在显著水平$\alpha = 0.05$下，讨论

(1) 在方差未知的条件下，是否可以认为饮料的罐装量达到 $\mu = 100$ (ml)?

(2) 是否可以认为罐装量是稳定的，即是否达到方差 $\sigma^2 = 16$?

解：由样本观测值计算，得 $\overline{X} = 98.1, S_{n-1}^2 = 12.1$，

（1） $H_0 : \mu = 100, H_1 : \mu \neq 100$ 。

$$\hat{T} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S_{n-1}} \sqrt{n} = \frac{98.1 - 100}{3.4785} \sqrt{10} = -1.7273$$

$t_{0.975}(9) = 2.2622, \qquad |\hat{T}| < t_{0.975}(9)$，

所以不拒绝 H_0。

（2） $H_0 : \sigma^2 = 16, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 16$ ，

取检验统计量的测试值为 $\hat{\chi}^2 = \dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{9 \times 12.1}{16} = 6.80625$

由水平 $\alpha = 0.05$，查表得

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.975}^2(9) = 19.023, \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(9) = 2.700,$$

由于 $\chi_{0.025}^2(9) < \hat{\chi}^2 < \chi_{0.975}^2(9)$，故不拒绝 H_0，可以认为罐装量是稳定的。

$$\left[\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\chi_{0.975}^2(9)}, \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\chi_{0.025}^2(9)}\right] = \left[\frac{9 \times 12.1}{19.023}, \frac{9 \times 12.1}{2.700}\right] = [5.7246, 40.3333]$$

.... 2 分 .... 2 分

5. 设总体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中μ和σ^2均未知，抽取一个容量为 n 的样本，

对总体期望μ的检验原假设为$H_0:\mu=\mu_0$. 证明:在显著性水平α下接受H_0

的充要条件是μ的置信水平为 1-α 的置信区间包含μ_0

证明：设$\bar{X}$和S分别表示样本均值和样本标准差

显著性水平α下对原假设H_0的检验，检验统计量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}$,

接受H_0,即统计量观测值落入接受域

$$\Leftrightarrow \quad |T| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu_0 \le \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ,$$

即μ的置信水平为 1-α 的置信区间$[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$, $\bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$包含$\mu_0$