几个常用的连续型随机变量

均匀分布

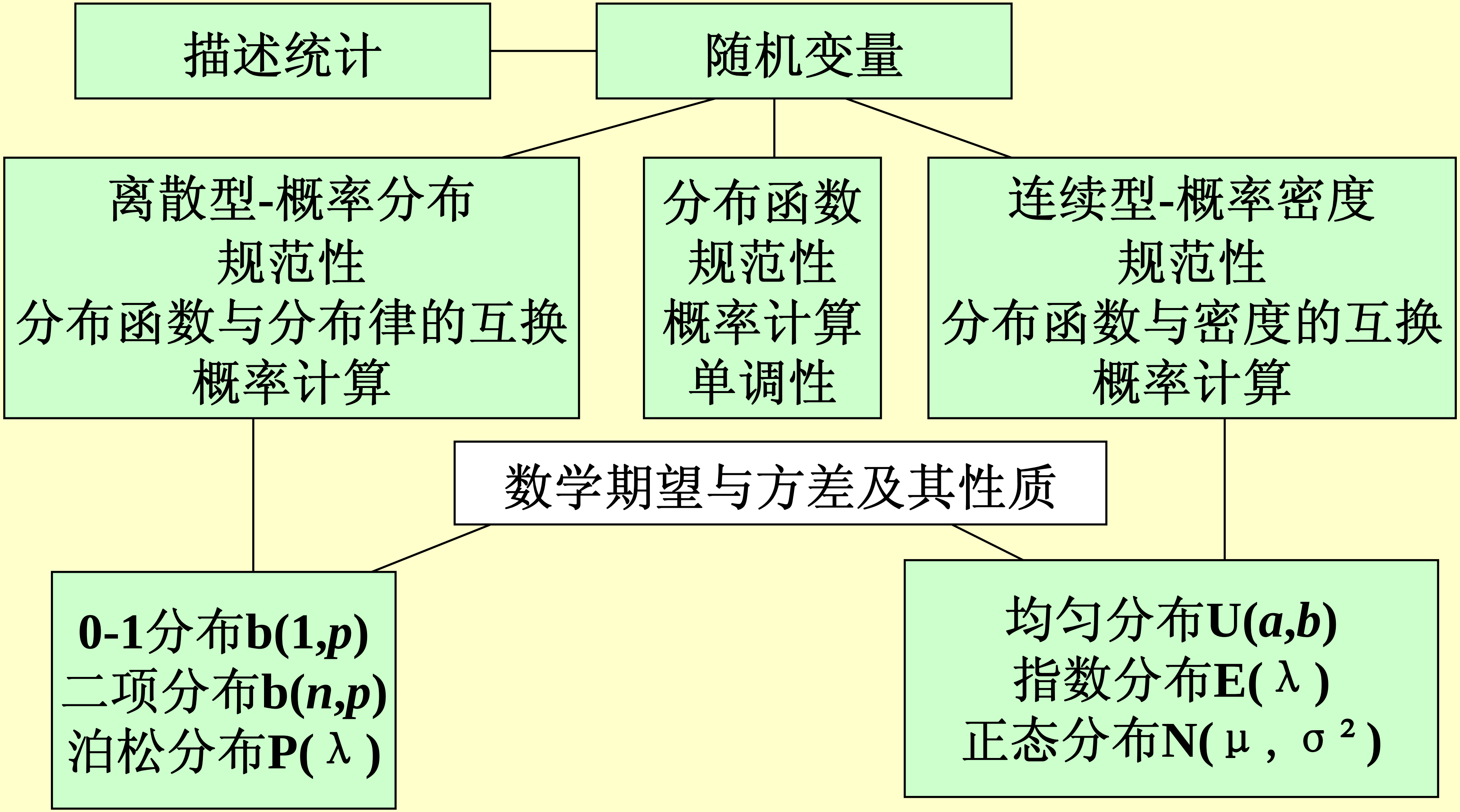
$P\{c<X<d\}$

正态分布

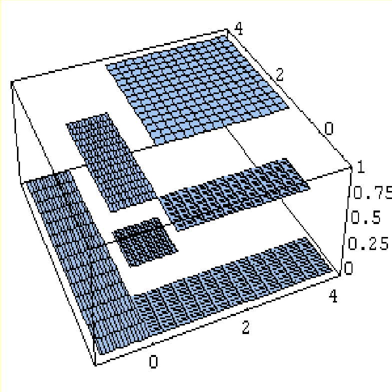
两个参数的意义

指数分布

第二章　小结

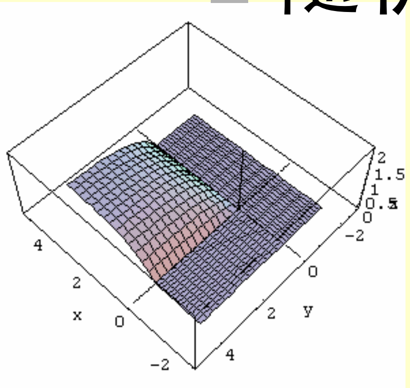

描述统计
随机变量
离散型-概率分布
规范性
分布函数与分布律的互换
概率计算
分布函数
规范性
概率计算
单调性
连续型-概率密度
规范性
分布函数与密度的互换
概率计算
数学期望与方差及其性质
0-1分布b(1,p)
二项分布b(n,p)
泊松分布P(λ)
均匀分布U(a,b)
指数分布E(λ)
正态分布N(μ , σ ²)

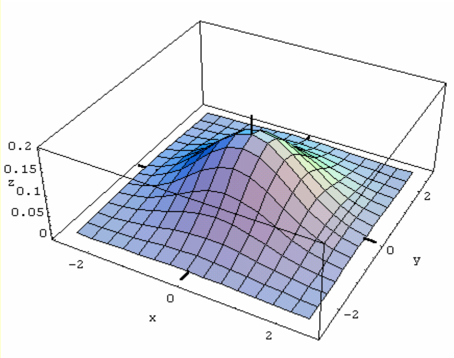
第三章　随机向量及其函数的概率分布



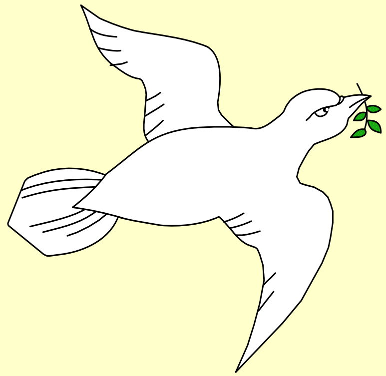
主要内容:

- 随机向量及其联合分布
- 边际(边缘)分布，条件分布及统计独立性
- 二维随机向量的数字特征
- 随机变量(向量）函数的概率分布





1. 随机向量及其联合分布



随机向量的定义：

设 $\{\xi_i(\omega)\}\quad i=1,2,\cdots,n$ 是定义在同一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 n 个随机变量，则称 $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))$ 为 n 维随机向量或 n 维随机变量。

分布函数的定义

对任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{\xi_1\le x_1,\xi_2\le x_2,\cdots,\xi_n\le x_n\}$$

为随机向量 ξ 的（联合）分布函数。

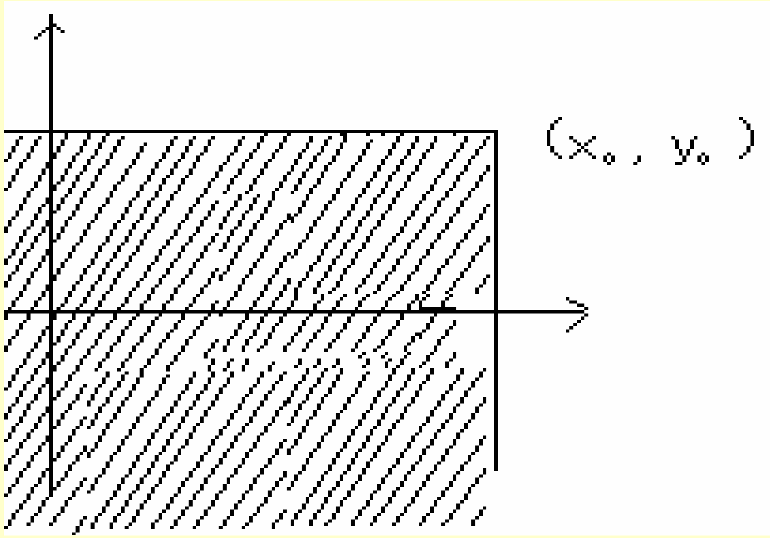
二维随机变量(X,Y)的分布函数：

$$F(x_0, y_0) = P(X \le x_0, Y \le y_0)$$

几何意义：分布函数F(x_0, y_0)表示随机点(X,Y)落在区域

$\{(x, y), -\infty < x \le x_0, -\infty < y \le y_0$

中的概率。如图阴影部分：



二维分布函数$F(x,y)$的性质：

(1) $F(x,y)$是x或y的单调非减.

(2) $0 \le F(x,y) \le 1$，且$F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty} F(x,y)=0,$$

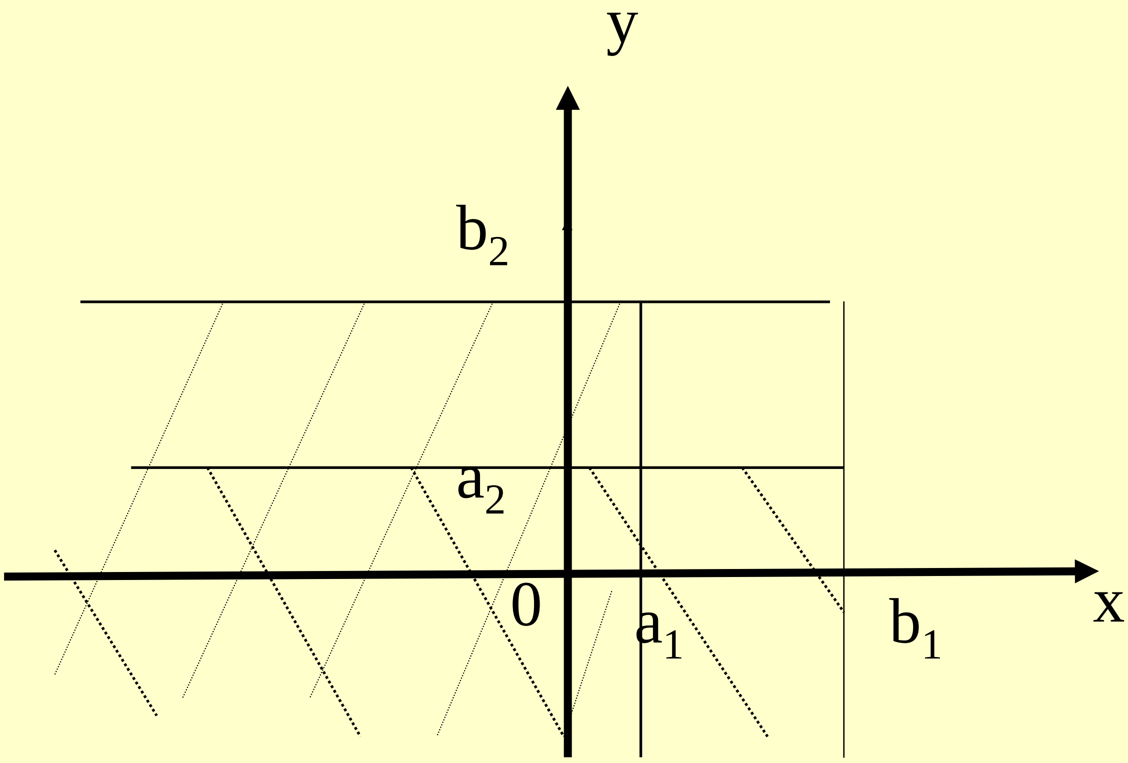
$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty} F(x,y)=0,$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0$$

(3) $F(x,y)$是x或y的右连续函数.

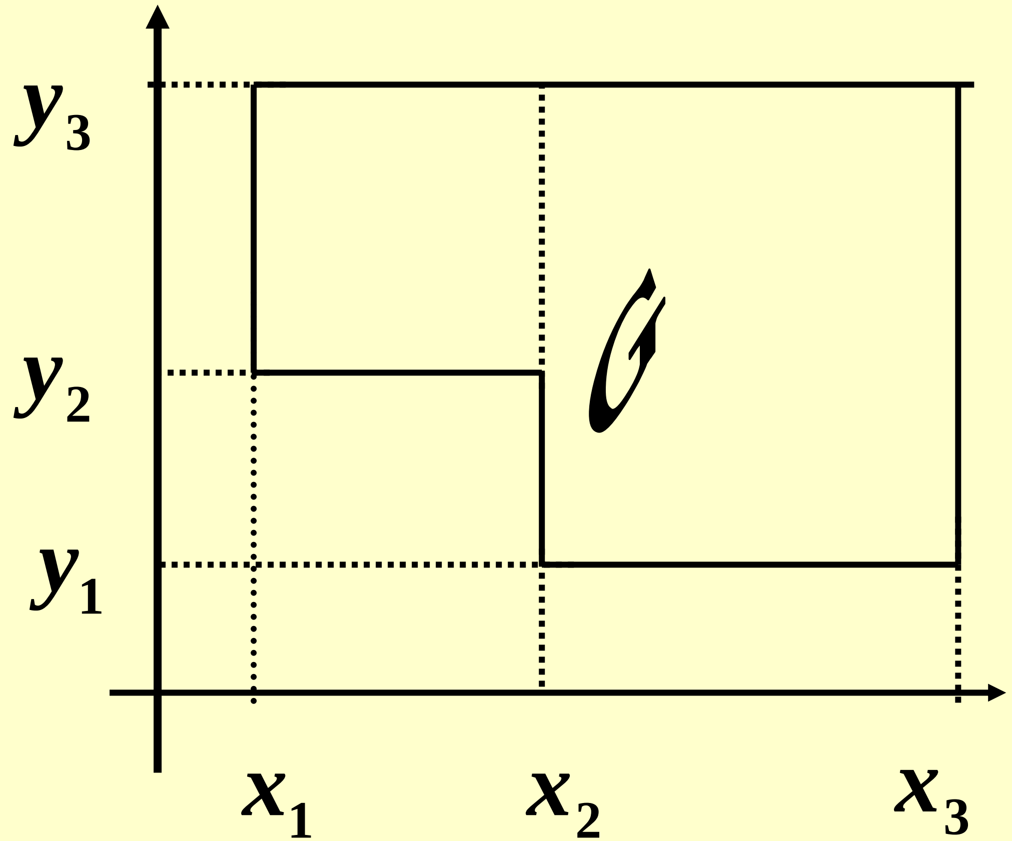
$$P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2)$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$



EX

已知随机变量(X,Y)的分布函数F (x,y),求(X,Y)落在如图区域G内的概率.



答:

$$P\{(X,Y)\in G\}=[F(x_2,y_1)+F(x_3,y_3)-(x_2,y_3)-(x_3,y_1)]$$
$$+[F(x_1,y_2)+F(x_2,y_3)-(x_1,y_3)-(x_2,y_2)]=\cdots$$

例1. 已知二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A[B+arctg(\frac{x}{2})][C+arctg(\frac{y}{3})]$$

1)求常数A，B，C。 2)求P{0<X<2,0<Y<3}

解: $F(\infty,\infty)=A[B+\frac{\pi}{2}][C+\frac{\pi}{2}]=1$

$$F(-\infty,y)=A[B-\frac{\pi}{2}][C+arctg(\frac{y}{3})]=0$$

$$F(x,-\infty)=A[B+arctg(\frac{x}{2})][C-\frac{\pi}{2}]=0$$

$$\Rightarrow B=C=\frac{\pi}{2} \quad A=\frac{1}{\pi^2}$$

$$P\{0<X\le 2,0<Y\le 3\}=F(0,0)+F(2,3)-F(0,3)-F(2,0)=\frac{1}{16}$$

离散型随机变量的联合分布列

若二维随机变量 (ξ, η) 的可能取值为有限个（或可列个）数对 (x_i, y_j) 时，其对应的概率：

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

满足规范性条件 $\sum_{i,\ j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$，则称 (ξ, η) 为二维离散型随机变量。

二维离散随机变量的联合分布表：

$X \backslash Y$	y_1	$y_2 \cdots$	$y_n \cdots$
x_1	p_{11}	$p_{12} \cdots$	$p_{1n} \cdots$
x_2	p_{21}	$p_{22} \cdots$	$p_{2n} \cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	$p_{m2} \cdots$	$p_{mn} \cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\{p_{ij}\}$成为某随机变量(ξ, η)分布列的充要条件仍为：

(1)非负性：$p_{ij} \geq 0$；

(2)规范性：$\sum_{i,\ j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$。

例 2.已知 10 件产品中有 3 件一等品，5 件二等品，2 件三等品。从这批产品中任取 4 件产品，求其中一等品、二等品件数的二维概率分布,并求一等品不超过 2 个,二等品至少 3 个的概率。

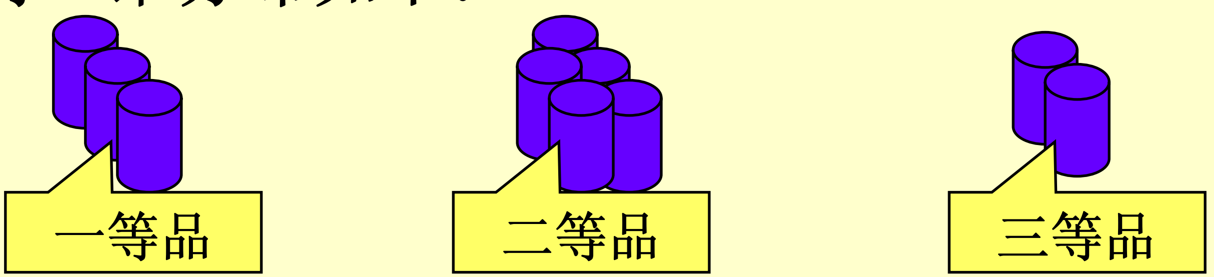
解：设 X 及 Y 分别是取出的 4 件产品中一等品及二等品的件数，则我们有

$$P(X=i,Y=j)=\frac{C_3^iC_5^jC_2^{4-i-j}}{C_{10}^4},$$

$$i=0,1,2,3;\qquad j=0,1,2,3,4;\qquad 4-i-j=0,1,2$$

即 $\quad i=0,1,2,3;\qquad j=0,1,2,3,4;\qquad i+j=2,3,4$

因此，得二维分布如下：



$X \backslash Y$	0	1	2	3	4
0	0	0	$\frac{10}{210}$	$\frac{20}{210}$	$\frac{5}{210}$
1	0	$\frac{15}{210}$	$\frac{60}{210}$	$\frac{30}{210}$	0
2	$\frac{3}{210}$	$\frac{30}{210}$	$\frac{30}{210}$	0	0
3	$\frac{2}{210}$	$\frac{5}{210}$	0	0	0

一等品不超过 2 个，二等品至少 3 个的概率为:

$$P(0 \le X \le 2, 3 \le Y \le 4)$$

$$= P(X=0,Y=3)+P(X=0,Y=4)+P(X=1,Y=3)$$

$$+P(X=1,Y=4)+P(X=2,Y=3)+P(X=2,Y=4)$$

$$=\frac{20}{210}+\frac{5}{210}+\frac{30}{210}+0+0+0=\frac{55}{210}$$

二维离散随机变量的分布函数

$a.\quad F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$

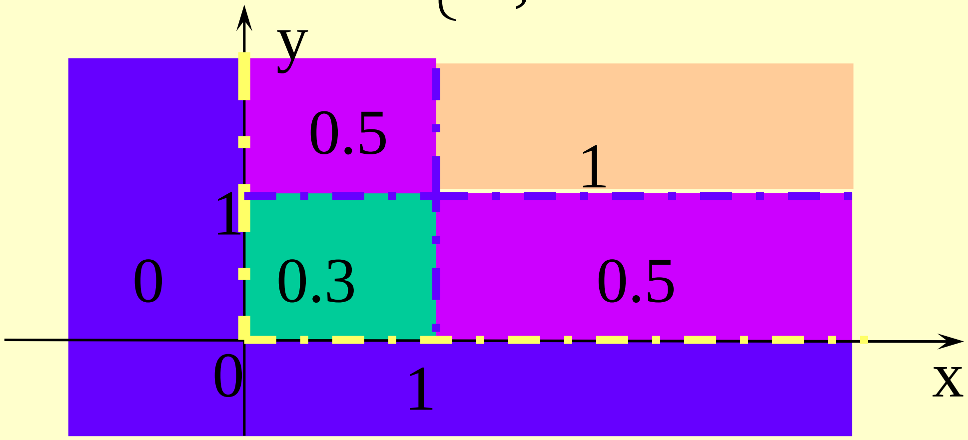
$b.\quad x_i, x_{i+1}$ 是 X 的任意两个相邻的可能值，y_j, y_{j+1} 是 Y 的任意两个相邻的可能值，则在矩形域 $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ 内，$F(x,y)$ 的值保持不变。

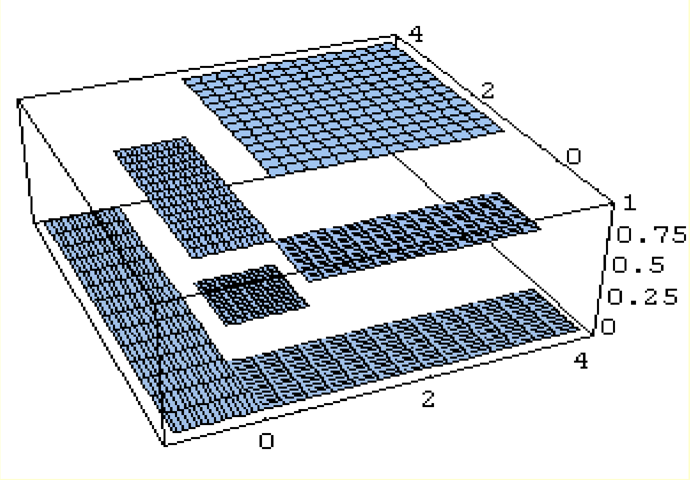
$c.\quad F(x,y)$ 的值总是跳跃式地增加，且 $F(x,y)$ 右连续，因此，$F(x,y)$ 的图形是由若干矩形平面块组成的台阶形“曲面”。

例 3.二维随机变量(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	0.3	0.2	0.5
1	0.2	0.3	0.5
$p_{\bullet j}$	0.5	0.5	1

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0 \quad or \quad y<0 \\ 0.3, & 0\le x<1,\quad 0\le y<1 \\ 0.5, & 0\le x<1, y\ge 1 \quad or \quad x\ge 1, 0\le y<1 \\ 1, & x\ge 1, y\ge 1 \end{cases}$$



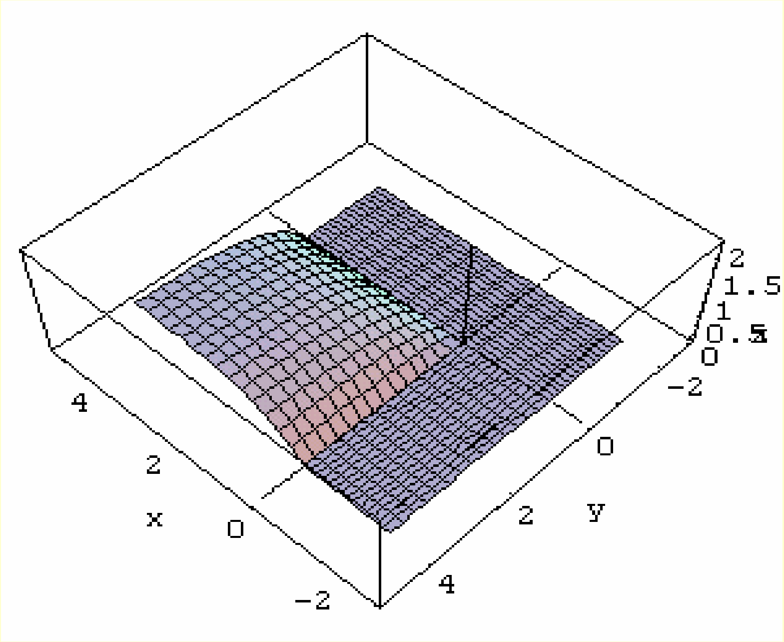


二维连续随机变量的分布函数

a. $F(x,y)$ 是连续函数。

b. $z=F(x,y)$ 是介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间随 x 或 y 单调上升的连续曲面。

例 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}) & , \quad x>0,y>0 \\ 0 \quad , & \text{其它}\end{cases}$



二维连续随机变量的联合密度函数

设二维随机变量(ξ,η)的分布函数为$F(x, y)$，如果存在一个定义在$R\times R$上的二元非负可积函数$p(x, y)$，使得对$\forall\ (x, y)\in R\times R$，有

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u, v)dudv$$

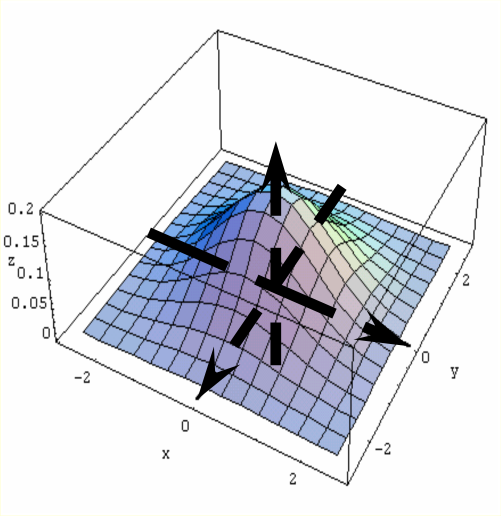
则称(ξ,η)为二维连续型随机变量，同时称$p(x, y)$为(ξ,η)的联合概率密度函数。

在$p(x, y)$的连续点有 $\dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\partial y}=p(x, y)$

$\boldsymbol{p(x, y)}$ 为密度函数的充要条件为：

(1)非负性： $p(x, y) \geq 0$；

(2)规范性： $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dxdy = 1$



★ (ξ,η) 落在平面区域 $\boldsymbol{G}$ 内的概率为：

$$\boldsymbol{P\{(\xi,\eta)\in G\} = \iint_G p(x,y)dxdy}.$$

例 4. 设(ξ, η)具有概率密度

$$p(x, y)=\begin{cases} ce^{-2x-3y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求：(1)常数c；（2）分布函数$F(x, y)$；

（3）$P(\xi > \eta)$。

解：（1）利用密度规范性得

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ce^{-2x-3y}dxdy = c\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy = 1$$

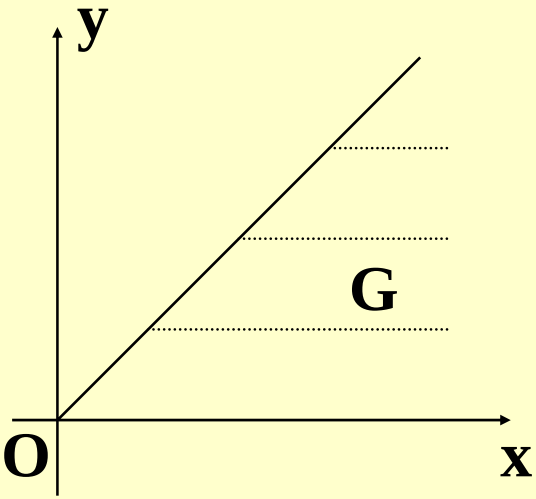
故$c = 6$。

（2） $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u, v)dudv$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & 0 \le x < +\infty,\quad 0 \le y < +\infty \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（3） $P(\xi > \eta) = \iint\limits_{(x, y)\in G} p(u, v)dudv$ ，

化成累次积分：



$$P(\xi > \eta) = \int_{0}^{+\infty} dx \cdot \int_{0}^{x} 6e^{-2x}e^{-3y}dy$$

$$= \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2x}(1 - e^{-3x})dx = \frac{3}{5}\text{。}$$

二维均匀分布*

若二维随机变量(X, Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{D\text{的面积}}, & (x,y)\in D\subset R^2\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$

则称(X, Y)在区域D上(内) 服从均匀分布。

易见，若（X，Y）在区域D上(内) 服从均匀分布，对D内任意区域G，有

$$P\{(X,Y\}\in G\}=\frac{S_G}{S_D}$$

例 5.设 (X,Y) 在以原点为中心，r 为半径的圆域 R 上服从均匀分布，求二维概率密度。

解：

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le r^2 \\ 0, & x^2+y^2>r^2 \end{cases}$$

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dxdy=1$，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} cdxdy=1,\quad c\cdot\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} dxdy=1,$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} dxdy=\pi r^2,\quad \therefore c=\frac{1}{\pi r^2}$$

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2 \\ 0, & x^2+y^2>r^2 \end{cases}$$

几种均匀分布的概率密度

1.长度为**b-a**区间**[a,b]**上

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & x\notin(a,b)\end{cases}$$

2.面积为**s**的平面区域**S**上

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{s}, & (x,y)\in S\\ 0, & (x,y)\notin S\end{cases}$$

3.体积为**v**的空间区域**V**上

$$\varphi(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{v}, & (x,y,z)\in V\\ 0, & (x,y,z)\notin V\end{cases}$$

EX

设

$$(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & others\end{cases}$$

求:P{X>Y}

$$P\{X>Y\}=\int_0^1 dx\int_0^x 1\cdot dy=\frac{1}{2}$$