概率论

与

数理统计

概率论研究的是什么？

随机现象：不确定性与统计规律性

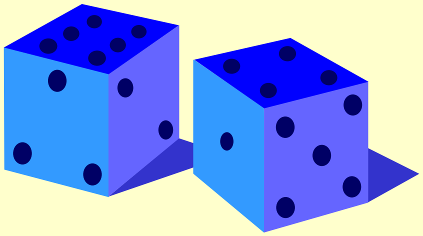
研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科

主 要 内 容

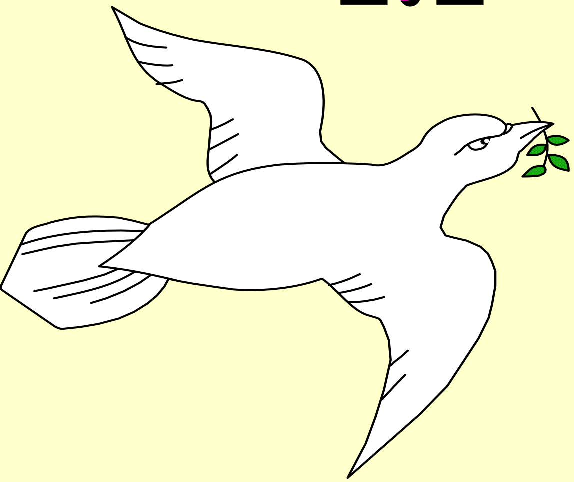
- 随机事件及其概率
- 随机变量及其分布
- 随机变量的数字特征
- 多维随机变量
- 大数定律与中心极限定理
- 数理统计的基本知识
- 参数估计
- 假设检验
- 方差分析
- 回归分析

第一章
随机事件及其概率

- 样本空间、随机事件及其运算
- 几何概型与古典概型
- 概率的定义及其性质
- 条件概率和独立性
- 全概率公式与贝叶斯公式



1.1随机事件及其运算



一、基本概念

现象：

- 确定现象
- 随机现象——在个别试验中，其结果呈不确定性，在大量重复试验中，结果又具有统计规律性。

复习

随机试验

- 可在相同条件下重复进行。
- 每次试验的可能结果不止一个，并且事先明确试验的所有可能结果。
- 试验前无法预知究竟哪个结果出现。

样本空间

所有可能结果放在一起构成的集合，记为Ω 。

样本点

每一个可能的结果，记为 ω。

例 1.一袋中有三个白球（编号 1，2，3）与二个黑球（编号 4，5），现从中任取两个，观察两球的 1）颜色；2）号码。

解：1）令 ω_1 表示两个白球，ω_2 表示两个黑球，ω_3 表示一黑一白，

则 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

2）令 $\omega_{ij}(i<j, i, j=1,2,3,4,5)$ 表示两球的号码为 i 和 j，

则 $\Omega=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}$

注意：同一随机试验可能有不同的样本空间。即样本点和样本空间是由试验内容而确定的。

- 随机事件

样本空间的一个子集，简称事件。

事件常用大写字母A、B、C等表示。

- 基本事件

由一个样本点组成的单点集称为一个基本事件，记为E.

- 事件A发生

该子集A中至少有一个样本点出现。

● 特殊的事件

- 必然事件:Ω
- 不可能事件:$\varnothing$

例 2.一袋中有三个白球（编号 1，2，3）与二个黑球（编号 4，5），现从中任取两个，观察两球的号码。试表示事件“两个球的号码为双数”、“两个球的号码为单数”、“两个球的号码不超过 3”。

解：令 $\omega_{ij}\,(i<j, i,j=1,2,3,4,5)$ 表示两球的号码为 i 和 j，

则 $\Omega=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\}$

事件 A 表示两个球的号码为双数，

则 $A=\{\omega_{24}\}$

事件 B 表示两个球的号码为单数，

则 $B=\{\omega_{13},\omega_{15},\omega_{35}\}$

事件 C 表示两个球的号码均不超过 3，

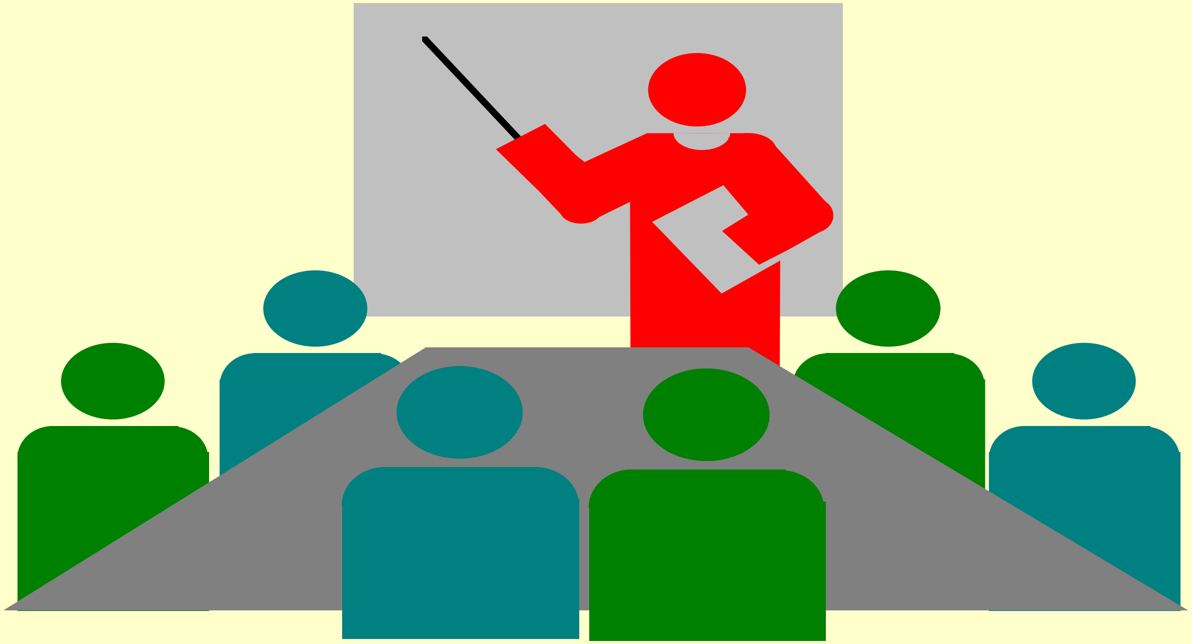
则 $C=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{23}\}$

“两个球的号码都不超过5” $=\Omega$

“有一个球的号码是6” $=\varnothing$

二、事件间的关系和运算

（一）事件间的关系

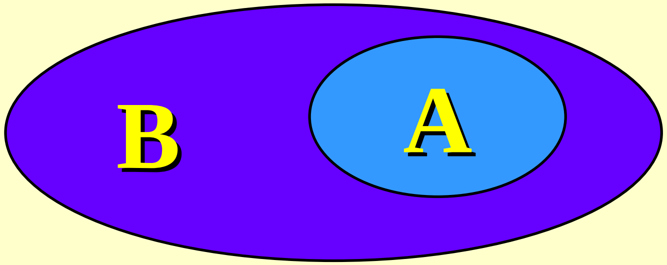


复习

1.事件 B 包含事件 A:

A 发生必然导致 B 发生，

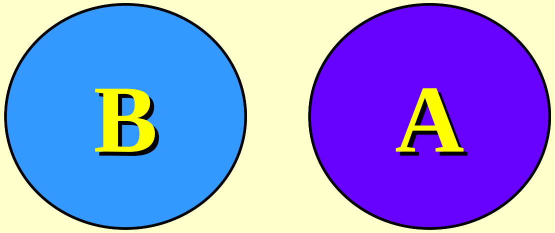
记为 $B \supset A$，或 $A \subset B$。



2.事件 A 与事件 B 相等:

若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，

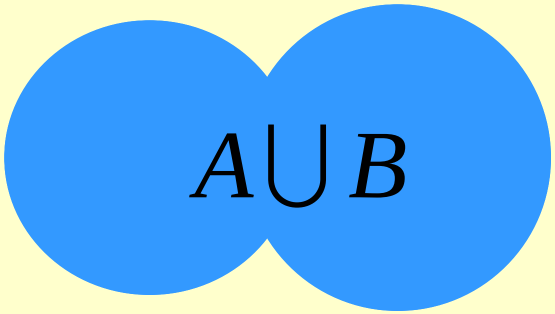
记为 $A = B$。



3.事件 A 与事件 B 的和：

A， B 中至少有一个发生，

记为 $A\cup B$ 或 $A+B$ 。



推广：

1)有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和：

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，记为：$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{n} A_i$ 。

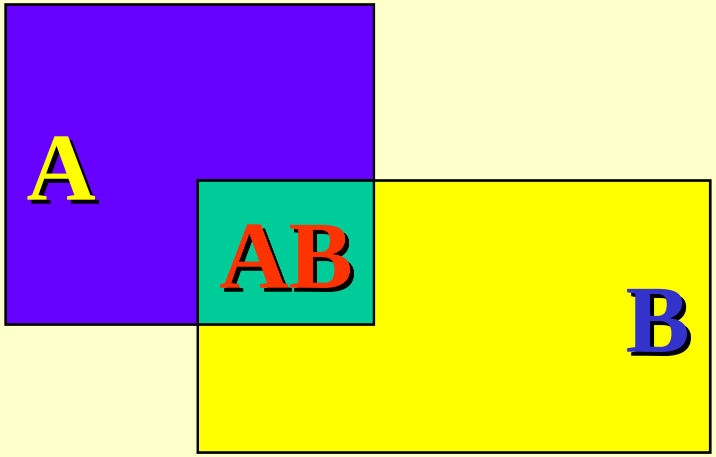
2)可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和：

$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生，

记为：$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

4.事件 A 与事件 B 的积:

事件 A 与 B 同时发生，



记为： $A\cap B$ 或 $A\,B$ 。

推广：

1)有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，记为： $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\prod_{i=1}^{n} A_i$ 。

2)可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积：

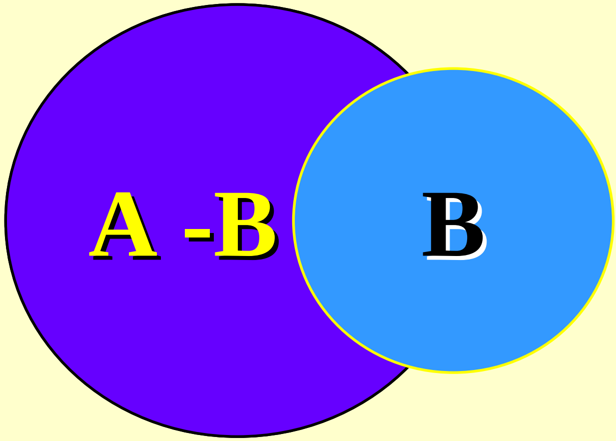
$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生，

记为： $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

5.事件 A 与事件 B 的差:

若 A 发生，而 B 不发生，

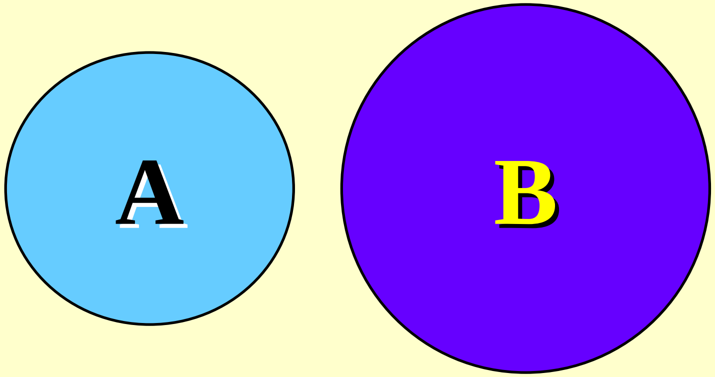
记为 $A-B$ 。



6.事件 A 与事件 B 互斥（互不相容）:

A，B 不能同时发生，

记为：$AB=\varnothing$。

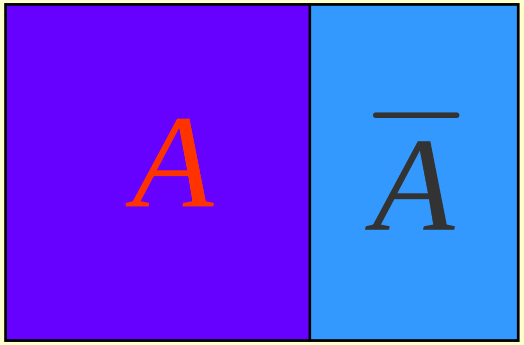


7.事件 A 和事件 B 互逆（对立）:

若 A，B 中有且仅有一个发生，

即 $A\cup B=\Omega$， $AB=\varnothing$。

A 的对立事件记为 $\overline{A}=\Omega-A$.



注意：对立 $\neq$ 互斥

互斥+互补=对立.

例3：掷骰子，观察掷得的点数。

语言表示

假设**A**表示掷出奇数点，则 $A=\{1,3,5\}$

B表示掷出点数不超过五点，则 $B=\{1,2,3,4,5\}$

$\therefore A\subset B$

集合表示

若**C**表示不是偶数，即 $C=\{1,3,5\}$，则 $A=C$

$A\bigcup B=\{1,2,3,4,5\}$， $A\bigcap B=\{1,3,5\}$

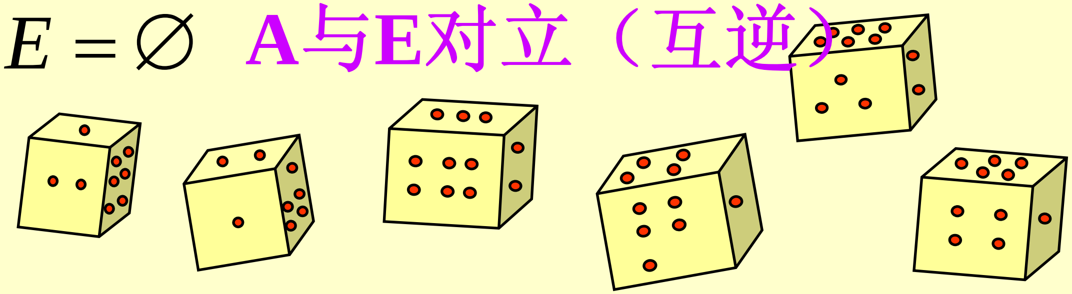
$B-A=\{2,4\}$，

若**D**表示不超过**4**的偶数点，即 $D=\{2,4\}$

则 $AD=\varnothing$ **A与D互斥（互不相容）**

若**E**表示掷出的是偶数点，即 $E=\{2,4,6\}$

$A\bigcup E=\Omega$， $A\bigcap E=\varnothing$ **A与E对立（互逆）**



描述随机事件的三种方法：

- ☞ 集合表示；
- ☞ 语言表示；
- ☞ 函数表示（随机变量）。

随机变量是 ω 的函数.

例如：示性函数

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$$

$$I_A=1\Leftrightarrow A;\quad I_A=0\Leftrightarrow \overline{A}$$

例 4.射击三枪，A_i 表示第 i 枪打中，$i=1,2,3$

ξ表示击中次数, 则

只击中第一枪: $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$

只击中一枪: $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$\xi=1$

三枪都未击中: $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$

$\xi=0$

至少击中一枪: $A_1\cup A_2\cup A_3$ $\xi\geq 1$

三枪没有都击中: $\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$

$\xi<3$

（二）事件间的运算

1.交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$

2.结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3.分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

4.德·摩根律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$

5.对立事件的性质: $\overline{\overline{A}}=A$, $A+\overline{A}=\Omega$, $A\overline{A}=\varnothing$.

例5　设A，B都是随机事件。

试证：$\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\overline{AB}$

证明：右边 $=\overline{A}+\overline{B}$

$$=\overline{A}\Omega+\Omega\overline{B}$$

$$=\overline{A}(B+\overline{B})+(A+\overline{A})\overline{B}$$

$$=\overline{A}B+\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}$$

$$=\overline{A}B+A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{B}=\text{左边}$$

例6 设A，B,C是随机事件。

试证: $(A+B)-AB=A\overline{B}+\overline{A}B$

证明:左边 $=(A+B)\overline{AB}$

$$=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

$$=A\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}$$

$$=\varnothing+A\overline{B}+B\overline{A}+\varnothing$$

$$=A\overline{B}+B\overline{A}=\text{右边}$$

事件关系和运算的作用

——将复杂事件化为简单事件。