华东理工大学 2016–2017 学年第二学期

《复变函数与积分变换》课程期终考试试卷 A 答案 2017.6

一、 填空（每小题 4 分，共 24 分）

1. $-8i$ **2.** $\frac{1}{2}$ 3. $3(ze^z-e^z+1)$,4.旋转角 $-\frac{3\pi}{4}$ ，或 $\frac{5}{4}\pi$ 或 $-\frac{3}{4}\pi+2k\pi, k\in Z$ ，伸缩率 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

5. $f(z)=i\frac{2z-1}{2-z}$ 6、. $\frac{4}{(s^2+4)^2}$

二、选择题（每题 4 分，共 16 分）DACC

三．计算以下积分（每题 6 分，共 30 分）

1．求 $\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}dz$ ，其中 C 为 $|z|=2$.

解： $z=0$ 是被积函数的可去奇点， $z=1$ 是一级极点，

$$\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}dz = 2\pi i\{\mathrm{Re}\,s[\frac{\sin z}{z(z-1)},0]+\mathrm{Re}\,s[\frac{\sin z}{z(z-1)},1]\}$$

$$=2\pi i\{0+\frac{\sin z}{2z-1}|_{z=1},1\}$$

$=2\pi i\sin 1$ 1 分

2．求 $\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z+3)^2(z-1)}dz$

解由留数定理得

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{e^z}{(z+3)^2(z-1)}dz$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),1]$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2}$$

$=\frac{1}{8}e\pi i$ 1 分

3.计算$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$,

解：设$z=e^{i\theta}$， $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

原式$=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2+1}{2z}}\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10z+3}dz$

$=2\pi i\frac{2}{i}\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}]$

$=\frac{\pi}{2}$

4.$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4x+5)^2}dx$

解：记$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+4x+5)^2}dx$，则所求积分是$I$的实部。

令$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)^2}$，则$f(z)$在上半平面有二级极点$z=-2+i$

所以$I=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[\frac{e^{iz}}{(z^2+4z+5)^2},-2+i]$

$=2\pi i\lim_{z\to-2+i}[\frac{e^{iz}}{(z+2+i)^2}]'=\pi e^{-1-2i}$

故$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4x+5)^2}dx=\mathrm{Re}\,sI=\frac{\pi}{e}\cos 2.$

5. $\oint_{|z|=2}\frac{z^{13}}{(z^2-1)(z^8+1)}dz.$

解：（1）$\oint_{|z|=2}\frac{z^{13}}{(z^2-1)(z^8+1)}dz.$

$$=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{1}{z^5(1-z^2)(1+z^8)},0]$$

$$=2\pi i.$$

四.（8 分）已知$u(x,y)=x^2-y^2+2x$，求解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，并使$f(0)=2i$.

解：由柯西一黎曼方程得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \textbf{2 分}\text{所以}\ v(x,y)=\int_0^x 2ydx+C(y)=2xy+C(y).$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+C'(y)=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2,$$

所以$C(y)=\int_0^y C'(y)dx+C=2y+C.$所以$v(x,y)=2xy+2y+C.$

从而 $f(z)=x^2-y+2x+(2xy+2y+C)i.$

又 $f(0)=Ci=2i.$所以$C=2.$所以 $f(z)=x^2-y^2+2x+i(2xy+2y+2)$

五.（8 分）分别在圆环（1）$0<|z|<1$，(2) $0<|z-1|<1$内将函数$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$展为罗朗级数。

解：（1）$\dfrac{1}{(1-z)^2}=(\dfrac{1}{1-z})'=(\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}nz^n \qquad (|z|<1)$,

$$\therefore\ f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1} \qquad (|z|<1).$$

(2) $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+z-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \qquad (|z-1|<1)$,

$$\therefore\ f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2} \qquad (|z-1|<1).$$

六．(1)（3 分）设 $\mathcal{F}[\,f(t)\,]=\dfrac{1}{\beta+i\omega}$，求 $\mathcal{F}[\,f(t-2)\,]$

解由于 $\mathcal{F}[\,f(t)\,]=\dfrac{1}{\beta+i\omega}$，利用位移性质 $\mathcal{F}[\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}-2)\,]=\boldsymbol{e}^{-2\boldsymbol{i}\omega}\dfrac{1}{\beta+\boldsymbol{i}\omega}$

（2）（6 分）求方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$，满足初始条件 $y'\big|_{t=0}=1$，$y\big|_{t=0}=0$ 的解。

解：令 $\mathcal{L}[\,y(t)]=Y(s)$，方程两端取 Laplace 变换得：

$$\therefore S^2Y(S)-SY(0)-Y'(0)+2[SY(S)-Y(0)]-3Y(S)=\frac{1}{S+1}$$

$$\therefore (S^2+2S-3)Y(S)=\frac{2}{S+1}$$

$$\therefore Y(S)=\frac{S+2}{(S-1)(S+1)(S+3)}$$

$$\therefore y(t)=\sum \operatorname{Re}s[Y(S)\,e^{st},S_k]$$

$$=\left.\frac{S+2}{(S+1)(S+3)}e^{st}\right|_{s=1}+\left.\frac{S+2}{(S-1)(S+3)}e^{st}\right|_{s=-1}+\left.\frac{(S+2)e^{st}}{(S+1)(S-1)}\right|_{s=-3}$$

$$=\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$ （1 分）

七、（5 分）计算 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z-2}dz$ 的值，并由此证明 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$

解：因函数 $\dfrac{1}{z-2}$ 在区域 $|z|\le 1$ 解析，由柯西积分定理可得

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z-2}dz=0$$

令 $z=e^{i\theta}\ (-\pi\le\theta\le\pi)$，则

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z-2}dz=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}d\theta$$

$$=-2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}d\theta+i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

由于积分值为零，又 $\cos\theta$ 为偶函数，故上式实部为零，虚部也为零，即

$$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$