# 第2章 解析函数

本章要讨论的问题：

1. 解析函数的概念
2. 复变函数可导与解析的判别法（C-R方程）
3. 初等函数的解析性
4. 解析函数与调和函数的关系

## 一、解析函数概念

定义　若函数 $w = f(z)$ 在点 $z_0$ 及 $z_0$ 的某领域内处处可导，称 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析。

若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内每一点解析，则称 $f(z)$ 为 $D$ 上的解析函数或称 $f(z)$ 在 $D$ 内解析。

若 $f(z)$ 在点 $z_0$ 不解析，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的一个奇点。

注意:

（1）函数在一点处解析与在一点可导不等价

(2) 函数在区域内解析与在该区域内可导是等价的。

例1. 讨论函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性。

由前面的讨论可知，$f(z)=|z|^2$ 除了在 $z=0$ 处可导外，在复平面上处处不可导，因此，$f(z)=|z|^2$ 在复平面上处处不解析。

例2. 讨论函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 的解析性。

由于 $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$

所以，$f(z)$ 除了 $z=0$ 外处处可导。

因此，函数 $\dfrac{1}{z}$ 在复平面上除了 $z=0$ 点外处处解析。

以上两例中，$z=0$ 都是 $f(z)$ 的奇点，但前者在 $z=0$ 处可导，后者在 $z=0$ 处不可导。

**解析函数的性质：**

（1）若 $f(z)$、$g(z)$ 在 $D$ 内解析，则 $f(z)\pm g(z)$、$f(z)g(z)$、$f(z)/g(z)\,(g(z)\neq 0)$ 仍在 $D$ 内解析。

（2）若 $h=g(z)$ 在 $z$ 平面上区域 $D$ 内解析，函数 $w=f(h)$ 在 $h$ 平面上区域 $G$ 内解析，若对 $\forall z\in D$，$h=g(z)\in G$，则复合函数 $w=f[g(z)]$ 在 $D$ 内解析；

(3) 设 $w=f(z)$ 在 $D$ 内解析, 且 $\forall z\in D,\ f'(z)\neq 0$,

而 $w=f(z)$ 的反函数 $z=h(w)$ 在相应的区域

$G$ 内连续, 则 $z=h(w)$ 在 $G$ 内解析, 且 $h'(w)=\dfrac{1}{f'(z)}$

（4）一个解析函数不可能仅在一个点或一条曲线上解析;

所 有解析点的集合必为开集。

由以上性质可得如下结论:

多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 在复平面上解析。

有理分式函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)\neq 0$ 的区域内为解析函数。

## 二、柯西——黎曼方程

定理(可导的充要条件)

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $D$ 内某一点 $z=x+iy$

可导的充要条件是：

$u(x,y)$、$v(x,y)$ 在该点可微，且满足方程，

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

称上述方程为柯西—黎曼方程(C−R方程)

还可推出:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

（证明略）

# 定理（函数解析的充要条件）

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在其定义域 $D$ 内解析的充要条件是：

$u(x,y)$、$v(x,y)$ 在 $D$ 内处处可微，而且满足方程：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}}$$

**说明:**

(1) 是否满足 $C-R$ 方程是定理的主要条件，如果 $f(z)$在 $D$ 内不满足 $C-R$ 方程，那么 $f(z)$ 在 $D$ 内一定不解析。满足 $C-R$ 方程是解析的必要条件。

(2) 若 $f(z)$ 在 $D$ 内满足 $C-R$ 方程，$u$、$v$ 具有一阶连续偏导数(从而 $v$、$v$ 在 $D$ 内可微)，则 $f(z)$ 在 $D$ 内解析。

**推论:** 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在$D$内有定义，若 $u_x$、$u_y$、$v_x$、$v_y$存在且连续，并满足 $C-R$方程，则 $f(z)$ 在 $D$内解析。

例3 判断以下函数的可导性　与解析性：

(1) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

(2) $f(z)=x^{2}+iy^{2}$

(3) $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$

解：(1) $u(x,y)=e^{x}\cos y,\ v(x,y)=e^{x}\sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y$$

在复平面内这四个偏导数处处连续，则 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 处处可微，且满足 $C-R$ 条件

于是，由定理知 $f(z)$ 在复平面上处处解析。

(2) $f(z)=x^2+iy^2$

$$u(x,y)=x^2,\quad v(x,y)=y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

在复平面连续且 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

但仅当 $y=x$ 时才有 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

所以 $f(z)$ 仅在 $y=x$ 上可导,从而在复平面上处处不解析。

(3) $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$

$$f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z=(x+iy)x=x^2+ixy$$

$$u(x,y)=x^2,\ v(x,y)=xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=x$$

这四个偏导数在复平面内连续,但仅当 $x=y=0$ 时才满足 $C-R$ 条件,所以,$f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 仅在 $z=0$ 点可导,故 $f(z)$ 在复平面处处不解析。

例3　设 $f(z)$ 在 $D$ 内解析，证明：若满足下列条件之一，则 $f(z)$ 在 $D$ 内必为常数：

(1) $f'(z)=0$

(2) $\mathrm{Re}\, f(z)=$ 常数

(3) $|f(z)|=$ 常数

证： (1) 若 $f'(z)=0$, 即

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

于是 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

所以 $u$、$v$ 为常数，即 $f(z)=u+iv$ 为常数。

(2) $\operatorname{Re} f(z)=$ 常数，即 $u=$ 常数，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

由 $C-R$ 方程得： $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

即 $u$、$v$ 为常数，从而 $f(z)$ 为常数。

(3) $|f(z)|$为常数，即 $u^2+v^2$ 为常数，所以

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

代入$C-R$方程：$$u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

得到：

$$(u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

若$u^2+v^2=0$，则$u=v=0$　则$f(z)=0$

若$u^2+v^2\neq 0$，　则$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$　从而$u$为常数。

同理可推得　$v$为常数。　所以　$f(z)$为常数。

参照以上例题可进一步证明:

如果 $f(z)$ 在区域 $D$ 内解析,则以下条件彼此等价.

(1) $f(z)=$ 恒取实值; (2) $f'(z)=0$;

(3) $|f(z)|=$ 常数; (4) $\overline{f(z)}$ 解析;

(5) $\mathrm{Re}[f(z)]=$ 常数; (6) $\mathrm{Im}[f(z)]=$ 常数;

(7) $v=u^2$; (8) $\arg f(z)=$ 常数.

例4　证明 $C-R$ 方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}$$

证明：令

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

由复合函数求导法则及 $C-R$ 条件，得到

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=-\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=r\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

比较一式与四式 ，得： $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}$

比较二式与三式 ，得： $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\cdot\frac{\partial v}{\partial r}$

思考：　判别正误：

（1）若 $f'(z_0)$存在，则 $f(z_0)$在$z_0$点解析。

（2）$z_0$为$f(z)$的奇点，则$f(z)$在$z_0$点不可导。

（3）$z_0$为$f(z)$、$g(z)$的奇点，

则也是$f(z)+g(z)$、$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的奇点。

# 2.2 初等函数及其解析性

## 1.指数函数

定义　对 $\forall z = x + iy$, 定义关系式

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

为复数域上的指数函数 。

$e^z$ 还可以用 $\exp(z)$ 表示。

特别地:

当 $y=0$, 即 $z$ 取实数时 , 与实指数函数定义一致 ;

当 $z = iy$ 时, 得到 Euler 公式 : $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

## 指数函数的性质

(1) $|e^z| = e^x$, $Arg(e^z) = y + 2k\pi$ ( $k$为整数 )

$e^z$ 还可以用 $\exp(z)$ 表示。

(2) $e^z$ 在复平面内处处有定义，且是单值的；

$e^z \neq 0$

(3) 对$\forall\ z_1, z_2 \in C$，有 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

证明留作练习

(4) $e^z$ 以 $2\pi i$ 为周期

事实上, $e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z$,

$$e^{z+2n\pi i}=e^z\cdot e^{2n\pi i}=e^z$$

(5) $e^z$ 当 $z\to\infty$ 时无极限

证:因为当 $z$ 沿实轴正向趋于 $+\infty$ 时,

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x>0}} e^z=\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

当 $z$ 沿负实轴趋于 $\infty$ 时,

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z=x<0}} e^z=\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

(6) 指数函数 $e^z$ 在整个复平面上解析，

并且 $(e^z)' = e^z$

例1 $|e^{z^2}| = \underline{e^{x^2-y^2}}$，$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}}) = \underline{e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos(\frac{y}{x^2+y^2})}$

解：$e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+i2xy}$

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+iy}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}}$$

## 二、对数函数

定义　满足方程　$e^w = z\ (z \neq 0)$ 的函数　$w = f(z)$,

称为对数函数　，记作　$w = \mathrm{Ln}\, z$

若令　$z = re^{i\theta}$,　$w = u + iv$, 则　$e^{u+iv} = re^{i\theta}$

于是有：$e^u = r,\ v = \theta + 2k\pi\ \ (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$u = \ln r,\quad v = \mathrm{Arg}\, z\ \ (z \neq 0)$$

由此, 得到：

$$\boxed{w = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z\quad (z \neq 0)}$$　为多值函数

当 $\mathrm{Arg}\,z$ 取主值 $\arg z$ 时, $\mathrm{Ln}\,z$ 为一单值函数, 称为 $\mathrm{Ln}\,z$ 的主值, 记为

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z}$$

因而

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln z + i2k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

表示其它各分支, 对每个 $k$, 上式表示一个单值函数, 称为 $\mathrm{Ln}\,z$ 的一个分支。

例2 计算下列函数值及它们 的主值：

$$(1)\ \mathrm{Ln}(-1) \quad (2)\ Ln(3-\sqrt{3}i) \quad (3)\ \mathrm{Ln}(e^{i})$$

解：$(1)\ \mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\,\mathrm{Arg}(-1)$

$$=\ln 1+i(2k\pi+\pi)$$

$$=(2k+1)\pi i \quad (k\text{为整数})$$

当 $k=0$ 时，得主值 $\ln(-1)=\pi i$

$$(2)\ \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)=\ln|3-\sqrt{3}i|+iArg(3-\sqrt{3}i)$$

$$=\ln 2\sqrt{3}+i(2k\pi-\frac{\pi}{6}) \quad (k\text{为整数})$$

当$k=0$时,得主值 $\ln 2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}i$

$$(3)\ \mathrm{Ln}(e^{i})=\ln|e^{i}|+i(\mathrm{Arg}\,e^{i})$$

$$(\arg e^{i})=1$$

$$=0+(2k\pi+1)i$$

$$=i(1+2k\pi)\quad (k\text{为整数})$$

当$k=0$时,得 $\mathrm{Ln}\,e^{i}$ 的主值为 $i$

例3 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$

解：对 $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ 两端取对数，得：

$$z = \mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln|1+\sqrt{3}i| + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$$

$$= \ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \quad (k\text{取整数})$$

或： 令 $z = x + iy$, $e^{x+iy} = 1 + \sqrt{3}i$, $e^x = |1+\sqrt{3}i| = 2$

即有 $x = \ln 2$,

$$y = Arg(1+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k\text{取整数})$$

所以 $z = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

注意：

在实函数中，对数函数的定义域是 $(0,+\infty)$，而复对数函数的定义域是除 $z=0$ 外的全体复数；

实对数函数是单值函数，而复对数函数是多值函数。

由辐角的性质，可以得到复对数的运算 性质：

$$(1)\ \mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$$

$$(2)\ \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$$

注意： 以上两式理解为两端可 能取的函数值的全体是 相同的。

# 对数函数的解析性：

主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$在除去原点和负实轴的复平面上是解析的

$$并且 \frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}$$

$\mathrm{Ln}\, z$ 各分支在除去原点及负 实轴的平面内也解析，且具有相同的导数值。

## 三、幂函数

称 $w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$ ($a$ 为任意复常数, $z \neq 0$) 为幂函数。

$z^a$ 一般是多值函数 (除 $a$ 为整数外)

(1) 当 $a$ 为整数时,

$$z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{a(\ln z + 2k\pi i)} = e^{a\ln z} \cdot e^{2ka\pi i} = e^{a\ln z}$$

为单值函数

(2) 当 $a = \dfrac{p}{q}$ 为有理数时 ($(p,q)=1$, $p$、$q$ 为正整数)

$$z^a = e^{\frac{p}{q}[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = e^{\frac{p}{q}\ln|z| + i\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi)}$$

$$= e^{\frac{p}{q}\ln|z|}\left[\cos\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi)\right]$$

$z^{\frac{p}{q}}$具有$q$个值，　即取$k = 0,1,2,\cdots,(q-1)$时相应的值.

特殊情况:

1)当$a = n$ (正整数)时,

$$z^n = e^{n\mathrm{Ln}z} \quad = e^{\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z+\cdots+\mathrm{Ln}z} \qquad (\text{指数 } n \text{ 项})$$

$$= e^{\mathrm{Ln}z}\cdot e^{\mathrm{Ln}z}\cdot\cdots\cdot e^{\mathrm{Ln}z} \qquad (\text{因子 } n \text{ 个})$$

$$= z\cdot z\cdot\cdots\cdot z. \qquad (\text{因子 } n \text{ 个})$$

2) 当 $a=\dfrac{1}{n}$ 时,

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z}\quad =e^{\frac{1}{n}\ln|z|}\left[\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right]$$

$$=|z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right]=\sqrt[n]{z},$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,(n-1).$

(3) 当 $a$ 为无理数或复数时, $z^a$ 有无穷多值。

## 2. 幂函数的解析性

(1) 幂函数 $z^n$ 在复平面内是单值解析的,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

(2) 幂函数 $z^{\frac{1}{n}}$ 是多值函数,具有$n$个分支.

它的 各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的,

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)' = \left(\sqrt[n]{z}\right)' = \left(e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z}\right)' = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

$(3)w = z^a$(出去$a = n, \frac{1}{n}$外）是多值函数

由于 Ln z 的各分支在除去原点和 负实轴的复平面内解析 ，

因而 $z^a$ 各分支在除去原点和负 实轴的复平面内

也是解析的。 $$\frac{d}{dz}z^a = az^{a-1}$$

例4　求 $i^i$，$(1+i)^{1-i}$的值。

解：$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i^2(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$　($k$ 为整数)

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\mathrm{Ln}(1+i)}$$

$$= e^{(1-i)[\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)]}$$

$$= e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\ln\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}[\cos(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})]$$

$$(k=0,\pm 1,\ldots)$$

## 四、三角函数与双曲函数

由 Euler 公式, $y$ 为实数时,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y$$

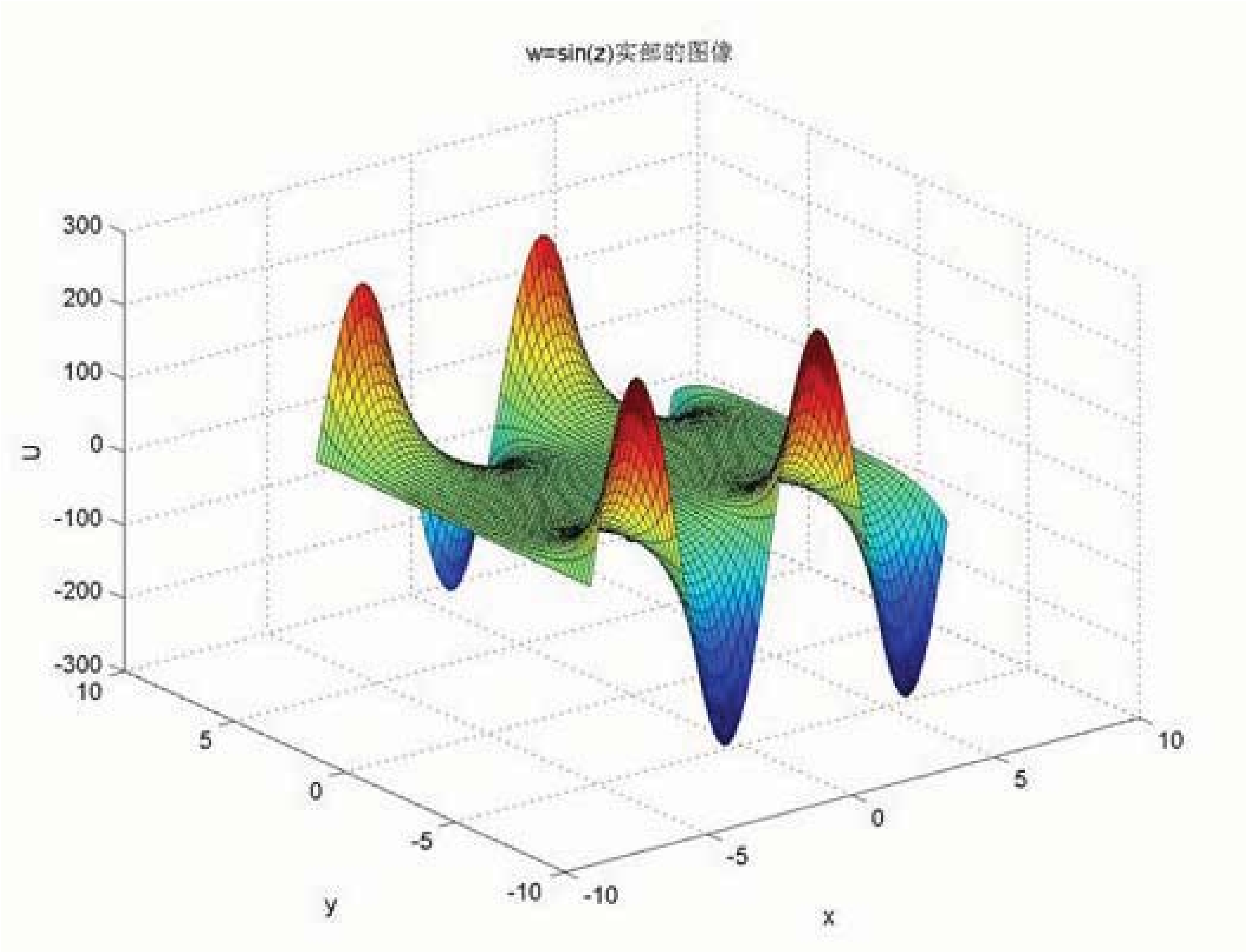
从而有 $\sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i},\quad \cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$

由此,我们定义复变量的三角 函数:

正弦函数: $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

余弦函数: $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

均为单值函数。


w=sin(z)实部的图像
300
200
100
0
-100
-200
-300
U
10
5
0
-5
-10
y
-10
-5
0
5
10
x

性质 ：

(1) $\cos z$ 是偶函数，$\sin z$ 是奇函数，即

$$\cos(-z)=\cos z,\quad \sin(-z)=-\sin z$$

(2) $\sin z$、$\cos z$ 以 $2\pi$ 为周期；

(3) $\sin z$、$\cos z$ 在复平面内处处解析且

$$(\sin z)'=\cos z, (\cos z)'=-\sin z$$

(4) 三角恒等式成立

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(5) $\sin z$ 的零点是：$z = n\pi (n = 0, \pm 1, \cdots)$

$\cos z$ 的零点是：$z = n\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots)$

(6) $|\sin z| \le 1$、$|\cos z| \le 1$ 不再成立。

例如: 取 $z = iy$

因为 $\cos(iy) = \dfrac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} > \dfrac{e^{y}}{2}$

所以，有 $|\cos iy| \to \infty \quad$ (当 $y \to \infty$)

注意，$\cos^2 z, \sin^2 z$不总是非负的。

例如：$\sin^2(-3i) = [\frac{e^{i(-3i)} - e^{-i(-3i)}}{2i}]^2$

$$= \left(\frac{e^3 - e^{-3}}{2i}\right)^2 = -\frac{(e^3 - e^{-3})^2}{4}$$

其它三角函数 ：

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

双曲函数：

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$\sinh z$ 和 $\cosh z$ 在复平面内解析，并且

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

双曲函数与三角函数的 关系：（利用定义即可推得）

$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z,$$

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z,$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

例5 解方程：$\sinh z = i$

解：方程等价于 $$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = i$$

即 $$(e^z)^2 - 2ie^z - 1 = 0$$

所以有

$$e^z = i,$$

$$z = \mathrm{Ln}\, i = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \quad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

# §2.3解析函数与 调和函数的关系

**调和函数**：如果实二元函数 $u(x,y)$ 在区域 $D$ 内有二阶连续偏导数，并且满足 *Laplace* 方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

则称 $u(x,y)$ 为区域 $D$ 内的 **调和函数**：

**定理** 任何在区域 $D$ 内解析的函数，它的实部和虚部都是 $D$ 内的调和函数。

证明：设 $f(z)=u+iv$ 为 $D$ 内的解析函数，

则
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$

由于解析函数具有任意 阶导数

则 $u$ 与 $v$ 具有任意阶连续偏导数 ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

从而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

即 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 都是调和函数。

## 共轭调和函数

设 $u(x,y)$ ,$v(x,y)$是区域 $D$内的两个调和函数 ，

且满足C-R方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

则称 $v(x,y)$ 是 $u(x,y)$在区域D内的共轭调和函数 .

定理 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $D$内解析的充要条件是：

$v(x,y)$是$u(x,y)$的共轭调和函数.

注意: 若$u(x,y)$,$v(x,y)$是区域 $D$内的任意两个调和函数 ，

$u(x,y)+iv(x,y)$不一定是解析函数 .

已知一个解析函数的实部$u(x,y)$(或虚部$v(x,y)$),
可求其虚部$v(x,y)$(或实部$u(x,y)$).

例1 验证 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数,并求其共轭调和函数 $v(x,y)$,从而构成一个解析函数 $f(z)=u+iv$

解: 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y$$

所以 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\quad u(x,y)$为调和函数。

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy$，得

$$v=\int -6xydy=-3xy^2+g(x) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x)$$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$，得： $-3y^2+g'(x)=-3y^2+3x^2$

$$g(x)=\int 3x^2dx=x^3+C \qquad v(x)=x^3-3xy^2+C$$

从而得到解析函数：

$$f(z)=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2+C)$$

例2 已知调和函数 $u(x,y)=x^2-y^2+xy$

求一个满足条件 $f(0)=0$ 的解析函数 $f(z)=u+iv$

解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$

由 $C-R$ 条件得: $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y$

于是 $v=\int(2x+y)dy=2xy+\dfrac{1}{2}y^2+\varphi(x)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x$$

$$\varphi'(x) = -x \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$v(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

从而得到：

$$f(z) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C)$$

代入 $f(0) = 0$, 解得 $C = 0$

由此得到解析函数：

$$f(z) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}(2 - i)z^2$$

解法二：$f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y$

$$=2x+y-i(-2y+x)$$

$$=2x+i2y+y-ix$$

$$=2(x+iy)-i(x+iy)$$

$$=(2-i)z \quad (\text{或令} y=0, f'(x)=(2-i)x)$$

$$f(z)=\frac{1}{2}(2-i)z^2+C$$

再利用 $f(0)=0$，得到 $C=0$

所以，有 $f(z)=\frac{1}{2}(2-i)z^2$

解法三（利用第二型曲线积分）

$$解：\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x$$

$$由 C-R 条件 \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-x+2y$$

$$v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy$$

$$=\int_0^x(-x)dx+\int_0^y(2x+y)dy$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+2xy+\frac{1}{2}y^2+C$$

$$f(z)=x^2-y^2+xy+i(2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2+C)$$

利用 $f(0)=0$, 求出 $C=0$

例3 设$u,v$满足下列关系，求解析函数

$$f(z)=u+iv$$

$$(1)\ u+v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)-2(x+y);$$

$$(2)\ u-v=x^2-y^2-2xy$$

解：（1）因为$f(z)=u+iv$，$v$是$u$的共轭调和函数，所以先求出$u$，$v$的一阶偏导数。

$$(u+v)_x = u_x + v_x = x^2 + 4xy + y^2 + (2x+4y)(x-y) - 2,$$

$$(u+v)_y = -(x^2 + 4xy + y^2) + (x-y)(4x+2y) - 2,$$

由$C-R$条件，$u_x + v_x = v_y - u_y$，并将两式相加得

$$v_y = 3x^2 - 3y^2 - 2, v_x = 6xy$$

故 $v = \int v_x dx + g(y)$

$= \int 6xy dx + g(y) = 3x^2 y + g(y)$

由 $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + \boldsymbol{g'(y)} = 3x^2 - 3y^2 - 2$

$\Rightarrow g'(y) = -3y^2 - 2,$

于是 $g(y) = -y^3 - 2y + C \Rightarrow v = 3x^2y - y^3 - 2y + C,$

$u = (u+v) - v = x^3 - 3xy^2 - 2x - C$

$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 2x - C + i(3x^2y - y^3 - 2y + C)$

令 $y = 0$, 得 $f(x) = x^3 - 2x - C + iC,$

所以 $f(z) = z^3 - 2z + C(i-1).$

$$(2)(u-v)_x = u_x - v_x = 2x - 2y \overset{C-R}{=} v_y + u_y,$$

$$(u-v)_y = u_y - v_y = -2y - 2x \overset{C-R}{=} -v_x - u_x.$$

解方程，得： $u_y = -2y, u_x = 2x$

于是 $u = \int -2y\,dy + g(x) = -y^2 + g(x)$

又有 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = g'(x) = 2x \Rightarrow g(x) = x^2 + C \Rightarrow u = -y^2 + x^2 + C$

$$\text{故} v = u - (u - v) = x^2 - y^2 + c - (x^2 - y^2 - xy) = 2xy + C$$

$$\text{所以} f(z) = x^2 - y^2 + C + i(2xy + C)$$

$$\text{令} y = 0, \text{得} f(x) = x^2 + C + iC$$

$$\text{即} f(z) = z^2 + C(1 + i)$$

# 内 容 小 结

1. 解析函数的概念;

2. 函数解析性与可导性的判别

3. 初等函数中的多值函数及主值的概念

4、已知调和函数求解析 函数

# 思考与练习

已知 $v(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x},\ \ x>0$

求解析函数 $f(z)=u+iv$, 使得 $f(1)=0$

解答： 因为 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

即$v(x,y)$满足 *Laplace* 方程, 所以, $v(x,y)$是调和函数

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int-\frac{\partial v}{\partial x}dy=\int\frac{y}{x^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(x)$$

由 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}+g'(x) =\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

得 $g'(x)=0$

所以 $g(x)=C$($C$为任意常数)

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}+C$$

又由 $f(1)=0$, 则 $C=0$

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$$

$$=\ln|z|+i\arg z$$