华东理工大学 2017－2018 学年第二学期

《 复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A 2018.6

开课学院：理学院 ，考试形式：闭卷 ，所需时间：120 分钟

考生姓名：__________学号：_____________班级：_________任课教师 ：_______

题序	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷								

(本试卷共七道大题)

积分变换表： $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$， $\mathcal{F}[1]=2\pi i\delta(\omega)$ $\mathcal{F}[t]=2\pi i\delta'(\omega)$

$\mathcal{F}[u(t)]=\dfrac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$ ，$\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$ ，$\mathcal{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$，$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ ，$\mathcal{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}$，$\mathcal{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$ ］$\mathcal{L}[t^m]=\dfrac{1}{s^{m+1}}$，

一．填空（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\mathrm{Re}(z)=\ln\sqrt{7}$ 2 64 3. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 4. -1 5. $-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{2}$

6. $\mathcal{F}[f(t)]=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}=\dfrac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{i\omega}$

二、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）ADDB

三、计算下列积分（每小题 6 分，共 24 分）

1.．求 $\int_C(\mathrm{i}-\bar{z})dz$，其中 C 为从原点到 $1+\mathrm{i}$ 的直线段 ．

解 （1）C 的参数方程为 $z=t(1+i)$，

于是 $\int_C(\mathrm{i}-\bar{z})dz=\int_0^1(i-t+it)(1+i)dt$

$=-2+i$ 1 分

2. $\oint_C \frac{e^z}{z^2-1}dz \quad C:|z|=2$ 正向。

解： $f(z)$ 在 $C:|z|=2$ 内有两个一级极点 $z=\pm 1$

$\operatorname{Res}[f(z),1]=\frac{e^z}{2z}\Big|_{z=1}=\frac{e}{2}$ 2 分

$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\frac{e^z}{2z}\Big|_{z=-1}=-\frac{e^{-1}}{2}$ 2 分

由留数定理 $\oint_C \frac{e^z}{z^2-1}dz=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),1]+\operatorname{Res}[f(z),-1]=\pi i(e-e^{-1})$ 2 分

3. 计算积分 $\oint_{|z|=3}\frac{z^{17}}{(z^2-1)^5(z^4-2)^2}dz.$

解： $\oint_{|z|=3}\frac{z^{17}}{(z^2-1)^5(z^4-2)^2}dz.$

$=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty] \quad =2\pi i\operatorname{Res}[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$

$=2\pi i\operatorname{Res}[\frac{1}{z(1-z^2)^5(1-2z^4)^2},0]$

$=2\pi i.$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+2}{x^4+5x^2+4}dx$；

令 $f(z)=\frac{z+2}{z^4+5z^2+4}$ 则 $f(z)$ 在上半平面有两个一级极点 $z_1=i, z_2=2i$ 1 分

$\operatorname{Res}[f(z),z_1]=\frac{z+2}{(z^4+5z^2+4)'}\Big|_{z_1=i}=-\frac{1}{6}(2i-1)$

$\operatorname{Res}[f(z),z_2]=\frac{z+2}{(z^4+5z^2+4)'}\Big|_{z=2i}=-\frac{i-1}{6}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+2}{x^4+5x^2+4}dx=2\pi i[-\frac{1}{7}(2i-1)+\frac{i-1}{2}]=-\frac{\pi(3+i)}{3}$

四、（10 分）设 $u=e^{-x}\sin y$ 为调和函数，求 $\boldsymbol{v}$ 使函数 $f(z)=u+iv$ 在复平面上解析.

解：因 $u_x=-e^{-x}\sin y,$, $u_y=e^{-x}\cos y$，，

要使 $f(z)$ 解析，则有

$$u_x=v_y\,,\qquad u_y=-v_x$$

$$v(x,y)=-\int u_y dx=-\int e^{-x}\cos y dx=e^{-x}\cos y+\psi(y)$$

$$v_y=-e^{-x}\sin y+\psi'(y)=-e^{-x}\sin y$$

所以 $\psi'(x)=0,\ \psi(x)=C$

即 $v(x,y)=e^{-x}\cos y+C$，故

$$f(z)=e^{-x}(\sin y+i\cos y)+C=ie^{-z}+C$$

五、（8 分）设 $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z-10}$，求 $f(z)$ 在 $0<|z|<2$ 及 $2<|z|<5$ 内的 Laurent 展开式。

解：$f(z)=\dfrac{2z+3}{(z-2)(z+5)}=\dfrac{1}{z-2}+\dfrac{1}{z+5}$

当 $0<|z|<2$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+5}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{5}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n\quad 0<|z|<2$$

当 $2<|z|<5$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z+5}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{5}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n \quad 2<|z|<5$$

六（**6 分**）．求把单位圆$|z|<1$映射成单位圆$|w|<1$的分式线性映射$w=f(z)$，并满足条件：

(2) $f(\frac{1}{2})=0, \qquad \arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$.

解：由于$f(\frac{1}{2})=0$，

则可令$f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=e^{i\theta}\dfrac{2z-1}{2-z}$

$f'(z)=e^{i\theta}\dfrac{3}{(z-2)^2}$，$f'(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}e^{i\theta}$

所以　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$f(z)==i\dfrac{2z-1}{2-z}$.

七、（12 分）（1）求函数 $F(s)=\dfrac{7s+5}{s(s+2)(s+3)}$ 的拉氏逆变换

（2）利用拉氏变换的性质计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-2t}dt$

(3)利用拉氏变换求解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y''-6y'+9y=e^{3t} \\ y(0)=0, y'(0)=0. \end{cases}$

解：（1）解：$\dfrac{7s+5}{s(s+2)(s+3)}=\dfrac{5}{6s}+\dfrac{9}{2(s+2)}-\dfrac{16}{3(s+3)}$

$\mathscr{L}^{-1}[\frac{5}{6s}]=\frac{5}{6}$，$\mathscr{L}^{-1}[\frac{9}{2(s+2)}]=\frac{9}{2}e^{-2t}$，$\mathscr{L}^{-1}[-\frac{16}{3(s+3)}]=-\frac{16}{3}e^{-3t}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)}\right]=\frac{5}{6}+\frac{9}{2}e^{-2t}-\frac{16}{3}e^{-3t}$$

（2） $$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}e^{-2t}dt=\int_0^{\infty}\mathrm{L}\left[(1-\cos t)e^{-2t}\right]ds$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right)ds$$

$$=\ln\frac{s+2}{\sqrt{(s+2)^2+1}}\Big|_0^{\infty}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$$

（3） 令$Y(s)=\mathrm{L}\left[y(t)\right]$，在方程两端取拉氏变换，并代入初始条件，将

$$s^2Y(s)-6sY(s)+9Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s-3)^3}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-3)^3},3\right]=\frac{1}{2}t^2e^{3t}$$