第四章 弯曲内力
(Internal forces in beams)

§ 4-1 基本概念及工程
(Basic concepts and example problems)

一、 工程实例(Example problem)

工程实例(Example problem)

弯曲内力(Internal forces in beams)

二、基本概念(Basic concepts)

1. 弯曲变形(Deflection)

（1） 受力特征

外力（包括力偶）的作用线垂直于杆轴线.

（2） 变形特征

变形前为直线的轴线,变形后成为曲线.

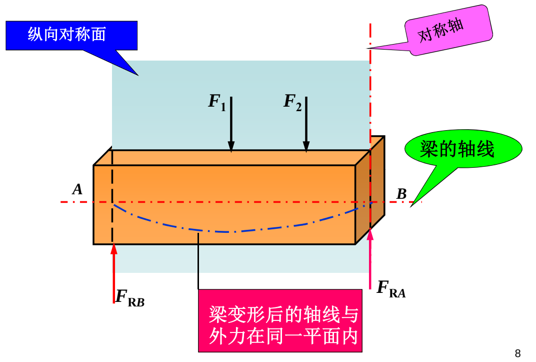
2. 梁 (Beam)

以弯曲变形为主的杆件

3. 平面弯曲(Plane bending)

作用于梁上的所有外力都在纵向对称面内, 弯曲变形后的轴线是一条在该纵向对称面内的平面曲线, 这种弯曲称为平面弯曲.

弯曲内力(Internal forces in beams)



8

弯曲内力(Internal forces in beams)

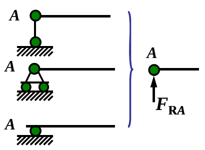
4. 梁的力学模型的简化(Representing a real structure by an idealized model)

（1） 梁的简化 通常取梁的轴线来代替梁

（2）载荷类型
- 集中力(concentrated force)
- 集中力偶(concentrated moment)
- 分布载荷(distributed load)

（3） 支座的类型

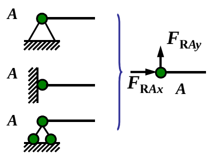
可动铰支座
(roller support)



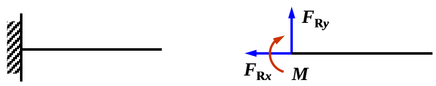
9

弯曲内力(Internal forces in beams)

固定铰支座(pin support)



固定端(clamped support or fixed end)

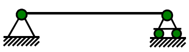


10

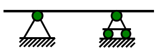
弯曲内力(Internal forces in beams)

5. 静定梁的基本形式 (Basic types of statically determinate beams)

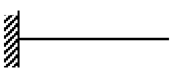
简支梁
(simply supported beam)



外伸梁
(overhanging beam)



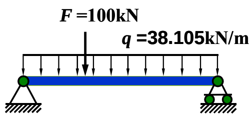
悬臂梁
(cantilever beam)



11

弯曲内力(Internal forces in beams)

起重机大梁为No.25a工字钢,如图所示,梁长L=10m,单位长度的重量为38.105kg/m,起吊重物的重量为100kN,试求起重机大梁的计算简图.



12

§4-2 梁的剪力和弯矩

(Shear- force and bending- moment in beams)

一、内力计算(Calculating internal force)

[举例] 已知 如图，F，a，l.

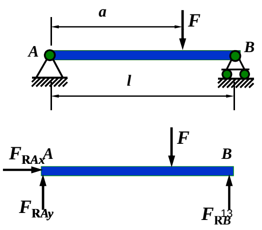
求距A端x处截面上内力.

解: 求支座反力

$$\sum F_x = 0\,,\quad F_{RAx} = 0$$

$$\sum M_A = 0\,,\quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_y = 0\,,\quad F_{RAy} = \frac{F(l-a)}{l}$$



求内力——截面法

$$\sum F_y = 0\,,\quad F_S = F_{RAy} = \frac{F(l-a)}{l}$$

$$\sum M_C = 0\,,\quad M = F_{RAy}\cdot x$$

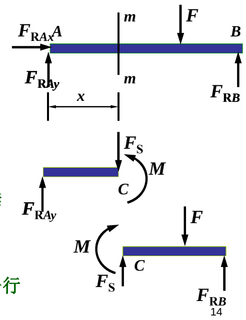
弯曲构件内力 $\begin{cases}\text{剪力}\\ \text{弯矩}\end{cases}$

1. 弯矩 (Bending moment) M

构件受弯时，横截面上其作用面垂直于截面的内力偶矩.

2. 剪力 (Shear force) F_S

构件受弯时，横截面上其作用线平行于截面的内力.



二、内力的符号规定

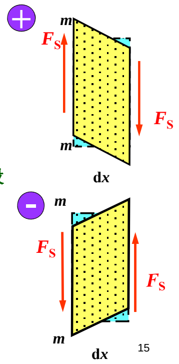
(Sign convention for internal force)

1. 剪力符号

(Sign convention for shear force)

使dx 微段有左端向上而右端向下的相对错动时,横截面m-m上的剪力为正.或使dx微段有顺时针转动趋势的剪力为正.

使dx微段有左端向下而右端向上的相对错动时, 横截面m-m上的剪力为负. 或使dx微段有逆时针转动趋势的剪力为负.

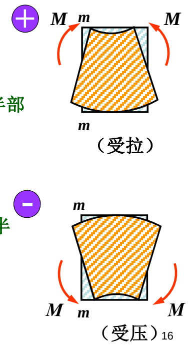


2. 弯矩符号

(Sign convention for bending moment)

当dx 微段的弯曲下凸（即该段的下半部受拉 ）时,横截面m-m上的弯矩为正;

当dx 微段的弯曲上凸（即该段的下半部受压）时,横截面m-m上的弯矩为负.



例题2 图示梁的计算简图.已知 F_1、F_2,且 $F_2 > F_1$,尺寸a、b、c和l亦均为已知.试求梁在 E 、 F 点处横截面处的剪力和弯矩.

解:（1）求梁的支反力 F_{RA} 和 F_{RB}

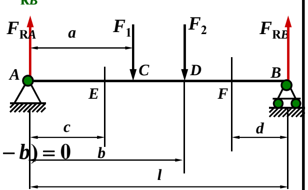
$$\sum M_A = 0$$

$$F_{RB}l - F_1 a - F_2 b = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-F_{RA}l + F_1(l-a) + F_2(l-b) = 0$$

$$F_{RA} = \frac{F_1(l-a)+F_2(l-b)}{l}\qquad F_{RB} = \frac{F_1 a + F_2 b}{l}$$



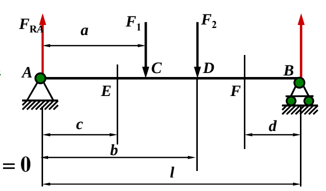
记 E 截面处的剪力为 F_{SE} 和弯矩 M_E，且假设 F_{SE} 和弯矩M_E 的指向和转向均为正值.

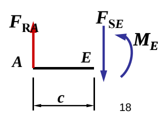
$$\sum F_y = 0,\quad F_{RA} - F_{SE} = 0$$

$$\sum M_E = 0,\quad M_E - F_{RA}\cdot c = 0$$

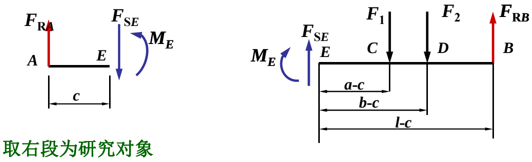
解得 $F_{SE} = F_{RA}$

$$M_E = F_{RA}\cdot c$$





弯曲内力(Internal forces in beams)



取右段为研究对象

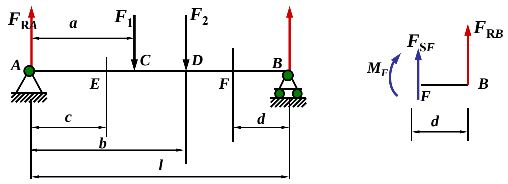
$$\sum F_y = 0 \quad F_{SE} + F_{RB} - F_1 - F_2 = 0$$

$$\sum M_E = 0 \quad F_{RB}(l-c) - F_1(a-c) - F_2(b-c) - M_E = 0$$

解得 $F_{SE} = F_{RA}$ ⊕

$M_E = F_{RA} \cdot c$ ⊕

弯曲内力(Internal forces in beams)



计算F点横截面处的剪力F_{SF}和弯矩M_F.

$\sum F_y = 0, \quad F_{SF} + F_{RB} = 0$

$\sum M_F = 0, \quad -M_F + F_{RB}d = 0$

解得: $F_{SF} = -F_{RB}$ ⊖

$M_F = F_{RB}d$ ⊕

弯曲内力(Internal forces in beams)

三、计算规律 (Simple method for calculating shear-force and bending-moment)

1. 剪力 (Shear force)

$$F_S = \sum_{i=1\text{左（右）}}^{n} F_i$$

左侧 梁段：向上的外力引起正值的剪力
向下的外力引起负值的剪力

右侧 梁段：向下的外力引起正值的剪力
向上的外力引起负值的剪力

弯曲内力(Internal forces in beams)

2. 弯矩(Bending moment)

$$M = \sum_{i=1\text{左（右）}}^{n} F_i a_i + \sum_{k=1\text{左（右）}}^{m} M_k$$

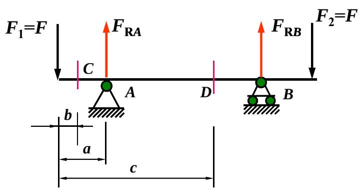
不论在截面的左侧或右侧向上的外力均将引起正值的弯矩，而向下的外力则引起负值的弯矩.

左侧梁段 顺时针转向的外力偶引起正值的弯矩
逆时针转向的外力偶引起负值的弯矩

右侧梁段 逆时针转向的外力偶引起正值的弯矩
顺时针转向的外力偶引起负值的弯矩

弯曲内力(Internal forces in beams)

例题3 轴的计例算简图如图所示，已知 $F_1 = F_2 = F = 60\text{kN}$，$a = 230\text{mm}$，$b = 100\text{ mm}$ 和$c = 1000\text{ mm}$. 求 C 、D 点处横截面上的剪力和弯矩.



解：（1）求支座反力

$$F_{RA} = F_{RB} = F = 60\text{kN}$$

弯曲内力(Internal forces in beams)

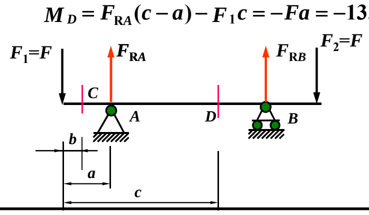
（2）计算C 横截面上的剪力F_{SC}和弯矩 M_C

看左侧 $F_{SC} = -F_1 = -60\text{kN} \quad M_C = -F_1 b = -6.0\text{kN}\cdot\text{m}$

（3）计算D横截面上的剪力F_{SD}和弯矩 M_D

看左侧 $F_{SD} = F_{RA} - F_1 = 60 - 60 = 0$

$$M_D = F_{RA}(c-a) - F_1 c = -Fa = -13.8\text{kN}\cdot\text{m}$$



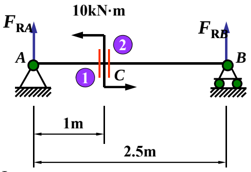
弯曲内力(Internal forces in beams)

例题4 求图示梁中指定截面上的剪力和弯矩.

解:

（1）求支座反力

F_{RA}=4kN F_{RB}=-4kN

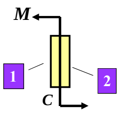


（2）求1-1截面的内力

$$F_{S1}=F_{SC左}=F_{RA}=4\text{kN}$$

$$M_1=M_{C左}=F_{RA}\times 1=4\text{kN}\cdot\text{m}$$

（3）求2-2截面的内力



$$F_{S2}=F_{SC右}=-F_{RB}=-(-4)=4\text{kN}$$

$$M_2=M_{C右}=F_{RB}\times(2.5-1)=(-4)\times1.5=-6\text{kN}\cdot\text{m}$$

25

弯曲内力(Internal forces in beams)

§ 4-3 剪力方程和弯矩方程·剪力图和弯矩图 (Shear- force & bending-moment equations; shear-force&bending-moment diagrams)

一、剪力方程和弯矩方程 (Shear- force & bending-moment equations)

用函数关系表示沿梁轴线各横截面上剪力和弯矩的变化规律，分别称作剪力方程和弯矩方程.

1. 剪力方程(Shear- force equation) $F_S=F_S(x)$

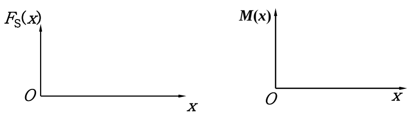
2. 弯矩方程(Bending-moment equation) $M=M(x)$

26

弯曲内力(Internal forces in beams)

二、剪力图和弯矩图 (Shear-force&bending-moment diagrams)

以平行于梁轴的横坐标x表示横截面的位置,以纵坐标表示相应截面上的剪力和弯矩.这种图线分别称为剪力图和弯矩图



F_S 图的坐标系 M 图的坐标系

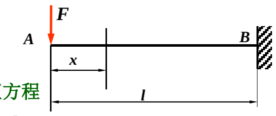
剪力图为正值画在 x 轴上侧,负值画在 x 轴下侧

弯矩图为正值画在 x 轴上侧,负值画在 x 轴下侧

27

弯曲内力(Internal forces in beams)

例题5 如图所示的悬臂梁在自由端受集中荷载 F 作用, 试作此梁的剪力图和弯矩图.



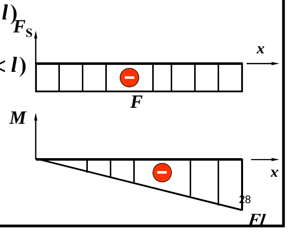
解: 列出梁的剪力方程 和弯矩方程

$$F_S(x)=-F \quad (0<x<l)$$

$$M(x)=-Fx \quad (0\le x<l)$$

$$F_{SA左}=0$$

$$F_{SA右}=-F$$



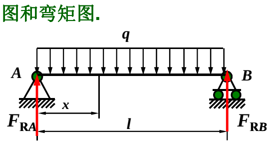
28

弯曲内力(Internal forces in beams)

例题6 图示的简支梁,在全梁上受集度为q的均布荷载用.试作此梁的剪力图和弯矩图.

解:

（1）求支反力



$$F_{RA}=F_{RB}=\frac{ql}{2}$$

（2）列剪力方程和弯矩方程.

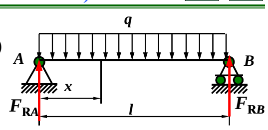
$$F_S(x)=F_{RA}-qx=\frac{ql}{2}-qx \qquad (0<x<l)$$

$$M(x)=F_{RA}x-qx\cdot\frac{x}{2}=\frac{qlx}{2}-\frac{qx^2}{2} \qquad (0\le x\le l)$$

29

弯曲内力(Internal forces in beams)

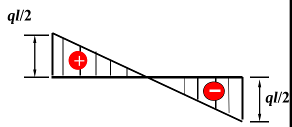
$$F_S(x)=\frac{ql}{2}-qx \quad (0<x<l)$$



剪力图为一倾斜直线

x=0 处， $F_S=\frac{ql}{2}$

x= l 处， $F_S=-\frac{ql}{2}$



绘出剪力图

30

弯曲内力(Internal forces in beams)

$$M(x)=F_{RA}x-qx\cdot\frac{x}{2}=\frac{qlx}{2}-\frac{qx^2}{2}\quad(0\le x\le l)$$

弯矩图为一条二次抛物线

$x=0,\quad M=0$

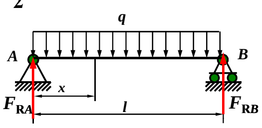
$x=l,\quad M=0$

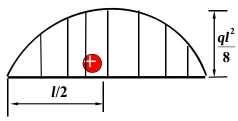
令 $\dfrac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{ql}{2}-qx=0$

得驻点 $x=\dfrac{l}{2}$

弯矩的极值 $M_{\max}=M_{x=\frac{l}{2}}=\dfrac{ql^2}{8}$

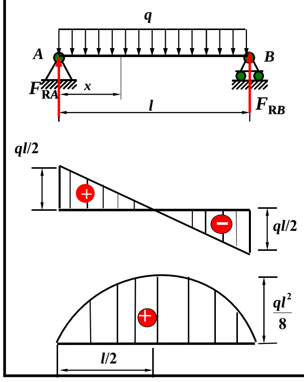
绘出弯矩图





31

弯曲内力(Internal forces in beams)



由图可见，此梁在跨中截面上的弯矩值为最大

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}$$

但此截面上 $F_S=0$

两支座内侧横截面上剪力绝对值为最大

$$F_{S\max}=\frac{ql}{2}$$

32

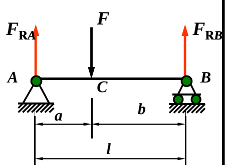
弯曲内力(Internal forces in beams)

例题7 图示的简支梁在C点处受集中荷载 F 作用.

试作此梁的剪力图和弯矩图.

解:（1）求梁的支反力

$$F_{RA}=\frac{Fb}{l}\qquad F_{RB}=\frac{Fa}{l}$$



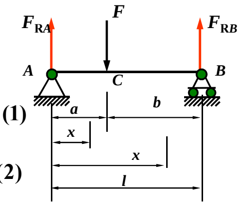
因为AC段和CB段的内力方程不同，所以必须分段列剪力方程和弯矩方程.

将坐标原点取在梁的左端

33

弯曲内力(Internal forces in beams)

将坐标原点取在梁的左端



AC段

$$F_S(x)=\frac{Fb}{l}\quad(0<x<a)\qquad(1)$$

$$M(x)=\frac{Fb}{l}x\quad(0\le x\le a)\qquad(2)$$

CB段

$$F_S(x)=\frac{Fb}{l}-F=-\frac{F(l-b)}{l}=-\frac{Fa}{l}\quad(a<x<l)\qquad(3)$$

$$M(x)=\frac{Fb}{l}x-F(x-a)=\frac{Fa}{l}(l-x)\quad(a\le x\le l)\qquad(4)$$

34

弯曲内力(Internal forces in beams)

$$F_S(x)=\frac{Fb}{l}\quad(0<x<a)\quad(1)$$

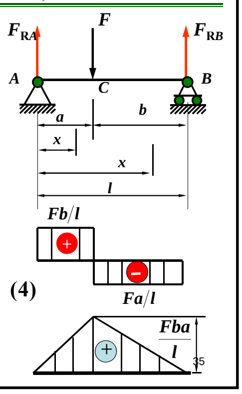
$$F_S(x)=-\frac{Fa}{l}\quad(a<x<l)\quad(3)$$

由（1），（3）两式可知，AC、CB两段梁的剪力图各是一条平行于 x 轴的直线.

$$M(x)=\frac{Fb}{l}x\quad(0\le x\le a)\quad(2)$$

$$M(x)=\frac{Fa}{l}(l-x)\quad(a\le x\le l)\quad(4)$$

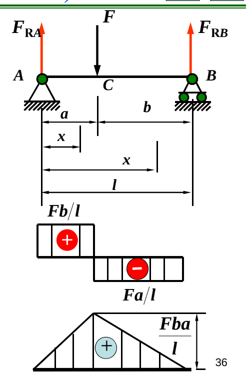
由（2），（4）式可知，AC、CB 两段梁的弯矩图各是一条斜直线.



35

弯曲内力(Internal forces in beams)

在集中荷载作用处的左,右两侧截面上剪力值(图)有突变,突变值等于集中荷载F. 弯矩图形成尖角,该处弯矩值最大.

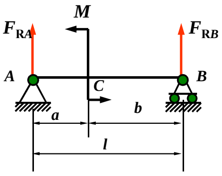


36

例题8 图示的简支梁在 C点处受矩为M的集中力偶作用.试作此梁的的剪力图和弯矩图.

解：求梁的支反力

$$F_{RA}=\frac{M}{l} \qquad F_{RB}=\frac{M}{l}$$

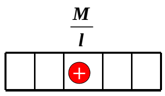


将坐标原点取在梁的左端.

因为梁上没有横向外力，所以全梁只有一个剪力方程

$$F_S(x)=\frac{M}{l} \quad (0<x<l) \quad (1)$$

由(1)式画出整个梁的剪力图是一条平行于 x 轴的直线.



AC 段和 BC 段的弯矩方程不同

AC段

$$M(x)=\frac{M}{l}x \quad (0\le x<a)$$

CB段

$$M(x)=\frac{M}{l}x-M=-\frac{M}{l}(l-x) \quad (a<x\le l)$$

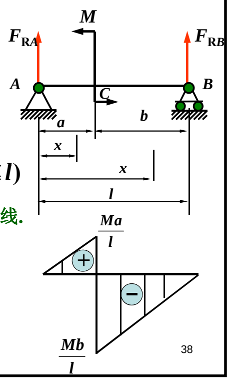
AC,CB 两梁段的弯矩图各是一条倾斜直线.

AC段 $x=0$， $M=0$

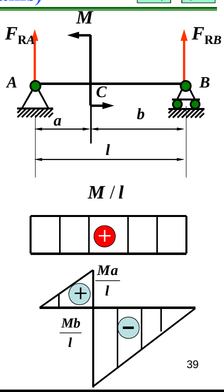
$x=a$， $M_{C左}=\frac{Ma}{l}$

CB段 $x=a$， $M_{C右}=-\frac{Mb}{l}$

$x=l$， $M=0$



梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩值(图)发生突变，其突变值等于集中力偶矩的数值. 此处剪力图没有变化.



小 结

1.取梁的左端点为坐标原点,x 轴向右为正:剪力图向上为正;弯矩图向上为正.

2.以集中力、集中力偶作用处、分布荷载开始或结束处,及支座截面处为界点将梁分段.分段写出剪力方程和弯矩方程,然后绘出剪力图和弯矩图.

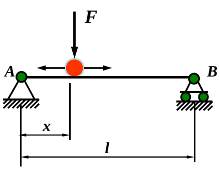
3.梁上集中力作用处左、右两侧横截面上,剪力（图）有突变,突变值等于集中力的数值. 在此处弯矩图则形成一个尖角.

4. 梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩（图）有突变, 其突变值等于集中力偶矩的数值. 但在此处剪力图没有变化.

5.梁上的F_{Smax}发生在全梁或各梁段的边界截面处;梁上的M_{max}发生在全梁或各梁段的边界截面,或$F_S=0$ 的截面处.

例题9 一简支梁受移动荷载 F 的作用如图所示.试求梁的最大弯矩为极大时荷载 F 的位置.

解 :先设F 在距左支座 A 为 x 的任意位置.求此情况下梁的最大弯矩为极大.



荷载在任意位置时，支反力为

$$F_{RA}=\frac{F(l-x)}{l} \qquad F_{RB}=\frac{Fx}{l}$$

当荷载 F 在距左支座为 x 的任意位置 C 时，梁的弯矩为

$$M_C=F_{RA}x=\frac{F(l-x)}{l}x$$

令 $\frac{\mathrm{d}M_C}{\mathrm{d}x}=0$ $\quad \frac{F}{l}-(l-2x)=0 \quad x=\frac{l}{2}$

此结果说明，当移动荷载 F 在简支梁的跨中时，梁的最大弯矩为极大.

将 $x=\frac{l}{2}$ 代入式

$$M_C=F_{RA}x=\frac{F(l-x)}{l}x$$

得最大弯矩值

$$M_{\max}=\frac{1}{4}Fl$$

§4-4 剪力、弯矩与分布荷载集度间的关系 (Relationships between load,shear force,and bending moment)

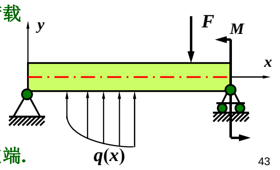
一、弯矩、剪力与分布荷载集度间的微分关系 (Differential relationships between load,shear force,and bending moment)

设梁上作用有任意分布荷载

其集度 $q = q(x)$

规定 $q(x)$向上为正.

将 x 轴的坐标原点取在梁的左端.

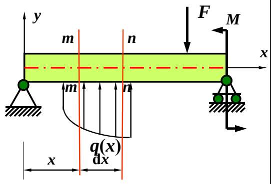


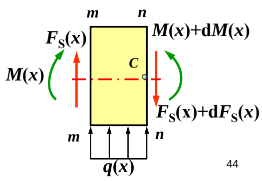
假想地用坐标为 x 和 x+dx的两横截面m-m和n-n从梁中取出dx 微段.

m-m截面上内力为 $F_S(x)$,$M(x)$

x+dx 截面处 则分别为 $F_S(x)+dF_S(x)$， $M(x)+dM(x)$.

由于dx很小，略去$q(x)$沿dx的变化.





写出微段梁的平衡方程

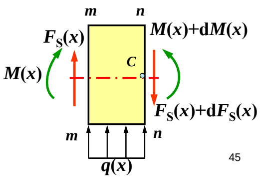
$$\sum F_x = 0 \qquad F_S(x) - [F_S(x) + dF_S(x)] + q(x)dx = 0$$

$$\sum M_C = 0 \qquad \text{得到} \quad \frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$[M(x) + dM(x)] - M(x) - F_S(x)\,dx - q(x)dx\frac{dx}{2} = 0$$

略去二阶无穷小量即得

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$



$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

公式的几何意义

（1）剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小;

（2）弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小;

（3）根据$q(x)>0$或$q(x)<0$来判断弯矩图的凹凸性.

二、$q(x)$、$F_S(x)$图、$M(x)$图三者间的关系 (Relationships between load,shear force,and bending moment diagrams)

1. 梁上有向下的均布荷载, 即 $q(x) < 0$

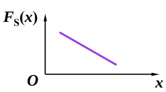
$F_S(x)$图为一向右下方倾斜的直线.

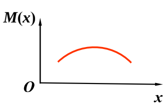
$M(x)$图为一向上凸的二次抛物线.

$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$





2. 梁上无荷载区段，$q(x) = 0$

剪力图为一条水平直线.

弯矩图为一斜直线.

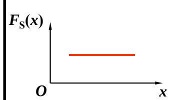
当 $F_S(x) > 0$ 时,向右上方倾斜.

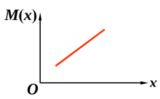
当 $F_S(x) < 0$ 时,向右下方倾斜.

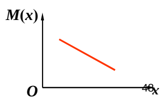
$$\frac{dF_S(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$







弯曲内力(Internal forces in beams)

3. 在集中力作用处剪力图有突变,其突变值等于集中力的值.弯矩图有转折.

4. 在集中力偶作用处弯矩图有突变，其突变值等于集中力偶的值，但剪力图无变化.

5. 最大剪力可能发生在集中力所在截面的一侧;或分布载荷发生变化的区段上.

梁上最大弯矩 M_{max}可能发生在$F_S(x)$ = 0 的截面上; 或发生在集中力所在的截面上;或集中力偶作用处的一侧.

$$\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx}=F_S(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2}=q(x)$$

49

弯曲内力(Internal forces in beams)

表 4-1 在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 $q<0$	无荷载	集中力 F C	集中力偶 M C
剪力图的特征	向下倾斜的直线	水平直线	在C处有突变 F	在C处无变化 C
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线	一般斜直线 或	在C处有转折	在C处有突变 M
M_{max}所在截面的可能位置	在F_S=0的截面		在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

50

弯曲内力(Internal forces in beams)

三、分布荷载集度、剪力和弯矩之间的积分关系

(Integral relationships between load, shear force, and bending moment)

$$\frac{dF_S(x)}{dx}=q(x)$$

若在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面无集中力则

$$\int_{x_1}^{x_2}dF_S(x)=\int_{x_1}^{x_2}q(x)dx$$

$$F_S(x_2)-F_S(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}q(x)dx$$

$$F_S(x_2)-F_S(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}q(x)dx$$

51

弯曲内力(Internal forces in beams)

$$F_S(x_2)-F_S(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}q(x)dx$$

式中，$F_S(x_1)$ $F_S(x_2)$分别为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面上的剪力.

等号右边积分的几何意义是x_1 , x_2两横截面间分布荷载图的面积.

$$\frac{dM(x)}{dx}=F_S(x)$$

若横截面$x=x_1$，$x=x_2$ 间无集中力偶作用则得

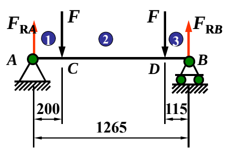
$$M(x_2)-M(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}F_S(x)dx$$

式中 $M(x_1)$，$M(x_2)$分别为在$x=x_1$ 和 $x=x_2$处两个横截面上的弯矩.

等号右边积分的几何意义是 x_1 , x_2两个横截面间剪力图的面积.52

弯曲内力(Internal forces in beams)

例题10 一简支梁受两个力F作用,如图所示.已知 F= 25.3kN, 有关尺寸如图所示.试用本节所述关系作剪力图和弯矩图.



解：（1）求梁的支反力

$$F_{RA}=23.6\text{kN}\quad F_{RB}=27\text{ kN}$$

将梁分为 AC、CD、DB 三段.
每一段梁均属无载荷区段.

（2）剪力图

每段梁的剪力图均为水平直线

AC段 $F_{SA右}=F_{RA}=23.6\text{kN}$

53

弯曲内力(Internal forces in beams)

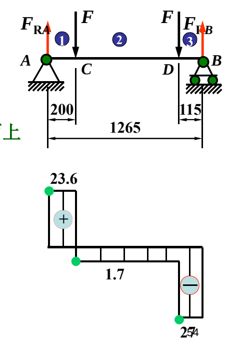
CD段 $F_{SC右}=F_{RA}-F=-1.7\text{kN}$

DB段 $F_{SD右}=-F_{RB}=-27\text{kN}$

$F_{SB右}=0\text{kN}$

最大剪力发生在DB段中的任一横截面上

$$F_{Smax}=27\text{kN}$$

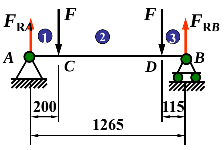


54

弯曲内力(Internal forces in beams)

（3）弯矩图

每段梁的弯矩图均为斜直线. 且梁上无集中力偶.

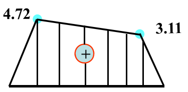


$M_A = 0$

$M_C = F_{RA} \times 0.2 = 4.72\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_D = F_{RB} \times 0.115 = 3.11\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_B = 0$



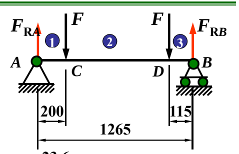
最大弯矩发生在 *C* 截面

$M_{\max} = 4.72\text{kN}\cdot\text{m}$

弯曲内力(Internal forces in beams)

（4）对图形进行校核

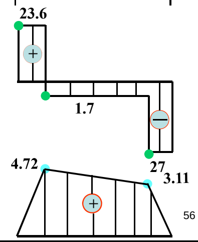
在集中力作用的*C*,*D* 两点剪力图发生突变,突变值*F*=25.3kN.而弯矩图有尖角.



在*AC*段剪力为正值，弯矩图为向上倾斜的直线.

在*CD*和*DB*段，剪力为负值，弯矩图为向下倾斜的直线.

最大弯矩发生在剪力改变正、负号的 *C*截面处.说明剪力图和弯矩图是正确的.

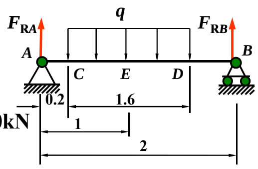


弯曲内力(Internal forces in beams)

例题11　一简支梁受均布荷载作用，其集度 *q*=100kN/m ,如图 所示.试用简易法作此梁的剪力图和弯矩图.

解:

（1） 计算梁的支反力



$F_{RA} = F_{RB} = 0.5 \times 100 \times 1.6 = 80\text{kN}$

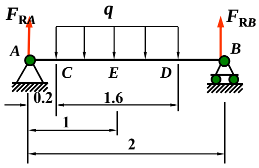
将梁分为 *AC*、*CD*、*DB* 三段. *AC*和*DB*上无荷载，*CD* 段有向下的均布荷载.

弯曲内力(Internal forces in beams)

（2）剪力图

*AC*段 水平直线

$F_{SA右} = F_{RA} = 80\text{kN}$



*CD*段 向右下方的斜直线

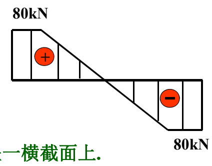
$F_{SC} = F_{RA} = 80\text{kN}$

$F_{SD} = -F_{RB} = -80\text{kN}$

*DB*段 水平直线

$F_{SB左} = -F_{RB} = -80\text{kN}$

$F_{SB右} = 0\text{kN}$



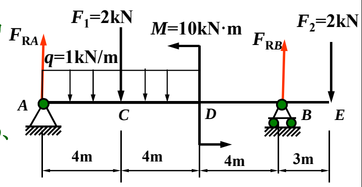
最大剪力发生在 *AC* 和 *DB* 段的任一横截面上.

$F_{S\max} = 80\text{kN}$

弯曲内力(Internal forces in beams)

例题12　作梁的内力图.

解: （1）支座反力为



$F_{RA} = 7\text{kN}$

$F_{RB} = 5\text{kN}$

将梁分为*AC*、*CD*、*DB*、*BE* 四段.

（2）剪力图

*AC*段 向下斜的直线(↘)

$F_{SA右} = F_{RA} = 7\text{kN}$　$F_{SC左} = F_{RA} - 4q = 3\text{kN}$

*CD*段 向下斜的直线 (↘)

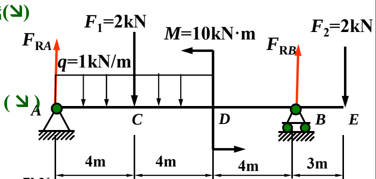
$F_{SC右} = F_{RA} - 4q - F_1 = 1\text{kN}$　$F_{SD} = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$

弯曲内力(Internal forces in beams)

*AC*段 向下斜的直线(↘)

$F_{SA右} = 7\text{kN}$

$F_{SC左} = 3\text{kN}$



*CD*段 向下斜的直线 (↘)

$F_{SC右} = 1\text{kN}$

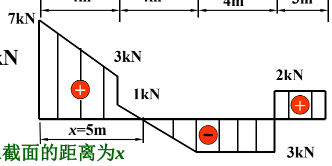
$F_{SD} = -3\text{kN}$

*DB*段 水平直线 (-)

$F_S = F_2 - F_{RB} = -3\text{kN}$

*EB*段 水平直线 (-)

$F_{SB右} = F_2 = 2\text{kN}$



*F*点剪力为零,令其距 *A*截面的距离为*x*

$F_{Sx} = F_{RA} - qx - F_1 = 0$　$x = 5\text{m}$

弯曲内力(Internal forces in beams)

（3）弯矩图

AC段 $M_A = 0$

$M_C = 4F_{RA} - \frac{q}{2}4^2 = 20$

CD段

$M_{D左} = -7F_2 + 4F_{RB} + M = 16$

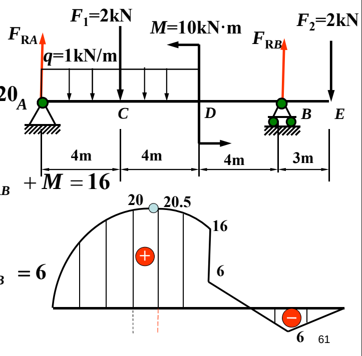
$M_{max} = M_F = 20.5$

DB段

$M_{D右} = -7F_2 + 4F_{RB} = 6$

$M_B = -3F_2 = -6$

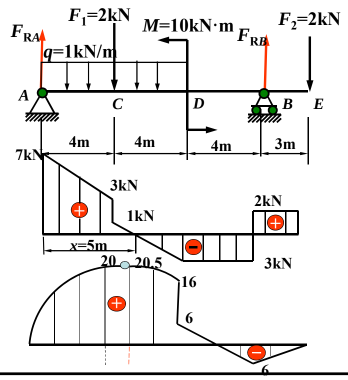
BE段 $M_E = 0$



61

弯曲内力(Internal forces in beams)

（4）校核



62

弯曲内力(Internal forces in beams)

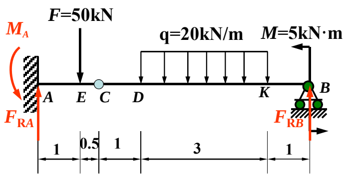
例题13 用简易法作组合梁的剪力图和弯矩图.

解： 支座反力为

F_{RA}= 81 kN

F_{RB}= 29 kN

M_A= 96.5 kN·m



将梁分为 AE，EC，CD，DK，KB 五段。

63

弯曲内力(Internal forces in beams)

(1) 剪力图

AE段 水平直线

$F_{SA右} = F_{SE左} = F_{RA} = 81$kN

ED 段 水平直线

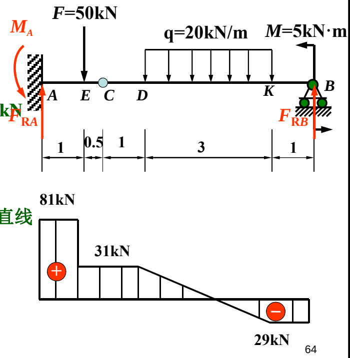
$F_{SE右} = F_{RA} - F = 31$kN

DK 段 向右下方倾斜的直线

$F_{SK} = -F_{RB} = -29$kN

KB 段 水平直线

$F_{SB左} = -F_{RB} = -29$ kN



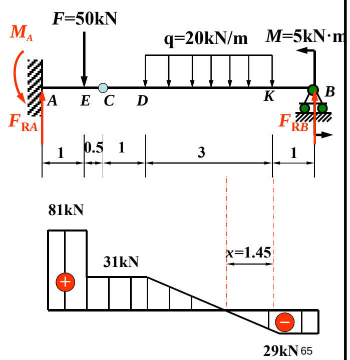
64

弯曲内力(Internal forces in beams)

设距K截面为 x 的截面上剪力 $F_S = 0$.即

$$F_{Sx} = -F_{RB} + qx = 0$$

$$x = \frac{F_{RB}}{q} = 1.45\text{m}$$



65

弯曲内力(Internal forces in beams)

（2）弯矩图

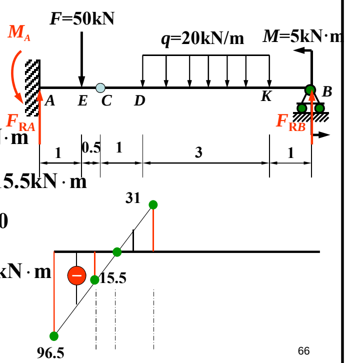
AE，EC，CD 梁段均为向上倾斜的直线

$M_{A右} = -M_A = -96.5$kN·m

$M_E = M_A + 81\times1 = -15.5$kN·m

$M_C = M_E + 31\times0.5 = 0$

$M_D = M_C + 31\times1 = 31$kN·m



66

弯曲内力(Internal forces in beams)

*DK*段 向上凸的二次抛物线

$M_K = F_{RB} \times 1 + M =$

$29 \times 1 + 5 = 34\text{kN}\cdot\text{m}$

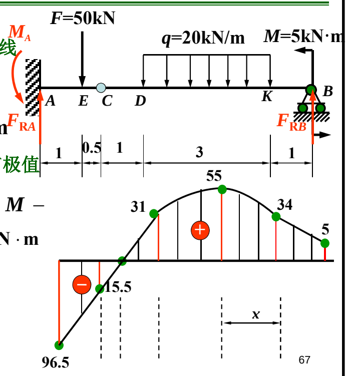
在 $F_S = 0$ 的截面上弯矩有极值

$M_{max} = F_{RB} \times 2.45 + M - \frac{q}{2} \times 1.45^2 = 55\text{kN}\cdot\text{m}$

KB 段 向下倾斜的直线

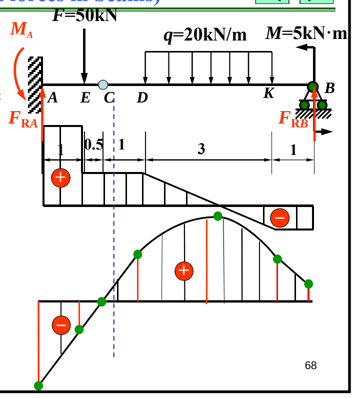
$M_{B左} = M = 5\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{B右} = 0$



弯曲内力(Internal forces in beams)

中间铰链传递剪力(铰链左,右两侧的剪力相等)；但不传递弯矩(铰链处弯矩必为零).



弯曲内力(Internal forces in beams)

例题14 已知简支梁的剪力图,作梁的弯矩图和荷载图.已知梁上没有集中力偶作用.

解: (1)画荷载图

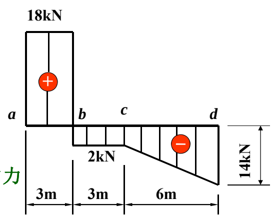
$$\frac{dF_S}{dx} = q(x)$$

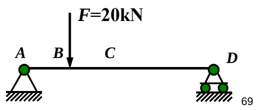
AB 段 没有荷载，在*B*处有集中力

$F_{SB左} = 18\text{kN}$

$F_{SB右} = -2\text{kN}$

所以 *F*=20kN 方向向下





弯曲内力(Internal forces in beams)

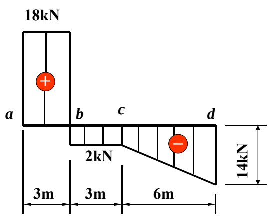
$$\frac{dF_S}{dx} = q(x)$$

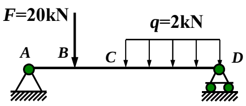
BC 段 无荷载

CD 段 有均布荷载 *q* (↓)

$$F_{SD} - F_{SC} = \int_c^d q(x)dx = 6q$$

$$q = \frac{(-14)-(-2)}{6} = -2\text{kN/m}$$





弯曲内力(Internal forces in beams)

(2)弯矩图

$$\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$$

*AB*段 向右上倾斜的直线

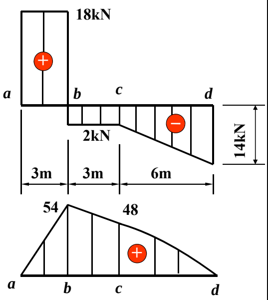
$$M_B = M_A + \int_a^b F_S(x)dx =$$

$$0 + 18 \times 3 = 54\text{kN}\cdot\text{m}$$

*BC*段 向右下倾斜的直线.

$$M_C = M_B + \int_b^c F_S(x)dx = 54 + (-2) \times 3 = 48 \ \text{kN}\cdot\text{m}$$

*CD*段 向上凸的二次抛物线.该段内弯矩没有极值. $M_d = 0$



弯曲内力(Internal forces in beams)

例题15 已知简支梁的弯矩图,作出梁的剪力图和荷载图.

解: (1) 作剪力图 $\frac{dM(x)}{dx} = F_S(x)$

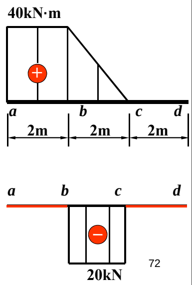
*AB*段 因为 *M*(*x*) = 常量,剪力图为水平直线,且 $F_S(x) = 0$.

*BC*段 $F_S(x)$ = 常量 , 剪力图为水平直线

$$M_C - M_B = \int_b^c F_S(x)dx = 2F_S$$

$$F_S = \frac{M_C - M_B}{2} = \frac{0-40}{2} = -20\text{kN}$$

*CD*段 剪力图为水平直线 且 $F_S(x) = 0$



弯曲内力(Internal forces in beams)

(2)作荷载图 $\dfrac{dF_S}{dx}=q(x)$

*AB*段 无荷载 在*A*处有集中力偶

$M_{A左}=0 \quad M_{A右}=40\text{kN}\cdot\text{m}$

M_e= 40kN·m ( ))

B 处有集中力. $F_{SB左}=0$

$F_{SB右}=-20\text{kN}$

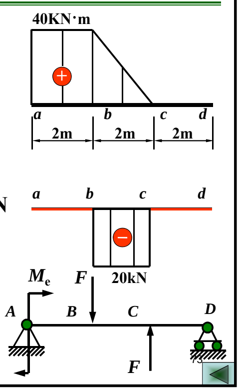
集中力 $F=20\text{kN}$ (↓)

*BC*段 无荷载 *C*处有集中力

$F_{SB左}=-20\text{kN} \quad F_{SB右}=0$

集中力 $F=20\text{kN}$ (↑)

*CD*段 无荷载



弯曲内力(Internal forces in beams)

§4-5 按叠加原理作弯矩图

(Drawing bending-moment diagram by superposition method)

一、叠加原理 (Superposition principle)

多个载荷同时作用于结构而引起的内力等于每个载荷单独作用于结构而引起的内力的代数和.

$$F_S(F_1,F_2,\cdots,F_n)=F_{S1}(F_1)+F_{S1}(F_2)+\cdots+F_{Sn}(F_n)$$

$$M(F_1,F_2,\cdots,F_n)=M_1(F_1)+M_2(F_2)+\cdots+M_n(F_n)$$

二、适用条件 (Application condition)

所求参数(内力、应力、位移)必然与荷载满足线性关系.即在弹性限度内满足胡克定律.

74

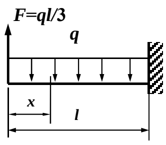
弯曲内力(Internal forces in beams)

三、步骤 (Procedure)

(1)分别作出各项荷载单独作用下梁的弯矩图;

(2)将其相应的纵坐标叠加即可(注意:不是图形的简单拼凑)

例16 悬臂梁受集中荷载 *F* 和均布荷载 *q* 共同作用,试按叠加原理作此梁的弯矩图



75

弯曲内力(Internal forces in beams)

解:悬臂梁受集中荷载 *F* 和均布荷载 *q* 共同作用,在距左端为 *x* 的任一横截面上的弯矩为

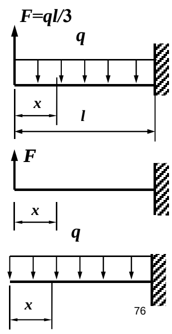
$$M(x)=Fx-\frac{qx^2}{2}$$

F 单独作用 $M_F(x)=Fx$

*q*单独作用 $M_q(x)=-\dfrac{qx^2}{2}$

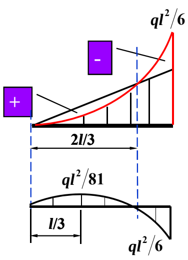
F,q 作用该截面上的弯矩等于*F*, *q* 单独作用该截面上的弯矩的代数和

$$M(x)=Fx-\frac{qx^2}{2}$$

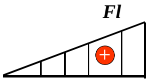


76

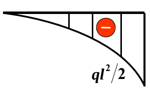
弯曲内力(Internal forces in beams)

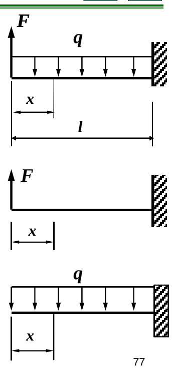


$M_F(x)=Fx$



$M_q(x)=-\dfrac{qx^2}{2}$

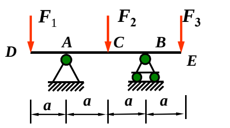




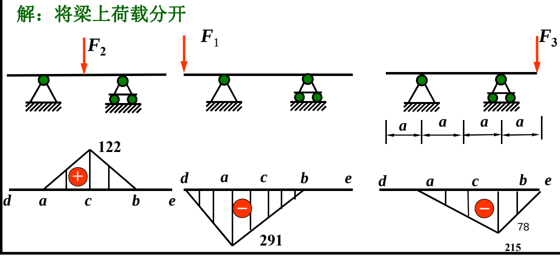
77

弯曲内力(Internal forces in beams)

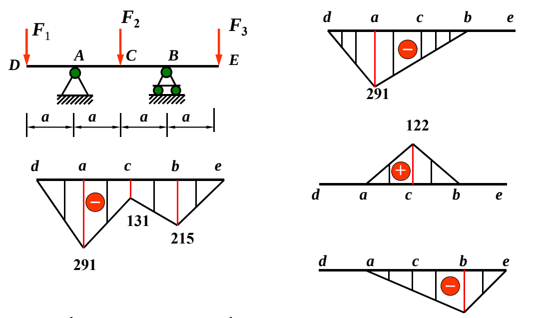
例题17 图示一外伸梁,$a=425\text{mm}$,F_1、F_2、F_3分别为 685 kN,575 kN,506 kN.试按叠加原理作此梁的弯矩图,求梁的最大弯矩.



解:将梁上荷载分开



78

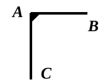


$$M_C = \frac{1}{2}(-291) + 122 + \frac{1}{2}(-215) = -131\text{kN}\cdot\text{m}$$

§4-6 平面刚架和曲杆的内力图（Internal diagrams for plane frame members & a curved bars)

一、平面刚架的内力图 (Internal diagrams for plane frame members)

平面刚架是由在同一平面内,不同取向的杆件,通过杆端相互刚性连结而组成的结构.



1.平面刚架的内力 (Internal forces for plane frame members)

剪力(shear force)；*弯矩*(bending moment)；*轴力*(axial force).

2、内力图符号的规定 (Sign convention for internal force diagrams)

弯矩图(bending moment diagram)

画在各杆的受压侧,不注明正、负号.

剪力图及轴力图(shear force and axial force diagrams)

可画在刚架轴线的任一侧(通常正值画在 刚架的外侧).

注明正,负号.

例题18 图示为下端固定的刚架.在其轴线平面内受集中力 F_1 和 F_2 作用，作此刚架的弯矩图和轴力图.

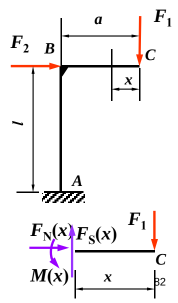
解：将刚架分为 *CB*，*AB* 两段

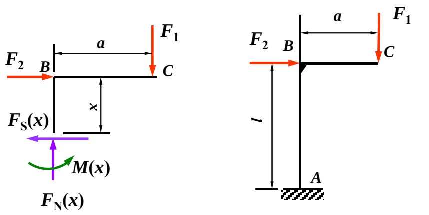
CB 段

$F_N(x) = 0$

$F_S(x) = F_1 \quad (+) \quad (0 < x < a)$

$M(x) = F_1 x \quad (0 \le x \le a)$





BA 段

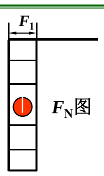
$F_N(x) = F_1 \quad (-) \quad (0 \le x \le l)$

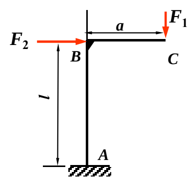
$F_S(x) = F_2 \quad (+) \quad (0 < x < l)$

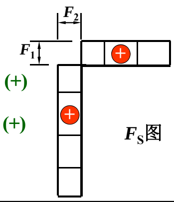
$M(x) = F_1 a + F_2 x \quad (0 \le x \le l)$

*CB*段 $F_N(x)=0$

*BA*段 $F_N(x) = F_1$ (—)





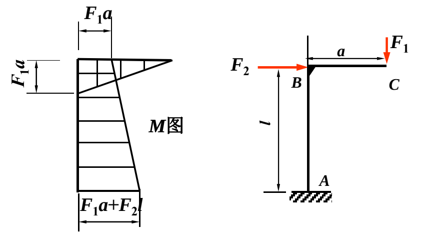


*CB*段 $F_S(x) = F_1$ (+)

*BA*段 $F_S(x) = F_2$ (+)

*CB*段 $M(x)=F_1x \quad (0\le x\le a)$

*BA*段 $M(x)=F_1a+F_2x \quad (0\le x\le l)$



二、平面曲杆 (Plane curved bars)

1、平面曲杆 (Plane curved bars)

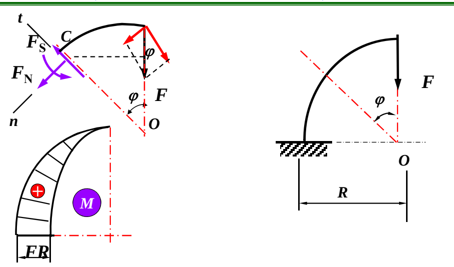
轴线为一平面曲线的杆件.内力情况及绘制方法与平面刚架相同.

2、内力符号的确定 (Sign convention for internal force)

轴力 引起拉伸的轴力为正;

剪力 对所考虑的一端曲杆内一点取矩 产生顺时针转动趋势的剪力为正;

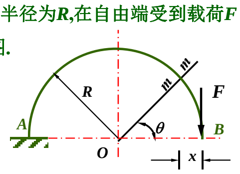
弯矩 使曲杆的曲率增加（即外侧受拉）的弯矩为正.



$$\sum F_n=0 \quad F_N+F\sin\varphi=0$$
$$\sum F_t=0 \quad F_S-F\cos\varphi=0$$
$$\sum M_C=0 \quad M-FR\sin\varphi=0$$

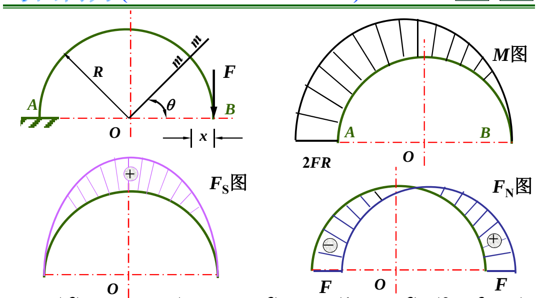
$$F_S=F\cos\varphi$$
$$F_N=-F\sin\varphi$$
$$M=FR\sin\varphi$$

例19 如图所示的半圆环半径为*R*,在自由端受到载荷*F* 的作用．试绘制F_S图、*M*图和F_N图.



解：建立极坐标系,*O*为极点,*OB*极轴,θ表示截面*m-m*的位置.

$$\begin{cases} M(\theta)=Fx=F(R-R\cos\theta)=FR(1-\cos\theta) & (0\le\theta\le\pi) \\ F_S(\theta)=F_1=F\sin\theta & (0\le\theta\le\pi) \\ F_N(\theta)=F_2=F\cos\theta & (0\le\theta\le\pi) \end{cases}$$



$$\begin{cases} M(\theta)=Fx=F(R-R\cos\theta)=FR(1-\cos\theta) & (0\le\theta\le\pi) \\ F_S(\theta)=F_1=F\sin\theta & (0\le\theta\le\pi) \\ F_N(\theta)=F_2=F\cos\theta & (0\le\theta\le\pi) \end{cases}$$

第四章结束

小结

1、熟练求解各种形式静定梁的支座反力

2、明确剪力和弯矩的概念，理解剪力和弯矩的正负号规定

3、熟练计算任意截面上的剪力和弯矩的数值

4、熟练建立剪力方程、弯矩方程，正确绘制剪力图和弯矩图

弯曲内力重点与难点

1. 平面弯曲的概念
2. 梁及其分类
3. 剪力与弯矩
4. 剪力与弯矩的表示形式
5. 载荷集度与剪力、弯矩间的平衡微分关系