第一章　复数与复变函数

- 复习复数的概念、运算、几何表示、 三角表示
- 平面点集的有关概念
- 复变函数的概念
- 复变函数的极限、连续和可导

§1.1 复数及其运算

一、复数的基本概念

复数定义:对$\forall x, y \in R$, 称 $z = x + yi$ 或 $z = x + iy$ 为复数。

其中，x, y分别称为复数的实部和虚部。

记: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$

当$x = 0, y \neq 0$时，$z = yi$称为纯虚数;

当 $y = 0$ 时，$z = x$ 为实数。

全体复数构成的集合称为复数集，记为 C。

即: $C = \{x + iy \mid x, y \in R\}$

复数相等

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ 且 } y_1 = y_2$$

? 两个复数能比较大小吗 ？

共轭复数

称实部相同而虚部相反 的两个复数 $x + iy$ 与 $x - iy$ 共轭。

若记 $z = x + iy$, 则记 $\bar{z} = x - iy$

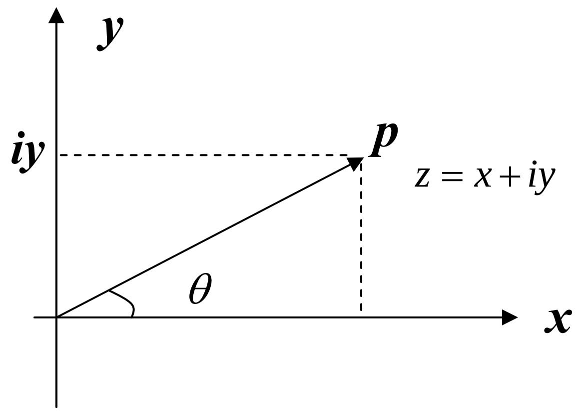
共轭概念是相互的 , 即 $\bar{\bar{z}} = z$

若 $z=\bar{z}, z=?$ 为实数。

利用共轭复数，可得：

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

二. 复平面



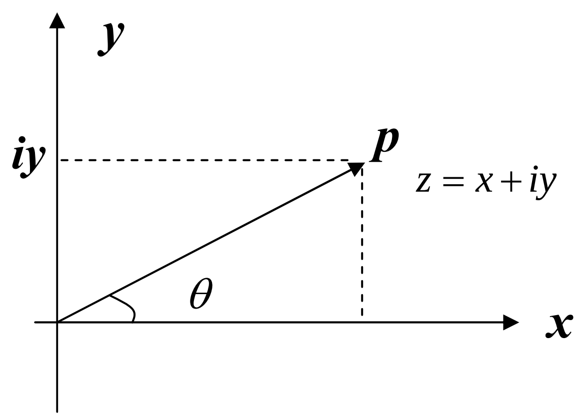
x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，这样表示的平面称为复平面或 z 平面。

复数的模

向量 $\vec{OP}$ 的长度称为复数 z 的模, 记为 $|z|$ 或 r,

即 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$。

$$r^2=z\cdot\bar{z}$$



复数的辐角

以正实轴为始边，以 $z(z\neq 0)$所对应向量为终边的角称为 z 的辐角　记为 $\operatorname{Arg} z$　　$\operatorname{Arg} z=\theta+2k\pi$

显然 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r=\sqrt{x^2+y^2}$

所以 $\tan(\operatorname{Arg} z)=\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

任何一个复数 $z \neq 0$ 有无穷多个辐角，它们之间相差 2π 的整数倍。

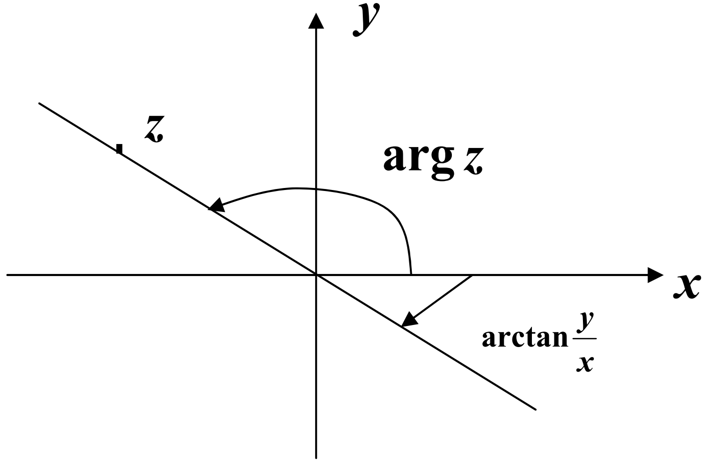
满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐角称为辐角的主值， 记为

$$\theta_0 = \arg z$$

于是有 $Arg\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

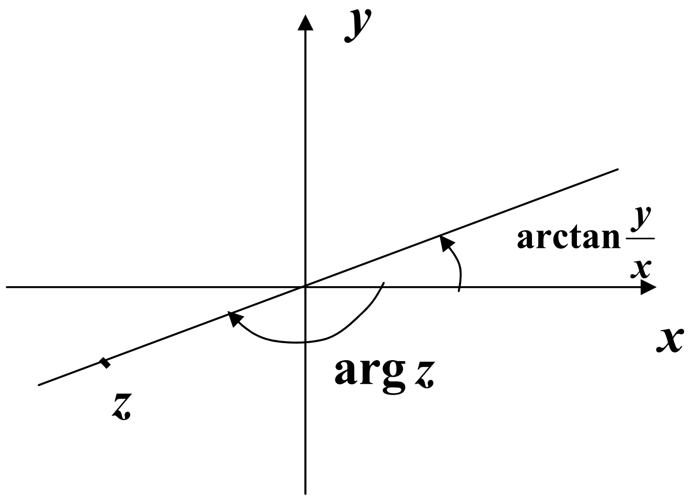
当 $z = 0$ 时，$|z| = 0$，而辐角不确定

容易看出 $|z| = |\bar{z}|$, $\arg z = -\arg \bar{z}$.



$$\arg z = \pi - \left(-\arctan\frac{y}{x}\right)$$

$$= \pi + \arctan\frac{y}{x}$$

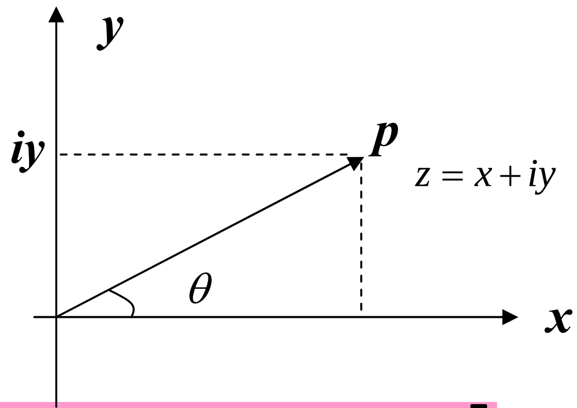


$$\arg z = -\pi + \arctan\frac{y}{x}$$

$\arg z$ 由 $\arctan\dfrac{y}{x}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 按如下关系确定：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & (x>0) \quad (I, IV) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x=0, y>0) \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & (x<0, y\ge 0) \quad (II) \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & (x<0, y<0) \quad (III) \\ -\dfrac{\pi}{2} & (x=0, y<0)\end{cases}$$

复数的三角表示形式



$z \neq 0$时, $z=x+iy$ 可表示为:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=|z|[\cos(\mathrm{Arg}\,z)+i\sin(\mathrm{Arg}\,z)]$$

复数的指数表示形式

利用 *Euler* 公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

复数 $z=x+iy$ 可以表示为:

$$z=re^{i\theta}$$

【例1】 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

$$1)\ z=-\sqrt{12}-2i;\quad 2)\ z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}.$$

解 1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4.$ z在第三象限, 因此

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi.$$ 因此

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$$

(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$

显然, $r=|z|=1$,

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi,$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi.$$

因此 $z=\cos\frac{3}{10}\pi+i\sin\frac{3}{10}\pi=e^{i\frac{3}{10}\pi}$

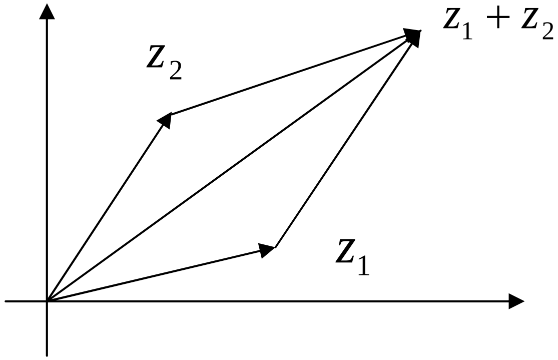
三、复数的运算

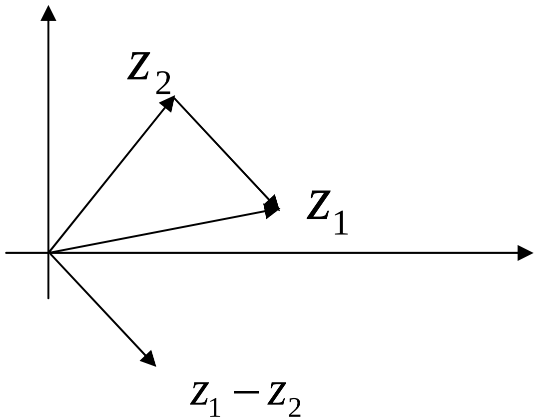
设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

1、复数的加、减法运算

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

几何意义





$|z_1 - z_2|$表示 z_1与z_2之间的距离

则

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad \text{(三角不等式)}$$

$$|z_1 - z_2| \ge \big|\, |z_1| - |z_2| \,\big|$$

2. 复数乘法

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

3. 复数除法

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{x_2 + iy_2} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

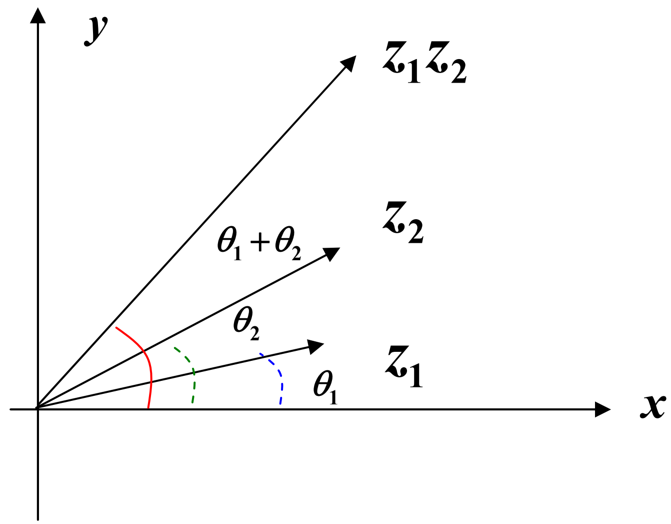
由乘法法则得 ：

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&\qquad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]\\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]
\end{aligned}
$$

于是得： $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$，

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$（如何理解？）

乘积的几何意义：



乘积的指数形式： $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ $\quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

商： $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \dfrac{r_2}{r_1} e^{i(\theta_2-\theta_1)} = \dfrac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]$

于是得： $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{|z_2|}{|z_1|}$

$\mathrm{Arg}\dfrac{z_2}{z_1} = \mathrm{Arg}\, z_2 - \mathrm{Arg}\, z_1$ （如何理解？）

4. 复数运算的性质

设 $z_1, z_2, z_3, z \in C$, 则有

(1) 交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ z_1 z_2 = z_2 z_1$

(2) 结合律: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),\ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

(3) 分配律: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

(4) 共轭: $\overline{\overline{z}} = z,\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2,\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$$

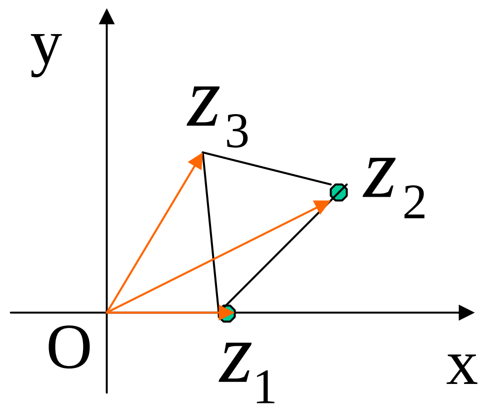
$$z\overline{z} = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2$$

【例2】已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$ 求三角形的另一个顶点。

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= (1+i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$



$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \qquad z_3' = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

【例3】 已知 $z\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i$, 求 z

解： 设 $z=x+iy$, 则 $\bar{z}=x-iy$

代入方程有 ： $x^2+y^2-3y-3ix=1+3i$

由复数相等定义得 ：
$$\begin{cases}-3x=3\\x^2+y^2-3y=1\end{cases}$$

求得 : $x=-1,\ y=0$ 或 3

于是, $z=-1$ 或 $z=-1+3i$

【例4】设 $\arg(z+2)=\frac{\pi}{3}$，$\arg(z-2)=\frac{5\pi}{6}$，求 z

解：$z+2=r_1(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}r_1+i\frac{\sqrt{3}}{2}r_1$

$$z-2=r_2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+i\frac{1}{2}r_2$$

$$z=(\frac{1}{2}r_1-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}ir_1 \quad =(-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2)+\frac{1}{2}ir_2$$

比较实部和虚部，得 $\frac{1}{2}r_1-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}r_2+2 \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}r_1=\frac{1}{2}r_2$

解得: r_1、$=2$ 于是 $z=-1+\sqrt{3}i$

【例5】 设z_1, z_2为任意两个复数，证明 ：

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

证明： 利用$|z|^2 = z\bar{z}$，有

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$$

$$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\overline{z_1 \bar{z}_2} + z_1 \bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

【思考与练习】

1.把复数$1+i$对应的向量按顺时针旋转$\dfrac{2}{3}\pi$

所得向量对应的复数为 ________。

2.设 $$f(x+iy)=x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+iy\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

试写出$f(z)$的关于z表达式。

1. $$z=(1+i)e^{-\frac{2\pi}{3}i}=(1+i)\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=(1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

2. 分析：令 $z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy,$

解出x，y代入表达式整理可得。

四 复数的乘幂与方根

n 个相同复数 $z\ (z \neq 0)$ 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记为 z^n

$$z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot \ldots z}^{n}$$

设 $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

—棣莫弗（*De Moivre*)公式.

z 的方根：

当 $z \neq 0$ 时，$\sqrt[n]{z} = w$ 相当于 $w^n = z$

令 $w = \rho e^{i\varphi}$ 有 $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$

于是 $\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

所以 $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \ (k = 0, \pm 1, \cdots)$$

注:

1. 任一非零复数开 n 次方,有且仅有 n 个不同的根;
2. 它们均匀分布在以原点为中心 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆周上.

【例5】求复数 $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^5$ 的主辐角、模、共轭复数

解：$(1-\sqrt{3}i)^5=\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^5=2^5\left(\cos(-\frac{1}{3}\pi)+i\sin(-\frac{1}{3}\pi)\right)^5$

$$=2^5\left(\cos(-\frac{5}{3}\pi)+i\sin(-\frac{5}{3}\pi)\right)$$

$$=32\left(\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi\right)\quad=16+i16\sqrt{3}$$

故模为32,幅角主值为 $\frac{\pi}{3}$,共轭复数为 $16-i16\sqrt{3}$

【例6】 设 $z=-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，求 $z^{100}+z^{50}+1$

解： $z^{50}=\left(-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}=\left[\left(-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{25}$

$$=\frac{(-2i)^{25}}{2^{25}}=-i$$

$$z^{100}+z^{50}+1=(-i)^{2}+(-i)+1=-i$$

【例7 】 试用$\sin\theta$与$\cos\theta$表示$\cos 5\theta$。

法一

$$\cos 5\theta = \cos(4\theta+\theta) = \cos 4\theta\cos\theta - \sin 4\theta\sin\theta$$

$$= \cos(3\theta+\theta)\cos\theta - \sin(3\theta+\theta)\sin\theta = \cdots$$

麻烦

法二

$$\cos 5\theta = \mathrm{Re}(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \mathrm{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^5]$$

$$= \mathrm{Re}[\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta -$$

$$10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta]$$

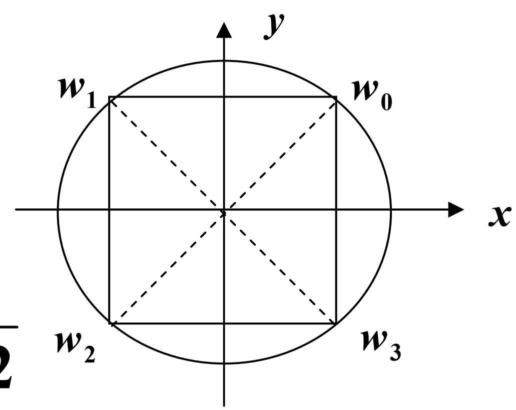
$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

【例8】 求 $\sqrt[4]{-1}$

解： $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$\sqrt[4]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\quad k=0,1,2,3$$

即 $\sqrt[4]{-1}$ 有四个不同的值:



$$w_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_3=\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例9】 求方程$z^3+z^2+z+1=0$的根，并将

$z^3+z^2+z+1=0$ 分解因式.

解：因为 $(z-1)(z^3+z^2+z+1)=z^4-1=0$

而 $z-1=0$ 的根为 $z=1$

所以，$z^4-1=0$ 的其余三个根即为所求 .

$z=\sqrt[4]{1}$ 四个根为：$z_0=1,\quad z_1=i,\quad z_2=-1,\quad z_3=-i$

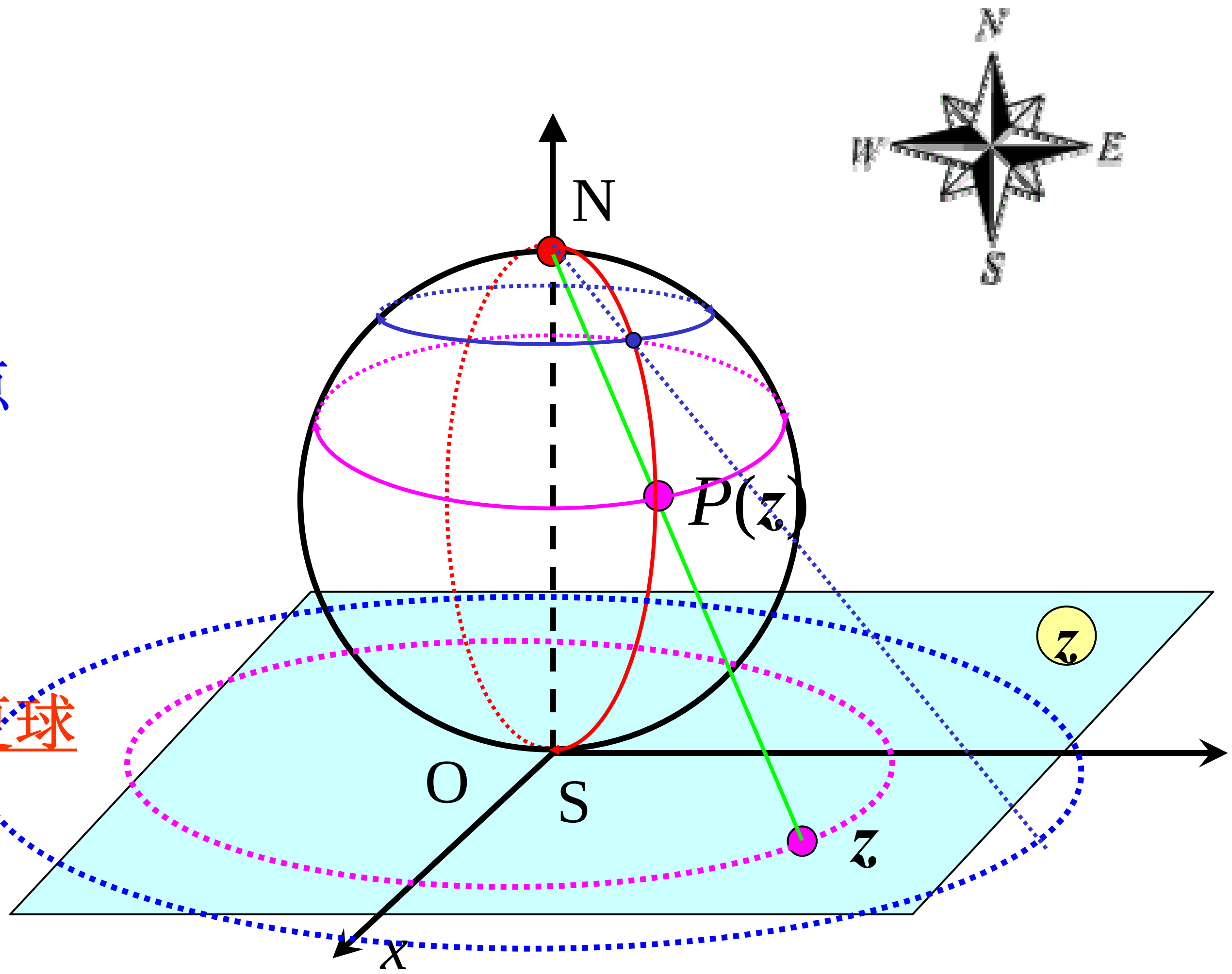
方程$z^3+z^2+z+1=0$的根为 $z_1=i,\quad z_2=-1,\quad z_3=-i$

$$z^3+z^2+z+1=(z-i)(z+1)(z+i)$$

五、复球面

*N*点本身可看作是与复平面上一个模为无穷大的假想点相对应,这个假想点称为无穷远点,

记为： ∞



这样的球面称作复球面

扩充复数域---引进一个“新”的数∞： $C\cup\{\infty\}=C^{+}$

扩充复平面---引进一个“假想点”： 无穷远点 ∞.

约定： $$\frac{\infty}{a}=\infty(a\neq\infty)$$

$$\frac{a}{0}=\infty(a\neq 0),\qquad \frac{a}{\infty}=0(a\neq\infty),$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty(a\neq 0)$$

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty(a\neq\infty)$$

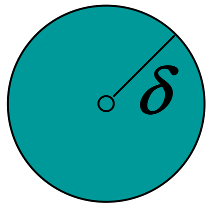
§ 1.2平面点集的一般概念

一. 几个基本概念

(1) 邻域：

以z_0为中心，δ为半径的圆的内部称为z_0的δ-邻域，记为

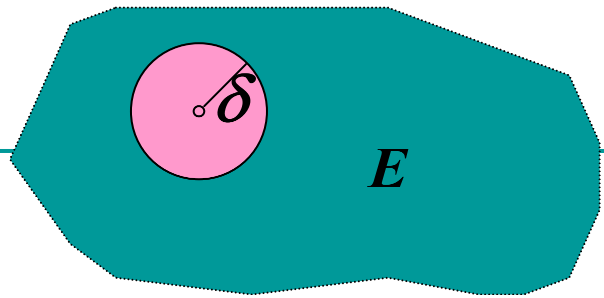
$$N(z_0,\delta)=\{z\,\big|\,|z-z_0|<\delta\}$$



集合 $\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\}$ 称为 z_0 的去心 δ-邻域，

记为 $N(\hat{z}_0,\delta)$

(2) 开集: 设 E 是一平面点集，$\forall z_0\in E$，若存在 $N(z_0)\subset E$，则称 z_0 为 E 的一个内点；若 E 中每个点都是内点，则称 E 为开集。



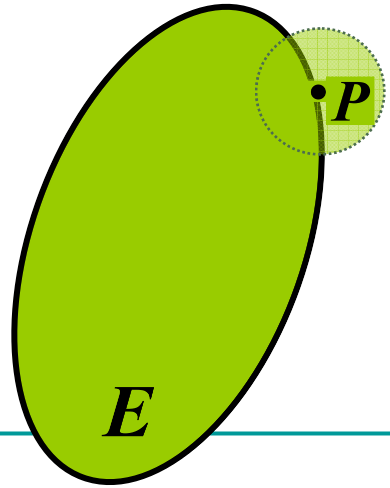
如： $E=\{z \mid |z|<1\}$; $E=\{z \mid |z-1|>2\}$均为开集

(3) 闭集: 平面上不属于 E的集合称为 E的余集。

开集的余集称为闭集。

如： $F=\{z \mid |z|\geq 1\}$; $F=\{z \mid |z|\leq 2\}$均为闭集

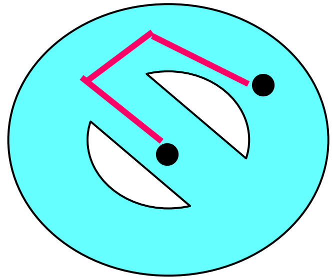
(4) 边界: 若 z_0 的任一邻域$N(z_0)$总含有属于E 的点和不属于E 的点, 则称 z_0 为边界点。



注：边界点可以是孤立点

E 的全体边界点构成 E 的边界。

(5) 连通集 平面点集 D 中的任何两点都可用完 全含在 D 内的一条折线连起来 ；



(6) 区域 连通的开集；

区域的边界可以是一条 或几条曲线和一些孤立 的点组成

如 $0<|z-z_0|<\delta$ 边界由圆周 $|z-z_0|=\delta$ 与点 z_0 组成

(7) 闭区域 区域 D 与它的边界一起构成的 点集。简称闭域，记为 $\overline{D}$。

(8) 有界区域、无界区域

若区域 D 可以包含在一个以原点 为中心、有限值为半径的圆内，称 D 为有界区域。否则称为无界区域。

例 复平面上满足 $r_1 < |z - z_0| < r_2$ 的点构成一个有界区域，边界由 $|z - z_0| = r_1$ 和 $|z - z_0| = r_2$ 组成 (圆环域)。

例 复平面上满足 $\mathrm{Re}\, z > 1$ 的点构成边界为 $\mathrm{Re}\, z = 1$ 的无界区域。

例 满足 $y_1 < \mathrm{Im}\, z < y_2$ 的点构成一个带形区域 (无界)。

二.平面曲线

若 $x(t)$、$y(t)$ 为连续实函数，则 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b)$

表示平面曲线，称为连续曲线。

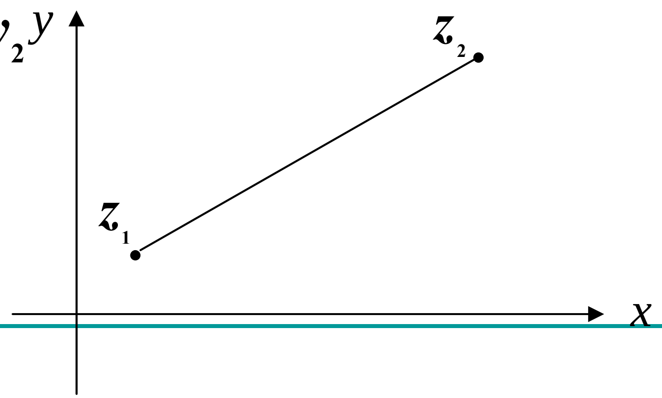
令 $z(t) = x(t) + iy(t)$,

则方程 $z = z(t)\ (a \le t \le b)$ 表示 z 平面上的有向连续曲线

$z(a)$ 和 $z(b)$ 称为曲线的起点和终点。

例如:

直线段： $z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$



复数形式: $z = z(t) = x(t) + iy(t)$

$= z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \le t \le 1$

若 $z_1 = 0$, 则方程为 $z = t \cdot z_2$

圆的参数方程：

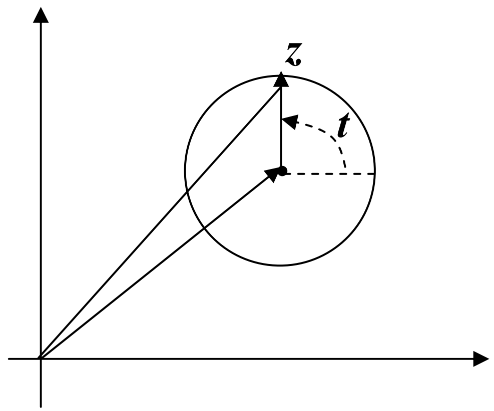
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

复数形式：$z = r(\cos t + i\sin t) = re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

以 z_0 为圆心的圆：

$$z - z_0 = re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z = z_0 + re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



圆弧：

$$z = r(\cos t + i\sin t), \quad 0 \le t \le \theta$$

光滑曲线：

若 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ $(t \in [a,b])$ 连续，且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$，称曲线是光滑曲线。

逐段光滑曲线：

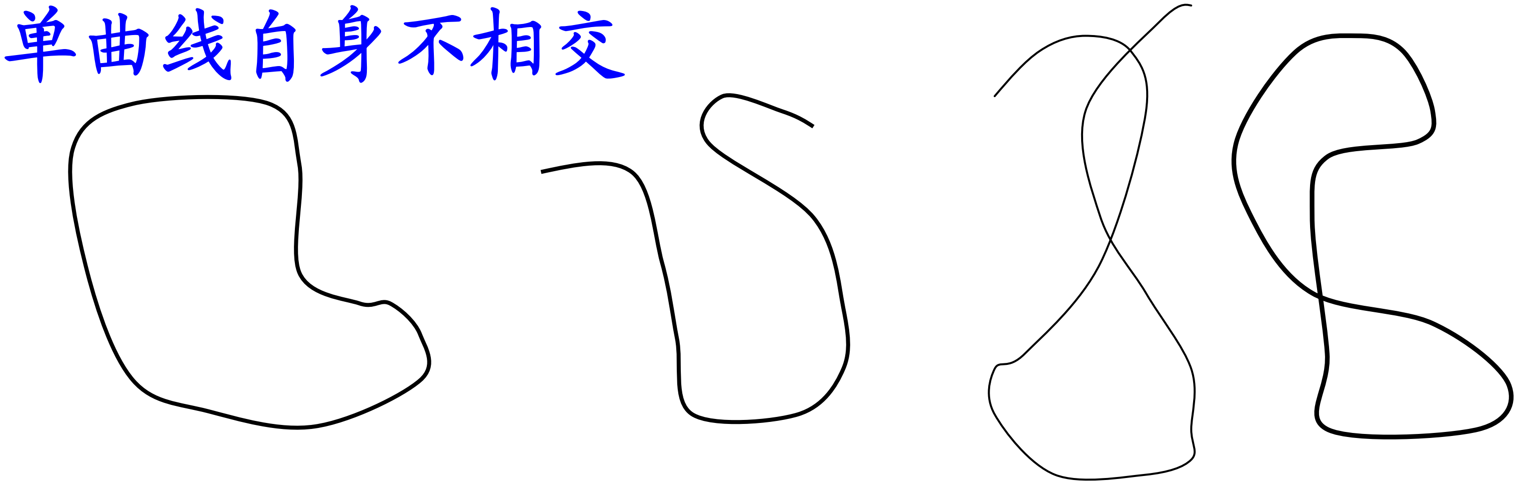
由几段光滑曲线依次连 接所组成的曲线。

闭曲线： 曲线 $C: z = z(t)$ $(a \le t \le b)$，若起点与终点重合 (即 $z(a) = z(b)$)，则 C 称为闭曲线。

简单曲线 (*Jrodan* 曲线)：

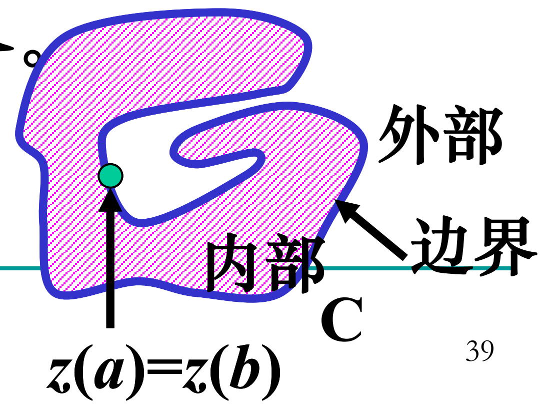
若 t 的任何两个不同值 (a、b除外) 总对应曲线上两个不同的点，则曲线称为简单曲线，起点 $z(a)$与终点 $z(b)$ 重合时为简单闭曲线。

简单曲线自身不相交



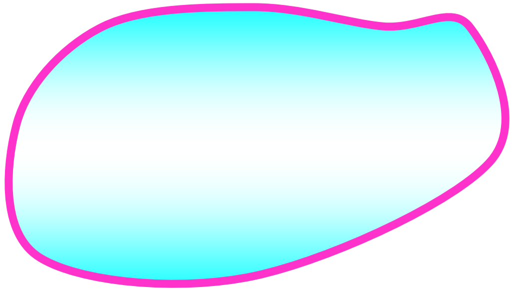
简单闭曲线的性质(Jordan定理)

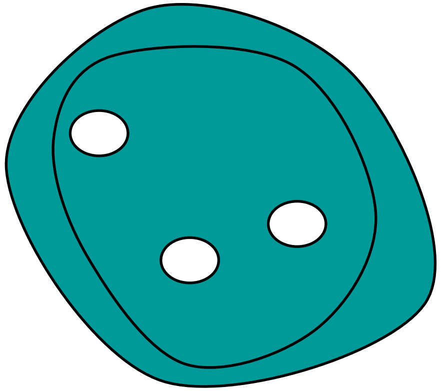
任一条简单闭曲线 C：$z=z(t)$， $t\in[a, b]$，把复平面唯一地分成三个互不相交的部分：一个是有界区域，称为C的内部；一个是无界区域，称为C的外部；还有一个是它们的公共边界。



单连通域、多连通域：

D 是复平面上的一个区域，若在其中任作一条简单闭曲线，闭曲线的内部总属于 D，则称 D 为单连通域，否则称为多连通域。





例　满足 $|z|<2, \operatorname{Im} z>1$ 的点集构成单连通域。

例　满足 $0<|z+i|<2$ 的点集为多连通域。

【例1】

考察下列方程（或不等式）在平面上所描绘的几何图形。

（1） $|z-2i|=|z+2|$

该方程表示到点2i和－2距离相等的点的轨迹，所以方程表示的曲线就是连接点2i 和－2的线段的垂直平分线，它的方程为y ＝ －x。

（2） $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$

设 z ＝ x+ iy,

$$\mathrm{Im}(i+\bar{z})=\mathrm{Im}(x+i(1-y))=4$$

$$\Longleftrightarrow y=-3$$

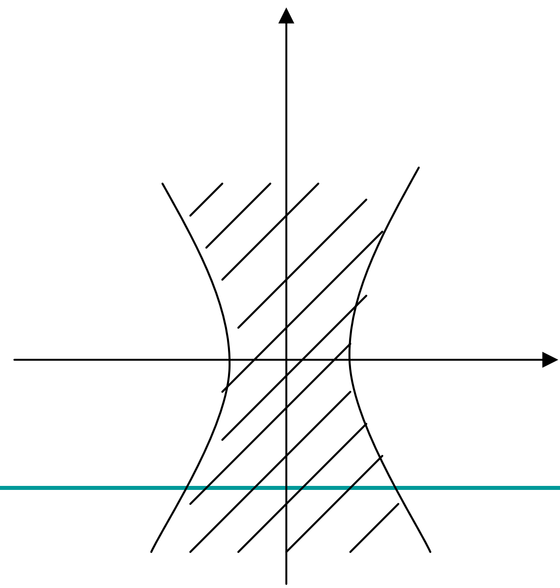
（3） $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$

$\arg(z-i)$ 表示实轴方向与由点i 到 z 的向量之间交角的主值，因此满足方程的点的全体是自 i 点出发且与实轴正向夹角为45度的一条半射线。（不包括 i点）

（4） $\operatorname{Re} z^2 \le 1$

$$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$$

$$\operatorname{Re} z^2 = x^2-y^2 \le 1$$



【例2 】 指出不等式 $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$ 中点z的轨迹所在范围。

解: $$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

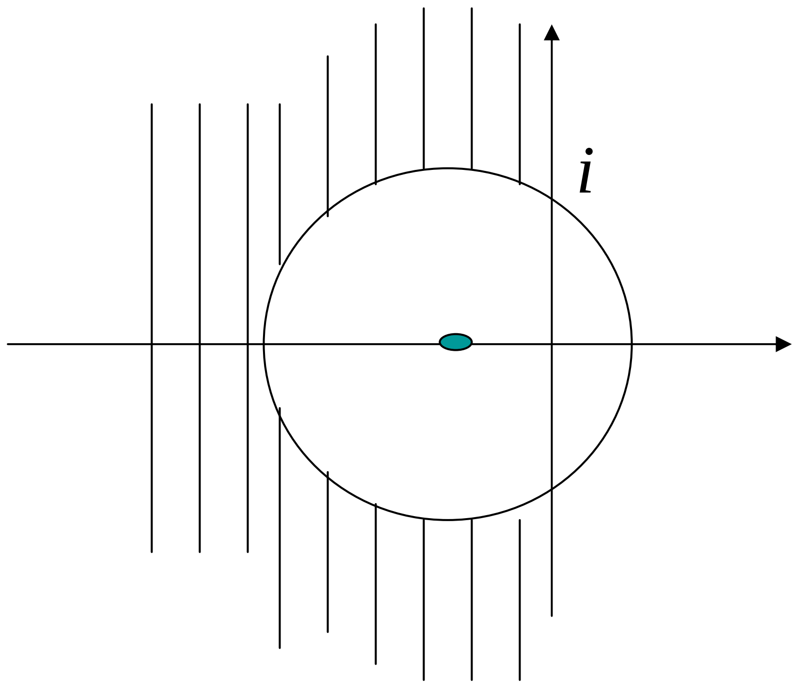
因为 $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$, 所以

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$$

于是有 $$\begin{cases}-2x>0\\ x^2+y^2-1>0\\ x^2+y^2-1>-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ x^2+y^2>1\\ (x+1)^2+y^2>2\end{cases}$$

它表示在圆 $(x+1)^2+y^2>2$

外且属于左半平面的所有点的集合



§1.3 复变函数

一.复变函数的概念:

设 D 是一复数集，若对 $\forall z \in D\ (z = x + iy)$ 按照一定的法则，总有集合 G上的一个或几个确定的复数 $w = u + iv$ 与之对应，则称 w 是 z 的复变函数。

记作 $w = f(z) = u + iv \quad (z \in D)$

我们考虑单值函数

单值函数 $f(z)$: 对于D中的每个z，有且仅有一个w与之对应。

多值函数 $f(z)$: 对于D中的每个z，有两个或两个以上w与之对应。

复变函数与实函数的关系:

对于 $w = f(z)$, 若令 $z = x + iy, w = u + iv$

则 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

复变函数相当于两个实 函数：

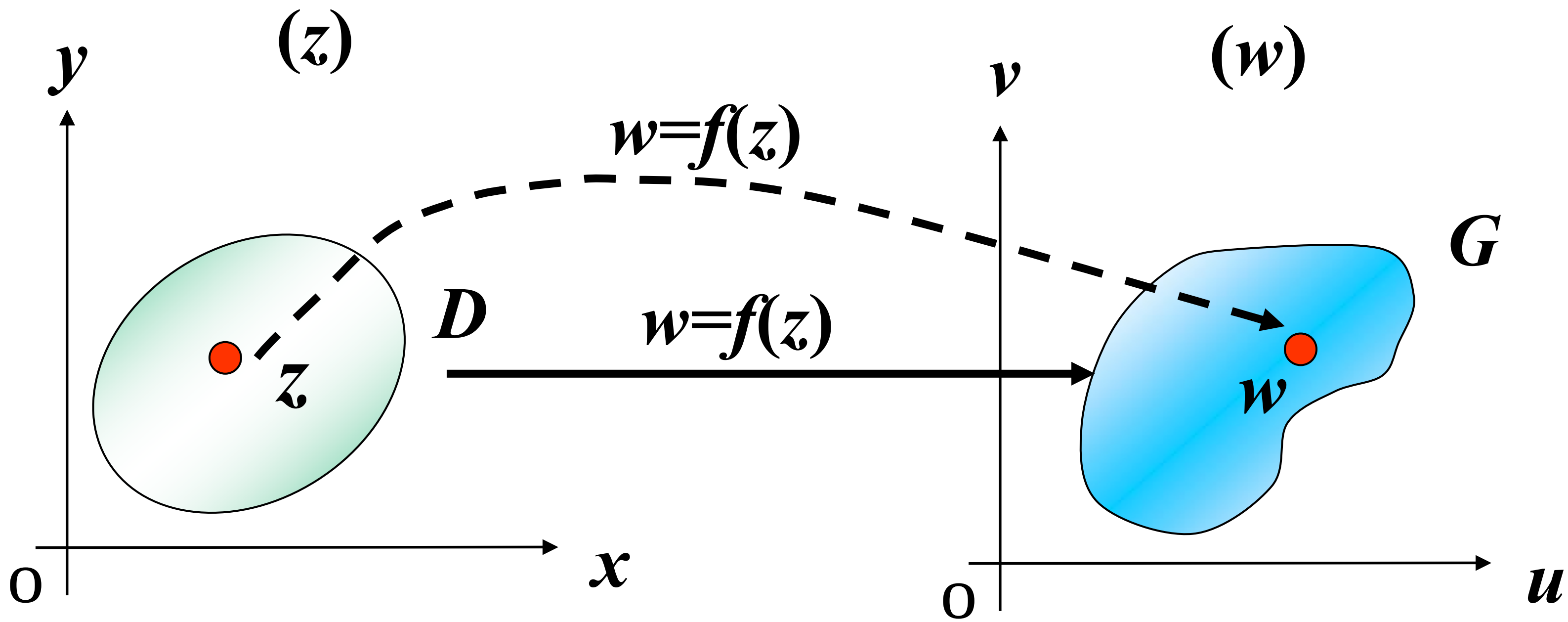
$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$$

例如 $w = \dfrac{1}{z}$

令 $z = x + iy, w = u + iv$

则 $w = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

于是 $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2 \neq 0)$



复变函数 $w = f(z)$ 几何意义：由 z 平面上的点集 D 到 w 平面上的点集 $G = f(D)$ 的一个映射

G 中的点 w 称为 D 中的点 z 的象；

D 中的点 z 称为 G 中的点 w 的原象。

$f(z)$是单射 $\Longleftrightarrow$ 对于任意 $z_1 \neq z_2$，$f(z_1) \neq f(z_2)$.

$f(z)$是满射 $\Longleftrightarrow$ $f(D) = G$

$f(z)$是双射 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 既是单射，又是满射。

定义　设 $w = f(z)$ 的定义集合为D,函数值集合为G, G中的每一个点w必将对应着D中的点.按照函数的定义，在G上就确定了一个单值（或多值）函数，它称为$w = f(z)$ 的反函数，也称为映射$w = f(z)$逆映射.

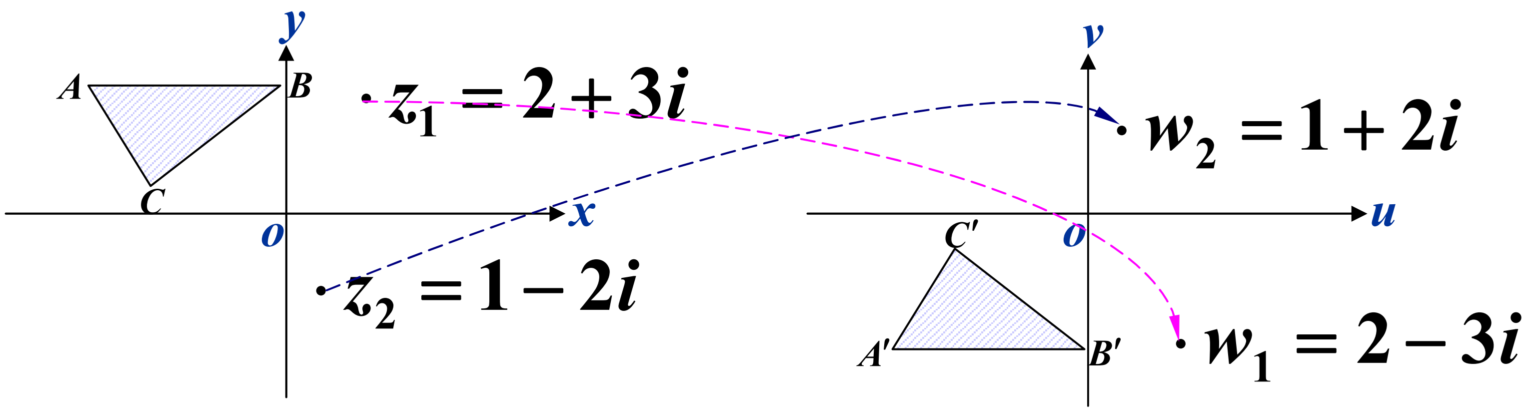
$$z \in D \xrightarrow{w=f(z)} w \in G$$

$$\text{一个(或几个)}z \in D \xleftarrow[z=f^{-1}(w)]{} w \in G$$

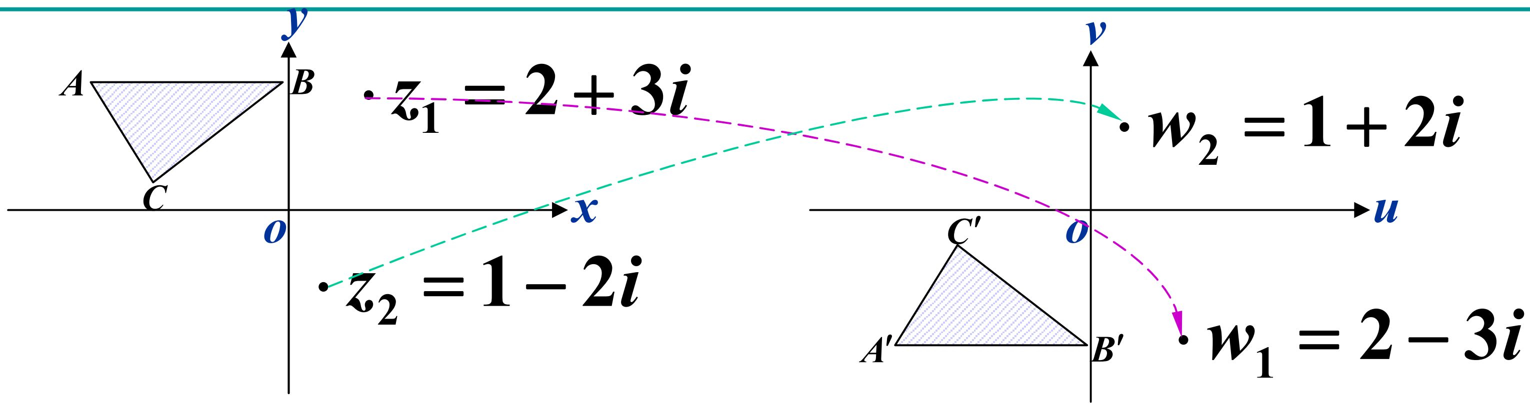
当它们都是单射时, 称为一一映射.

例如：函数 $w = \bar{z}$ 构成的映射.

将 z 平面上的点 $z = a + ib$ 映射成 w 平面上的点 $w = a - ib$.

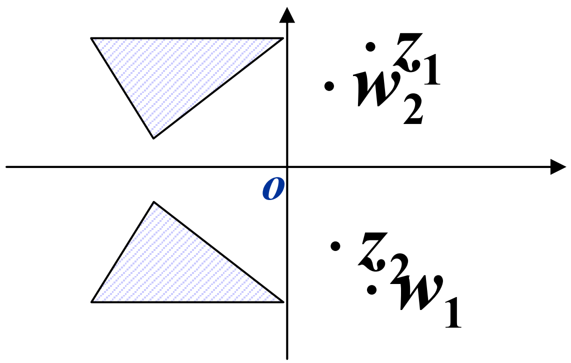


$z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$.



$$z_1 \to w_1, \quad z_2 \to w_2, \qquad \Delta ABC \to \Delta A'B'C'.$$

如果把 z 平面和 w 平面重叠在一起，不难看出$w = \overline{z}$是关于实轴的一个对称映射.



且是全同图形.

例1. 函数 $w = \dfrac{1}{z}$ 把z平面上的曲线 $x=1$ 映成w平面什么曲线?

解：原曲线的方程为：$z = x+iy = 1+iy,$

记 $w = u+iv,$ 于是象曲线方程为：

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+iy} = \frac{1-iy}{1+y^2},$$

则 $u = \dfrac{1}{1+y^2}, v = \dfrac{-y}{1+y^2}$

这就是象曲线的实参数方程.

这是一个圆周

消去参数，得 $u^2+v^2-u=0.$

例2 $C:|z|=R \xrightarrow{w=2z+b} \Gamma ?$

$$w-b=2z \Rightarrow \Gamma : |w-b|=2R$$

$$C: z=(2+i)t \xrightarrow{w=z^2} \Gamma ?$$

$$w=[(2+i)t]^2=(3+4i)t^2 \Rightarrow \Gamma : v=\frac{4}{3}u$$

$$C: y=x \xrightarrow{w=iz} \Gamma ?$$

$$w=i(x+ix)=-x+ix \Rightarrow \Gamma : v=-u$$

思考:曲线 $x^2+y^2=9$ 在映射 $w=\frac{1}{z}-1$ 下的像是何图形?

二.复变函数的极限

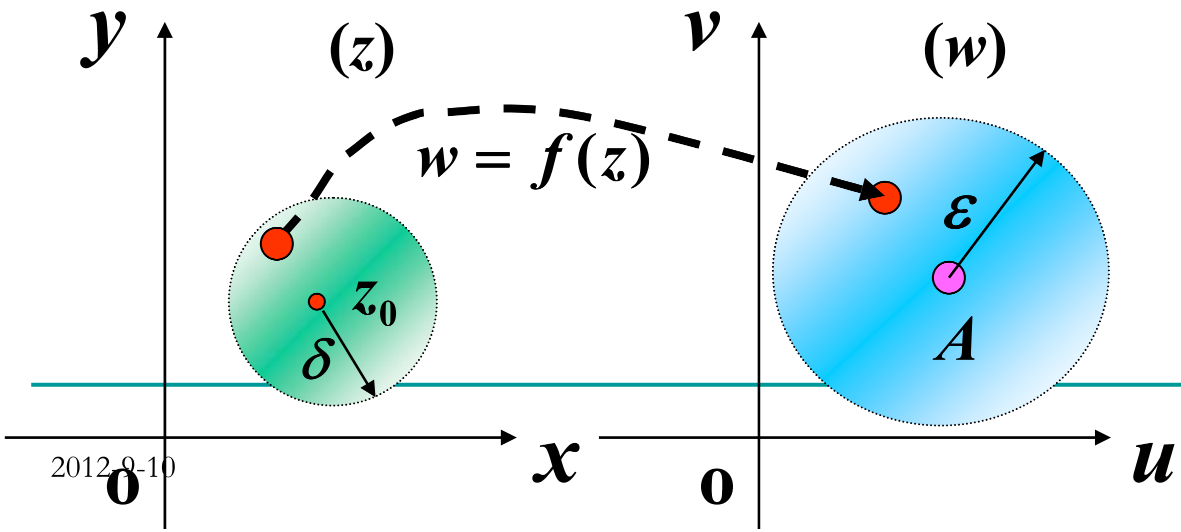
定义 设 $w = f(z)$ 在 $N(\hat{z}_0)$ 内有定义，若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

则称 A (常数) 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

几何意义:



几何意义:

当变点z一旦进入z_0 的充分小去心邻域时，它的象点$f(z)$就落入A的一个预先给定的ε邻域中.

注：从形式上来看，复变函数的极限定义与一元实函数是完全类似的，但实际上二者有很重要的区别主要是因为在复平面上，变量 z 趋于 z_0 的方式有无穷多种，可以从不同的方向，既可以沿直线，也可以沿曲线. 这一点跟二元函数的极限有相似之处.

由于这种苛刻的要求给复变函数论带来了许多实函数所不具备的特性。

这个特点所带来的好处:

1. 如果极限确实存在，则可以选择一个方向来确定极限的值。
2. 如果方向不同，变化趋势也不一样，则极限一定不存在。

例如：当 $z \to 0$ 时 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$的极限.

令$y=kx$，于是 $$f(z)=\frac{x-kxi}{x+kxi}=\frac{1-ki}{1+ki},$$

故此极限也不存在.

定理2 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ A=u_0+iv_0,$

$z_0=x_0+iy_0$, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$$

复变函数极限的存在等价于其实部和虚部两个二元实函数极限的存在性。

极限的运算法则：（与实变函数运算性质类似）

若 $\lim_{z\to z_0} f(z)=A,\ \lim_{z\to z_0} g(z)=B$ （A、B 为有限复数）

则：(1) $\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$

(2) $\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=A\cdot B$

(3) $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}\quad (B\neq 0)$

例2 证明函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证 令 $z=x+iy$, 则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v(x,y)=0,$$

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} u(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+(kx)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2(1+k^2)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

随 k 值的变化而变化,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=0,$

根据定理一可知, $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

证 (二) 令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$

则 $f(z)=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta,$

当 z 沿不同的射线 $\arg z = \theta$ 趋于零时，

$f(z)$趋于不同的值.

例如 z 沿正实轴 $\arg z = 0$ 趋于零时，$f(z) \to 1$,

$$沿\ \arg z = \frac{\pi}{2}\ 趋于零时，\ f(z) \to 0,$$

故 $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ 不存在.

三. 连续性

定义　若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 连续; 若 $f(z)$ 在区域 D 内每一点均连续，则称 $f(z)$ 在 D 内连续。

$f(z)$ 在z_0连续 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$当$|z-z_0|<\delta$时 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

连续的三要素:

（1） $f(z)$在z_0处有定义

（2） $f(z)$在z_0处有极限

（3） $f(z)$在z_0处的极限值等于函数值

相关性质

定理 3 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

由此，复函数的连续性问题也转化为相应的实问题.

例如：$f(z)=\ln(1+x^2+y^2)+i\sin(x+y).$

因实部、虚部皆为初等函数，在定义域内连续，故此复函数在相应的区域内处处连续。

根据定理2和定理3还可推得:

定理4. 1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续函数.

2) 连续函数的复合函数还是连续函数.

注

1. 函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 点处连续的意义是指

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),\ z \in C.$$

2. 在闭曲线或包括曲线端点在内的曲线段上连续的函数在曲线上是有界的.

3. 因一般复数不能比较大小，故实连续函数的最大、最小值定理，介值定理不再成立.

由上述定理可推出 ：

(1) $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 在整个 z 平面连续；

(2) 有理分式函数 $w = \dfrac{p(z)}{Q(z)}$ ($p(z)$、$Q(z)$ 为多项式函数) 在 z 平面上使 $Q(z) \neq 0$ 的点处连续。

四. 复变函数的导数

设函数 $w=f(z)$ 定义于区域 D, z_0 是区域 D 内的一点, 点 $z_0+\Delta z \in D$, 若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点可导。此极限值

称为 $f(z)$ 在 z_0 点的导数, 记作:

$$f'(z_0) \quad 或 \quad \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$$

即 $$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

注:定义中, $\Delta z\to 0\ (z_0+\Delta z\to z_0)$ 的方式是任意的,定义中极限值的存在与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关。

如果 $w=f(z)$ 在 D 内处处可导,则称 $f(z)$ 在 D 内可导, $f'(z)$ 称为 $f(z)$ 的导数,简称导数。

例2. 讨论 $f(z)=|z|^2$ 的可导性。

解：当 $z=0$ 时, $f(z)=0$, 则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z\cdot\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}$$

设 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, 则 $\overline{\Delta z}=\Delta x-i\Delta y$

由于 $\Delta z\to 0$ 时, $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, 从而 $\overline{\Delta z}\to 0$

所以, $f'(0)=0$, 即 $f(z)$ 在 $z=0$ 处可导。

当 $z \neq 0$ 时，有

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z \cdot \bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \Delta z \bar{z} + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \right)$$

当 Δz 沿平行于 x 轴方向 $\to 0$ (即 $z+\Delta z \to z$)时,

$\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x \to 0$, 从而

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = 1$$

所以 $$\lim_{\Delta z \to 0}\left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \bar{z} + z$$

当 Δz 沿平行于 y 轴方向 $\to 0$,即 $\Delta x = 0, \Delta z = i\Delta y$,

此时 $$\lim_{\Delta z \to 0}\left(\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \cdot \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) = \bar{z} - z$$

所以, $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处不可导。

微分

设函数 $w=f(z)$ 定义在区域 D 上，$z_0\in D$，若 $f(z)$ 在 z_0 可导，$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$

$$=A\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z \qquad (\lim_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0)$$

A 为复常数。 则称 $A\Delta z$ 为函数 $f(z)$ 在 z_0 处的微分。

记 $dw=A\cdot\Delta z$

可以推得： $A=f'(z_0),\ \Delta z=dz$

于是 $$dw=f'(z_0)dz$$

可微 $\Leftrightarrow$ 可导

若 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微，称 $f(z)$ 在 D 内可微。

求导法则（与实变函数求导法则相同）

（1）$c' = 0 \quad (c$为复常数$)$

（2）$(z^n)' = nz^{n-1} \quad (n$为正整数$)$

（3）$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$

（4）$[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

（5）$\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0)$

（6）$\{f[g(z)]\}' = f'(w)g'(z) \quad (w = g(z))$

（7）$f'(z) = \dfrac{1}{\varphi'(w)}$，其中，$w = f(z)$ 与 $z = \varphi(w)$ 是两个互为反函数的单值函数 且 $\varphi'(w) \neq 0$。

■本章基本要求

- 掌握复数的各种表示方法及其运算
- 理解复变函数的概念
- 了解复变函数的极限与连续可导与可微的概念
- 理解区域、单连域、多连域、简单曲线等概念
- 理解无穷远点的概念