# 华 东 理 工 大 学

# 复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 9 册）

## 试 卷 一

一、 填空（每小题 4 分，共 32 分）

1．已知 $z=(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i})^{10}$，则 $\mathrm{Im}(z)=$__________， $\arg z=$_________.

2．$(1+i)^i$ 的值为______________________；主值为______________________.

3． $z=0$ 为函数 $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^8}$ 的______级极点；在该点处的留数为________.

4．函数 $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)$ 仅在 $z=$______________处可导.

5. $w=f(z)$ 是 $\mathrm{Im}(z)>0$ 到 $|w|<1$ 的分式线性映射，且 $f(i)=0, f(-1)=1,$ 则

$f(z)=$___________

6.设函数 $f(t)=\begin{cases}4, & 0\le t\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则 $f(t)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)=$______________.

7.设 $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=$_______， $\mathrm{Re}\,s[f(z),\infty]=$___________.

8.设 $z=x+iy$，则 $w=\dfrac{1}{z}$ 将圆周 $x^2+y^2=2$ 映射为___________.

二、单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 设 $z=\cos(\pi+5i)$, 则 $\mathrm{Re}\,z$ 等于(　　　)

（A） $-\dfrac{e^{-5}+e^{5}}{2}$　（B） $\dfrac{e^{-5}+e^{5}}{2}$　（C） $\dfrac{e^{-5}-e^{5}}{2}$　（D） 0

2． $\oint_{|z|=3}\dfrac{dz}{z^3(z^{10}-2)}=$（　　　）

（A）$2\pi$i　　（B） 0　　（C）$\pi$i　　（D）$3\pi$i

3. $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-t} dt =$ (　　).

（A） $\frac{1}{2}\ln\frac{s^2}{s^2+1}$　（B） $\frac{1}{2}\ln\frac{s^2+1}{s^2}$　（C） $\frac{1}{2}\ln 2$　（D） 0

4. 由三对点：$f(1)=i, f(0)=-i, f(-1)=0$ 所确定的分式线性映射为（　　）

（A） $\frac{z+1}{3z+1}$　（B） $\frac{z+1}{3z-1}$　（C） $\frac{z+1}{3z+1}i$　（D） $\frac{z+1}{3z-1}i$

三.（8分）已知调和函数 $u(x,y)=x^2-y^2+2xy$,求函数 $v(x,y)$,使函数 $f(z)=u+iv$ 在复平面上解析且满足 $f(i)=-1+i$ .

四.计算下列积分（每题 **6** 分，共 **18** 分）

1. $\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z^2(z-1)} \mathrm{d}z$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} \mathrm{d}x$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\sin\theta} \mathrm{d}\theta$

五.（**10** 分）指出函数 $f(z)=\dfrac{2-3z}{2z^2-3z+1}$ 的有限孤立奇点，并在以这些孤立奇点为中心的圆环域内展开为 Laurent 级数.

六．**(10 分)** 利用 Laplace 变换求解微分方程组：

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=1, \quad x(0)=0, \\ x(t)-y'(t)=t, \quad y(0)=1. \end{cases}$$

七．（**6 分**）设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 上解析，且 $f(0)=1$，证明：

$$\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]\frac{f(z)}{z}dz=(2\pm f'(0))2\pi i$$

# 试 卷 二

## 一、填空题(每小题 4 分，共 36 分)

1.复数$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$的模为______________________________.

2.若$z_1=\dfrac{1+2i}{\sqrt{2}}, z_2=\sqrt{3}-i$，则$z_1\cdot z_2$的指数形式为___________________________.

3. Lni 的值为 _______________________________.

4.$\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=$_________________________________.

5.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}z^n$的收敛半径是______________________________.

6.已知函数$f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$，则$\mathrm{Re}[f(z),0]=$__________________________.

7.把上半平面$\mathrm{Im(z)}>0$映射为单位圆$|w|<1$且满足$f(i)=0,\arg f'(i)=0$的分式线性映射为_____________________________.

8. 函数$F(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$的 Fourier 逆变换为______________________

9. $f(t)=1-te^t$的 Laplace 变换为______________________________________.

## 二、单项选择题 (每小题 4 分，共 20 分)

1. 复数$e^{2-i}$的辐角主值是（　　　）

A.1　　　B.$\sqrt{8}$　　　C.－1　　　D.8

2. 函数$w=f(z)=u+iv$在点$z_0$处解析，则命题（　　　）不成立。

A. $u,v$仅在点$z_0$处可微且满足$C-R$条件；

B. 存在点$z_0$的某一邻域$U(z_0)$，$u,v$在$U(z_0)$内满足$C-R$条件；

C. $u,v$在邻域$U(z_0)$内可微；

D. B, C 同时成立。

3. 设 $f(z)$ 在闭曲线 C 上及其内部解析， $z_0$ 在 C 的内部，则有（　　　）

A. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = f'(z_0)\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^2}dz$　　　B. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz$

C. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{f(z_0)}{2!}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)}dz$　　　D. $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{(z-z_0)}dz$

4. 函数 $\frac{\cot \pi z}{2z-3}$ 在 $|z-i|=2$ 内的奇点个数（　　　）

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

5. 将点 $z=0,1,\infty$ 分别映射为 $w=-1,-i,1$ 的分式线性映射为（　　　）

A. $w=\frac{z+1}{z-1}$　　　B. $w=e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{z+1}{z-1}$　　　C. $w=\frac{z-i}{z+i}$　　　D. $w=e^{\frac{\pi}{2}i}\frac{z-i}{z+i}$

三、（8 分）已知 $u(x,y)=-3xy^2+x^3$ 为调和函数，求满足 $f(0)=C$ 的解析函数.

四、(共 8 分)沿指定曲线 C 计算积分$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$的值，其中$C:|z|=\frac{3}{2}$为正向.

五、（8 分）求函数$f(z)=\frac{\sin z - z}{z^3}$在$0<|z|<\infty$内的洛朗展开式，并判断函数的孤立奇点的类型?

六、（8 分）利用傅里叶变换求解方程 $y(t)=f(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 其中 $f(t),g(t)$ 为已知函数？

七、（12 分）利用拉氏变换求解常微分方程初值问题：$\begin{cases} y''+k^2y=0 \\ y(0)=A, y'(0)=B. \end{cases}$（已知 $\mathscr{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$，$\mathscr{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}$， $\mathscr{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$）

# 试 卷 三

## 一、填空（每小题 4 分，共 24 分）

1．若 $z_1 = e^{1+i}, z_2 = 3+i$，则 $z_1 \cdot z_2 =$______________.

2 函数 $f(z) = 2x^3 + 3iy^3$ 在____________________可导.

3． $z = 0$ 是 $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{z}$ 的奇点，其类型为__________.

4.设 C 为正向圆周 $|\xi| = 1$，则当 $|z| < 1$时，$f(z) = \oint_C \dfrac{\sin 2\xi}{(\xi - z)^3} d\xi =$__________.

5．函数 $f(t) = \cos t \sin t$ 的 Fourier 变换为___________________

6. 设 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega), ,\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$,则 $\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] =$_____________，其中

$f_1(t) * f_2(t)$ 定义为_______________ .

## 二、单项选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1..下列结论中不正确的是（　　　）

A．若 $f(z)$ 在单连通域 $D$ 解析，则积分 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ 与路径无关（$z_0, z_1 \in D$）;

B. 若 $f(z)$ 在 $D$ 内任一点 $z_0$ 的邻域内可展开成泰勒级数，则 $f(z)$ 在 $D$ 解析;

C. 如果 $f(z)$ 在单连域 $D$ 解析，则 $f(z)$ 在 $D$ 内沿任一条简单闭曲线的积分值为零，

D. 设 $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z)^n}$, $n$ 为正整数，$g(z)$ 在 $z_0$ 点解析，则 $z_0$ 是 $f(z)$ 的 $n$ 级极点。

2. 在映射 $w = \dfrac{1}{z}$ 之下，将区域 $\operatorname{Im}(z) > 1$ 映射成为区域（　　　）

A. $\operatorname{Im}(w) < 1$；　　B. $\operatorname{Re}(w) < 1$；　　C. $\left|w + \dfrac{i}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$；　　D. $\left|w + \dfrac{i}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$。

3. 设 C 为正向圆周 $|z - a| = a(a > 0)$, 则积分 $\oint_C \dfrac{dz}{z^2 - a^2} =$（　　　）

A. $-\dfrac{\pi i}{2a}$　　　B. $-\dfrac{\pi i}{a}$　　　C. $\dfrac{\pi i}{2a}$　　　D. $\dfrac{\pi i}{a}$

4. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开式的收敛半径为（　　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B.1　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. $\sqrt{3}$

5. 点 $z=-1$ 是 $f(z)=(z+1)^5\sin\dfrac{1}{(z+1)}$ 的（　　　）

A.可去奇点　　　　B.二阶极点　　　　C.五阶零点　　　　D.本性奇点

6. 设 C 为从 $-i$ 到 $i$ 的直线段，则 $\int_C |z|\,dz=$（　　　）

A. $i$　　　　B. $2i$　　　　C. $-i$　　　　D. $-2i$

三、(**8 分**) 求线性映射 $w=f(z)$ 它把 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$，使 $f(\frac{1}{2})=0, f'(\frac{1}{2})>0$.

四．（8 分）已知 $u(x,y)=4xy^3+ax^3y$，求常数 $a$ 以及二元函数 $v(x,y)$，使得 $f(z)=u+iv$ 为解析函数且满足条件 $f(1)=0$.

五．（**8** 分）将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 点展开为洛朗 (Laurent) 级数.

六．计算下列积分（每题 **6** 分，共 **18** 分）

1．$\oint_C \dfrac{e^{-z}\sin 2z}{z^2}dz$，设 $C$ 为正向圆周 $|z+i|=2$.

2. $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$，$C$ 为正向圆周 $|z|=\frac{1}{2}$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$

七、（**10 分**）计算 $f(t)=\int_0^t \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt$ 的拉氏变换，并用拉普拉斯(Laplace)变换求解微分方程 $y'''+y'=e^{2t}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$ 的解.

[已知 $\mathcal{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$, $\mathcal{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$, $\mathcal{L}[e^{kt}]=\frac{1}{s-k}$ ]

## 试卷四

**一、填空题（每题 4 分，共 24 分）**

1. $\sin 2i$ 的实部是________，虚部是__________.

2. 对数函数 $\ln z$ 的解析区域为__________

3. $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ 在 $z=1$ 处的泰勒展开式的收敛半径为____________

4. 积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos t}{t}e^{-t}dt=$_________

5. 若 $\mathcal{F}[\text{sint}]=i\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)$，则 $\mathcal{F}[e^{2it}\sin t]=$___________

6. 区域 $0<\operatorname{Im}z<\dfrac{1}{2}$ 在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的像区域为 ___________

二、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. 复数 $i^i$ 的主值为　（　　　）

A. $0$　　　B. 1　　　C. $e^{\frac{\pi}{2}}$　　　D. $e^{-\frac{\pi}{2}}$

2. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 解析，以下命题：

（1）若 $f'(z)=0$，则 $f(z)$ 为常数；（2）若 $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析，则 $f(z)$ 为常数；

（3）若 $|f(z)|$ 为常数，则 $f(z)$ 为常数；（4）$\operatorname{Im}f(z)$ 为常数，则 $f(z)$ 为常数。

正确的有（　　　　）

A 3 个　　　B. 4 个　　　C. 2 个　　　D.　1 个

3. 若 $f(z)=\tan z$，则 $\operatorname{Re}s[f(z),\dfrac{\pi}{2}]=$（　　　）

A. $-2\pi$　　　B. $-\pi$　　　C. $-1$　　　D. $0$

4. $\mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)$，则 $\mathcal{F}\left[(t-1)f(t)\right]=$ (　　)

(A) $F'(\omega)-F(\omega)$ (B) $-F'(\omega)-F(\omega)$ (C) $iF'(\omega)-F(\omega)$ (D) $-iF'(\omega)-F(\omega)$

5. 函数 $w=z^2$ 把 Z 平面上的扇形区域：$0<\arg z<\dfrac{\pi}{3},0<|z|<2$ 映射成 W 平面上的区域（　　）

A. $0<\arg w<\dfrac{2\pi}{3},0<|w|<4$　　B. $0<\arg w<\dfrac{\pi}{3},0<|w|<4$

C. $0<\arg w<\dfrac{2\pi}{3},0<|w|<2$　　D. $0<\arg w<\dfrac{\pi}{3},0<|w|<2$

6. $z=0$ 是函数 $1/(\sin\dfrac{1}{z})$（　　）

A.可去奇点;　B.非孤立奇点;　C.本性奇点;　D. 极点

**三．计算下列积分（每题 6 分，共 24 分）**

(1) $\int_C (z+1)e^z dz$， $C$ 为 $|z|=1$ 的上半圆周按逆时针转；

(2) 求积分 $\oint_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, 其中C是 $|z|=1$ 的正向。

（3）计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{(x^2+b^2)^2}dx$（$\alpha>0,b>0)$

（4）计算积分$\oint_{|z|=2}\frac{z^{13}}{(z^2-1)^3(z^8+1)}dz.$

五.（**8 分**）把函数$f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$分别在$1<|z-1|<+\infty$，和$0<|z-2|<1$的圆环内展开成 Laurent 级数

六、（8 分）求把区域$D:|z|<1,\left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}$映射成上半平面$\operatorname{Im}w>0$的共形映射

七、（**12** 分）(1)设$F(s)=\dfrac{3s+1}{(s^2+1)(s-1)}$求拉氏逆变换$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

(2) 利用拉氏变换求解常微分方程的初值问题 $\begin{cases} y''+4y'+3y=e^{-t} \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$

[附：$\mathcal{L}[\sin kt]=\dfrac{k}{s^2+k^2}$,$\mathcal{L}[\cos kt]=\dfrac{s}{s^2+k^2}$,$\mathcal{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$ $\mathcal{L}[t^m]=\dfrac{1}{s^{m+1}}$]

试卷一答案

一、 填空

1． $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{2\pi}{3}$ 2． $e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})],\ k=0,\pm1,\cdots$ ，

$e^{-\frac{\pi}{4}}[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})]$ 3． 6， 0 4．（0，-1） 5.$\dfrac{z-i}{\mathrm{i}z-1}$

6． $F(\omega)=\dfrac{4}{i\omega}(1-e^{-2i\omega})$． 7． $-\dfrac{1}{3!},\dfrac{1}{3!}$ 8.圆周|w|=$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

二、单项选择题

**A** B C D

三.

解：(1) 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2y=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，有

$$v=\int(2x+2y)\mathrm{d}y=2xy+y^2+\varphi(x),$$

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y+2x=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y-\varphi'(x)$，有 $\varphi'(x)=-2x$，

$$\Rightarrow\ \varphi(x)=\int(-2x)\mathrm{d}x=-x^2+c,$$

即得 $v(x,y)=2xy+y^2-x^2+c$，

$$f(z)=x^2-y^2+2xy+i(2xy+y^2-x^2+c);$$

(2) 由 $f(i)=-1+i\ \Rightarrow\ c=0$，

故 $v(x,y)=2xy+y^2-x^2$ .

四．计算下列积分

1．解：令 $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}$，在 $|z|=2$ 内，函数 $f(z)$ 有两个奇点.

$z=0$ 为可去奇点，$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$，

$z=1$ 为一阶极点，$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)=\left.\dfrac{\sin^2 z}{z^2}\right|_{z=1}=\sin^2 1$，

原式$=2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1])=2\pi i\sin^2 1$.

2．解：令$f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+4}$，它在上半平面只有一个一阶极点$z=2i$，

$$\mathrm{Res}[f(z),2i]=\left.\frac{\mathrm{e}^{iz}}{2z}\right|_{z=2i}=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4i},$$

原式$=\mathrm{Re}\,(2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),2i])=\dfrac{\pi\,\mathrm{e}^{-2}}{2}=\dfrac{\pi}{2\mathrm{e}^2}$.

3．解：令$z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则$\sin\theta=\dfrac{z^2-1}{2iz}$，$\mathrm{d}\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，

原式$=\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(5+\dfrac{4(z^2-1)}{2iz}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z^2+5iz-2}\mathrm{d}z$.

令$f(z)=\dfrac{1}{2z^2+5iz-2}$，

可知它在$|z|=1$内只有一个一级极点 $z_0=-\dfrac{i}{2}$，

原式$=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\left.\dfrac{2\pi i}{4z+5i}\right|_{z=z_0}=\dfrac{2\pi}{3}$.

五．解：$f(z)$的有限孤立奇点为$z_0=\dfrac{1}{2}$及$z_1=1$

$$f(z)=\frac{2-3z}{2z^2-3z+1}=\frac{1}{1-2z}+\frac{1}{1-z}$$

1）当$0<\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$时

$$f(z)=\frac{1}{-2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{2}{1-2(z-\frac{1}{2})}\quad=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}+2\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-\frac{1}{2})^n$$

2）当$\dfrac{1}{2}<\left|z-\dfrac{1}{2}\right|<+\infty$

$$f(z)=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}-\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})})}\quad=-\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}(z-\frac{1}{2})^{-n}$$

3）当$0<|z-1|<\frac{1}{2}$

$$f(z)=\frac{1}{1-2z}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+2(z-1)}\quad=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n (z-1)^n$$

4）当$\frac{1}{2}<|z-1|<+\infty$

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z(z-1)(1+\frac{1}{2(z-1)})}\quad=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2(z-1)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}(z-1)^{-n}$$

六、解：对方程两边取拉氏变换并代入初值得

$$\begin{cases} sX(s)+Y(s)=\dfrac{1}{s}, \\ X(s)-(sY(s)-1)=\dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

求解得 $\begin{cases} X(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}, \\ Y(s)=\dfrac{s}{s^2+1}. \end{cases}$

求拉氏逆变换得 $\begin{cases} x(t)=t-\sin t, \\ y(t)=\cos t. \end{cases}$

七．证：由于$\oint_{|z|=1}[2\pm(z+\frac{1}{z})]f(z)\frac{dz}{z}=\oint_{|z|=1}[\frac{2f(z)}{z}\pm\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}]dz$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}dz\pm\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)f(z)}{z^2}dz$$

$$=2\pi i\{2f(0)\pm[(z^2+1)f(z)]'\big|_{z=0}\}=2\pi i(2\pm f'(0))$$

试卷二答案

一、填空题

1.　1　2. $\sqrt{10}e^{i(\arctan 2-\frac{\pi}{6})}$ 或 $\sqrt{10}e^{i\arctan(5\sqrt{3}-8)}$　　3. $i\pi(\frac{1}{2}+2k)$

4. $2\pi i$　5. 0.　6. $\mathrm{Re}(f(z),0)=1$ 7. $i\dfrac{z-i}{z+i}$　8. $\cos\omega_0 t$　　9. $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{(s-1)^2}$

二、单项选择题 **C　A　B　D　C**

三、解：由 C-R 条件，知

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-3y^2+3x^2$$

$$v=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=-y^3+3x^2y+g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy+g'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy$$ ，解得 $g(x)=C_1$

所以 $f(z)=u+iv=-3xy^2+x^3+i(3x^2y-y^3+C_1)$

将 $f(0)=C$ 代入上式得 $C_1=-iC$

故 $f(z)=-3xy^2+x^3+C+i(3x^2y-y^3)=z^3+C$

四、解法一：$\oint_C\dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$

$$=\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}+\oint_{|z+i|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$$=\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{(z-i)}dz+\oint_{|z+i|=\frac{3}{2}}\frac{\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}}{(z+i)}dz$$

$$=2\pi i\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i}+2\pi i\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}\Big|_{z=-i}=0$$

解法二：

函数 $f(z)=\dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ 在 $|z|<\dfrac{3}{2}$ 内有以积极点 $z=\pm i$

由留数定理

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[f(z),i]+\mathrm{Re}\,s[f(z),-i]$$

$$=2\pi i[\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}+\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)(z^2+4)}]=0$$

五、解：$f(z)=\dfrac{\sin z-z}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}\left[(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots)-z\right]$

$$=\frac{-1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots$$

由孤立奇点定义知：$z=0$ 为可去奇点；$z=\infty$ 为本性奇点。

六、解：设 $\mathcal{F}[y(t)]=Y(\omega)$ ，$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$， $\mathcal{F}[g(t)]=G(\omega)$

将方程 $y(t)=f(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}y(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 两边取傅里叶变换并由卷积定理得

$$Y(\omega)=F(\omega)-Y(\omega)\cdot G(\omega)$$

解得 $Y(\omega)=\dfrac{F(\omega)}{1+G(\omega)}$

两边同时取傅里叶逆变换得 $y(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{1+G(\omega)}e^{i\omega t}d\omega$

七、解：设 $\mathcal{L}\,[y(t)]=Y(s)$，两边取拉氏变换

$$s^2Y(s)-As-B+k^2Y(s)=0$$

$$Y(s)=\frac{As+B}{s^2+k^2}$$

再取拉氏逆变换得 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{As+B}{s^2+k^2}]$

$$=\mathcal{L}^{-1}[\frac{As}{s^2+k^2}]+\mathcal{L}^{-1}[\frac{B}{s^2+k^2}]=A\cos kt+\frac{B}{k}\sin kt$$

试卷三答案

一、　填空

1．$e(\cos 1-\sin 1)+ie(3\sin 1+\cos 1)$．　2　直线$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$　3．可去奇点.

4.$-4\pi i\sin 2z$．　5．$\frac{i\pi}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$　6.$F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$,　$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

二、单项选择题 **D,C,D,B,D,A**

三、解：因$|z|<1$映射为$|w|<1$的映射为$w=f(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$　$(|\alpha|<1)$

由题意$\alpha=\frac{1}{2}$　　$w=e^{i\theta}\frac{2z-1}{2-z}$

$f'(z)=e^{i\theta}\frac{3}{(2-z)^2}$　$f'(\frac{1}{2})=e^{i\theta}\cdot\frac{4}{3}>0$

$\theta=arcf'(\frac{1}{2})=2k\pi$　（$k$ 为整数）

所以　$w=\frac{2z-1}{2-z}$.

四．解：若 $f(z)=u+iv$ 解析，则$u(x,y)$必为调和函数

$\frac{\partial u}{\partial x}=4y^3+3ax^2y$　　　$\frac{\partial u}{\partial y}=12xy^2+ax^3$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6axy$　　　$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=24xy$

即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6axy+24xy=0$　　　$a=-4$

$\therefore$　$u(x,y)=4xy^3-4x^3y$

由柯西黎曼方程

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=4y^3-12x^2y$

$v(x,y)=\int(4y^3-12x^2y)dy=y^4-6x^2y^2+\varphi(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=4x^3-12xy^2=-12xy^2+\varphi'(x)$

$\varphi'(x)=4x^3$,　$\varphi(x)=x^4+C$

$v(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2+C$

$f(z)=(4xy^3-4x^3y)+i(x^4+y^4-6x^2y^2+C)$

代入$f(1)=0$得$C=-1$

所以

$v(x,y)=x^4+y^4-6x^2y^2-1$

五．解：$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$，

在复平面上以原点为中心分为三个解析圆环：

$$0\le|z|<1,\quad 1<|z|<2,\quad 2<|z|<+\infty.$$

(1) 在 $0\le|z|<1$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

(2) 在 $1<|z|<2$ 内，

$$f(z)=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}-\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

(3) 在 $2<|z|<+\infty$ 内，

$$f(z)=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}.$$

六．计算下列积分

1．解：令 $f(z)=e^{-z}\sin 2z$，则由高阶求导公式得：

$$\text{原式}=2\pi i\cdot f'(0)=2\pi i(-e^{z}\sin 2z+2e^{-z}\cos 2z)\big|_{z=0}=4\pi i$$

2．解: 在 $C$ 内，$\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 有本性奇点 $z=0$，

由留数定理：原式$=2\pi i\{\mathrm{Res}[\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0]\}$

在 $0<|z|<\dfrac{1}{2}$ 内将 $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 展为 Laurent 级数：

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots)$$

$$=\cdots\frac{1}{z}(1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}+\cdots)+\cdots$$

故 $\mathrm{Res}[\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0]=1+\dfrac{1}{2\,!}+\dfrac{1}{3\,!}+\cdots+\dfrac{1}{n\,!}+\cdots=e-1$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz=2\pi i=2\pi i(e-1)$$

**3**．**解**：令 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+4)(z^2+1)}$

$f(z)$在上半平面有两个一级极点 $z_1=i,\ z_2=3i$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+9)(x^2+1)}dx=2\pi i\,\{\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),3i]\}$$

$$=2\pi i[\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+9)(z+i)}\right|_{z=i}+\left.\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+3i)}\right|_{z=3i}]$$

$$=2\pi i(\frac{e^{-1}}{16i}+\frac{e^{-3}}{-48i})=\frac{\pi}{8}e^{-1}-\frac{\pi}{24}e^{-3}$$

原式$=\mathrm{Re}\,[\dfrac{\pi}{8}e^{-1}-\dfrac{\pi}{24}e^{-3}]=\dfrac{\pi}{8}e^{-1}-\dfrac{\pi}{24}e^{-3}$

七、**解**：（1）由于 $\mathscr{L}[e^{-3t}\sin 2t]=\dfrac{4}{(s+3)^2+4}$

由像函数的积分性质得 $\mathscr{L}[\frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}]=\int_s^{\infty}\frac{2}{(s+3)^2+4}ds=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}$

$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{s}[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{s+3}{2}]$

（2）设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$ 对方程取拉氏变换

$$s^3Y(s)+sY(s)=\frac{1}{s-2}, \qquad Y(s)=\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)(s-2)}]=\mathscr{L}^{-1}[\frac{-\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{10}}{s-2}+\frac{\frac{2}{5}s-\frac{1}{5}}{s^2+1}]$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}+\frac{2}{5}\cos t-\frac{1}{5}\sin t.$$

## 试卷四答案

### 一、填空

1 $\mathrm{Re}\sin 2i=0;\ \mathrm{Im}\sin 2i=\frac{e^2-e^{-2}}{2}$ 　　2. 除去原点和负实轴的复平面

3. 2 　　4. $\ln\sqrt{2}$ 　　5. $i\pi[\delta(\omega-1)-\delta(\omega-3)]$ 　　6. $u^2+(v+1)^2>1, v<0$

### 二、选择题 D B C C A B

### 三．计算下列积分

(1) **解**：由于被积函数在复平面上解析，则积分和路线无关，因此可以设积分路线为

$C$：$z=x+iy=x; x:1\to -1$，

则有

$$\int_C(z+1)e^z dz .=\int_1^{-1}(x+1)e^x dx=xe^x\Big|_1^{-1}=-(e+e^{-1})$$

(2)**解**： 易见 $z=0$ 是函数 $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点，并且

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{z^{-1}}{3!} + \frac{z^{-2}}{4!} + \cdots (0 < |z| < \infty$$

因此 $\mathrm{Re}\,s[f(z),0] = \frac{1}{3!}$, 于是，根据留数定理 $\oint_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{\pi}{3} i$

（3）解：$z_0 = bi$是$\frac{\mathrm{z e^{i\alpha z}}}{(\mathrm{z}^2 + b^2)}$在上半平面内唯一的孤立奇点，且是2级极点。所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(x^2 + b^2)} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\alpha x}}{(x^2 + b^2)^2} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Im}(2\pi i \,\mathrm{Re}\,s\left[\frac{z}{(z^2 + b^2)^2} e^{i\alpha z}, bi\right]).$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Im}(2\pi i \lim_{z \to bi} \frac{d}{dz}\left[(z - bi)^2 \frac{z}{(z^2 + b^2)^2} e^{i\alpha z}\right]) = \frac{\pi \alpha}{4b} e^{-b\alpha}.$$

（4）解：（1）$\oint_{|z|=2} \frac{z^{13}}{(z^2 - 1)^3 (z^8 + 1)} dz.$

$$= -2\pi i \,\mathrm{Re}\,s[f(z), \infty] \quad = 2\pi i \,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0]$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{z(1 - z^2)^3 (1 + z^8)}, 0] \quad = 2\pi i.$$

五．解：在$1 < |z - 1| < +\infty$内

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)-1} - \frac{1}{z-1}$$

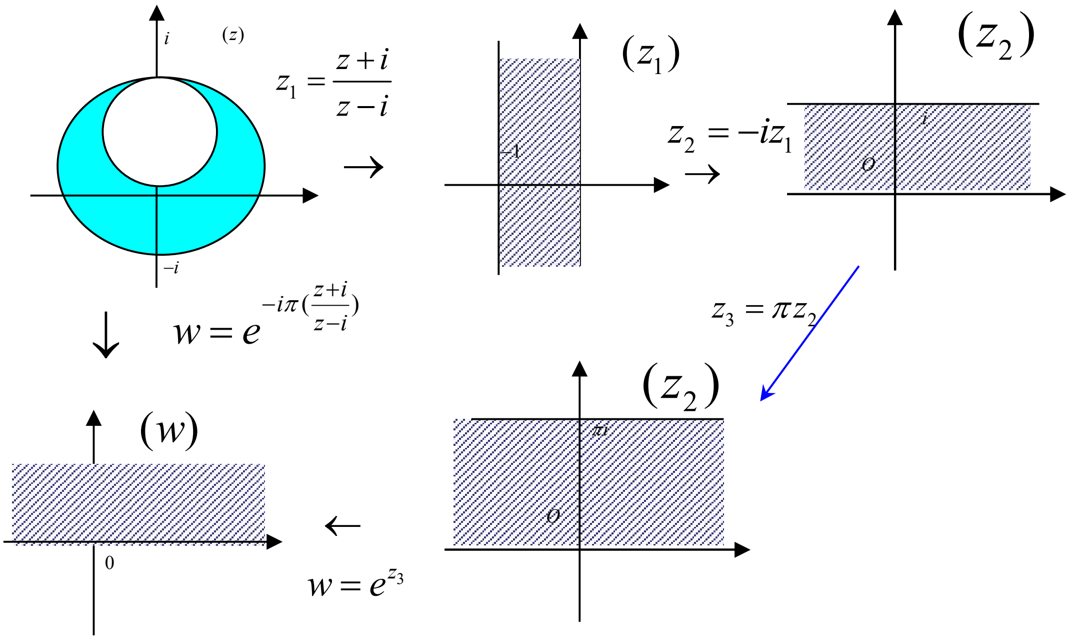
$$= \frac{1}{(z-1)\left(1 - \frac{1}{z-1}\right)} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{-n} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (z-1)^{-n}$$

在$0<|z-2|<1$，

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

六、

解




故所求映射为 $w=e^{-i\pi(\frac{z+i}{z-i})}$.

七、解：（1）$F(s)=\frac{-2s+1}{s^2+1}+\frac{2}{s-1}$

$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=-2\cos t+\sin t+2e^t$.

（2）设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，方程两端取拉氏变换，并代入初始条件

$$s^2Y(s)-s-1+4sY(s)-4+3Y(s)=\frac{1}{(s+1)}.$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+3)}+\frac{s+5}{(s+1)(s+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{s+3}+\frac{7}{4}\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{4}[(2t+7)e^{-t}-3e^{-3t}]$$