机械原理

习题集解答

刘冠阳 郭卫东

北京航空航天大学机器人研究所

2013 年 1 月

机构的组成原理

1、什么是构件，什么是运动副？

解答：独立运动的单元体称为构件。由两个构件直接接触组成的可动的连接称为运动副。

2、运动链是怎样形成的？它与机构有什么关系？

解答：把若干个构件用运动副连接起来所形成的构件系统称为运动链。如果取运动链中的某个构件为机架，当运动链中的一个或若干个构件相对于机架（参考坐标系）按规定的运动规律做相对独立的运动时，而该运动链中的其余构件能够随之按确定的规律运动，则就把这样的运动链称为机构。

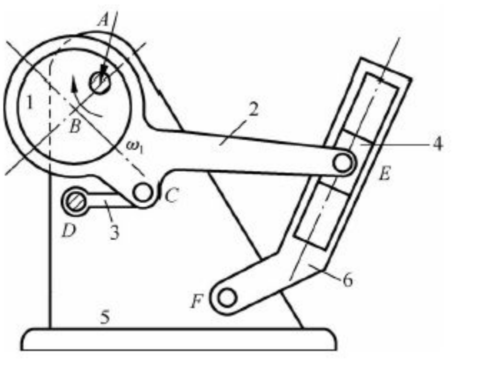
3、机构具有确定运动的条件是什么？当机构的原动件数少于或多于机构的自由度时，机构的运动将发生什么情况？

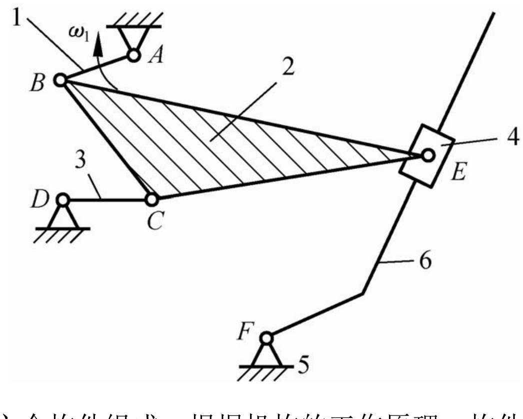
解答：机构具有确定运动的条件是机构原动件的数目等于机构自由度。当机构的原动件数少于机构的自由度时，机构的运动不确定；当机构的原动件数多于机构的自由度时，机构将不能运动，或在机构中最薄弱环节处损坏。

4、什么是机构的运动简图？绘制机构运动简图的目的是什么？它能表示出原机构哪些方面的特征？

解答：利用简单线条表示的构件和规定的运动副的表示方法绘制的机构图就是机构运动简图。绘制机构运动简图的目的是在对机构进行运动分析和动力分析时，可以忽略掉那些无关的因素而只考虑那些只与运动有关的因素，并用最为简洁明了的方式，把构件和运动副所形成的机构图形画出来。机构运动简图与实际机构应具有完全相同的运动特性，即它们的所有构件的运动形式是完全相同的，因此机构运动简图必须根据机构的实际尺寸按比例绘制。

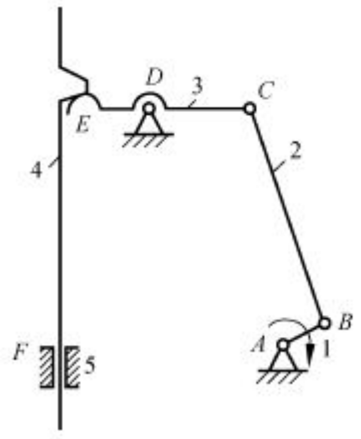
5、试绘出如图所示偏心轮传动机构的机构运动简图，并计算其自由度。





解答：绘制机构运动简图（右上）。偏心轮传动机构由六个构件组成。根据机构的工作原理，构件 5 是机架，原动件为偏心轮 1，它与机架 5 组成转动副，其回转中心为 A 点。构件 2 是一个三副构件，它与构件 1、构件 3、构件 4 分别组成转动副，它们的回转中心分别为 B、C 和 E 点。构件 3 与机架 5、构件 6 与机架 5 分别在 D、F 点组成转动副。构件 4 与构件 6 在 E 点组成移动副。在选定长度比例尺和投影面后，定出各转动副的回转中心点 A、B、C、D、E、F 的位置及移动副导路 E 的位置，并用运动副符号表示，用直线把各运动副连接起来，标明机架和原动件，即得右上图所示的机构运动简图。

6、如图所示的活塞泵有曲柄 1、连杆 2、扇形齿轮 3、齿条活塞 4 和机架 5 共 5 个构件所组成。曲柄 1 是原动件，2、3、4 为从动件。当原动件 1 回转时，活塞在气缸中作往复运动。试绘出机构运动简图，计算其自由度，并判断机构运动是否确定。



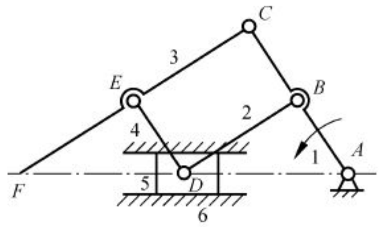
解答：绘制机构运动简图。各构件之间的连接如下：构件 1 和构件 5、构件 2 和构件 1、构件 3 和构件 5 之间有相对转动，分别构成转动副 A、B、C、D。构件 3 的轮齿与构件 4 的轮齿构成平面高副 E。构件 4 与构件 5 之间为相对移动，构成移动副 F。选取适当的比例，用构件和运动副的规定符号画出机构运动简图，如左图所示。

计算自由度：

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3\times5 - 2\times7 - 0 = 1$$

因为该机构的自由度等于原动件数目，所以此机构具有确定的运动。

7、试计算图示运动链的自由度，并判断该运动链是否具有确定的运动。若有复合铰链，局部自由度和虚约束，应明确指出。

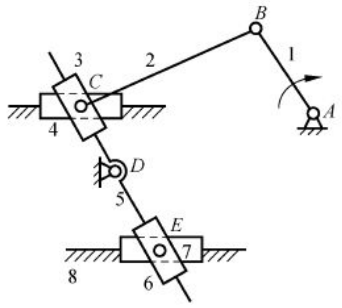


解答：$n=5$，$P_L=7$（其中转动副 D 是三构件构成的复合铰链），$P_H=0$，因此该运动链的自由度为

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3\times5 - 2\times7 - 0 = 1$$

该运动链的自由度等于原动件数目，因此具有确定的运动。

8、试计算图示运动链的自由度，并判断该运动链是否具有确定的运动。若有复合铰链，局部自由度和虚约束，应明确指出。

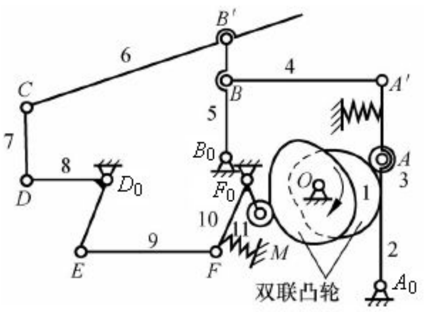


解答：$n=7$，$P_L=10$（其中转动副 C 是三构件的复合铰链），$P_H=0$，因此该运动链的自由度为：

$$F = 3n - 2P_L - P_H = 3\times7 - 2\times10 - 0 = 1$$

该运动链的自由度等于原动件数目，因此具有确定的运动。

9、试计算图示运动链的自由度，并判断该运动链是否具有确定的运动。若有复合铰链，局部自由度和虚约束，应明确指出。

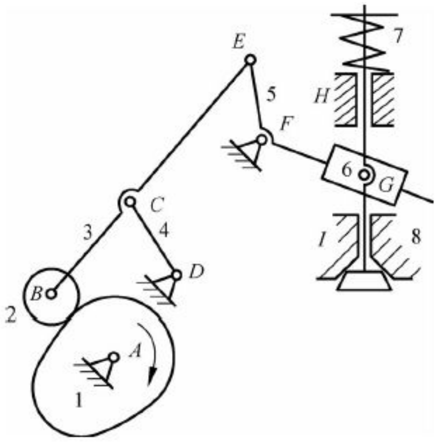


解答：滚子 3 和 11 的转动为局部自由度，没有复合铰链和虚约束，因此$n=9$，$P_L=12$，$P_H=2$，于是该运动链的自由度为：

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times9-2\times12-2=1$$

该运动链的自由度等于原动件数目，因此具有确定的运动。

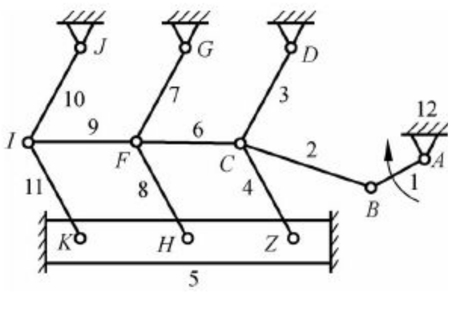
10、试计算示运动链的自由度。若有复合铰链，局部自由度和虚约束，应明确指出。



解答：滚子2的转动为局部自由度，构件7和机架8在H和I处形成2个移动副，其中一个为虚约束。$n=6$，$P_L=8$，$P_H=1$，于是运动链的自由度为：

$$F=3n-2P_L-P_H=3\times6-2\times8-1=1$$

11、试计算图示运动链的自由度，并判断该运动链是否具有确定的运动。若有复合铰链，局部自由度和虚约束，应明确指出。



解答：构件6和9以及分别引入的转动副C、F、I为虚约束，C处为3构件的复合铰链，没有局部自由度，$n=9$，$P_L=13$，$P_H=0$，于是可得该运动链的自由度为：

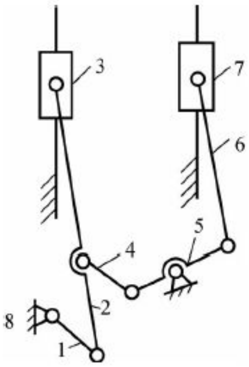
$$F=3n-2P_L-P_H=3\times9-2\times13=1$$

该运动链的自由度等于原动件数目，因此具有确定的运动。

12、什么是机构的组成原理？什么是基本杆组？如何确定基本杆组的级别及机构的级别?

解答：任何一个机构都是由若干个基本杆组依次连接于原动件和机架上构成的，这就是机构的组成原理。不可再分的、自由度为零的构件组，称之为基本杆组；最简单的基本杆组是由2个构件3个低副组成的杆组，称之为II级杆组。由4个构件6个低副组成，其特征是具有一个三副构件，称为III 级杆组。机构分解出的基本杆组的最高级别为机构的级别。

13、对图示的机构进行组成分析，判断当分别以构件1、3、7作为原动件时，机构的级别会有何变化？



解答：

计算机构的自由度。此机构没有复合铰链、局部自由度和虚约束，

$n=7 \quad P_L=10 \quad P_H=0$，因此机构自由度为

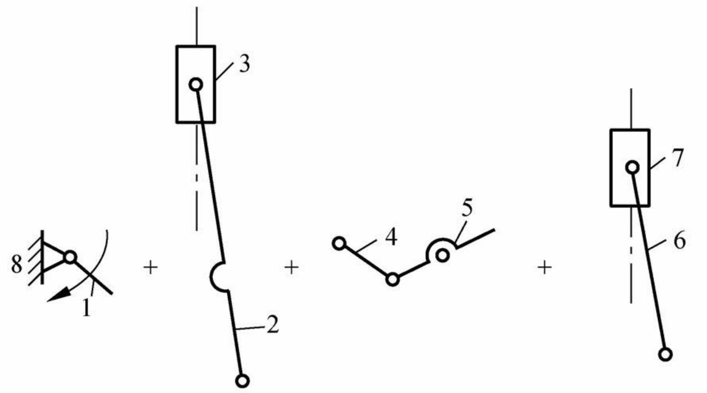
$$F=3n-2P_L-P_H=1$$

机构的结构分析：

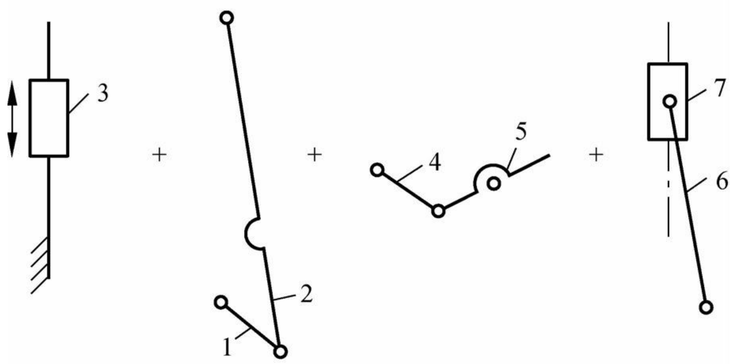
1．当以构件1作为原动件时，机构的杆组拆分如图a所示，机构的级别为Ⅱ级；

2．当以构件3作为原动件时，机构的杆组拆分如图b所示，机构的级别为Ⅱ级；

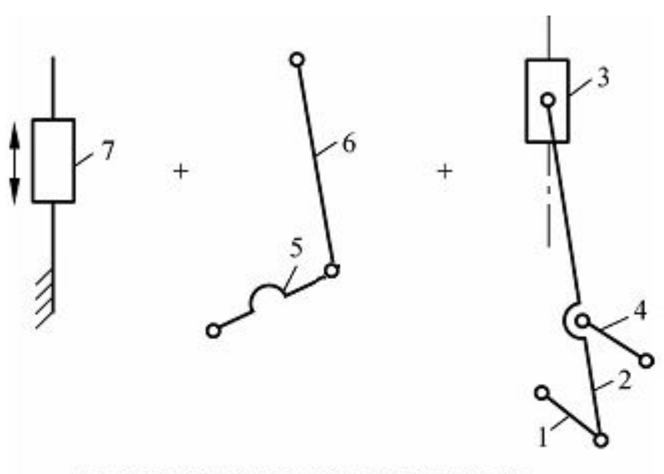
3．当以构件7作为原动件时，机构的杆组拆分如图c所示，机构的级别为III级。



(a) 构件1为原动件时的机构结构分析



(b) 构件3为原动件时的机构结构分析



(c) 构件7为原动件时的机构结构分析

连杆平面连杆机构的分析与设计

1、铰链四杆机构中存在曲柄的条件是什么？确定机构中是否存在曲柄的意义是什么？

解答：铰链四杆机构存在曲柄需要同时满足两个条件：一是最长杆与最短杆长度之和小于或等于其他两杆长度之和；二是连架杆和机架其一为最短。确定机构是否存在曲柄，就是要确定该机构是否可以用旋转电机直接驱动。

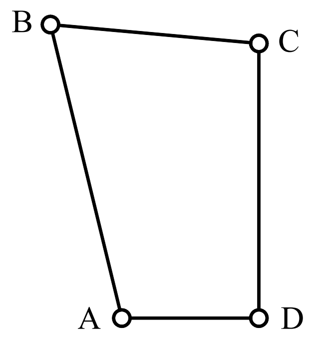
2、在如图所示的铰链四杆运动链中，各杆的长度分别为 l_{AB}=55mm，l_{BC}=40mm，l_{CD}=50mm，l_{AD}=25mm。试问：

（1）该运动链中，是否存在双整转副构件？

（2）如果具有双整转副构件，那么哪个构件为机架时，可获得曲柄摇杆机构？

（3）哪个构件为机架时，可获得双曲柄机构？

（4）哪个构件为机架时，可获得双摇杆机构？



解答：（1）因为$l_{AB}+l_{AD}=55+25=80<l_{BC}+l_{CD}=40+50=90$，满足曲柄存在的杆长条件，所以最短杆 AD 就是双整转副构件。

（2）当以 AB 或 CD 杆为机架时，AD 杆成为曲柄，BC 杆成为摇杆，得到曲柄摇杆机构。

（3）当以 AD 杆为机架时，得到双曲柄机构。

（4）当以 BC 杆为机架时，得到双摇杆机构。

3、什么是连杆机构的急回特性？如何来衡量急回特性？什么叫极位夹角，它和机构的急回特性有什么关系？

解答：原动件曲柄匀速转动时，执行从动件往复运动。当执行从动件往复运动的平均速度（或角速度）不相等时，如工作行程慢，空回行程快，这种特性就称为急回特性。急回特性是用行程速比系数K来衡量的。

$$K=\frac{\text{执行从动件空回行程平均(角)速度}}{\text{执行从动件工作行程平均(角)速度}}$$

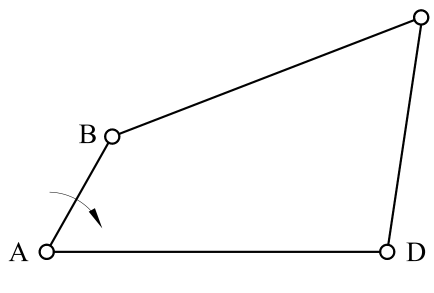
极位夹角：执行从动件往复运动过程中，所处两个极限位置时，对应原动件曲柄相应所处两个位置所夹的锐角称为极位夹角，用θ来表示。它和急回特性的关系是通过它和行程速比系数K的关系来描述的：

$$\theta=180^{\circ}\frac{\mathrm{K-1}}{\mathrm{K+1}}$$

4、在如图所示的铰链四杆机构中，各杆件长度分别为 l_{AB}=28mm，l_{BC}=70mm，l_{CD}=50mm，l_{AD}=72mm。

(1)若取 AD 为机架，重新作图求该机构的极位夹角θ，杆 CD 的最大摆角ψ；

(2)若取 AB 为机架，该机构将演化为何种类型的机构？为什么？请说明这时 C，D 两个转动副是整转副还是摆转副？

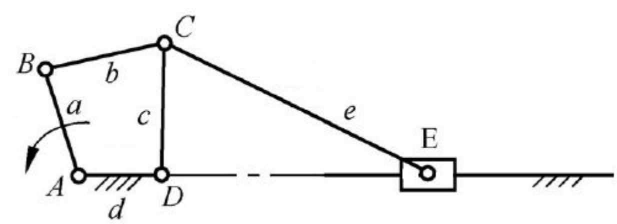


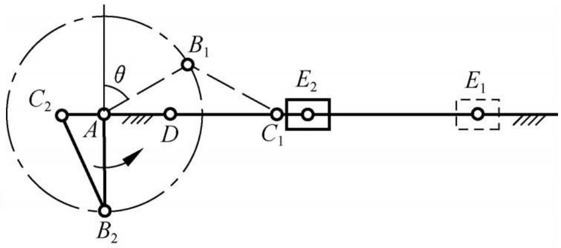
解答：（1）取比例尺 μ_l，画出机构的极限位置及传动角的极值位置图，分别如图（a）和（b）所示。由图上量得 $\theta = 13^\circ$　$\psi = 71^\circ$。

（2）由于 $l_{AB} + l_{AD} \le l_{BC} + l_{CD}$，故存在曲柄。

又由于 AB 为最短杆，故机构演化为双曲柄机构，C，D 都是摆转副。

5、如图所示机构，已知：*a*=150mm，*b*=155mm，*c*=160mm，*d*=100mm，*e*=350mm。试分析当构件 AB 为主动件，滑块 E 为从动件时，机构是否有急回特性(如果存在急回特性，重新作图求出行程速比系数 K)？如主动件改为构件 CD 时，情况有无变化？试用作图法说明之。





解答：（1）铰链四杆机构 $ABCD$ 为双曲柄机构。先由曲柄滑块机构 DCE 求得滑块 E 的两个极限位置 E_1 和 E_2，相对应得到铰链 C 的两个位置为 C_1 和 C_2。

再由铰链四杆机构 $ABCD$ 可求出相对应的铰链 B 的两个位置 B_1 和 B_2，即得执行从动件滑块处于两个极限位置时，曲柄 AB 相应所处的两个位置 AB_1 和 AB_2。

AB_1 和 AB_2 所夹的锐角，就是极位夹角 θ，如右上图所示。因极位夹角 $\theta \neq 0$，因此该机构存在急回特性。

（2）当构件 CD 为主动件时，机构为 DCE 对心曲柄滑块机构，所以滑块 E 在运动过程中无急回特性。

6、什么是连杆机构的压力角和传动角？四杆机构(铰链四杆机构和曲柄滑块机构)的最大压力角发生在什么位置？

解答：连杆机构的压力角 a 是执行从动件上某点所受驱动力与力作用点速度所夹的锐角。传动角 γ 是压力角 a 的余角，即 $\gamma = 90^\circ - a$。四杆机构的最大压力角发生在曲柄位于与两个固定铰链连线重合的位置。曲柄与固定铰链连线重合有两个位置，比较这两个位置机构的压力角，其中较大的一个就是机构的最大压力角。

7、什么是连杆机构的“死点位置”，在什么情况下机构会出现“死点位置”？

解答：在机构运动过程中，当机构处于某些位置时，由于作用在执行从动件上的驱动力的有效分力为零（此时机构的压力角为90°），从动件无驱动其运动的力矩或力，此时机构不能运动，称此位置为机构的死点位置。当执行从动件和连杆共线时，机构将发生“死点”。对于曲柄摇杆机构，摇杆为原动件，且处于极限位置时，机构处于“死点位置”；对于曲柄滑块机构，当以摇杆为原动件，且处于极限位置时，机构处于“死点位置”；

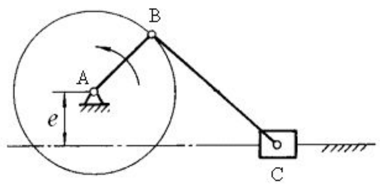
对于摆动导杆机构，当导杆为原动件，且处于极限位置时，机构处于“死点位置”。

8、如图所示的偏置曲柄滑块机构 ABC，已知偏距为 e。试：

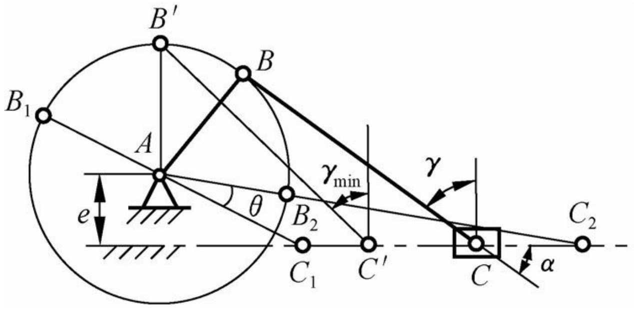
(1)在题图上标出机构在该位置时的压力角α和传动角γ；

(2)重新作图标出极位夹角θ；

(3)重新作图标出最小传动角$\gamma_{\min}$。



解答：



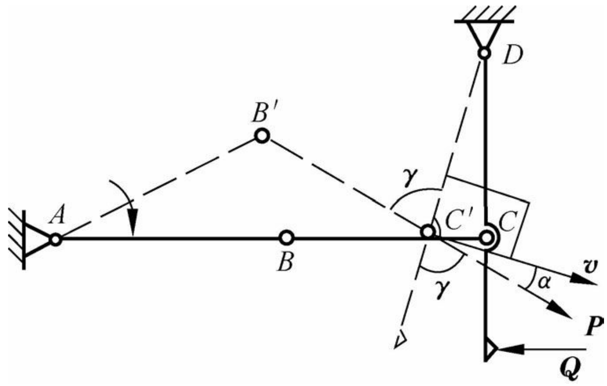
9、如图所示为开关的分合闸机构。试确定：

(1) AB 为主动件时，在图上标出机构在虚线位置时的压力角α和传动角γ；

(2) 分析机构在实线位置（合闸）时，在触头接合力 Q 作用下机构会不会打开，为什么？

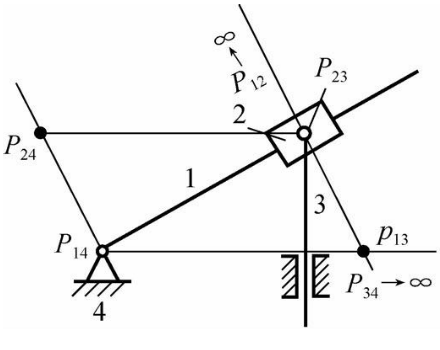
解答：（1）如右图所示。

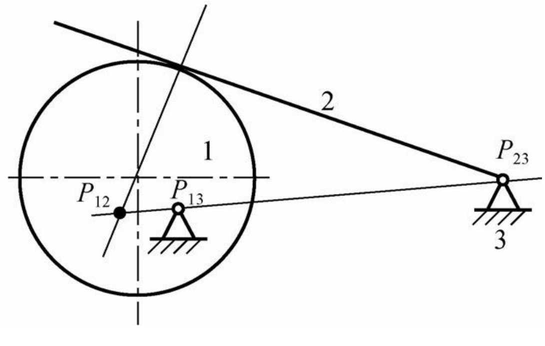
（2）此时CD杆是主动件，机构处于死点位置，C点的约束反力通过B点和A点，执行从动件AB上无驱动力矩存在，因此机构不能自动打开。



10、试求出图示各机构的全部瞬心。

解答：

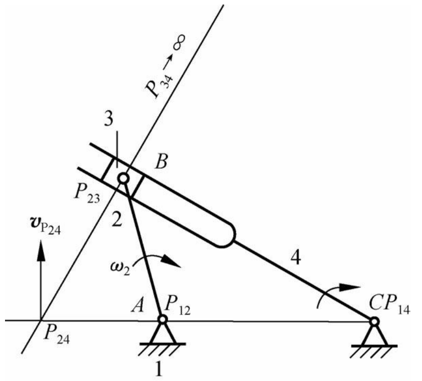




11、在图所示的机构中，已知曲柄 2 顺时针方向匀速转动，角速度 $\omega_2 = 100$ rad/s，长度比例尺 $\mu_1 = 0.001\text{m/mm}$，试求在图示位置导杆 4 的角速度 ω_4 的大小和方向。

解答：因已知曲柄2的运动，而所求构件4的运动，所以要求取构件2和4的瞬心 P_{24}。根据瞬心的性质，得

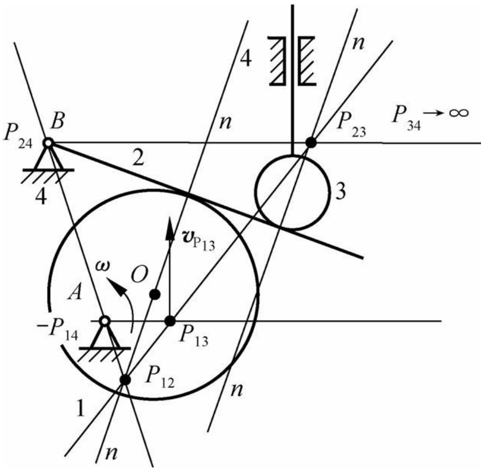
$$\omega_{P_{24}} = \omega_2 \overline{P_{24}P_{12}} = \omega_4 \overline{P_{24}P_{14}}$$



所以

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{\overline{P_{24}P_{12}}}{\overline{P_{24}P_{14}}}$$ 方向顺时针运动。

12、在如图所示的机构中，已知原动件 1 以匀角速度 $\omega_2 = 10$ rad/s 沿逆时针方向转动，长度比例尺 $\mu_1 = 0.001\text{m/mm}$，试确定机构在图示位置时：



(1)全部瞬心；

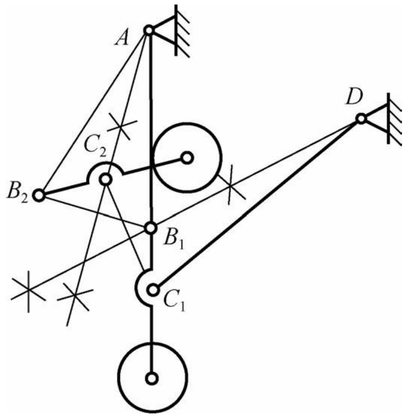
(2)构件 3 的速度 v_3。

解答：

因为构件1的运动为已知，而要求的是构件3的速度，所以应用瞬心 P_{13} 来求得构件3的速度为

$v_3 = v_{P_{13}} = \omega_1 \overline{P_{13}P_{14}} \mu_l$，方向向上

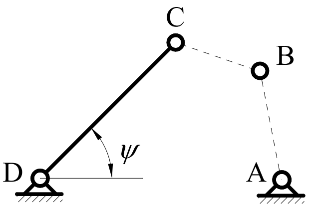
13、在飞机起落架所用的铰链四杆机构中，已知连杆的两位置如图所示，要求连架杆 AB 的铰链 A 位于 B_1C_1 的连线上，连架杆 CD 的铰链 D 位于 B_2C_2 的连线上。试设计此铰链四杆机构（作图在题图上进行）。

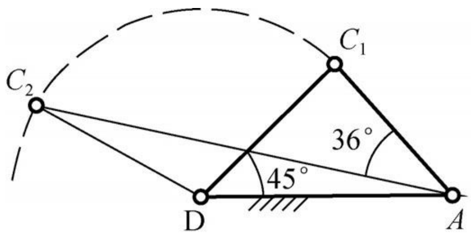


解答：如右图所示。

14、用图解法设计如图所示的铰链四杆机构。已知其摇杆 CD 的长度 l_{CD}=75mm，行程速比系数 K=1.5，机架 AD 的长度 l_{AD}=100mm，又知摇杆的一个极限位置与机架间的夹角 $\psi = 45°$，试重新作图求机构的曲柄长度

l_{AB} 和连杆长度 l_{BC} 。



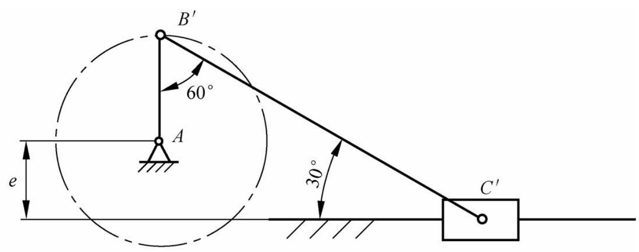


解答：如右上图所示。

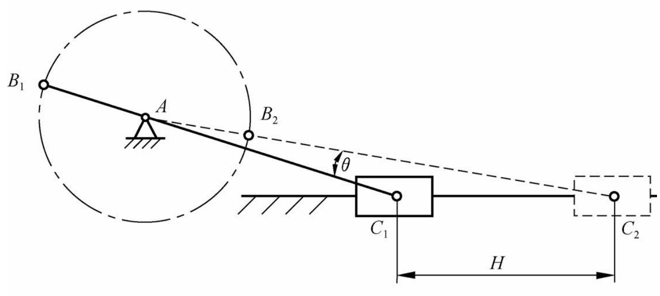
$$l_{AB}=\overline{AB}\mu_l=\frac{\overline{AC_2}-\overline{AC_1}}{2}=48mm \qquad l_{BC}=\overline{BC}\mu_l=\frac{\overline{AC_2}+\overline{AC_1}}{2}=120mm$$

15、设计一曲柄滑块机构。已知曲柄长 l_{AB}=20mm，偏心距 e=15mm，其最大压力角 α=30°。试用作图法确定连杆长度 l_{BC}，滑块的最大行程 H，并标明其极位夹角 θ，求出其行程速度变化系数 K。

解答：



(a)



(b)

$$l_{BC}=\overline{B'C'}\mu_l=69mm$$

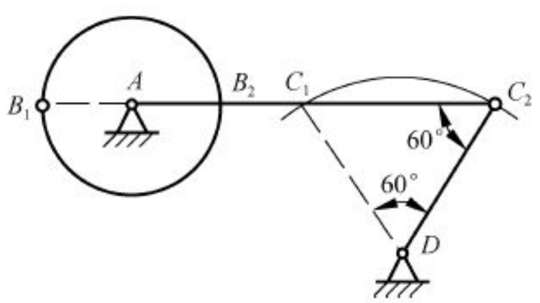
$$H=\overline{C_1C_2}\mu_l=40.5mm$$

测量得到 $\theta=8.5^\circ$，所以

$$K=\frac{180^\circ+\theta}{180^\circ-\theta}=1.099$$

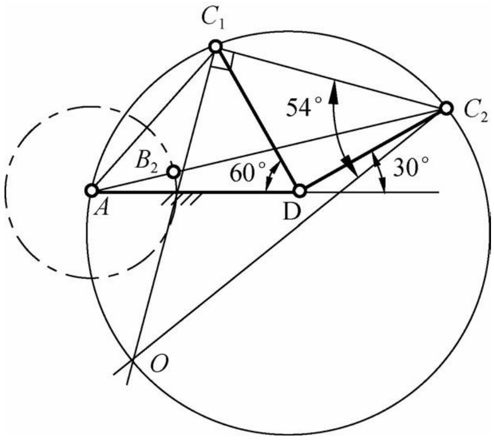
16、设计一铰链四杆机构。已知行程速度变化系数 K=1，摇杆长为 l_{CD}=100mm，连杆长为 l_{BC}=150 mm，试设计该铰链四杆机构，重新作图求曲柄 AB 和机架 AD 的长度 l_{AB} 和 l_{AD}。

解答： $l_{AB}=\dfrac{\overline{C_1C_2}}{2}\mu_l=50mm$ $\qquad l_{AD}=\sqrt{l_{C_2D}^2+l_{AC_2}^2-2l_{C_2D}l_{AC_2}\cos\angle AC_2D}=173.21mm$



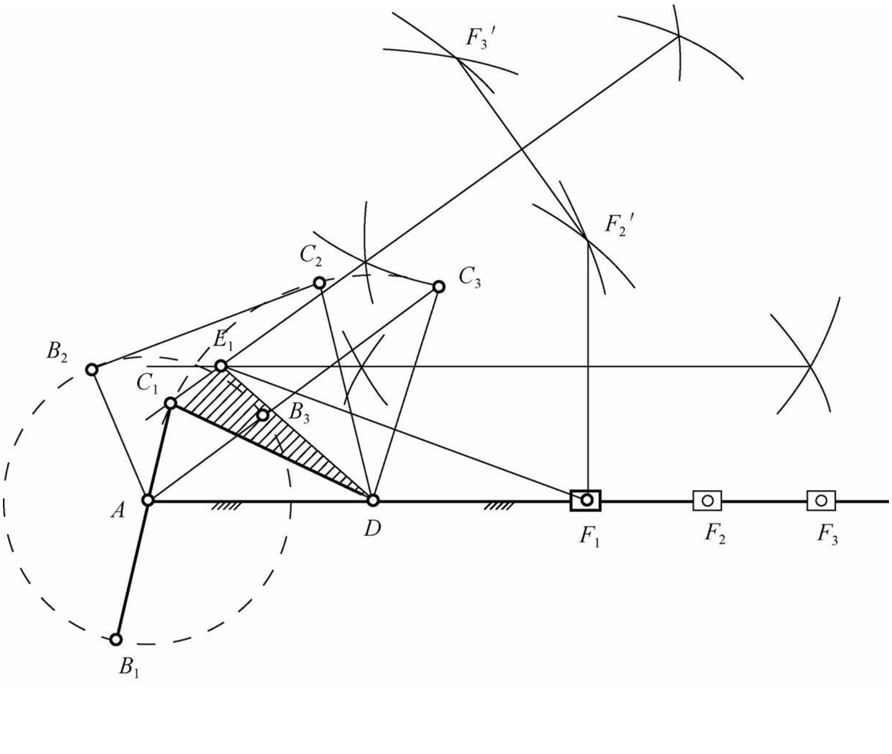
17、有一曲柄摇杆机构，已知其摇杆长 l_{CD}=420mm，摆角 $\psi=90^\circ$，摇杆在两极限位置时与机架所成的夹角为 $60°$ 和 $30°$，机构的行程速比系数 $K=1.5$，用图解法设计此四杆机构。

解答： $l_{AB}=\overline{AB}\mu_l=210mm$， $l_{BC}=\overline{BC}\mu_l=690mm$ ， $l_{AD}=\overline{AD}\mu_l=520mm$

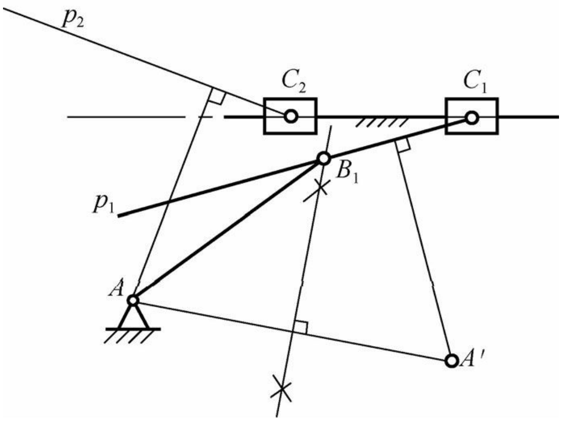


18、如图所示，已知曲柄摇杆机构 ABCD。现要求用一连杆将摇杆 CD 和一滑块 F 连接起来，使摇杆的三个位置 C_1D，C_2D，C_3D 和滑块的三个位置 F_1，F_2，F_3 相对应，其中，F_1、F_3 分别为滑块的左右极限位置。试用图解法确定摇杆 CD 和滑块 F 之间的连杆与摇杆 CD 铰接点 E 的位置。

解答：如下图所示。



19、如图所示，现已给定摇杆滑块机构 ABC 中固定铰链 A 及滑块导路的位置，要求当滑块由 C_1 到 C_2 时连杆由 p_1 到 p_2。设计此机构，求出摇杆和连杆的长度 l_{AB} 和 l_{BC}（保留作图线，要求 B 点取在 p 线上）。



解答： $l_{AB}=\overline{AB_1}\mu_l=39\ \text{mm}$

$l_{BC}=\overline{BC}\mu_l=25.5\ \text{mm}$

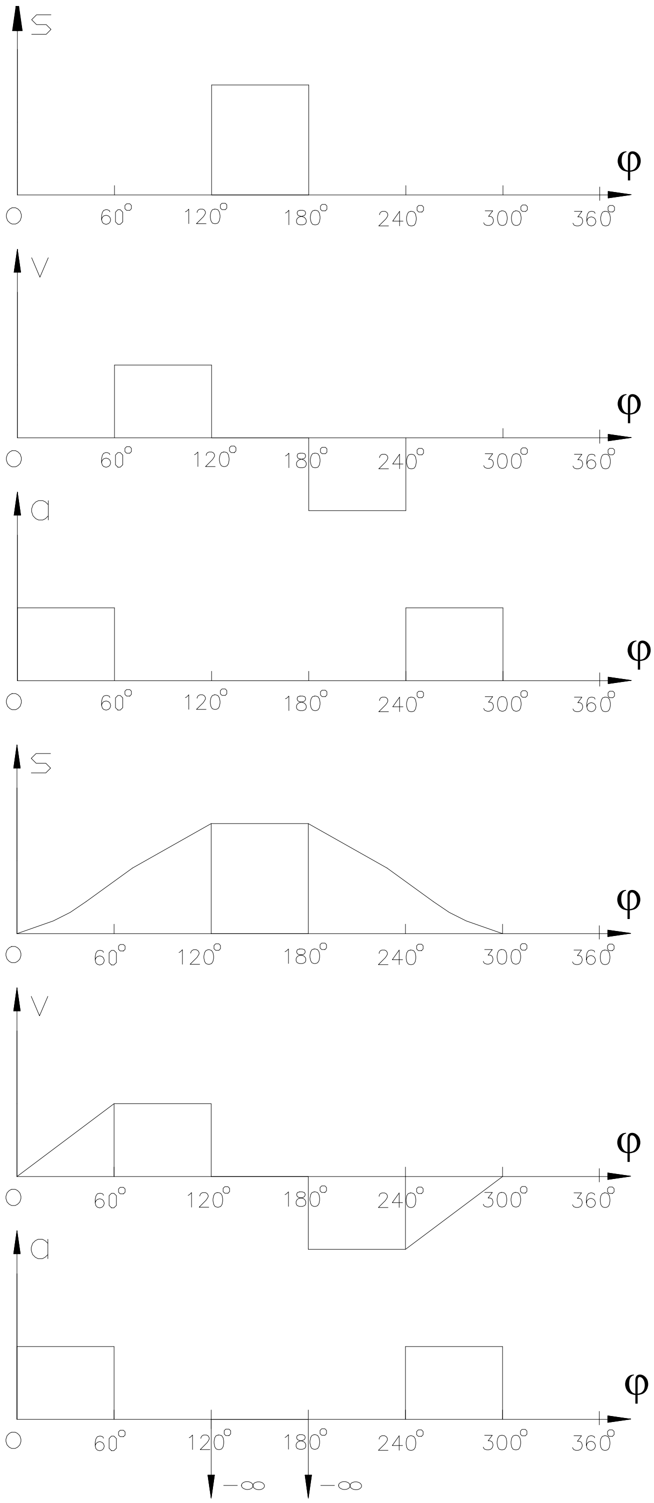
凸轮机构及其设计

1．下图所示为一尖端移动从动件盘形凸轮机构从动件的部分运动线图。试在图上补全各段的位移、速度及加速度曲线，并指出在哪些位置会出现刚性冲击？哪些位置会出现柔性冲击？

解答：完整的从动件的位移、速度及加速度曲线如图（b）所示。

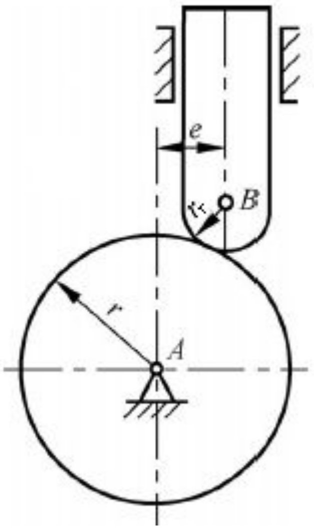
出现柔性冲击的位置： 0，60º，240º，300º。

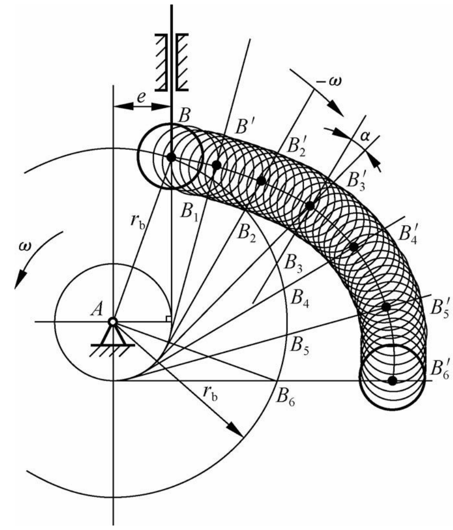
出现刚性冲击的位置： 120º，180º。

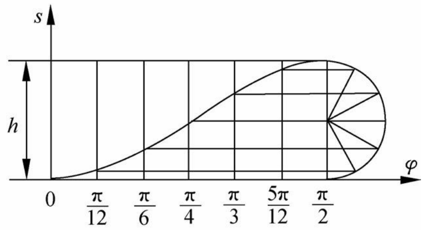


(b)

2、试设计如图所示的直动从动件盘形凸轮机构，要求在凸轮转角为 0°～90°时，从动件以余弦加速度运动规律上升 h=20mm，且取 r＝25mm，e=l0mm， r_r=5mm。试用反转法给出当凸轮转角= 0°～ 90°时凸轮的工作廓线（画图的分度要求≤15°）；







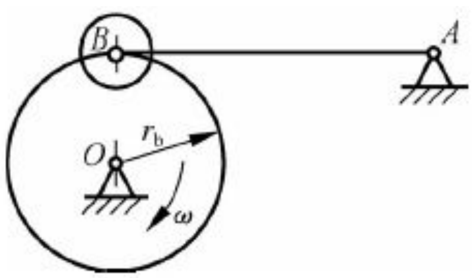
解答：（1）凸轮的转向为逆时针方向，使凸轮机构为正偏置，减小推程段凸轮机构的压力角；

（2）将圆弧顶推杆视为滚子从动件，取尺寸比例尺 μ_l 作图，如右上图所示；

（3）当 $\varphi = 45^\circ$ 时，$a = 14.5^\circ$ 。

3、试用作图法（重新作图）设计凸轮的实际廓线。已知基圆半径 r_b =40mm，推杆长 l_{AB} =80mm，滚子半径 rr=l0mm，推程运动角 Φ =180°，回程运动角 Φ' =180°，推程回程均采用余弦加速度运动规律，从动件初始位置 AB 与 OB 垂直（如图所示），推杆最大摆角 $\psi_{\max}$ =30°，凸轮顺时针转动。

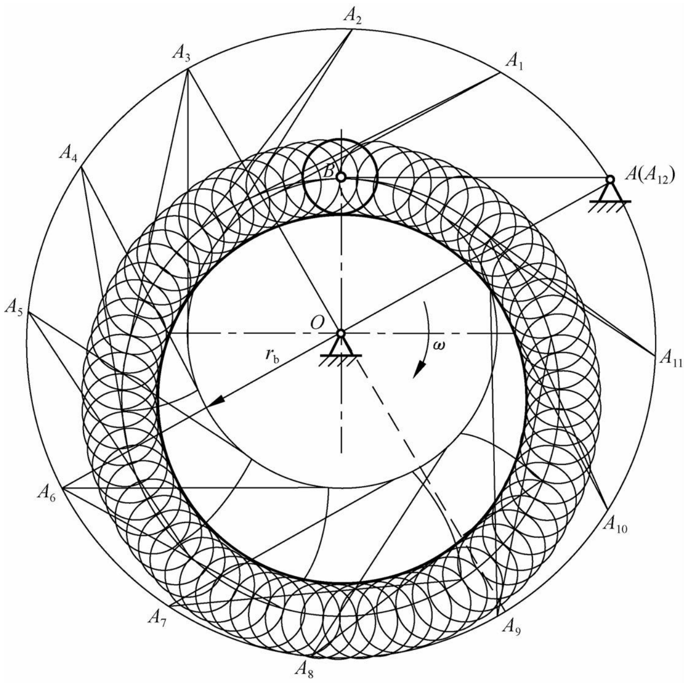
注：推程 $\psi = \frac{\psi_{\max}}{2}(1-\cos\frac{\pi\varphi}{\Phi})$



解答：由于推杆的最大摆角 $\psi_{\max} = 30^\circ$，推程角和回程角相等，而且有 $\Phi = \Phi' = 180^\circ$，所以推程段角的位移方程可写为

$$\psi = \frac{\psi_{\max}}{2}(1-\cos\frac{\pi}{\Phi}\varphi) = 15^\circ(1-\cos\varphi)$$

将推程角取6等分，由上式求出各等分点推杆的摆角 ψ；同样可求出回程段各分点推杆的摆角 ψ 。取尺寸比例尺 μ_l 作图，如下图所示。

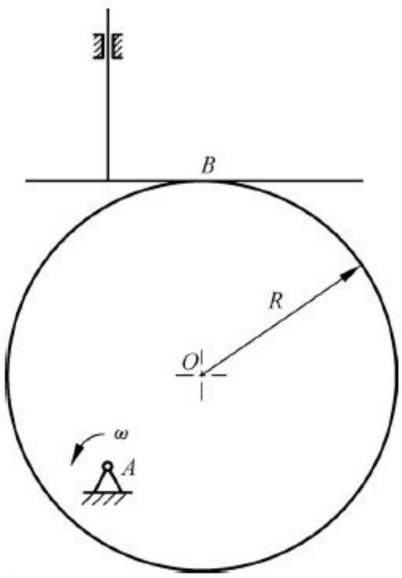


4、图示为直动平底从动件盘形凸轮机构，凸轮为 R＝30mm 的偏心圆盘，$\overline{AO}$＝20mm，试求：

（1）凸轮的基圆半径 r_b 和推杆的行程 h;

（2）凸轮机构的最大压力角 α_{max} 和最小压力角 α_{min} ；

（3）推杆由最低位置到图示位置的位移 s。



解答:（1）如图所示，$r_b = R - \overline{AO} = 30 - 20 = 10$ mm，

$$h = \overline{AM} - \overline{AN} = R + \overline{AO} - (R - \overline{AO}) = 2\overline{AO} = 2 \times 20 = 40 \text{ mm}$$

（2） 由于平底垂直于导路的平底从动件凸轮机构的压力角恒等于零，所以 $a_{\max} = a_{\min} = 0^\circ$

（3） 取 AO 连线与水平线的夹角为凸轮的转角 φ，则：从动件的位移方程为

$$s=\overline{BP}-r_b=R+\overline{AO}\sin\varphi-R+\overline{AO}=\overline{AO}(1+\sin\varphi)=20(1+\sin\varphi)$$

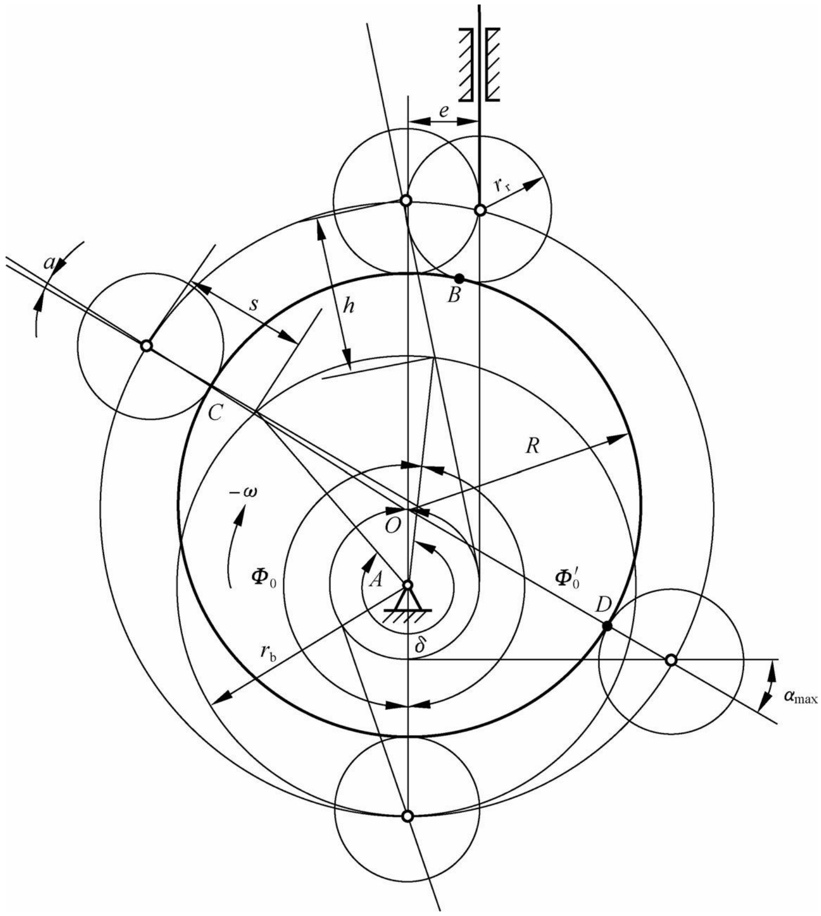
5、图示的凸轮为偏心圆盘。圆心为O，半径 R＝30mm，偏心距 l_{OA}＝10mm，小滚子半径 r_r=10mm，偏距 e=10mm。试求（均在图上标注出）：

（1）凸轮的基圆半径 r_b；

（2）最大压力角 α_{min} 的数值及发生的位置；

（3）小滚子与凸轮之间从 B 点接触到 C 点接触过程中，凸轮转过的角度 φ 为多少？

（4）小滚子与凸轮在 C 点接触时，机构的压力角 α_C 是多少？



解答：取尺寸比例尺 μ_l 作图，得，如右图所示，

（1）基圆半径 $r_b=30$ mm；

（2）当滚子与凸轮廓线在D点接触时压力角最大，其值为 $a_{max}=30^\circ$；

（3）从B点接触到C点接触时凸轮所转过的角度为 $\varphi=313^\circ$；

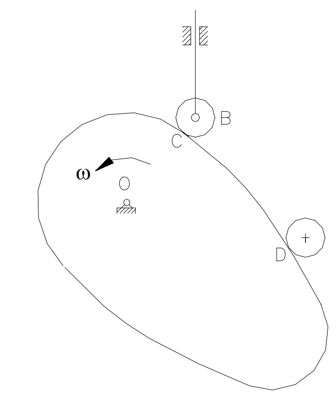
（4）在C点接触时凸轮机构的压力角为 $a_c=2^\circ$。

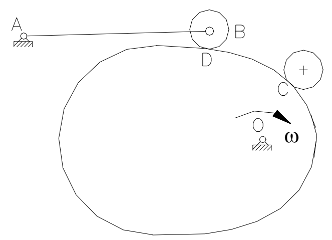
6．在图示的凸轮机构中，从动件的起始上升点均为 C 点。

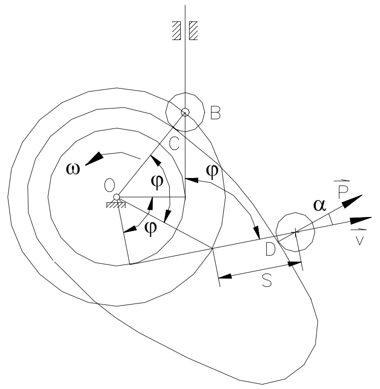
（1）试在图上标注出从 C 点接触到 D 点接触时，凸轮转过的角度 φ 及从动件走过的位移；

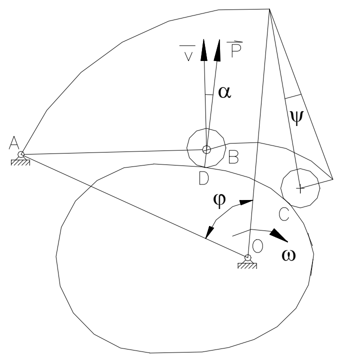
（2）标出在 D 点接触时凸轮机构的压力角 α。

解答：

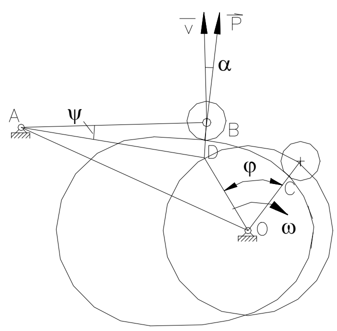






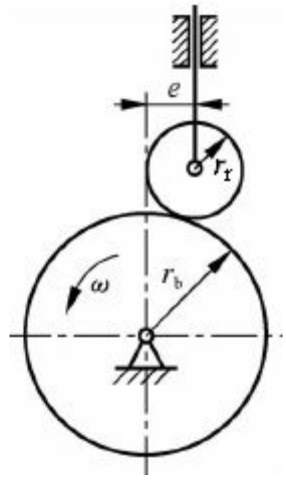


解法一



解法二

7、已知一偏置直动从动件盘形凸轮机构，基圆半径 r_b＝20mm，偏距 e＝10mm，滚子半径 r_r＝5mm。当凸轮等速回转 180°时，推杆等速移动 40mm。求当凸轮转角 $\varphi=60°$ 时凸轮机构的压力角。



解答：压力角的计算公式为

$$a=\arctan\frac{{ds}/{d\varphi}}{r_b+s}$$

式中，$s={h\varphi}/{\Phi}=40\,{\varphi}/{\pi}$；${ds}/{d\varphi}={40}/{\pi}$。所以有

$$当\ \varphi=60^{\circ}\ 时，有\ a=\arctan\frac{{40}/{\pi}}{20+{40}/{\pi}\times\frac{\pi}{3}}=20.9^{\circ}$$

齿轮机构及其设计

1、渐开线齿廓上任一点的压力角是如何确定的？渐开线齿廓上各点的压力角是否相同？何处的压力角为零？何处的压力角为标准值？

解答：渐开线齿廓上任一点的压力角a是指该点所受正压力的方向与该点速度方向之间所夹的锐角；渐开线齿廓上各点的压力角是不同的；基圆的压力角为零；分度圆的压力角为标准值，一般情况下$a=20^{\circ}$。

2、设有一渐开线标准直齿圆柱齿轮，$z=20$，$m=2.5\mathrm{mm}$，$h_a^*=1$，$\alpha=20°$，试求其齿廓曲线在分度圆和齿顶圆上的曲率半径及齿顶圆压力角。

解答：分度圆半径$r=\dfrac{mz}{2}=\dfrac{2.5\times20}{2}=25.0\,\mathrm{mm}$

基圆半径$r_b=\dfrac{mz}{2}\cos a=\dfrac{1}{2}\times2.5\times20\times\cos20^{\circ}=23.49\,\mathrm{mm}$

齿顶圆半径$r_a=\dfrac{m}{2}(z+2h_a^*)=\dfrac{1}{2}\times2.5\times(20+2\times1)=27.50\,\mathrm{mm}$

齿顶圆压力角$a_a=\arccos\dfrac{r_b}{r_a}=\arccos\dfrac{23.49}{27.50}=31.33^{\circ}$

分度圆的曲率半径为$\rho=\sqrt{r^2-r_b^2}=\sqrt{25^2-23.49^2}=8.55\,\mathrm{mm}$

齿顶圆曲率半径为$\rho_a=\sqrt{r_a^2-r_b^2}=\sqrt{27.5^2-23.49^2}=14.30\,\mathrm{mm}$

3、试问渐开线标准直齿外齿轮的齿根圆一定大于基圆吗？当齿根圆与基圆重合时，其齿数应为多少？当齿数小于以上求得的齿数时，试问基圆与齿根圆哪个大？

解答：渐开线标准外齿轮的齿根圆不一定大于基圆，有时齿根圆大于基圆，有时基圆大于齿根圆，这与齿数有关。当齿根圆与基圆重合时，有

$$d_f=m(z-2h_a^*-2c^*)=mz\cos a=d_b$$

$$z=\frac{2(h_a^*+c^*)}{1-\cos a}=\frac{2\times(1+0.25)}{1-\cos20^{\circ}}=41.45$$

当齿数小于41时，基圆大于齿根圆。

4、分度圆和节圆有何区别？在什么情况下，分度圆和节圆是重合的？

解答：分度圆是齿轮上模数m和压力角a分别为标准值的圆，无论齿轮是否啮合，该圆都存在。节圆是只有在齿轮啮合时才存在的圆，它是节点绕各自齿轮中心回转的轨迹，两齿轮的节圆总是相切的。当标准齿轮在标准安装情况下，分度圆和节圆是重合的。

5、啮合角与压力角有什么区别？在什么情况下，啮合角与压力角是相等的？

解答：渐开线齿廓上任一点的压力角 a 是指该点所受正压力的方向与该点速度方向之间所夹的锐角；啮合角 a' 是节点 P 的速度方向与啮合线 $\overline{N_1N_2}$ 之间所夹的锐角，啮合角 a' 总是等于齿轮的节圆压力角，当标准齿轮在标准安装情况下，啮合角 a' 与压力角 a 是相等的。

6、标准渐开线直齿圆柱齿轮在标准中心距安装条件下具有哪些特性？

解答：若两齿轮传动的中心距刚好等于两齿轮节圆半径之和，则称此中心距为标准中心距，按此中心距安装齿轮传动称为标准安装。

（1）两齿轮的分度圆将分别与各自的节圆重合。

（2）轮齿的齿侧间隙为零。

（3）顶隙刚好为标准顶隙，即 $c = c^* m = 0.25m$。

7、已知一对正确安装的渐开线标准直齿圆柱齿轮传动，中心距 $a = 100\text{mm}$，模数 $m = 4\text{mm}$，压力角 $\alpha = 20°$，传动比 $i = \omega_1 / \omega_2 = 1.5$。试计算齿轮 1 和 2 的齿数、分度圆、基圆、齿顶圆和齿根圆半径。

解答：因为 $i = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{z_2}{z_1}$

$$a = \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{mz_1}{2}(1 + \frac{z_2}{z_1}) = \frac{mz_1}{2}(1 + i)$$

所以 $z_1 = \dfrac{2a}{m(1+i)} = \dfrac{2\times100}{4\times(1+1.5)} = 20$

$z_2 = iz_1 = 1.5\times20 = 30$。

$d_1 = mz_1 = 4\times20 = 80\ \text{mm}$　　$d_2 = mz_2 = 4\times30 = 120\ \text{mm}$

$$d_{b1} = mz_1\cos a = 4\times20\times\cos20^\circ = 75.175\ \text{mm}$$

$$d_{b2} = mz_2\cos a = 4\times30\times\cos20^\circ = 112.763\ \text{mm}$$

$$d_{a1} = m(z_1 + 2h_a^*) = 4\times(20+2) = 88\ \text{mm}$$

$$d_{a2} = m(z_2 + 2h_a^*) = 4\times(30+2) = 128\ \text{mm}$$

$$d_{f1} = m(z_1 - 2h_a^* - 2c^*) = 4\times(20-2-2\times0.25) = 70\ \text{mm}$$

$$d_{f2} = m(z_2 - 2h_a^* - 2c^*) = 4\times(30-2-2\times0.25) = 110\ \text{mm}$$

8、设有一对外啮合齿轮：$z_1 = 28$、$z_2 = 41$，$m = 10\text{mm}$，$\alpha = 20°$，$h_a^* = 1$。试求当中心距 $a' = 350\ \text{mm}$ 时，两轮啮合角 α'。又当 $\alpha' = 23°$ 时，试求其中心距 a'。

解答：$$\alpha' = \arccos(\frac{a\cos\alpha}{a'}) = \arccos[\frac{m(z_1+z_2)}{2a'}\cos\alpha] = 22.14^\circ$$

$$a' = \frac{a\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{m(z_1+z_2)}{2\cos\alpha'}\cos\alpha = 352.19mm$$

9、已知一对标准外啮合直齿圆柱齿轮传动 $m = 5\text{mm}$，$\alpha = 20°$，$z_1 = 19$，$z_2 = 42$，试求其重合度 ε_α。问当有一对轮齿在节点 P 处啮合时，是否还有其他轮齿也处于啮合状态；又当一对轮齿在终止啮合点 B_1 处啮合时，情况又如何？

解答：对于标准外啮合直齿圆柱齿轮标准安装情况下，齿轮传动的啮合角等于齿轮的压力角 $a' = a = 20^\circ$

$r_{b1} = r_1\cos a = mz_1\cos a/2 = 44.64mm$，　　$r_{b2} = r_2\cos a = mz_2\cos a/2 = 98.67mm$

$r_{a1} = r_1 + h_a = mz_1/2 + mh_a^* = 52.5mm$，　　$r_{a2} = r_2 + h_a = mz_2/2 + mh_a^* = 110mm$

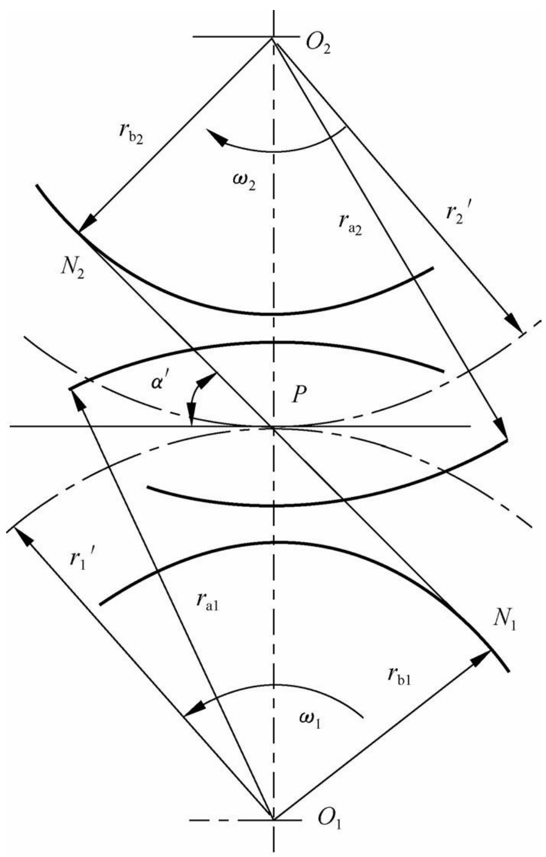
$a_{a1} = \arccos(r_{b1}/r_{a1}) = 31.76^\circ$，　　$a_{a2} = \arccos(r_{b2}/r_{a2}) = 26.23^\circ$

$\varepsilon_a = [z_1(\tan a_{a1} - \tan a') + z_2(\tan a_{a2} - \tan a')]/2\pi = 1.632$

当有一对轮齿在节点P处啮合时，没有其他轮齿也处于啮合状态；当一对轮齿在 B_1 点处啮合时还有另外一对齿轮啮合。

10、如图中已知一对齿轮的基圆和齿顶圆，齿轮 1 为主动轮。试在图中标出：理论啮合线，极限啮合点 N_1、N_2，轮齿啮合的开始点和终止点 B_1、B_2，啮合角 α'，节点 P 和节圆 r_1'、r_2'。

解答：如图所示。



11、何谓根切？它有何危害，如何避免？

解答：用范成法加工渐开线齿轮时，若刀具的齿顶线或齿顶圆与啮合线的交点超过被切齿轮的啮合极限点 N_1，则刀具的齿顶会将被切齿轮齿根的渐开线齿廓切去了一部分，这种现象称为“根切现象”。根切会降低齿根强度，甚至会降低传动的重合度，减少使用寿命，影响传动质量，应尽量避免。为避免齿轮加工中产生根切，刀具齿顶线必须位于啮合极限点 N_1 之下。

12、用范成法加工 $z=12$，$m=12mm$，$\alpha=20°$ 的渐开线直齿轮。为避免根切，应采用什么变位方法加工？最小变位量是多少？并计算按最小变位量变位时齿轮分度圆的齿厚和齿槽宽。

解答：为避免根切，应采用正变位方法加工齿轮。

（1） 最小变位量 $x_{\min}=h_a^*\dfrac{z_{\min}-z}{z_{\min}}=1\times\dfrac{17-12}{17}=0.2941$；

（2） 分度圆齿厚 $s=(\dfrac{\pi}{2}+2x\tan a)m=(\dfrac{\pi}{2}+2\times0.2941\times\tan20^{\circ})\times12=21.419\,\text{mm}$

（3） 分度圆齿槽宽 $e=(\dfrac{\pi}{2}-2x\tan a)m=(\dfrac{\pi}{2}-2\times0.2941\times\tan20^{\circ})\times12=16.281\text{mm}$

13、什么是斜齿轮的当量齿轮？为什么要提出当量齿轮的概念？

解答：过斜齿轮分度圆柱表面上的一点 P，作轮齿的法面，分度圆柱在其法剖面内为一椭圆。在此剖面上，点 P 附近的齿形可视为斜齿轮法面上的齿形。以椭圆上点 P 的曲率半径 ρ 为半径作圆，作为虚拟直齿轮的分度圆，并设此虚拟直齿轮的模数和压力角分别等于该斜齿轮的法面模数和法面压力角。该虚拟直齿轮的齿形与上述斜齿轮的法面齿形十分相近，故此虚拟直齿轮即为该斜齿轮的当量齿轮，而其齿数即为当量齿数

$z_v=\dfrac{z}{\cos^3\beta}$。

提出当量齿轮的概念是为了在齿轮加工时便于齿轮刀具的选择，因为用仿形法加工斜齿轮时，刀具是沿齿轮的法向方向进刀的，被加工齿轮的法向齿形与刀具的刃廓形状相同，所以应按当量齿轮的齿数来选择成型铣刀的刀号。另外，由于斜齿轮啮合时的作用力是沿法向作用的，所以计算齿轮强度时也要用到当量齿轮和当量齿数。

14、设已知一对标准斜齿轮传动的参数为 $z_1=21$，$z_2=37$，$m_n=5\text{mm}$，$\alpha_n=20°$，$h_{an}^*=1$，$c_n^*=0.25$，$b=70$，初选 $\beta=15°$。试求中心距 a。圆整中心距 a，并精确重算β、总重合度 ε_γ 、当量齿数 z_{v1} 及 z_{v2}。

解答： $a=\dfrac{m_n}{2\cos\beta}(z_1+z_2)=\dfrac{5}{2\cos15^{\circ}}(21+37)=150.12mm$， 圆整取 $a=150mm$

$$\beta = \arccos\left\{\frac{m_n}{2a}(z_1+z_2)\right\} = 14.835^\circ$$

端面压力角 $a_t = \arctan\dfrac{\tan a_n}{\cos\beta} = 20.63^\circ$， 端面模数 $m_t = \dfrac{m_n}{\cos\beta} = 5.172mm$

分度圆半径 $r_1 = \dfrac{1}{2}m_t z_1 = 54.31mm$， $r_2 = \dfrac{1}{2}m_t z_2 = 95.69mm$

基圆半径 $r_{b1} = r_1\cos a_t = 50.83mm$， $r_{b2} = r_2\cos a_t = 89.55mm$

端面齿顶高系数 $h_{at}^* = h_{an}^*\cos\beta = 0.9667$

齿顶圆半径 $r_{a1} = r_1 + h_{at}^* m_t = 59.31mm$， $r_{a2} = r_2 + h_{at}^* m_t = 100.69mm$

齿顶圆压力角 $a_{at1} = \arccos\dfrac{r_{b1}}{r_{a1}} = 31.02^\circ$， $a_{at2} = \arccos\dfrac{r_{b2}}{r_{a2}} = 27.21^\circ$

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2\pi}[z_1(\tan a_{at1} - \tan a_t') + z_2(\tan a_{at2} - \tan a_t')] = 1.562$$

$\varepsilon_\beta = \dfrac{b\sin\beta}{\pi m_n} = 1.141$， $\varepsilon_\gamma = \varepsilon_a + \varepsilon_\beta = 2.703$

$z_{v1} = \dfrac{z_1}{\cos^3\beta} = 23.25$， $z_{v2} = \dfrac{z_2}{\cos^3\beta} = 40.96$

15、什么是直齿圆锥齿轮的当量齿轮和当量齿数？

解答：设想把由圆锥齿轮背锥展开而形成的扇形齿轮的缺口补满，则可获得一个直齿圆柱齿轮，这个假想的圆柱齿轮称为圆锥齿轮的当量齿轮，其齿数称为圆锥齿轮的当量齿数 z_v；当量齿轮齿数 z_v 与圆锥齿轮齿数 z 之间的关系为 $z_v = \dfrac{z}{\cos\delta}$。

16、已知一对直齿圆锥齿轮的 $z_1 = 15$， $z_2 = 30$， $m = 5\text{mm}$， $h_a^* = 1$， $c^* = 0.2$， $\Sigma = 90^\circ$，试确定这对圆锥齿轮的几何尺寸。

解答：

$$\delta_1 = \arctan({}^{z_1}\!/\!{}_{z_2}) = \arctan({}^{15}\!/\!{}_{30}) = 26.57^\circ，\ \delta_2 = 90^\circ - \delta_1 = 90^\circ - 26.57^\circ = 63.43^\circ$$

$h_a = h_a^* m = m = 5mm$， $h_f = (h_a^* + c^*)m = 1.2m = 1.2\times5 = 6mm$

$d_1 = mz_1 = 5\times15 = 75mm$， $d_2 = mz_2 = 5\times30 = 150mm$

$$d_{a1} = d_1 + 2h_a \cos\delta_1 = 75 + 2\times5\times\cos26.57^\circ = 83.94mm$$

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a \cos\delta_2 = 150 + 2\times5\times\cos63.43^\circ = 154.47mm$$

$$d_{f1} = d_1 - 2h_f \cos\delta_1 = 75 - 2\times6\times\cos26.57^\circ = 64.27mm$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_f \cos\delta_2 = 150 - 2\times6\times\cos63.43^\circ = 144.63mm$$

$$R = m\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,/\,2 = 5\times\sqrt{15^2 + 30^2}\,/\,2 = 83.85mm$$

$$\theta_f = \arctan({}^{h_f}\!/_R) = \arctan(6/83.85) = 4.09^\circ$$

$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_f = 26.57^\circ + 4.09^\circ = 30.66^\circ$， $\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_f = 63.43^\circ + 4.09^\circ = 67.52^\circ$

$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_f = 26.57^\circ - 4.09^\circ = 22.48^\circ$， $\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_f = 26.57^\circ - 4.09^\circ = 59.34^\circ$

$c = c^* m = 0.2\times5 = 1mm$， $s = {}^{\pi m}\!/_2 = {}^{5\pi}\!/_2 = 7.85mm$

$z_{v1} = {}^{z_1}\!/_{\cos\delta_1} = {}^{15}\!/_{\cos26.57^\circ} = 16.77$， $z_{v2} = {}^{z_2}\!/_{\cos\delta_2} = {}^{30}\!/_{\cos63.43^\circ} = 67.07$

轮系

1、何谓轮系，它有哪些类型和功用？

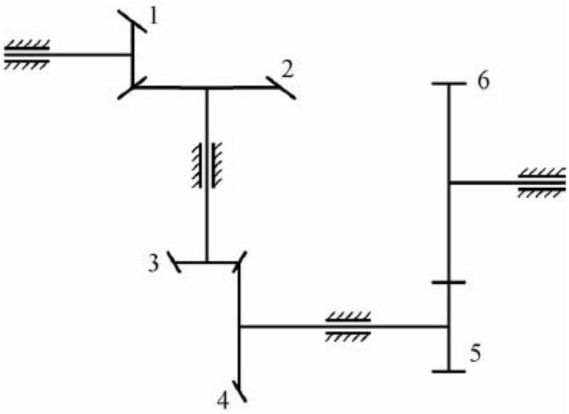
解答：由一系列齿轮组成的传动系统称为轮系。轮系的类型：定轴轮系、周转轮系和混合轮系。

轮系的功用：实现大的传动比传动、实现分路传动、实现变速和换向传动、实现运动的合成与分解等。

2、如何从混合轮系中区别哪些构件组成一个周转轮系，哪些构件组成一个定轴轮系？

解答：为了找出周转轮系，首先要找轴线位置不固定的行星轮，然后找到支撑行星轮的行星架，以及与行星轮直接啮合的中心轮。这样由行星轮、行星架和中心轮就组成了一个周转轮系。如此逐一地找出所有的周转轮系后，剩下的各个齿轮轴线相对于机架位置保持不变的轮系为定轴轮系。

3、已知图示轮系中各轮的齿数分别为 $z_1 = z_3 = 15$，$z_2 = 30$，$z_4 = 25$，$z_5 = 20$，$z_6 = 40$。求传动比 i_{16}。



解答：$i_{16} = \dfrac{n_1}{n_6} = \dfrac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5} = \dfrac{30\times25\times40}{15\times15\times20} = \dfrac{20}{3}$

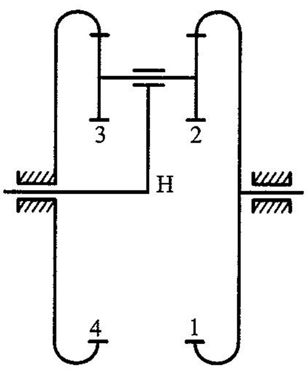
若想 i_{16} 的符号，则在齿轮 5 和齿轮 6 之间加一个过桥齿轮，就可以改变 i_{16} 的符号。

4、如图所示轮系中，已知 z_1=60，z_2=15，z_3=18，各轮均为标准齿轮，且模数相等，试决定 z_4 并计算传动比 i_{1H} 的大小和行星架的转向。

解答：该轮系为行星轮系，设齿轮的模数为 m，根据轮系中齿轮安装的同心条件，则

$$r_1 = r_2 + r_H$$

$$r_H = r_1 - r_2 = \frac{1}{2}m(z_1 - z_2) = \frac{45}{2}m$$



同理： $r_4 = r_3 + r_H$

故：$z_4 = 18 + 45 = 63$

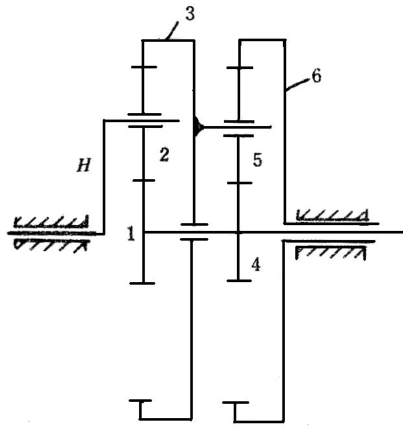
对于行星轮系：

$$i_{14}^H = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H} = 1 - i_{1H} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{15\times63}{60\times18} = \frac{7}{8}$$

$$i_{1H}=\frac{1}{8}$$

n_H 转向与 n_1 转向相同。

5、如图所示轮系中，已知轮系中各齿轮的齿数及 n_1，求分别刹住 3、6 时行星架的转速 n_H。



解答：刹住 3 时，$n_3=0$；1-2-3-H 为行星轮系，4-5-6 为定轴轮系。

在 1-2-3-H 行星轮系中，$i_{13}^H=\frac{n_1-n_H}{n_3-n_H}=1-i_{1H}=-\frac{z_3}{z_1}$，即 $i_{1H}=1+\frac{z_3}{z_1}$

$$n_H=\frac{n_1}{i_{1H}}=\frac{n_1}{1+\frac{z_3}{z_1}}=\frac{z_1}{z_1+z_3}n_1$$

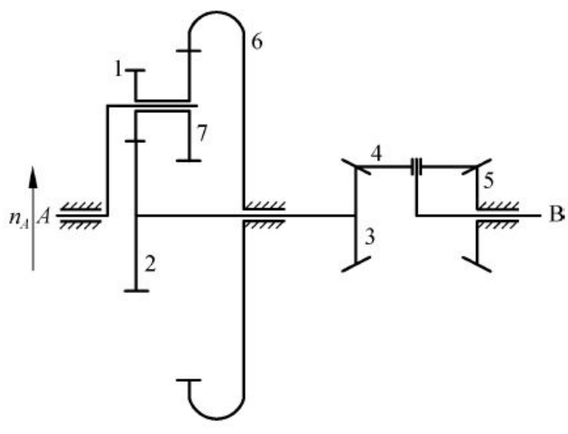
刹住 6 时：1-2-3-H 为差动轮系；4-5-6-3 为行星轮系。

在 4-5-6-3 中：$i_{46}^3=\frac{n_4-n_3}{n_6-n_3}=1-i_{43}=-\frac{z_6}{z_4}$，则 $i_{43}=1+\frac{z_6}{z_4}$ $n_4=n_1$。

在 1-2-3-H 差动轮系中：$i_{13}^H=\frac{n_1-n_H}{n_3-n_H}=-\frac{z_3}{z_1}$

$$n_H=n_1\left(\frac{z_1}{z_1+z_3}+\frac{z_3z_4}{(z_4+z_6)(z_1+z_3)}\right)$$

6、在图所示轮系中，已知各轮齿数为 $z_1=20$，$z_2=30$，$z_3=z_4=z_5=25$，$z_6=75$，$z_7=25$，$n_A=100\text{r/min}$（方向如图所示），求 n_B，并判断其方向。



解答：该轮系为混合轮系，可以找到两个单一的基本轮系：2-1-7-6-A 为行星轮系；3-4-5-B 为行星轮系。

对于 2-1-7-6-A 行星轮系

$$i_{26}^A=\frac{n_2-n_A}{n_6-n_A}=1-i_{2A}=-\frac{z_1z_6}{z_2z_7}=-\frac{20\times75}{30\times25}=-2,\quad i_{2A}=3,\quad i_{A2}=\frac{1}{3}$$

对于 3-4-5-B 行星轮系

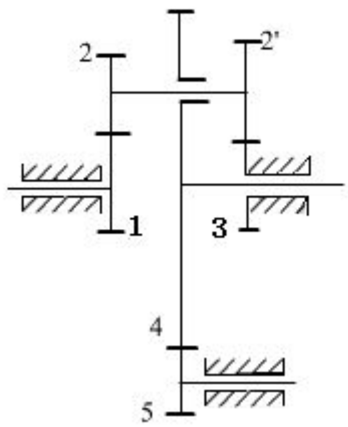
$$i_{35}^{B}=\frac{n_3-n_B}{n_5-n_B}=1-i_{3B}=-\frac{z_5}{z_3}=-1,\qquad i_{3B}=2$$

由于 $n_2=n_3$， $i_{AB}=i_{A2}i_{3B}=\frac{2}{3}$

故： $n_B=\frac{n_A}{i_{AB}}=\frac{100\times 3}{2}=150r/\min$ 。 n_B 转向与 n_A 相同。

7、在图示的轮系中，已知各轮齿数为 $z_2=z_3=20$，$z_1=z_{2'}=25$，$z_4=100$，$z_5=20$。试求传动比 i_{15}。

解答：该轮系为混合轮系：1-2-2′-3-4 为行星轮系；4-5-为定轴轮系。



对于行星轮系 1-2-2′-3-4 ，有

$$i_{13}^{\mathrm{H}}=\frac{\omega_1^{\mathrm{H}}}{\omega_3^{\mathrm{H}}}=\frac{\omega_1-\omega_4}{\omega_3-\omega_4}=\frac{\omega_1-\omega_4}{0-\omega_4}=1-\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_4}=1-\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}=1-\frac{20\times 20}{25\times 25}=\frac{9}{25}$$

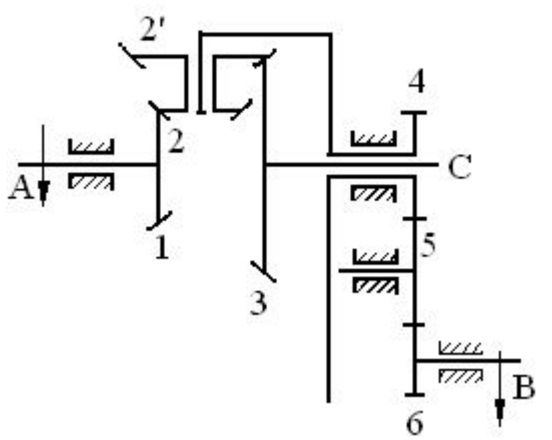
对于定轴轮系 4-5 ，有

$$i_{45}=\frac{\omega_4}{\omega_5}=-\frac{z_5}{z_4}=-\frac{20}{100}=-\frac{1}{5}$$

最后得

$$i_{15}=\frac{\omega_1}{\omega_4}\cdot\frac{\omega_4}{\omega_4}=\frac{9}{25}\times(-\frac{1}{5})=-\frac{9}{125}$$

8、如图所示的轮系中，已知各轮齿数为 $z_1=32$，$z_2=34$，$z_{2'}=36$，$z_3=64$，$z_4=32$，$z_5=17$，$z_6=24$。若轴 A 按图示方向以 1250 r/min 的转速回转，轴 B 按图示方向以 600 r/min 的转速回转，试确定轴 C 的转速大小及转向。



解答：对定轴轮系 4－5－6： $i_{46}=\frac{n_4}{n_6}=\frac{z_6}{z_4}=\frac{3}{4}$

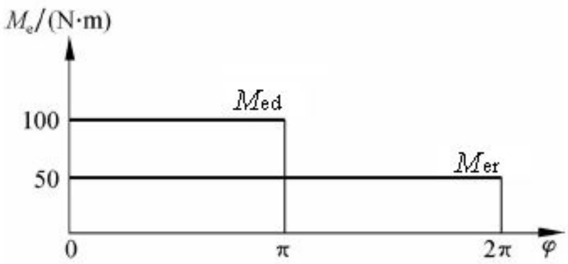
$$n_4 = \frac{3}{4} n_6 = \frac{3}{4} \times 600 = 450 rpm$$

对差动轮系 1－2－2’－3－H（4）： $i_{13}^{H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = -\frac{17}{9}$

$n_H = n_4$　　$n_1 = n_A = 1250 rpm$　　　　$\Rightarrow n_3 = 26.47 rpm$　　转向与轴 A 相同。

机械系统动力学基础

1、某机械主轴的等效力矩的变化规律如图所示，判断该机械能否作周期性的变速稳定运转。



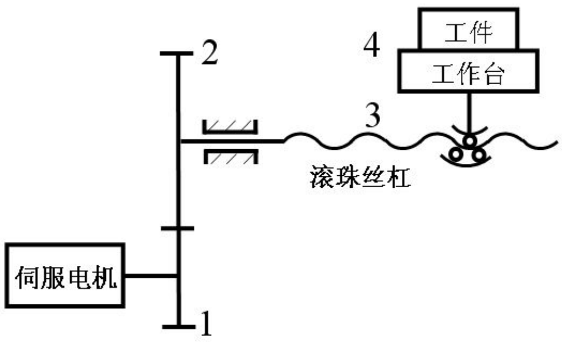
解答：判断机械能否做周期性的变速稳定运转的条件是：对应每个运动循环，驱动功与阻抗功相等，机械系统动能不变。本题中，有 $W_d = 2\pi M_{ed} = 100\pi = W_r$，故该机械能做周期性的变速稳定运转。

2、为什么要建立机械的等效动力学模型？建立等效动力学模型的等效条件是什么？

解答：求解多个构件组成的机械系统的真实运动时，一般需要求解运动方程组，十分不便。而对于单自由度机械系统，只要确定其中一个构件的真实运动规律，其余所有构件的运动规律就可求得。因此，可将复杂的机械系统简化为一个构件（即转化构件），建立等效动力学模型，以简化机械系统的运动规律求解问题。

建立等效动力学模型的等效条件是，转化构件的等效质量 m_e 或等效转动惯量 J_e 所具有的瞬时动能，与原机械系统的总动能相等；转化构件上的等效力 F_e 或等效力矩 M_e 所产生的瞬时功率，与原机械系统的所有力或力矩所产生的瞬时功率之和相等。

3、如图所示为伺服电动机驱动的立铣数控工作台，工作台及工件的质量 $m_4 = 350\mathrm{kg}$；滚珠丝杠 3 的导程 $l = 6\mathrm{mm}$，转动惯量 $J_3 = 1.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$；齿轮 1、2 的齿数为 $Z_1 = 25$、$Z_2 = 45$，转动惯量为



$J_1 = 7.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$、$J_2 = 1.92 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$。选择伺服电动机时，其允许的负载转动惯量必须大于折算到电机轴上的负载等效转动惯量。求图示系统折算到电机轴上的等效转动惯量 J_{e1}。

解答：根据等动能条件，计算等效转动惯量 J_{e1}。

$$\frac{1}{2}J_{e1}\omega_1^2=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2+\frac{1}{2}J_3\omega_3^2+\frac{1}{2}m_4v_4^2$$

则电机轴上的等效转动惯量为

$$J_{e1}=J_1\omega_1^2+J_2(\frac{\omega_2}{\omega_1})^2+J_3(\frac{\omega_3}{\omega_1})^2+\frac{1}{2}m_4(\frac{v_4}{\omega_1})^2$$

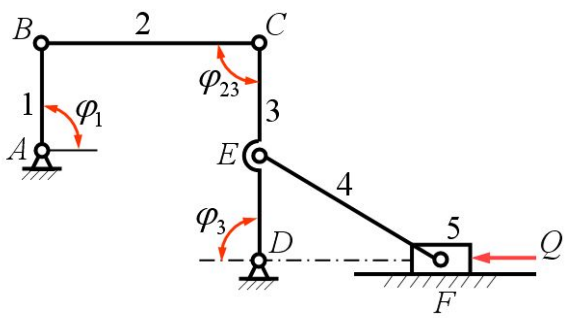
$$\text{由于}\ \omega_3=\omega_2\text{；}\ v_4=l\frac{n_3}{60}\text{，}\ n_3=\frac{60\omega_3}{2\pi}=\frac{30\omega_3}{\pi}$$

故 $v_4=\frac{l\omega_3}{2\pi}=\frac{l\omega_2}{2\pi}$，则

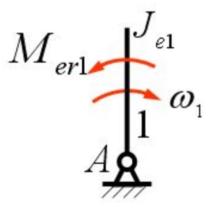
$$J_{e1}=J_1+(J_2+J_3+m_4\frac{l_2}{4\pi^2})\times(\frac{\omega_2}{\omega_1})^2=J_1+(J_2+J_3+m_4\frac{l_2}{4\pi^2})\times(\frac{z_1}{z_2})^2$$

$$=0.00072+(0.00192+0.0012+350\times\frac{0.006^2}{4\times\pi^2})\times(\frac{25}{45})^2\approx0.00178kg.m^2=1.79\times10^{-3}\text{kg.m}^2$$

4、如图（a）所示搬运机构，$l_{AB}=l_{ED}=200\text{mm}$，$l_{BC}=l_{CD}=l_{EF}=400\text{mm}$，$\varphi_1=\varphi_{23}=\varphi_3=90°$；滑块 5 的质量 $m_5=20\text{kg}$，其他构件的质量和转动惯量忽略不计；作用于滑块 5 的工作阻力 $Q=1000\text{N}$。若取构件 1 为转化构件建立等效动力学模型，如图（b）所示，求该瞬时机构的等效转动惯量 J_{e1} 和等效阻力矩 M_{er1}。



（a）



（b）

解答：（1）根据等动能条件，计算等效转动惯量 J_{e1}

$$\frac{1}{2}J_{e1}\omega_1^2=\frac{1}{2}m_5v_5^2$$

则转化构件 1 上的等效转动惯量为

$$J_{e1}=m_5(\frac{v_5}{\omega_1})^2$$

对机构进行速度分析，求速比 $\frac{v_5}{\omega_1}$，由于在图示位置构件 2、4 瞬时平动，故有

$$v_5 = v_F = v_E = \frac{1}{2}v_C = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}l_{AB}\omega_1$$

得

$$\frac{v_5}{\omega_1} = \frac{1}{2}l_{AB} = \frac{0.2}{2} = 0.1\,\text{m}$$

则

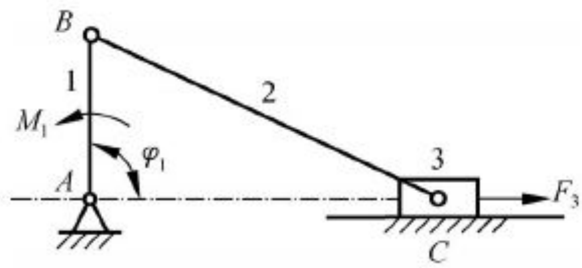
$$J_{e1} = m_5(\frac{v_5}{\omega_1})^2 = 20 \times 0.1^2 = 0.2\,\text{kg.m}^2$$

（2）根据等功率条件，计算等效阻力矩 M_{er1}

得

$$M_{er1}\omega_1 = Qv_5 \qquad M_{er1} = Q\frac{v_5}{\omega_1} = 1000 \times 0.1 = 100\,\text{N.m}$$

5、如图所示发动机机构，曲柄长 $l_1 = 100\text{mm}$，$\varphi_1 = 90°$；滑块 3 质量 $m_3 = 10\text{kg}$，其他构件的质量和转动惯量忽略不计；作用于滑块的驱动力 $F_3 = 1000\text{N}$，作用于曲柄的工作阻力矩 $M_1 = 90\text{N}\cdot\text{m}$。求曲柄开始回转时的角加速度。



解答：（1）选曲柄 AB 为转化构件，建立等效动力学模型。

根据等动能条件，计算等效转动惯量 J_{e1}

$$\frac{1}{2}J_{e1}\omega_1^2 = \frac{1}{2}m_3v_3^2$$

则转化构件 1 上的等效转动惯量为

$$J_{e1} = m_3(\frac{v_3}{\omega_1})^2$$

对机构进行速度分析，求速比 $\frac{v_3}{\omega_1}$。由于 $\varphi_1 = 90°$ 时连杆 2 瞬时平动，故

$$v_3 = v_C = v_B = l_{AB}\omega_1 \qquad \frac{v_3}{\omega_1} = l_{AB} = 0.1\,\text{m}$$

则

$$J_{e1} = m_3(\frac{v_3}{\omega_1})^2 = 10 \times 0.1^2 = 0.1\ \ \text{kg.m}^2$$

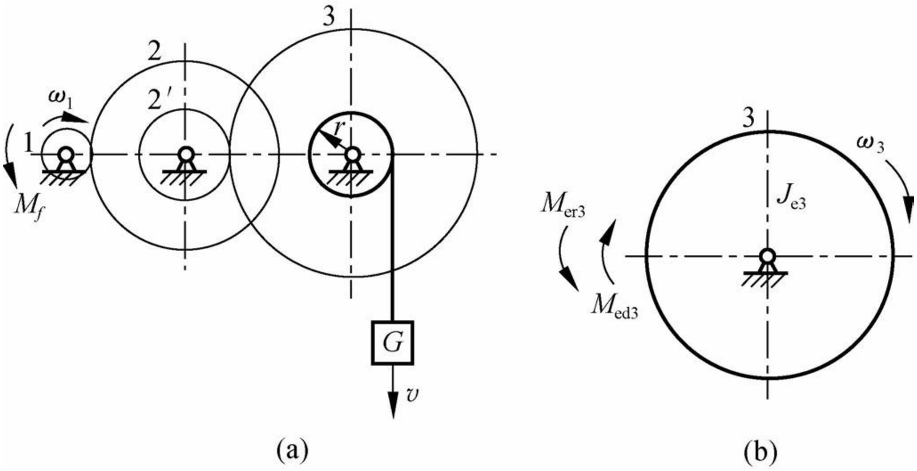
根据等功率条件，计算等效驱动力矩 M_{ed1}

$$M_{ed1}\omega_1 = F_3v_3 \qquad M_{ed1} = \frac{F_3v_3}{\omega_1} = 1000 \times 0.1 = 100\ \ \text{N.m}$$

（2）求曲柄开始回转时的角加速度 ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{e1}}{J_{e1}} = \frac{M_{ed1} - M_{er1}}{J_{e1}} = \frac{M_{ed1} - M_1}{J_{e1}} = 100\text{rad/s}^2$$

6、如图所示卷扬机，若重物重量为 $G = 1000\text{N}$，鼓轮半径 $r = 0.2\text{m}$，减速系统各齿轮齿数 $Z_1 = 17$、$Z_2 = 64$、$Z_{2'} = 32$、$Z_3 = 85$，各轮绕其轴心的转动惯量为 $J_1 = 0.1\text{kg}\cdot\text{m}^2$、$J_2 = 0.3\text{kg}\cdot\text{m}^2$、$J_{2'} = 0.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$、$J_3 = 1\text{kg}\cdot\text{m}^2$。当重物下降速度为 $v = 1\text{m/s}$ 时，突然中断驱动力矩，同时在轮 1 的轴上施加制动力矩 $M_f = 40\text{N}\cdot\text{m}$，问经过多少时间重物停止不动，并求在这段时间内重物下降的高度。



解答：（1）取轮 3 为转化构件，建立等效动力学模型，如上图 b 所示。

根据等功率条件，计算等效驱动力矩 M_{ed3} 和等效阻力矩 M_{er3}

突然中断驱动力矩而重物下降时，重力作用在轮 3 上的力矩为等效驱动力矩 M_{ed3}，即

$$M_{ed3} = Gr = 1000 \times 0.2 = 200 \quad \text{N.m}$$

阻止重物下降时，制动装置作用在轮 1 上的阻力矩为 $M_f = 40$ N.m，将其转化为构件 3 上的等效阻力 M_{er3}。

由 $M_{er3}\omega_3 = M_f \omega_1$ 得

$$M_{er3} = M_f \frac{\omega_1}{\omega_3} = M_f \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} = 40 \times \frac{64 \times 85}{17 \times 32} = 400 \quad \text{N.m}$$

根据等动能条件，计算等效转动惯量 J_{e3}

$$\frac{1}{2} J_{e3}\omega_3^2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_{2'} \omega_{2'}^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} (r\omega_3)^2$$

则转化构件 3 上的等效转动惯量为

$$J_{e3}=J_1(\frac{\omega_1}{\omega_3})^2+J_2(\frac{\omega_2}{\omega_3})^2+J_{2'}(\frac{\omega_{2'}}{\omega_3})^2+J_3+\frac{G}{g}r^2=J_1(\frac{\omega_1}{\omega_3})^2+(J_2+J_{2'})(\frac{\omega_{2'}}{\omega_3})^2+J_3+\frac{G}{g}r^2$$

$$=J_1(\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}})^2+(J_2+J_{2'})(\frac{z_3}{z_{2'}})^2+J_3+\frac{G}{g}r^2=0.1\times(\frac{64\times85}{17\times32})^2+(0.3+0.2)\times(\frac{85}{32})^2+1+\frac{1000}{9.81}\times0.2^2$$

$$\approx18.605\ \text{kg.m}^2$$

（2）求解从开始制动到停止所需的时间，以及重物下降的高度。

制动开始时轮 3 的角加速度为 $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{M_{e3}}{J_{e3}}=\dfrac{M_{ed3}-M_{er3}}{J_{e3}}=\dfrac{200-400}{18.605}=-10.75\ \ \text{rad/s}^2$

制动开始时轮 3 的角速度为 $\omega_0=\dfrac{v}{r}=\dfrac{1}{0.2}=5\,\text{rad/s}$

重物从制动开始（$t_0=0$）到停止（$\omega=0$）所需的时间为 $t=t-t_0=\dfrac{\omega-\omega_0}{\varepsilon}=\dfrac{0-5}{-10.75}\approx0.465\ \ \text{s}$

从制动开始到停止，轮 3 的角位移为

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0(t-t_0)+\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)^2=0+5\times0.465+\frac{-10.75}{2}\times0.465^2\approx1.163\,\text{rad}$$

则从制动开始到停止，重物下降的高度为 $h=r\varphi=0.2\times1.163\approx0.233\,\text{m}$

7、为什么机械稳定运转过程中会有速度波动？为什么要调节机械的速度波动？

解答：机械在稳定运转过程中，常常由于外力变化而导致驱动功和阻抗功不相等，引起动能的增减，表现为运转速度的波动。机械的速度波动可导致在运动副中产生附加动压力。如果速度波动较大，将影响机械的正常工作，降低其寿命、机械效率和工作质量，并引起机械振动和噪声。因此需要调节机械的速度波动，设法将机械运转速度的波动程度限制在许可范围之内。

如果机械的速度波动属于周期性速度波动，可以安装一个转动惯量足够大的飞轮，使机械的速度波动减小。

如果由于工作阻力发生突变等原因，使驱动功与输出功在一段较长时间内失去平衡而导致非周期性速度波动，则对于没有自调性的机械系统，必须安装调速器，通过调节能量的供给量，维持每个运动循环中驱动功等于阻抗功，使机械在新的平衡状态下稳定运转。

8、利用飞轮调节周期性速度波动的原理是什么？系统安装飞轮后能得到匀速运动吗？能否利用飞轮调节非周期性速度波动？为什么？

解答：由于 $M_e=M_{ed}-M_{er}=J_e\dfrac{d\omega}{dt}$，故增大等效转动惯量 J_e，将导致 $\dfrac{d\omega}{dt}$ 减小，即速度波动程度减小。而飞轮由于具有较大的转动惯量而用来调节周期性速度波动。飞轮的转动惯量 J_f 越大，速度波动越小。但要使速度波动为 0，理论上要求飞轮的转动惯量 J_f 无穷大，故安装飞轮后并不能得到匀速运动，即飞轮可以减小速度波动的程度，但不可能消除速度波动。

9、机器速度波动系数 δ 如何确定？机器速度波动系数 δ 的大小与飞轮有何关系？

解答：速度波动系数 δ 的大小反映机械变速稳定运转过程中速度波动的程度，应不超过允许值，即 $\delta\le[\delta]$。

机械的许用速度波动系数$[\delta]$，根据机械的工作要求而确定。

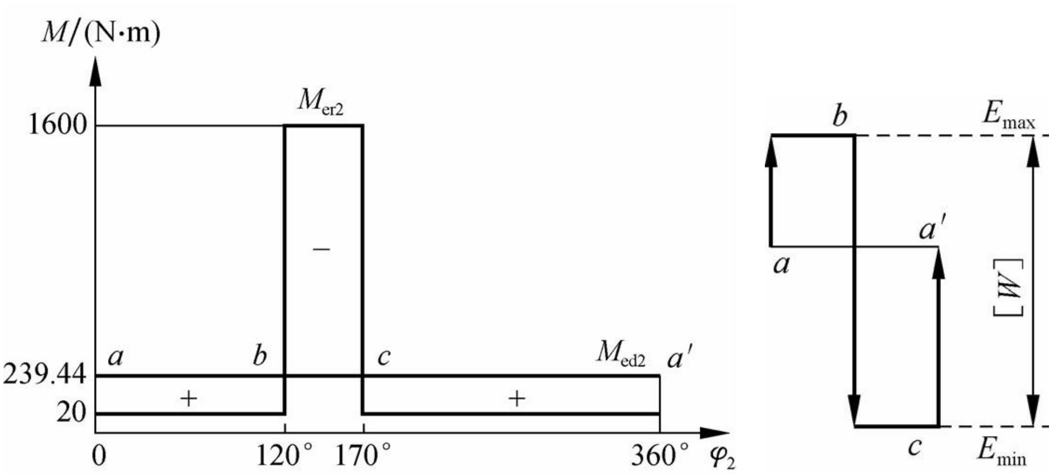
机器的速度波动系数δ越小，所需要的飞轮转动惯量J_f越大，飞轮的重量和尺寸越大。

10、如下左图所示剪床机构，作用于 1 轮轴的驱动力矩为常数，作用于 2 轮轴的阻力矩M_2的变化规律如下右图所示，2 轮轴的转速$n_2 = 60\text{r/min}$，大齿轮 2 的转动惯量$J_2 = 29.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$，小齿轮 1 及其他构件的质量和转动惯量忽略不计。求：

（1）要保证速度波动系数$\delta = 0.04$，应在 2 轮轴上安装的飞轮转动惯量J_{f2}；

（2）若$Z_1 = 22$、$Z_2 = 85$，求将飞轮安装于 1 轮轴上时所需的转动惯量J_{f1}。

解答：



取 2 轮为转化构件，建立等效动力学模型。

（1）根据每个运动循环的驱动功与阻抗功相等，求等效驱动力矩M_{ed2}，如左上图所示。

$$M_{ed2} \times 360^\circ = 20 \times 360^\circ + (1600 - 20) \times (170^\circ - 120^\circ)$$

$$M_{ed2} \approx 239.44 \ \ \text{N.m}$$

（2）求最大盈亏功$[W]$，确定应在 2 轮轴上安装的飞轮转动惯量J_{f2}。

盈功 $A_{ab} = (239.44 - 20) \times \dfrac{2}{3}\pi \approx 459.4\text{J}$

亏功 $A_{bc} = (1600 - 239.44) \times (\dfrac{50^\circ}{360^\circ} \times 2\pi) \approx 1186.7\text{J}$

盈功 $A_{ca'} = (239.44 - 20) \times \dfrac{360^\circ - 170^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \approx 727.3\text{J}$

据各个盈亏功的数值，作动能指示图，如右上图所示。则可知最大盈亏功$[W]=A_{bc}=1186.7J$ 。

则应在 2 轮轴上安装的飞轮转动惯量J_{f2}为

$$J_{f2}=\frac{900[W]}{\delta\pi^2 n_m^2}-J_0=\frac{900\times 1186.7}{0.04\times\pi^2\times 60^2}-29.2\approx 723.049 \text{ kg.m}^2$$

（3）求将飞轮安装于 1 轮轴上时所需的转动惯量J_{f1}。

由 $\frac{1}{2}J_{f1}\omega_1^2=\frac{1}{2}J_{f2}\omega_2^2$ 得

$$J_{f1}=J_{f2}\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}=J_{f2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2=723.049\times(\frac{22}{85})^2\approx 48.437 \text{ kg.m}^2$$

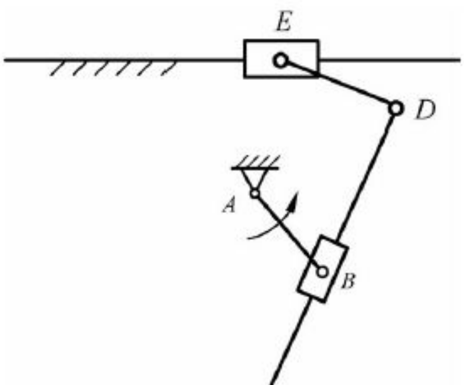
可知，将飞轮安装到高速轴上，可以大大减小所需的飞轮转动惯量。

11、如图所示刨床机构，刨床在空回行程和工作行程所消耗的功率分别为$P_1=0.3677\text{kW}$、$P_2=3.677\text{kW}$，空回行程对应的曲柄 AB 转角$\theta_1=120°$。若曲柄 AB 的平均转速$n_m=100\text{r/min}$，速度波动系数$\delta=0.05$，各构件的质量和转动惯量忽略不计，求：

（1）电动机的平均功率；

（2）安装到主轴 A 上的飞轮转动惯量J_{f_A}；

（3）若将飞轮安装到电动机轴上，电动机的额定转速$n=1450\text{r/min}$，电动机通过减速器驱动曲柄 AB，减速器的转动惯量也忽略不计，则飞轮转动惯量J_f需多大？



解答：（1）电动机的平均功率P_d

由于每个运动循环都有驱动功率与阻抗功率相等，故

$$P_d=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times P_1+\frac{240^\circ}{360^\circ}\times P_2=\frac{1}{3}\times P_1+\frac{2}{3}\times P_2=2.5739 \text{ kW}$$

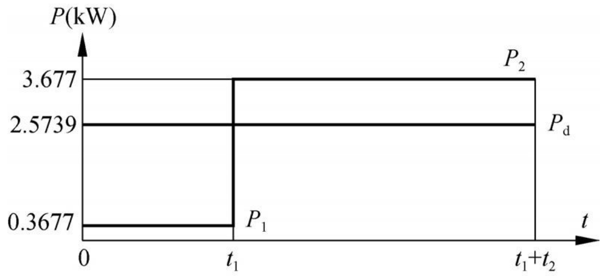
（2）安装到主轴 A 上的飞轮转动惯量J_f

每个运动循环所用的时间为 $t=\frac{1}{\frac{n_m}{60}}=\frac{60}{n_m}=0.6\text{ s}$

可知空回行程和工作行程所用的时间分别为 $t_1=\frac{1}{3}t=0.2$（s），$t_2=\frac{2}{3}t=0.4\text{ s}$

由下图所示，最大盈亏功，故需在主轴 A 上安装的飞轮转动惯量为

$$J_f=\frac{900[W]}{\delta\pi^2 n_m^2}=\frac{900\times 441.24}{0.05\times\pi^2\times 100^2}\approx 80.554 \text{ kg.m}^2$$



（3）求安装到电动机轴上所需的飞轮转动惯量 J_f

由 $\frac{1}{2}J_f\omega^2 = \frac{1}{2}J_{fA}\omega_m^2$ 得

$$J_f = \frac{1}{2}J_{fA}(\frac{\omega_m}{\omega})^2 = J_{fA}(\frac{n_m}{n})^2 = 80.554\times(\frac{100}{1450})^2 \approx 0.383\,\mathrm{kg.m^2}$$

可知，将飞轮安装到高速轴上，可以大大减小所需的飞轮转动惯量。