华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 **2** 册）

班级____________学号_____________姓名_____________任课教师_____________

第三次作业

教学内容：2.1.2 柯西—黎曼方程

1．填空：

(1) 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 的导数 $f'(z)=$____________________________

(2) 函数 $f(z)=z^n$ 的导数 $f'(z)=$ __________________________

（3）函数 $\dfrac{z-3}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为______________________________

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1） $f\text{（z）}=x^2-yi$；

（2） $f(z)=2x^3+3y^3i$；

（3） $f(z)=z^2\overline{z}$

3．验证函数 $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ 在复平面上解析，并求其导数。

4．设函数 $f(z)=my^3+nx^2y+i\left(x^3+Lxy^2\right)$ 是复平面内解析函数，求 L，m，n 的值。

5．设函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，证明：如果 $f(z)$ 满足下列条件之一，那么它在 D 内为常数.

（1）$\overline{f(z)}$ 解析；

(2) $2u+3v=1$；

(3) $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数.

6. 证明：若$f(z)$解析，则有$(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|)^2+(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|)^2=|f'(z)|^2$

7. 试证下列函数在平面上任何点都不解析：

（1） $f(z)=x+2iy$

（2） $f(z)=x+y$

（3） $f(z)=\mathrm{Re}\,z$

（4） $f(z)=\dfrac{1}{|z|}$

第四次作业

教学内容：2.2 初等函数及其解析性　2.3 解析函数与调和函数的关系

(带*号题目 2 学分的同学不做)

1.填空题

（1）$\exp\left(\dfrac{2-\pi i}{3}\right)=$__________

（2）$\left(e^{i}\right)^{i}=$__________；

（3）$Ln\left(-3+4i\right)=$__________；

（4）$\ln\left(ie\right)=$__________；

(5) $\ln e^{i}=$____________.

2　求下列各式的值

（1）3^{i}；

（2）$\left(1+i\right)^{i}$；

（3）$\sin\left(1+2i\right)$；

（4）$\left|\cos z\right|^{2}$

3．设 $z=re^{i\theta}$ 求 $\mathrm{Re}[Ln(z-1)]$

4. 解下列方程：

（1）$e^{x}-1-\sqrt{3}i=0$；

（2）$\ln z=2-\dfrac{\pi}{6}i$；

（3）$\cos z=0$；

5. 证明下列各式：

(1) $\cos iz = \cosh z$

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$；

6．由下列各已知调和函数求解析函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$：

（1）$u = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$；

（2） $v=\arctan\frac{y}{x}, x>0$；

（3）$v=\frac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$.

7.设$u(x,y)=e^{px}\sin y$，求 p 的值使$u(x,y)$为调和函数，并求出解析函数

$f(z)=u+iv$.

*8．已知$u+v=x^2-y^2+2xy-5x-5y$，试确定解析函数$f(z)=u+iv$.

*9. 设函数$f(z)=u+iv$解析，且$u-v=$（$x-y$）（$x^2+4xy+y^2$），求$f(z)$

部分题目参考答案：

第三次作业

3． $f'(z)=\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$

4． $L=-3$，$m=1$，$n=-3$

第四次作业

2．（1） $e^{-2k\pi-i\ln 3}\quad k=0,\pm1\ldots$

（2） $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\ln\sqrt{2}}\ (k=0,\pm1\ldots)$

（3） $\dfrac{(e^{-2}+e^{2})\sin 1-i(e^{-2}+e^{2})\cos 1}{2}$

（4） $\cos^2 x+\sinh^2 y$，

3． $\dfrac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$

4．（1） $z=\ln 2+i(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)\quad k=0,\pm1\ldots$

（2） $z=e^2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2})$

（3） $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad k=0,\pm1\ldots$

6． （1） $f(z)=(1-i)z^3+ic, c\in R$

（2） $f(z)=\ln z+c, c\in R$

（3） $f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$

7． $p=\pm1$

当 $p=1$ 时，

$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)$

当 $p=-1$ 时， $f(z)=e^{-x}\sin y+i(e^{-x}\cos y+C)$

*8． $f(z)=z^2-5z+C-Ci$,其中C为任意常数。

*9． $f(z)=-iz^3+C$,其中C为复常数。