华东理工大学 2015–2016 学年第二学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A 答案 2016.7

开课学院：理学院 ，考试形式：闭卷 ，所需时间：120 分钟

一、 填空（每小题 4 分，共 24 分）

1. $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 2. 0 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4. 1 5. 0 6. $\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

二、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）DBCB

三、计算下列积分（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\oint_{|z|=2}\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$

解：令 $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$，在 $|z|=2$ 内，函数 $f(z)$ 有两个奇点.

$z=0$ 为可去奇点，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$， 2 分

$z=1$ 为一阶极点，$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z)=\left.\frac{\sin^2 z}{z^2}\right|_{z=1}=\sin^2 1$，

原式 $=2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1])=2\pi i\sin^2 1$.

2. $\oint_C\frac{e^z}{(z-\pi i)^{10}}dz$,其中 C 为正向圆周 $|z|=4$.

解：$\oint_C\frac{e^z}{(z-\pi i)^{10}}dz=\frac{2\pi i}{9!}(e^z)^{(9)}\Big|_{z=\pi i}=$

$\frac{-2\pi i}{9!}$ 2 分

3. $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, $(0<a<1)$

解：令 $z=e^{i\theta}$ 则 $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1})$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$

$$I=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)(1-az)}$$ 在 $|z|=1$ 内，

$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)(1-az)}$ 只以 $z=a$ 为一级极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{1-a^2}$$

由留数定理， $I=2\pi i\cdot\dfrac{1}{i}\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{2\pi}{1-a^2}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)^2}dx$

解: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)^2}dx$

令 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)(z^2+1)^2}$ 则 $f(z)$ 在上半平面有一级极点 $z_1=2i,$ 二级极点 $z_2=i,$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),2i]+\operatorname{Res}[f(z),i]\}$$

$$=\pi i\{\frac{1}{36i}-\frac{i}{36}\}$$

$$=\frac{\pi}{18}$$

四.(10 分) 已知调和函数 $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，求其共轭调和函数 $\mathrm{v}(x,y)$，并求解析函数 $f(z)=u+iv$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

由 C-R 条件有

$$v=\int\frac{x}{x^2+y^2}dy=\arctan\frac{y}{x}+\phi(x)$$

故 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}+\phi'(x)$ 又因 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{x^2+y^2}$

故 $\phi'(x)=0$ $\phi(x)=C$ C 为实常数

于是 $v=\arctan\frac{y}{x}+C$

所以

$$f(z)=u+iv=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i(\arctan\frac{y}{x}+C)$$

$y=0$ 有 $f(x)=\ln x+Ci$

故 $f(z)=u+iv=\mathrm{Ln}\,z+iC$

五.（8 分）把函数 $f(z)=\frac{1}{z-5}$ 分别在圆环域 $0<|z-3|<2$, 和 $2<|z-3|<\infty$ 内展开成 Laurent 级数

解： 在 $1<|z-1|<+\infty$ 内

$$f(z)=\frac{1}{-2+(z-3)}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-3}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{2^{n+1}}$$

在 $2<|z-3|<\infty$ 内

$$f(z)=\frac{1}{-2+(z-3)}$$

$$=\frac{1}{z-3}\frac{1}{1-\frac{3}{z-3}}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-3)^{n+1}}$$

六．(6 分)求把单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 且满足 $f(\frac{1}{2})=0, \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$ 的分式线性映射.

解： $f(\frac{1}{2})=0$ 则 $f(2)=\infty$

令 $f(z)=k\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$

$|f(1)|=\left|\dfrac{k}{2}\right|=1$， $|k|=2$

$$f(z)=2e^{i\theta}\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$$

$f'(z)=2e^{i\theta}\dfrac{-3}{2(z-2)^2}$， $f'(\frac{1}{2})=\dfrac{4}{3}e^{i\theta+\pi i}$

$\theta+\pi=\dfrac{\pi}{2}$， 所以 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$

$$f(z)=-2i\frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}=-i\frac{2z-1}{z-2}.$$

七、（12 分）（1）已知 $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$,求其拉氏逆变换

(2)利用 Laplace 变换求解初值问题： $\begin{cases} y''-3y'+2y=e^{2t} \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$

解:(1)解法 1: $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{3}(\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{s}{s^2+4})]$

$=\dfrac{1}{3}(\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{s^2+1}]-\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{s^2+4}])=\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$

解法 2： $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}]$

$$=\mathrm{Res}[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},i]+\mathrm{Res}[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},-i]$$

$$+\operatorname{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},2i\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{se^{st}}{(s^2+1)(s^2+4)},-2i\right]$$

$$=\frac{ie^{it}}{2i(i^2+4)}+\frac{-ie^{-it}}{-2i(i^2+4)}+\frac{2ie^{2it}}{4i(4i^2+1)}+\frac{-2ie^{-2it}}{-4i(4i^2+1)}$$

$$=\frac{e^{it}}{6}+\frac{e^{-it}}{6}-\frac{e^{2it}}{6}-\frac{e^{-2it}}{6}=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$$

(2)令 L $(y(t))=Y(s)$，对方程两边求拉氏变换得：

$$S^2Y(S)-1+(-3SY(S))+2Y(S)=\frac{1}{S-2}$$

$$(S^2-3S+2)Y(S)=\frac{1}{S-2}+1$$

$$Y(S)=\frac{1}{(S-1)(S-2)^2}+\frac{1}{(S-1)(S-2)}=\frac{1}{(S-2)^2}$$

$$\therefore y(t)=te^{2t}$$