华东理工大学 2015－2016 学年第二学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A　2016.7

开课学院：<u>理学院</u> ，考试形式：<u>闭卷</u>，所需时间：<u>120</u> 分钟

考生姓名：__________学号：_____________班级：_________任课教师 ：_______

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷								

(本试卷共七道大题)

积分变换表：$\mathcal{F}[\delta(t)]=1$、$\mathcal{F}[t]=2\pi i\delta'(\omega)$、$\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$、$\mathcal{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,

$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$,$\mathcal{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}$,$\mathcal{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$] $\mathcal{L}[t^m]=\dfrac{1}{s^{m+1}}$,

一、 填空（每小题 4 分，共 24 分）

1．复数 $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8}=a+ib$, 则 $(a,b)=$ ______.

2．$\oint_C(|z|^2+e^z\sin^2 z)dz$，其中 C 为 $|z|=2$ 的正向,则 $I=$__________.

3. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n z^n$ 的收敛半径为______________.

4．积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)(\sin t+e^t)dt=$_______________

5.已知 $f(z)=\cos z+\sin z$,则 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=$___________

6.函数 $f(t)=t\cos 3t$ 的 Laplace 变换 $F(s)=$____________.

二、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1．$z^2=\bar{z}^2$，则必有（　　　）

A. $z=0$　　B. $\mathrm{Re}(z)=0$　　C. $\mathrm{Im}(z)=0$　　D. $\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Im}(z)=0$

2. 设 $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$ 则关于 $f(z)$ 的导数问题是（　　）

A. $f(z)$ 仅在原点可导且 $f'(0)=0$；

B． $f(z)$ 处处解析，且 $f'(z)=3x^2-3y^2+i6xy$

C． $f(z)$ 处处解析，且 $f'(z)=3x^2-3y^2-i6xy$；

D． $f(z)$ 处处解析，且 $f'(z)=3y^2-3x^2+i6xy$.

3. 设 C 为从原点到 2＋3i 的直线段，积分 $I=\int_C[(x-2y)+ixy]dz$ =(　　　)

A. $10-2i$　　B. $-5-2i$　　C. $-10-2i$　　D. $-2\pi i(5+i)$

4. $z=1$ 是函数 $f(z)=(z-1)^3\sin\dfrac{1}{z-1}$ 的（　　　）

A. 可去奇点　　B. 本性奇点　　C. 二级极点　　D. 二级零点

三、计算下列积分（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$

2. $\oint_C \frac{e^z}{(z-\pi i)^{10}}dz$,其中 C 为正向圆周 $|z|=4$.

3. $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2},\quad (0<a<1)$

4. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)^2}dx$

四.(10 分) 已知调和函数$u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，求其共轭调和函数$\mathrm{v}(x,y)$，并求解析函数$f(z)=u+iv$.

五.（**8 分**）把函数$f(z)=\frac{1}{z-5}$分别在圆环域$0<|z-3|<2$,和$2<|z-3|<\infty$内展开成 Laurent 级数

六．(6 分)求把单位圆$|z|<1$ 映射成单位圆$|w|<1$且满足 $f(\frac{1}{2})=0, \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$ 的分式线性映射.

七、（12 分）（1）已知 $F(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$,求其拉氏逆变换

(2)利用 Laplace 变换求解初值问题：$\begin{cases} y''-3y'+2y=e^{2t} \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$