第五章 弯曲应力 (Stresses in beams)

§ 5-1 引言 (Introduction)

一、弯曲构件横截面上的应力 (Stresses in flexural members)

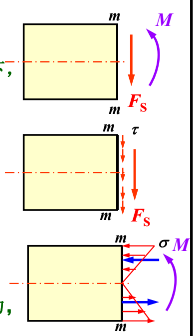
当梁上有横向外力作用时，一般情况下，梁的横截面上既又弯矩M，又有剪力F_S.

内力 { 剪力F_S ⟶ 切应力τ ; 弯矩M ⟶ 正应力σ }

只有与切应力有关的切向内力元素 $dF_S = \tau dA$ 才能合成剪力;

只有与正应力有关的法向内力元素 $dF_N = \sigma dA$ 才能合成弯矩.

所以，在梁的横截面上一般既有正应力，又有切应力.



二、分析方法 (Analysis method)

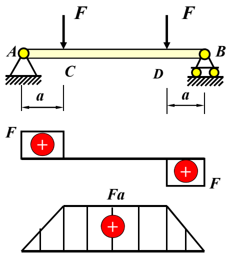
平面弯曲时横截面 $\xrightarrow{\sigma}$ 纯弯曲梁(横截面上只有M而无F_S的情况)

平面弯曲时横截面 $\xrightarrow[\tau]{\sigma}$ 横力弯曲(横截面上既有F_S又有M的情况)

三、纯弯曲（Pure bending)

若梁在某段内各横截面的弯矩为常量，剪力为零，则该段梁的弯曲就称为纯弯曲.

简支梁CD段任一横截面上，剪力等于零，而弯矩为常量，所以该段梁的弯曲就是纯弯曲.



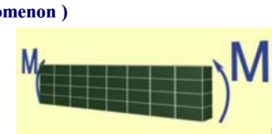
§ 5-2 纯弯曲时的正应力 (Normal stresses in pure beams)

deformation geometric relationship	Examine the deformation, then propose the hypothesis → Distribution regularity of deformation	变形几何关系	观察变形，提出假设 → 变形的分布规律
physical relationship	Distribution regularity of stress	物理关系	应力的分布规律
static relationship	Establish the formula	静力关系	建立公式

一、实验（ Experiment）

1. 变形现象（Deformation phenomenon)

纵向线 各纵向线段弯成弧线，且靠近顶端的纵向线缩短，靠近底端的纵向线段伸长.



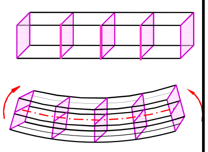
横向线 各横向线仍保持为直线，相对转过了一个角度，仍与变形后的纵向弧线垂直.

弯曲应力(Stresses in Beams)

2. 提出假设 (Assumptions）

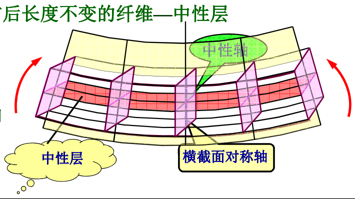
（a）平面假设：变形前为平面的横截面变形后仍保持为平面且垂直于变形后的梁轴线；

（b）单向受力假设：纵向纤维不相互挤压，只受单向拉压.



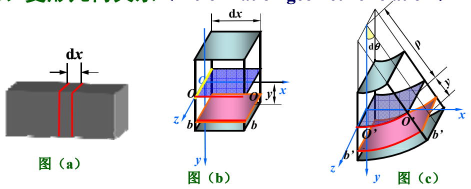
推论：必有一层变形前后长度不变的纤维—中性层

中性轴 ⊥ 横截面对称轴



弯曲应力(Stresses in Beams)

二、变形几何关系（ Deformation geometric relation ）



图（a） 图（b） 图（c）

$$\widehat{b'b'}=(\rho+y)\mathrm{d}\theta \qquad \varepsilon=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\mathrm{d}\theta}{\rho\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho}$$

$$\overline{bb}=\mathrm{d}x=\overline{OO}=\widehat{O'O'}=\rho\mathrm{d}\theta$$

应变分布规律：

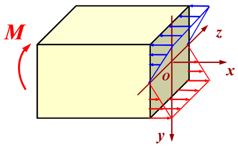
直梁纯弯曲时纵向纤维的应变与它到中性层的距离成正比.

弯曲应力(Stresses in Beams)

三、物理关系(Physical relationship)

Hooke's Law $\sigma=E\varepsilon$

所以 $\sigma=E\dfrac{y}{\rho}$? ?



应力分布规律：

直梁纯弯曲时横截面上任意一点的正应力，与它到中性轴的距离成正比.

待解决问题

- 中性轴的位置
- 中性层的曲率半径ρ

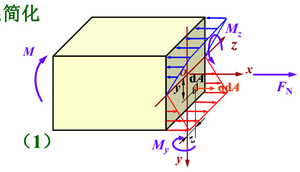
?

弯曲应力(Stresses in Beams)

四、静力关系 (Static relationship)

横截面上内力系为垂直于横截面的空间平行力系，这一力系简化得到三个内力分量.

内力与外力相平衡可得



$$F_{\mathrm{N}}=\int_A \mathrm{d}F_{\mathrm{N}}=\int_A \sigma\mathrm{d}A=0 \quad (1)$$

$$M_{iy}=\int_A \mathrm{d}M_y=\int_A z\sigma\mathrm{d}A=0 \quad (2)$$

$$M_{iz}=\int_A \mathrm{d}M_z=\int_A y\sigma\mathrm{d}A=M \quad (3)$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}=\sigma\mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}M_y=z\ \sigma\mathrm{d}A$$

$$\mathrm{d}M_z=y\ \sigma\mathrm{d}A$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

将应力表达式代入（1）式，得

$$F_{\mathrm{N}}=\int_A E\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A=0 \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A=0 \Rightarrow S_z=\int_A y\mathrm{d}A=0$$

⇒ 中性轴通过横截面形心

将应力表达式代入（2）式，得

$$M_{iy}=\int_A zE\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A=0 \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A yz\mathrm{d}A=0 \Rightarrow I_{yz}=\int_A yz\mathrm{d}A=0$$

⇒ 自然满足

将应力表达式代入(3)式，得

$$M_{iz}=\int_A yE\frac{y}{\rho}\mathrm{d}A=M \Rightarrow \frac{E}{\rho}\int_A y^2\mathrm{d}A=M \Rightarrow \frac{E}{\rho}I_z=M$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

将 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI_z}$ 代入 $\sigma=E\dfrac{y}{\rho}$

得到纯弯曲时横截面上正应力的计算公式:

$$\sigma=\frac{My}{I_z}$$

M为梁横截面上的弯矩；

y为梁横截面上任意一点到中性轴的距离；

I_z为梁横截面对中性轴的惯性矩.

弯曲应力(Stresses in Beams)

讨论

（1）应用公式时，一般将 My 以绝对值代入. 根据梁变形的情况直接判断 σ 的正负号. 以中性轴为界，梁变形后凸出边的应力为拉应力(σ为正号).凹入边的应力为压应力（σ为负号）；

（2）最大正应力发生在横截面上离中性轴最远的点处.

$$\sigma_{\max}=\frac{M\,y_{\max}}{I_z}$$

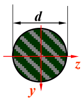
引用记号 $W=\dfrac{I_z}{y_{\max}}$ —抗弯截面系数

则公式改写为 $\sigma_{\max}=\dfrac{M}{W}$

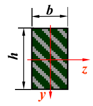
弯曲应力(Stresses in Beams)

（1）当中性轴为对称轴时

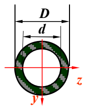
实心圆截面 $W=\dfrac{I_z}{d/2}=\dfrac{\pi d^4/64}{d/2}=\dfrac{\pi d^3}{32}$



矩形截面 $W=\dfrac{I_z}{h/2}=\dfrac{bh^3/12}{h/2}=\dfrac{bh^2}{6}$



空心圆截面 $W=\dfrac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$ $\qquad \alpha=\dfrac{d}{D}$

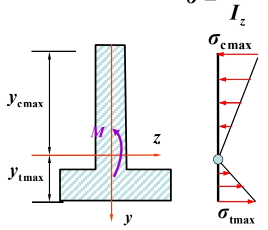


弯曲应力(Stresses in Beams)

（2）对于中性轴不是对称轴的横截面

应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离 $y_{c\max}$ 和 $y_{t\max}$ 直接代入公式

$$\sigma=\frac{My}{I_z}$$



$$\sigma_{t\max}=\frac{My_{t\max}}{I_z}$$

$$\sigma_{c\max}=\frac{My_{c\max}}{I_z}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

§ 5-3 横力弯曲时的正应力

(Normal stresses of the beam in nonuniform bending)

一、横力弯曲(Nonuniform bending)

当梁上有横向力作用时，横截面上既又有弯矩又有剪力. 梁在此种情况下的弯曲称为横力弯曲.

横力弯曲时，梁的横截面上既有正应力又有切应力.切应力使横截面发生翘曲， 横向力引起与中性层平行的纵截面的挤压应力，纯弯曲时所作的平面假设和单向受力假设都不成立.

虽然横力弯曲与纯弯曲存在这些差异，但进一步的分析表明，工程中常用的梁，纯弯曲时的正应力计算公式，可以精确的计算横力弯曲时横截面上的正应力.

等直梁横力弯曲时横截面上的正应力公式为 $\sigma=\dfrac{M(x)}{W}$

弯曲应力(Stresses in Beams)

二、公式的应用范围

(The applicable range of the flexure formula)

1. 在弹性范围内

(All stresses in the beam are below the proportional limit)

2. 具有切应力的梁（The beam with the shear stress） $l/h\geq 5$

3. 平面弯曲（Plane bending）

4. 直梁（Straight beams）

三、强度条件（Strength condition)

梁内的最大工作应力不超过材料的许用应力.

1. 数学表达式（Mathematical formula) $\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}}{W}\leq[\sigma]$

弯曲应力(Stresses in Beams)

2. 强度条件的应用(Application of strength condition)

（1） 强度校核 $\dfrac{M_{\max}}{W}\leq[\sigma]$ （2）设计截面 $W\geq\dfrac{M_{\max}}{[\sigma]}$

（3）确定许可载荷 $M_{\max}\leq W[\sigma]$

对于铸铁等脆性材料制成的梁，由于材料的 $[\sigma_t]\neq[\sigma_c]$ 且梁横截面的中性轴一般也不是对称轴，所以梁的

$\sigma_{t\max}\neq\sigma_{c\max}$（两者有时并不发生在同一横截面上）

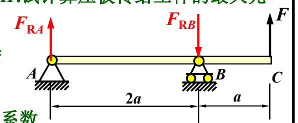
要求分别不超过材料的许用拉应力和许用压应力

$$\sigma_{t\max}\leq[\sigma_t]$$

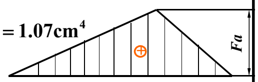
$$\sigma_{c\max}\leq[\sigma_c]$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

例题1 螺栓压板夹紧装置如图所示.已知板长$3a$=150mm，压板材料的弯曲许用应力$[\sigma]$=140MP.试计算压板传给工件的最大允许压紧力F.



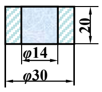
解：（1）作出弯矩图的最大弯矩为Fa；



（2）求惯性矩，抗弯截面系数

$$I_z=\frac{(3\text{cm})(2\text{cm})^3}{12}-\frac{(1.4\text{cm})(2\text{cm})^3}{12}=1.07\text{cm}^4$$

$$W_z=\frac{I_z}{y_{\max}}=\frac{1.07\text{cm}^4}{1\text{cm}}=1.07\text{cm}^3$$



（3）求许可载荷

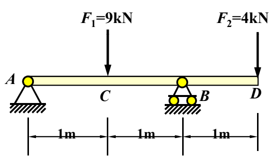
$$M_{\max}\le W_z[\sigma]$$

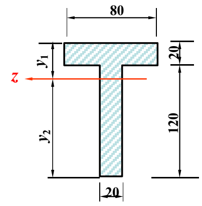
$$Fa\le W_z[\sigma]$$

$$F\le\frac{W_z[\sigma]}{a}=3\text{kN}$$

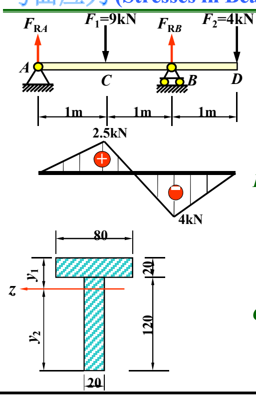
弯曲应力(Stresses in Beams)

例题2 T形截面铸铁梁的荷载和截面尺寸如图所示. 铸铁的许用拉应力为$[\sigma_t]=30$MPa，许用压应力为$[\sigma_c]$=160MPa. 已知截面对形心轴z的惯性矩为I_z=763cm^4，y_1=52mm，校核梁的强度.





弯曲应力(Stresses in Beams)



解：$F_{RA}=2.5\text{kN}\quad F_{RB}=10.5\text{kN}$

最大正弯矩在截面C上

$$M_C=2.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

最大负弯矩在截面B上

$$M_B=4\text{kN}\cdot\text{m}$$

*B*截面

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_B y_1}{I_z}=27.2\text{MPa}<[\sigma_t]$$

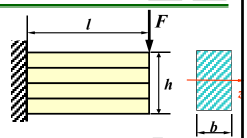
$$\sigma_{c\max}=\frac{M_B y_2}{I_z}=46.2\text{MPa}<[\sigma_c]$$

*C*截面

$$\sigma_{t\max}=\frac{M_C y_2}{I_z}=28.8\text{MPa}<[\sigma_t]$$

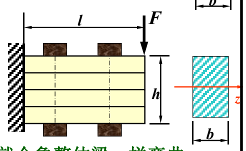
弯曲应力(Stresses in Beams)

例题3 由n片薄片组成的梁，当每片间的磨擦力甚小时，每一薄片就独立弯曲，近似地认为每片上承担的外力等于 F/n



解：每一薄片中的最大正应力

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{\frac{F}{n}\cdot l}{\frac{1}{6}\cdot b\cdot(\frac{h}{n})^2}=\frac{6Fl}{bh^2}\cdot n$$



若用刚度足够的螺栓将薄片联紧，杆就会象整体梁一样弯曲

最大正应力等于

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{Fl}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{6Fl}{bh^2}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

§ 5-4 梁的切应力及强度条件(Shear stresses in beams and strength condition)

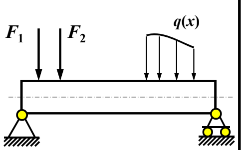
一、梁横截面上的切应力（Shear stresses in beams）

1. 矩形截面梁(Beam of rectangular cross section)

（1）两个假设(Two assumptions)

（a）切应力与剪力平行；

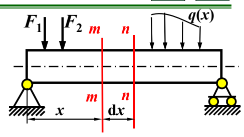
（b）切应力沿截面宽度均匀分布（距中性轴等距离处切应力相等）.



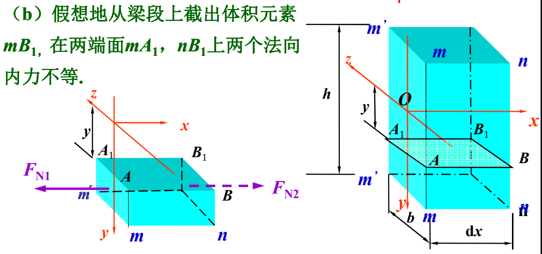
弯曲应力(Stresses in Beams)

（2）分析方法(Analysis method)

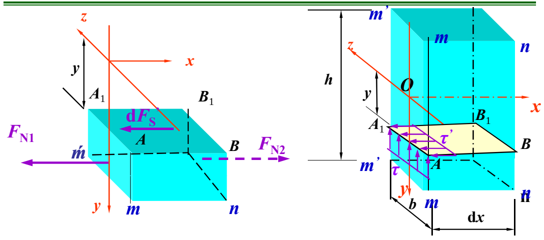
（a）用横截面m-m，n-n从梁中截取dx一段.两横截面上的弯矩不等. 所以两截面同一y处的正应力也不等；



（b）假想地从梁段上截出体积元素mB_1，在两端面mA_1，nB_1上两个法向内力不等.



弯曲应力(Stresses in Beams)



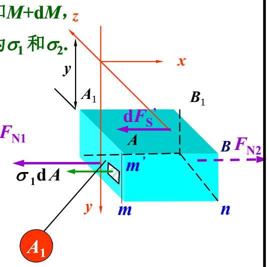
（c）在纵截面上必有沿 x 方向的切向内力 $\mathrm{d}F_S'$.故在此面上就有切应力 τ.

根据假设，横截面上距中性轴等远的各点处切应力大小相等. 各点的切应力方向均与截面侧边平行.取分离体的平衡即可求出.

弯曲应力(Stresses in Beams)

（3）公式推导(Derivation of the formula)

假设 m-m，n-n 上的弯矩为 M 和 $M+\mathrm{d}M$，两截面上距中性轴 y_1 处的正应力为 σ_1 和 σ_2.



$$F_{N1}=\int_{A_1}\sigma_1\mathrm{d}A$$

$$=\int_{A_1}\frac{My_1}{I_z}\mathrm{d}A=\frac{M}{I_z}\int_{A_1}y_1\mathrm{d}A$$

$$=\frac{M}{I_z}S_z^*$$

$$F_{N2}=\int_{A_1}\sigma_2\mathrm{d}A=\frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S_z^*$$

式中：A_1为距中性轴为y的横线以外部分的横截面面积.

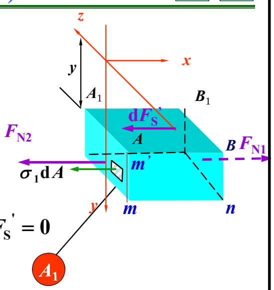
$S_z^*=\int_{A_1}y_1\mathrm{d}A$ 为面积A_1对中性轴的静矩.

弯曲应力(Stresses in Beams)

$$F_{N1}=\frac{M}{I_z}S_z^*$$

$$F_{N2}=\frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S_z^*$$

$$\mathrm{d}F_s'=\tau'b\mathrm{d}x$$



由平衡方程

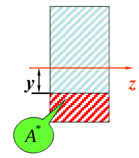
$$\sum F_x=0\quad F_{N2}-F_{N1}-\mathrm{d}F_S'=0$$

化简后得

$$\tau'=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\times\frac{S_z^*}{I_zb}\qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=F_S\qquad \tau=\frac{F_SS_z^*}{I_zb}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

$$\tau=\frac{F_SS_z^*}{I_zb}$$



I_z——整个横截面对中性轴的惯性矩.

b——矩型截面的宽度.

S_z^*——距中性轴为y的横线以外部分横截面面积对中性轴的静矩.

（4）切应力沿截面高度的变化规律

(The shear- stress distribution on the rectangular cross section)

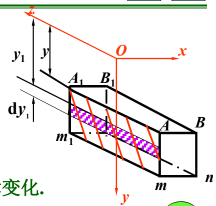
τ沿截面高度的变化由静矩 S_z^* 与y之间的关系确定.

弯曲应力(Stresses in Beams)

$$S_z^*=\int_{A_1}y_1\mathrm{d}A$$

$$=\int_y^{h/2}y_1b\mathrm{d}A_1=\frac{b}{2}(\frac{h^2}{4}-y^2)$$

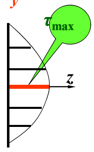
$$\tau=\frac{F_SS_z^*}{I_zb}=\frac{F_S}{2I_z}(\frac{h^2}{4}-y^2)$$



可见，切应力沿截面高度按抛物线规律变化.

$y=\pm h/2$（即在横截面上距中性轴最远处）$\tau=0$

$y=0$（即在中性轴上各点处），切应力达到最大值



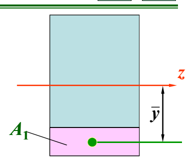
$$\tau_{max}=\frac{F_Sh^2}{8I_z}=\frac{F_Sh^2}{8\times bh^3/12}=\frac{3}{2}\times\frac{F_S}{bh}$$

$$\tau_{max}=\frac{3F_S}{2A}$$ 式中，$A=bh$为矩形截面的面积.

弯曲应力(Stresses in Beams)

截面静矩的计算方法

$$S_z=\int_A y\mathrm{d}A=A\bar{y}$$



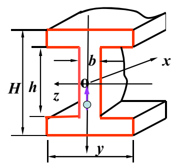
A为截面面积

$\bar{y}$为截面的形心坐标

2. 工字形截面梁（工-section beam)

研究方法与矩形截面同，切应力的计算公式亦为

$$\tau=\frac{F_SS_z^*}{I_zb}$$



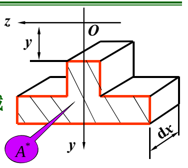
假设求应力的点到中性轴的距离为y.

弯曲应力(Stresses in Beams)

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z d}$$

d — 腹板的厚度

S_z^* — 距中性轴为y的横线以外部分的横截面面积A对中性轴的静矩.

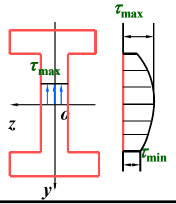


$$\tau_{max} = \frac{F_S}{I_z b}\left[\frac{BH^2}{8} - (B-b)\frac{h^2}{8}\right]$$

（a）腹板上的切应力沿腹板高度按二次抛物线规律变化;

（b）最大切应力也在中性轴上.这也是整个横截面上的最大切应力.

$$\tau_{max} \approx \tau_{min} \qquad \tau \approx \frac{F_S}{bh}$$

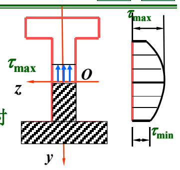


弯曲应力(Stresses in Beams)

$$\tau_{max} = \frac{F_S S_{z\max}^*}{I_z d}$$

式中:

$S_{z\max}^*$—中性轴任一边的半个横截面面积对中性轴的静矩.

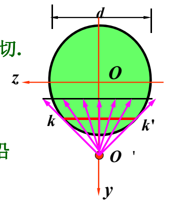


3.圆截面梁(Beam of circular cross section)

在截面边缘上各点的切应力的方向与圆周相切.

假设:（a）沿宽度k-k'上各点处的切应力均汇交于O'点;

（b）各点处切应力沿y方向的分量沿宽度相等.

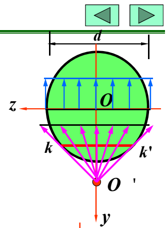


弯曲应力(Stresses in Beams)

最大切应力发生在中性轴上

$$\tau_{max} = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{4}{3}\frac{F_S}{A}$$

式中 $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ 为圆截面的面积.

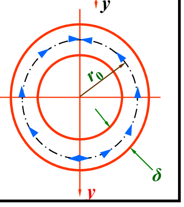


4. 圆环形截面梁(Circular pipe beam)

图示为一段薄壁环形截面梁.环壁厚度为δ，环的平均半径为r_0，由于 $\delta \ll r_0$ 故可假设

（a）横截面上切应力的大小沿壁厚无变化;

（b）切应力的方向与圆周相切.

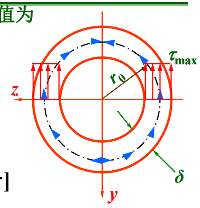


弯曲应力(Stresses in Beams)

横截面上最大的切应力发生中性轴上，其值为

$$\tau_{max} = 2\frac{F_S}{A}$$

式中 $A=2\pi r_0\delta$ 为环形截面的面积



二、强度条件（Strength condition）

$$\tau_{max} \le [\tau] \qquad \tau_{max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \le [\tau]$$

三、需要校核切应力的几种特殊情况

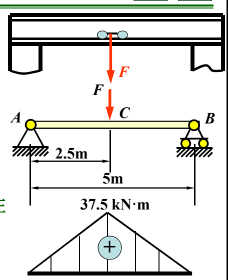
（1）梁的跨度较短，M 较小，而F_S较大时，要校核切应力;

（2）铆接或焊接的组合截面,其腹板的厚度与高度比小于型钢的相应比值时，要校核切应力;

（3）各向异性材料(如木材)的抗剪能力较差，要校核切应力.

弯曲应力(Stresses in Beams)

例题4 一简易起重设备如图所示.起重量(包含电葫芦自重)$F = 30$ kN. 跨长$l = 5$ m. 吊车大梁AB由20a工字钢制成.其许用弯曲正应力$[\sigma]$=170MPa, 许用弯曲切应力$[\tau]$= 100MPa，试校核梁的强度.



解: 此吊车梁可简化为简支梁，力 F 在梁中间位置时有最大正应力.

$$M_{max} = 37.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

（a）正应力强度校核 由型钢表查得20a工字钢的 $W_z = 237\text{cm}^3$

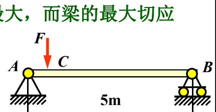
所以梁的最大正应力为 $\sigma_{max} = \dfrac{M_{max}}{W_z} = 158\text{MPa} < [\sigma]$

弯曲应力(Stresses in Beams)

（b）切应力强度校核

在计算最大切应力时，应取荷载F在紧靠任一支座例如支座A处所示，因为此时该支座的支反力最大，而梁的最大切应力也就最大.

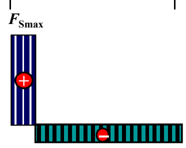
$$F_{S\max} = F_{RA} \approx F = 30\text{kN}$$



查型钢表中，20a号工字钢，有

$$\frac{I_z}{S_{z\max}^*} = 17.2\text{cm} \qquad d\text{=7mm}$$

据此校核梁的切应力强度



$$\tau_{max} = \frac{F_{S\max} S_{z\max}^*}{I_z d} = 24.9\text{MPa} < [\tau]$$

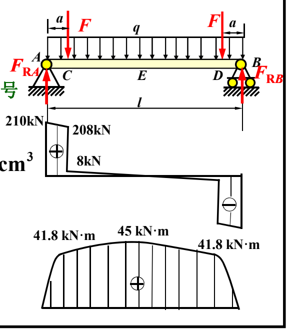
以上两方面的强度条件都满足，所以此梁是安全的.

弯曲应力(Stresses in Beams)

例题5　简支梁AB如图所示. l=2m，a=0.2m. 梁上的载荷为q为10kN/m，F=200kN.材料的许用应力为[σ]=160MPa，[τ]=100MPa，试选择工字钢型号.

解：（1）计算支反力做内力图.

（2）根据最大弯矩选择工字钢型号



$$W_z=\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{45\times10^3}{160\times10^6}=281\text{cm}^3$$

查型钢表，选用22a工字钢，其

W_z=309cm³

弯曲应力(Stresses in Beams)

（3）校核梁的切应力　　查表得 $\dfrac{I_z}{S^*_{z\max}}=18.9\text{cm},$

腹板厚度 d=0.75cm，由剪力图知最大剪力为210kN

$$\tau_{\max}=\frac{F_{S\max}S^*_{z\max}}{I_z b}=\frac{210\times10^3}{18.9\times10^{-2}\times0.75\times10^{-2}}$$

$$=148\text{MPa}>[\tau]=100\text{MPa}$$

$\tau_{\max}$超过[τ]很多，应重新选择更大的截面.现已25b工字钢进行试算

查表得 $\dfrac{I_z}{S^*_{z\max}}=18.9\text{cm},$ d=1cm

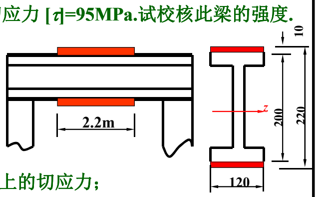
$$\tau_{\max}=\frac{210\times10^3}{21.3\times10^{-2}\times1\times10^{-2}}=98.6\text{MPa}>[\tau]=100\text{MPa}$$

所以应选用型号为25b的工字钢.

弯曲应力(Stresses in Beams)

例题6　对于图中的吊车大梁，现因移动荷载F增加为50kN，故在 20a号工字钢梁的中段用两块横截面为120mm×10mm而长度2.2mm的钢板加强加强段的横截面尺寸如图所示.已知许用弯曲正应力[σ]=152MPa，许用切应力 [τ]=95MPa.试校核此梁的强度.

解：加强后的梁是阶梯状变截面梁. 所以要校核



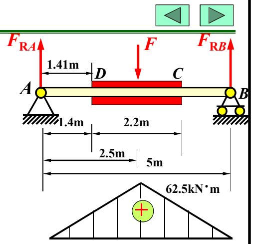
（1）F位于跨中时跨中截面上的弯曲正应力；

（2）F靠近支座时支座截面上的切应力；

（3）F移至未加强的梁段在截面变化处的正应力.

弯曲应力(Stresses in Beams)

（1）校核F位于跨中截面时的弯曲正应力



最大弯矩值为 $M_{\max}=62.5\text{kN}\cdot\text{m}$

查表得20a工字钢 I_z = 2370 cm ^{4}

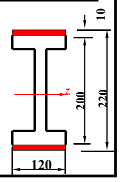
跨中截面对中性轴的惯性矩为

$$I_z=2730\times10^{-8}+2[10\times120(110-5)\times10^{-12}]\ =5020\times10^{-8}\text{m}^4$$

略去了加强板对其自身形心轴的惯性矩.

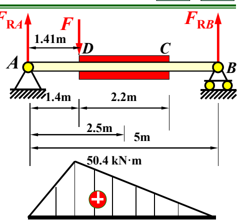
抗弯截面系数 $W_z=\dfrac{I_z}{y_{\max}}=456\times10^{-6}\text{m}^3$

$$\sigma_{c\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}=137\text{MPa}<[\sigma]$$



弯曲应力(Stresses in Beams)

（2）校核突变截面处的正应力，也就是校核未加强段的正应力强度.该截面上的最大弯矩为



$$M_D=\frac{Fab}{l}=50.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

从型钢表中查得20a工字钢

$$W_z=237\text{cm}^3$$

$$\sigma_{D\max}=\frac{M_D}{W_z}=213\text{MP}a>[\sigma]$$

梁不能满足正应力强度条件.为此应将加强板适当延长.

（3）校核阶梯梁的切应力

F 靠近任一支座时，支座截面为不利荷载位置　$F_{S\max}\approx F$

请同学们自行完成计算.

弯曲应力(Stresses in Beams)

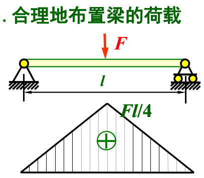
§5-5 提高梁强度的主要措施（Measures to strengthen the strength of beams)

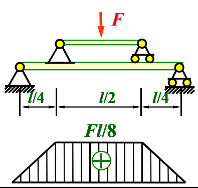
按强度要求设计梁时，主要是依据梁的正应力强度条件

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\le[\sigma]$$

一、降低梁的最大弯矩值

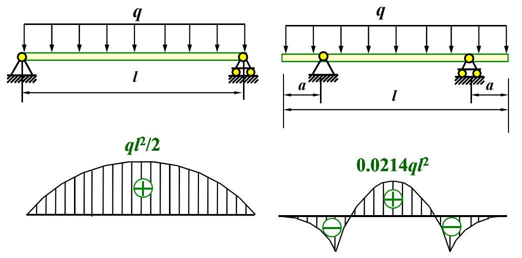
1. 合理地布置梁的荷载





弯曲应力(Stresses in Beams)

2. 合理地设置支座位置



当两端支座分别向跨中移动$a=0.207l$ 时，最大弯矩减小.

弯曲应力(Stresses in Beams)

二、增大W_z

1. 合理选择截面形状

在面积相等的情况下，选择抗弯模量大的截面

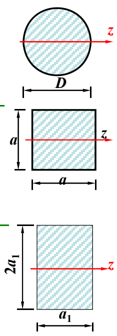
$$W_{z1}=\frac{\pi D^3}{32}$$

$$\frac{\pi D_1^2}{4}=a^2, a=\sqrt{\pi}(D_1/2)$$

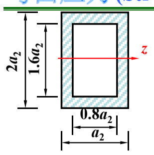
$$W_{z2}=\frac{bh^2}{6}=\frac{(\sqrt{\pi}R)^3}{6}=1.18W_{z1}$$

$$\frac{\pi D_1^2}{4}=2a_1^2, a_1=\sqrt{2\pi}D_1$$

$$W_{z3}=\frac{bh^2}{6}=\frac{4a_1^3}{6}=1.67W_{z1}$$

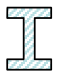


弯曲应力(Stresses in Beams)



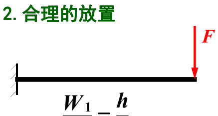
$$\frac{\pi D_1^2}{4}=2a_2^2-0.8\times1.6a_2^2, a_2=1.05D_1$$

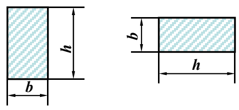
$$W_{z4}=4.57W_{z1}$$



工字形截面与框形截面类似.

2. 合理的放置



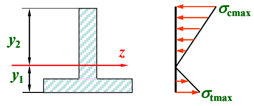


$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{h}{b}\qquad W_1=\frac{bh^3}{12}\qquad W_2=\frac{hb^3}{12}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

三、根据材料特性选择截面形状

1. 对于塑性材料制成的梁, 选以中性轴为对称轴的横截面.
2. 对于脆性材料制成的梁, 宜采用T字形等对中性轴不对称的截面且将翼缘置于受拉侧.



要使y_1/y_2接近下列关系：最大拉应力和最大压应力同时接近许用应力

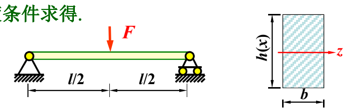
$$\frac{\sigma_{tmax}}{\sigma_{cmax}}=\frac{\dfrac{M_{max}y_1}{I_z}}{\dfrac{M_{max}y_2}{I_z}}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

四、采用等强度梁

梁各横截面上的最大正应力都相等，并均达到材料的许用应力，则称为等强度梁.

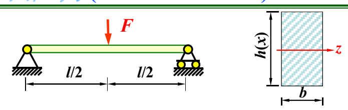
例如，宽度b保持不变而高度可变化的矩形截面简支梁，若设计成等强度梁，则其高度随截面位置的变化规律$h(x)$，可按正应力强度条件求得.



梁任一横截面上最大正应力为

$$\sigma_{max}=\frac{M(x)}{W(x)}=\frac{(F/2)x}{(1/6)bh^2(x)}\le[\sigma]\quad 求得\quad h(x)=\sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}}$$

弯曲应力(Stresses in Beams)

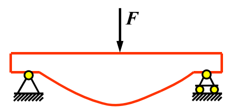


$$h(x)=\sqrt{\frac{3Fx}{b[\sigma]}}$$

但靠近支座处，应按切应力强度条件确定截面的最小高度

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F_S}{A}=\frac{3}{2}\frac{F/2}{bh_{min}}=[\tau]\quad 求得\quad h_{min}=\frac{3F}{4b[\tau]}$$

按上确定的梁的外形，就是厂房建筑中常用的鱼腹梁.



第五章结束

弯曲应力重点与难点

1. 纯弯曲与横力弯曲
2. 中性层与中性轴
3. 梁横截面上的应力
4. 梁横截面上的切应力
5. 梁的强度条件
6. 开口薄壁截面梁的切应力
7. 开口薄壁截面的弯曲中心
8. 平面弯曲的外力作用条件

小结

1、了解纯弯曲梁弯曲正应力的推导方法

2、熟练掌握弯曲正应力的计算、弯曲正应力强度条件及其应用

3、了解提高梁强度的主要措施