第六章　　　共形映射

- 共形映射的概念
- 分式线性映射
- 几个常见区域间的分式线性映射
- 几个初等函数所构成的映射

§6.1 共形映射的概念

一、解析函数的导数的几何意义

设$w=f(z)$在区域D内解析，z_0是D内任意一点，$f'(z_0)\neq 0$

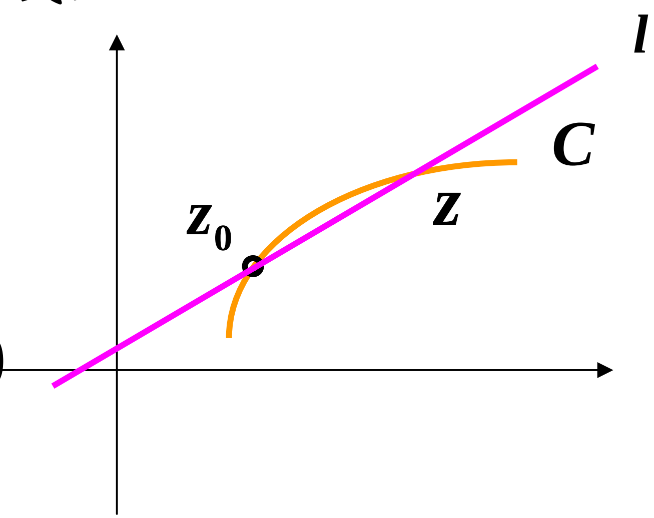
考察$f'(z_0)$的几何意义：

设C是z平面内一条过z_0点的有向光滑曲线，

其参数方程为 $C: z=z(t) \quad \alpha\leq t\leq\beta$

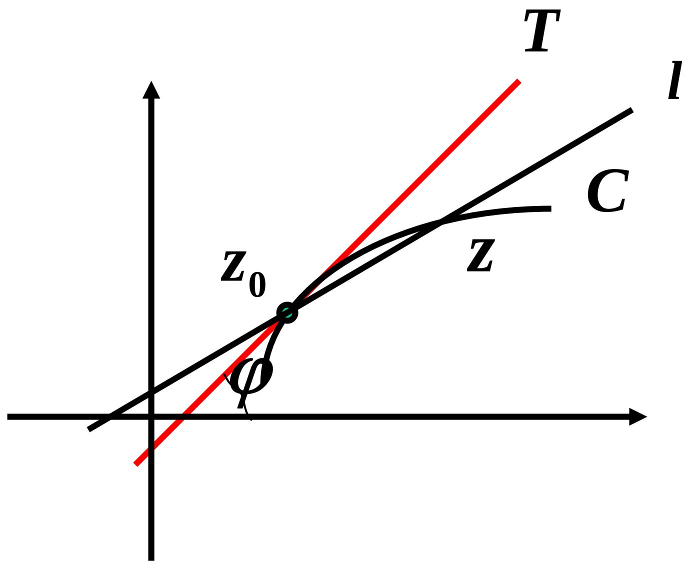
其正向为 t增大的方向。

$$z'(t_0)\neq 0, z_0=z(t_0)\ t_0\in(\alpha,\beta)$$



割线 l的正向为 $\overrightarrow{z_0 z}$的方向。

所以l的方向与$\dfrac{z-z_0}{t-t_0}$方向相同。

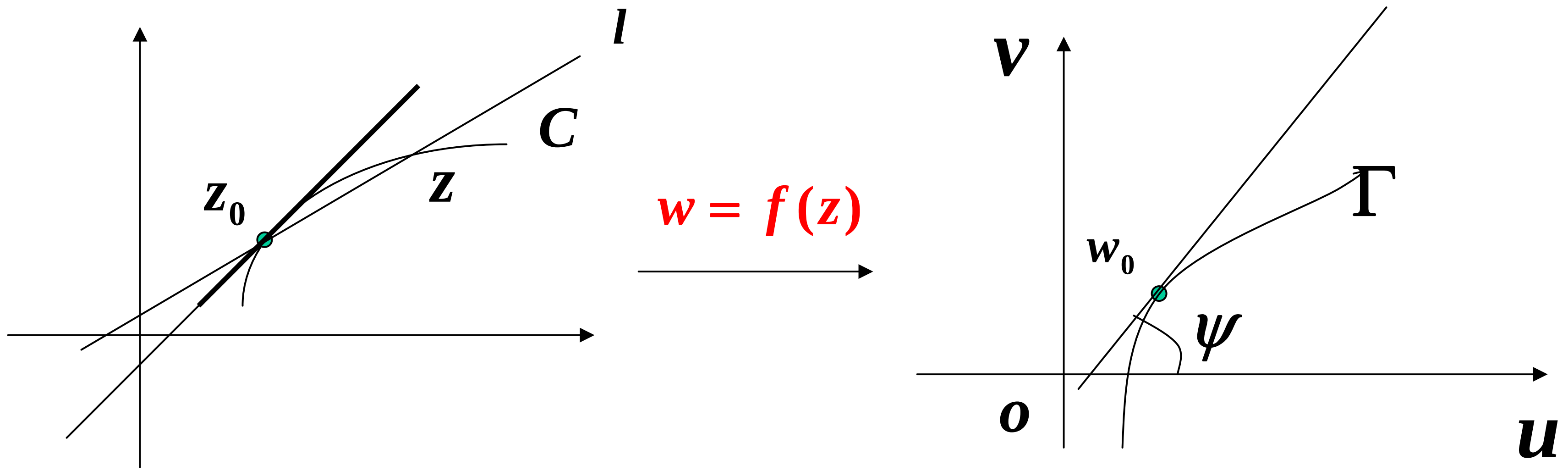


当$t\to t_0(z\to z_0)$时，$\dfrac{z-z_0}{t-t_0}\to z'(t_0)$

割线l的极限位置是切线 T

于是切线T的方向与$z'(t_0)$一致。

即$\varphi=\arg z'(t_0)$



$$C: z = z(t), \alpha \le t \le \beta \;\rightarrow\; \Gamma: w = f(z(t)), \alpha \le t \le \beta$$

Γ在$w_0 = f(z_0)$处的切线与实轴正向夹　角为：

$$\arg w'(t_0) = \arg[f'(z_0) \cdot z'(t_0)]$$

$$= \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) \quad = \arg f'(z_0) + \varphi$$

于是 $$\arg f'(z_0)=\arg w'(z_0)-\arg z'(t_0)=\psi-\varphi$$

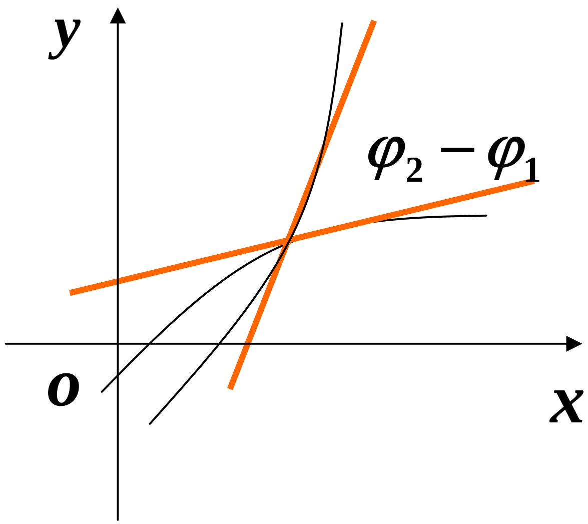
上式表明:

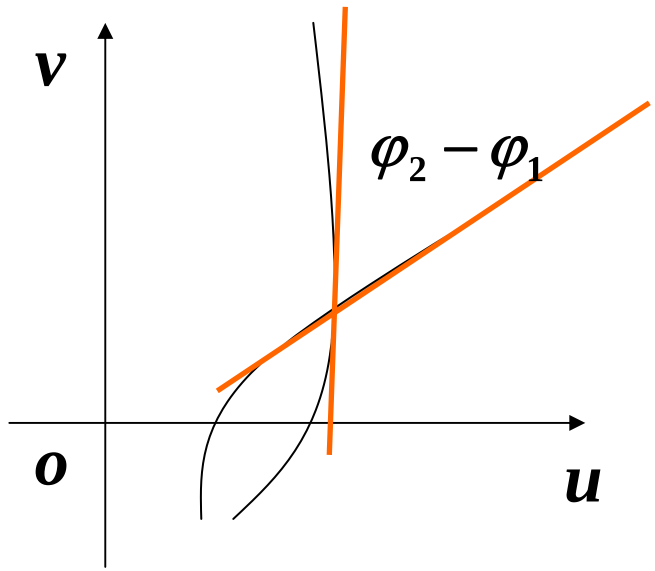
在$w=f(z)$的映射下,

(1) 像曲线Γ在w_0的切线方向可由曲线C在z_0处的切线旋转角度$\arg f'(z_0)$得到, 称$\arg f'(z_0)$为$w=f(z)$在点z_0转动角(导数辐角的几何意义);

(2) 转动角的大小、方向与过z_0的曲线C的形状无关(转动角的不变性);

设 C_1、C_2 在 z_0 处切线与 x 轴正向夹角为 φ_1、φ_2，则 C_1、C_2 夹角(切线正向)为 $\varphi_2-\varphi_1$。

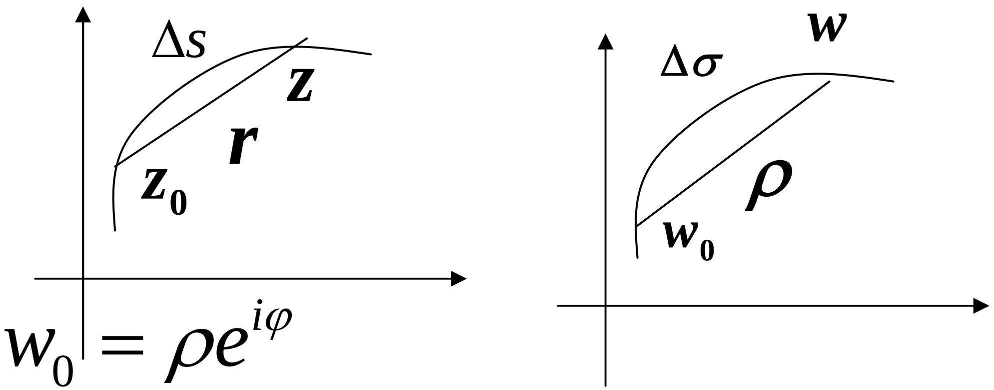




C_1、C_2 经 $w=f(z)$ 映射后, 像曲线 Γ_1、Γ_2 的夹角为:

$$(\varphi_2+\arg f'(z_0))-(\varphi_1+\arg f'(z_0))=\varphi_2-\varphi_1$$

保角性：$w=f(z)$ 在处具有保持两曲线夹角的大小、方向不变性。



$|f'(z_0)|$的几何意义:

令 $z-z_0=re^{i\theta},\quad w-w_0=\rho e^{i\varphi}$

$$\frac{w-w_0}{z-z_0}=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\rho e^{i\varphi}}{re^{i\theta}}=\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}\cdot\frac{\rho}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta s}{r}e^{i(\varphi-\theta)}$$

取极限：
$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$$

称为曲线在 z_0 点的伸缩率(导数模的几何意义)。

伸缩率的不变性: 伸缩率 $|f'(z_0)|$ 只与 z_0 有关, 而与过 C 的曲线的形状无关。

定理:　设 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，　$z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0,$ 则映射 $w = f(z)$ 在 z_0 点具有性质:

(1) 保角性;　(2) 伸缩率不变性。

例　求映射 $w = f(z) = z^2 + 2z$ 在 $z_0 = -1 + 2i$ 转动角及伸缩率。

并说明映射将 z 平面的哪一部分放大? 哪一部分缩小?

解：$f'(z)=2z+2=2(z+1)$

$$f'(-1+2i)=2(-1+2i+1)=4i$$

所以 $f(z)$ 在 $-1+2i$ 转动角为 $\arg 4i=\dfrac{\pi}{2}$，伸缩率为 $|4i|=4$。

$$|f'(z)|=2|z+2|=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

而 $|f'(z)|<1\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2<\dfrac{1}{4}$

所以，映射 $w=z^2+4z$ 把以 $z=-2$ 为圆心，半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆内部缩小，外部放 大。

二、共形映射的概念

定义：设$w=f(z)$在某$N(z_0)$有定义，若 $w=f(z)$在z_0处具有保角性和保伸缩 率不变性，则称 $w=f(z)$在z_0处是保角的；

若$w=f(z)$在D内每一点都是保角的， 且为1-1映射，则称之为 共形映射。

推论：若$w=f(z)$为解析函数，若 $f'(z_0)\neq 0, z_0\in D$，则$f(z)$在z_0处是保角的。

共形映射中的两个基本问题:

(1)已知共形映射 $w = f(z)$及z平面上的区域 D,

求w平面上的相应区域 D^*

(2)求一共形映射 $w = f(z)$, 使它将 z平面上的已知区域 D,

映射成 w平面上的指定区域 D^*

例 试求在映射 $w=z^2$ 下，z 平面上的直线 $y=x$ 及 $x=1$ 的像曲线在这两条曲线的交点处 $w=z^2$ 是否具有保角性？旋转角、伸缩率是多少？

解：令 $w=u+iv, \quad z=x+iy$

则 $w=z^2$ 变为：$u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

即
$$\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$$

z 平面上直线 $C_1: y=x$ 在 w 平面上的像曲线是：

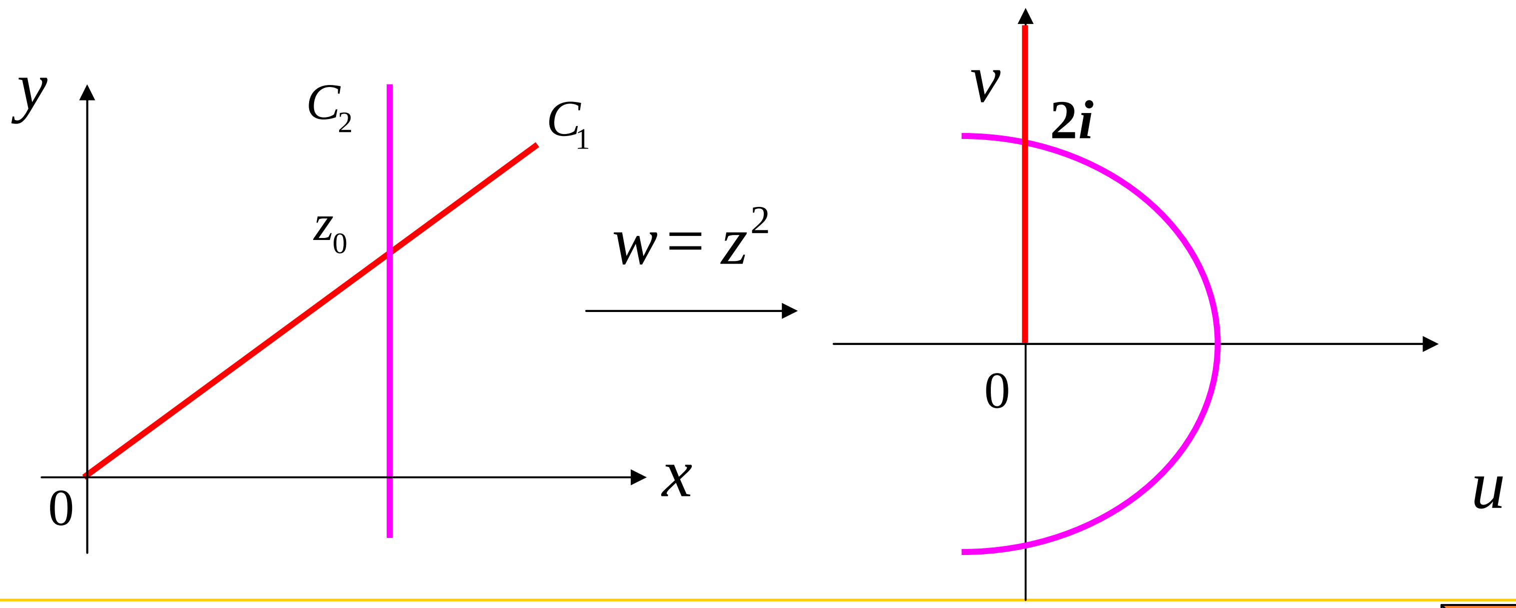
$$\Gamma_1: \begin{cases} u=0 \\ v=2y^2 \end{cases}$$

W平面上的上半虚轴。

z 平面上直线 $C_2 : x = 1$ 在平面上的像曲线是:

$$\Gamma_2 : \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \qquad \text{即} v^2 = 4(1-u)$$

w 平面上的一条抛物线



$y=x$ 与 $x=1$ 的交点为 $z_0=1+i$,

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z_0=1+i}=\left.2z\right|_{z_0=1+i}=2(1+i)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\neq 0$$

映射 $w=z^2$ 在交点 $z_0=1+i$ 处是保角的, 且旋转角为 $\dfrac{\pi}{4}$,

伸缩率为 $2\sqrt{2}$, z_0 的像 $w_0=2i$。