华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 8 册）

班级___________学号____________姓名____________任课教师____________

第十五次作业

教学内容：8.4 拉普拉斯变换的应用；6.1 共形映射的概念；6.2 分式线性映射

1．解下列微分方程

(1) $y''-2y'+y=e^t, y(0)=y'(0)=0;$

(2) $y''-2y'+2y=2e^t\cos t, y(0)=y'(0)=0;$

(3) $y^{(4)} - y''' = \cos t, y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, y''(0) = 1;$

(4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, y''(0) = 1;$

2． 求解微分积分方程

（1） $y' + 2y = \sin t - \int_0^t y(\tau)d\tau, y(0) = 0$

3．求解下列方程组

（1） $\begin{cases} x'' - x - 2y' = e^t & x(0) = -\dfrac{3}{2}, x'(0) = \dfrac{1}{2} \\ x' - y'' - 2y = t^2 & y(0) = 1, y'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y'' - x'' + x' - y = e^t - 2 & x(0) = x'(0) = 0 \\ 2y'' - x'' - 2y' + x = -t & y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} (2x''-x'+9x)-(y''+y'+3y)=0 & x(0)=x'(0)=1 \\ (2x''+x'+7x)-(y''-y'+5y)=0 & y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$

4.填空题

(1) 分式线性映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 在 $z=i$ 处的旋转角为________________________________，

伸缩率为______________..

（2）在 $w=z^2$ 的映射下，$y=x+1$ 的像曲线为______________________________，

$y^2=x^2+1$ 的像曲线为____

（3）在映射 $w=\dfrac{1}{z}$. 下，区域 $x>1, y>0$. 映射为______________________________

（4）在映射 $w=(1+i)z$ 下，　区域 $\operatorname{Im} z>0$ 像为________________

第十六次作业

教学内容： 6.2 分式线性映射（续）;6.3 几种常见的分式线性映射

*6.4 几个初等函数构成的映射 **(带*号题目 2 学分的同学不做)**

1．填空

(1)把 $z_1=2, z_2=i, z_3=-2;$ 映射为 $w_1=-1, w_2=i, w_3=1$ 的分式线性映射为______.____.

(2) 由三点 $z_1=\infty, z_2=i, z_3=0$ 到 $w_1=0, w_2=i, w_3=\infty$ 的分式线性映射为__.__________

2 求把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射成单位圆域 $|w|<1$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(i)=0, \qquad \arg f'(i)=-\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $f(i)=0, \qquad f(-1)=1$;

(3) $f(2i)=0, \qquad \arg f'(2i)=0$;

3 求把单位圆$|z|<1$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射$w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\frac{1}{2})=0, \qquad f(-1)=1$;

(2) $f(\frac{1}{2})=0, \qquad \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$.

4. 求将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射成圆 $|w|<R$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，且满足 $f(i)=0$，$f'(i)=1$.

5.求分式线性映射 $w=f(z)$，它把 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$，并使 $1, 1+i$ 分别映射为 $1, \infty$

***6**．求把角形域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的一个映射.

***7.** 求将带形域$0 < \operatorname{Re} z < a$映射成$\operatorname{Re} w > b$的共形映射.

***8.** 求将下列区域映射为上半平面的共形映射.

(1) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 且 $|z| < 2$;

(2) $|z|<1$，沿 0 到 1 有割痕的区域;

(3) $|z|<2$ 且 $|z-1|>1$;

(4) $|z+i|>\sqrt{2}$ 且 $|z-i|<\sqrt{2}$.

部分习题参考答案：

第十五次作业：

1．(1) $\frac{1}{2}t^2e^t$　(2) $te^t\sin t$　(3) $t-1+\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)+\frac{t^2}{2}$

(4) $\frac{1}{2}t\sin t$

2．$\frac{1}{2}(\sin t-te^{-t})$

3.（1）$\begin{cases} x(t)=-\frac{3}{2}e^t+2t \\ y(t)=-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x(t)=te^t-t \\ y(t)=te^t-e^t+1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x(t)=\frac{1}{3}e^t+\frac{2}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\sin 2t \\ y(t)=\frac{2}{3}e^t-\frac{2}{3}\cos 2t-\frac{1}{3}\sin 2t \end{cases}$

第十六次作业

2. (1) $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$　(2) $f(z)=-i\frac{z-i}{z+i}$　(3) $f(z)=\mathrm{i}\frac{z-2i}{z+2i}$

3. (1) $f(z)=\frac{2z-1}{z-2}$　(2) $-i\frac{2z-1}{z-2}$.

4．$w=2i\frac{z-i}{z+i}$

5．$w=\frac{(i-1)z+1}{-z+(1+i)}$

*6．$w=\frac{z^4-i}{z^4+i}$

*7. $w=\dfrac{e^{\frac{\pi}{a}zi}-i}{e^{\frac{\pi}{a}zi}+i}$

*8. (1) $w=\left(\dfrac{z^3+8}{z^3-8}\right)^2$ （2） $w=\left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$ （3） $e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}$ （4） $w=-i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$