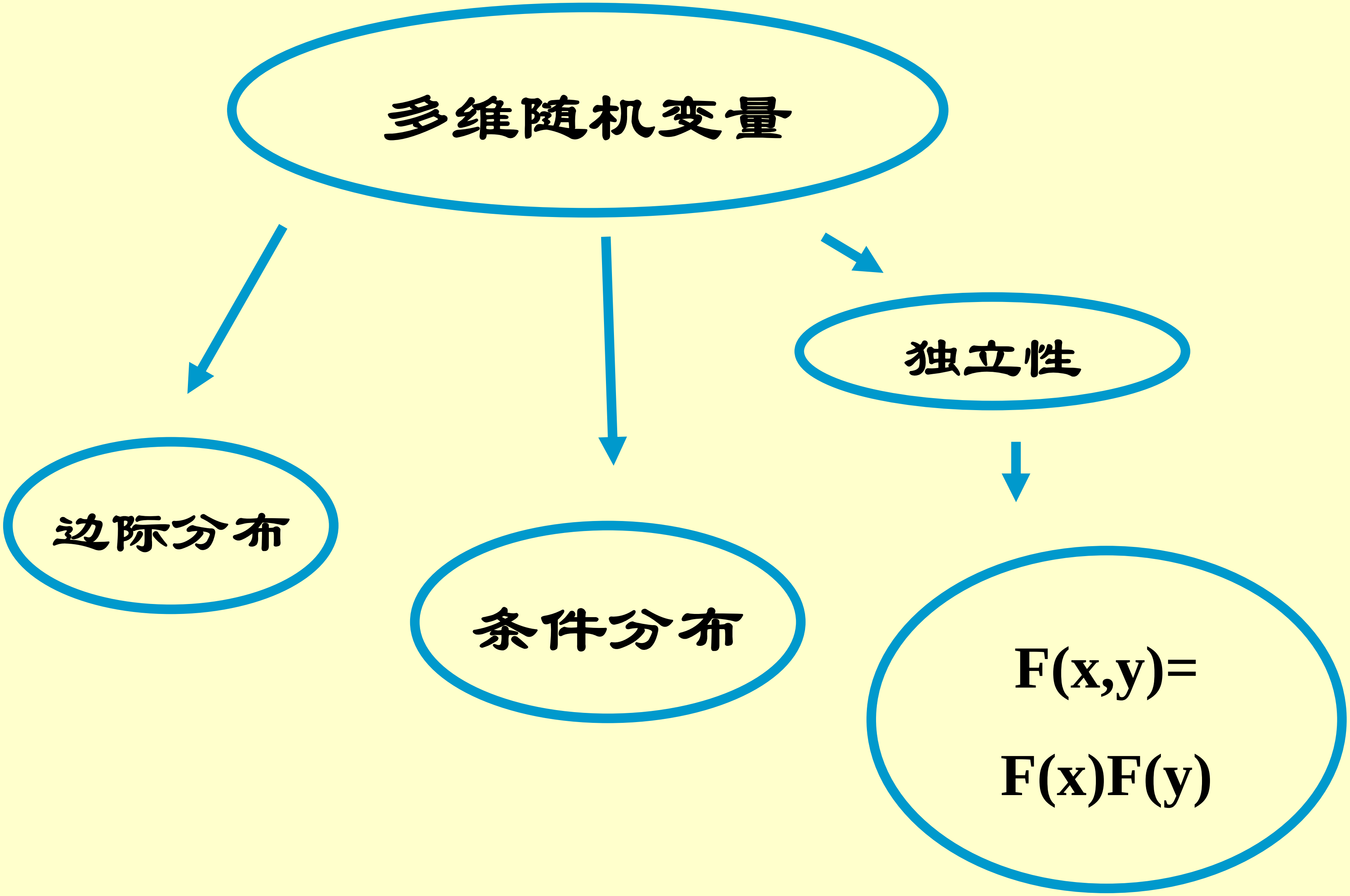
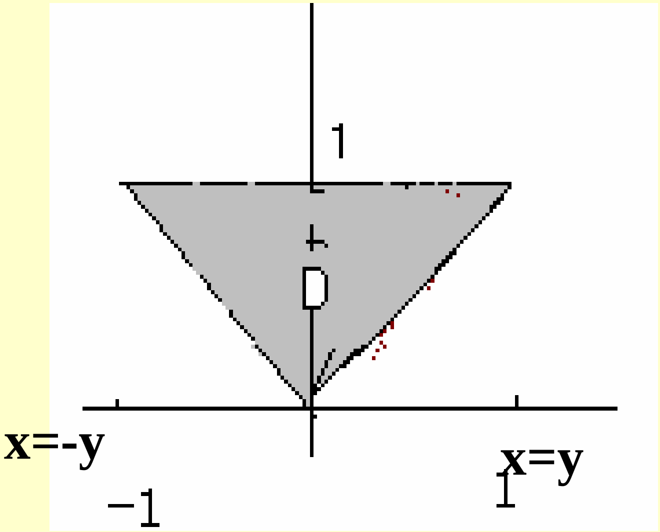

多维随机变量
边际分布
条件分布
独立性
F(x,y)=
F(x)F(y)

EX1 设(X, Y)服从如图区域D上的均匀分布，



求关于X的和关于Y的边缘概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{1}dy & -1<x<0\\ \int_{x}^{1}dy & 0\le x<1\\ 0 & others\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-y}^{y}dx & 0<y<1\\ 0 & others\end{cases}$$

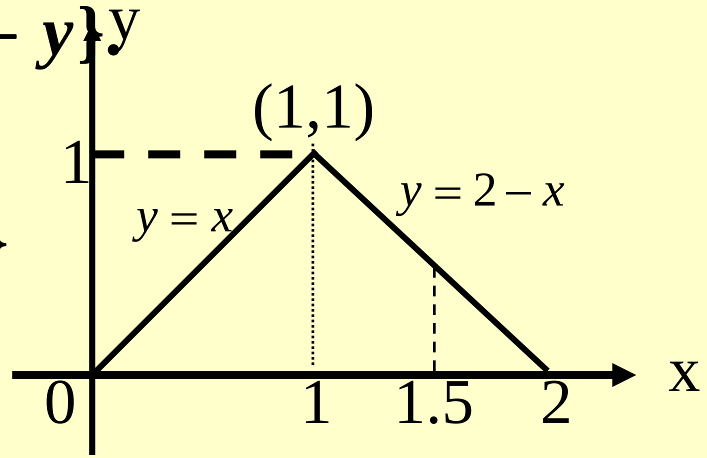
问X和Y是否独立？

设二维随机变量（ X, Y）服从区域 D上的均匀分布，

$D=\{(x, y): 0\le y\le x\le 2-y\}$

(1)求EX

（2）计算 $P\{Y\le 0.2 \mid X=1.5\}$



解: (1)(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le x\le 2-y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$p_X(x)=\begin{cases}\int_0^x dy, & 0\le x\le 1\\ \int_0^{2-x} dy, & 1< x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1< x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则

$$EX=\int_0^1 x\cdot x dx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=1$$

条件概率密度函数: $$p_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}.$$

$$p_{Y|X}(y\,|\,1.5)=\frac{p(1.5,y)}{p_X(1.5)}=\begin{cases}\dfrac{1}{0.5}, & 0\le y\le 0.5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2, & 0\le y\le 0.5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P\{Y\le 0.2\,|\,X=1.5\}=\int_{-\infty}^{0.2}p_{Y|X}(y\,|\,0.5)dy$$

$$=\int_{0}^{0.2}2dy=0.4$$

即 $F_{Y|X}(0.2\,|\,1.5)=0.4$

三、二维随机变量的数字特征

1、 二维随机变量的数学期望和条件数学期望

二维随机变量(ξ,η)

离散时，用联合分布列$P(\xi = x_i,\eta = y_j) = p_{ij}$表示；

连续时，用联合密度函数$p(x,y)$表示。

设随机变量函数$\zeta = f(\xi,\eta)$，其数学期望定义为：

1.离散：$$E\zeta = \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) p_{ij}$$

2.连续：$$E\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)p(x,y)dxdy$$

要求满足级数求和或积分绝对收敛的条件.

1）离散型随机变量的数学期望

$$E\xi=\sum_i\sum_j x_i p_{ij}=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}=\sum_i x_i p_{i\bullet}$$

$$E\eta=\sum_i\sum_j y_j p_{ij}=\sum_j y_j\sum_i p_{ij}=\sum_j y_j p_{\bullet j}$$

2）连续型随机变量的数学期望

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} xdx\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\xi}(x)dx$$

$$E\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yp(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} ydy\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} yp_{\eta}(y)dy$$

数学期望的性质

性质 1. $E(a\xi+b\eta)=aE\xi+bE\eta$，这里 a，b 是常数.

证明：1）离散

$$E(a\xi+b\eta)=\sum_i\sum_j(ax_i+by_j)p_{ij}$$

$$=a\sum_i\sum_j x_i p_{ij}+b\sum_i\sum_j y_j p_{ij}=aE\xi+bE\eta$$

2）连续

$$E(a\xi+b\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+by)p(x,y)dxdy$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)dxdy+b\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)dxdy$$

$$=aE\xi+bE\eta$$

推论 1. $E(\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iE\xi_i$

性质 2.设ξ，η相互独立，则 $E\xi\eta = E\xi E\eta$.

证明：1）离散

$$E\xi\eta = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_{i\bullet} \cdot y_j p_{\bullet j}$$

$$= (\sum_i x_i p_{i\bullet})(\sum_j y_j p_{\bullet j}) = E\xi \cdot E\eta$$

2）连续

$$E\xi\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp_\xi(x)p_\eta(y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yp_\eta(y)dy = E\xi \cdot E\eta$$

例 1. 在单位长的线段上任取两个点 M 和 N，求线段 MN 长度的数学期望.

解：设 M 和 N 的坐标分别为 ξ 和 η，

则 ξ, η 都服从 $U[0,1]$，且相互独立，故联合密度为

$$p_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E|\xi-\eta|=\int_0^1\int_0^1|x-y|\cdot 1\cdot dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^x(x-y)dy\right]dx+\int_0^1\left[\int_x^1(y-x)dy\right]dx$$

$$=2\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{3}.$$

例 2 设 ξ,η 相互独立，都服从 $N(0,1)$，求 $\zeta_1=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$，$\zeta_2=|\xi-\eta|$ 的数学期望.

解：(ξ,η) 的联合密度为： $p_{\xi\eta}(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$$E\zeta_1=E\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,p_{\xi\eta}(x,y)dxdy\text{。}$$

作极坐标变换

$$E\zeta_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r^2\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}dr=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}rde^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$=-re^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}dr=\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

利用密度规范性： $E\zeta_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{r^2}{2}}dr=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

对于 ζ_2 可类似有：

$$E\zeta_2=E|\xi-\eta|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|p_{\xi\eta}(x,y)dxdy$$

利用对称性

$$E\zeta_2 = 2\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{x}(x-y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-\frac{y^2}{2}}dy]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy]dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy]dx$$

计算： $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy]dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy]d(-e^{-\frac{x^2}{2}})$

$$=\frac{1}{\pi}\{\int_{-\infty}^{+\infty}-e^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy]|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy]dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}[\int_{-\infty}^{x}d(-e^{-\frac{y^2}{2}})]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

得到 $E\zeta_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$

例 2. 一辆民航大巴载有 20 位旅客自机场开出，旅途有 10 个车站可以下车，如果到车站时没有旅客下车，大巴就不停车，设各位旅客下车是独立的，且在每站下车都是等可能的，求大巴停车次数 ξ 的期望.

解：设 $\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{站有旅客下车} \\ 0, & \text{第}i\text{站没有旅客下车} \end{cases}$，

则 $P(\xi_i = 0) = P${20 位旅客在第 i 站都不下车},

每一位旅客在第 i 站下车概率为 $\frac{1}{10}$，

不下车概率为 $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$。

由独立性 $P(\xi_i = 0) = (\frac{9}{10})^{20}$， $P(\xi_i = 1) = 1 - (\frac{9}{10})^{20}$.

$$E\xi_i = 0 \times P(\xi_i = 0) + 1 \times P(\xi_i = 1) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}.$$

大巴停车次数 $\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_{10}$，

故 $E\xi = E\xi_1 + \cdots + E\xi_{10} = 10[1 - (\frac{9}{20})^{20}]$。

定义　以条件分布构成的数学期望（若存在）

称之为条件期望，此时有

$$E(\eta \mid \xi = x) = \begin{cases} \sum_j y_j P(\eta = y_j \mid \xi = x) & , \quad (\xi, \eta)\text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y P_{\eta|\xi}(y \mid x) dy & \quad\ \ (\xi, \eta)\text{连续型} \end{cases}$$

$$E(\xi \mid \eta = y) = \begin{cases} \sum_i x_i P(\xi = x_i \mid \eta = y) \ , & (\xi, \eta)\ \text{离散型} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x P_{\xi|\eta}(x \mid y) dx, & (\xi, \eta)\ \text{连续型} \end{cases}$$

条件数学期望概念不仅在实际应用中，同时在深入讨论近代概率论的各种概念时也是非常重要的。

例 **4.** 求二元正态 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的条件期望。

解：

$$p_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))]$$

它实际上是 $N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2))$ 的密度，

故条件期望为

$$E(\eta|\xi=x) = \mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x+(\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1)$$

类似地 $E(\xi|\eta=y) = \mu_1+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_2) = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}y+(\mu_1-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_2)$

2、 二维随机变量的方差

设随机向量(ξ,η)的期望存在，且

$\begin{pmatrix}\xi-E\xi\\ \eta-E\eta\end{pmatrix}(\xi-E\xi \quad \eta-E\eta)$各个分量的期望也都存在，则

$$E\left\{\begin{pmatrix}\xi-E\xi\\ \eta-E\eta\end{pmatrix}(\xi-E\xi,\eta-E\eta)\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} E(\xi-E\xi)^2 & E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta) \\ E(\eta-E\eta)(\xi-E\xi) & E(\eta-E\eta)^2 \end{pmatrix}$$

称为(ξ,η)的协方差矩阵，其中的 $E(\xi-E\xi)^2=D\xi$，$E(\eta-E\eta)^2=D\eta$，分别为边际分布 ξ，η的方差，而 $E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$称为(ξ,η)的协方差，记为 $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

二维随机变量(ξ,η)

离散时，用联合分布列 $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$

表示；

$$D\xi = \sum_i \sum_j (x_i - E\xi)^2 p_{ij} = \sum_i (x_i - E\xi)^2 \sum_j p_{ij}$$

$$= \sum_i (x_i - E\xi)^2 p_{i\bullet} = E(\xi - E\xi)^2$$

$$D\eta = \sum_i \sum_j (y_j - E\eta)^2 p_{ij} = \sum_j (y_j - E\eta)^2 \sum_i p_{ij}$$

$$= \sum_j (y_j - E\eta)^2 p_{\bullet j} = E(\eta - E\eta)^2$$

连续时，用联合密度函数 $p(x,y)$ 表示。

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 p(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 p_\xi(x)dx = E(\xi - E\xi)^2$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - E\eta)^2 p(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E\eta)^2 dy \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E\eta)^2 p_\eta(y)dy = E(\eta - E\eta)^2$$

协方差的性质

性质 1（展开公式）$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E\xi\eta-(E\xi)\cdot(E\eta)$.

性质 2（可交换性）$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$.

性质 3（线性性质）设 a,b 为二个参数， ξ,η,ζ 为随机变量，则

$$\operatorname{cov}(a\xi+b\eta,\ \zeta)=a\operatorname{cov}(\xi,\zeta)+b\operatorname{cov}(\eta,\zeta).$$

性质 4 若 ξ,η 独立，且它们的协方差存在，则协方差必为 **0.**

性质 5 设 ξ 与 η 的方差存在，则

$$D(\xi\pm\eta)=D\xi+D\eta\pm2\operatorname{cov}(\xi,\eta).$$

例 5. 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是任意n个随机变量，证明：

$$D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i+2\sum_{1\le i<j\le n}K_{ij}\ ,$$

其中K_{ij}表示随机变量ξ_i与ξ_j的协方差，即$K_{\xi\eta}=E[(\xi_i-E\xi_i)(\xi_j-E\xi_j)]$；并由此证明：如果$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，则有

$$D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i\ 。$$

证明：$D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=E[(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)-E(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)]^2=E[(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)-(\sum_{i=1}^{n}E\xi_i)]^2$

$$=E[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)]^2$$

$$=E[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)^2+2\sum_{1\le i<j\le n}(\xi_i-E\xi_i)(\xi_j-E\xi_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(\xi_i-E\xi_i)^2+2\sum_{1\le i<j\le n}E(\xi_i-E\xi_i)(\xi_j-E\xi_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i+2\sum_{1\le i<j\le n}K_{ij}$$

若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，则所有的$K_{ij}=0$，

即 $D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i$

例 6.进行 n 次独立试验，事件 A 在第 i 次试验中发生的概率 $p_i\ (0<p_i<1, i=1,2,\cdots,n)$。求事件 A 在 n 次试验中发生次数 X 的数学期望及方差。

解：设 X_i 表示第 i 次试验中 A 发生的次数，

则 X_i 服从两点分布，设分布律为

X_i	0	1
P	$1-p_i$	p_i

$EX_i = p_i$，$DX_i = p_i(1-p_i)$

设 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$，由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，

则 $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$，

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i).$$

若事件 A 在第各次试验中发生的概率相同，即 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$，

则 $$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = np,$$

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) = np(1-p).$$

这时，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从二项分布 $B(n,p)$.

注意：尽管 $EX = EY, DX = DY$，但 X 与 Y 不是服从同一个分布。

例 7. 设$\xi \sim P(3)$， $\eta \sim p_\eta(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2-4x+4}{18}\}$，且二者相互独立，令 $\zeta=6+3\xi-4\eta$，试求$D\zeta$.

解：首先由$\xi \sim P(3)$，故$D\xi=3$；

而η的密度

$$p_\eta(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{(x-2)^2}{18}\}$$

从而$D\eta=9$；

$$D\zeta = D(6+3\xi-4\eta)=D6+D3\xi+D(-4\eta)$$

$$=9D\xi+16D\eta=171.$$