

华东理工大学

复变函数与积分变换作业（第6册）

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第十一次作业

教学内容： 5.3 利用留数计算实积分 *5.4 辐角原理 7.1 Fourier 积分公式
7.2 Fourier 变换(带*号题目 2 学分的同学不做)

1. 计算下列积分：

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta}, 0 < b < a$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx, (a > 0, b > 0)$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+4x+5)^2}$$

*2 证明：方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在圆环域 $1 \leq |z| \leq 2$ 内.

*3 证明：当 $|a| > e$ 时，方程 $e^z - az^n = 0$ 在单位圆 $|z| = 1$ 内有 n 个根.

3、求下列函数的 Fourier 积分变换

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} -1 & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

4 求下列函数的 Fourier 变换，并证明所列的积分等式

$$(1) \quad f(t) = e^{-|t|} \cos t, \quad \text{证明} \int_0^{+\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 4} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|} \cos t$$

(2) $f(t) = e^{-\beta|t|} (\beta > 0)$, 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta|t|}$

第十二次作业

教学内容 : 7.3 δ 函数及其 Fourier 变换; 7.4 Fourier 变换的性质

1. 填空

(1) $f(t) = \frac{1}{2}[\delta(t+a) + \delta(t-a)]$ Fourier 变换为_____

(2) 函数 $F(\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ 的 Fourier 逆变换为_____

(3) $f(t) = \sin t \cos t$ Fourier 变换为_____

2. 若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 证明

$$\mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)];$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2i}[F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)].$$

3. 求下列函数的 Fourier 变换

(1) $f(t) = e^{2it} \sin t$

$$(2) \quad f(t) = \sin^2 t$$

$$(3) \quad f(t) = e^{i\omega_0 t} u(t)$$

$$(4) \quad f(t) = e^{-\beta t} u(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

4 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, a 为非零常数, 试证明

$$(1) \mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

$$(2) \mathcal{F}[f(t_0 - at)] = \frac{1}{|a|} F\left(-\frac{\omega}{a}\right) e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$$

5 已知 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, 利用 Fourier 变换的性质求下列函数的 Fourier 变换

$$(1) tf(t)$$

$$(2) (t-2)f(t)$$

(3) $tf'(t)$

(4) $f(1-t)$

6. 求函数 $f(t) = \sin(5t + \frac{\pi}{3})$ 的 Fourier 变换.

部分习题参考答案:

第十一次作业

$$1. (1) \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad (2) \frac{5}{12}\pi \quad (3) -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \quad (4) \frac{1}{2}\pi e^{-ab} \quad (5) \frac{\pi}{e}\cos 2$$

$$3. (1) -\frac{2i}{\omega}(1 - \cos \omega) \quad , \quad (2) \frac{1}{1 - i\omega}$$

$$4. (1) F(\omega) = \frac{2\omega^2 + 4}{\omega^4 + 4} \quad (2) F(\omega) = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

第十二次作业

$$3. (1) i\pi[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega - 3)]$$

$$(2) 2\pi\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)]$$

$$(3) \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$(4) \frac{\beta + i\omega}{(\beta + i\omega)^2 + \omega_0^2}$$

$$5. (2) -\frac{1}{i}F'(\omega) - 2F(\omega)$$

$$(3) -F(\omega) - \omega F'(\omega).$$

$$(4) e^{-i\omega}F(-\omega)$$

$$6. \frac{i\pi}{2}[\delta(\omega + 5) - \delta(\omega - 5)] + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi[\delta(\omega + 5) + \delta(\omega - 5)]$$