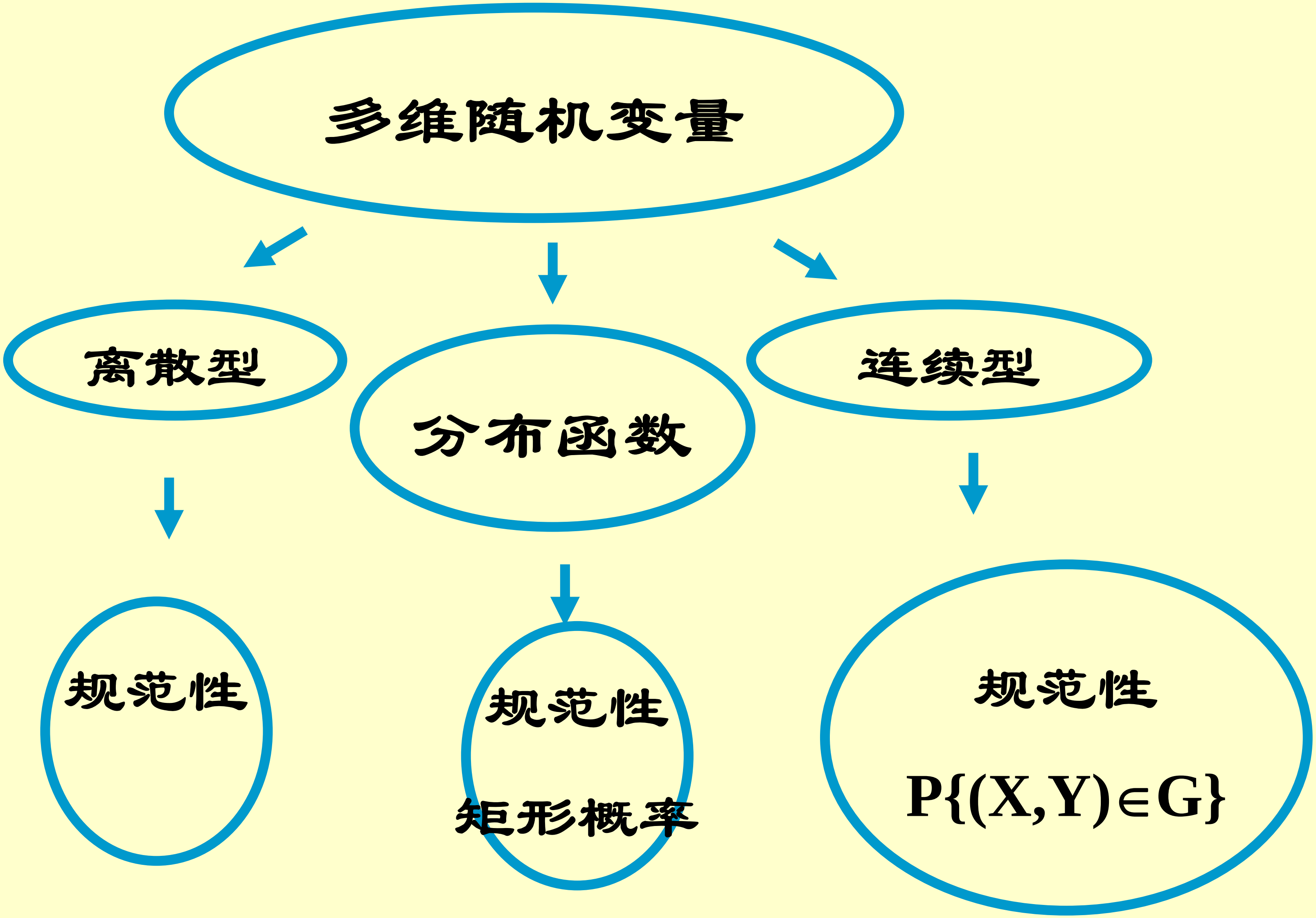
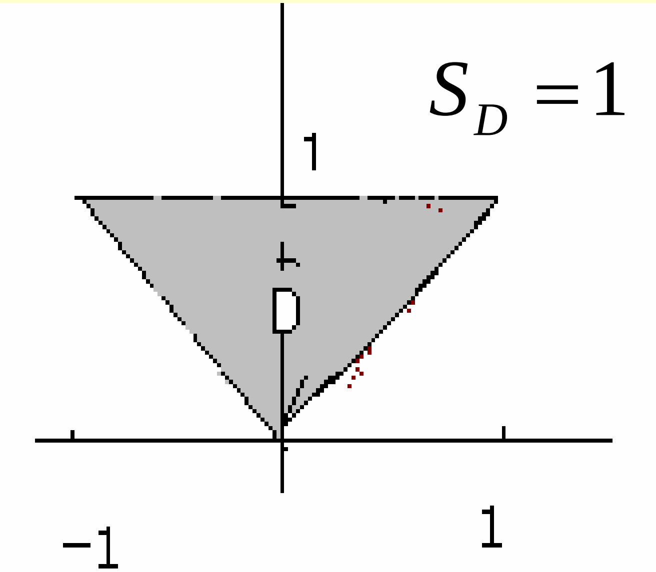

多维随机变量
离散型
分布函数
连续型
规范性
规范性
矩形概率
规范性
P{(X,Y)∈G}

EX1 设(X, Y)服从如图区域D上的均匀分布，

(1) 求(X, Y)的概率密度;

(2) 求P{Y<2X} ;

(3) 求F(0.5, 0.5)

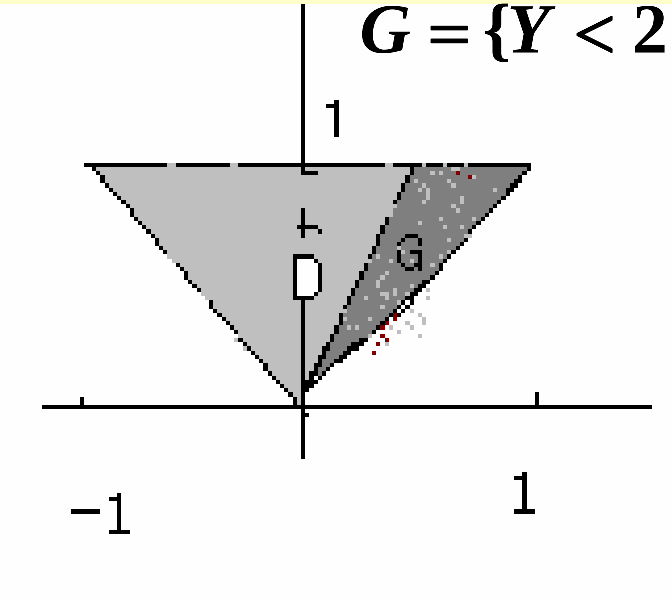



解:

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & others\end{cases}$$

$$S_G = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{4}$$

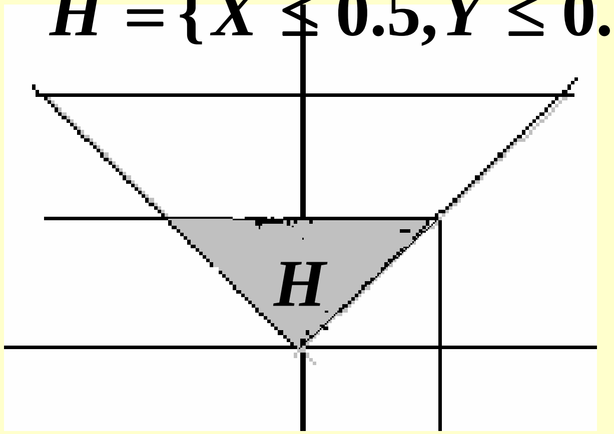
$G = \{Y < 2X\}$




$$(2)P\{Y < 2X\} = \frac{1}{4}\Big/1 = \frac{1}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$H = \{X \le 0.5, Y \le 0.5\}$




$$(3)F(0.5,0.5) = \frac{1}{4}$$

# 2. 边际分布、条件分布及统计独立性

# 二维随机变量的边际分布

假设二维离散随机变量$(\xi,\eta)$的概率分布为：

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}, \qquad i, j = 1,2,\cdots,$$

考虑

$$P(\xi = x_i) = P\{\bigcup_{j=1}^{\infty}(\xi = x_i, \eta = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi = x_i, \eta = y_j)$$

记作$p_{i\bullet} = \sum_{j=}^{\infty} p_{ij} \qquad i = 1,2,\cdots$ 构成$\xi$的一个概率分布

称为边际分布列；同样，记

$$P_{\bullet j} = P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1,2,\cdots$$

也构成$\eta$的边际分布列。显然

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

**例 1.**已知 **10** 件产品中有 **3** 件一等品，**5** 件二等品，**2** 件三等品。从这批产品中任取 **4** 件产品，求其中一等品、二等品件数各自的分布律。

解：设 $X$ 及 $Y$ 分别是取出的 **4** 件产品中一等品及二等品的件数，则我们有

$$P(X=i,Y=j)=\frac{C_3^i C_5^j C_2^{4-i-j}}{C_{10}^4},$$

$$i=0,1,2,3; \qquad j=0,1,2,3,4; \qquad 4-i-j=0,1,2$$

即 $i=0,1,2,3; \qquad j=0,1,2,3,4; \qquad i+j=2,3,4$

即

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_{i\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{10}{210}$ | $\frac{20}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{35}{210}$ |
| 1 | 0 | $\frac{15}{210}$ | $\frac{60}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | 0 | $\frac{105}{210}$ |
| 2 | $\frac{3}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | 0 | 0 | $\frac{63}{210}$ |
| 3 | $\frac{2}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{210}$ |
| $p_{\bullet j}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{100}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | 1 |

一等品件数 $X$ 的分布律为:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{i\bullet}$ | $\frac{35}{210}$ | $\frac{105}{210}$ | $\frac{63}{210}$ | $\frac{7}{210}$ |

二等品件数 $Y$ 的分布律为:

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_{\bullet j}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{100}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{5}{210}$ |

注：边际分布不能全面反映联合分布的内含信息.

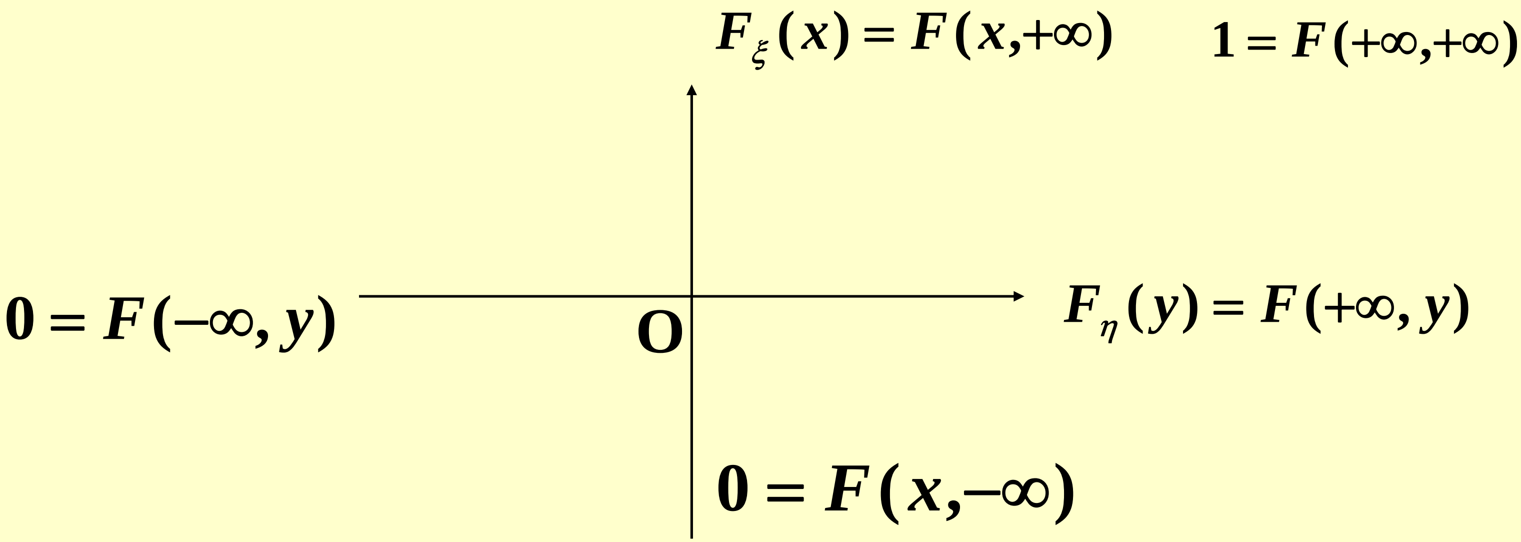
二维随机变量$(\xi,\eta)$关于$\xi,\eta$的边缘分布函数$F_\xi(x),F_\eta(y)$：

$$F_\xi(x)=P(\xi\le x)=P(\xi\le x,\eta<+\infty)=F(x,+\infty)$$

即$F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=P(\xi<+\infty,\eta\le y)=F(+\infty,y)$$

即$F_\eta(y)=F(+\infty,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$



**例1.已知(X,Y)的分布函数为**

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-xe^{-y} & 0\le x\le y\\ 1-e^{-y}-ye^{-y} & 0\le y\le x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

**求$F_X(x)$与$F_Y(y)$。**

解：$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}-ye^{-y} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$

## 连续型随机变量

1)$\xi$的边缘分布函数：

$$F_\xi(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

2)$\xi$的边缘概率密度：

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$$

3)$\eta$的边缘分布：

$$F_\eta(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}dy\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

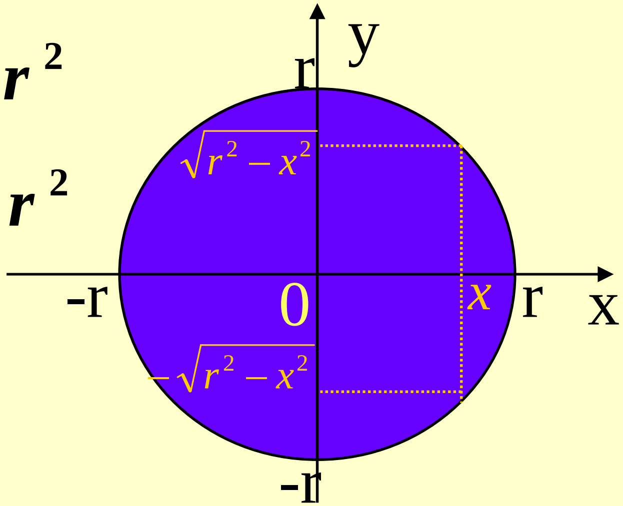
4)$\eta$的边缘概率密度：

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx$$

例 2.设 $(X,Y)$ 在以原点为中心，$r$ 为半径的圆域 $R$ 上服从均匀分布，求 $X$ 及 $Y$ 边缘概率密度。

解：已经求出（**X**，**Y**）的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & x^2+y^2>r^2\end{cases}$$




$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy$$

当 $|x|\le r$ 时，

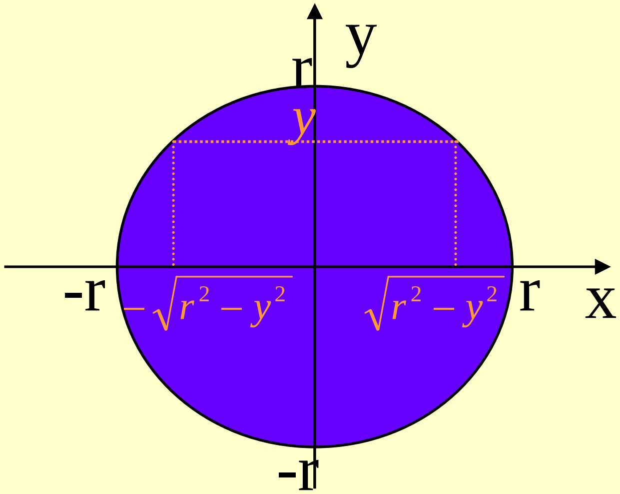
$$p_X(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$$

当 $|x|>r$ 时，$p_X(x)=0$

$$\therefore\ p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases}$$

同理，

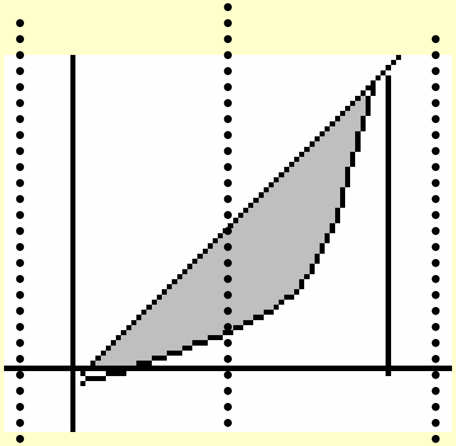
$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\le r\\ 0, & |y|>r\end{cases}$$




说明：$(X,Y)$的联合分布是均匀分布，
但边缘分布都不是均匀分布。

例3. 设(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c & x^2 \le y < x \\ 0 & others \end{cases}$$



（1）求常数c; (2) 求关于X的边缘概率密度

解:(1)由规范性 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} c\,dy = 1 \quad \Rightarrow c = 6$

(2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 0 & x<0 \ \ or \ \ x>1 \\ \int_{x^2}^{x} 6dy = 6(x-x^2) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

## 条件分布

# 离散型随机变量的条件分布

$$P_{\xi|\eta}(x_i \mid y_j) = P(\xi = x_i \mid \eta = y_j)$$

$$= \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad i = 1,2,\cdots$$

显然 $\sum_i P_{\xi|\eta}(x_i \mid y_j) = \sum_i \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{1}{p_{\bullet j}} \sum_i p_{ij} = \frac{1}{p_{\bullet j}} \cdot p_{\bullet j} = 1$

$$P_{\eta|\xi}(y_j \mid x_i) = P(\eta = y_j \mid \xi = x_i)$$

$$= \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \quad j = 1,2,\cdots$$

显然 $\sum_j P_{\eta|\xi}(y_j \mid x_i) = \sum_j \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}} = \frac{1}{p_{i\bullet}} \sum_j p_{ij} = \frac{1}{p_{i\bullet}} \cdot p_{i\bullet} = 1$

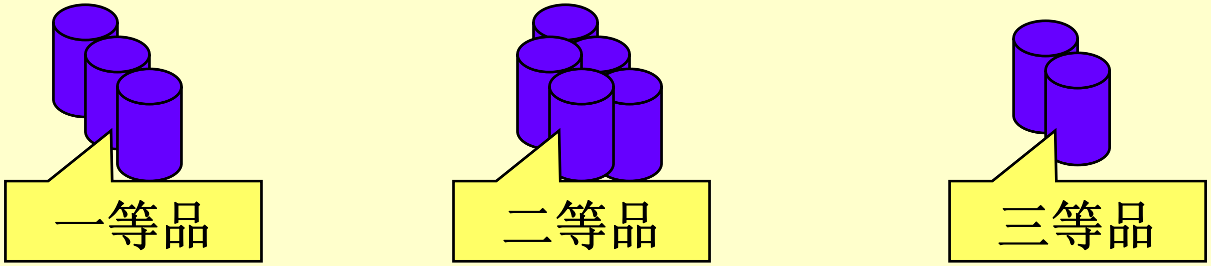
例1. 已知 10 件产品中有 3 件一等品，5 件二等品，2 件三等品。从这批产品中任取 4 件产品，已知其中有两件二等品，求其中一等品件数的概率分布；若其中一等品有一件，求其中二等品的概率分布。

解：设 $X$ 及 $Y$ 分别是取出的 4 件产品中一等品及二等品的件数，则我们有

$$P(X=i,Y=j)=\frac{C_3^i C_5^j C_2^{4-i-j}}{C_{10}^4},$$

$$i=0,1,2,3;\qquad j=0,1,2,3,4;\qquad 4-i-j=0,1,2$$

即 $\quad i=0,1,2,3;\qquad j=0,1,2,3,4;\qquad i+j=2,3,4$



则（***X***，***Y***）联合分布律及边缘分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_{i\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{10}{210}$ | $\frac{20}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{35}{210}$ |
| 1 | 0 | $\frac{15}{210}$ | $\frac{60}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | 0 | $\frac{105}{210}$ |
| 2 | $\frac{3}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | 0 | 0 | $\frac{63}{210}$ |
| 3 | $\frac{2}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{210}$ |
| $p_{\bullet j}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{100}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | 1 |

则 $P(X=i\mid Y=2)=\dfrac{p_{i2}}{p_{\bullet 2}}=\dfrac{p_{i2}}{100/210}$， $i=0,1,2,3$

$P(Y=j\mid X=1)=\dfrac{p_{1j}}{p_{1\bullet}}=\dfrac{p_{1j}}{105/210}$， $j=0,1,2,3,4$

即：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=i\mid Y=2)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | 0 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=j\mid X=1)$ | 0 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 0 |

## 连续型随机变量的条件分布

1) $p_\eta(y) > 0$， 则在 $\eta = y$ 条件下，连续随机变量 $\xi$ 的条件分布函数记作 $F_{\xi|\eta}(x \mid y)$。

★注意：由于 $P(\eta = y) = 0$，所以不能直接用条件概率公式，而从区域上的分布概率入手。

设 $P(y < \eta \le y + \Delta y) > 0$,

则 $P(\xi \le x \mid y < \eta \le y + \Delta y)$

$$= \frac{P(\xi \le x, y < \eta \le y + \Delta y)}{P(y < \eta \le y + \Delta y)} = \frac{\int_y^{y+\Delta y} dy \int_{-\infty}^{x} p(x, y) dx}{\int_y^{y+\Delta y} p_\eta(y) dy}$$

由积分中值定理：

$$\int_y^{y+\Delta y} dy \int_{-\infty}^{x} p(x, y) dx = \int_{-\infty}^{x} p(x, y + \theta_1 \cdot \Delta y) \Delta y dx$$

$$\int_y^{y+\Delta y} p_\eta(y) dy = p_\eta(y + \theta_2 \cdot \Delta y) \cdot \Delta y \quad (0 < \theta_{1,} \theta_2 < 1)$$

则

$$P(\xi \le x \mid y < \eta \le y + \Delta y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} p(x, y + \theta_1 \cdot \Delta y)dx}{p_\eta(y + \theta_2 \cdot \Delta y)}$$

所以，$F_{\xi|\eta}(x \mid y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} P(\xi \le x \mid y < \eta \le y + \Delta y)$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} p(x, y)dx}{p_\eta(y)}$$

$F_{\xi|\eta}(x \mid y)$ 对 $x$ 求导，得

$$p_{\xi|\eta}(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_\eta(y)},$$

称 $p_{\xi|\eta}(x \mid y)$ 为在 $\eta = y$ 条件下，连续随机变量 $\xi$ 的条件概率密度函数。

2) $p_\xi(x)>0$，则在 $\xi=x$ 的条件下，连续随机变量 $Y$ 的条件分布函数：

$$F_{\eta|\xi}(y\mid x)=\frac{\int_{-\infty}^{y} p(x,y)dy}{p_\xi(x)}=\int_{-\infty}^{y} p_{\eta|\xi}(y\mid x)dy;$$

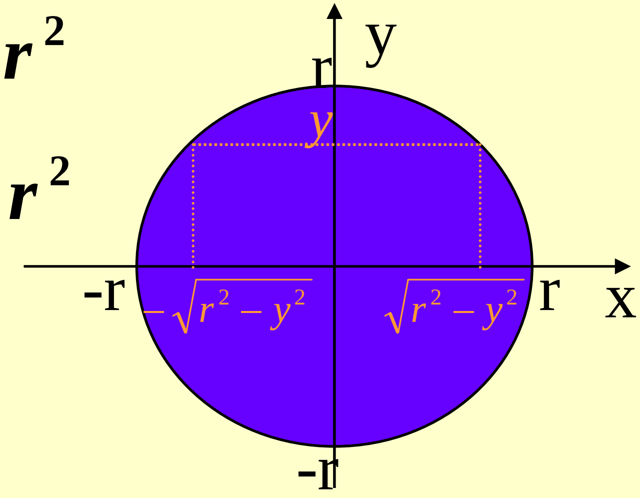
条件概率密度函数：

$$p_{\eta|\xi}(y\mid x)=\frac{p(x,y)}{p_\xi(x)}.$$

例 2.设 $(X,Y)$ 在以原点为中心，$r$ 为半径的圆域 $R$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $p_{X|Y}(x|y), p_{Y|X}(y|x)$

解：已知联合概率密度为

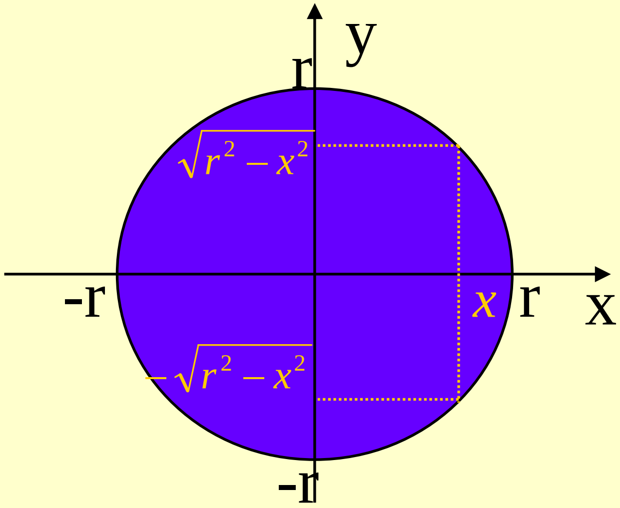
$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & x^2+y^2>r^2\end{cases}$$




$X,Y$ 的边缘分布密度分别为：

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\le r\\ 0, & |y|>r\end{cases}$$



$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & |x|\le\sqrt{r^2-y^2}\\ 0, & |x|>\sqrt{r^2-y^2}\end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & |y|\le\sqrt{r^2-x^2}\\ 0, & |y|>\sqrt{r^2-x^2}\end{cases}$$

即：在$Y=y$的条件下，$X$的条件分布是均匀分布；
在$X=x$的条件下，$Y$的条件分布是均匀分布。

例 3 （二维正态分布）设 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 为五个常数，且 $\sigma_1 > 0$， $\sigma_2 > 0$， $|\rho| \le 1$，随机变量 $(\xi, \eta)$ 具有密度函数：

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\ 2}}]\}$$

$$-\infty < x, y < +\infty$$

**(1)** 求边际分布密度;

**(2)** 求条件分布密度

解：(1) $p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy$

作变换 $\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}=u$， $\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}=v$， 则

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]}dv$$

注意到 $u^2-2\rho uv+v^2=(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2$， 故

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}\cdot e^{-\frac{u^2}{2}}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

即 $\xi \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，类似地 $\eta \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$。

(2)条件密度函数：

$$p_{\xi|\eta}(x\,|\,y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\eta(y)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

$$-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}] + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}[x-(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2))]^2\}$$

由对称性，另一个条件密度为：

$$p_{\eta|\xi}(y\,|\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))]^2\}$$

例 5 （工作效率判断）为判断连续工作时间是否影响工作效率，对某厂 139 人进行调查，他们每天的连续工作时间可分为：6 小时、8 小时、10 小时、12 小时四种，他们的工作效率$\eta$可以按：低、中、高分为三类，得到统计数据如下：

| $\xi$ \ $\eta$ | 低 | 中 | 高 | 总和 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 人 | 5 人 | 10 人 | 17 人 |
| 8 | 5 人 | 30 人 | 25 人 | 60 人 |
| 10 | 8 人 | 25 人 | 11 人 | 44 人 |
| 12 | 10 人 | 6 人 | 2 人 | 18 人 |
| 总和 | 25 人 | 66 人 | 48 人 | 139 人 |

如果以“工作效率属于中、高二类的概率大”作为评优标准，问每天连续工作几小时为最佳？

解：首先以不同的数值$y_1, y_2, y_3$ 代表工作效率的“低、中、高”三种不同状态，即$\eta$的取值范围为：$y_1, y_2, y_3$ ，然后再利用频率来近似概率，并列出$(\xi, \eta)$的二维联合分布表：

| $\xi$ \ $\eta$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $P(\xi = x_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| **6** | **0.014** | **0.036** | **0.072** | **0.122** |
| **8** | **0.036** | **0.216** | **0.180** | **0.432** |
| **10** | **0.058** | **0.180** | **0.079** | **0.317** |
| **12** | **0.072** | **0.043** | **0.014** | **0.129** |
| $P(\eta = y_j)$ | **0.180** | **0.475** | **0.345** | **1** |

再把"$\eta = y_2$"与"$\eta = y_3$"合并为"$\eta = y_4$"，得到新的分布表：

| $\xi$ \ $\eta$ | $y_1$ | $y_4$ | $\xi$边缘分布 |
|---|---|---|---|
| **6** | **0.014** | **0.108** | **0.122** |
| **8** | **0.036** | **0.396** | **0.432** |
| **10** | **0.058** | **0.259** | **0.317** |
| **12** | **0.072** | **0.057** | **0.129** |
| $\eta$ 边缘分布 | **0.180** | **0.820** | **1** |

$$P(\eta = y_1 \mid \xi = 6) = \frac{P(\xi = 6, \eta = y_1)}{P(\xi = 6)} = \frac{0.014}{0.122} \cong 0.115$$

可得条件概率

| $\eta$ | $y_1$ | $y_4$ |
|---|---|---|
| $P(\eta = y_j \mid \xi = 6)$ | 0.115 | 0.885 |
| $P(\eta = y_j \mid \xi = 8)$ | 0.083 | 0.917 |
| $P(\eta = y_j \mid \xi = 10)$ | 0.183 | 0.817 |
| $P(\eta = y_j \mid \xi = 12)$ | 0.558 | 0.442 |

当 $\xi = 8$ 时，条件概率 $P(\eta = y_4 \mid \xi = 8)$ 条件概率最大，达到 **0.917**。故从管理角度看，把每天的连续工作时间定为 **8** 小时是合适的。

# 随机变量的独立性

定义：设$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为$n$维随机向量，若对任意的实数$x_1, x_2,\ \ ,x_n$成立乘法关系：

$$
\begin{aligned}
&P(\xi_1\le x_1,\xi_2\le x_2,\cdots\xi_n\le x_n)\\
&=P(\xi_1\le x_1)P(\xi_2\le x_2)\cdots P(\xi_n\le x_n)
\end{aligned}
$$

即

$$
F_{\xi_1\cdots\xi_n}(x_1,x_2,\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{\xi_i}(x_i)
$$

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$间是相互独立的。

## 1. 离散型随机变量的独立性

若随机变量$\xi$与$\eta$是独立的，则

a. $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$,

$i = 1,2,\cdots,;\ j = 1,2,\cdots$.

b. $P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = P(\xi = x_i)$,

$P(\eta = y_j \mid \xi = x_i) = P(\eta = y_j)$

## 2. 连续型随机变量的独立性

a. $p(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$

b. $p_{\xi|\eta}(x \mid y) = p_\xi(x)$, $p_{\eta|\xi}(y \mid x) = p_\eta(y)$

**例 1.** 已知 10 件产品中有 3 件一等品，5 件二等品，2 件三等品。从这批产品中任取 4 件产品，问：其中一等品件数和二等品件数是否独立？

解：设 $X$ 与 $Y$ 分别是取出的 4 件产品中一等品与二等品的件数，已经求出联合分布律、边缘分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_{i\bullet}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{10}{210}$ | $\frac{20}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{35}{210}$ |
| 1 | 0 | $\frac{15}{210}$ | $\frac{60}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | 0 | $\frac{105}{210}$ |
| 2 | $\frac{3}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | $\frac{30}{210}$ | 0 | 0 | $\frac{63}{210}$ |
| 3 | $\frac{2}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{7}{210}$ |
| $p_{\bullet j}$ | $\frac{5}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{100}{210}$ | $\frac{50}{210}$ | $\frac{5}{210}$ | 1 |

$\because P\{X=0, Y=0\}$

$\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$

$\therefore X$ 与 $Y$ 不相互独立，即一、二等品的件数不相互独立。

例 2. 设二维随机变量$(\xi,\eta)$的联合分布列为

| $\xi \backslash \eta$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $1/6$ | $1/9$ | $1/18$ |
| 2 | $1/3$ | $\alpha$ | $\beta$ |

，问其中的$\alpha$，$\beta$取什么值时$\xi$与$\eta$独立？

解：由规范性可知$1=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{3}+\alpha+\beta$，从而$\beta=\dfrac{1}{3}-\alpha$。

$P(\xi=1)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{3}$　　$P(\xi=2)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$P(\eta=1)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$　　$P(\eta=2)=\dfrac{1}{9}+\alpha$　　$P(\eta=3)=\dfrac{7}{18}-\alpha$

联合分布列可补充为：

| $\xi \backslash \eta$ | **1** | **2** | **3** | |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{3}$ |
| **2** | $\frac{1}{3}$ | $\alpha$ | $\frac{1}{3}-\alpha$ | $\frac{2}{3}$ |
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{9}+\alpha$ | $\frac{7}{18}-\alpha$ | **1** |

根据独立性：$P(\xi=1,\eta=2)=P(\xi=1)P(\eta=2)$，

即 $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{9}+\alpha)$ 。

从中解出$\alpha=\frac{2}{9}$，求出 $\beta=\frac{1}{3}-\alpha=\frac{1}{9}$

例 3. 设$(X,Y)$在以原点为中心，$r$为半径的圆域 $R$上服从均匀分布，二维概率密度为：

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2\\ 0, & x^2+y^2>r^2\end{cases}$$

问：$X$与$Y$是否相互独立？

解：已经求出$X,Y$的边缘分布密度分别为：

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases},$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\le r\\ 0, & |y|>r\end{cases},$$

显然，$p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$

因此，$X$与$Y$不相互独立.

说明

$(X,Y)$的联合分布是均匀分布，但边缘分布都不是均匀分布。

EX2

设(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy & 0<x<1, 0<y<x \\ 0 & others \end{cases}$$

(1) 求常数c. (2) 求关于X的和关于Y的边缘概率密度.

答：$c=6$

$$f_X(x)=\begin{cases} \int_0^x 6y\,dy=3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_y^1 6y\,dx=6y(1-y) & 0<y<1 \\ 0 & others \end{cases}$$