6.3 常见的分式线性映射

上半平面 $\longrightarrow$ 上半平面

上半平面 $\longrightarrow$ 单位圆内部

单位圆内部 $\longrightarrow$ 单位圆内部

例　求将 $\mathrm{Im}(z) > 0 \to \mathrm{Im}(w) > 0$的分式线性映射.

解 设$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$　$\forall z_k \in R, (k=1,2,3)$,即实轴上的点,

当a,b,c,d均为实数时,$w_k = \dfrac{az_k+b}{cz_k+d}$也为实数,

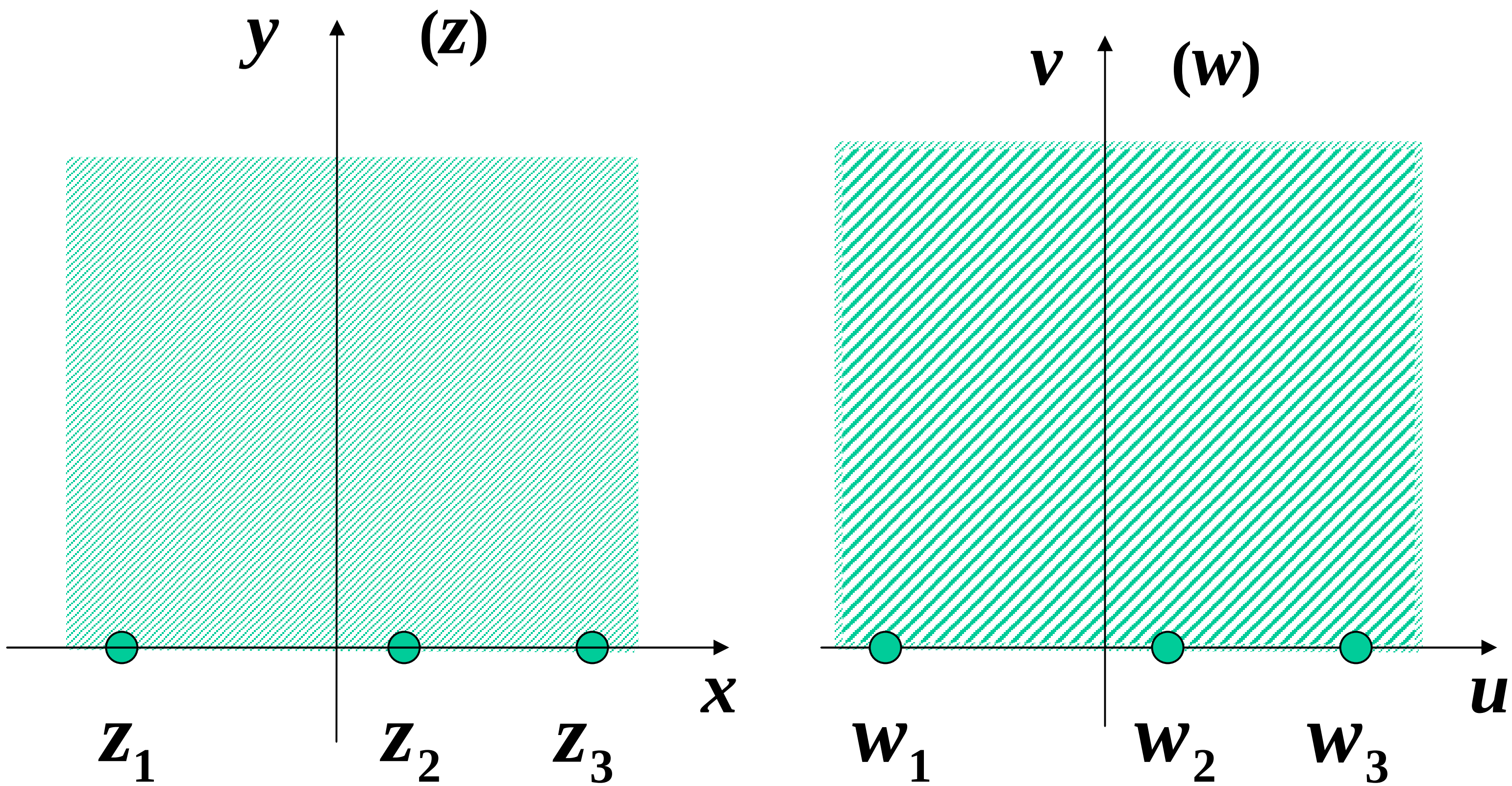
故,w必将实轴 $\to$ 实轴.

又$w' = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} > 0$(当$z$为实数且 $ad-bc > 0$时)

即,实轴变成实轴是同向的　,

因此,上半z平面 $\to$ 上半w平面.

即，当a,b,c,d均为实数时，且$ad-bc>0$，线性分式映射$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$将$\mathrm{Im}(z)>0 \to \mathrm{Im}(w)>0$



①具有这一形式的映射

也将 $\mathrm{Im}(z)<0 \to \mathrm{Im}(z)<0$

②$w=\dfrac{az+b}{cz+d}$,其中a,b,c,d

为实数,$ad-bc<0$

将 $\underset{\text{上半}z\text{平面}}{\mathrm{Im}(z)>0} \to \underset{\text{下半}w\text{平面}}{\mathrm{Im}(w)<0}$

③求 $\mathrm{Im}(z)>0 \to \mathrm{Im}(w)>0$

的映射,可在实轴上取三对

相异的对应点:

$z_1<z_2<z_3$,

$w_1<w_2<w_3$代入

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$$

$$=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

即得.

例 求将上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映射为单位圆域 $|w| < 1$ 的分式线性映射。

解法一 在实轴上依次取点 $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$

在 $|w| = 1$ 上取 $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ 使

$$w_i = f(z_i) \quad (i = 1,2,3)$$

所求映射满足：

$$\frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{z+1}{z-0} : \frac{1+1}{1-0}$$

即：

$$w = \frac{z-i}{iz-1}$$

若取点 $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1,$

$w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$

$$w = \frac{z-i}{z+i}$$

解法二 (利用性质)：设 $w = f(z)$

由保圆性，上半平面必有一点 (设为 λ) 映射成 $|w|=1$ 的圆心 $w=0$，即 $f(\lambda)=0$

由保对称性，λ 与 $\bar{\lambda}$ 关于实轴对称，

所以， $w=0$ 与 $w=\infty$ 关于 $|w|=1$ 对称，

于是 $$f(\bar{\lambda})=\infty$$

于是 $w=f(z)$ 具有形式：

$$w = k\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right) \quad (k\text{为常数})$$

z 在实轴上取值时，$|z-\lambda|=|z-\bar{\lambda}|$, 此时有：$|k|=1$

所以, $k=e^{i\theta}$, 即所求映射为：

$$\boxed{w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)}$$

当 $\lambda=i,\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ 时, 映射为解法一的映射；

当 $\lambda=i,\theta=0$ 时, 映射为：

$$w=\frac{z-i}{z+i}$$

例 求将上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ 映射为 $|w - w_0| < R$ 的分式线性映射 $w = f(z)$, 使得 $f(i) = w_0$, $f'(i) > 0$。

解：由保对称性, i 与 $-i$ 关于 x 轴对称，于是 $f(-i) = \infty$

利用 $f(i) = w_0$, 于是所求映射具有形式：

$$w = k\frac{z-i}{z+i} + w_0 \quad (k\text{为常数})$$

又由于 $f'(i) = \left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=i} = \left.\dfrac{2ki}{(z+i)^2}\right|_{z=i} = -\dfrac{ik}{2} > 0$

于是可知 k 为纯虚数。

当 z 取实轴上的点时 ，$|z - i| = |z + i|$

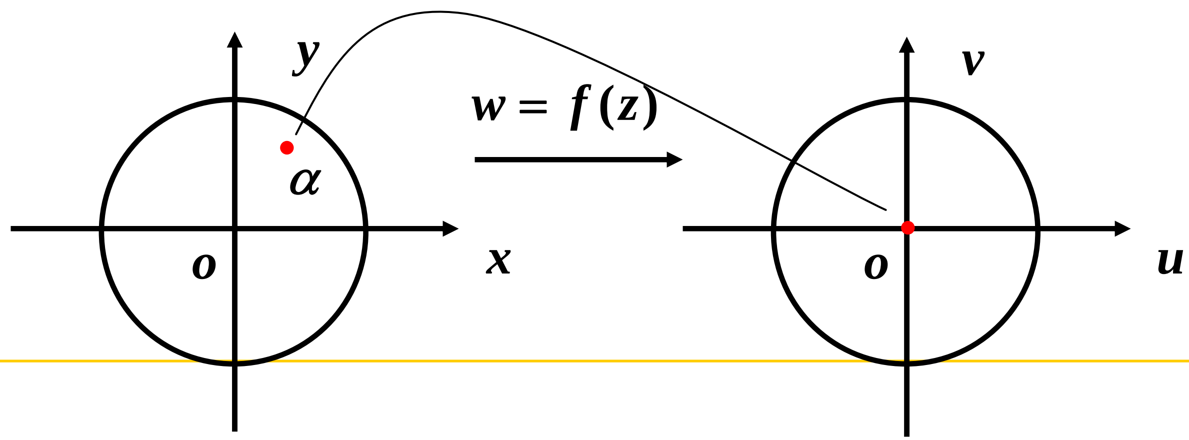
$$R = |w - w_0| = |k|\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = |k|$$

于是　$k = iR$,

$$w = iR\frac{z-i}{z+i} + w_0$$

例　求将单位圆 $|z|<1$ 映射为 $|w<1$ 的分式线性映射。

解：设 $w = f(z)$, 并将 $|z|<1$ 内某点 α 映射为 $w = f(\alpha) = 0$



由于 α 与 $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ 关于 $|z|=1$ 对称，而且 $w=0$ 与 $w=\infty$

关于 $|w|=1$ 对称

于是 $f(\dfrac{1}{\overline{\alpha}})=\infty$ 所求映射具有形式：

$$w=k\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}}=k\overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}=-k\overline{\alpha}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)=k'\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right)$$

由于 $|z|=1$ 上的点映射为 $|w|=1$ 上的点

取 $z=1$ 代入上式，得到：

$$|w|=|k'|\cdot\left|\frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}\right|=1$$

由于$|1-\alpha|=|1-\overline{\alpha}|$,于是 $|k'|=1$

$$k'=e^{i\varphi} \quad (\varphi\text{为任意实数})$$

所求映射具有形式 ：

$$\boxed{w=e^{i\varphi}\left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right) \quad (|\alpha|<1)}$$

例 求将单位圆$|z|<1$映射为$|w<1$的分式线性映射，

并且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0, \arg f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$。

解：由已知：$\alpha=\dfrac{1}{2}$,利用上例得到：

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = e^{i\varphi}\frac{2z-1}{2-z}$$

则 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{i\varphi}\left.\frac{2(2-z)-(2z-1)(-1)}{(2-z)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}e^{i\varphi}$

由 $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$ 得：$\varphi = 0$。

所求映射为： $w = \frac{2z-1}{2-z}$

例 求分式线性映射 $w = f(z)$, 它将 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$, 且使 $z=1$、$1+i$ 映射为 $w=1$、$+\infty$。

解：将 $|z|=1$ 映射为 $|w|=1$ 的映射为： $w = e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$

因为 $f(1+i)=+\infty$, 即 $f\left(\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right)=\infty$

所以 $\bar{\alpha}=\dfrac{1}{1+i}$, $\alpha=\dfrac{1}{1-i}$

又 $f(1)=1$, 故 $e^{i\theta}\dfrac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}}=1$, $e^{i\theta}=\dfrac{1-\bar{\alpha}}{1-\alpha}=-i$

所以 $w=-i\dfrac{z-\dfrac{1}{1-i}}{1-\dfrac{z}{1-i}} = \dfrac{(i-1)z+1}{-z+(1+i)}$