数学期望的定义

数学期望的性质

随机变量函数
的期望

2.6 随机变量的方差

σ^2

DX

$E(X-EX)^2$

$\sqrt{DX}$

$DX=EX^2-(EX)^2$

σ

$X-EX$：随机变量 X 的离差，反映随机变量 X 的一切可能值在其数学期望周围的分散程度。

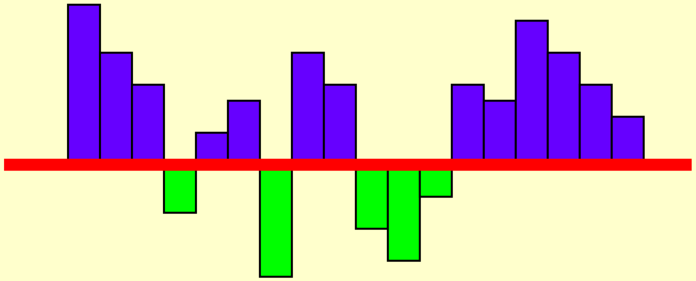
$\boldsymbol{E(X-EX)=0}$　离差的均值为零。

定义：称 $E(X-EX)^2$ 为随机变量 X 的方差，记为 $D(X)$，或 $\mathrm{var}(X)$。

离散：$D(X)=\sum_i (x_i-EX)^2 p_i$　　其中，$p_i=P(X=x_i)$

连续：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2\varphi(x)dx$

其中，$\varphi(x)$是X的密度函数



注意：方差 $D(X)>0$

说明：当随机变量的可能值密集在数学期望的附近时，方差较小；反之，方差较大。

重要公式：$DX = EX^2 - (EX)^2$

证明：$DX = E(X - EX)^2$

$$= E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2)$$

$$= EX^2 - 2EX \cdot EX + (EX)^2$$

$$= EX^2 - (EX)^2$$

例 **1.**某人进行打靶，所得分数 X_1 的分布律为

X_1	**0**	**1**	2
p_k	**0**	**0.2**	0.8

试求 DX_1。

解： $EX_1 = 0\times 0 + 1\times 0.2 + 2\times 0.8 = 1.8$

$EX_1^2 = 0^2\times 0 + 1^2\times 0.2 + 2^2\times 0.8 = 3.4$

$$DX_1 = EX_1^2 - (EX_1)^2 = 3.4 - 1.8^2 = 3.4 - 3.24 = 0.16$$

例 2：已知随机变量 X 的概率密度密度为：

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & 其它\end{cases},$$

均匀分布

求随机变量 X 的方差.

解：$$EX^2=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3(b-a)}x^3\Big|_a^b$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}, \qquad EX=\frac{a+b}{2}$$

所以，$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

例3：设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0\le x<1\end{cases}$$

1)求D（X）

解:(1) $E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=0$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad D(X)=\frac{1}{6}$$

定义：标准差（均方差）：$\sqrt{DX}$，其量纲与 X 相同。

方差的性质

性质 **1.** $D(c)=0$

性质 2. $\boldsymbol{D(aX+B)=a^2DX}$

性质 3. $\boldsymbol{E(X-C)^2 \ge DX}$

等号当且仅当 $\boldsymbol{C=EX}$ 时成立.

性质 **4.** 标准化随机变量：$Y=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$，则

$EY=0$， $DY=1$.

注意各参数的意义

性质5

切贝雪夫不等式设随机变量（r.v.）ξ 的$E\xi$及$D\xi$存在，则对于任何$\varepsilon>0$，有

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

或 $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$（对立事件）

证明： 1)设ξ 是离散型r.v.，事件$|\xi - E\xi| \geq \varepsilon$表示r.v.$\xi$取得一切满足$|x_i - E\xi| \geq \varepsilon$的可能值$x_i$，则

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = \sum_{|x_i - E\xi| \geq \varepsilon} p(x_i)$$

由$|\xi - E\xi| \geq \varepsilon \Rightarrow (\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow \dfrac{(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} \geq 1$

得 $P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \sum_{|x_i - E\xi| \geq \varepsilon} \frac{(x_i - E\xi)^2}{\varepsilon^2} p(x_i)$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{|x_i - E\xi| \geq \varepsilon} (x_i - E\xi)^2 p(x_i)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_i (x_i - E\xi)^2 p(x_i)$$

$$= \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

2) 设 ξ 是连续型 $r.v.$，事件 $|\xi - E\xi| \geq \varepsilon$ 表示 $r.v.\ \xi$ 落在区间 $(E\xi - \varepsilon, E\xi + \varepsilon)$ 之外，则

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} \varphi(x) dx$$

（$\varphi(x)$ 是 ξ 概率密度）

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} \frac{(x - E\xi)^2}{\varepsilon^2} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x - E\xi| \geq \varepsilon} (x - E\xi)^2 \varphi(x) dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 \varphi(x) dx$$

$$= \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \qquad \#$$

例 4： 利用切贝雪夫不等式估计随机变量与其数学期望的差不小于三倍标准差的概率。

解： 设随机变量ξ，期望$E\xi$，方差$D\xi$，

取$\varepsilon=3\sqrt{D\xi}$，由切贝雪夫不等式：

$$P(|\xi-E\xi|\geq 3\sqrt{D\xi})\leq\frac{D\xi}{(3\sqrt{D\xi})^2}=\frac{1}{9}\approx 0.111$$

所以，随机变量与其数学期望的差不小于三倍标准差的概率约为0.111。

例 5： 设随机变量ξ服从均匀分布，试分别用切比雪夫不等式估计 $P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon_i\}$，其中

$$\varepsilon_1 = \frac{b-a}{4}, \quad \varepsilon_2 = \frac{3(b-a)}{8}。$$

解： $E\xi = \dfrac{a+b}{2}$，$D\xi = \dfrac{(b-a)^2}{12}$，

对ε_1用切比雪夫不等式得到估计

$$P\{|\xi - \frac{a+b}{2}| \geq \frac{b-a}{4}\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon_1^2} = \frac{4}{3}.$$

当ε_2时，估计式为

$$P\{|\xi - \frac{a+b}{2}| \geq \frac{3}{8}(b-a)\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon_2^2} = \frac{16}{27}.$$

用密度函数计算不等式左边：

$$P\{|\xi-\frac{a+b}{2}|\geq\frac{3}{8}(b-a)\}=\int\limits_{|x-\frac{a+b}{2}|\geq\frac{3}{8}(b-a)}p(x)dx$$

$$=1-\int_{\frac{a+b}{2}-\frac{3}{8}(b-a)}^{\frac{a+b}{2}+\frac{3}{8}(b-a)}p(x)dx=1-\int_{\frac{7a+b}{8}}^{\frac{a+7b}{8}}\frac{1}{b-a}dx$$

$$=1-\frac{1}{b-a}(\frac{a+7b}{8}-\frac{7a+b}{8})=\frac{1}{4}$$

例 6： 试证方差为 0 的随机变量必是单点分布，即

$P\{\xi = E\xi\} = 1.$

证：对任$\varepsilon > 0$，有 $P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2} = 0.$

即当$\varepsilon = \dfrac{1}{n}$时，有 $P\{|\xi - E\xi| \geq \dfrac{1}{n}\} = 0.$

注意到

$$\{|\xi - E\xi| > 0\} = \lim_{n\to\infty}\{\omega \mid |\xi - E\xi| \geq \frac{1}{n}\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega \mid |\xi - E\xi| \geq \frac{1}{n}\}$$

故 $$P\{|\xi - E\xi| > 0\} \leq P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(|\xi - E\xi| \geq \frac{1}{n})\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi - E\xi| \geq \frac{1}{n}\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi}{(1/n)^2} = 0.$$

常用的离散型随机变量

① 单点分布

a. 随机变量 X 以概率 1 取常数 C.记为 $X \sim I(x-C)$.

b. 分布律：$P(X=C)=1$

显然 $EX=C$ ， $DX=0$

c. 定义：如果随机变量 X 具有以上的分布律，则称 X 服从单点分布。

②0-1 分布（两点分布）

a.随机变量 X 的取值范围：**0，1.**

(即样本空间 Ω 只含有两个基本事件**.)**

b.分布律：$P(X=m)=p^m q^{1-m}$,　　$m=0,1; p+q=1$

或者，

X	**0**	**1**
$P(X=m)$	$1-p$	p

c.定义：如果随机变量 X 具有以上的分布律，则称 X 服从两点分布。

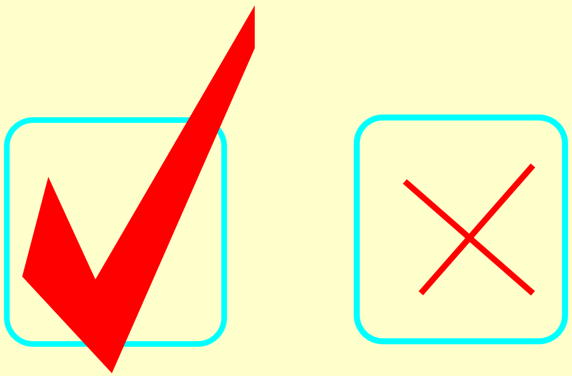
d.期望 $EX=0\times(1-p)+1\times p=p$,

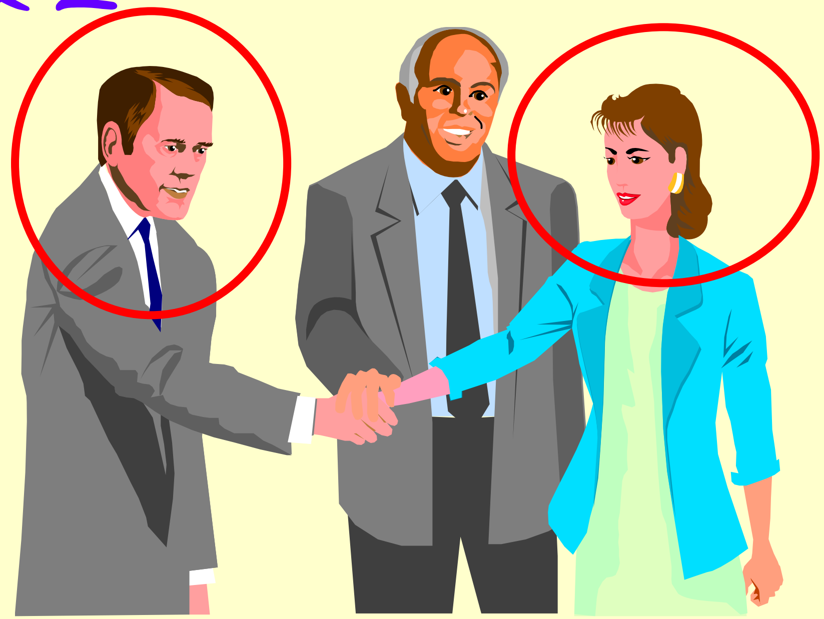
方差 $DX=EX^2-(EX)^2=p-p^2=pq$

e. 例子

◆ 客户是男士还是女士

■ 产品是否合格





■ 抛硬币是国徽朝上还是分值朝上

国徽　　　　5分

利用它可构成下面的二项分布和超几何分布.

定义：称 $E(X-EX)^2$ 为随机变量 X 的方差，记为 $D(X)$，或 $\mathrm{var}(X)$。

重要公式： $DX=EX^2-(EX)^2$

性质 **1.** $D(c)=0$

性质 **2.** $\boldsymbol{D(aX+B)=a^2DX}$

性质 **3.** $\boldsymbol{E(X-C)^2\ge DX}$

等号当且仅当 $\boldsymbol{C=EX}$ 时成立.

性质 **4.** 标准化随机变量：$Y=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$，则

$EY=0$， $DY=1$.

返回

性质5　切贝雪夫不等式设随机变量（r.v.）ξ 的$E\xi$及$D\xi$存在，则对于任何$\varepsilon>0$，有

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

或 $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$ （对立事件）