

华东理工大学

复变函数与积分变换作业 (第1册)

班级_____学号_____姓名_____任课教师_____

第一次作业

教学内容: 1.1 复数及其运算 1.2 平面点集的一般概念

1. 填空题:

(1) $\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$ 的实部_____ 虚部_____ 共轭复数_____

模_____ 辐角_____

(2) $i^8 - 4i^{21} + i$ 的实部_____ 虚部_____ 共轭复数_____

模_____ 辐角_____

(3) $\frac{(\sqrt{3}-i)^4}{(1-i)^8} =$ _____

(4) $x =$ _____, $y =$ _____ 时, $\frac{x+1+i(y-3)}{5+5i} = 1+i$

2. 将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

(1) $1 + i\sqrt{3}$;

(2) $1 - \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$

(3) $\frac{(\cos 5\phi + i \sin 5\phi)^2}{(\cos 3\phi - i \sin 3\phi)^3}$.

3. 求复数 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部

4. 求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有的根.

5. 若 $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ 且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 证明: 以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是正三角形.

6. 设 z_1, z_2 是两个复数, 试证明.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

并说明此等式的几何意义.

7. 求下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3} - i)^5$;

(2) $(1 - i)^{\frac{1}{3}}$

(3) 求 $\sqrt[6]{-1}$

(4) $(1+i)^{100} + (1-i)^{100}$

8. 化简 $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

9. 设 $\frac{x+iy}{x-iy} = a+bi$ ，其中 a, b, x, y 均为实数，证明： $a^2 + b^2 = 1$

10. 设 ω 是 1 的 n 次根，且 $\omega \neq 1$ ，证明： ω 满足方程：

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

第二次作业

教学内容：1.2 平面点集的一般概念 1.3 复变函数

1. 填空题

(1) 连接点 $1+i$ 与 $-1-4i$ 的直线段的参数方程为_____

(2) 以原点为中心，焦点在实轴上，长轴为 a ，短轴为 b 的椭圆的参数方程为_____

2. 指出下列各题中点 z 的轨迹，并作图.

(1) $|z - 2i| \geq 1$;

(2) $\operatorname{Re}(z + 2) = -1$.

(3) $|z + 3| + |z + 1| = 4$

(4) $\arg(z - i) = \frac{\pi}{4}$

$$(5) \left| \frac{z-3}{z-2} \right| \geq 1$$

3.指出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指明是有界的还是无界的，是单连通的还是多连通的.

$$(1) \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1;$$

$$(2) z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$$

$$(3) |z-1| < 4|z+1|$$

4. 设 t 是实参数, 指出下列曲线表示什么图形

(1) $z = t + \frac{i}{t}$;

(2) $z = ae^{it} + be^{-it}$

5. 已知函数 $w = \frac{1}{z}$, 求以下曲线的像曲线.

(1) $x^2 + y^2 = 4$;

(2) $x = 1$

(3) $y = x$

6. 讨论下列函数的连续性:

(1) $w = |z|$

(2)
$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

7. 用导数定义讨论 $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ 的可导性。

部分参考答案:

第一次作业

$$2. (1) 2e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (2) 2\sin\frac{\varphi}{2}e^{i(\frac{\pi-\varphi}{2})} \quad (3) \cos 19\varphi + i\sin 19\varphi$$

$$4. 1+i\sqrt{3}, -2, 1-i\sqrt{3}$$

$$7.(1) -16\sqrt{3}-16i$$

$$(2) \sqrt[6]{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)/3} \quad k=0,1,2$$

$$(3) \sqrt[6]{-1} = (e^{\pi i})^{\frac{1}{6}} = e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)} \quad (k=0,1,2,3,4,5)$$

$$(4) -2^{51}$$

$$8. -2i^{n+1}$$

第二次作业

$$5. (1) u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \quad (2) \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4} \quad (3) u = -v$$