华东理工大学 2008－2009 学年第 二 学期

《复变函数与积分变换》课程期末考试试卷 A 2009.6

开课学院：理学院，专业： 大面积 考试形式： 闭卷， 所需时间 120 分钟

考生姓名：__________学号：_____________ 班级：______________任课教师 ________

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								
评卷人								

一、填空题(每小题 4 分，共 36 分)

1.复数 $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$ 的模________________________________.

2.若 $z_1=\dfrac{1+2i}{\sqrt{2}}, z_2=\sqrt{3}-i$，则 $z_1\cdot z_2$ 的指数形式为____________________________.

3. Lni 的值为 ________________________________.

4. $\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=$__________________________________.

5.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}z^n$ 的收敛半径是________________________________.

6.已知函数 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$，则 $\mathrm{Re}[f(z),0]=$__________________________.

7.把上半平面 $\mathrm{Im(z)}>0$ 映射为单位圆 $|w|<1$ 且满足 $f(i)=0, \arg f'(i)=0$ 的分式线性映射为______________________________.

8. 函数 $F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$ 的 Fourier 逆变换为______________________

9. $f(t)=1-te^t$ 的 Laplace 变换为__________________________________.

二、单项选择题 (每小题 4 分，共 20 分)

1. 复数 e^{2-i} 的辐角主值是（ ）

A.1 B. $\sqrt{8}$ C.－1 D.8

2. 函数 $w=f(z)=u+iv$ 在点 z_0 处解析，则命题（ ）不成立。

A. u,v 仅在点 z_0 处可微且满足 $C-R$ 条件；

B. 存在点 z_0 的某一邻域 $U(z_0)$ ， u,v 在 $U(z_0)$ 内满足 $C-R$ 条件；

C. u,v 在邻域 $U(z_0)$ 内可微；

D. B, C 同时成立。

3. 设 $f(z)$ 在闭曲线 C 上及其内部解析， z_0 在 C 的内部，则有（　　　）

A. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = f'(z_0)\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^2}dz$　　　B. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz$

C. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{f(z_0)}{2!}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)}dz$　　　D. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{(z-z_0)}dz$

4. 函数 $\frac{\cot \pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内的奇点个数（　　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

5. 将点 $z=0,1,\infty$ 分别映射为 $w=-1,-i,1$ 的分式线性映射为（　　　）

A. $w=\frac{z+1}{z-1}$　　　B. $w=e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{z+1}{z-1}$　　　C. $w=\frac{z-i}{z+i}$　　　D. $w=e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{z-i}{z+i}$

三、（8 分）已知 $u(x,y)=-3xy^2+x^3$ 为调和函数，求满足 $f(0)=C$ 的解析函数？

四、(共 8 分)沿指定曲线 C 计算积分 $\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 的值，其中 $C:|z|=\frac{3}{2}$ 为正向.

五、（8 分）求函数 $f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$ 在 $0<|z|<\infty$ 内的洛朗展开式，并判断函数的孤立奇点的类型?

六、（8 分）利用傅里叶变换求解方程 $y(t)=f(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 其中 $f(t),g(t)$ 为已知函数？

七、（12 分）利用拉氏变换求解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y''+k^2y=0 \\ y(0)=A, y'(0)=B. \end{cases}$ (已知 $\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$，$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$， $\mathscr{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$)

华东理工大学 2008–2009 学年第 二 学期

《复变函数与积分变换》课程期末考试试卷 答案 A 2009.6

一、填空题(每小题 4 分，共 36 分)

1. 1　2. $\sqrt{10}e^{i(\arctan 2-\frac{\pi}{6})}$ 或 $\sqrt{10}e^{i\arctan(5\sqrt{3}-8)}$　3. $i\pi(\frac{1}{2}+2k)$

4 $2\pi i$　5. 0.　6. $\mathrm{Re}(f(z),0)=1$

7. $i\dfrac{z-i}{z+i}$　8. $\cos\omega_0 t$　9. $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$

二、单项选择题 (每小题 4 分，共 20 分) C　A　A　D　C

三、（8 分）已知 $u(x,y)=-3xy^2+x^3$ 为调和函数，求满足 $f(0)=C$ 的解析函数？

解：由 C-R 条件，知

$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-3y^2+3x^2$ --2 分

$v=\int\dfrac{\partial v}{\partial y}dy=-y^3+3x^2y+g(x)$ --2 分

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+g'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy$ --2 分

知 $g(x)=C_1$

所以 $f(z)=u+iv=-3xy^2+x^3+i(3x^2y-y^3+C_1)$ ------------------------------------1 分

将 $f(0)=C$ 代入上式得 $C_1=-iC$

故 $f(z)=-3xy^2+x^3+C+i(3x^2y-y^3)=z^3+C$ ----------------------------------1 分

注：没写出 $=z^3+C$ 不扣分

四、(共 8 分)沿指定曲线 C 计算积分 $\oint_C\dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 的值，其中 $C:|z|=\dfrac{3}{2}$ 为正向.

解：　$\oint_C\dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$

$$=\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}+\oint_{|z+i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$ --------------------------------3 分

$$=\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{(z-i)}dz+\oint_{|z+i|=\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}}{(z+i)}dz$$ --------------------------2 分

$$=2\pi i\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i}+2\pi i\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}\Big|_{z=-i}$$ ------------------------------------2 分

=0　　　　　　　　　　　　　1 分

本题多数同学可能会用留数计算：

解法二：

函数 $f(z)=\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 在 $|z|<\frac{3}{2}$ 内有以积极点 $z=\pm i$　　　　　　2 分

由留数定理

$$\oint_C\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]$$　　　　3 分

$$=2\pi i[\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}+\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}]$$　　　　2 分

$$=0$$　　　　1 分

注：本题计算出极点的留数每个给 1 分

五、(8 分）求函数 $f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}$ 在 $0<z<\infty$ 内的洛朗展式，并判断函数的孤立奇点的类型?

解： $f(z)=\frac{\sin z-z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left[(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots)-z\right]$-----------------------------------3 分

$$=\frac{-1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots$$ --3 分

由孤立奇点定义知： $z=0$ 为可去奇点； $z=\infty$ 为本性奇点。-------------------------2 分

注：本题只要写出 sinz 的展开式就给 2 分，丢一个奇点扣 1 分

六、(8 分）利用傅里叶变换求解方程 $y(t)=f(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 其中 $f(t),g(t)$ 为已知函数?

解：设 $\mathcal{F}[y(t)]=Y(\omega)$ ， $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$， $\mathcal{F}[g(t)]=G(\omega)$----------------2 分

将方程 $y(t)=f(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 两边取傅里叶变换并由卷积定理得

$Y(\omega)=F(\omega)-Y(\omega)\cdot G(\omega)$ --4 分

解得 $Y(\omega)=\dfrac{F(\omega)}{1+G(\omega)}$ ---1 分

两边同时取傅里叶逆变换得 $y(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{F(\omega)}{1+G(\omega)}e^{i\omega t}d\omega$ ------------------------------1 分

注：若只写出卷积公式给 3 分

七、（12）利用拉氏变换求解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y''+k^2y=0 \\ y(0)=A, y'(0)=B. \end{cases}$

解：设 $\mathscr{L}\left[y(t)\right]=Y(s)$，两边取拉氏变换

$s^2Y(s)-As-B+k^2Y(s)=0$ ---4 分

$Y(s)=\dfrac{As+B}{s^2+k^2}$ ---2 分

再取拉氏逆变换得 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{As+B}{s^2+k^2}]$--------------2 分

$=\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{As}{s^2+k^2}]+\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{B}{s^2+k^2}]$------------------2 分

$=A\cos kt+\dfrac{B}{k}\sin kt$ -----------------------------2 分