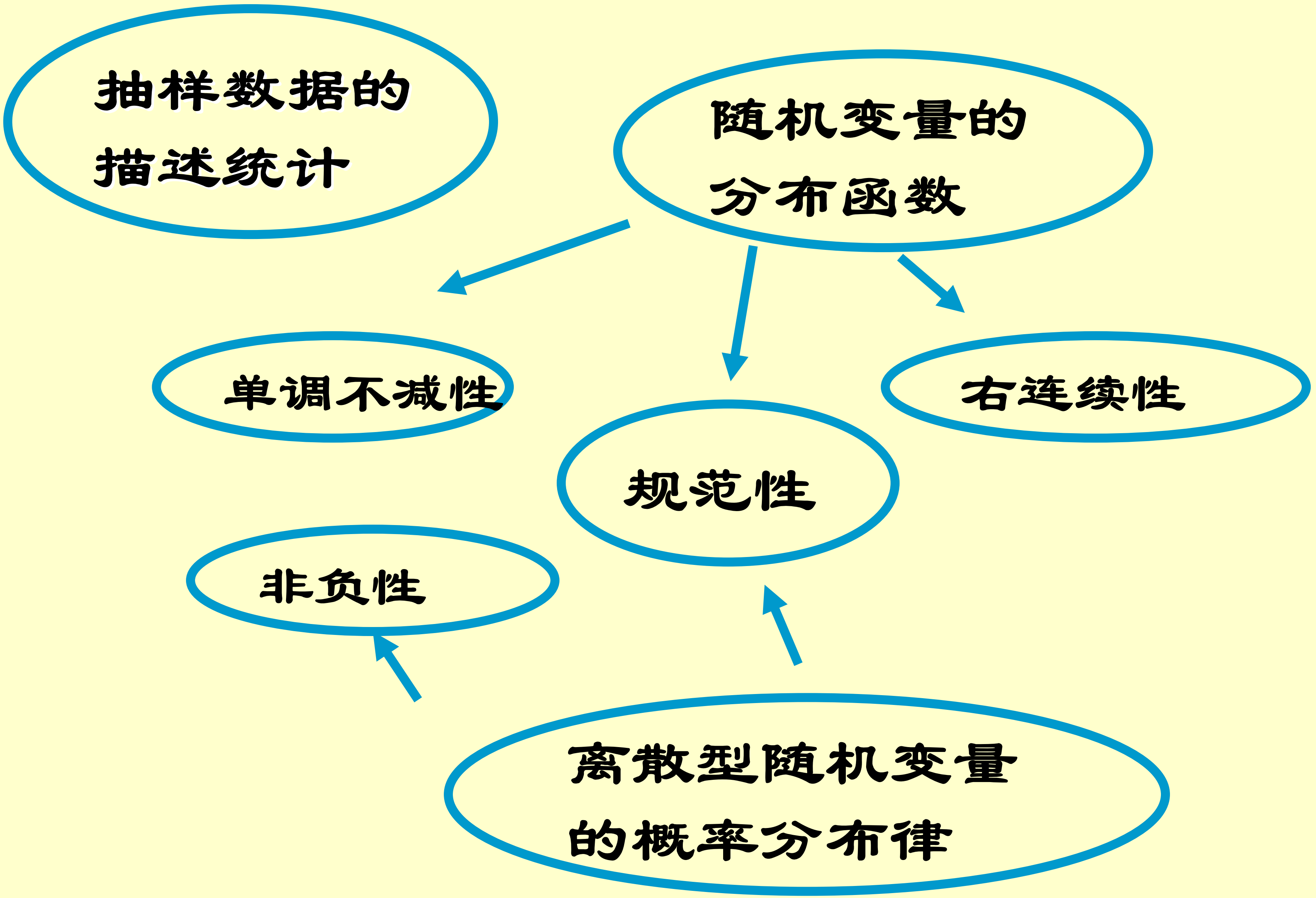

抽样数据的描述统计
随机变量的分布函数
单调不减性
规范性
右连续性
非负性
离散型随机变量的概率分布律

2.4 连续型随机变量

连续型随机变量的概率密度

1)定义:如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 存在非负函数 $\varphi(x)$，使对于任意实数 $x, x \in R$，有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$，则称 X 为连续型随机变量，其中，$\varphi(x)$ 称为 X 的概率密度函数。

2)性质:

(1) $\varphi(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx = 1$;

3)已知概率密度求分布函数

$$P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx.$$

4)已知分布函数求概率密度:

若 $\varphi(x)$ 在点 x 处连续，则 $F'(x) = \varphi(x)$

即 $\varphi(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$

当 $\Delta x \to 0$ 时， $P(x < X \le x + \Delta x) \approx \varphi(x)\Delta x = F'(x)\Delta x$

即 X 落在区间 $(x, x+\Delta x]$ 上的概率近似地等于 $\varphi(x) \cdot \Delta x$.

5)结论： **(1)**对连续型随机变量 X， $P\{X=c\}=0$

(2) $P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)\ =P(a\le X<b)$
$=P(a<X<b)=F(b)-F(a)$

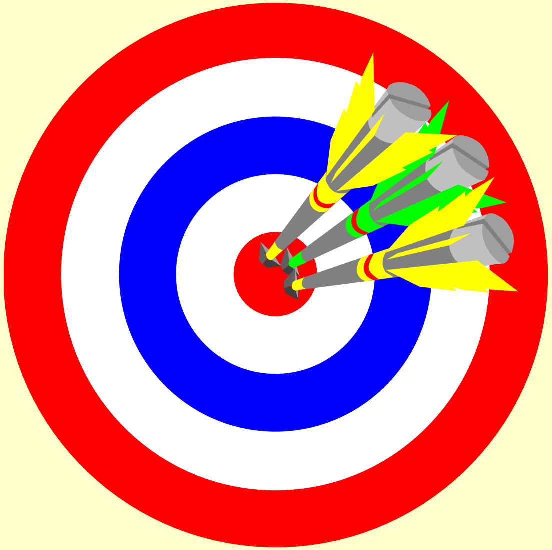
(3)连续型随机变量的分布函数是连续函数。

连续型随机变量与离散型随机变量的区别：

1)由于连续型随机变量 X 是在一个区间内取值，所以它的所有可能取值不能一一列举出来，因而不能用分布律来描述它。

2)它在任一指定值的概率为 **0**。即： $P(X=c)=0$

例 1. 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离，（1）试求随机变量 X 的分布函数 $F(x)$；（2）将靶的半径 10 等分，若击中点落在以 0 为中心，内外径分别为 $\frac{i}{10}\times 2$ 及 $\frac{i+1}{10}\times 2$ 的圆环内，则记为 $(10-i)$ 环，求一次射击得到 $(10-i)$ 环的概率 $(i=0,1,\cdots,9)$。

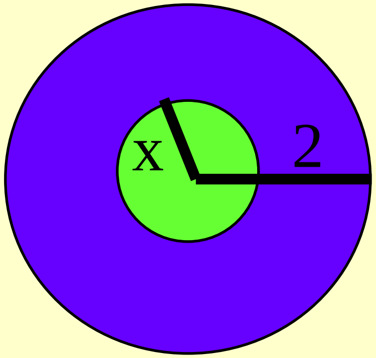


解：（1）求 $F(x)$

当 $x<0$ 时，$X\le x$ 是不可能事件，则

$$F(x)=P\{X\le x\}=0$$

当 $0\le x\le 2$ 时，



$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X<0\}+P\{0\le X\le x\}$$

$$=0+k\pi x^2=k\pi x^2$$

$$P\{0\le X\le 2\}=k\pi\cdot 2^2=4k\pi$$

而 $0\le X\le 2$ 是必然事件，因此，$P\{0\le X\le 2\}=1$

即 $4k\pi=1$，$k=\dfrac{1}{4\pi}$。 $\therefore\ F(x)=\dfrac{x^2}{4}$

当 $x>2$ 时，$X<x$ 是必然事件，

$$F(x)=P\{X\le x\}=1$$

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

（**2**） $P(\frac{2i}{10} < X \le \frac{2(i+1)}{10}) = F(\frac{2(i+1)}{10}) - F(\frac{2i}{10})$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4(i+1)^2}{100} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4i^2}{100} = \frac{2i+1}{100}$$

$(i = 0,1,\cdots,9)$

环数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
概率	$\frac{19}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{100}$

例 2.随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{R^2}, & 0\le x\le R \\ 1, & x>R \end{cases},$$

求 X 的概率密度。

解：
$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{R^2}, & 0\le x<R \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意：$x=R$ 时，左导数为 $\dfrac{2}{R}$，右导数为 **0**，所以，

$F(x)$ 在 $x=R$ 不可导，现规定 $\varphi(R)=F'(R)=0$。

即：$\varphi(x)$ 在 $x=R$ 间断.(密度函数 $f(x)$ 不一定连续。)

例 3.使用 t 小时的电子管在以后的 Δt 小时内，损坏的概率为 $\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)$, $\lambda>0$，求电子管寿命（即电子管损坏前已使用的时数）的分布函数。

解：设电子管的寿命为 T，它的分布函数为 $F(t)=P\{T\le t\}$。

当 $t\le 0$ 时， $F(t)=0$

当 $t\ge 0$ 时， $F(t+\Delta t)=P\{T\le t+\Delta t\}$

$$=P\{T\le t\}+P\{t<T\le t+\Delta t\}$$

$$=F(t)+P\{T\le t+\Delta t\mid T>t\}P\{T>t\}$$

$$=F(t)+[\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)][1-F(t)]$$

即 $F(t+\Delta t)-F(t)=[\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)][1-F(t)]$

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\frac{\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)}{\Delta t}[1-F(t)]$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)}{\Delta t}[1-F(t)]$$

$$F'(t)=\lambda[1-F(t)]$$

$$\therefore F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}\text{。}$$

例 4.设随机变量 X 具有概率密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases} ke^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

试确定常数 k，并求 $P(X>0.1)$ 及 $F(x)$。

解：(1) $\because \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$，$\therefore \int_{0}^{\infty}ke^{-3x}dx=1$，

$$k\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\Big|_0^{\infty}=1, \qquad \therefore k=3,$$

即 $$\varphi(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

(2) $P(X>0.1)=\int_{0.1}^{\infty}\varphi(x)dx=\int_{0.1}^{\infty}3e^{-3x}dx$

$$=-e^{-3x}\Big|_{0.1}^{\infty}=0.7408$$

(3)当 $x \le 0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$

当 $x>0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_{0}^{x} = 1-e^{-3x}$

$$\therefore F(x)=\begin{cases} 1-e^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

一般，随机变量 X 的分布密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases},$$

$\lambda>0$，则称 X 为指数分布，记为 $e(\lambda)$。

（常用在产品的寿命）

例 5. 设连续型随机变量ξ的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1） 若已知存在a，使$P\{\xi<a\}=P\{\xi>a\}$，试求常数a

（2） 已知$P(\xi>b\}=0.05$，试求常数b。

解：（1） $P\{\xi < a\} + P\{\xi = a\} + P\{\xi > a\} = 1.$

$\because P\{\xi = a\} = 0, \quad \therefore P\{\xi < a\} = P\{\xi > a\} = 0.5$

由密度公式显然可设 $a \in (0, 1)$

$$P\{\xi < a\} = \int_{-\infty}^{a} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int_{0}^{a} p(t)dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{a} 4t^{3} dt = t^{4} \big|_{0}^{a} = a^{4}$$

$\therefore a = \sqrt[4]{0.5} = 0.8409.$

(2) $P\{\xi > b\} = \int_{b}^{1} 4t^{3} dt = 1 - b^{4}$

$\therefore b = \sqrt[4]{1 - 0.05} = \sqrt[4]{0.95} = 0.9873.$

例 6.连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases} Ax^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0\quad, & x\le 0 \end{cases}$$

其中，k 为正整数。求系数 A 的值。

解：$\because \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} A x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1$

令 $x = 2t$， 则 $A \cdot \int_{0}^{+\infty} 2^{\frac{k}{2}-1} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t} 2dt = 1$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \int_{0}^{+\infty} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-t} dt$$

$\therefore A \cdot 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = 1, \quad \therefore A = \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}.$

$\therefore$连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases}$$

称随机变量 X 服从自由度为 k 的卡方分布，记为 $X \sim \chi^2(k)$。

★Γ函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$，　$\alpha>0$

Γ函数的性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$