华 东 理 工 大 学

复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 4 册）

班级__________学号___________姓名___________任课教师___________

第七次作业

教学内容：4.1 复数项级数 4.2 幂级数

1. 判别下列复数列的收敛性，若收敛，求其极限，其中 $n \to \infty$.

(1) $z_n = \dfrac{1+ni}{1+n}$;

(2) $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n+1}$;

(3) $z_n = \left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{-n}$.

2.判别下列级数的收敛情况:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$

3. 求下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln in)^n}z^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$；

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n+i3^n}$； ；

；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(z-i)^n$.

4. 把下列函数展开成 z 的幂级数，并指出它的收敛半径:

(1) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$；

(2) $\sinh z$

(3) $\sin\left(1+z^2\right)$；

第八次作业

教学内容：4.3 解析函数的泰勒展开　　4.4 洛朗级数

1．求下列各函数在指定点处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\dfrac{z-1}{z+1}, z_0=1$；

(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$；

(3) $\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$；

(4) $\dfrac{1}{4-3z}, z=1+i$；

(5) $\sin^2 z$， $z_0=0$；

(6). $\cos z^2, z_0=0$

2．把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数.

（1）$\dfrac{1}{z(1-z)^2}, 0<|z|<1, 0<|z-1|<1$；

（2）$\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}, 1<|z|<2$；

（3）$\dfrac{1}{z^2(z-i)}$, 以 i 为中心的圆环；

3. 把下列各函数在指定圆环域内展成 Laurent 级数,且计算其沿正向圆周 $|z| = 6$ 的积分值：

(1) $\sin\dfrac{1}{1-z}, z = 1$ 的去心邻域；

(2) $\dfrac{1}{z(z+1)^6}, 1 < |z+1| < \infty$；

(3) $\ln(\dfrac{z-i}{z+i}), 2 < |z+i| < \infty$.

4. 求函数 $f(z)=e^{\frac{1-z^2}{z^2}}\cdot\sin\frac{1}{z^2}$ 在 $|z|>0$ 上的洛朗展开式.

5. 设 $\oint_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi}}{(z\xi-\xi)^2}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}$ ，求 a_n .

部分题目参考答案

第七次作业

1. (1) z_n 收敛于 $\boldsymbol{i}$；(2) z_n 发散 ；(3). z_n 收敛于 0.

2. (1)条件收敛; (2) 绝对收敛; (3) 发散。

3. (1) e； (2) ∞； (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$； (4)3； （5）2.

4.(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} nz^{2n-2}$,收敛半径为 1；　(2) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n!}z^{n}$；$|z|<+\infty$.

(3) $\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{4n}}{(2n)!}+\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$;$|z|<+\infty$；

第八次作业

1．(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{z-1}{2})^{n}$;$(|z-1|<2)$;　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(z-2)^{n}$;$|z-2|<3$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$;$|z+1|<1$;　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}(z-1-i)^{n}}{(1-3i)^{n+1}}$;$|z-(1+i)|<\frac{\sqrt{10}}{3}$

(5) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$; $|z|<+\infty$;　(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}z^{4n}$;$|z|<+\infty$

2.（1）在 $0<|z|<1$ 内，$\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$;在 $0<|z-1|<1$ 内，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(z-1)^{n-2}$

（2）$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{z^{2n+2}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}$

（3）$0<|z-i|<1$ 内 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-i)^{n-2}}{i^{n+1}}$;　$1<|z-i|<+\infty$ 内 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)i^{n}}{(z-i)^{n+3}}$

3.　(1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n-1}$；$-2\pi i$;　(2). $\sum_{n=0}^{+\infty}(z+1)^{-n-7}$；0

(3). $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2i}{z+i}\right)^{n}$；$4\pi$

4. $\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}(2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4})\Big/ n!z^{2n}$　**5.** $a_0=a_1=0, a_n=2(n-1)\pi i, (n=2,3\cdots)$