华东理工大学

复变函数与积分变换作业（第3册）

班级__________学号___________姓名___________任课教师___________

第五次作业

教学内容：3.1 复变函数积分概念　　3.2 柯西积分定理

1．计算积分 $\int_C \mathrm{Re}\, z dz$，其中积分路径 C 为：

(1) 从原点到 $1+i$ 的直线段;

(2) 从原点到点 1 的直线段，以及连接由点 1 到 $1+i$ 的直线段所组成的折线。

2. 计算积分 $\int_C (x-y+ix^2)dz$，其中 C 为从原点到 $1+i$ 的直线段。

3．计算积分 $\int_C e^z dz$, 其中C为从 0 到 1 再到 $1+i$ 的折线

4. 计算积分 $\oint_C |z|\bar{z}dz$，其中 C 由直线段 $-1 \le x \le 1, y=0$ 及上半单位圆周组成的正向闭曲线。

5. 设函数 $f(z)$ 在单连通域D内解析，C 为D内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_c \mathrm{Re}[f(z)]dz = \oint_c \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

6. 观察得出下列积分的值，并说明理由。

（1）$\oint_{|z|=1.5} e^{z}(z^{2}+1)dz$ ；

（2）$\oint_{|z|=1.5} \dfrac{3z+5}{z^{2}+2z+3}dz$ ；

（3）$\oint_{|z|=r} \ln(1+z)dz \quad 0<r<1$

（4）$\oint_{|z|=1} \dfrac{1}{\cos z}dz$

7. 沿下列指定曲线的正向计算积分$\oint_C \frac{dz}{z(z^2+1)}$值：

(1) $C:|z|=\frac{1}{2}$；

(2) $C:|z+i|=\frac{1}{2}$；

8．设$f(z)$在单连通区域D内解析，且不为零，C为D内任何一条简单光滑闭曲线，判断积分$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$　是否为零？说明理由。

9. 设区域D为右半平面，z为D内的圆周$|z|=1$上的任意一点，用在D内的任意一条曲线C连接原点与z，证明：

$$\operatorname{Re}\left[\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right]=\frac{\pi}{4}$$

10. 计算下列积分：

（1）$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz$；

(2) $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{(z+1)} dz$

（3）$\int_L (z+1)e^z dz$，L 为$|z|=1$的上半圆周.

(4) $\int_L (z^2+7z+1)dz,\quad L$ 为 $z_1=1$ 到 $z_1=1-i$ 的直线段

第六次作业

教学内容：3.3 复合闭路定理　3.4 柯西积分公式

1. 设 C 为正向椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，定义 $f(z)=\oint_C \frac{\zeta^2-\zeta+2}{\zeta-z}d\zeta$，$z$ 不在 C 上，求 $f(1), f'(i), f''(-i)$.

2．沿指定曲线的正向计算下列各积分。

（1）$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz, \quad C:|z-2|=1$；

（2）$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5}dz, \quad C:|z|=r>1;$

（3）$\oint_C \frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz, \quad C:|z|=2$

3．计算积分

（1）$\oint_C \frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi}{4}zdz, \quad C:|z|=2$

（2） $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz, \quad C: |z-2i| = \frac{3}{2}$；

（3） $\oint_C \frac{dz}{z^2-a^2}, \quad C: |z-a| = a$；

（4） $\oint_C \frac{dz}{(z^2+4)(z^2+1)}dz, \quad C: |z| = \frac{3}{2}$；

4. 设$f(z)$在区域D内解析，C 为D内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在区域D内但不在C上的任意一点z_0有等式：$\oint_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$成立。

5．设$f\left(z\right)$在$\left|z\right| \le 1$上解析且$f\left(0\right)=1$，试求：$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[2 \pm \left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\frac{f\left(z\right)}{z}dz$。

部分习题参考答案：

第五次作业

1. （1）$\frac{\mathrm{i}+1}{2}$；　（2）$\frac{1}{2}+i$

2. $\frac{\mathrm{i}-1}{3}$；

3. $e^{1+i}-1$;

4. πi;

5．未必成立

6．（1）0 ；（2）0．（3）0 ；（4）0．

7．(1) $2\pi\mathrm{i}$；(2) $-\pi\mathrm{i}$

8．等于零。

10．（1）$(\pi-\frac{1}{2}\mathrm{sh}2\pi)\mathrm{i}$；(2) $\frac{-1}{8}(\frac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2)+\frac{i\pi}{8}\ln 2$ (3) $-2\cos h1$ (4) $-\frac{9}{2}-\frac{26}{3}i$

第六次作业

1. $f(1)=4\pi i;\quad f'(i)=-2\pi(2+i);\quad f''(-i)=4\pi i$；

2．（1）$2\pi e^2 i$；（2）$\frac{-\pi^5 i}{12}$；（3）0。

3．（1）$\sqrt{2}\pi i$ ；（2）$\frac{\pi}{\mathrm{e}}$；（3）$\frac{\pi i}{a}$；（4）0.；

5．$2\pm f'(0)$.