华东理工大学 2008–2009 学年第一学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A　2009.1

开课学院：理学院 ，考试形式：闭卷 ，所需时间：120 分钟

考生姓名：__________学号：____________班级：_________任课教师 ：赵建丛

题序	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得分								
评卷人								

(本试卷共七道大题)

一、 **填空（每小题 4 分，共 32 分）**

1．已知 $z=(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i})^{10}$，则 $\mathrm{Im}(z)=$__________， $\arg z=$_________.

2．$(1+i)^i$ 的值为_____________________；主值为______________________.

3． $z=0$ 为函数 $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^8}$ 的______级极点；在该点处的留数为________.

4．函数 $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z=$______________处可导.

5． $w=f(z)$ 是 $\mathrm{Im}(z)>0$ 到 $|w|<1$ 的分式线性映射，且 $f(i)=0, f(-1)=1,$ 则

$f(z)=$___________

6.设函数 $f(t)=\begin{cases}4, & 0\le t\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)=$______________.

7.设 $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z}$，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=$_______， $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=$___________.

8.设 $z=x+iy$，则 $w=\frac{1}{z}$ 将圆周 $x^2+y^2=2$ 映射为___________.

二、**单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）**

1. 设 $z=\cos(\pi+5i)$，则 $\mathrm{Re}\,z$ 等于(　　　)

（A） $-\dfrac{e^{-5}+e^{5}}{2}$ （B） $\dfrac{e^{-5}+e^{5}}{2}$ （C） $\dfrac{e^{-5}-e^{5}}{2}$ （D） 0

2． $\oint_{|z|=3}\dfrac{dz}{z^{3}(z^{10}-2)}=$（ ）

（A）2πi （B） 0 （C）πi （D）3πi

3. $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt=$ ( ).

（A） $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^{2}}{s^{2}+1}$ （B） $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^{2}+1}{s^{2}}$ （C） $\dfrac{1}{2}\ln 2$ （D） 0

4. 由三对点： $f(1)=i, f(0)=-i, f(-1)=0$ 所确定的分式线性映射为（ ）

（A） $\dfrac{z+1}{3z+1}$ （B） $\dfrac{z+1}{3z-1}$ （C） $\dfrac{z+1}{3z+1}i$ （D） $\dfrac{z+1}{3z-1}i$

三.（8 分）已知调和函数 $u(x,y)=x^{2}-y^{2}+2xy$,求函数 $v(x,y)$,使函数

$f(z)=u+iv$ 在复平面上解析且满足 $f(i)=-1+i$.

四．计算下列积分（每题 **6** 分，共 **18** 分）

1． $\oint_{|z|=2} \dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\,\mathrm{d}z$

2． $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

3． $\int_{0}^{2\pi} \dfrac{1}{5+4\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

五.（**10** 分）指出函数 $f(z)=\dfrac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ 的有限孤立奇点，并在以这些孤立奇点为中心的圆环域内展开为 Laurent 级数.

六．**(10 分)**　利用 Laplace 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=1, & x(0)=0, \\ x(t)-y'(t)=t, & y(0)=1. \end{cases}$$

七．（**6** 分）设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，且 $f(0)=1$，证明：

$$\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]\frac{f(z)}{z}dz=(2\pm f'(0))2\pi i$$

华东理工大学 2008–2009 学年第一学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A 2009.1

二、 填空（每小题 **4** 分，共 **32** 分）

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$

2. $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})],\ k=0,\pm1,\cdots$, $e^{-\frac{\pi}{4}}[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})]$

3. 6, 0 4.（0，-1） 5. $\frac{z-i}{iz-1}$ 6. $F(\omega)=\frac{4}{i\omega}(1-e^{-2i\omega})$.

7. $-\frac{1}{3!},\frac{1}{3!}$ 8.圆周$|w|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

二、单项选择题（每小题 **4** 分，共 **16** 分）

A B C D

三.（8 分）已知调和函数 $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$,求函数 $v(x,y)$,使函数

$f(z)=u+iv$ 解析且满足 $f(i)=-1+i$.

解：(1) 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y=\frac{\partial v}{\partial y}$，有

$v=\int(2x+2y)\mathrm{d}y=2xy+y^2+\varphi(x)$，3 分

由 $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+2x=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2y-\varphi'(x)$，有 $\varphi'(x)=-2x$，2 分

$\Rightarrow\ \varphi(x)=\int(-2x)\mathrm{d}x=-x^2+c$， 2 分

即得 $v(x,y)=2xy+y^2-x^2+c$，

$f(z)=x^2-y^2+2xy+i(2xy+y^2-x^2+c)$；

(2) 由 $f(i)=-1+i\ \Rightarrow\ c=0$，

故 $v(x,y)=2xy+y^2-x^2$ 1 分.

四．计算下列积分（每题 6 分，共 18 分）

1． $\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$

解： 令 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$，在$|z|=2$内，函数 $f(z)$ 有两个奇点.

$z=0$ 为可去奇点， $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$，

$z=1$ 为一阶极点， $\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)=\left.\dfrac{\sin^2 z}{z^2}\right|_{z=1}=\sin^2 1$，

原式 $=2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1])=2\pi i\sin^2 1$.

2． $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+4}\mathrm{d}x$

解： 令 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+4}$，它在上半平面只有一个简单极点 $z=2i$，

$\mathrm{Res}[f(z),2i]=\left.\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{2z}\right|_{z=2i}=\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{4i}$，

原式 $=\mathrm{Re}(2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),2i])=\dfrac{\pi\mathrm{e}^{-2}}{2}=\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}^2}$.

3． $\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{5+4\sin\theta}\mathrm{d}\theta$

解： 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2iz}$， $\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，

原式 $=\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{\left(5+\dfrac{4(z^2-1)}{2iz}\right)}\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\dfrac{1}{2z^2+5iz-2}\mathrm{d}z$.

令 $f(z)=\dfrac{1}{2z^2+5iz-2}$，

可知它在$|z|=1$内只有一个一级极点 $z_0=-\dfrac{i}{2}$，

原式 $=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\dfrac{2\pi i}{4z+5i}\right|_{z=z_0}=\dfrac{2\pi}{3}$.

五.（10 分）将函数 $f(z)=\dfrac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ 在有限孤立奇点处展开为 Laurent 级数.

解： $f(z)$ 的有限孤立奇点为 $z_0=\frac{1}{2}$ 及 $z_1=1$

$$f(z)=\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}=\frac{1}{1-2z}+\frac{1}{1-z}$$ （2 分）

1）当 $0<\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ 时

$$f(z)=\frac{1}{-2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2}{1-2(z-\frac{1}{2})}$$

$$=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}+2\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-\frac{1}{2})^n$$ （2 分）

2）当 $\frac{1}{2}<\left|z-\frac{1}{2}\right|<+\infty$

$$f(z)=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}-\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})})}$$

$$=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}(z-\frac{1}{2})^{-n}$$ （2 分）

3）当 $0<|z-1|<\frac{1}{2}$

$$f(z)=\frac{1}{1-2z}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+2(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^n(z-1)^n$$ （2 分）

4）当 $\frac{1}{2}<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z(z-1)(1+\frac{1}{2(z-1)})}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(z-1)^{-n}$$ （2 分）

六、(10 分)利用 Laplace 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=1, & x(0)=0, \\ x(t)-y'(t)=t, & y(0)=1. \end{cases}$$

解：对方程两边取拉氏变换并代入初值得

$$\begin{cases} sX(s)+Y(s)=\frac{1}{s}, \\ X(s)-(sY(s)-1)=\frac{1}{s^2}. \end{cases}$$ （4 分）

求解得 $$\begin{cases} X(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}, \\ Y(s)=\frac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$ （3 分）

求拉氏逆变换得 $$\begin{cases} x(t)=t-\sin t, \\ y(t)=\cos t. \end{cases}$$ （3 分）

七．（6 分）　设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，在闭圆 $|z|\le 1$ 上连续，且 $f(0)=1$，

证明：$\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}=(2\pm f'(0))2\pi i$

证：由于 $\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}$

$$=\oint_{|z|=1}[\frac{2f(z)}{z}\pm\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}]dz$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}dz\pm\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}dz$$ （2 分）

$$=2\pi i\{2f(0)\pm[(z^2+1)f(z)]'\big|_{z=0}\}=2\pi i(2\pm f'(0))$$ （2 分）