第十三章 能量法

Chapter13 Energy Method

第十三章 能量法 (Energy Methods)

§13-1 概述（Introduction）

一、能量方法 （Energy methods)

利用**功能原理** $V_{\varepsilon} = W$ 来求解可变形固体的位移,变形和内力等的方法.

二、外力功（Work of the external force）

固体在外力作用下变形,引起力作用点沿力作用方向位移,外力因此而做功,则成为外力功.

三、变形能（Strain energy）

在弹性范围内,弹性体在外力作用下发生变形而在体内积蓄的能量,称为**弹性变形能**,简称变形能.

四、功能原理（Work-energy principle）

可变形固体在受外力作用而变形时,外力和内力均将作功. 对于弹性体,不考虑其他能量的损失,外力在相应位移上作的功,在数值上就等于积蓄在物体内的应变能.

$$V_{\varepsilon} = W$$

§ 13-2 杆件变形能的计算 (Calculation of strain energy for various types of loading)

一、杆件变形能的计算（Calculation of strain energy for various types of loading）

1. 轴向拉压的变形能（Strain energy for axial loads)

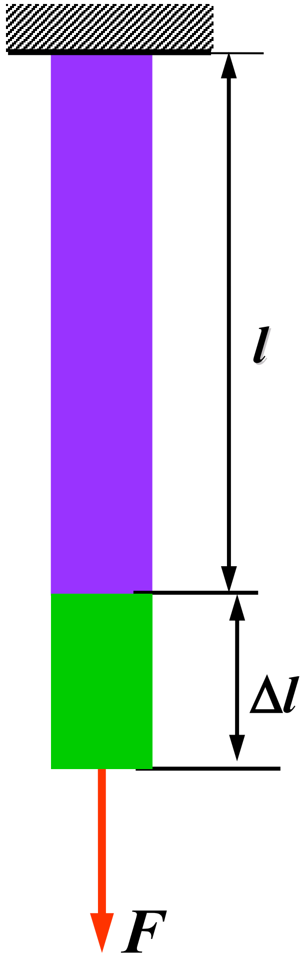
当拉力为F_1 时,杆件的伸长为Δl_1

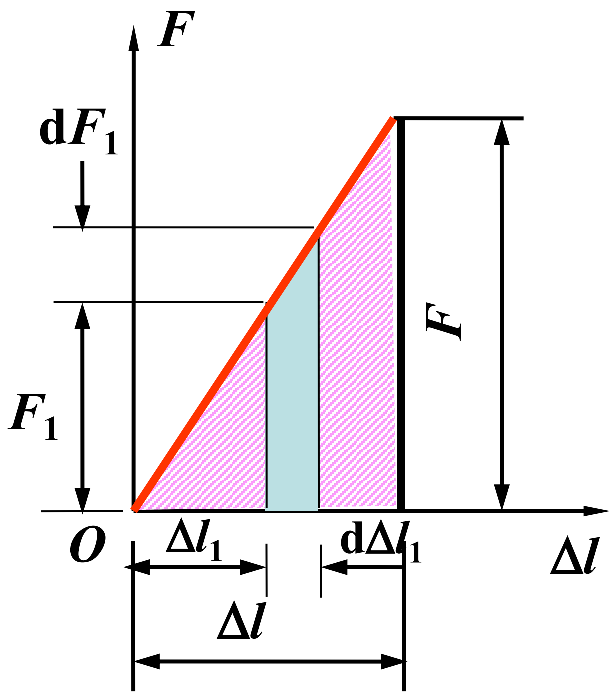
当再增加一个dF_1时,相应的变形增量为d(Δl_1)

此外力功的增量为:

$$\mathrm{d}W = F_1 \mathrm{d}(\Delta l_1) \qquad \mathrm{d}(\Delta l_1) = \frac{\mathrm{d}F_1 l}{EA}$$

能量法 (Energy Method)





积分得: $$W=\int \mathrm{d}W=\int_0^F F_1\frac{l}{EA}\mathrm{d}F_1=\frac{F^2 l}{2EA}=\frac{F}{2}\Delta l$$

根据功能原理

$V_\varepsilon = W$，可得以下变形能表达式

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{1}{2}F_N\Delta l$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{F_N l}{EA}$$

$$V_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{F_N^2 l}{2EA}$$

当轴力或截面发生变化时:

$$\boxed{V_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Ni}^2 l_i}{2E_i A_i}}$$

当轴力或截面连续变化时: $\boxed{V_{\varepsilon} = \int_0^l \frac{F_N^2(x)\mathrm{d}x}{2EA(x)}}$

比能 （ strain energy density）：

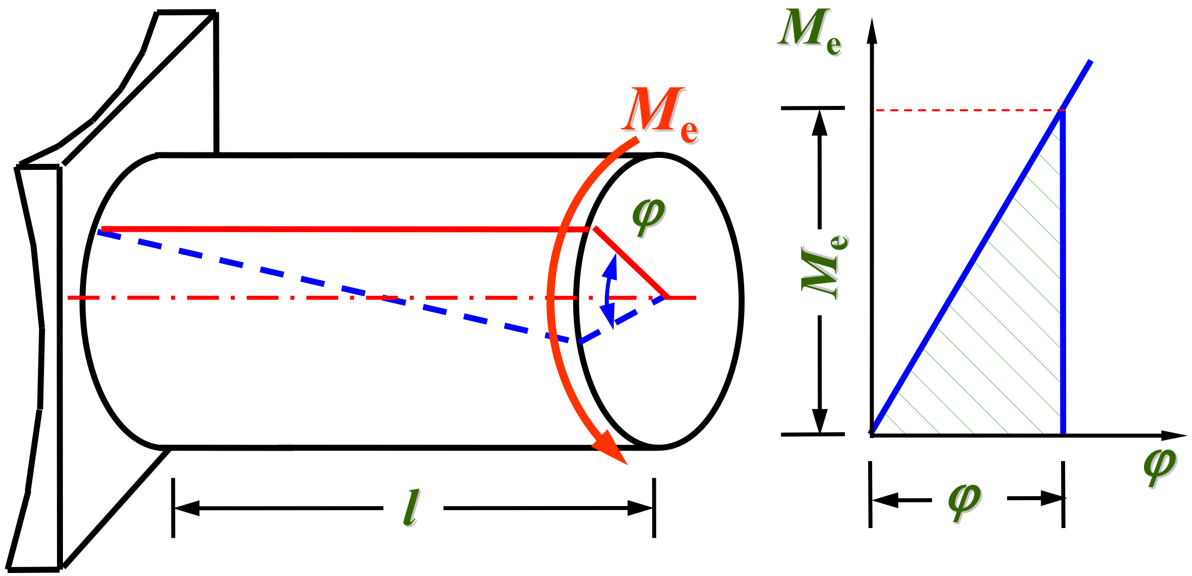
单位体积的应变能. 记作υ

$$\upsilon_{\varepsilon} = \frac{U}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\upsilon_{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$ （单位 J/m³)

2. 扭转杆内的变形能（Strain energy for torsional loads）

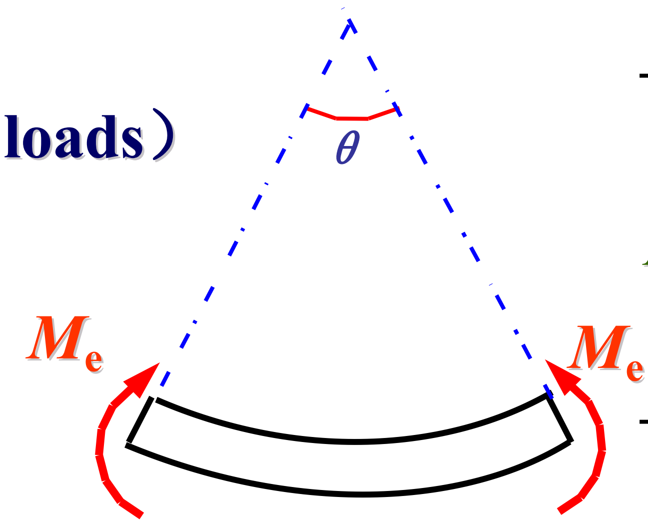


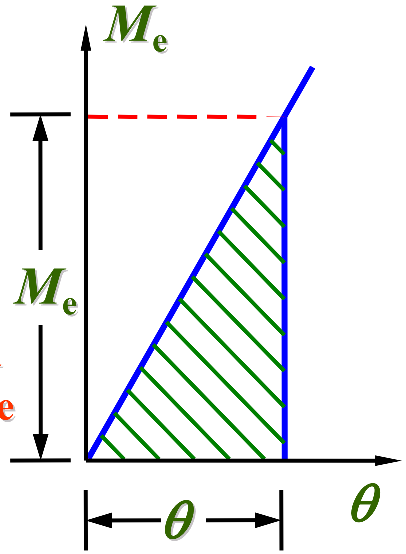
$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}M_e \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2}M_e \frac{M_e l}{GI_p} = \frac{M_e{}^2 l}{2GI_p} = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

$$\boxed{V_\varepsilon = \int_l \frac{T^2(x)}{2GI_p(x)}\mathrm{d}x} \quad \text{或} \quad \boxed{V_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2 l_i}{2G_i I_{pi}}}$$

3. 弯曲变形的变形能

（Strain energy for flexural loads）





- 纯弯曲（pure bending）

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} M_e \cdot \theta = \frac{1}{2} M_e \frac{M_e l}{EI} = \frac{M^2 l}{2EI}$$

- 横力弯曲（nonuniform bending）

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{M_e^2(x)}{2EI(x)} \mathrm{d}x$$

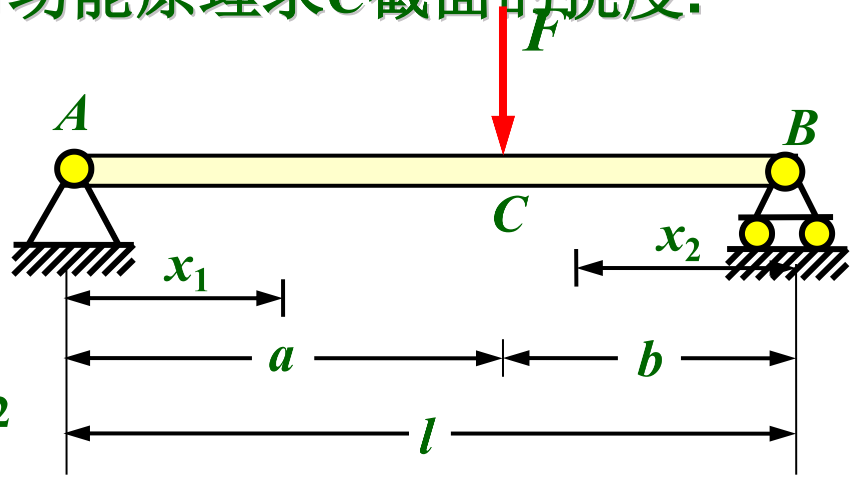
4. 组合变形的变形能（Strain energy for combined loads)

截面上存在几种内力,各个内力及相应的各个位移相互独立,力独立作用原理成立,各个内力只对其相应的位移做功.

$$V_{\varepsilon}=\int_{l}\frac{F_{\mathrm{N}}^{2}(x)}{2EA(x)}\mathrm{d}x+\int_{l}\frac{T^{2}(x)}{2GI_{\mathrm{p}}(x)}\mathrm{d}x+\int_{l}\frac{M^{2}(x)}{2EI(x)}\mathrm{d}x$$

三、变形能的应用（Application of strain energy）

例题1 试求图示梁的变形能,并利用功能原理求C截面的挠度.



解:

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

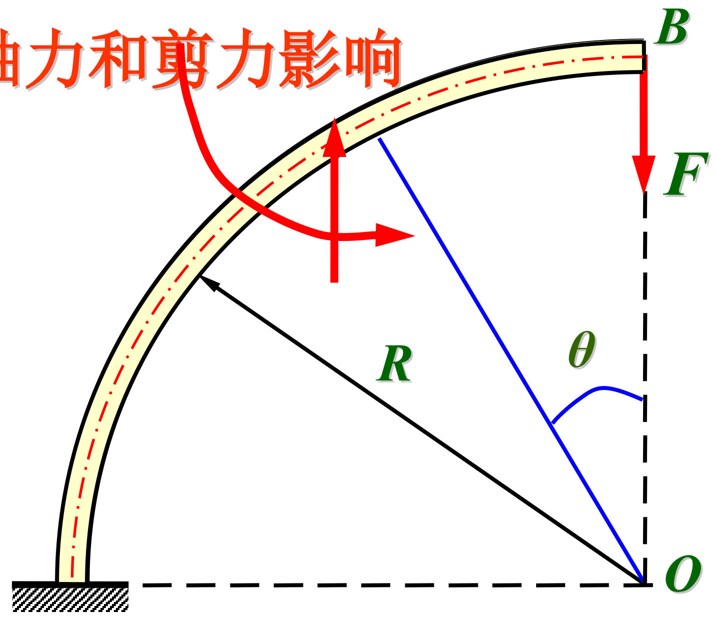
$$= \int_0^a \frac{(\frac{Fb}{l}x_1)^2}{2EI}\mathrm{d}x_1 + \int_0^b \frac{(\frac{Fa}{l}x_2)^2}{2EI}\mathrm{d}x_2$$

$$= \frac{F^2b^2}{2EIl^2}\frac{a^3}{3} + \frac{F^2a^2}{2EIl^2}\frac{b^3}{3} = \frac{F^2a^2b^2}{6EIl}$$

$$W = \frac{1}{2}F\cdot w_C$$

由$V_\varepsilon=W$得 $w_C = \dfrac{Fa^2b^2}{3EIl}$

例题2 试求图示四分之一圆曲杆的变形能,并利用功能原理求B截面的垂直位移. 已知EI为常量.不计轴力和剪力影响



解: $$M(\theta)=FR\sin\theta$$

$$V_{\varepsilon}=\int_{l}\frac{M^{2}(\theta)}{2EI}R\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(FR\sin\theta)^{2}}{2EI}R\mathrm{d}\theta=\frac{\pi F^{2}R^{3}}{8EI}$$

$$W=\frac{1}{2}F\cdot\delta_{y}$$

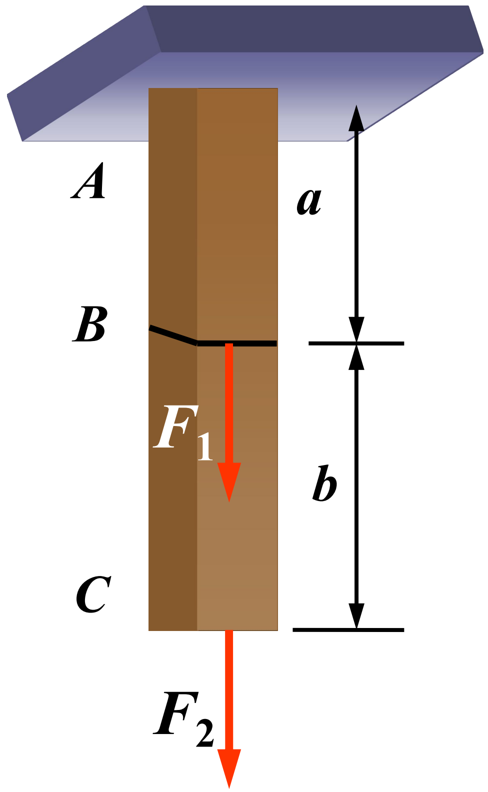
由$V_{\varepsilon}=W$得 $$\delta_{y}=\frac{\pi FR^{3}}{4EI}$$

例题3 拉杆在线弹性范围内工作.抗拉刚度EI ,受到F_1和F_2两个力作用.

(1) 若先在 B 截面加 F_1,
然后在 C 截面加 F_2;

(2) 若先在 C 截面加 F_2,
然后在 B 截面加 F_1.

分别计算两种加力方法拉杆的应变能.



（1）先在 B 截面加 F_1,然后在 C 截面加 F_2

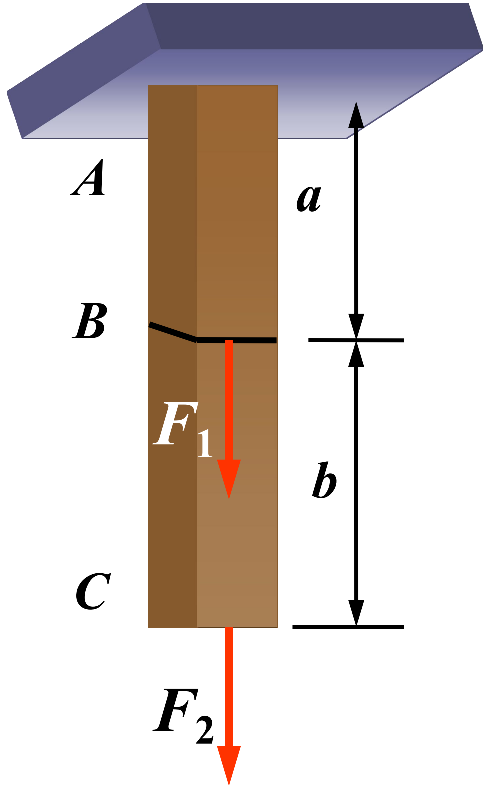
（a）在 B 截面加 F_1, B截面的位移为

$$\delta_{B1} = \frac{F_1 a}{EA}$$

外力作功为

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 \delta_{B1} = \frac{F_1^2 a}{2EA}$$

（b）再在C上加 F_2



C截面的位移为 $\delta_{C2} = \dfrac{F_2(a+b)}{EA}$

F_2作功为 $W_2 = \dfrac{1}{2} F_2 \delta_{C2} = \dfrac{F_2^2(a+b)}{2EA}$

（c）在加F_2 后,B截面又有位移

$$\delta_{B2} = \frac{F_2 a}{EA}$$

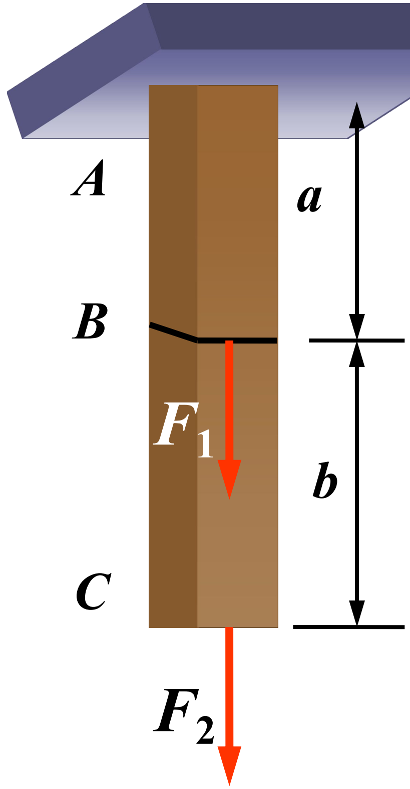
在加 F_2 过程中 F_1 作功（常力作功）

$$W_3 = F_1 \delta_{B2} = \frac{F_1 F_2 a}{EA}$$

所以应变能为

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2} F_1 \delta_{B1} + \frac{1}{2} F_2 \delta_{C2} + F_1 \delta_{B2}$$

$$= \frac{F_1^2 a}{2EA} + \frac{F_2^2 (a+b)}{2EA} + \frac{F_1 F_2 a}{EA}$$



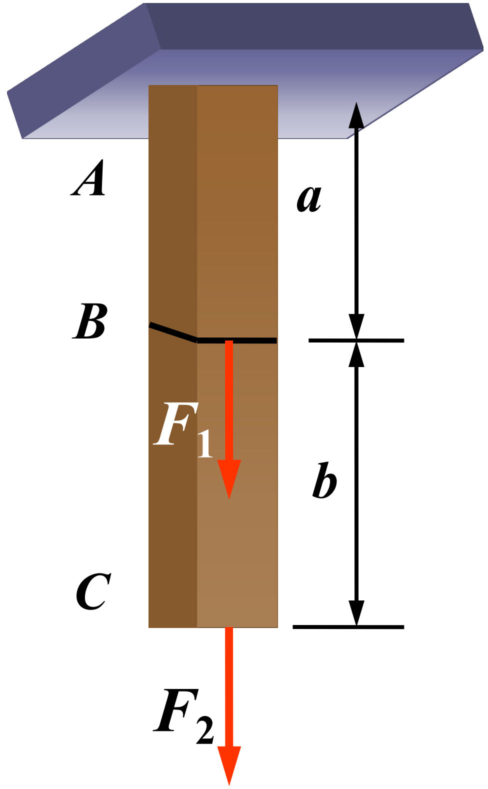
（2）若先在C截面加F_2 ,然后B截面加F_1.

（a）在C截面加F_2 后,F_2 作功

$$\frac{F_2^2(a+b)}{2EA}$$

（b） 在B截面加F_1后,F_1作功

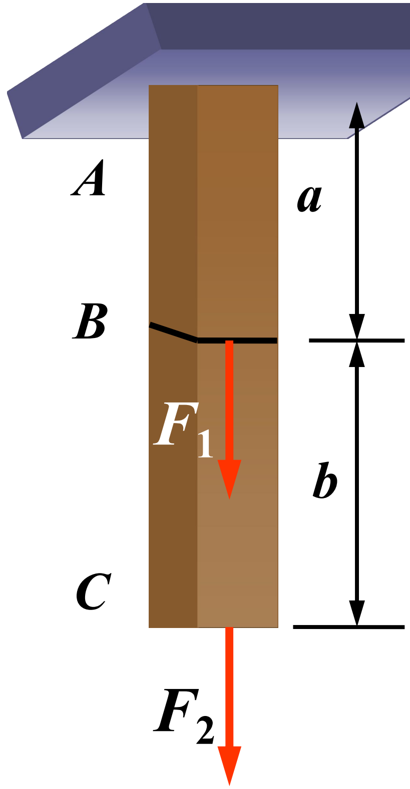
$$\frac{F_1^2 a}{2EA}$$



（c）加 F_1引起 C 截面的位移 $\dfrac{F_1 a}{EA}$

在加F_1过程中F_2作功（常力作功） $\dfrac{F_1 F_2 a}{EA}$

所以应变能为



$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F_1\delta_{B1} + \frac{1}{2}F_2\delta_{C2} + F_1\delta_{B2}$$

$$= \frac{F_1^2 a}{2EA} + \frac{F_2^2(a+b)}{2EA} + \frac{F_1 F_2 a}{EA}$$

注意:

（1） 计算外力作功时,注意变力作功与常力作功的区别.

（2）应变能V_ε只与外力的最终值有关,而与加载过程和加载次序无关.

§13-3 互等定理（Reciprocal Theorems）

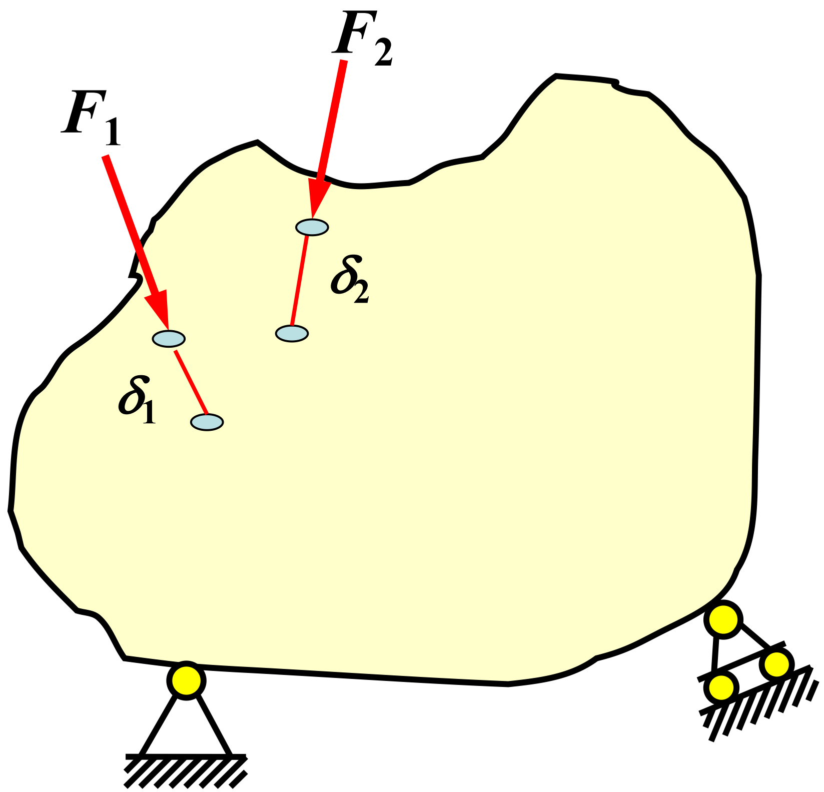
一、功的互等定理（Reciprocal work theorem）

（1）设在线弹性结构上作用力

F_1， F_2

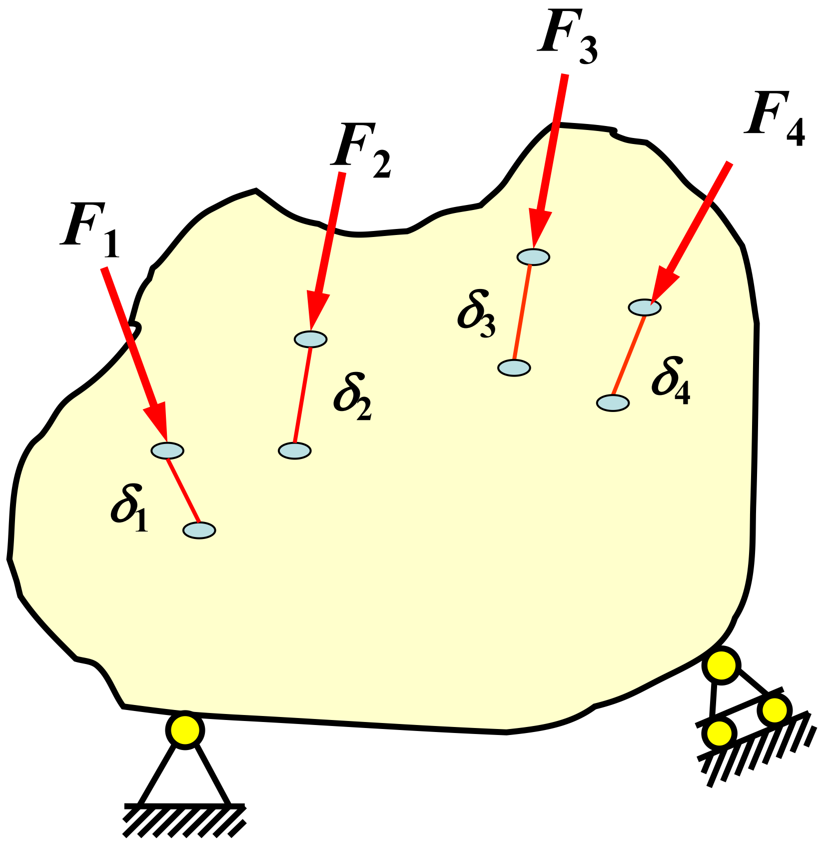
两力作用点沿力作用方向的位移分别为

δ_1， δ_2



F_1 和 F_2 完成的功应为

$$\frac{1}{2}F_1\delta_1+\frac{1}{2}F_2\delta_2$$



（2）在结构上再作用有力

F_3，F_4

沿 F_3和 F_4方向的相应位移为

δ_3，δ_4

F_3 和 F_4 完成的功应为 $\frac{1}{2}F_3\delta_3+\frac{1}{2}F_4\delta_4$

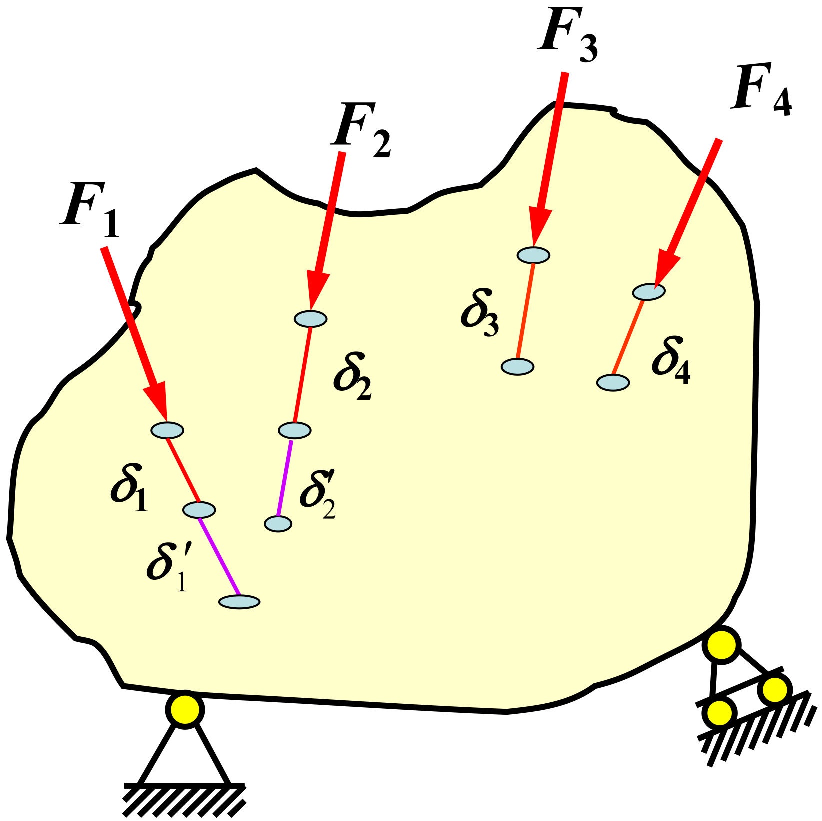
（3）在 F_3和 F_4的作用下,F_1 和F_2 的作用点又有位移

δ_1'和 δ_2'

F_1 和 F_2 在 δ_1'和 δ_2'上完成的功应为

$$F_1\delta_1' + F_2\delta_2'$$

因此,按先加 F_1,F_2 后F_3,F_4 的次序加力,结构的应变能为



$$V_{\varepsilon 1} = \frac{1}{2}F_1\delta_1 + \frac{1}{2}F_2\delta_2 + \frac{1}{2}F_3\delta_3 + \frac{1}{2}F_4\delta_4 + F_1\delta_1' + F_2\delta_2'$$

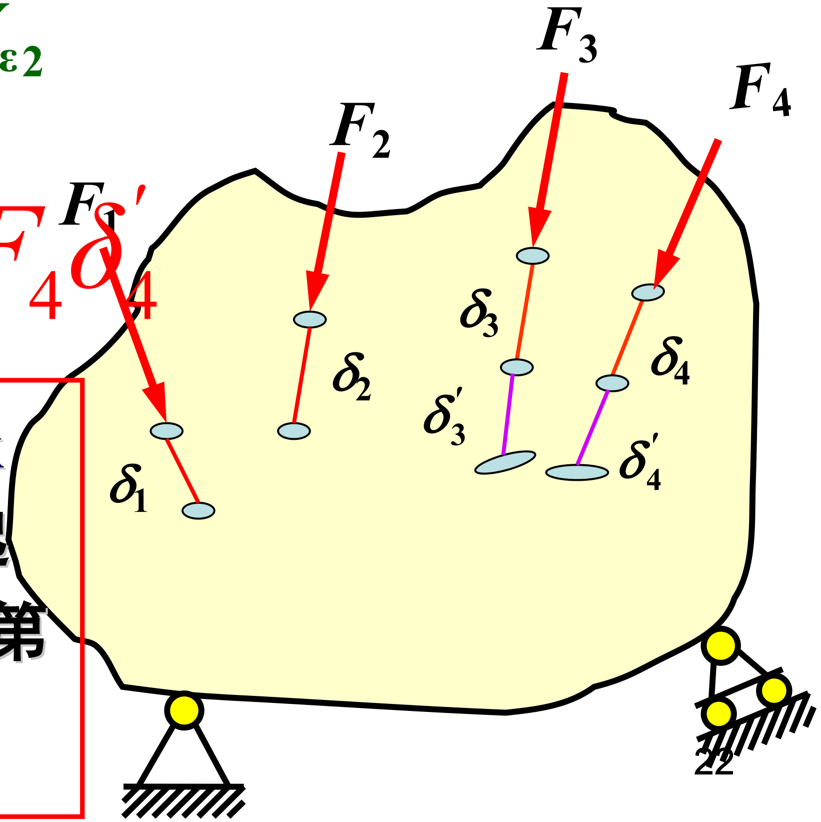
能量法(Energy Method)

若按先加F_3 ,F_4后加F_1, F_2的次序加力,又可求得结构的应变能为

$$V_{\varepsilon 2}=\frac{1}{2}F_1\delta_1+\frac{1}{2}F_2\delta_2+\frac{1}{2}F_3\delta_3+\frac{1}{2}F_4\delta_4+F_3\delta_3'+F_4\delta_4'$$

由于应变能只决定于力和位移的最终值,与加力的次序无关,故 $V_{\varepsilon 1}=V_{\varepsilon 2}$

$$F_1\delta_1'+F_2\delta_2'=F_3\delta_3'+F_4\delta_4'$$

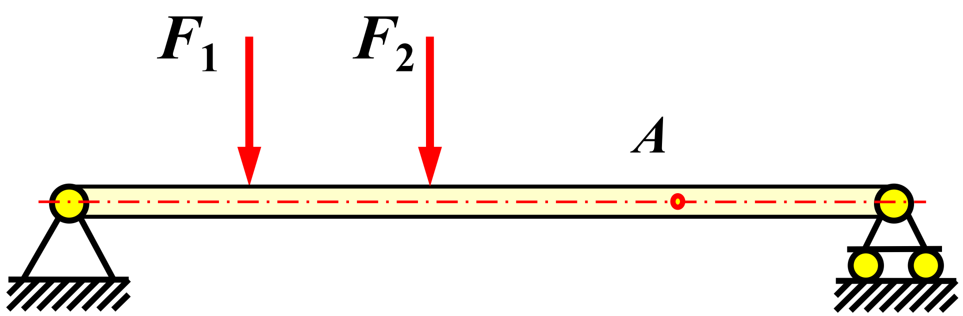


功的互等定理（reciprocal work theorem）:第一组力在第二组力引起的位移上所作的功,等于第二组力在第一组力引起的位移上所作的功.

§13-4 单位载荷法（莫尔定理）
（Unit-load method or mohr’s theorem）

一、莫尔定理的推导（Derivation of mohr’s theorem）

求任意点A的位移w_A



（1）先作用单位力 F_0 ,再作用F_1、F_2力

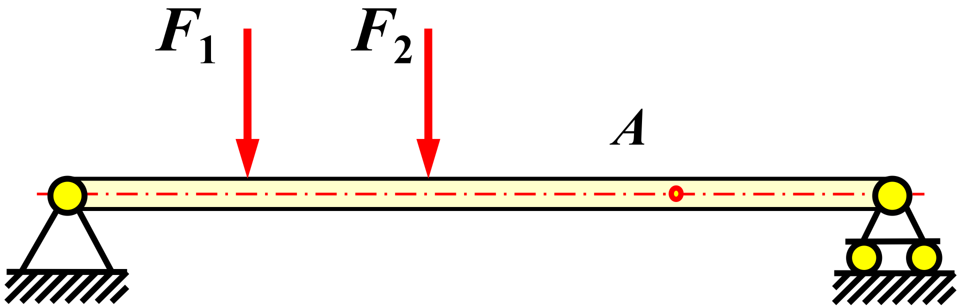
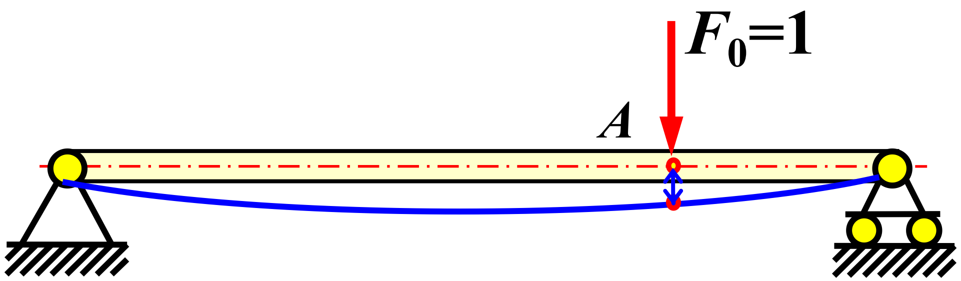


图 a

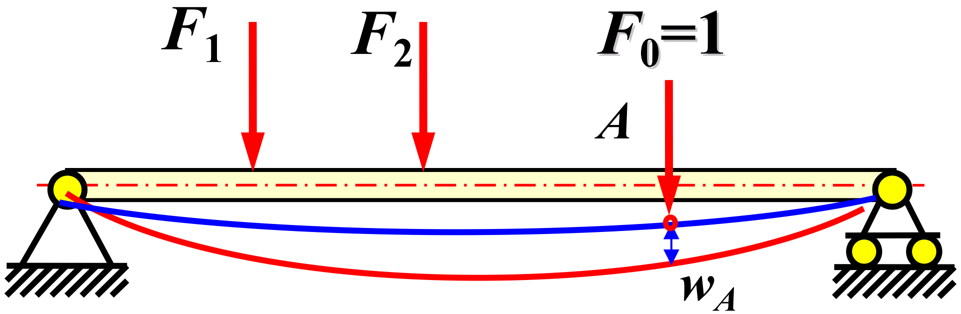
变形能为

$$V_{\varepsilon}=\int_l \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$



图b

$$\overline{V}_{\varepsilon}=\int_l \frac{\overline{M}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$



$$V_{\varepsilon 1}=V_{\varepsilon}+\overline{V}_{\varepsilon}+1\times w_A$$

图c

（2）单位载荷与真实载荷同时作用时

任意截面的弯矩： $M(x)+\overline{M}(x)$

变形能： $V_{\varepsilon 2}=\int_l \frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2}{2EI}\mathrm{d}x$

$$V_{\varepsilon 2}=V_{\varepsilon 1} \Longrightarrow V_{\varepsilon}+\overline{V}_{\varepsilon}+1\cdot w_A=\int_l \frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$V_{\varepsilon}+\overline{V}_{\varepsilon}+1\cdot w_A=\int_l \frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$=\int_l \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_l \frac{\overline{M}^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x+\int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

$$w_A = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$ （Mohr's Theorem）

$$\theta = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x \qquad \varDelta = \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

桁架:

$$\varDelta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{F}_{\mathrm{N}i} F_{\mathrm{N}i} l_i}{EA}$$

二、普遍形式的莫尔定理

（General formula for mohr's theorem）

$$\varDelta = \int_l \frac{F_{\mathrm{N}}(x)\overline{F}_{\mathrm{N}}(x)}{EA}\mathrm{d}x + \int_l \frac{T(x)\overline{T}(x)}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

注意:上式中 $\varDelta$ 应看成广义位移,把单位力看成与广义位移相对应的广义力.

三、使用莫尔定理的注意事项

（1）M（x）：结构在原载荷下的内力;

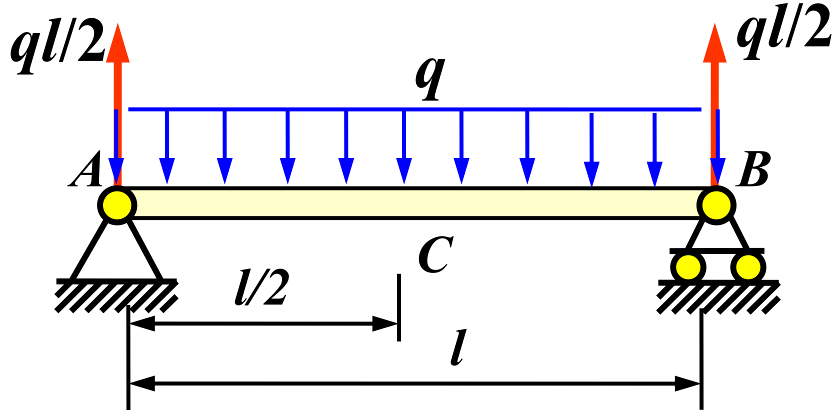
（2）$\overline{M}$ ——去掉主动力,在所求 广义位移点,沿所求广义位移的方向加广义单位力时,结构产生的内力;

（3）所加广义单位力与所求广义位移之积,必须为功的量纲;

（4）$\overline{M}$（x）与M（x）的坐标系必须一致,每段杆的坐标系可自由建立;

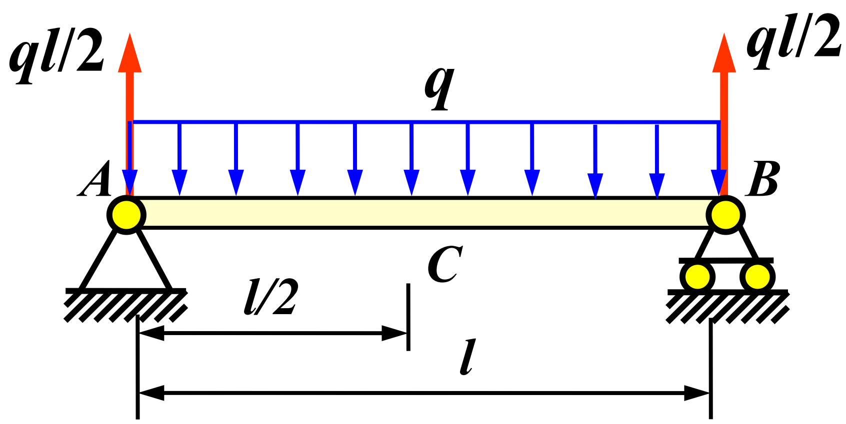
（5）莫尔积分必须遍及整个结构.

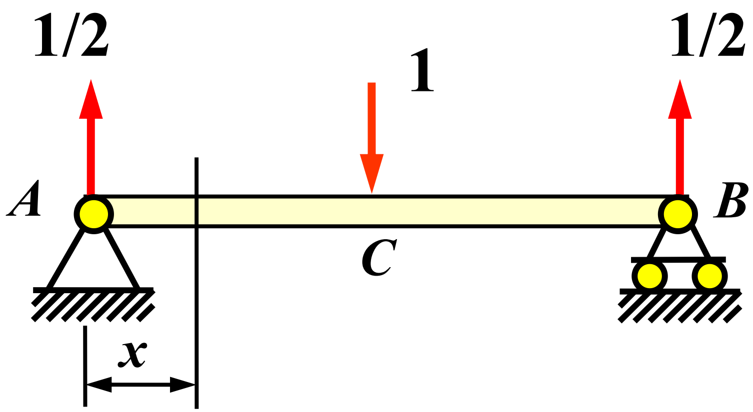
例题 抗弯刚度为EI的等截面简支梁受均布荷载作用,用单位载荷法求梁中点的挠度 w_C和支座A截面的转角.剪力对弯曲的影响不计.



解: 在实际荷载作用下,任一 x 截面的弯矩为 实际载荷系统

$$M(x)=\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\qquad(0\leq x\leq l)$$





单位载荷系统

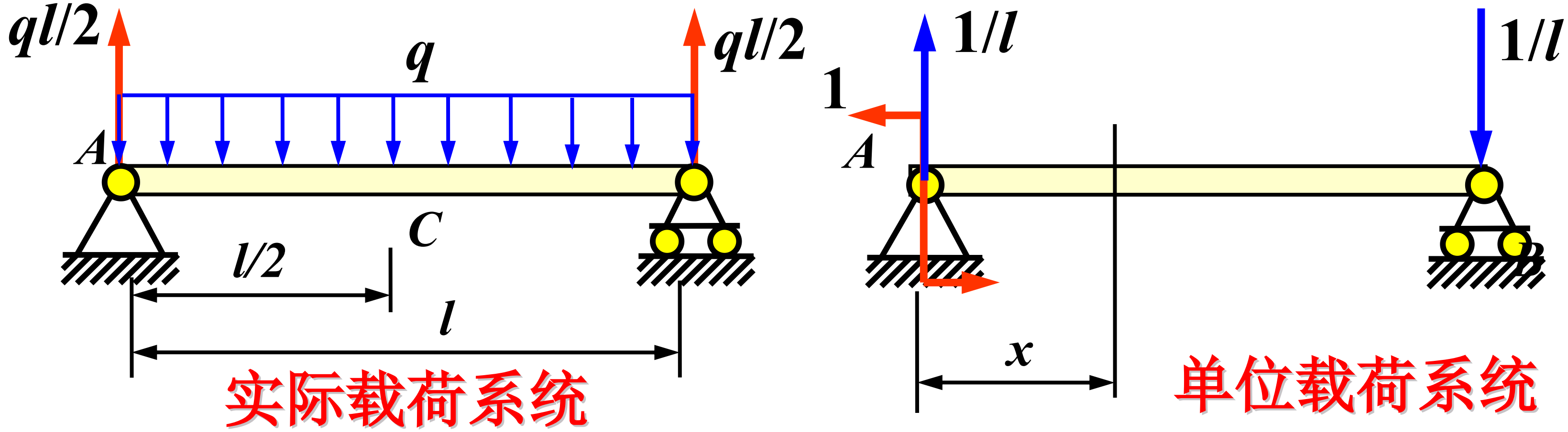
（1）求C截面的挠度

在C点加一向下的单位力,

任一x截面的弯矩为 $$\overline{M}(x)=\frac{1}{2}x \quad (0\le x\le \frac{l}{2})$$

$$w_C=\int_l \overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)\mathrm{d}x}{EI}=2\cdot\int_0^{l/2}\frac{x}{2EI}\cdot(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$



（2）求A截面的转角

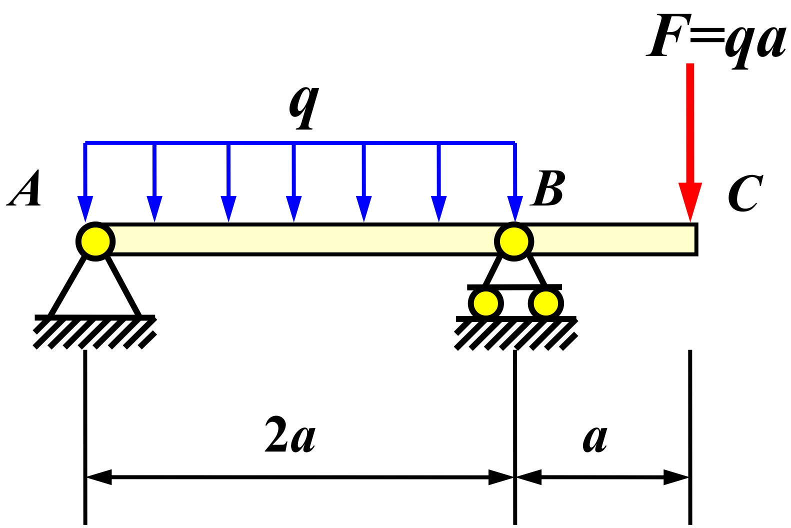
在 A 截面加一单位力偶

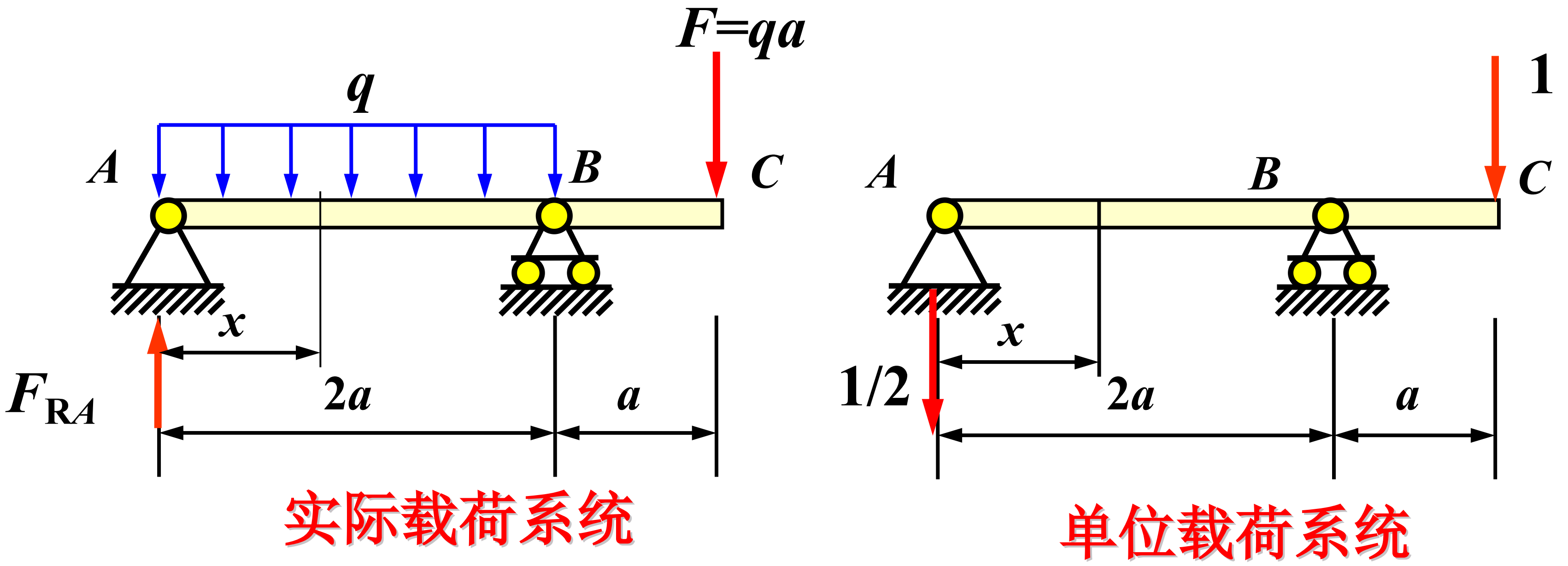
引起的 x 截面的弯矩为 $\overline{M}(x)=\dfrac{1}{l}x-1 \quad (0\le x\le l)$

$$\theta_A=\int_l \overline{M}(x)\cdot\frac{M(x)\mathrm{d}x}{EI}=\int_0^l\frac{1}{EI}\left(\frac{x}{l}-1\right)\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{ql^3}{24EI}$$ （顺时针）

例题 图示外伸梁,其抗弯刚度为 EI. 用单位载荷法求C点的挠度和转角.

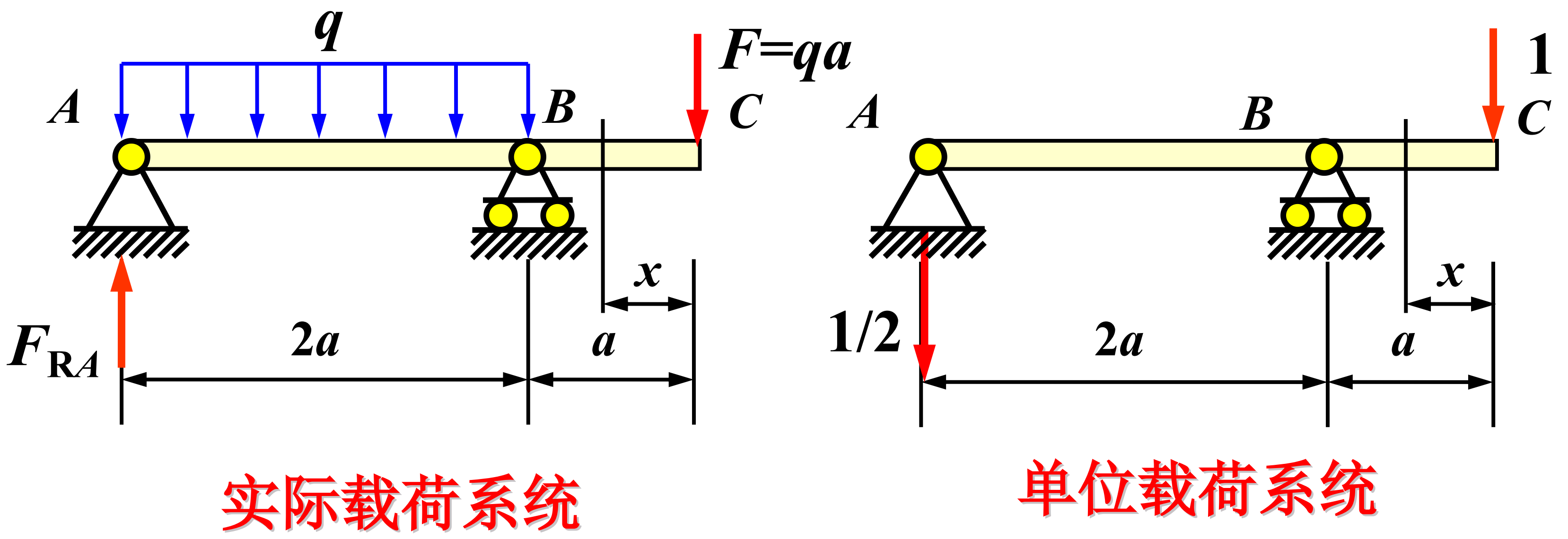




解: $F_{RA} = \dfrac{qa}{2}$

（1）求截面的挠度（在C处加一单位力“1”）

AB: $M(x) = \dfrac{qa}{2}x - \dfrac{qx^2}{2}$ $\qquad \overline{M}(x) = -\dfrac{x}{2}$

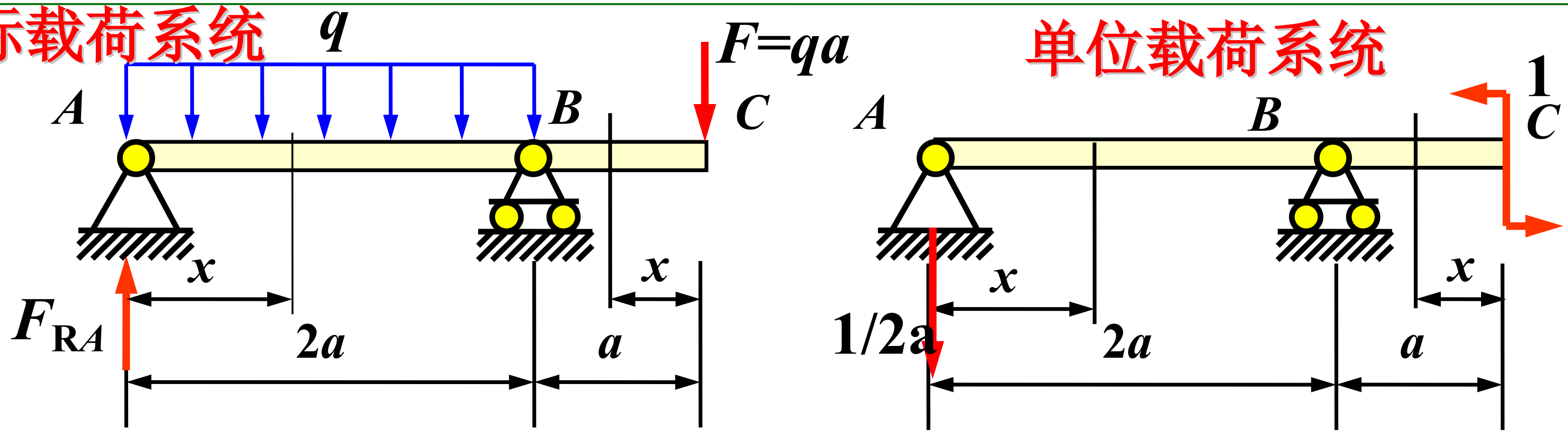


BC:

$$M(x) = -qa \cdot x \qquad \overline{M}(x) = -x$$

$$w_C = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2a}\left(\frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_0^{a}(-qax)(-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2qa^4}{3EI} \quad (\downarrow)$$



（2）求C截面的转角（在C处加一单位力偶）

$$AB:\quad M(x)=\frac{qa}{2}x-\frac{qx^2}{2}\qquad \overline{M}(x)=\frac{x}{2a}$$

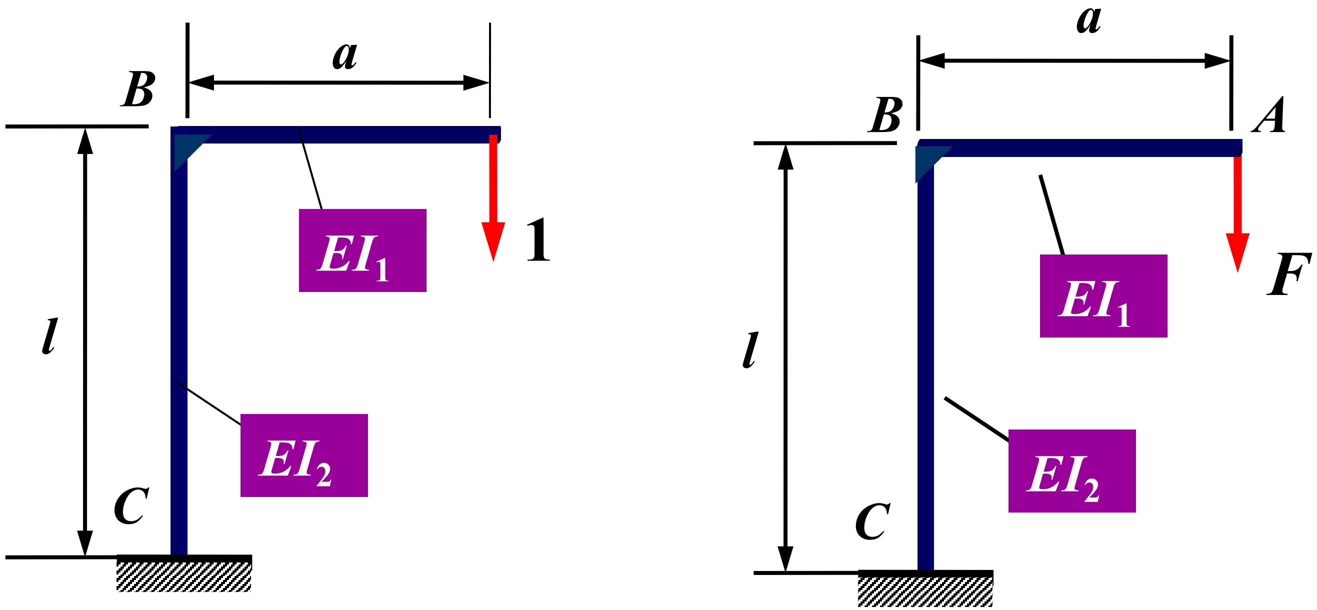
$$BC:\quad M(x)=-qa\cdot x\qquad \overline{M}(x)=1$$

$$\theta_C=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{2a}\left(\frac{qa}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2a}\right)\mathrm{d}x+\int_0^{a}(-qax)(1)\mathrm{d}x\right]$$

$$=-\frac{5qa^3}{6EI}\qquad (\circlearrowright)$$

例题　刚架的自由端A作用集中力F.刚架各段的抗弯刚度已于图中标出．不计剪力和轴力对位移的影响. 计算A点的垂直位移及B截面的转角.

解:（1）计算A点的垂直位移,在A点加垂直向下的单位力



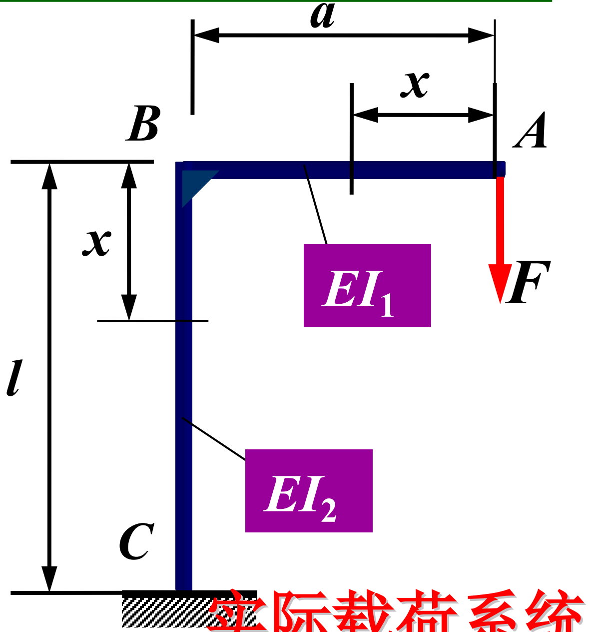
$$AB:\quad M(x) = -Fx \qquad \overline{M}(x) = -x$$

$$BC:\quad M(x) = -Fa \qquad \overline{M}(x) = -a$$

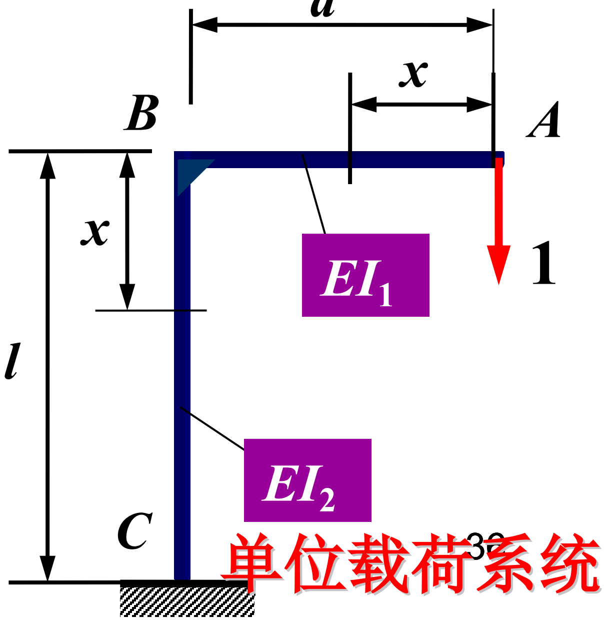
$$\delta_y = \int_0^a \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI_1}\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI_2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{EI_1}\int_0^a (-Fx)(-x)\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_2}\int_0^l (-Fa)(-a)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{Fa^3}{3EI_1} + \frac{Fa^2 l}{EI_2} \quad (\downarrow)$$



实际载荷系统

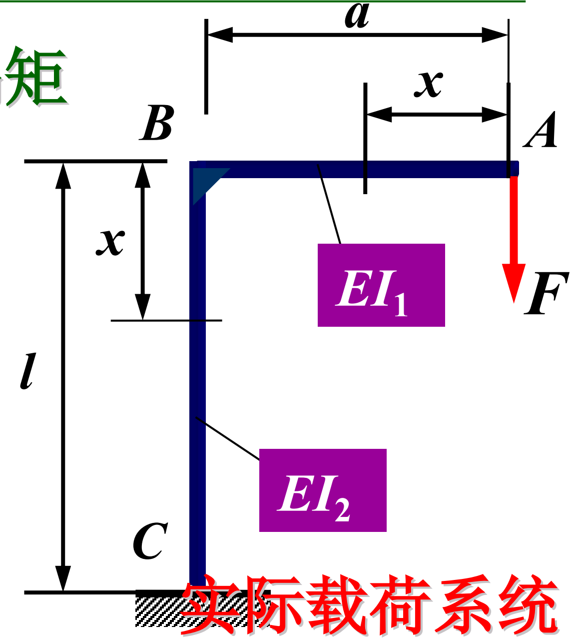


单位载荷系统

（2）计算B截面的转角,在B上加一个单位力偶矩

$$AB:\quad M(x) = -Fx \qquad \overline{M}(x) = 0$$

$$BC:\quad M(x) = -Fa \qquad \overline{M}(x) = 1$$

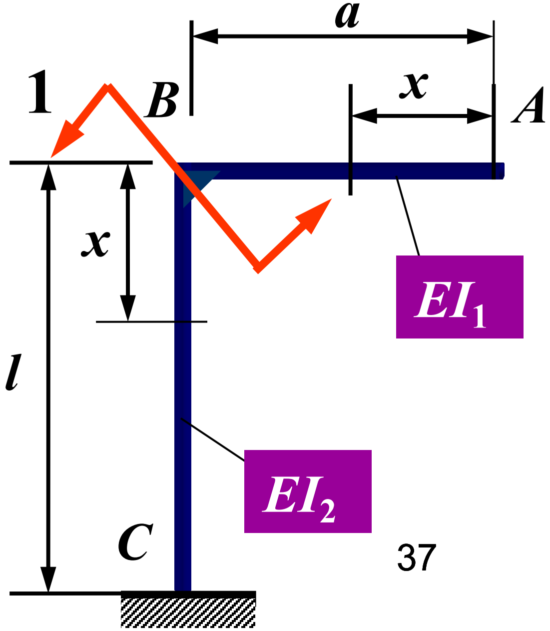


$$\theta_B = \int_0^a \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI_1}\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI_2}\mathrm{d}x$$

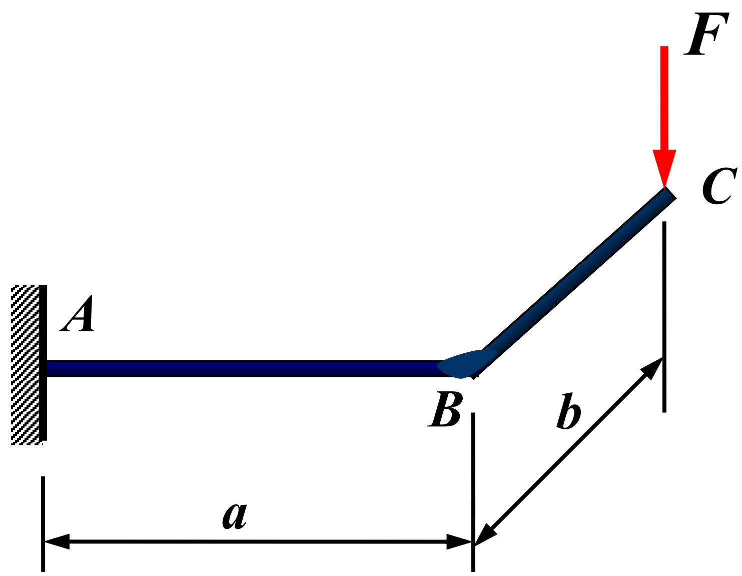
$$= \frac{1}{EI_1}\int_0^a (-Fx)(0)\mathrm{d}x + \frac{1}{EI_2}\int_0^l (-Fa)(1)\mathrm{d}x$$

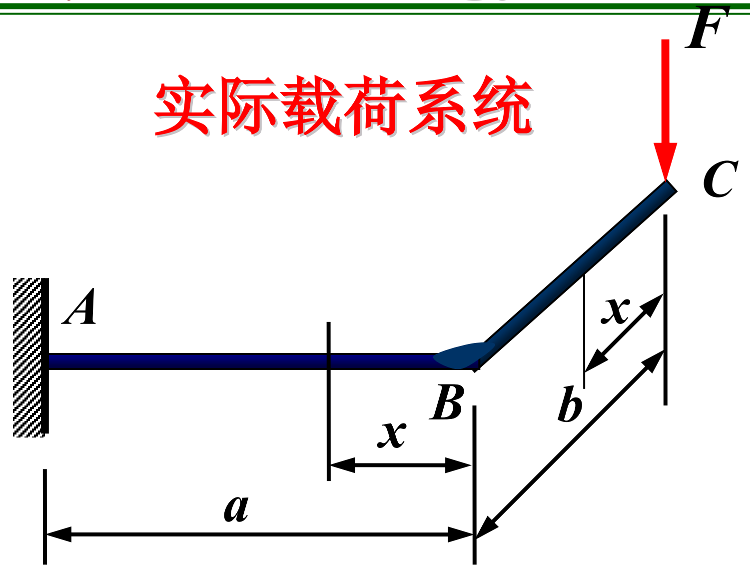
$$= -\frac{Fal}{EI_2}$$

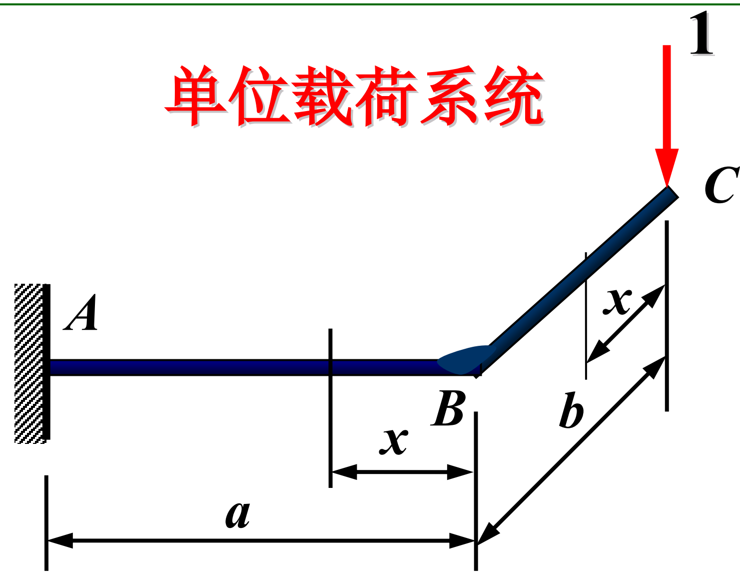
单位载荷系统



例题 图示为一水平面内的曲杆，B 处为一刚性节点，$\angle ABC$=90°在 C 处承受竖直力F，设两杆的抗弯刚度和抗扭刚度分别是 EI 和 GI_p，求C点竖向的位移.







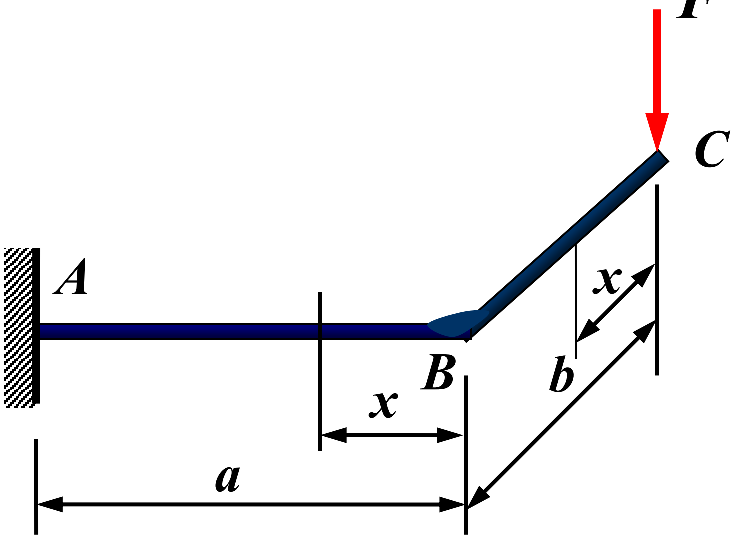
解:在 *C*点加竖向单位力

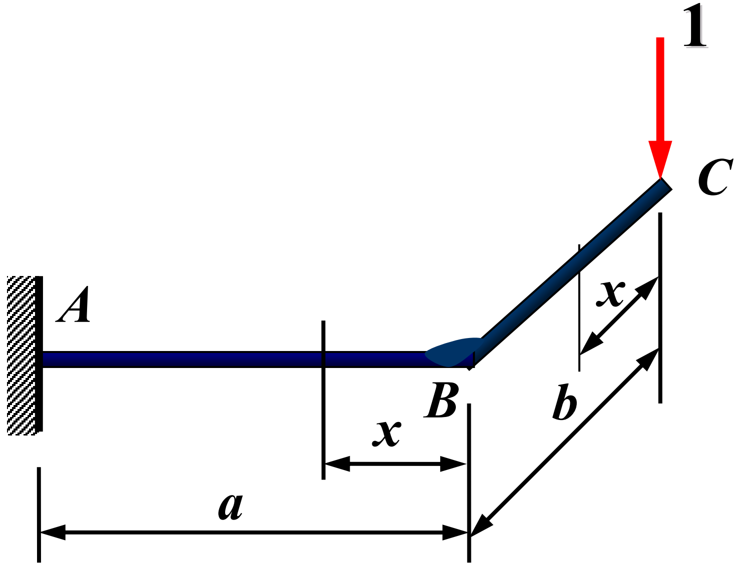
BC: $M(x) = -Fx$ $\quad \overline{M}(x) = -x$

$T(x) = 0$ $\quad \overline{T}(x) = 0$

AB: $M(x) = -Fx$ $\quad \overline{M}(x) = -x$

$T(x) = -Fb$ $\quad \overline{T}(x) = -b$



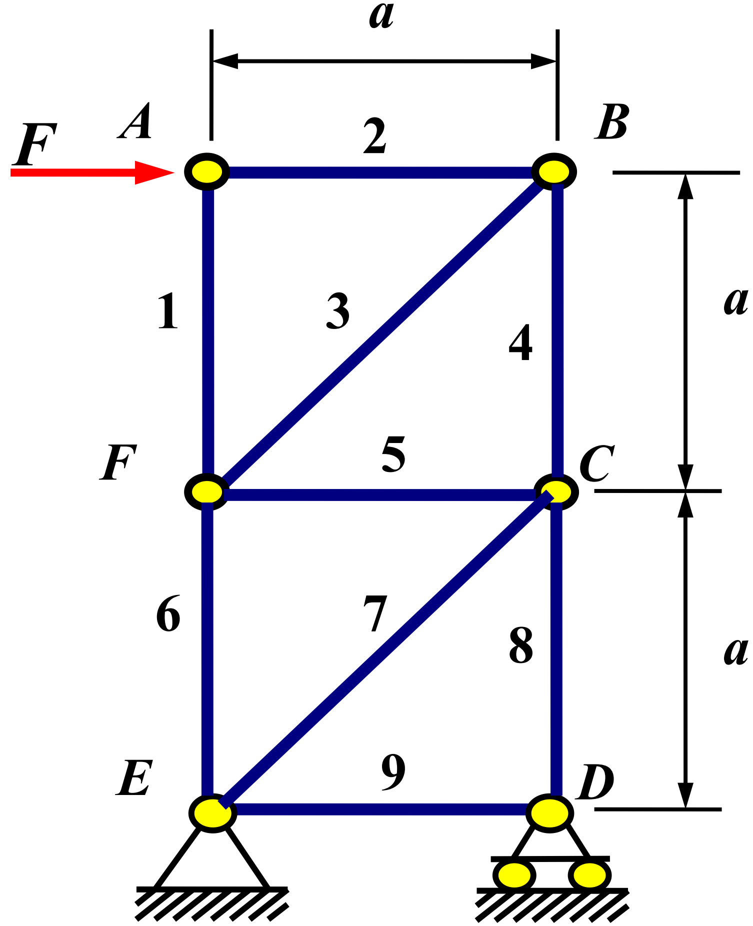


$$\Delta_C = \frac{1}{EI}\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{GI_\mathrm{p}}\int_l T(x)\bar{T}(x)\mathrm{d}x$$

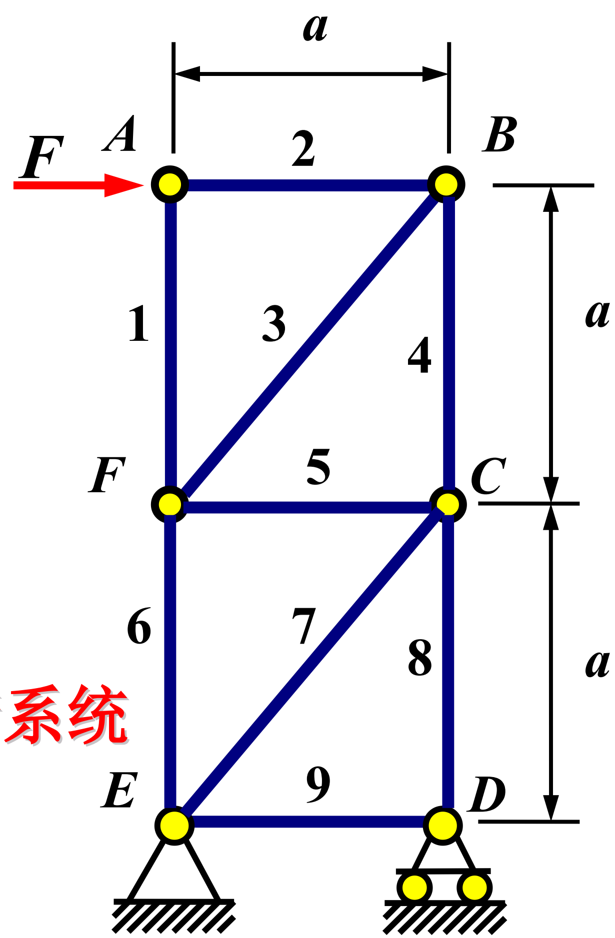
$$= \frac{1}{EI}\int_0^a (-Fx)(-x)\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^b (-Fx)(-x)\mathrm{d}x +$$

$$\frac{1}{GI_\mathrm{p}}\int_0^a (-Fb)(-b)\mathrm{d}x = \frac{F}{3EI}(a^3+b^3) + \frac{Fab^2}{GI_\mathrm{p}}(\downarrow)$$

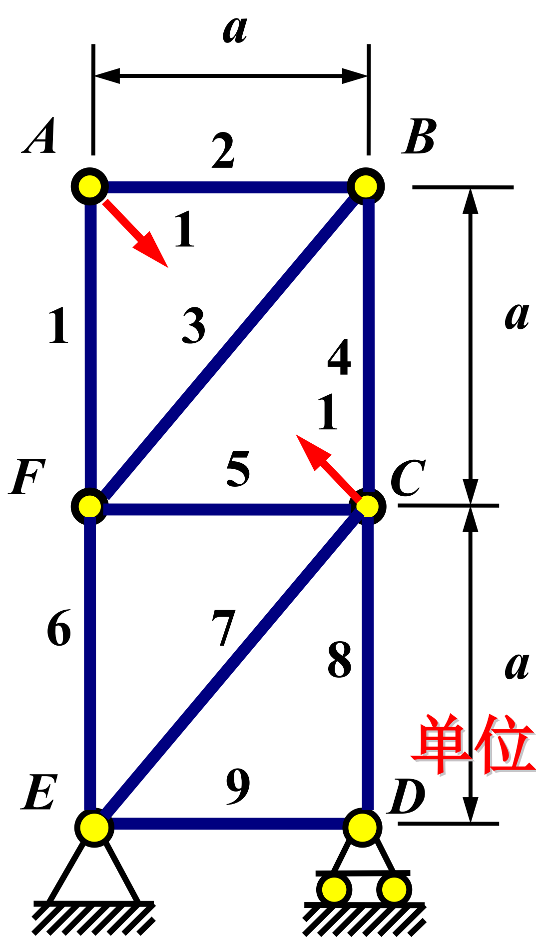
例题 图示为一简单桁架,其各杆的EA相等. 在图示荷载作用下A、C两节点间的相对位移.



桁架求位移的单位载荷法为 $$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{F}_{\mathrm{N}i}F_{\mathrm{N}i}l_i}{EA}$$



实际载荷系统



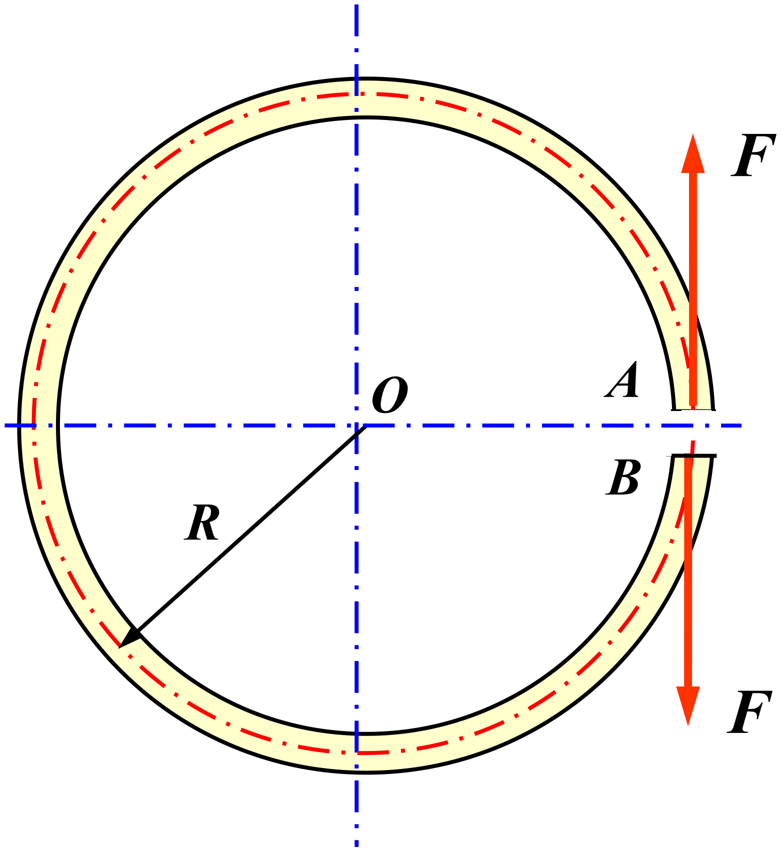
单位载荷系统

杆件编号	F_{Ni}	$\overline{F}_{Ni}$	l_i	$\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i$
1	0	$-1/\sqrt{2}$	a	0
2	$-F$	$-1/\sqrt{2}$	a	$Fa/\sqrt{2}$
3	$\sqrt{2}F$	1	$\sqrt{2}a$	$2Fa$
4	$-F$	$-1/\sqrt{2}$	a	$Fa/\sqrt{2}$
5	$-F$	$-1/\sqrt{2}$	a	$Fa/\sqrt{2}$
6	F	0	a	0
7	$\sqrt{2}F$	0	$\sqrt{2}a$	0
8	$-2F$	0	a	0
9	0	0	a	0

$$\delta_{AC}=\sum_{i=1}^{9}\frac{\overline{F}_{Ni}F_{Ni}l_i}{EA}=(2+\frac{3}{\sqrt{2}})\frac{Fa}{EA}=4.12\frac{Fa}{EA}$$

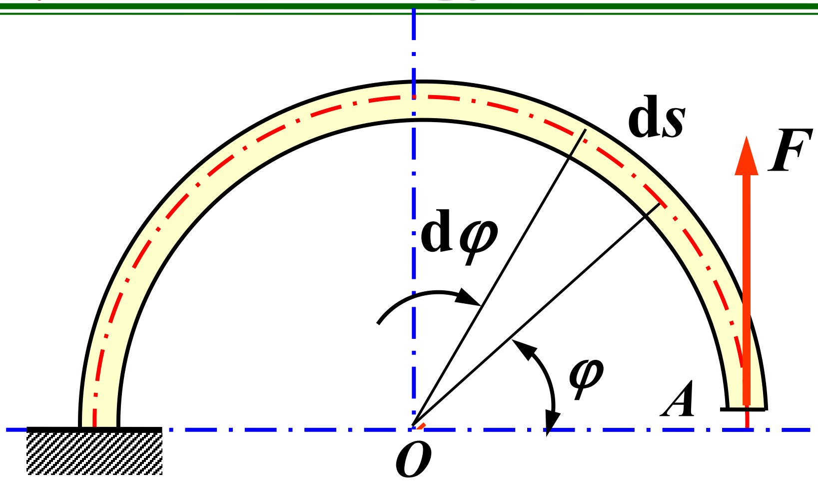
A,C两点间的距离缩短.

例题　计算图（a）所示开口圆环在F力作用下切口的张开量Δ_{AB}. EI=常数.



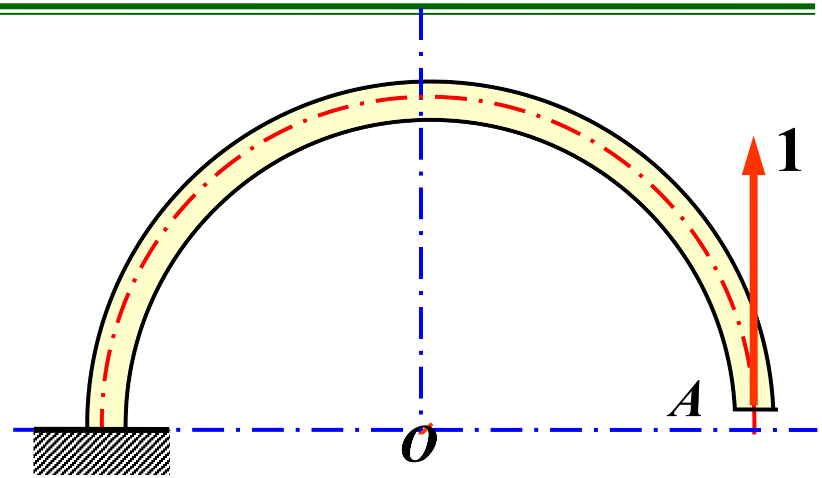
(a)

解:



(b)

实际载荷系统



(c)

单位载荷系统

$$M(\varphi)=-FR(1-\cos\varphi)$$

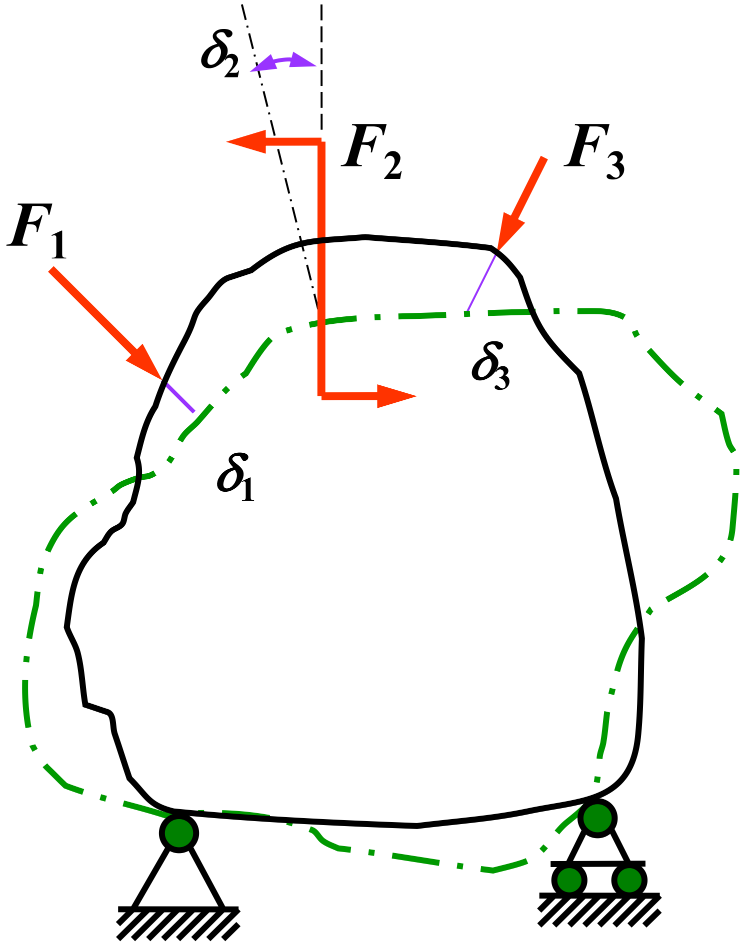
$$\overline{M}(\varphi)=-R(1-\cos\varphi)$$

$$\Delta_{AB}=2\int_0^{\pi}\frac{M(\varphi)\overline{M}(\varphi)}{EI}R\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{FR^2(1-\cos\varphi)^2}{EI}R\mathrm{d}\varphi=\frac{3\pi FR^3}{EI}$$

§ 13-5 卡氏定理(Castigliano's Theorem)

设弹性结构在支座的约束下无任何刚性位移.



作用有外力:

$$F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots$$

相应的位移为:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i, \ldots$$

结构的变形能

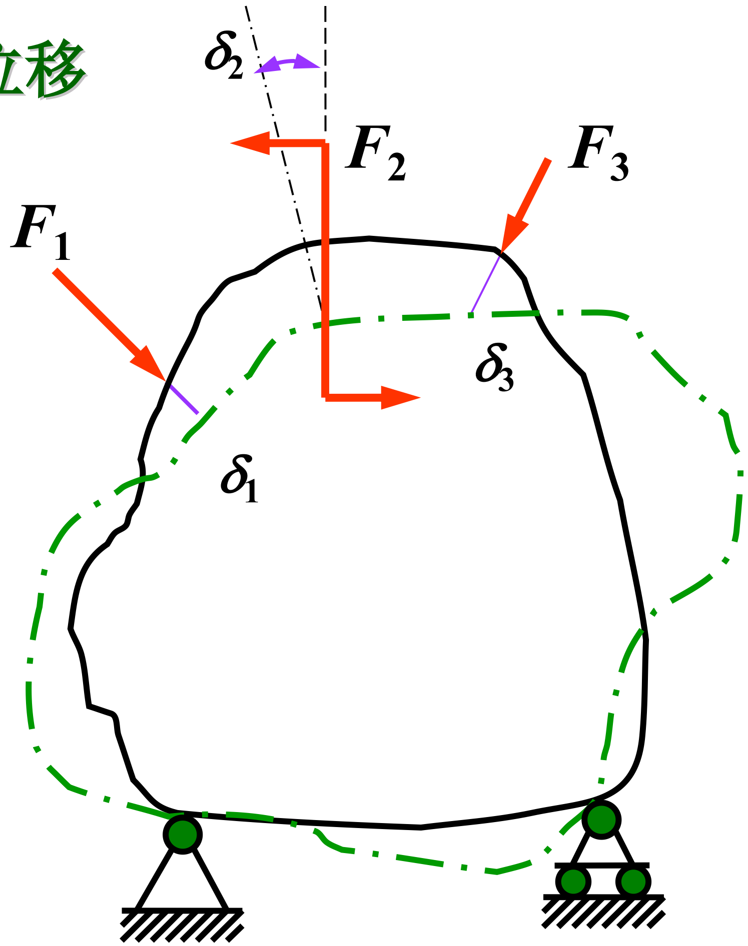
$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F_1\delta_1 + \frac{1}{2}F_2\delta_2 + \frac{1}{2}F_3\delta_3 + \cdots$$

只给 F_i 一个增量 ΔF_i.

引起所有力的作用点沿力方向的位移增量为 $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, \cdots \Delta\delta_3, \cdots$

在作用ΔF_i的过程中, ΔF_i完成的功为

$$\frac{1}{2}\Delta F_i \Delta\delta_i$$



原有的所有力完成的功为

$$F_1\Delta\delta_1 + F_2\Delta\delta_2 + \cdots + F_i\Delta\delta_i + \cdots$$

结构应变能的增量为

$$\Delta V_\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta F_i \Delta\delta_i + F_1\Delta\delta_1 + F_2\Delta\delta_2 + \cdots + F_i\Delta\delta_i + \cdots$$

略去高阶微量 $\frac{1}{2}\Delta F_i \Delta\delta_i$

$$\Delta V_\varepsilon = F_1\Delta\delta_1 + F_2\Delta\delta_2 + \cdots + F_i\Delta\delta_i + \cdots$$

如果把原来的力看作第一组力,而把 ΔF_i 看作第二组力.

根椐功的互等定理

$$F_1\Delta\delta_1 + F_2\Delta\delta_2 + \cdots + F_i\Delta\delta_i + \cdots = \Delta F_i \cdot \delta_i$$

$$\Delta V_\varepsilon = \Delta F_i \cdot \delta_i \quad \text{或者} \quad \frac{\Delta V_\varepsilon}{\Delta F_i} = \delta_i$$

当 ΔF_i 趋于零时,上式为

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \delta_i$$

这就是*卡氏第二定理*（**Castigliano's Second Theorem**） *（卡氏定理）* （**Castigliano's Theorem**）

说明（Directions）：

（1）卡氏第二定理只适用于线性弹性体

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}$$

（2）F_i 为广义力，δ_i为相应的位移

一个力	一个力偶	一对力	一对力偶
↓	↓	↓	↓
一个线位移	一个角位移	相对线位移	相对角位移

（3）卡氏第二定理的应用

（a） 轴向拉伸与压缩

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\int \frac{F_N^2(x)\mathrm{d}x}{2EA} = \int \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i}\mathrm{d}x$$

（b） 扭转

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\int \frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p} = \int \frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i}\mathrm{d}x$$

（c） 弯曲

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\int \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI} = \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i}\mathrm{d}x$$

（4） 平面桁架

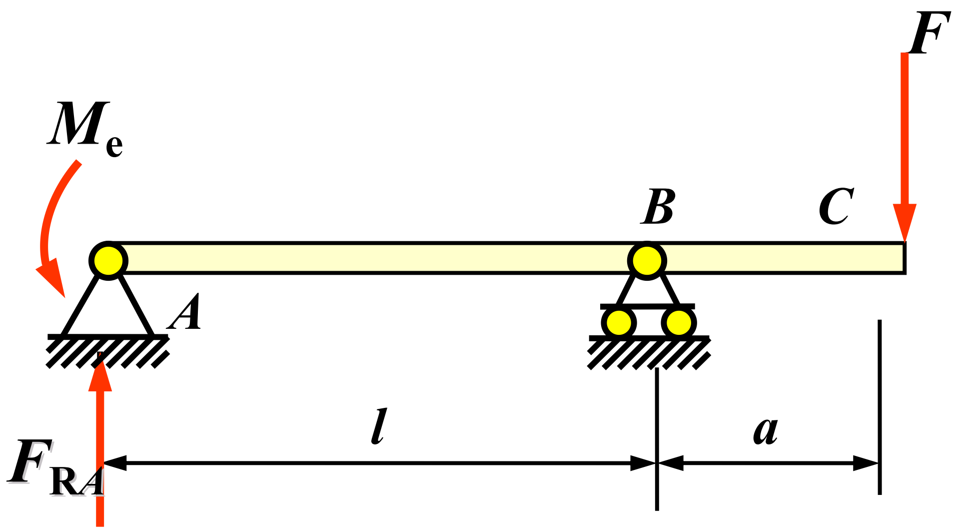
$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{Nj} l_j}{EA} \cdot \frac{\partial F_{Nj}}{\partial F_i}$$

（5） 组合变形

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i}\left[\int_l \frac{F_N^2(x)\mathrm{d}x}{2EA} + \int_l \frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p} + \int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI}\right]$$

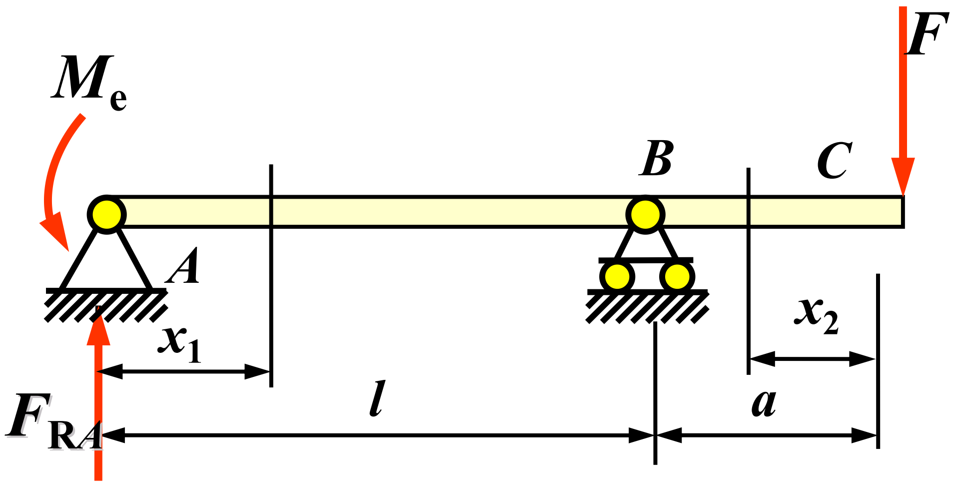
$$\boxed{= \int \frac{F_N(x)}{EA} \cdot \frac{\partial F_N(x)}{\partial F_i}\mathrm{d}x + \int \frac{T(x)}{GI_p} \cdot \frac{\partial T(x)}{\partial F_i}\mathrm{d}x + \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_i}\mathrm{d}x}$$

例题 外伸梁受力如图所示,已知弹性模量*EI*.梁材料为线弹性体.求梁*C*截面的挠度和*A*截面的转角.



解:

$$F_{RA}=\frac{M_e}{l}-\frac{Fa}{l}$$



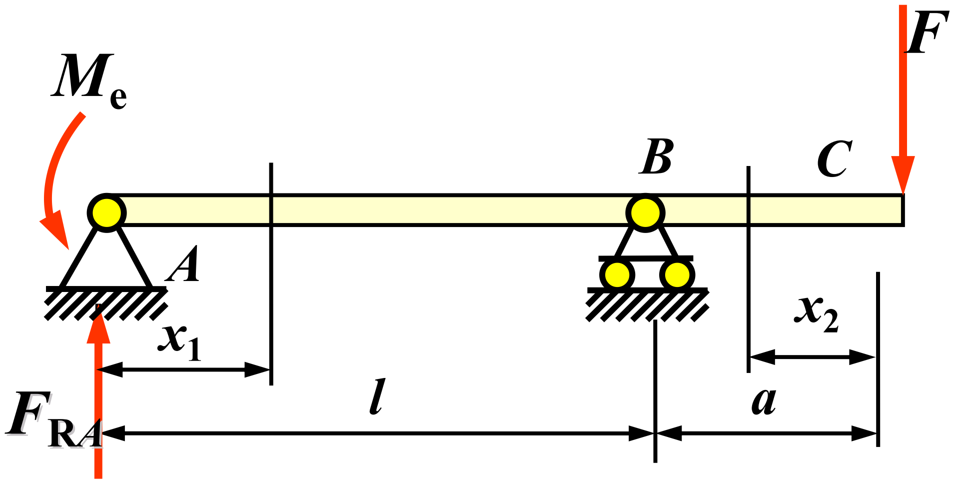
AB:
$$M_1(x_1)=(\frac{M_e}{l}-\frac{Fa}{l})x_1-M_e$$

$$\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F}=-\frac{a}{l}x_1 \qquad \frac{\partial M_1(x_1)}{\partial M_e}=\frac{x_1}{l}-1$$

BC:
$$M_2(x_2)=-Fx_2$$

$$\frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F}=-x_2 \qquad \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial M_e}=0$$

$$w_C = \int_0^l \frac{M_1(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial F} \mathrm{d}x_1 + \int_0^a \frac{M_2(x_2)}{EI} \cdot \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F} \mathrm{d}x_2$$

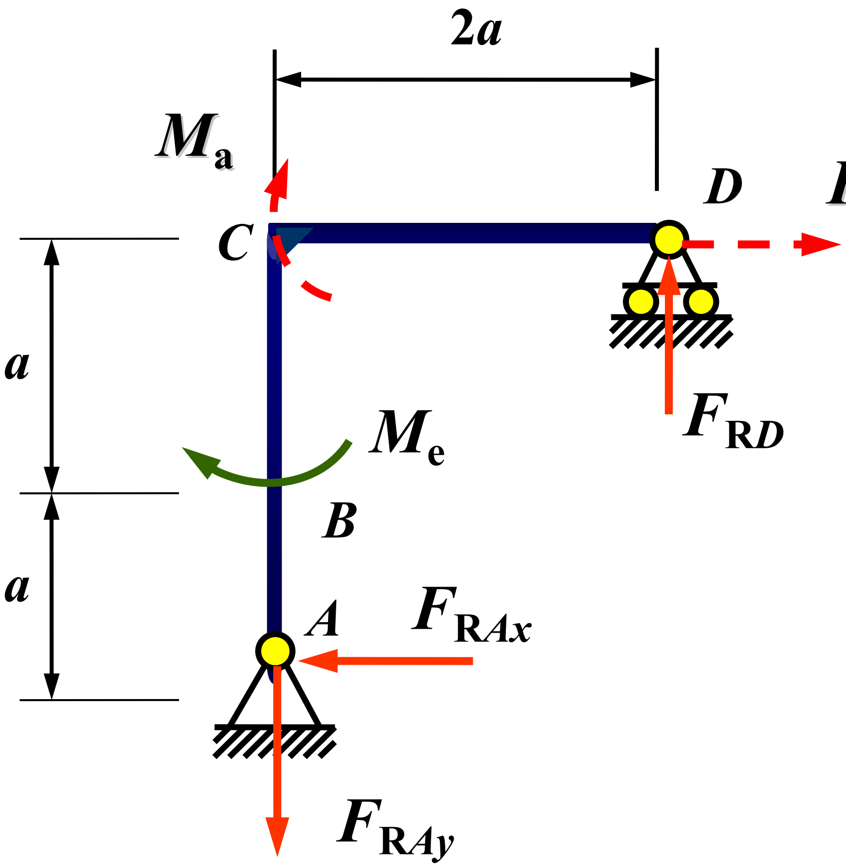


$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{Fla^2}{3} + \frac{M_e la}{6} + \frac{Fa^3}{3}\right) \quad (\downarrow)$$

$$\theta_A = \int_0^l \frac{M_1(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M_1(x)}{\partial M_e} \mathrm{d}x_1 + \int_0^a \frac{M_2(x_2)}{EI} \cdot \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial M_e} \mathrm{d}x_2$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{M_e l}{3} + \frac{Fla}{6}\right)$$

例题　刚架结构如图所示 .弹性模量EI已知。材料为线弹性. 不考虑轴力和剪力的影响，计算C截面的转角和D截面的水平位移.



解 : 在C截面虚设一力偶 M_a ,

在D截面虚设一水平力F.

$$F_{RD} = F_{RAy}$$

$$= F + \frac{1}{2a}(M_a + M_e)$$

$$F_{RAx} = F$$

$$CD:\ M(x)=[F+\frac{1}{2a}(M_e+M_a)]x$$

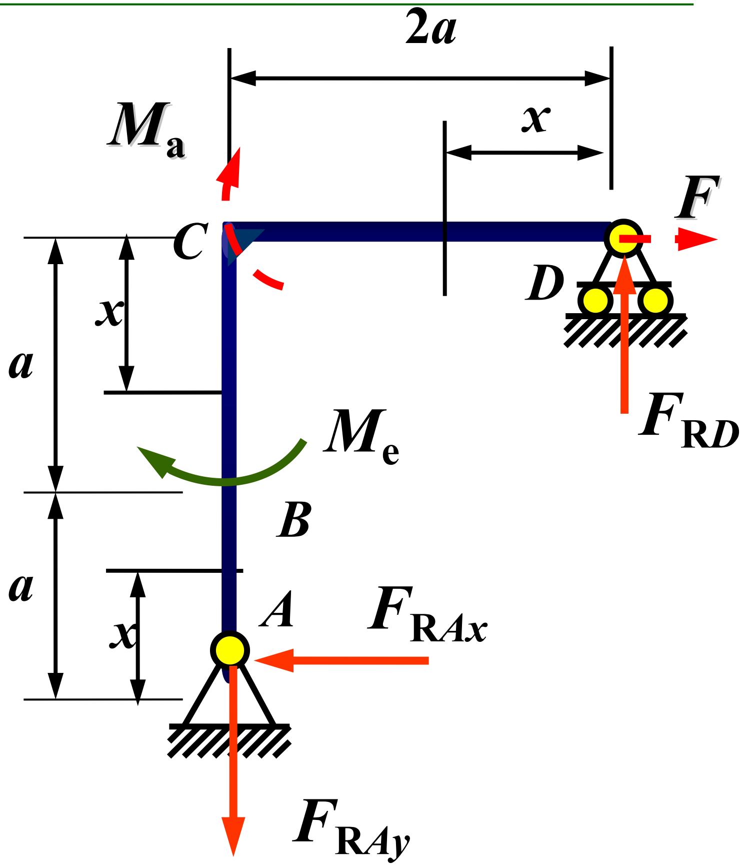
$$\frac{\partial M(x)}{\partial F}=x \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a}=\frac{x}{2a}$$

$$CB:\ M(x)=[F+\frac{1}{2a}(M_e+M_a)]\cdot 2a$$

$$-M_a-Fx$$

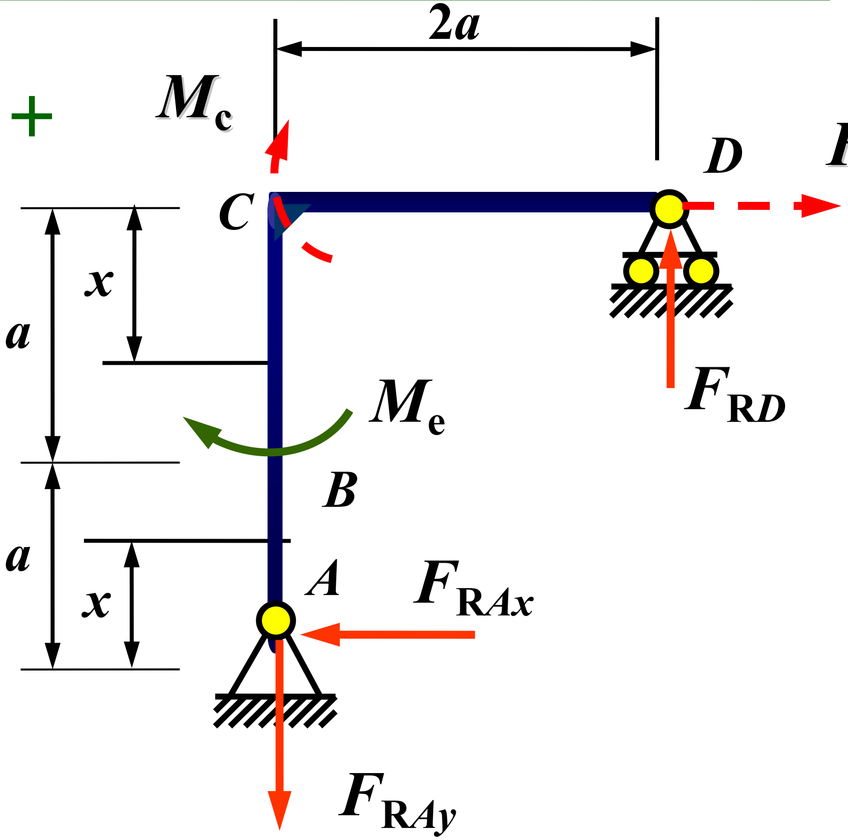
$$\frac{\partial M(x)}{\partial F}=2a-x \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a}=0$$

$$AB:\ M(x)=Fx \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial F}=x \qquad \frac{\partial M(x)}{\partial M_a}=0$$



能量法 (Energy Method)

$$\delta_x = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}\bigg|_{\substack{M_a=0\\F=0}} = \frac{1}{EI}\int_0^{2a}\frac{M_e x}{2a}\cdot x\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^{a} M_e\cdot(2a-x)\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^{a} 0\cdot x\mathrm{d}x = \frac{17M_e a^2}{6EI}(\rightarrow)$$

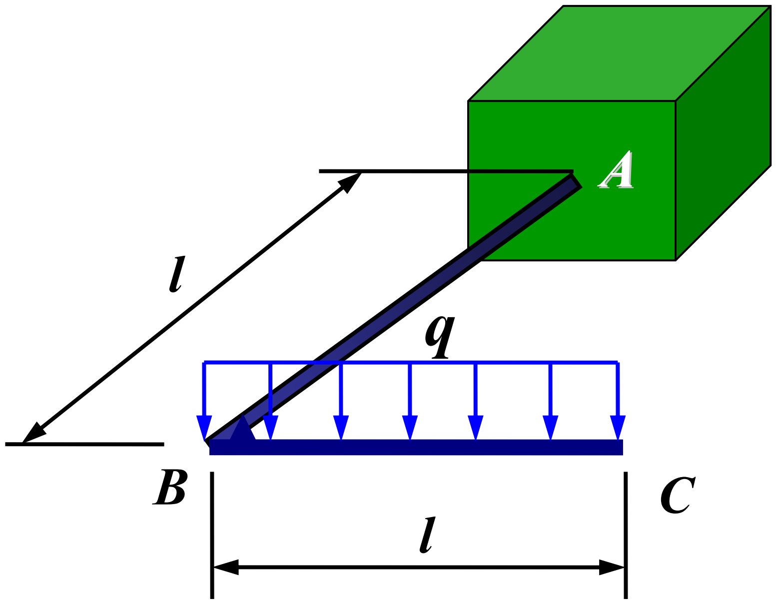


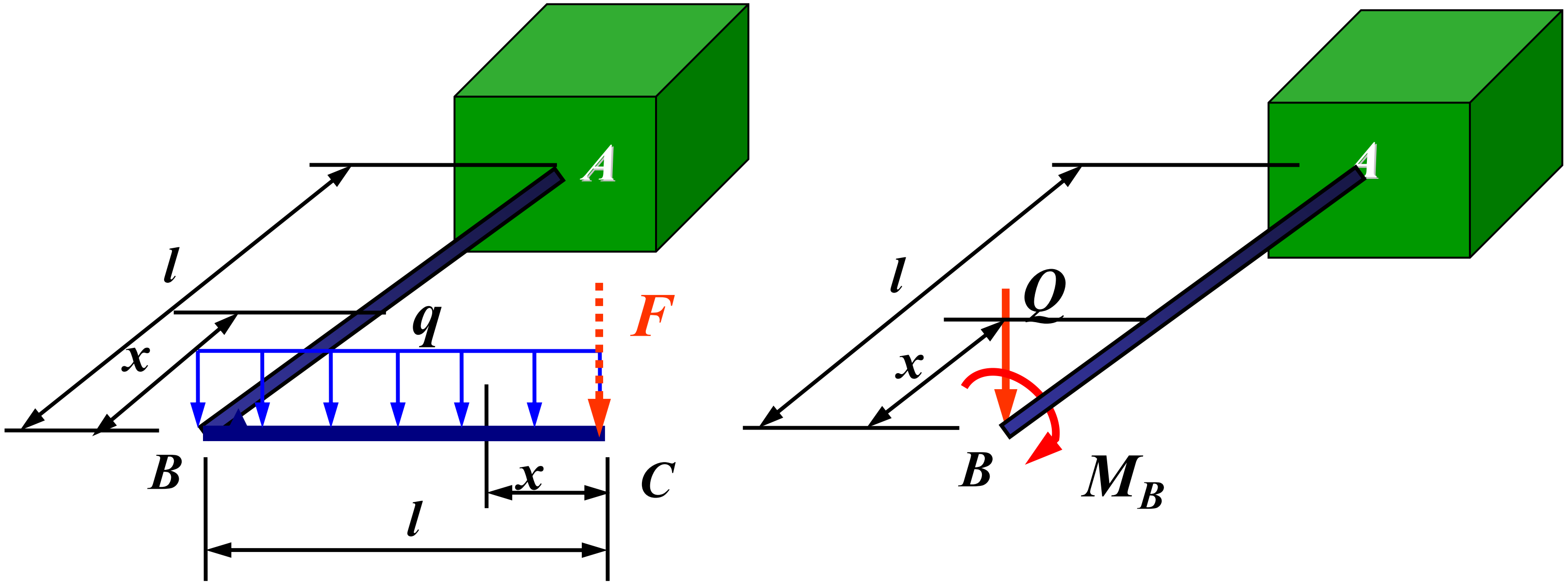
$$\theta_C = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M_a}\bigg|_{\substack{M_a=0\\F=0}}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2a}\frac{M_e x}{2a}\cdot\frac{x}{2a}\mathrm{d}x + \int_0^{a} M_e\cdot 0\mathrm{d}x + \int_0^{a} 0\cdot 0\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2M_e a}{3EI}$$

例题 圆截面杆ABC,（$\angle ABC=90°$）位于水平平面内,已知杆截面直径 d 及材料的弹性常数 E ,G .求C 截面处的铅垂位移.不计剪力的影响.





BC:弯曲变形 $M(x) = -Fx - \dfrac{qx^2}{2}$ $\quad \dfrac{\partial M(x)}{\partial F} = -x$

AB:弯曲与扭转的组合变形

$F = F + ql$（弯曲变形） $M(x) = Qx = (F + ql)x$ $\quad \dfrac{\partial M(x)}{\partial F} = x$

$M_B = Fl + \dfrac{ql^2}{2}$（扭转变形） $T(x) = M_B = Fl + \dfrac{ql^2}{2}$ $\quad \dfrac{\partial T(x)}{\partial F} = l$

$$\delta_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}\Big|_{F=0}$$

$$= \int_0^l \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial F}\mathrm{d}x + \{\int_0^l [\frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial F}\mathrm{d}x + \frac{T(x)}{GI_\mathrm{p}}\frac{\partial T(x)}{\partial F}\mathrm{d}x]\}$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^l (-\frac{qx^2}{2})(-x)\mathrm{d}x + \frac{1}{EI}\int_0^l qlx \cdot x\mathrm{d}x + \frac{1}{GI_\mathrm{p}}\int_0^l \frac{ql^2}{2}\cdot l\mathrm{d}x$$

$$= \frac{11ql^4}{24EI} + \frac{ql^4}{GI_\mathrm{p}}(\downarrow)$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \qquad I_\mathrm{p} = \frac{\pi d^4}{32}$$

第十三章结束

作业：

13.9, 13.17(卡氏定理)

13.29(莫尔定理)

13.33（方法不限）

复习13.27