6.2 分式线性映射及其性质

- 1. 分式线性映射及其分解
- 2. 分式线性映射的性质
    - •共形性
    - •保圆性
    - •保对称性
- 3. 确定分式线性映射的条件

一. 分式线性映射及其分解

形如

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

的映射称为分式线性映 射.

其中, a、b、c、d 为复常数。

补充定义使分式线性函 数在整个扩充平面上有 定义:

当 $c \neq 0$时, $w = \begin{cases} \infty & z = -d/c \\ a/c & z = \infty \end{cases}$

当 $c = 0$时, 在$z = \infty$时, 定义 $w = \infty$.

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow z=\frac{-dw+b}{cw-a} \qquad (-d)(-a)-bc\neq 0$$

则其逆映射仍为分式线性 映射，

所以 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 为 $1-1$ 映射.

当 $c=0$ 时， $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ ，

当 $c\neq 0$ 时，

$$w=\frac{c(az+b)+ad-ad}{c(cz+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

$$=\frac{bc-ad}{c}\quad \eta \quad +\frac{a}{c},$$

$\boxed{令\xi=cz+d,\eta=\dfrac{1}{\xi}}$

因此，分式线性映射可分解为

(1) $w = kz + h \quad (k \neq 0)$ 称为线性映射 .

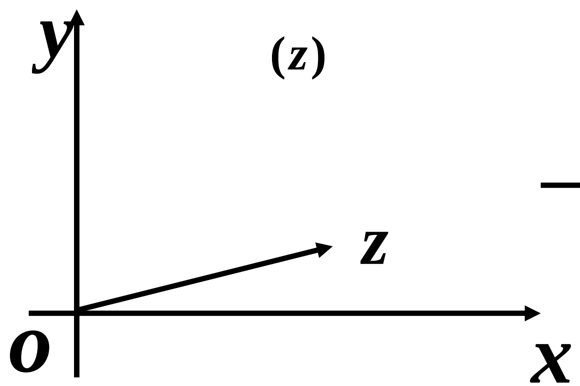
(2)$w = \dfrac{1}{z}$ 称为反演映射。

1、线性映射 $w = kz + h \ (k \neq 0)$

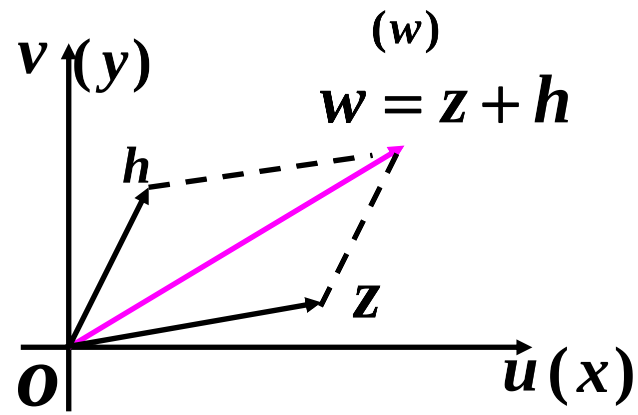
当 $k = 1$ 时, $w = z + h$ 称为 平移映射。

设 $w = u + iv \quad z = x + iy \quad h = h_1 + ih_2$

于是 $\begin{cases} u = x + h_1 \\ v = y + h_2 \end{cases}$



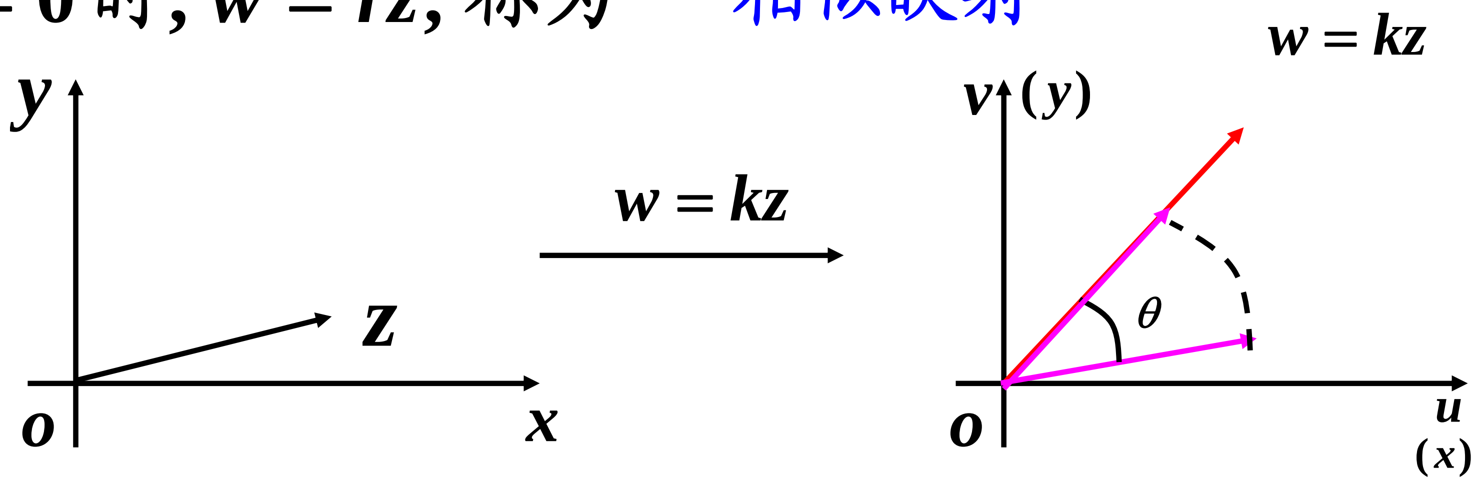
$\xrightarrow{w = z + h}$



当 $h=0$ 时, $w=kz$, 设 $k=re^{i\theta}$, 则 $w=re^{i\theta}z$

$r=1$ 时, $w=e^{i\theta}z$, 称为 旋转映射

$\theta=0$ 时, $w=rz$, 称为 相似映射

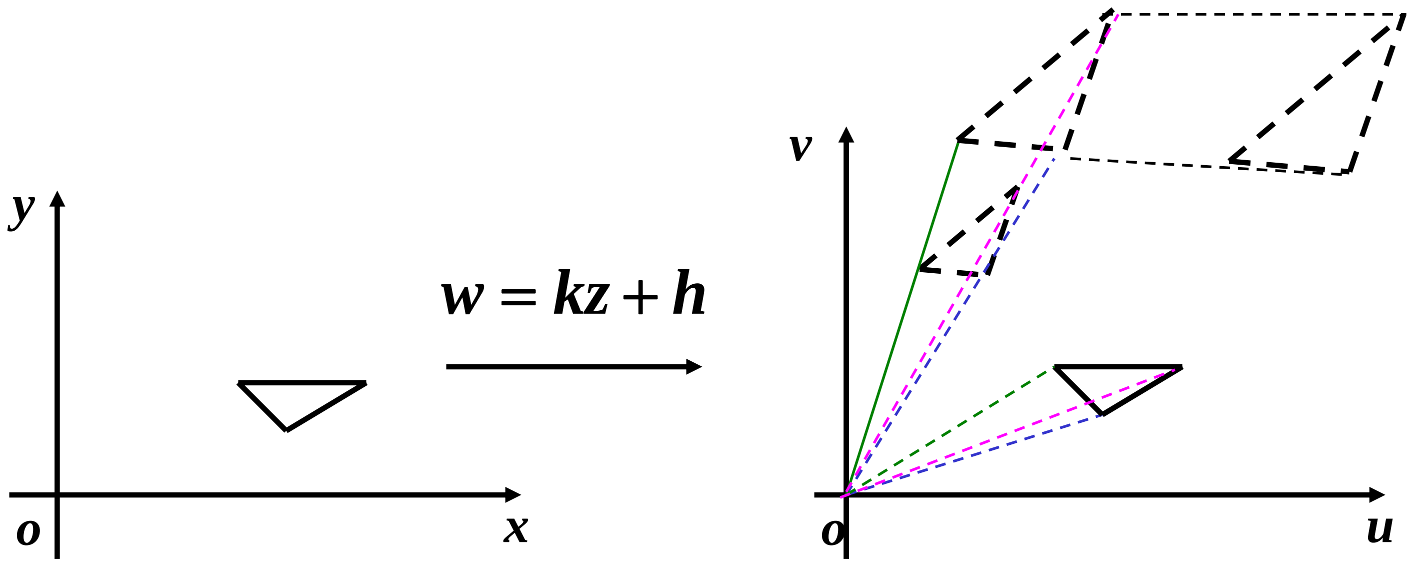


$w=kz+h\ \ (k\neq 0)$的映射过程：

先将 z 旋转 θ, 再将 $|z|$ 伸长 (或缩短)

r 倍, 最后平移向量 h。

例如，对于 z 平面上的三角形，在映射 $w=kz+h$ 下可得 w 平面上另一个三角形。



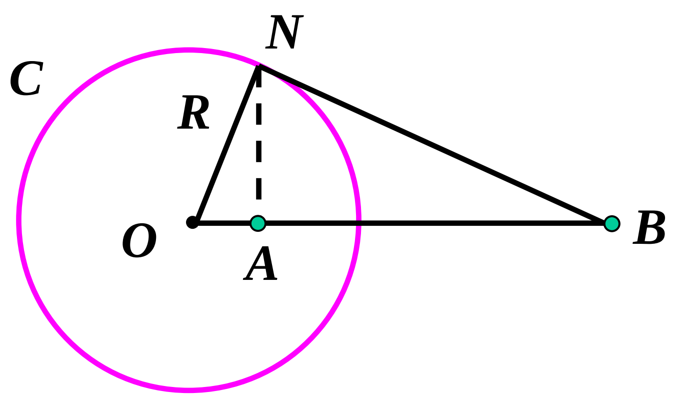
显然，映射 $w=kz+h\ (k\neq 0)$ 不改变图形的形状

2、反演映射 $w=\dfrac{1}{z}$

关于圆周的对称点：

设 C 是以原点为中心，半径为 R 的圆周，若圆内点 A 及圆外点 B 在由圆心 O 出发的射线上，且 $|OA|\cdot|OB|=R^2$，则称 A 和 B 关于圆周 C 对称。

对称点的作法：



规定：圆心 O 关于圆周的对称点为 ∞。

将 $w=\dfrac{1}{z}$ 分解为：$w=\overline{w_1},\ w_1=\dfrac{1}{\overline{z}}$

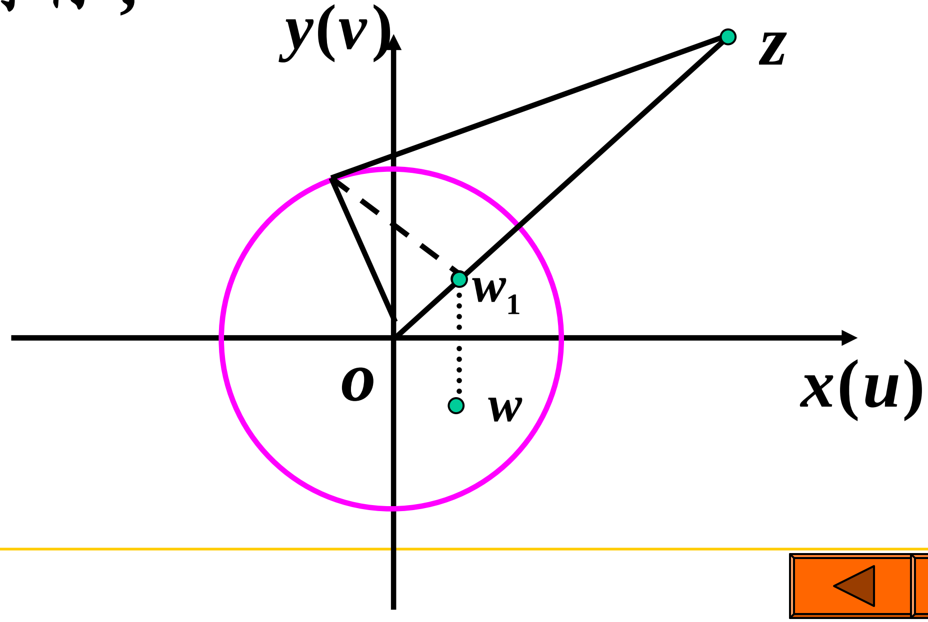
设 $z=re^{i\theta}$ 则 $\overline{z}=re^{-i\theta}$ $w_1=\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{r}e^{i\theta}\Rightarrow w=\overline{w_1}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

由于 $|z|\cdot|w_1|=1$，所以 z 与 w_1 是关于单位圆周的对称 点。

再根据 w 与 w_1 关于实轴对称，

则得到由 z 作出点 $w=\dfrac{1}{z}$

的几何作法：



2. 分式线性映射的性质

先讨论以上两种映射的 性质,从而得出一般分式线性映射的 性质.

(1)共形性

对于映射 $w=\dfrac{1}{z}$ $z=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} w=\infty; z=\infty \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} w=0$

因此 $w=\dfrac{1}{z}$ 在扩充复平面上是一一的映射。

由于 $w'=\dfrac{-1}{z^2} \neq 0 (z\neq 0)$

所以，当 $z\neq 0$时，$w=\dfrac{1}{z}$是保角的.

规定：∞处曲线的夹角等于它们在映射$\xi=\dfrac{1}{z}$下

$\xi=0$处的像曲线的夹角 即有

i) 当 $w=f(z)$将 $z=\infty$映成$w=w_0(\neq\infty)$时，作$\zeta=\dfrac{1}{z}$,

若$w=f(\dfrac{1}{\zeta})$在 $\zeta=0$处是保角的，则称$w=f(z)$在$z=\infty$

处是保角的;

ii) 当 $w=f(z)$将 $z=z_0(\neq\infty)$ 映成 $w=\infty$ 时，作$\zeta=\dfrac{1}{w}$,

若$\zeta=\dfrac{1}{f(z)}$在 $z=z_0$处是保角的，则称$w=f(z)$在$z=z_0$

处是保角的;

iii) 当$w=f(z)$将$z=\infty$映成$w=\infty$时，作$\eta=\dfrac{1}{w},\zeta=\dfrac{1}{z}$，若$\eta=\dfrac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$在$\zeta=0$处是保角的，则称$w=f(z)$在$z=\infty$处是保角的。

当$z=\infty$时，$w=\dfrac{1}{z}=\xi$在$\xi=0$点是保角的．

(解析，且 $w'_{\xi}=1\neq 0$)

$\Rightarrow$ $w=\dfrac{1}{z}$在$z=\infty$点是保角的.

$\Rightarrow$ $z=\dfrac{1}{w}$在$w=\infty$点是保角的.

即$w=\dfrac{1}{z}$在$z=0$点是保角的.

所以，$w=\dfrac{1}{z}$在扩充复平面上为共形 映射.

类似方法可推得：

线性映射$w = kz + h(k \neq 0)$在扩充复平面上是共形映射.

$$\xi = \frac{1}{z}, \quad \eta = \frac{1}{w}$$

于是，有以下结论 ：

$$\eta = \frac{\xi}{k + h\xi}$$在$\xi = 0$点的保角性.

性质1

分式线性映射是扩充复 平面上共形映射 .

(2)保圆性

我们规定：直线是半径为无穷大的圆周。

因为$w=az+b$是平移,旋转,伸缩的合成映射．

所以，z平面上的圆周 $C \xrightarrow{w=az+b}$ w平面上的圆周 Γ

z平面上的直线 $l \xrightarrow{w=az+b}$ w平面上的直线 L

所以，$w=az+b$在扩充复平面上把圆周 映射成圆周,即具有保圆性．

对于$w=\dfrac{1}{z}$, $z=0 \xrightarrow{w=1/z} \infty, z=\infty \xrightarrow{w=1/z} 0$

圆周$C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \xrightarrow{w=1/z} ?$

令$z=x+iy \quad w=\dfrac{1}{z}=u+iv,$

将$z=x+iy$代入$w=\dfrac{1}{z}$得

$$u=\frac{x}{x^2+y^2} \qquad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

或 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \quad y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$ 代入圆的方程得

$$\Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

所以，圆周$C: a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

$$\xrightarrow{w=\frac{1}{z}} \Gamma: d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$$

$a,d\neq 0$ 圆周$C\to$圆周Γ

$a\neq 0, d=0$ 圆周$C\to$直线Γ

$a=0, d\neq 0$ 直线$C\to$圆周Γ

$a=0, d=0$ 直线$C\to$直线Γ

因此，反演映射具有保 圆性.

性质2 分式线性映射将扩充 z平面上圆周映射成扩充 w平面上的圆周，即具有保圆性．

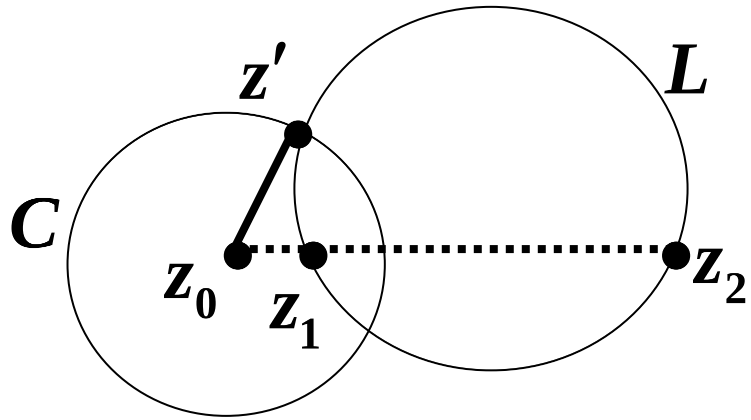
综上所述我们有：在分式线性映射下，如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点，那么它就映射半径为有限的圆周，如果有一点映射成无穷远点，那么它就映射成直线。

3 保对称性

首先我们来阐明关于圆周的对称点的一个重要特性，即z_1, z_2是关于圆周C 的对称点的充要条件是通过 z_1, z_2 的任何圆周 L 与 C 正交

事实上，如果C是一条直线结论显然成立。

如果 $C: |z - z_0| = R$, 当 L 为过 z_1, z_2 的直线时，则 L 一定通过圆心z_0, 因此C与 L 正交。当L 为半径有限的圆周时，由点 z_0 作 L 的切线，切点为z', 因此由平面解析几何知识得



$$|z'-z_0|^2=|z_2-z_0||z_1-z_0|=R^2$$

因此 z' 在圆周 C 上，L 的切线为 C 半径，即 C 与 L 正交。

反过来，设 L 是过 z_1,z_2 的与 C 正交的任意圆周，那么特别连接 z_1,z_2 的直线必与 C 正交，因此必通过 C 的圆心，如果 L 是半径为有限的圆周，那么 L 与 C 在交点 z' 处正交，因此 C 的半径 z_0z' 为 L 的切线，所以有

$$|z_2-z_0||z_1-z_0|=|z'-z_0|^2=R^2$$

因此 z_1,z_2 为关于圆周 C 的对称点。

定理3　设 z_1,z_2 是关于圆周 C 的对称点，则在分式线性映射下，它们的像 w_1,w_2 一定是关于 C 的像曲线 L 的对称点。映射的这种性质称为保对称性。

证　设通过 w_1,w_2 的任意圆周为 L' 是经过 z_1,z_2 的圆周 C' 由分式线性映射过来的，由于 C 与 C' 正交，所以 L 与 L' 正交，因此 w_1,w_2 是关于圆周 L 的对称点。

三、唯一确定分式线性映射 的条件

定理. 在扩充z平面上给定三个不同点 z_1、z_2、z_3，在扩充w平面上也给定三个不同 的点 w_1、w_2、w_3，则存在唯一分式线性映射把 z_1、z_2、z_3 分别映射为 w_1、w_2、w_3，可以证明，这个映射为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

称之为对应点公式

证明 设$w=\dfrac{az+b}{cz+d}(ad-bc\neq 0)$，将$z_k(k=1,2,3)$依次

$\rightarrow w_k(k=1,2,3)$，即$w_k=\dfrac{az_k+b}{cz_k+d}\ (k=1,2,3)$

因而有 $$w-w_k=\frac{(z-z_k)(ad-bc)}{(cz+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$$

$$w_3-w_k=\frac{(z_3-z_k)(ad-bc)}{(cz_3+d)(cz_k+d)},(k=1,2)$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{(z-z_1)\cancel{(ad-bc)}}{\cancel{(cz+d)}(cz_1+d)}\frac{\cancel{(cz+d)}(cz_2+d)}{(z-z_2)\cancel{(ad-bc)}}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{(cz_2+d)}{(cz_1+d)}$$

同理 $$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{(cz_2+d)}{(cz_1+d)}$$

所求分式线性映射

故 $$\frac{w-w_1}{w-w_2}\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}\text{——}(1)$$

注：（1） 式 (1) 是三对点所确定的唯一的一个映射。

(2) 式(1)左端的式子通常称为四 个点 w, w_1, w_2, w_3 的交比 (*cross – ratio*).

因此，式 (1) 说明分式线性映射具有保交比不变性。

(3)在实际应用时，常常会 利用一些特殊点（如 $z=0, z=\infty$) 等使公式简化。

(2)如果 z_k 或 w_k 中有一个为 ∞,则只需将对应点公式中含有 ∞ 的项换为 1。

推论：若 $w = f(z)$ 是一分式线性映射，且有 $f(z_1) = w_1$ $f(z_2) = w_2$,则它可表示为

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = k\frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (k\text{为复常数})$$

特别地，若 $w_1 = 0, w_2 = \infty$

$$\text{则有}\, w = k\frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (k\text{为复常数})$$

例　求把$z_1=1, z_2=i, z_3=-1$映射为$w_1=0, w_2=1, w_3=\infty$的分式线性映射。

解：　由对应点公式，有

$$\frac{w-0}{w-1}:\frac{1}{1}=\frac{z-1}{z-i}:\frac{-1-1}{-1-i}$$

由此得：

$$\frac{w}{w-1}=\frac{1+i}{2}\frac{z-1}{z-i}$$

$$w=i\frac{1-z}{1+z}$$ 为所求分式线性映射。

定理

在分式线性映射 $w = f(z)$下，将圆周 C 映射为圆周 C'，圆周C的内部，不是映射为 C'的内部，就是映射成 C'的外部.

确定对应区域的两个方法：

(1) 若 z_0 在 C 内部, $f(z_0)$ 在 C' 内部, 则 C 的内部映射为 C' 的内部;

若 z_0 在 C 内部, $f(z_0)$ 在 C' 外部, 则 C 的内部映射为 C' 的外部;

(2) 若 C 依 $z_1 \to z_2 \to z_3$ 与 C' 依 $w_1 \to w_2 \to w_3$ 绕向相同, 则 C 的内部映射为 C' 的内部, 否则, C 的内部映射为 C' 的外部。

例 中心分别在 $z=1$ 与 $z=-1$，半径为 $\sqrt{2}$ 的二圆弧所围区域，在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下映成什么区域？

解 两圆弧的交点为 $-i$ 与 i，且互相正交，交点

$$z=i \to w=0 \qquad z=-i \to w=\infty$$

$\therefore$ 映射后的区域是以原点为顶点张角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角形区域.

取 $z=\sqrt{2}-1 \in C_1 \to w=\dfrac{(1-\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}$

(第三象限角分线上的点)

$\therefore C_1 \to C_1' --$第三象限的分角线

由保角性 $C_2 \to C_2' --$第二象限的分角线