复 变 函 数 与 积 分 变 换 作 业 （第 5 册）

班级___________学号____________姓名____________任课教师____________

第九次作业

教学内容：5.1 孤立奇点　5.2.1 留数的定义　5.2.2 极点处留数的计算

1．填空题：

（1）函数 $f(z)=\dfrac{1}{e^z-(1+i)}$ 的全部孤立奇点是_______________

（2）$z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z-z}$ 的______________________________级极点.

（3）$z=-2$ 是 $\dfrac{z^3-8}{(z^2-4)^3}$ 的______________________________级极点.

（4）函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}\,(a>0)$ 在上半平面内奇点的留数之和为_____________

（5）$\mathrm{Res}[z\cos\dfrac{1}{z},0]=$________________________________.

2．指出下列函数的奇点及其类型（不考虑 ∞ 点），若是极点，指出它的级.

(1) $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$;

(2) $\dfrac{\ln(1+z)}{z}$

(3) $e^{\frac{z}{1-z}}$

(4) $\dfrac{\sin z}{z^3}$;

(5) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$;

(6) $\dfrac{e^z \sin z}{z^2}$

3. 证明：如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m(m>1)$ 级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点.

4. 求下列函数在指定奇点处的留数.

(1) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$，　$z=0$；

(2) $\dfrac{\cos z}{z-i}$， $z=i$；

(3) $z^2\sin\dfrac{1}{z}$， $z=0$

（4） $\dfrac{1}{(1+z^2)^3}$， $z=\pm i$；

（5）$e^{\frac{z}{z-1}}$， $z=1$；

（6）$e^{\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}$， $z=0$.

5. 判断 $e^{z+\frac{1}{z}}$.的孤立奇点的类型，并求其留数.

6. 设$\varphi(z)$在z_0解析，z_0为$f(z)$的一级极点，且$\operatorname{Re}s\left[f(z),z_0\right]=A$，证明：

$$\operatorname{Re}s\left[f(z)\varphi(z),z_0\right]=A\varphi(z_0)$$

7．已知$\mathrm{z}=0$是函数$f(z)$的n级极点，证明$\operatorname{Re}s[\dfrac{f'(z)}{f(z)},0]=-n.$

第十次作业

教学内容　5.2.3 留数定理；5.2.4 函数在无穷远点的留数

1．填空题

（1）$\cos z-\sin z$在$z=\infty$的留数为______________________________________.

(2) $\dfrac{2z}{3+z^2}$在$z=\infty$的留数为____.

(3) $e^{\frac{1}{z^2}}$在$z=\infty$的留数为______________.

(4) $\dfrac{e^z}{z^2-1}$ 在 $z=\infty$ 的留数为____________.

2. 利用留数定理计算下列积分.

(1) $\oint_C \dfrac{1}{1+z^4}dz,\quad C: x^2+y^2=2x$;

(2) $\oint_C \dfrac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz,\quad C: |z|=4$;

(3) $\oint_C \dfrac{\sin z}{z}dz,\quad C: |z|=\dfrac{3}{2}$;

（4）$\oint_C \frac{2\cos z}{(e+e^{-1})(z-i)^3}dz, \quad C:|z-i|=1$；

（5）$\oint_{|z|=1} z^n \cos\frac{1}{z}dz$ n 是正整数.

3． 计算下列积分，C 为正向圆周：

(1) $\oint_C \frac{z^{13}}{(z^2+5)^3(z^4+1)^2}dz, \quad C:|z|=3$；

（2）$\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz.$

（3）$\oint_{|z|=1}\frac{2idz}{z^2+2az-1}.\quad (a>1)$

（4）$\oint_{|z|=8}\frac{1-\cos z}{z(e^z-1)}dz.$

部分题目答案

第九次作业

2．(1) $z_k=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}\ (k=0,1,\cdots,n-1)$，一级极点；

(2) $z=0$ 为可去奇点 ；

(3) $z=1$ 为本性奇点；

(4) $z=0$ 为二级极点;

(5) $z=0$ 为三级极点； $z=2k\pi i,(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为一级极点。

(6) $z=0$ 是一级极点

4．(1) $-\frac{4}{3}$；

(2) $\cosh 1$；

(3) $-\frac{1}{6}$

(4) $\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(1+z^2)^3},i]=\frac{-3i}{16}$； $\mathrm{Re}\,s[\frac{1}{(1+z^2)^3},-i]=\frac{3i}{16}$；

（5）e

（6）1.

5. $\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},0]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$； $\mathrm{Re}\,s[e^{z+\frac{1}{z}},\infty]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$

第十次作业

2．(1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$； (2) $6\pi i$； (3) 0； （4）$-\pi i$

$$(5)\ \mathrm{Re}\,s[z^n\cos\frac{1}{z},0]=\begin{cases}0 & n=2k\\ (-1)^k\dfrac{2\pi i}{(2k)!}, & n=2k-1.\end{cases}\ (k=0,1,2,.....)$$

3．(1) $2\pi i$； （2）$-\frac{1}{3}$； （3）$-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}$ （4）0