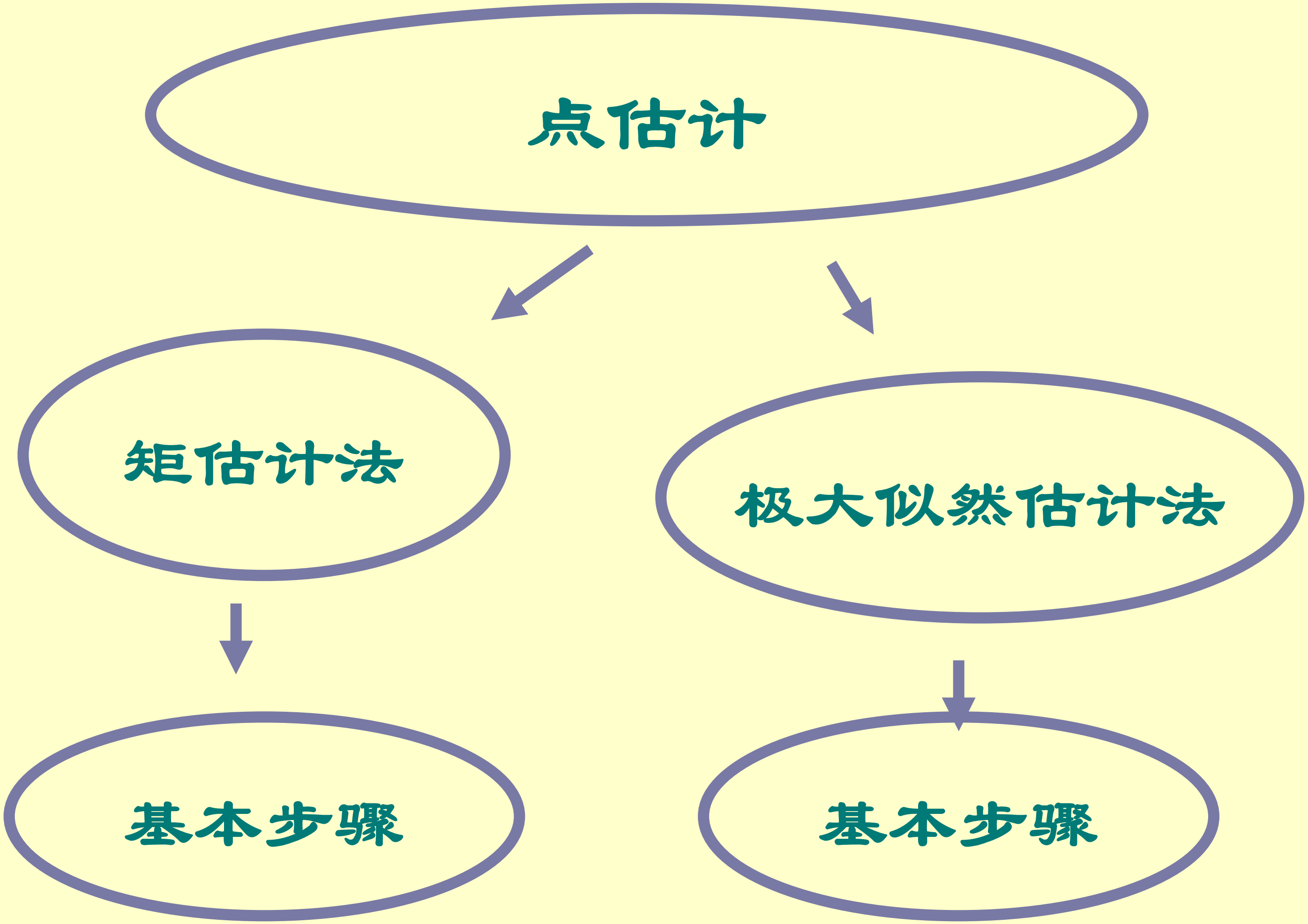

点估计
矩估计法
极大似然估计法
基本步骤
基本步骤

点估计的优良性准则

问题：对这些不同的估计量如何加以比较，从中选出比较好的来加以应用。

无偏性

有效性

相合性（一致性）

定理1

设总体ξ的数学期望$E\xi=\mu$和方差$D\xi=\sigma^2$都存在，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是ξ的样本，$\overline{X}$是样本均值，S^2是样本方差，则有

(1)$E\overline{X}=\mu$;　　(2)$D\overline{X}=\dfrac{\sigma^2}{n}$;

(3)$E(S^2)=\sigma^2$

解:(1) 由于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与总体 ξ 分布相同，

$EX_i=E\xi=\mu$。从而

$$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu.$$

（2）由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布， $D(X_i) = D\xi = \sigma^2$。

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2.$$

（3）$E(S^2) = \dfrac{1}{n-1}(\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i^{\ 2}) - nE(\overline{X})^2)$

$$= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} E\xi^2 - nE(\overline{X})^2) = \frac{n}{n-1}(E\xi^2 - E(\overline{X})^2)$$

$$\therefore E(\overline{X})^2 = [D(\overline{X}) + (E\overline{X})^2] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

$$\therefore E(S^2) = \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 - \mu^2) = \sigma^2$$

（1）无偏性

定义1　设$\hat{\theta}$是参数θ的估计，如果$E_{\theta}(\hat{\theta})=\theta$,

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计。

由定理1知，

(1)$E\overline{X}=E\xi$;　　$\therefore\ \overline{X}$是总体均值$E\xi$的无偏估计;

$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$　不是总体方差$D\xi$的无偏估计;

而$E(S^2)=D\xi$

$\therefore\ S^2$是总体方差$D\xi$的无偏估计

例 1 设总体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为一个样本，$n>1$，试求k使得

$$\hat{\sigma}^2 \overset{\Delta}{=} k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$ 为σ^2的无偏估计。

解：$$E(X_{i+1}-X_i)^2 = D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2$$

$$= DX_i + DX_{i+1} + [E(X_{i+1}-X_i)]^2 = 2\sigma^2$$

从而$$E(\hat{\sigma}^2) = k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2 = k\cdot 2(n-1)\sigma^2 \overset{令}{=} \sigma^2$$

解得：$k = 1/2(n-1)$

例 2 设总体 $\xi \sim U[0,\theta]$， $\theta>0$ 为未知参数，

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一个样本。

试验证 $\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n} X_i$ 和 $\hat{\theta}_2 = 2\overline{X}$ 均为 θ 的无偏估计;

解 X_i 的密度为

$$p_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & x\in[0,\theta] \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

故 $\max\limits_{1\le i\le n} X_i$ 的分布函数为：

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{x\in(-\infty,0)} \\ \boldsymbol{(\frac{x}{\theta})^n}, & \boldsymbol{x\in[0,\ \theta)} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x\in[\theta,+\infty)} \end{cases}$$

对应的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} n\dfrac{x^{n-1}}{\theta^n}, & x\in(0,\ \theta) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

从而 $E(\hat{\theta}_1)=E(\dfrac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}X_i)=\dfrac{n+1}{n}E(\max\limits_{1\le i\le n}X_i)$

$$=\frac{n+1}{n}\int_0^\theta x\cdot n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}dx=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{\theta^n}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^\theta$$

$$=\theta$$

$$E(\hat{\theta}_2)=E(2\overline{X})=2E\overline{X}=2E\xi=2\times\frac{\theta}{2}=\theta$$

即 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 皆为 θ 的无偏估计。

（2）有效性

定义2 设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$都是参数$\theta$的无偏估计，如果$D_\theta\hat{\theta}_1 \le D_\theta\hat{\theta}_2$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

定理 2 设总体ξ的均值为μ，方差为σ^2。$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自总体的一个样本。令

$$C = \{\hat{\mu} \mid \hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} l_i X_i, \text{其中} \sum_{i=1}^{n} l_i = 1\}\text{。}$$

则在集合中当且仅当$l_1 = l_2 = \cdots = l_n = \dfrac{1}{n}$时，$\hat{\mu}$的方差达到最小.

（3）相合性（一致性）

定义3　设$\hat{\theta}$是参数θ的估计，n是样本容量，

如果对任何$\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的相合估计（一致估计）。

结论：（1）矩法估计都是相合估计。

（2）大多数极大似然估计是相合估计。

区间估计的“枢轴量”方法

对于未知参数给出一个依赖于样本的区间，使其包含或覆盖参数真实值的概率满足一定的要求

设 θ 是总体的一个参数，其参数空间为 Θ，

$(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 为取自总体的一个样本。

若对于事先给定的 $\alpha \ (0 < \alpha < 1)$，

存在 $\hat{\theta}_l = \hat{\theta}_l(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots X_n)$，

满足对任意的 $\theta \in \Theta$，成立概率估计式：

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\} = 1 - \alpha$$

其中 P_θ 是指总体分布中参数取为 θ 时概率分布，则称

随机区间[$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信

区间. $\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别为置信下限和置信上限。

注1：置信区间是一个随机的区间，其上、下限随样本的观测值而变化

注2：置信水平 $1-\alpha$ 有一个频率解释：在大量的区间估计观测值中，大约有100（$1-\alpha$）%的区间包含 θ 。

注3：置信区间具有两个要素：信度或可靠度,精度

单个正态总体参数的置信区间

σ已知时，μ的置信区间

设总体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中$\sigma>0$ 已知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

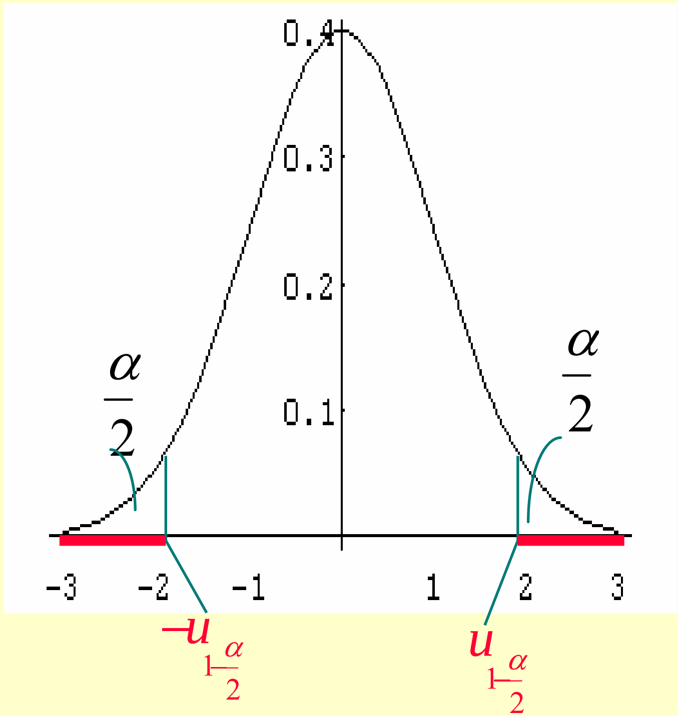
是ξ的样本，要求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

令 $$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

对于给定的置信水平$1-\alpha$，可查表得

到相应的临界值$U_{1-\frac{\alpha}{2}}$,满足

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right| \le U_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$



$$P\left\{\overline{X}-U_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+U_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

参数 μ 的一个置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\overline{X}-U_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+U_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}].$$

其中 μ 的置信下限为 $\hat{\mu}_L=\overline{X}-U_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，置信上限为 $\hat{\mu}_U=\overline{X}+U_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。

例 **1** 假设某种轮胎的寿命服从正态分布 $N(\mu, 0.06^2)$，为估计该种轮胎的平均寿命 μ，现随地抽取 **12** 只轮胎试用，测得它们的寿命（单位：万公里）如下：

4.68	4.85	4.32	4.85	4.61	5.02
4.60	4.58	4.72	4.38	4.70	5.20

试求该种轮胎的平均寿命 μ 的置信水平为 **95%** 的置信区间。

解：方差 $\sigma^2 = 0.06^2$ 已知，样本均值 $\overline{x} = 4.7092$。又由 $1-\alpha = 0.95$ 查表可得 $U_{0.975} = 1.96$。

μ 置信下限与置信上式分别为：

$$\hat{\mu}_L = \overline{X} - U_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.7092 - 1.96 \times \frac{0.06}{\sqrt{12}} = 4.6753,$$

$$\hat{\mu}_U = \overline{X} + U_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.7092 + 1.96 \times \frac{0.06}{\sqrt{12}} = 4.7432.$$

即平均寿命 μ 的 **95**%置信区间为**[4.6753, 4.7432]**

σ未知时，μ的置信区间

设总体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中$\sigma > 0$未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

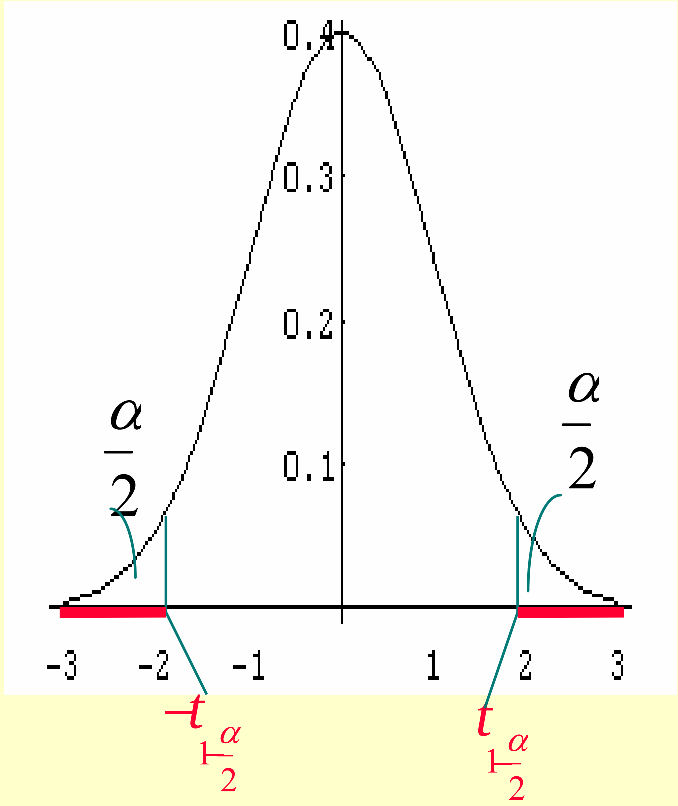
是ξ的样本，要求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

令
$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

对于给定的置信水平$1-\alpha$，可查表得

到相应的临界值$t_{1-\frac{\alpha}{2}}$，满足

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\right| \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$



$$P\left\{\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

参数μ的一个置信水平$1-\alpha$的置信区间为

$$[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}].$$

其中μ的置信下限为$\hat{\mu}_L=\overline{X}-t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$，置信

上限为$\hat{\mu}_U=\overline{X}+t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$。

例 **2** 已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现在随机地抽取了 **10** 个试件进行抗压试验，测得数据如下（单位：$\mathrm{kg/mm^2}$）：

482　493　457　471　510　446　435　418　394　469

求平均抗拉强度 μ 的置信水平为 **95%** 的置信区间；

解　$n = 10, \bar{x} = 45.75$，$S_{n-1} = .35.2176$。

由$\alpha = 0.05$，自由度为$n-1=9$，　$t_{0.975}(9) = 2.2622$，

$$\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} = 457.5 - 2.2622 \times \frac{35.2176}{\sqrt{10}} = 432.3066$$

$$\bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} = 457.5 + 2.2622 \times \frac{35.2176}{\sqrt{10}} = 482.6935$$

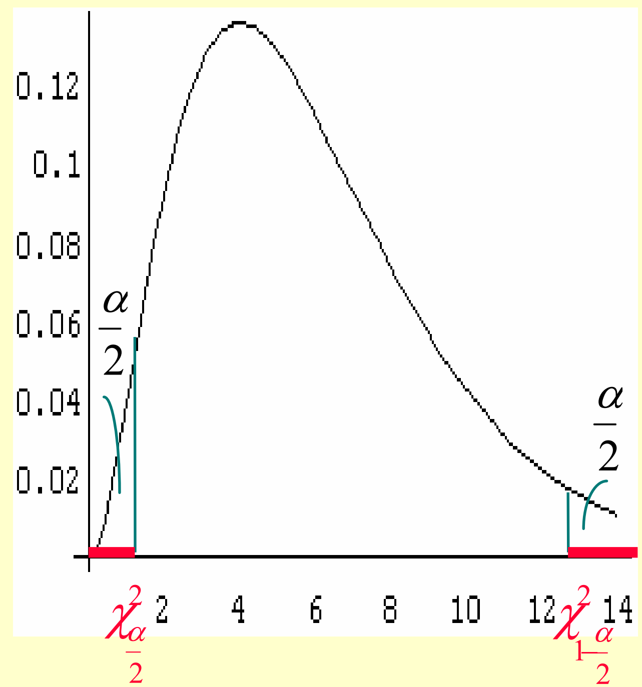
μ 未知时,σ^2 的置信区间

设总体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ 已知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是

ξ 的样本，要求 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

令

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$



取等尾置信区间，即采用 χ^2 的两个临界值 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 和 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$,使得

$$P\left\{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

例 **3** 已知某种材料的抗压强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，现在随机地抽取了 **10** 个试件进行抗压试验，测得数据如下（单位：$\mathrm{kg/mm^2}$）：

482 493 457 471 510 446 435 418 394 469

求方差 σ^2 的置信水平为 **95**% 的置信区间。

解：　$\alpha = 0.05$，自由度为$n-1=9$，

$$\chi^2_{0.975}(9) = 19.023\,,\ \chi^2_{0.025}(9) = 2.700\,,$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{9\times 35.2176^2}{19.023} = 586.790\,,$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} = \frac{9\times 35.2176^2}{2.700} = 4134.2644\,.$$

即 方 差 σ^2 的 置 信 水 平 为 95 % 的 置 信 区 间 为 $[586.790,\quad 4134.2644]$。

两个正态总体参数的置信区间

设总体 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，总体 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，

$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, $(Y_1, Y_2, \cdots Y_n)$ 分别为取自总体 ξ, η

的样本，且相互独立。记 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别为它们的样本均

值， S_x^2， S_y^2 分别为它们的样本方差。

$\mu_1-\mu_2$的置信区间

假设$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

$$T \triangleq \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$$

其中$S_w=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_x^2+(n-1)S_y^2}{m+n-2}}$

查表得$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$,

$$P\left\{-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\le\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\le t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}=1-\alpha$$

$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ (\bar{X}-\bar{Y})+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$$

σ_1^2/σ_2^2 的置信区间

$$F \stackrel{\Delta}{=} \frac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1,n-1)$$

对于给定的置信水平 $1-\alpha$

$$P\left\{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1) \le \frac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2} \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)\right\} = 1-\alpha$$

σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_x^2/S_y^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)},\ \frac{S_x^2/S_y^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,n-1)}\right]$$

例 **4** 某化工厂为提高某一生产过程的得率，试图采用新的催化剂。在试验中，用原来的催化剂做了 $m=8$ 次试验，得到得率的平均值为 $\overline{x}=91.73$，样本方差 $S_x^2=3.8857$；用新的催化剂做了 $n=8$ 试验，得到得率的平均值为 $\overline{y}=93.75$，样本方差 $S_y^2=4.0229$。假定两个总体均服从正态分布，试求两总体得率期望值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 **95%** 的置信区间。

解： 检验 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

$m = 8, n = 8$， $S_x^2 = 3.8857$ ，$S_y^2 = 4.0229$ 。

对于 $\alpha = 0.05$ 查表

$$F_{0.975}(7,7) = 4.99 \qquad F_{0.025}(7,7) = \frac{1}{F_{0.975}(7,7)}$$

$$\frac{S_x^2 / S_y^2}{F_{0.975}(7,7)} = \frac{3.8857/4.0229}{4.99} = 0.1936$$

$$\frac{S_x^2 / S_y^2}{F_{0.025}(7,7)} = \frac{3.8857/4.0229}{1/4.99} = 4.8199$$

注意到 $1 \in [0.1936, 4.8199]$， 故在实际中可

认为 $\sigma_x^2 / \sigma_y^2 = 1$， 即 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ 。

$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平

对于 $\alpha = 0.05$， $t_{0.975}(14) = 2.1448$，

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

$$= (91.73 - 93.75) \pm 2.1448 \times 1.9885 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}$$

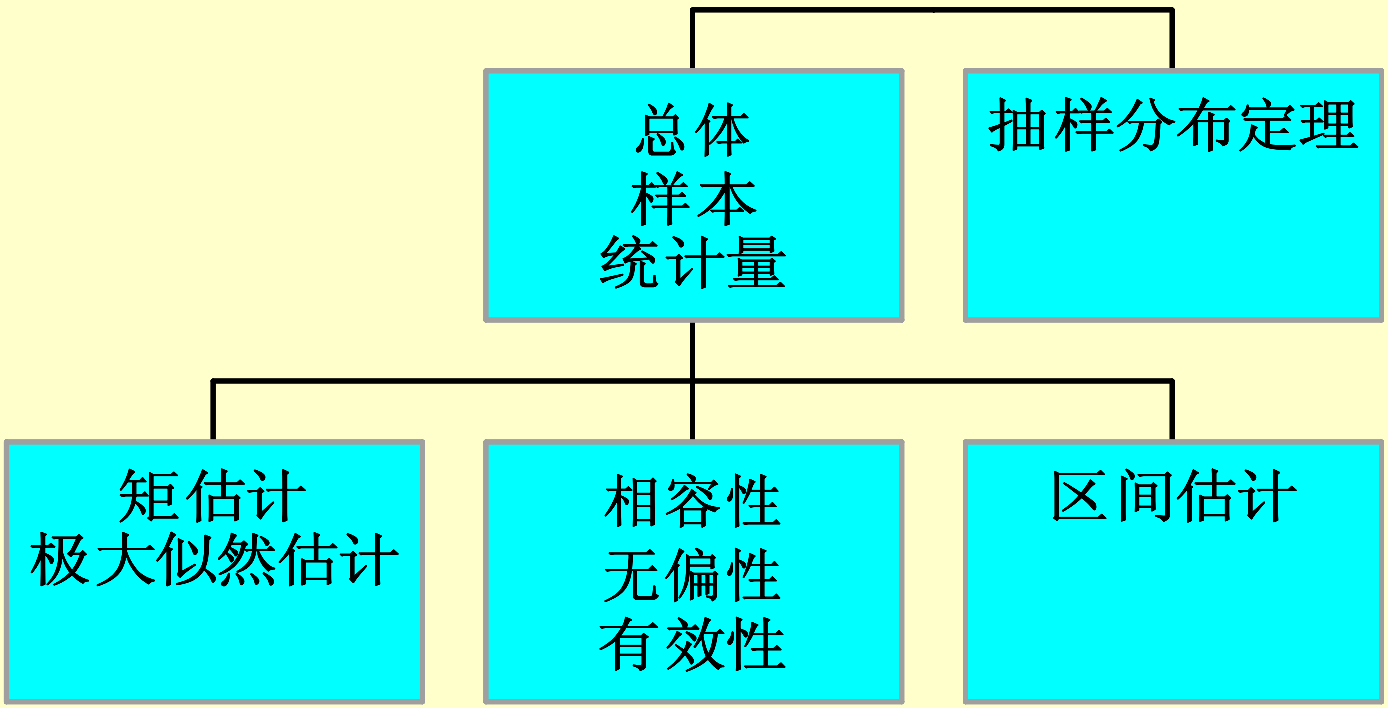
$$= -2.02 \pm 2.1325$$

两总体期望值之差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 **95**% 的置信区间为 $(-4.1525, 0.1125)$。

	待估参数	给定条件	枢轴量	对应的分布
单个总体	μ	σ 已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$
		σ 未知	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$
	σ^2	μ 已知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2+n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n)$
		μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$

两个总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1，σ_2 已知	$U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$
		σ_1，σ_2 未知，但 $\sigma_1=\sigma_2$	$T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}$	$t(m+n-2)$
	σ_1^2/σ_2^2	μ_1，μ_2 已知	$F=\dfrac{[(m-1)S_x^2/m+(\overline{X}-\mu_1)^2]/\sigma_1^2}{[(n-1)S_y^2/n+(\overline{Y}-\mu_2)^2]/\sigma_2^2}$	$F(m,n)$
		μ_1，μ_2 未知	$F=\dfrac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,n-1)$

小结



估计量的评选标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性