概率论与数理统计

（第四册）

学　院 ____________ 专　业 ____________ 班　级 ____________

学　号 ____________ 姓　名 ____________ 任课教师 ____________

第七次作业

一．填空题：

1. ξ的分布列为:

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

则 $E\xi=$ 2.7 。

2. ξ的分布列为:

ξ	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

则 $E\xi=\frac{1}{3}$， $E(-\xi+1)=\frac{2}{3}$， $E\xi^2=\frac{35}{24}$ 。

3. 设 X_1,X_2,X_3 是 n 个独立同分布的随机变量， $E(X_i)=\mu$， $D(X_i)=8$，对于 $\overline{X}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}X_i$，则用契比雪夫不等式估计 $P\{|\overline{X}-\mu|<4\}\geq \underline{5/6}$.

二．填空题：

1. 若对任意的随机变量ξ， $E\xi$存在，则 $E(E(E\xi))$ 等于　　（ C ）。

　(A)．0　　(B)． ξ　　(C)． $E\xi$　(D)． $(E\xi)^2$

2. 现有 10 张奖券，其中 8 张为 2 元，2 张为 5 元，某人从中随机地无放回地抽取 3 张，则此人所得奖金的数学期望为　　（ C ）
　(A) 6.5　　（B）12　　（C）7.8　　（D）9

3. 已知随机变量 X 满足 $E(X)=2$， $D(X)=4$，则 $E(4X^2-3)=$（ B ）

(A) 32　　　（B）29　　　（C）0　　　（D）13

三．计算题

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

其中 $\theta>1$，求 EX。

解 $EX=\int_0^1 x\dfrac{1}{\theta-1}x^{\frac{2-\theta}{\theta-1}}dx=\int_0^1\dfrac{1}{\theta-1}x^{\frac{1}{\theta-1}}dx=\dfrac{1}{\theta}x^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Big|_0^1=\dfrac{1}{\theta}$。

2. 设随机变量 ξ 的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

求 $E\xi,\ E(2\xi+3),\ E(\xi+e^{-2\xi})$ 和 $E(\max\{\xi,2\})$。

解 $E\xi=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$；

$E(2\xi+3)=2E\xi+3=5$；

$$E(\xi+e^{-2\xi})=E\xi+E(e^{-2\xi})=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\frac{4}{3}；$$

$$E(\max\{\xi,2\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,2\}p(x)dx=\int_0^{+\infty}\max\{x,2\}e^{-x}dx$$

$$=\int_0^2 2e^{-x}dx+\int_2^{+\infty}xe^{-x}dx=2(1-e^{-2})+2e^{-2}+e^{-2}=2+e^{-2}。$$

3. 一台机器由三大部件组成，在运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1，0.2 和 0.3。假设各部件的状态相互独立，用 ξ 表示同时需要调整的部件数，试求 ξ 的数学期望。

解设 A_i =｛第 i 个部件需要调整｝（i=1,2,3），则 P(A_1)=0.1，P(A_2)= 0.2，P(A_3)=0.3 。所以

$$P(\xi=0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504，$$

$$P(\xi=1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=0.389,$$

$$P(\xi=2)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=0.092,$$

$$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=0.006.$$

从而

$$E\xi=0\times0.504+1\times0.389+2\times0.093+3\times0.006=0.6\text{ 。}$$

4. 设球的直径均匀分布在区间[a , b]内，求球的体积的平均值。

解设球的直径长为ξ,且$\xi\sim U[a,b]$,球的体积为η,与直径ξ的关系为$\eta=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^3$,那么,

$$E\eta=\frac{4\pi}{3}\cdot E\left(\frac{\xi}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}\cdot E\xi^3=\frac{\pi}{6}\int_a^b\frac{x^3}{b-a}dx=\frac{\pi(a+b)(a^2+b^2)}{24}\text{ 。}$$

5. 6 个元件装在 3 台仪器上，每台仪器装两个，元件的可靠性为 0.5。如果一台仪器中至少有一个元件正常工作，不需要更换，若两个元件都不工作，则要更换，每台仪器最多更换一次，记 X 为 3 台仪器需要更换元件的总次数，求 EX

解随机变量 X 的取值：k=0,1,2,3 ，每台仪器需要更换元件的概率:

$p=0.5\times0.5-0.25$，则

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{3-k},\quad k=0,1,2,3$$

X	0	1	2	3
P	27/64	27/64	9/64	1/64

故$EX=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$。（或$EX=np=0.75$）

6.* 某种产品上的缺陷数ξ服从分布律

$$P(\xi=k)=\frac{1}{2^{k+1}},\quad k=0,1,2,\cdots$$

求此种产品上的平均缺陷数。（* 高等数学 8 学分的学生可以不做）

解 $E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$,

令 $x=\frac{1}{2}$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k\right)'=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

所以$E\xi=1$。

第八次作业

一. 填空题

1. 设随机变量ξ的分布律为

ξ	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{2}$	b

已知$D\xi = 0.5$，则 a=<u>　　1/4　　</u>，b<u>　1/4　　　</u>。

2. 若随机变量 X 的分布律为 $P\{X = k\} = \dfrac{e^{-1}}{k!}$,　$k = 0,1,2,\cdots$，则

$E(X) =$ <u>　1　</u>;　　$D(X) =$ <u>　1　</u>。

3. 事件在一次试验中发生次数ξ的方差一定不超过<u>1/4</u>。

二、选择题

1. 设 X 是一随机变量，$E(X) = \mu$,　$D(X) = \sigma^2$, (μ, σ>0 为常数)，则对任意常数 C，必有（　D　）
   A　E$(X\text{-}C)^2$ = E(X^2) − C^2　　　B.　E$(X\text{-}C)^2$ = E$(X-\mu)^2$
   C.　E$(X\text{-}C)^2$< E$(X-\mu)^2$　　　D.　E$(X\text{-}C)^2$≥E$(X-\mu)^2$

2. 抛一枚均匀硬币 100 次，根据切比雪夫不等式可知，出现正面的次数在 40~60 之间的概率 p 为(A)
   A. ≥ 0.75　　B. ≥ 0.95　　C. ≤ 0.75　　D. ≤ 0.25

3. 设 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，a,b 为实数，则下列等式不成立的是（D　）.

A. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

B. $E(XY) = E(X)E(Y)$

C. $D(aX + bY) = a^2D(X) + b^2D(Y)$

D. $D(aX - bY) = a^2D(X) - b^2D(Y)$

三、计算题

1. 对第七次作业第一大题第 2 小题的ξ，求$D\xi$和$D(1-3\xi)$。

解 $D\xi = E(\xi^2)-(E\xi)^2=\frac{35}{24}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{97}{72}$，$D(1-3\xi)=9D\xi=\frac{97}{8}$。

2. 对第七次作业第三大题第 3 小题中的ξ，求$D\xi$。

解 $D\xi = E(\xi^2)-(E\xi)^2=0\times 0.504+1\times 0.389+4\times 0.093+9\times 0.006-0.6^2=0.46.$

3. 设随机变量ξ具有概率密度 $p(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，计算$D\xi$。

解 $E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.(x^2-\frac{x^3}{3})\right|_1^2=1$，

$E(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot xdx+\int_1^2 x^2\cdot(2-x)dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1+\left.(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4})\right|_1^2=\frac{7}{6}$，

$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=\frac{1}{6}$。

4. 设随机变量ξ仅在[a , b]取值，试证

$$a\le E\xi\le b,\quad D\xi\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

证因为$a\le\xi\le b$，所以$a\le E\xi\le b$.

又因为

$$\frac{a-b}{2}=a-\frac{a+b}{2}\le\xi-\frac{a+b}{2}\le b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow\left|\xi-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{|b-a|}{2}，\ \Rightarrow D\xi\le E\left(\xi-\frac{a+b}{2}\right)\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2。$$

5. 已知某种股票的价格是随机变量ξ，其平均值是 1 元，标准差是 0.1 元。求常数 a，使得股价超过 1+a 元或低于 1-a 元的概率小于 10%。(提示：应用切比雪夫不等式)。

解已知 $E\xi=1,\quad \sqrt{D\xi}=0.1$，

由契比雪夫不等式 $P\{|\xi-1|\ge a\}\le\dfrac{0.01}{a^2}$，

令 $\dfrac{0.01}{a^2}\le 0.1$， 得 $a\ge 0.32$ 。

6. 设随机变量ξ的概率分布为

$$P(\xi=x)=\left(\frac{a}{2}\right)^{|x|}(1-a)^{1-|x|},\quad x=-1,0,1$$

其中 0<a<1。试求： $D\xi$， $D|\xi|$。

解 $E\xi=(-1)\cdot\dfrac{a}{2}+0\cdot(1-a)+1\cdot\dfrac{a}{2}=0,\ E\xi^2=(-1)^2\cdot\dfrac{a}{2}+0^2\cdot(1-a)+1^2\cdot\dfrac{a}{2}=a,$

所以 $D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=a$ 。

又 $E|\xi|=a,\quad E|\xi|^2=E\xi^2=a$， 故 $D|\xi|=E|\xi|^2-(E|\xi|)^2=a(1-a)$ 。