华东理工大学 2009–2010 学年第一学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A 2010.1

开课学院：理学院 ，考试形式：闭卷 ，所需时间：120 分钟

考生姓名：__________学号：____________班级：_________任课教师 ：赵建丛

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								
评卷人								

(本试卷共七道大题)

一、 **填空（每小题 4 分，共 24 分）**

1．若 $z_1 = e^{1+i}, z_2 = 3+i$，则 $z_1 \cdot z_2 =$______________.

2 函数 $f(z) = 2x^3 + 3y^3$ 在____________________可导.

3． $z=0$ 是 $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z}$ 的奇点，其类型为_________.

4.设 C 为正向圆周 $|\xi|=1$，则当 $|z|<1$ 时，$f(z) = \oint_C \dfrac{\sin 2\xi}{(\xi - z)^3} d\xi =$__________.

5．函数 $f(t) = \cos t \sin t$ 的 Fourier 变换为____________________

6. 设 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega), ,\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega),$ 则 $\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] =$______________，

其中 $f_1(t) * f_2(t)$ 定义为________________ .

二、**单项选择题（每小题 4 分，共 24 分）**

1..下列结论中不正确的是（ ）

A．若 $f(z)$ 在单连通域 D 解析，则积分 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ 与路径无关（$z_0, z_1 \in D$）；

B. 若 $f(z)$ 在 D 内任一点 z_0 的邻域内可展开成泰勒级数，则 $f(z)$ 在 D 解析；

C. 如果 $f(z)$ 在单连域 D 内沿 D 内任一条简单闭曲线的积分值为零，则 $f(z)$ 在 D 解析

D. 设 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z)^n}$, n 为正整数，$g(z)$ 在 z_0 点解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 n 级极点。

2. 在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 之下，将区域 $\mathrm{Im}(z)>1$ 映射成为区域（ ）

A. $\mathrm{Im}(w)<1$；　B. $\mathrm{Re}(w)<1$；　C. $\left|w+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$；　D. $\left|w+\dfrac{1}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$。

3. 设 C 为正向圆周 $|z-a|=a(a>0)$, 则积分 $\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}=$（ ）

A. $-\dfrac{\pi i}{2a}$　B. $-\dfrac{\pi i}{a}$　C. $\dfrac{\pi i}{2a}$　D. $\dfrac{\pi i}{a}$

4. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式的收敛半径为（ ）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　B. 1　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$

5. 点 $z=-1$ 是 $f(z)=(z+1)^5\sin\dfrac{1}{(z+1)}$ 的（ ）

A. 可去奇点　B. 二阶极点　C. 五阶零点　D. 本性奇点

6. 设 C 为从 $-i$ 到 i 的直线段，则 $\int_C |z|\,dz=$（ ）

A. i　B. $2i$　C. $-i$　D. $-2i$

三、（**8 分**）求线性映射 $w=f(z)$ 它把 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$，使 $f(\frac{1}{2})=0, f'(\frac{1}{2})>0$.

四．（8 分）已知 $u(x,y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 以及二元函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

五.（**8** 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 点展开为洛朗 (Laurent) 级数**.**

六．计算下列积分（每题 **6** 分，共 **18** 分）

1．$\oint_C \frac{e^{-z}\sin 2z}{z^2}dz$，设 C 为正向圆周 $|z+i|=2$.

2．$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$，$C$ 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$

七、（**10 分**）计算 $f(t)=\int_0^t\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt$ 的拉氏变换，并用拉普拉斯(Laplace)变换求解

微分方程 $y'''+y'=e^{2t}$ 满足初始条件 $y\left(0\right)=y'\left(0\right)=y''\left(0\right)=0$ 的解.

[已知 $\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$,$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$,$\mathscr{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$]

华东理工大学 2009–2010 学年第一学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A 答案 2010.1

开课学院：理学院 ，考试形式：闭卷 ，所需时间：120 分钟

二、 填空（每小题 4 分，共 28 分）

1． $e(\cos 1-\sin 1)+ie(3\sin 1+\cos 1)$.

2 直线 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$

3．可去奇点.

4. $-4\pi i\sin 2z$.

5． $\dfrac{i\pi}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$

6. $F_1(\omega)\cdot F_2(\omega),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

二、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）D,C,D,B,B,A

三、（8 分）求线性映射 $w=f(z)$ 它把 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$，使 $f(\frac{1}{2})=0,\ f'(\frac{1}{2})>0$.

解：因 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$ 的映射为 $w=f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\quad(|\alpha|<1)$

由题意 $\alpha=\dfrac{1}{2}\qquad w=e^{i\theta}\dfrac{2z-1}{2-z}$　　　　3 分

$f'(z)=e^{i\theta}\dfrac{3}{(2-z)^2}\qquad f'(\dfrac{1}{2})=e^{i\theta}\cdot\dfrac{4}{3}>0$　　　　2 分

$\theta=arcf'(\dfrac{1}{2})=2k\pi$　（k 为整数）　　　　2 分

所以 $w=\dfrac{2z-1}{2-z}$.　　　　1 分

四．(8 分)已知 $u(x,y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 a 以及二元函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

解：若 $f(z)=u+iv$ 解析，则 $u(x,y)$ 必为调和函数

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=4y^3+3ax^2y\qquad\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=12xy^2+ax^3$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6axy\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=24xy$

即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6axy+24xy=0 \qquad a=-4$ 2 分

$\therefore \quad u(x,y)=4xy^3-4x^3y$

由柯西黎曼方程

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=4y^3-12x^2y$$

$v(x,y)=\int(4y^3-12x^2y)dy=y^4-6x^2y^2+\varphi(x)$ 2 分

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=4x^3-12xy^2=-12xy^2+\varphi'(x)$$

$\varphi'(x)=4x^3, \qquad \varphi(x)=x^4+C$ 2 分

$$v(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2+C$$

$$f(z)=(4xy^3-4x^3y)+i(x^4+y^4-6x^2y^2+C)$$

代入 $f(1)=0$ 得 $C=-1$

所以

$v(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2-1$ 2 分

五.（**8 分**）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 点展开为洛朗 (Laurent) 级数.

解：$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$，2 分

在复平面上以原点为中心分为三个解析环：

$$0\le|z|<1, \quad 1<|z|<2, \quad 2<|z|<+\infty .$$

(1) 在 $0\le|z|<1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$. **2 分**

(2) 在 $1<|z|<2$ 内，

$$f(z)=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$ **2 分**

(3) 在 $2<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}.$$ **2 分**

六．计算下列积分（每题 6 分，共 18 分）

1．$\oint_C \frac{e^{-z}\sin 2z}{z^2}dz$，设 C 为正向圆周 $|z+i|=2$。

解：令 $f(z)=e^{-z}\sin 2z$，则由高阶求导公式得：

$$原式=2\pi i\cdot f'(0)$$ 3分

$$=2\pi i(-e^{z}\sin 2z+2e^{-z}\cos 2z)|_{z=0}=4\pi i$$ 3分

2．$\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$，$C$ 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$。

解： 在 C 内，$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 有本性奇点 $z=0$，

由留数定理：原式 $=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0]\}$ 3 分

在 $0<|z|<\frac{1}{2}$ 内将 $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 展为 Laurent 级数：

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots)$$

$$=\cdots\frac{1}{z}(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots)+\cdots$$

故：$\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0]=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e-1$ 2 分

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz=2\pi i=2\pi i(e-1)$$ 1 分

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$

解：令 $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$

$f(z)$ 在上半平面有两个一级极点 $z_1=i,\ z_2=3i$ 分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+9)(x^2+1)}dx=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),3i]\}$$ 3 分

$$=2\pi i[\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+9)(z+i)}\right|_{z=i}+\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+3i)}\right|_{z=3i}]$$

$$=2\pi i(\frac{e^{-1}}{16i}+\frac{e^{-3}}{-48i})=\frac{\pi}{8}e^{-1}-\frac{\pi}{24}e^{-3}$$ 2 分

原式 $=\mathrm{Re}[\frac{\pi}{8}e^{-1}-\frac{\pi}{24}e^{-3}]=\frac{\pi}{8}e^{-1}-\frac{\pi}{24}e^{-3}$ 1 分

七、（8 分）计算 $f(t)=\int_0^t\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt$ 的拉氏变换，并用拉普拉斯(Laplace)变换求解微分方程 $y'''+y'=e^{2t}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的解.

[已知 $\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$, $\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$, $\mathscr{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$]

解：（1）由于 $\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\frac{4}{(s+3)^2+4}$

由像函数的积分性质得 $\mathscr{L}[\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}]=\int_s^{\infty}\frac{2}{(s+3)^2+4}ds=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}$

$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}]$ 4 分

（2）设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$ 对方程取拉氏变换

$s^3Y(s)+sY(s)=\frac{1}{s-2}$（2 分）， $Y(s)=\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)}$

$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)}]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{-\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{10}}{s-2}+\frac{\frac{2}{5}s-\frac{1}{5}}{s^2+1}]$ （2 分）

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t$ （2 分）