

国内图书分类号：TB114.3

密级：公开

国际图书分类号：519.2

西南交通大学 研究生学位论文

基于性能退化与冲击的竞争失效 可靠性评估模型

年 级 2017 级

姓 名 曹宇宇

申请学位级别 理学硕士

专 业 统计学

指 导 老 师 何平 教授

二〇二〇 年 五 月

Classified Index: TB114.3

U.D.C: 519.2

Southwest Jiaotong University

Master Degree Thesis

**Evaluation of Reliability Models for Competing
Failure Based on Performance Degradation
and Shock**

Grade: Master 2017

Candidate: Cao Yuyu

Academic Degree Applied for : Master Degree

Speciality: Statistics

Supervisor: Prof.He Ping

May, 2020

西南交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权西南交通大学可以将本论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复印手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1. 保密□，在 年解密后适用本授权书；
2. 不保密☒，使用本授权书。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：曹宇宇

日期：2020.06.03

指导老师签名：何平

日期：2020.06.03

西南交通大学硕士学位论文主要工作（贡献）声明

本人在学位论文中所做的主要工作或贡献如下：

（1）对可靠性的研究现状进行了综述，阐明了可靠性相关理论以及对性能退化与冲击的内容进行了总结，并给出了新理论下的竞争失效可靠性模型。

（2）在恒定应力加速退化试验（恒加退化试验）中，针对产品的退化过程，采用退化量分布函数进行刻画，弥补了伪失效寿命建模方式的缺陷。

（3）鉴于突发失效与性能退化和应力水平存在联系，故引入了基于比例危险的突发失效模型，并用线性回归和极大似然估计（MLE）其中的参数。

（4）针对性能退化与冲击同时存在的产品，由于两种失效模式存在关联性，所以从突发失效阈值和性能退化量呈线性函数关系的角度，建立了变失效阈值动态评估模型，在线性退化的基础上，衍生获得了极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击下的可靠性评估模型。

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是在导师指导下独立进行研究工作所得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中作了明确说明。本人完全了解违反上述声明所引起的一切法律责任将由本人承担。

学位论文作者签名：曹宇宇

日期：2020.06.03

摘 要

当产品处于运行状态时，会受到各种外界因素的影响，例如冲击载荷、侵蚀等等。通常体现在以下两个方面：其一，产品的性能会随时间的推移而下降，最终导致退化失效；其二，产品也可能会受外部冲击的作用，致使其停止工作，从而发生突发失效。

本文从两方面进行展开，一方面，在恒加退化试验中，针对产品的退化过程，采用退化量分布函数进行刻画，弥补了伪失效寿命建模方式的缺陷；同时考虑到突发失效与性能退化和应力水平的联系，引入了基于比例危险的突发失效模型，并用线性回归和极大似然估计（MLE）模型中的参数，由此实现了对竞争失效下恒加退化问题的建模分析。

另一方面针对性能退化与冲击同时存在的产品，由于两种失效模式存在关系，故从突发失效阈值和性能退化量之间呈线性函数关系的角度，建立了变失效阈值动态评估模型，从而拓展了两者的相关性研究。文中详细阐释了性能退化对突发失效阈值的影响，衍生得到极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击下的可靠性模型。

关键词：竞争失效；突发失效；性能退化；失效阈值；冲击

Abstract

When the product is in operation, it will be affected by various external factors, such as impact loads, erosion, and so on. It is usually reflected in the following two aspects: First, the performance of the product will naturally degrade over time, eventually leading to degradation and failure. Second, the product may also be affected by the impact of the external load, causing its function to be suddenly lost, resulting in hard failure.

This article develops from two aspects. On the one hand, in the constant stress accelerated degradation test, the degradation process is used to describe the degradation process of the product, which makes up for the shortcomings of the pseudo failure life modeling method. At the same time, considering the correlation between hard failure and performance degradation and stress level, a proportional hazard-based hard failure model is proposed. The parameters in linear regression and maximum likelihood estimation (MLE) models are used to realize the modeling and analysis of the constant additive degradation problem under competing failure.

On the other hand, for products with performance degradation and impact at the same time. Due to the correlation between the two failure modes, a dynamic reliability evaluation model of shifting failure threshold was established from the perspective of a linear function relationship between the hard failure threshold and the performance degradation amount, thereby expanding the relationship between the two failure modes. Based on the linear degradation, the impact of performance degradation on the hard failure threshold is analyzed. Further derivation is obtained under extreme shock, δ shock, and m shock.

Key words: competing failure; hard failure; performance degradation; failure threshold; shock

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 国内外研究现状分析	2
1.2.1 国外研究现状	2
1.2.2 国内研究现状	2
第二章 预备知识	4
2.1 可靠性基本概念	4
2.1.1 可靠性参数体系	4
2.2 性能退化的基本概念	5
2.3 冲击的基本概念	6
2.4 竞争失效模型评估步骤	7
2.5 本章小结	7
第三章 竞争失效场合恒定应力的可靠性评估模型	8
3.1 模型假设与符号	8
3.2 突发与退化竞争模型	8
3.3 加速退化方程	9
3.4 基于比例危险的突发失效模型	9
3.5 竞争失效场合恒定应力加速退化统计分析	10
3.5.1 竞争失效模型的数据结构	10
3.5.2 突发与退化模型的参数估计	10
3.6 实证分析	13
3.7 本章小结	16
第四章 变失效阈值竞争失效可靠性评估模型	18
4.1 模型假设与符号	18
4.2 退化失效可靠性基础模型	20
4.3 极值冲击下的竞争失效可靠性模型	21
4.4 δ 冲击下的竞争失效可靠度模型	24
4.5 m 冲击下的竞争失效可靠度模型	27

4.6 实证分析	30
4.6.1 可靠度结果分析	30
4.6.2 冲击模型下产品的可靠性分析	31
4.7 本章小结	34
全文总结与展望	35
致谢	36
参考文献	37
攻读硕士学位期间录用或发表的论文	41

第一章 绪论

1.1 研究背景及意义

自上个世纪 40 年代以来,可靠性逐渐渗透到科技、工程等各个领域,高可靠性长寿命产品开始出现。它们的寿命普遍都比较长,因此用传统的可靠性试验会花费大量的时间和成本,且有些传统的可靠性试验方法在工程中较难实现。所以为了使产品的试验周期更短,成本更低,亟待提出新的方案来应对这一问题,由此便产生了加速寿命试验。在此之后又提出了更为方便的加速退化试验,这两种方法目前已被广泛应用于可靠性各个领域,且效果显著^[1]。

加速退化试验是在高应力下使产品性能下降速度变快,由此获得退化数据,进而预测常应力下的寿命^[2]。在可靠性研究早期,通常假设产品只在一种情况下失效,但实际情况更为复杂,产品受多种情况影响,只要其中一环发生失效,产品则立即失效。目前产品失效分为两种,即退化失效与突发失效,两者有其一失效,产品都会立即停止工作。因此对于竞争失效来讲,只考虑一种失效情况并不能有效地解决问题。当下基于伪失效寿命研究中使用的模型大都假设服从简单的线性或者 Wiener 过程,并不能很好的描述其退化轨迹,而且基于退化量分布更加关注的是失效过程本身,比起伪寿命结果可信度更高。

其次,当产品处于运行状态时,还会受到各种外界因素的影响,例如冲击载荷、侵蚀等等,不同的影响因素则会导致不同的失效。首先,产品会随时间的推移发生自然退化。另外,产品也可能会受外载冲击的影响,从而导致其停止工作,这也被称作突发失效。例如 LED 灯,既存在正常的老化失效,也会因为电压超标而发生突发失效。针对产品的性能退化,目前的研究已经较为全面。对于突发失效,有研究将外界冲击主要分为以下五类^[3]:极值冲击, δ 冲击,运行冲击,累积冲击和 m 冲击。在实际运行中,性能退化和冲击相互作用,导致其最终停止工作。目前的研究更多考虑的是冲击过程会对退化过程产生作用,而关于冲击过程和退化过程相互促进式作用的研究较少。

1.2 国内外研究现状分析

1.2.1 国外研究现状

关于竞争失效的探索,最早是由 Nelson^[7]建立的竞争失效模型,通过分析得出了对数正态分布下的图估计和 MLE。本文为了对突发失效模型进行更好的刻画,引入基于比例危险的突发失效模型。比例危险模型最早由 COX^[8]提出并应用于寿命数据分析,它主要通过使用统计学相关方法获得了产品的可靠度估计。EGHBALI^[9]改进了 COX 的方法,提出一种整合加速退化因子的退化模型。

针对产品的性能退化和冲击过程,最初的研究为便于模型建立和后续讨论,都选择假设两种失效独立,并未考虑到它们相互的影响。但近年来性能退化与冲击的相关性研究得到重视。Jiang^[10]等对微机电产品(MEMS)进行了分析,他假定阈值会随性能退化量的增加而减小,由此建立起竞争失效模型。SU^[11]等考虑多次冲击会导致突发失效阈值下降,并以一组裂纹增长数据为例,分析了变失效阈值对产品可靠性的影响。Rafiee^[12]等提出了具有可变退化率的退化和随机冲击过程之间的可靠性模型,并以微机电产品为例,计算了极值冲击、 δ 冲击、 m 冲击和运行冲击下产品的可靠度。Gao^[13]等在改变漂移参数的情况下,考虑了两相和多相($n \geq 3$)的情况,给出了具有两个连续不同失效阈值的 Wiener 过程的分析公式,同时得到了具有多个连续不同模式($n \geq 3$)下的 Wiener 过程的可靠度公式。

1.2.2 国内研究现状

针对竞争失效,赵建印^[14]等通过对电容器的研究,得到了产品的竞争失效模型。安宗文^[15]等通过 Wiener 过程对退化进行刻画,从而得出了产品的评估模型。当下基于伪失效寿命研究中使用的模型大都假设服从简单的线性或者 Wiener 过程,并不能很好的描述其退化轨迹。而且基于退化量分布模型更加关注的是失效过程本身,比起伪失效寿命结果可信度更高。苏春^[16]等则基于性能退化数据对竞争失效模型进行了研究和分析,但研究较为简单,不能够全面的反映竞争失效问题。蔡忠义^[17]等则基于监测时刻,建立了比例危险退化模型。王智明^[18]等采用混合 Weibull 分布和比例危险模型对刀具故障数据进行分析。

针对产品的性能退化和冲击过程的竞争失效问题,黄文平^[19]等认为每次冲击都会使产品退化量忽然增加,且当退化量达到设定值后,阈值会发生改变。Tang^[20]等基于

Copula 理论，研究了固定阈值下突发失效与退化失效的相关性问题，并给出了相应的评估模型。以上研究主要是基于恒定失效阈值和两段型失效阈值，对退化量与失效阈值的关系刻画不太详尽，且没有考虑两者之间的函数关系。本文在假定两者存在线性关系的基础上，对此做出了推导，并得到了较好的效果。

第二章 预备知识

2.1 可靠性基本概念

可靠性作为一种产品评价指标的度量工具，指的是产品在规定的条件下，规定的时间内，完成规定功能的能力。规定的条件、规定的时间、规定的功能共同构成了可靠性的三要义。其中规定的条件包括了产品使用时的环境条件和工作条件，比如说月球车和家用车的使用环境就是不一样的。规定的时间指的是产品的任务时间，包括通常所讲的年、月、日等，还有特定的具有某种特殊含义的“时间”，包括产品的工作次数、循环次数、行车里程数等等。而规定的功能则是指产品所能通过的考核以及应达到的功能^[21]。

2.1.1 可靠性参数体系

(1) 可靠度

可靠度是指产品在规定的条件下，规定的时间内，完成规定功能的概率。通常它用 $R(t)$ 来表示，反映的是产品在规定时间内不发生失效的概率，即：

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{+\infty} f(t)dt, t \geq 0 \quad (2-1)$$

式中： T 表示产品的寿命。

相对地，产品未完成规定的功能的概率称之为累计故障概率，用 $F(t)$ 表示，即：

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(t)dt = 1 - R(t), t \geq 0 \quad (2-2)$$

易知 $R(0) = 1$ ，则由分布函数的性质可得， $R(t)$ 随时间的推移而趋于下降，最终变为 0。

(2) 失效率

失效率是指产品工作到某时刻尚未失效，在该时刻之后单位时间内发生失效的概率，记为 $\lambda(t)$ ，则 $\lambda(t)$ 表示为：

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \quad (2-3)$$

综合可靠度 $R(t)$ 与累计故障概率 $F(t)$ ，则 $\lambda(t)$ 为：

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t) \cdot \Delta t} = \frac{1}{1 - F(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2-4)$$

本质上失效率描述的是在时刻 t 将要停止工作的可能性大小，且失效率随时间改变，

一般认为它呈现一种浴盆型形状。在产品使用初期,由于产品存在不可避免的缺陷,失效率会比较高。在进入使用阶段后,越来越稳定。而在产品寿命达到规定时间后,失效率就会再次提高。

当产品的失效率服从指数分布时,产品的可靠度可表示为:

$$R(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0 \quad (2-5)$$

(3) 平均寿命

平均寿命是指产品从开始运作到失效的平均时间。假设 $f(t)$ 为 T 的密度函数,则其可表示为:

$$E(T) = \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t dF(t) \quad (2-6)$$

(4) 相互关系

产品的 $R(t)$ 、 $F(t)$ 、 $f(t)$ 和 $\lambda(t)$ 相互确定且唯一,以下是详细推导过程:

- a) 已知 $R(t)$, 则 $F(t) = 1 - R(t)$, $f(t) = -R'(t)$, $\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$ 。
- b) 已知 $F(t)$, 则 $f(t) = F'(t)$, $R(t) = 1 - F(t)$, $\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1 - F(t)}$ 。
- c) 已知 $f(t)$, 则 $F(t) = \int_0^t f(t)dt$, $R(t) = \int_t^{+\infty} f(t)dt$, $\lambda(t) = \frac{f(t)}{\int_t^{+\infty} f(t)dt}$ 。
- d) 已知 $\lambda(t)$, 则 $F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$, $f(t) = \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$, $R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$ 。

2.2 性能退化的基本概念

在可靠性研究中,目前主流研究主要分为两种,对于传统的寿命数据研究而言,产品的监测结果只有两种:正常工作和失效。而对于退化数据研究,则可以检测到退化量随时间变化的趋势,建立可靠性模型时,主要用到以下概念:

(1) 退化

描述产品性能变化的过程,主要包括物理过程和化学过程,在这两种过程的影响下,产品的性能随时间逐渐丧失。

(2) 退化数据

描述产品性能退化程度随时间变化的数据表示。在退化试验中,假设在观测时间 t_1, t_2, \dots, t_i 内测量产品性能指标退化量,可以得到对应的退化数据,具体表示为:

y_1, y_2, \dots, y_i 。如果退化试验是在一种或多种高于正常工作应力下进行的, 则该试验称为加速退化试验。

(3) 失效阈值

描述产品发生失效时对应的性能指标临界值, 产品失效由多种情况造成, 可能有腐蚀、磨损、断裂、疲劳等等。因此失效阈值可以是常值也可以是非常值, 本文所考虑的失效阈值两种情形均存在。

(4) 退化轨迹

描述产品退化量随时间变化的曲线。在实际试验中, 退化轨迹曲线有三种: 线型、凸型和凹型。其中最常用也是最简便的退化轨迹就是线性退化轨迹曲线。而凸型和凹型轨迹曲线也可通过函数转换为线型轨迹曲线。通常而言, 常用以下函数来进行刻画:

$$y_i = \alpha_i + \beta_i t \quad (2-7)$$

$$\log(y_i) = \alpha_i + \beta_i t \quad (2-8)$$

$$\log(y_i) = \alpha_i + \beta_i \log(t) \quad (2-9)$$

(5) 退化量分布

在只考虑退化失效情形下, 鉴于性能退化数据的散点图特征, 利用拟合优度检验选取最合适的性能退化分布函数。由于相同批次、相同型号的产品退化量随时间变化的轨迹大致相同, 因此可用同一分布来进行刻画。而每个产品又存在细微的差别, 故估计得到的参数大同小异。

2.3 冲击的基本概念

冲击是指产品受到的短时间内的载荷。通常情况下, 冲击分为五种情况, 分别是极值冲击, δ 冲击, 运行冲击, 累积冲击和 m 冲击。

(1) 极值冲击模型

极值冲击模型是指当产品经受的某次冲击的大小超过某失效阈值时, 产品失效。

(2) δ 冲击模型

δ 冲击模型是指当相邻两次冲击的时间间隔小于某失效阈值时, 产品失效。

(3) 运行冲击模型

运行冲击模型是指当产品中有连续的 k 个冲击量超过其失效阈值时, 产品失效。

(4) 累积冲击模型

累积冲击模型是指当外界冲击造成的累积冲击量超过失效阈值时, 产品失效。

(5) m 冲击模型

m 冲击模型是指当产品经受的冲击量共有 m 次超过冲击失效阈值时, 产品失效。

另外, 当产品受外载冲击的影响时, 可能会导致产品停止工作也称为突发失效, 例如 LED 灯可能会因为电压超标而发生突发失效。

2.4 竞争失效模型评估步骤

Step1:现场采集或者网上收集竞争失效相关数据, 并进行初步分析。

Step2:确定退化失效模型和冲击模型。

Step3:采用恰当的方法对模型中的参数进行估计。

Step4:结合退化和冲击模型, 对产品在竞争失效下的可靠度进行计算以及模型的评估, 并对结果做出合理性解释。

2.5 本章小结

本章主要阐述了四个方面的内容, 可靠性基本概念、性能退化基本概念、冲击基本概念、竞争失效模型评估步骤。其中, 可靠性基本概念主要介绍了相关参数, 包括 $R(t)$ 、 $\lambda(t)$ 、 $E(T)$, 及其之间的相互推演关系。性能退化基本概念主要从五个方面进行了介绍。冲击基本概念则论述了目前常见的五种冲击模型以及突发失效的概念。最后给出了竞争失效下产品可靠度的估计步骤。综合以上四方面的内容, 其对第三章、第四章论文的开展提供了坚实的理论基础。

第三章 竞争失效场合恒定应力的可靠性评估模型

3.1 模型假设与符号

竞争失效场合恒加退化试验统计分析基于以下假定：

假设 1、产品只存在单一突发和退化失效，其相应的突发失效时间为 T_r ，退化失效时间为 T_d ，两者相互竞争；

假设 2、不同时刻、不同应力下，产品性能退化量 $X(t)$ 服从相同的分布族，参数为时间 t 和应力水平 S 的函数；

假设 3、失效阈值 D 是恒定的；

假设 4、性能退化程度也许会影响突发失效，也许不会。

3.2 突发与退化竞争模型

设在应力水平 S 下，时刻 t 产品的退化量为 $X(t)$ 。当 $X(t)$ 首次达到失效阈值 D 时产品发生退化失效。另外，假设产品发生突发失效后立即停止工作。记退化失效时间为 T_d ，突发失效时间为 T_r ，则产品失效时间 T 为：

$$T = \min \{T_d, T_r\} \quad (3-1)$$

则时间 t 内产品的可靠度为：

$$R(t) = P\{T > t\} = P\{T_d > t, T_r > t\} \quad (3-2)$$

在退化失效模式下，产品的可靠度为：

$$R_d(t, S) = P(T_d > t) = P(X(t) < D) = \int_0^D g_d(t, x, S) dx \quad (3-3)$$

式中： $R_d(t, S)$ 是仅考虑应力 S 下产品退化失效时的可靠度； $g_d(t, x, S)$ 为应力 S 下退化量在 t 时刻的分布密度函数； x 表示退化量。

若突发与退化相关，则产品突发失效的失效率 $\lambda_r(t, x, S)$ 是时间 t 、退化量 x 和应力水平 S 的函数， T_r 为突发失效的时间，此时产品的可靠度函数为：

$$R_r(t, x, S) = P\{T_r > t\} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_r(\tau, x, S) d\tau \right\} \quad (3-4)$$

式中： $R_r(t, x, S)$ 表示应力 S 下突发失效的可靠度函数。

此时产品的可靠度为：

$$R(t) = P\{T > t\} = P\{T_d > t, T_r > t\} = \int_0^D \exp\left\{-\int_0^t \lambda_r(\tau, x, S) d\tau\right\} g_d(t, x, S) dx \quad (3-5)$$

若突发与退化相互独立，此时 $\lambda_r(t, x, S)$ 表示为：

$$\lambda_r(t, x, S) = \lambda_{r0}(t, S) \quad (3-6)$$

此时产品的可靠度为：

$$R(t) = P\{T > t\} = P\{T_d > t, T_r > t\} = \exp\left\{-\int_0^t \lambda_r(\tau, S) d\tau\right\} R_d(t, S) \quad (3-7)$$

以下讨论仅考虑突发失效与性能退化之间相互关联，当突发与退化不相关时，这时可采用传统的构造分布函数来刻画突发失效的失效模型，再利用极大似然估计即可得到突发失效模型中的分布参数。

根据竞争失效模型，在获得应力水平 S_i 下竞争失效的可靠度函数后，可令应力水平为 S_0 ，即可得到在常应力 S_0 下产品的各项可靠度估计指标。

3.3 加速退化方程

加速退化方程^[22]定义如下：记 $\zeta(t)$ 为退化量 $x(t)$ 的某特征值或退化量随机过程中的某参数。下列方程 $\zeta(t) = A(t)e^{b(t)\phi(S)}$ 或 $\ln \zeta(t) = a(t) + b(t)\phi(S)$ 被称为加速退化方程。其中 S 为应力水平， $\phi(S)$ 是应力的函数， $a(t) = \ln(A(t))$ 和 $b(t)$ 是与退化量和应力无关的时变参数。

在实际中时，当温度作为加速应力时， $\phi(S) = 1/S$ 。当电应力作为加速应力时， $\phi(S) = \ln S$ 。

3.4 基于比例危险的突发失效模型

在前人研究的基础上，本文引入了基于比例危险的突发失效模型。在恒加退化试验中，比例危险(proportional hazards, PH)族^[17]是具有如下性质的模型：同一时间不同退化程度的两个个体的失效率函数和时间无关，仅与退化程度和应力有关。设应力 S_i 下时刻 t 两个产品的退化量分别为 x_1 和 x_2 ，则这两个产品在时刻 t 的失效率之比

$\lambda(t, x_1, S) / \lambda(t, x_2, S)$ 与时间 t 无关。对于突发失效时间 T 来说, 若是其失效率函数具备上述性质, 则其条件失效率函数可写成:

$$\lambda(t, x, S) = \lambda_0(t)h(x, S) \quad (3-8)$$

式中: $\lambda_0(t)$ 是不考虑性能退化和应力水平影响情况下突发失效的失效率, 也叫做基准失效率函数。

在该试验下, 可令 $h(x, S) = \exp(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 S)$, 式中: α_1 、 α_2 、 α_3 为未知回归系数。

对于上述基于比例危险的突发失效模型, 可以看到, 获得基准失效率函数即 $\lambda_0(t)$ 是该模型的关键所在, 有了 $\lambda_0(t)$ 的估计之后, 就可以进一步得到失效率函数。

3.5 竞争失效场合恒定应力加速退化统计分析

3.5.1 竞争失效模型的数据结构

假设有 $\sum_{i=1}^k (M_i + N_i)$ 个样本进行性能退化试验, 其中 i 为所用的应力水平数, 在应力 S_i 下有 M_i 个样品仅发生性能退化, 有 N_i 个样品发生突发失效。在时间 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, p$) 得到产品的退化量, 第 q ($q=1, 2, \dots, M_i$) 个样品在应力 S_i 下 j 时刻的退化量为 x_{ijq} 。第 l ($l=1, 2, \dots, N_i$) 个突发失效样品失效时对应的性能退化量为 x_l , 该性能退化量对应的突发失效时间为 t_l 。

3.5.2 突发与退化模型的参数估计

1) 退化失效模型中的参数估计

在只考虑退化失效的情况下, 由所给数据的散点图特征, 利用拟合优度检验选取最恰当的分佈函数。

当退化量分佈为位置-刻度族模型时, 一般地, 位置参数可表示为退化时间 (或其变换形式)、加速应力 (或其变换形式) 的线性函数:

$$\mu(t, S; \beta) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \phi(S) \quad (3-9)$$

当退化量分佈不为位置-刻度族模型时, 则要通过加速退化方程确定退化过程某参数的函数形式。假设 $\omega(t)$ 为该分佈的时变参数, 由加速退化方程可得 $\ln \omega(t) = a(t) + b(t)\phi(S)$, 这里令 $a(t) = \beta_1 + \beta_2 t$, $b(t) = \beta_3$, 则可将加速退化方程改写为:

$$\ln \omega(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \phi(S) \quad (3-10)$$

则样本的联合对数似然函数为:

$$L(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \theta) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p \sum_{q=1}^{M_i} \ln [g(x_{ijq})] \quad (3-11)$$

对上述联合对数似然函数采用极大似然估计可得到各个参数的估计值。

在获得每个参数的估计后, 则可得到产品的可靠度 $R_d(t, x, S)$ 。

2) 比例危险模型 $\lambda_0(t)$ 的参数估计

当突发失效与性能退化相关时, 这里引入基于比例危险的突发失效模型来评估突发失效的失效率函数。总的来说就是, 在不同应力下, 对突发失效时间进行分布拟合, 选择最优的分布类型作为基准分布类型, 进一步确定基准失效率, 从而表示出突发失效的失效率函数。

首先, 收集产品在应力 S_i 下产生突发失效时对应的退化量, 记第 l ($l=1, 2, \dots, N_i$) 个突发失效样品失效时对应的性能退化量为 x_l , 该性能退化量对应的突发失效时间为 t_l 。

选择恰当的分布函数来拟合产品的突发失效时间, 对于各个应力上突发失效时间分布类型的确定, 首先确定其备选分布类型, 然后采取分布假设检验, 从备选分布中得到各应力下突发失效时间的最优分布类型。

这里采用 AD 检验法来进行对比。 A_n^2 越小, 拟合效果越好。AD 统计量 A_n^2 的计算公式为:

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[F(x) - F_n(x)]^2}{F(x)[1 - F(x)]} dF(x) \quad (3-12)$$

式中: $F_n(x)$ 为经验分布函数; $F(x)$ 为假设的累积分布函数。

当样本量 n 给定时, AD 统计量 A_n^2 可改写为:

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_i) + \ln [1 - F(x_{n+1-i})] \} \quad (3-13)$$

在确定各个应力下的最佳分布后, 选取各个应力下的最佳分布为基准分布, 对应的失效率即为基准失效率。

3) 比例危险模型 $h(x, S)$ 的参数估计

在选取基准失效率后，突发失效可表示为：

$$\lambda(t, x, S) = \lambda_0(t) \{ \exp(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S)) \} \quad (3-14)$$

式中： $\lambda_0(t)$ 为基准失效率； α_1 、 α_2 、 α_3 为待估参数； x 为突发失效发生时刻 t 对应的退化量。

进一步，可得到下列表达式：

$$R(t, x, S) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(\tau, x, S) d\tau \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_0(\tau) \exp \{ \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S) \} d\tau \right\} \quad (3-15)$$

当 t 已知时，其对应的退化量 x 随即便知。观察上式可知 $\exp \{ \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S) \}$ 与积分变量 τ 无关，因此可使上式写为：

$$R(t, x, S) = \exp \left\{ - \left(\int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau \right) \left(\exp \{ \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S) \} \right) \right\} \quad (3-16)$$

将 (3-16) 式两边进行变换，可得到如下线性关系：

$$\ln \left[\frac{-\ln R(t, x, S)}{\int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau} \right] = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S) \quad (3-17)$$

令 $y_t = \ln \left[\frac{-\ln R(t, x, S)}{\int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau} \right]$ ，则 (3-17) 式变形为：

$$y_t = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S) \quad (3-18)$$

所以，对式 (3-18) 进行线性回归即可得到 α_1 、 α_2 、 α_3 的估计值。

而对式 (3-18) 进行线性回归的前提是 y_t 为已知量，但式中 $R(t, x, S)$ 却是未知的，因此需要建立突发失效时间与可靠度的关系。下面将结合概率论中概率的知识来建立产品突发失效时间与可靠度之间的联系，进而得到 y_t 与 t 的关系。

4) 突发失效可靠度函数预计

为了简化公式，以下均在应力水平 S_i 下计算突发失效故障率并进行参数估计。

首先，从退化数据中判断发生突发失效的产品，记录其发生突发失效时对应的突发失效时间，记第 l ($l=1, 2, \dots, N_l$) 个突发失效样品失效时对应的突发失效时间为 t_l 。之

后进行升序排列, 得到 $\{t_n\}$, 其中 $n=1,2,\dots,N_i$ 。

建立突发失效故障率的函数关系, 即当突发失效时间为 t_n 时, 突发失效故障率为:

$$F(t_n) = \frac{n}{M_i + N_i} \quad (3-19)$$

综上, 结合 2)、3) 和 4) 可得到基于比例危险的突发失效模型的失效率函数, 进而结合 1) 可得到竞争失效下恒加退化产品的可靠度函数。

3.6 实证分析

GaAs 是一种优良的半导体材料, 可以用来制作微型激光器。现在有一批 GaAs 激光器, 测得其在 80°C 下运作电流超过其额定电流的百分比数据^[23]。本试验共有 22 个激光器参加试验, 时间跨度从 500h 到 4000h, 且每 500h 做一次记录。在试验中, GaAs 激光器除了会受外界影响失效外, 当其到达 4000h 时, 运作电流超过其额定电流的 10% 也会失效。根据本文理论对其进行评估, 并与文献[16]所给出的结果进行对比, 验证本文所建模型的合理性。

(1) 退化失效模型中的参数估计

由文献[23]可知, 1、2、4、6、7、8、10、11、13、14、16、18、19、20、22 号样本为性能退化数据, 绘图如下:

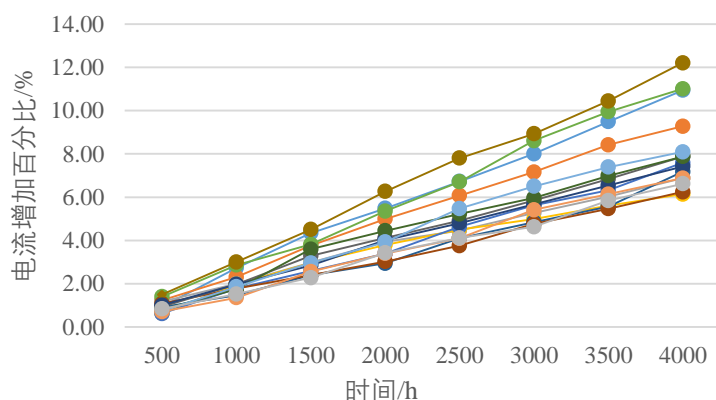


图 1-1 激光器性能退化数据

分析可知各测量时刻的退化量服从 Weibull 分布。故采用 Weibull 分布进行退化失效建模, 由 3.3 加速退化方程可得到恒定应力下的 Weibull 分布函数为:

$$F(t, x, S) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta(t, S)}\right)^m\right] \quad (3-20)$$

式中：形状参数 m 为常数，尺度参数 $\ln[\eta(t, S)] = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \phi(S)$ ， β_1 、 β_2 、 β_3 为未知参数。

鉴于该激光器试验仅在额定应力 80°C 下进行，所以可将上述尺度参数进行变换以满足试验。由于温度应力 S 为常数，可将 β_1 与 $\beta_3 \phi(S)$ 合并，令 $\beta_0 = \beta_1 + (1/80)\beta_3$ ，尺度参数则变形为 $\ln[\eta(t)] = \beta_0 + \beta_2 t$ 。因此，激光器退化量的分布函数为：

$$F(t, x, 80) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{e^{\beta_0 + \beta_2 t}}\right)^m\right] \quad (3-21)$$

则所有样本的对数似然函数可表示为：

$$\sum_{j=1}^8 \sum_{q=1}^{15} [\ln(m) - m(\beta_0 + \beta_2 t_j) + (m-1) \ln x_{jq} - \left(\frac{x_{jq}}{e^{\beta_0 + \beta_2 t_j}}\right)^m] \quad (3-22)$$

对上述对数似然函数采用极大似然估计得到各个参数的估计值如下 $\hat{m} = 4.46709$ ， $\hat{\beta}_0 = 0.06367$ ， $\hat{\beta}_2 = 0.00001019$ ：因此激光器退化失效可靠度为：

$$R(t, x_i, 80) = \exp\left[-\left(\frac{x}{e^{0.06367 + 0.00001019t}}\right)^{4.46709}\right] \quad (3-23)$$

(2) 比例危险模型 $\lambda_0(t)$ 的参数估计

由表中数据可知，3、5、9、12、15、17、21 号样本为突发失效数据。突发失效时间及其对应的退化量见表 3-1

表 3-1 突发失效时间及其退化量

样本编号	3	5	9	12	15	17	21
突发失效时间/h	3000	1000	3500	3500	3500	2000	2500
退化量/%	7.05	1.81	8.35	9.21	8.02	3.97	6.33

确定突发失效时间分布模型，鉴于该激光器试验仅在额定应力 80°C 下进行，所以在应力 80°C 下采用 AD 检验法确定的最优分布即为基准分布。计算 80°C 的检验统计量 AD 值（见表 3-2）。

表 3-2 80°C 下检验统计量 AD 值

应力水平/°C	正态分布	对数正态分布	weibull 分布	Gamma 分布
80	0.5089392	0.6913661	0.5836774	0.6184479

由表 3-2 可知 80°C 下最优分布类型为正态分布，由此得到该分布的参数估计值为 $\hat{\mu}=2714.2857$ ， $\hat{\sigma}=880.6306$ ，基准失效率 $\lambda_0(t)$ 表示为：

$$\lambda_0(t) = \frac{1}{\hat{\sigma}} \phi\left(\frac{t-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) / \left[1 - \Phi\left(\frac{t-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right] \quad (3-24)$$

式中： $\phi(\cdot)$ 与 $\Phi(\cdot)$ 分别指标准正态分布的密度函数和分布函数。

(3) 突发失效可靠度函数预计与比例危险模型 $h(x, S)$ 的参数估计

将表 3-1 中的突发失效数据按突发失效时间排序，并按照 3.5.2 求出突发失效时间对应的突发失效故障率、可靠度，列表如下：

表 3-3 80°C 下突发失效相关数据

样本编号 l	5	17	21	3	15	9	12
失效时间 t_l	1000	2000	2500	3000	3500	3500	3500
退化量 x_l	1.81	3.97	6.33	7.05	8.02	8.35	9.21
故障率 $F(t_l)$	1/22	2/22	3/22	4/22	5/22	6/22	7/22
可靠度 $R(t_l)$	21/22	20/22	19/22	18/22	17/22	16/22	15/22

鉴于该激光器试验仅在额定应力 80°C 下进行，所以可将式 (3-18) $y_t = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \phi(S)$ 进行变换以满足试验，但并不影响该方法在恒加退化试验中应用。由于温度应力 S 为常数，可将 α_1 与 $\alpha_3 \phi(S)$ 合并，令 $\alpha_0 = \alpha_1 + (1/80)\alpha_3$ ，则式 (3-18) 变形为：

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x \quad (3-25)$$

$$\text{式中： } y_t = \ln \left[\frac{-\ln R(t, x, S)}{\int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau} \right]$$

最后，选取表 3-3 的数据并依据式 (3-25)，进行回归分析，得到参数的估计值为 $\hat{\alpha}_0 = -1.09350$ ， $\hat{\alpha}_2 = -0.11507$ 。

由此得到基于比例危险的突发失效模型的失效率函数为：

$$\lambda(t, x, S) = \left\{ \frac{1}{880.6306} \phi\left(\frac{t-2714.2857}{880.6306}\right) / \left[1 - \Phi\left(\frac{t-2714.2857}{880.6306}\right) \right] \right\} \exp(-1.09350 - 0.11507x) \quad (3-26)$$

依据本章提出的可靠性建模方法，得到竞争失效下的可靠度为：

$$R(t) = \int_0^D \exp \left\{ - \int_0^t \left\{ \frac{1}{\hat{\sigma}} \phi\left(\frac{\tau - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) / \left[1 - \Phi\left(\frac{\tau - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \right] \right\} \exp(\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_2 x) d\tau \right\} \times \left\{ \frac{\hat{m}}{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 t}} \left(\frac{x}{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 t}} \right)^{\hat{m}-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_2 t}} \right)^{\hat{m}} \right] \right\} dx \quad (3-27)$$

最后将参数 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\sigma}$ 、 $\hat{\alpha}_0$ 、 $\hat{\alpha}_2$ 、 \hat{m} 、 $\hat{\beta}_0$ 、 $\hat{\beta}_2$ 、 $D=10$ 代入，通过 (3-27) 计算，即可求得各时刻的可靠度。将本章得到的结果与文献[16]的结果一同绘制在图 3-2 中。

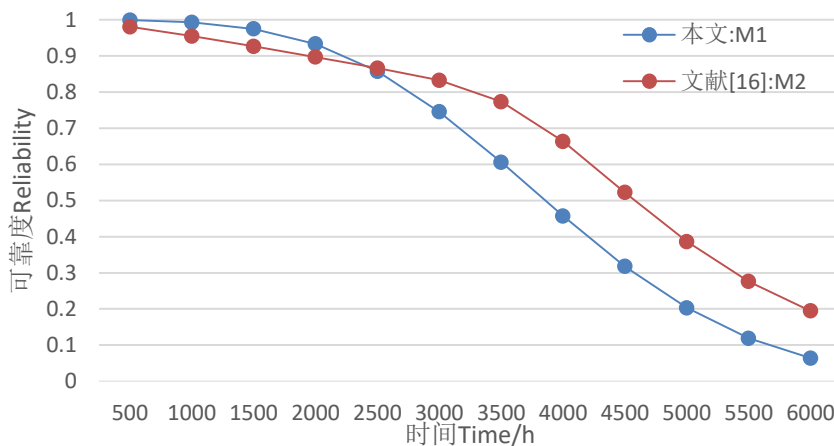


图 3-2 竞争失效可靠度曲线

由图 3-2 可见：在监测初期，激光器突发失数据较少，M1 所得曲线略高于 M2，但总的来说，两条可靠度曲线相差不大，与实际退化情况基本吻合。在监测后期，突发失效数据增多，并且退化失效数据也开始增多。通过相比 M2，M1 得到的可靠性评估精度略优且略保守，符合工程上的做法。除此之外，采用基于比例危险的突发失效模型，可以更方便的推广到竞争失效下恒定应力场合，适用性较文献[16]中的结果更好。

3.7 本章小结

本章基于突发与退化的竞争失效模型，对两种失效分别展开研究。针对伪失效寿命方式的缺陷，采用退化量分布函数进行刻画。而对产品在性能退化中伴有的突发失

效，采用基于比例危险的突发失效模型，通过 AD 检验法获得基准失效率函数 $\lambda_0(t)$ 。对模型中的 $h(x, S)$ ，则通过非参数和回归方法得到 $h(x, S)$ 中的参数估计。

第四章 变失效阈值竞争失效可靠性评估模型

4.1 模型假设与符号

为了对变失效阈值竞争失效产品的可靠性评估问题进行更好的研究, 本文进行了如下的假设:

假设 1: 产品服从线性退化随机过程;

假设 2: 产品经受的冲击是随机的, 服从到达强度为 λ 的齐次 *Poisson* 过程, 每次冲击的大小 w_i 独立同分布于正态分布 $N(\mu_w, \sigma_w^2)$, 每次冲击都会使产品退化量突发性增加;

假设 3: 令 Y_i ($i=1, 2, \dots$) 表示第 i 次冲击造成的退化增量, Y_i 独立同分布于正态分布 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$;

假设 4: 分别考虑三种外界冲击对产品的影响:

(1) 极值冲击模型、(2) δ 冲击模型、(3) m 冲击模型

假设 5: 各冲击情形下, 突发失效阈值 D_t , δ_t , M_t 分别是 t 时刻退化总量的线性函数。

对于极值冲击, 产品的退化总量 $X_s(t)$ 是由自然退化量和随机冲击综合产生, 当总退化量达到 H 时, 产品发生退化失效, 如图 4-1 所示; 假定 D_t 是时刻 t 退化总量 $X_s(t)$ 线性函数, 若存在某次冲击的冲击量 w_i 超过其对应的失效阈值 D_t , 则发生突发失效。例如在某次冲击中, w_4 超过 D_{t_4} , 产品失效, 如图 4-2 所示。

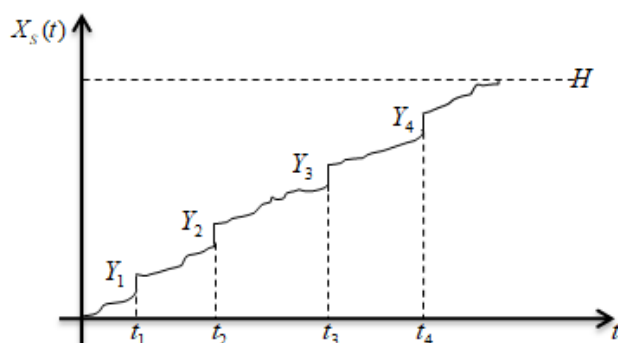


图 4-1 自然退化过程

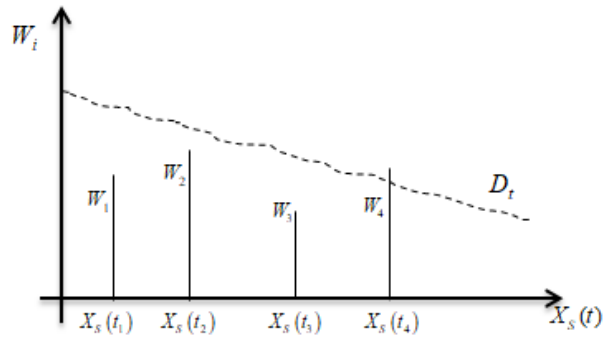
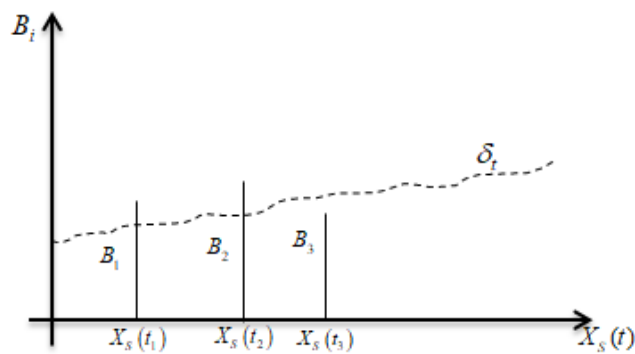
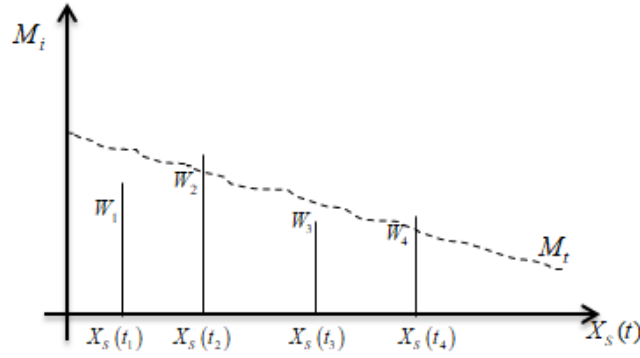


图 4-2 基于极值冲击模型的竞争失效

对于 δ 冲击, 假定 δ 冲击的突发失效阈值 δ_t 是退化总量 $X_s(t)$ 的线性函数, 若存在某两次冲击发生的时间间隔 B_i 低于其对应的失效阈值 δ_{t_i} , 则发生突发失效。例如在某组冲击中, 第三次和第四次冲击发生的时间间隔 B_3 低于 δ_{t_3} , 产品发生突发失效, 如图 4-3 所示。

图 4-3 基于 δ 冲击模型的竞争失效

对于 m 冲击, 假定突发失效阈值 m_t 是退化总量 $X_s(t)$ 的线性函数。若时间 t 内共有 m 次冲击的冲击量 w_i 超过其对应的失效阈值 m_{t_i} , 则发生突发失效。例如某次冲击中, w_2 和 w_4 冲击超过对应的失效阈值, 产品失效, 如图 4-4 所示。

图 4-4 基于 m 冲击的竞争失效

4.2 退化失效可靠性基础模型

当产品的总性能退化量 $X_s(t)$ 超过失效阈值 H 时, 产品发生退化失效。本文采取线性退化轨迹模型:

$$X(t) = \varphi + \beta t \quad (4-1)$$

其中 φ 表示初始退化量, $\beta \sim N(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$ 表示性能退化率。

当外界冲击没有造成产品失效时, 该冲击会导致性能退化量突然增加, 由假设 2, 3 可知, 在时间 t 内, 由于外界冲击导致的性能退化量 $S(t)$ 为:

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & N(t) > 0 \\ 0, & N(t) = 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

其中 $N(t) = n_t$ 为在时间 t 内外界冲击的次数, $n_t = 1, 2, \dots$ 。

则 t 时刻, 产品的总体性能退化量 $X_s(t)$ 为:

$$X_s(t) = X(t) + S(t) \quad (4-3)$$

在退化失效模式下, 产品的可靠度函数为:

$$\begin{aligned} R(t) &= P(X_s(t) < H) \\ &= \sum_{n_t=0}^{\infty} P(X(t) + S(t) < H \mid N(t) = n_t) P(N(t) = n_t) \\ &= \sum_{n_t=0}^{\infty} \Phi \left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \sigma_Y^2}} \right) \frac{\exp(-\lambda t) (\lambda t)^{n_t}}{n_t!} \end{aligned} \quad (4-4)$$

令 $F_{X_s}(n_t, H, t)$ 表示退化量小于 H 且冲击次数为 $N(t) = n_t$ 下的分布函数:

$$\begin{aligned} F_{X_s}(n_t, H, t) &= P(X(t) + S(t) < H \mid N(t) = n_t) \\ &= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \sigma_Y^2}}\right) \end{aligned} \quad (4-5)$$

它的密度函数为:

$$f_{X_s}(n_t, H, t) = \phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \sigma_Y^2}}\right) \frac{(\varphi + n_t \mu_Y - H) \sigma_\beta^2 t - \mu_\beta n_t \sigma_Y^2}{(\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \sigma_Y^2)^{3/2}} \quad (4-6)$$

4.3 极值冲击下的竞争失效可靠性模型

当外界冲击为极值冲击时, 假设突发失效的失效阈值是性能退化量的线性函数:

$$D_t = a_1 X_s(t) + b_1 \quad (4-7)$$

式中: b_1 为极值冲击的初始失效阈值; $X_s(t)$ 为 t 时刻产品的总体退化量; D_t 为 t 时刻极值冲击条件下的突发失效阈值。

则对于第 i ($i=1, 2, \dots$) 次冲击, 其失效阈值具体可表示为:

$$D_{t_i} = a_1 \left(X(t_i) + \sum_{j=0}^{i-1} Y_j \right) + b_1 \quad (4-8)$$

根据假设 2, 当随机冲击服从到达率为 λ 的齐次 *Poisson* 过程时, 第 i 次冲击到达的时刻 t_i ($i=1, 2, \dots$) 服从 *Gamma* 分布, 即 $t_i \sim Ga(i, \lambda)$, 则 D_{t_i} 的概率密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{D_{t_i}}(z_{t_i}) &= \frac{1}{|a_1|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\beta} \exp\left[-\frac{(z_{t_i} - b_1 - a_1 \varphi - a_1 u - a_1 \mu_\beta v)^2}{2a_1^2 v^2 \sigma_\beta^2}\right] \frac{\lambda^i}{\Gamma(i)} v^{i-2} \exp(-\lambda v) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi} (i-1) \sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{(u - (i-1) \mu_Y)^2}{2(i-1) \sigma_Y^2}\right] dv du \end{aligned} \quad (4-9)$$

以下是公式 (4-9) 的推导过程

$$D_{t_i} = a_1 (\varphi + \beta t_i + \sum_{j=0}^{i-1} Y_j) + b_1 \quad (4-10)$$

其中 $\beta \sim N(\mu_\beta, \sigma_\beta^2)$, $t_i \sim Ga(i, \lambda)$, $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, 因此密度函数 ρ_β , ρ_{t_i} , ρ_{Y_i} 已知。

令 $Z_i = \beta t_i + \varphi$, 则 Z_i 的密度函数可以求得

$$\begin{aligned}\rho_{Z_i}(z) &= \int_0^{\infty} \rho_{\beta}\left(\frac{z-\varphi}{v}\right) \rho_{t_i}(v) \frac{1}{|v|} dv \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\beta}} \exp\left[-\frac{(z-\varphi-v\mu_{\beta})^2}{2v^2\sigma_{\beta}^2}\right] \frac{\lambda^i}{\Gamma(i)} v^{i-2} \exp(-\lambda v) dv\end{aligned}\quad (4-11)$$

然后, 令 $U_i = \sum_{j=0}^{i-1} Y_j$, 则 U_i 的密度函数可以表示为

$$\rho_{U_i}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i-1)\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{(u-(i-1)\mu_Y)^2}{2(i-1)\sigma_Y^2}\right] \quad (4-12)$$

接着, 令 $Q_i = Z_i + U_i$, 结合式(4-11)(4-12), 可以推断出 Q_i 的密度函数

$$\begin{aligned}\rho_{Q_i}(q) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{Z_i}(q-u) \rho_{U_i}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\beta}} \exp\left[-\frac{(q-u-\varphi-v\mu_{\beta})^2}{2v^2\sigma_{\beta}^2}\right] \frac{\lambda^i}{\Gamma(i)} v^{i-2} \exp(-\lambda v) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i-1)\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{(u-(i-1)\mu_Y)^2}{2(i-1)\sigma_Y^2}\right] dudv\end{aligned}\quad (4-13)$$

最后, 令 $D_{t_i} = a_1 Q_i + b_1$, D_{t_i} 的密度函数可计算得到

$$\rho_{D_{t_i}}(z_{t_i}) = \rho_{Q_i}\left(\frac{z_{t_i} - b_1}{a_1}\right) \frac{1}{|a_1|} = f_{D_{t_i}}(z_{t_i}) \quad (4-14)$$

由此获得了 D_{t_i} 的密度函数。

则对于第 i 次冲击, 当其冲击量大小为 W_i 、失效阈值为 D_{t_i} 时, 产品不发生突发失效的概率为:

$$\begin{aligned}P(W_i < D_{t_i}) &= \iint_{W_i < D_{t_i}} f_W(w_i) f_{D_{t_i}}(z_{t_i}) dw_i dz_{t_i} \\ &= \int_0^{+\infty} f_W(w_i) dw_i \int_{w_i}^{b_1} f_{D_{t_i}}(z_{t_i}) dz_{t_i}, \quad i=1, 2, \dots\end{aligned}\quad (4-15)$$

其中 $f_W(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_W} \exp\left[-\frac{(w_i - \mu_W)^2}{2\sigma_W^2}\right]$ 为 W_i 的密度函数; t_i 为第 i 次冲击发生的时间。

假设在 t 内发生冲击的总次数为 $N(t) = n_t$, 则可靠度函数可表示成以下两段:

(1) 当时间 t 内没有发生冲击时

$$\begin{aligned}
R_1(t) &= R(t|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
&= P(X_S(t) < H|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
&= P(X(t) < H|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
&= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi)}{\sigma_\beta t}\right) \exp(-\lambda t)
\end{aligned} \tag{4-16}$$

(2) 当时间 t 内发生冲击的冲击次数大于等于 1 时

$$\begin{aligned}
R_2(t) &= \sum_{n_t=1}^{\infty} R(t|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n_t} \{W_i < D_{t_i}\}, X_S(t) < H|N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{\infty} P(W_1 < D_{t_1}, W_2 < D_{t_2}, \dots, W_{n_t} < D_{t_{n_t}}, X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{\infty} P(W_1 < D_{t_1} | W_2 < D_{t_2}, \dots, W_{n_t} < D_{t_{n_t}}, X_S(t) < H, N(t)=n_t) \\
&\quad \times P(W_2 < D_{t_2} | W_3 < D_{t_3}, \dots, W_{n_t} < D_{t_{n_t}}, X_S(t) < H, N(t)=n_t) \\
&\quad \times \dots \times P(W_{n_t} < D_{t_{n_t}} | X_S(t) < H, N(t)=n_t) \\
&\quad \times P(X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{\infty} P(W_1 < D_{t_1} | X_S(t) < H, N(t)=n_t)P(W_2 < D_{t_2} | X_S(t) < H, N(t)=n_t) \\
&\quad \times \dots \times P(W_{n_t} < D_{t_{n_t}} | X_S(t) < H, N(t)=n_t) \\
&\quad \times P(X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_t} P(W_i < D_{t_i} | X_S(t) < H, N(t)=n_t)P(X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_t} \int_0^t \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!} F(w_i, z_{t_i}) f_{X_S}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{4-17}$$

因此, 产品在时间 t 内的可靠度函数可表示为

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) \tag{4-18}$$

特别地, 若只单方面考虑冲击过程对退化过程的影响, 而不考虑产品退化量增加对极值冲击失效阈值的影响, 即失效阈值为固定常数 D^* 时, 可靠度如下:

$$\begin{aligned}
R(t) &= P(X(t) < H | N(t) = 0) P(N(t) = 0) \\
&+ \sum_{n_t=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n_t} \{W_i < D_i\}, X_s(t) < H | N(t) = n_t\right) P(N(t) = n_t) \\
&= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi)}{\sigma_\beta t}\right) \exp(-\lambda t) + \sum_{n_t=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \Phi\left(\frac{D^* - \mu_W}{\sigma_W}\right)^{n_t} \frac{\exp(-\lambda t) (\lambda t)^{n_t}}{n_t!}
\end{aligned} \tag{4-19}$$

4.4 δ 冲击下的竞争失效可靠度模型

当外界冲击为 δ 冲击时，假设突发失效的失效阈值是性能退化量的线性函数

$$\delta_i = a_2 X_s(t) + b_2 \tag{4-20}$$

其中， b_2 为 δ 冲击的初始失效阈值； $X_s(t)$ 为 t 时刻产品的总体性能退化量； δ_i 为 t 时刻 δ 冲击条件下的突发失效阈值。

用 B_i ($i=1,2,\dots$) 表示第 i 次冲击发生与第 $i+1$ 次冲击发生的时间间隔，即 $B_i = t_{i+1} - t_i$ ，其对应的失效阈值具体可表示为

$$\delta_{t_i} = a_2 \left(X(t_i) + \sum_{j=0}^{i-1} Y_j \right) + b_2 \tag{4-21}$$

由假设 2 可知， B_i 独立同分布于参数为 λ 的指数分布。则对于第 i 次冲击间隔 B_i ，其失效阈值 δ_{t_i} 的密度函数为：

$$\begin{aligned}
f_{\delta_{t_i}}(z_{t_i}) &= \frac{1}{|a_2|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\beta} \exp\left[-\frac{(z_{t_i} - b_2 - a_2\varphi - a_2u - a_2\mu_\beta v)^2}{2a_2^2 v^2 \sigma_\beta^2}\right] \frac{\lambda^i}{\Gamma(i)} v^{i-2} \exp(-\lambda v) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}(i-1)\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{(u - (i-1)\mu_Y)^2}{2(i-1)\sigma_Y^2}\right] dv du
\end{aligned} \tag{4-22}$$

则产品不发生突发失效的概率为：

$$\begin{aligned}
P(B_i > \delta_{t_i}) &= \iint_{B_i > \delta_{t_i}} f_B(b_i) f_{\delta_{t_i}}(z_{t_i}) db_i dz_{t_i} \\
&= \int_0^{+\infty} f_B(b_i) db_i \int_{b_2}^{b_i} f_{\delta_{t_i}}(z_{t_i}) dz_{t_i}, \quad i=1,2,\dots
\end{aligned} \tag{4-23}$$

其中 $f_B(b_{t_i}) = \lambda \exp(-\lambda b_{t_i})$ 为 B_i 的密度函数。 t_i 为第 i 次冲击发生的时间。

假设在时间 t 内发生冲击的总次数为 $N(t) = n_t$ ，则在性能退化总量小于 H 时，产品的可靠度函数可表示为以下三段式：

(1) 当时间 t 内没有发生冲击时

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= R(t|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
 &= P(X_s(t) < H|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
 &= P(X(t) < H|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
 &= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi)}{\sigma_\beta t}\right)\exp(-\lambda t)
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

(2) 当时间 t 内发生一次冲击时

$$\begin{aligned}
 R_2(t) &= R(t|N(t)=1)P(N(t)=1) \\
 &= P(X_s(t) < H|N(t)=1)P(N(t)=1) \\
 &= P(X(t) + S(t) < H|N(t)=1)P(N(t)=1) \\
 &= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + \mu_Y^2}}\right)\exp(-\lambda t)\lambda t
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

(3) 当时间 t 内发生的冲击次数大于 1 时

$$\begin{aligned}
R_3(t) &= \sum_{n_t=1}^{\infty} R(t|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=2}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n_t-1}\{B_i \geq \delta_{t_i}\}, X_S(t) < H | N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=2}^{\infty} P\left(B_1 \geq \delta_{t_1}, B_2 \geq \delta_{t_2}, \dots, B_{n_t-1} \geq \delta_{t_{n_t-1}}, X_S(t) < H | N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=2}^{\infty} P\left(B_1 \geq \delta_{t_1} | B_2 \geq \delta_{t_2}, \dots, B_{n_t-1} \geq \delta_{t_{n_t-1}}, X_S(t) < H, N(t)=n_t\right) \\
&\quad \times P\left(B_2 \geq \delta_{t_2} | B_3 \geq \delta_{t_3}, \dots, B_{n_t-1} \geq \delta_{t_{n_t-1}}, X_S(t) < H, N(t)=n_t\right) \\
&\quad \times \dots \times P\left(B_{n_t-1} \geq \delta_{t_{n_t-1}} | X_S(t) < H, N(t)=n_t\right) \\
&\quad \times P\left(X_S(t) < H | N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=2}^{\infty} P\left(B_1 \geq \delta_{t_1} | X_S(t) < H, N(t)=n_t\right)P\left(B_2 \geq \delta_{t_2} | X_S(t) < H, N(t)=n_t\right) \\
&\quad \times \dots \times P\left(B_{n_t-1} \geq \delta_{t_{n_t-1}} | X_S(t) < H, N(t)=n_t\right) \\
&\quad \times P\left(X_S(t) < H | N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=2}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_t-1} P\left(B_i \geq \delta_{t_i} | X_S(t) < H, N(t)=n_t\right)P\left(X_S(t) < H | N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=2}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_t-1} \int_0^t \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!} F(b_i, z_{t_i}) f_{X_S}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{4-26}$$

因此，产品在时间 t 内的可靠度函数可表示为

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) \tag{4-27}$$

特别地，当 δ 冲击不受产品退化量的影响时，即其失效阈值不随退化量变换为某一固定常数 δ^* 时，产品可靠度如下：

$$\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{n_t=0}^{\infty} R(t|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) = P(X(t) < H|N(t)=0)P(N(t)=0) \\
&\quad + P(X(t) < H|N(t)=1)P(N(t)=1) + \sum_{n_t=2}^{\infty} P(X(t)+S(t) < H|N(t)=n_t)R_{\delta}(t|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \Phi\left(\frac{H-(\mu_{\beta}t+\varphi)}{\sigma_{\beta}t}\right)\exp(-\lambda t) + \Phi\left(\frac{H-(\mu_{\beta}t+\varphi+\mu_Y)}{\sqrt{\sigma_{\beta}^2t^2+\mu_Y^2}}\right)\exp(-\lambda t)\lambda t \\
&\quad + \sum_{n_t=2}^{\infty} \Phi\left(\frac{H-(\mu_{\beta}t+\varphi+n_t\mu_Y)}{\sqrt{\sigma_{\beta}^2t^2+n_t\mu_Y^2}}\right)\exp(-(n_t-1)\lambda\delta^*)\frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!}
\end{aligned} \tag{4-28}$$

4.5 m 冲击下的竞争失效可靠度模型

当外界冲击为 m 冲击时, 假设 m 冲击下突发失效的失效阈值是产品性能退化总量的连续函数

$$M_t = a_3 X_s(t) + b_3 \tag{4-29}$$

其中 b_3 为 m 冲击的初始失效阈值; $X_s(t)$ 为 t 时刻产品的总体性能退化量; M_t 为 t 时刻 m 冲击条件下的突发失效阈值。

则对于第 i ($i=1,2,\dots$) 次冲击 W_i , 其失效阈值具体可表示为:

$$M_{t_i} = a_3 \left(X(t_i) + \sum_{j=0}^{i-1} Y_j \right) + b_3 \tag{4-30}$$

由假设 2, 其概率密度函数为:

$$\begin{aligned}
f_{M_{t_i}}(z_{t_i}) &= \frac{1}{|a_3|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\beta}} \exp\left[-\frac{(z_{t_i}-b_3-a_3\varphi-a_3u-a_3\mu_{\beta}v)^2}{2a_3^2v^2\sigma_{\beta}^2}\right] \frac{\lambda^i}{\Gamma(i)} v^{i-2} \exp(-\lambda v) dv \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(i-1)\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{(u-(i-1)\mu_Y)^2}{2(i-1)\sigma_Y^2}\right] du
\end{aligned} \tag{4-31}$$

第 i ($i=1,2,\dots$) 次冲击量大小为 w_i , 所有的 w_i 为独立同分布随机变量, 则产品不发生突发失效的概率为:

$$\begin{aligned}
 P(W_i < M_{t_i}) &= \iint_{W_i < M_{t_i}} f_{W_i}(w_i) f_{M_{t_i}}(z_{t_i}) dw_i dz_{t_i} \\
 &= \int_0^{+\infty} f_{W_i}(w_i) dw_i \int_{W_i}^{b_3} f_{M_{t_i}}(z_{t_i}) dz_{t_i} \triangleq F(w_i, z_{t_i})
 \end{aligned} \quad (4-32)$$

其中 $f_w(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp\left[-\frac{(w_i - \mu_w)^2}{2\sigma_w^2}\right]$ 为 w_i 的概率密度函数； t_i 为第 i 次冲击发生的时间。

设 g ($g = 0, 1, \dots, m-1$) 为在 $N(t) = n_i$ 次冲击中，冲击量超过其对应失效阈值的总次数，并将第 q ($q = 0, 1, \dots, g$) 次超过失效阈值的冲击发生时刻记为 t_q^g ，则可以用集合 $A_g = \{t_1^g, t_2^g, \dots, t_g^g\}$ 表示所有超过失效阈值的冲击发生时刻。而在 $N(t) = n_i$ 次冲击中，当冲击量超过失效阈值的总次数为 g 时， A_g 这样的集合共有 C_n^g 个，为便于表示，本文用集合 $A_{gk} = \{t_{1k}^g, t_{2k}^g, \dots, t_{jk}^g\}$ 表示在 $N(t) = n_i$ 次冲击中有 g 次冲击超过失效阈值前提下，第 k 种情况下所有超过失效阈值的冲击发生时刻，其中 $k = 1, 2, \dots, C_n^g$ 。

则在总冲击次数为 $N(t) = n_i$ 的条件下，产品不发生 m 冲击突发失效的可靠度函数 $R(t|N(t) = n_i)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}
 R(t|N(t) = n_i) &= \sum_{g=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{C_n^g} P\left(\bigcap_{t_i \in A_{gk}} \{W_i > M_{t_i}\}, \bigcap_{t_i \notin A_{gk}} \{W_i < M_{t_i}\}\right) \\
 &= \sum_{g=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{C_n^g} \prod_{t_i \in A_{gk}} [1 - F(w_i, z_{t_i})] \prod_{t_i \notin A_{gk}} F(w_i, z_{t_i})
 \end{aligned} \quad (4-33)$$

因此，在时间 t 内， m 冲击模型下产品的可靠度函数可表示为以下三段：

(1) 当时间 t 内没有发生冲击时

$$\begin{aligned}
 R_1(t) &= R(t|N(t) = 0) P(N(t) = 0) \\
 &= P(X_s(t) < H | N(t) = 0) P(N(t) = 0) \\
 &= P(X(t) < H | N(t) = 0) P(N(t) = 0) \\
 &= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi)}{\sigma_\beta t}\right) \exp(-\lambda t)
 \end{aligned} \quad (4-34)$$

(2) 当时间 t 内发生的冲击次数大于等于 1 且小于 m 时

$$\begin{aligned}
R_2(t) &= \sum_{n_t=1}^{m-1} R(t|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{m-1} P(X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=1}^{m-1} \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!}
\end{aligned} \tag{4-35}$$

(3) 当时间 t 内发生的冲击次数大于等于 m 时

$$\begin{aligned}
R_3(t) &= \sum_{n_t=m}^{\infty} R(t|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=m}^{\infty} \sum_{g=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{C_n^g} P\left(\bigcap_{t_i \in A_{gk}} \{W_i > M_{t_i}\}, \bigcap_{t_i \notin A_{gk}} \{W_i < M_{t_i}\}, X_S(t) < H|N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=m}^{\infty} \sum_{g=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{C_n^g} \prod_{t_i \in A_{gk}} P(W_i > M_{t_i}|X_S(t) < H, N(t)=n_t) \\
&\quad \times \prod_{t_i \notin A_{gk}} P(W_i < M_{t_i}|X_S(t) < H, N(t)=n_t)P(X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&= \sum_{n_t=m}^{\infty} \sum_{g=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{C_n^g} \int_0^t \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!} \\
&\quad \times \prod_{t_i \in A_{gk}} [1 - F(w_i, z_{t_i})] \prod_{t_i \notin A_{gk}} F(w_i, z_{t_i}) f_{X_S}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{4-36}$$

因此, 产品在时间 t 内的可靠度函数可表示为

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) + R_3(t) \tag{4-37}$$

特别地, 当失效阈值为固定常数 M^* 时, 可靠度如下:

$$\begin{aligned}
R(t) &= P(X(t) < H|N(t)=0)P(N(t)=0) + \sum_{n_t=1}^{m-1} P(X_S(t) < H|N(t)=n_t)P(N(t)=n_t) \\
&\quad + \sum_{n_t=m}^{\infty} \sum_{g=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{C_n^g} P\left(\bigcap_{t_i \in A_{gk}} \{W_i > M^*\}, \bigcap_{t_i \notin A_{gk}} \{W_i < M^*\}, X_S(t) < H|N(t)=n_t\right)P(N(t)=n_t) \\
&= \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi)}{\sigma_\beta t}\right) \exp(-\lambda t) + \sum_{n_t=1}^{m-1} \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!} \\
&\quad + \sum_{n_t=m}^{\infty} \Phi\left(\frac{H - (\mu_\beta t + \varphi + n_t \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_\beta^2 t^2 + n_t \mu_Y^2}}\right) \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^{n_t}}{n_t!} \sum_{g=0}^{m-1} C_n^g \Phi\left(\frac{M^* - \mu_W}{\sigma_W}\right)^{n-g} \left[1 - \Phi\left(\frac{M^* - \mu_W}{\sigma_W}\right)\right]^g
\end{aligned}$$

(4-38)

4.6 实证分析

本文以 Sandia 国家实验室开发的 MEMS 为例。微型发动机的齿轮和销接头可能由于接触表面的摩擦而导致磨损或销子断裂，从而导致微型发动机的故障。实验表明，外部冲击会在齿轮和销接头处造成一定量的磨损碎屑。同时，如果外部冲击强度太大或两次冲击之间的时间间隔太短，则可能导致齿轮断裂。内部磨损会导致性能下降，而外部冲击会导致严重故障。因此，微型发动机的故障是两者竞争的结果，使用其相关性能参数来分析是合理的。表 4-1 中显示了该产品的具体参数值。

表 4-1 微引擎性能参数表

序号	参数	取值	数据来源
1	H	$1.25 \times 10^{-3} \mu m^3$	参考文献[12]
2	b_1, b_3	$1.55 GPa$	参考文献[12]
3	φ	$0 \mu m^3$	参考文献[12]
4	μ_β	$8.4823 \times 10^{-9} \mu m^3$	参考文献[12]
5	σ_β	$6.0016 \times 10^{-10} \mu m^3$	参考文献[12]
6	λ	$5 \times 10^{-5} / cycle$	参考文献[24]
7	μ_w	$1.2 \mu m^3$	参考文献[24]
8	σ_w	$0.2 \mu m^3$	参考文献[24]
9	μ_γ	$1.0 \times 10^{-4} \mu m^3$	参考文献[24]
10	σ_γ	$2.0 \times 10^{-5} \mu m^3$	参考文献[24]
11	b_2	$2.0 \times 10^3 cycles$	参考文献[24]
12	a_1, a_3	-2.1428×10^2	假设
13	a_2	7.1429×10^5	假设
14	m	2	参考文献[12]

4.6.1 可靠度结果分析

基于 4.3、4.4、4.5 所建立的三种可靠性模型，将表 4-1 中的参数值分别代入 (4-18)、(4-27) 和 (4-37) 中进行计算，可得到三种模型下的可靠度 $R(t)$ 曲线。进一步对 $F(t) = 1 - R(t)$ 求导可得密度函数 $f(t) = dR(t)/dt$ 。具体的可靠度曲线和概率密度曲线如图 4-5、图 4-6 所示。

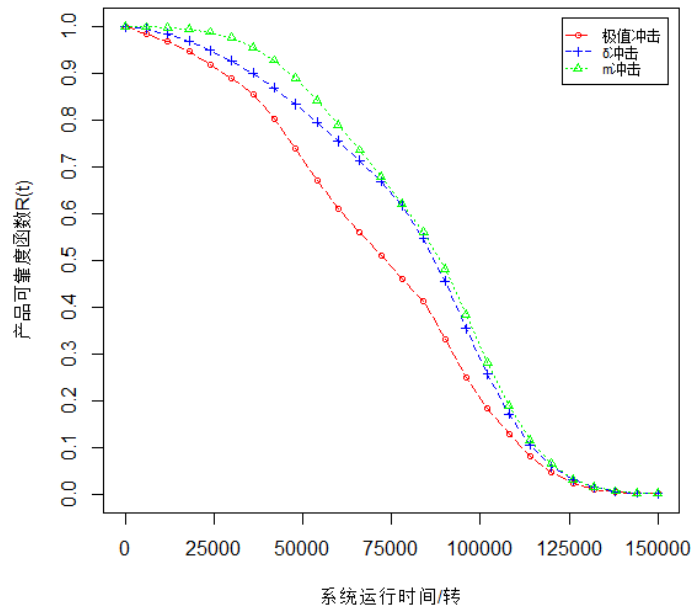


图 4-5 三种冲击模型下产品寿命的可靠度函数曲线

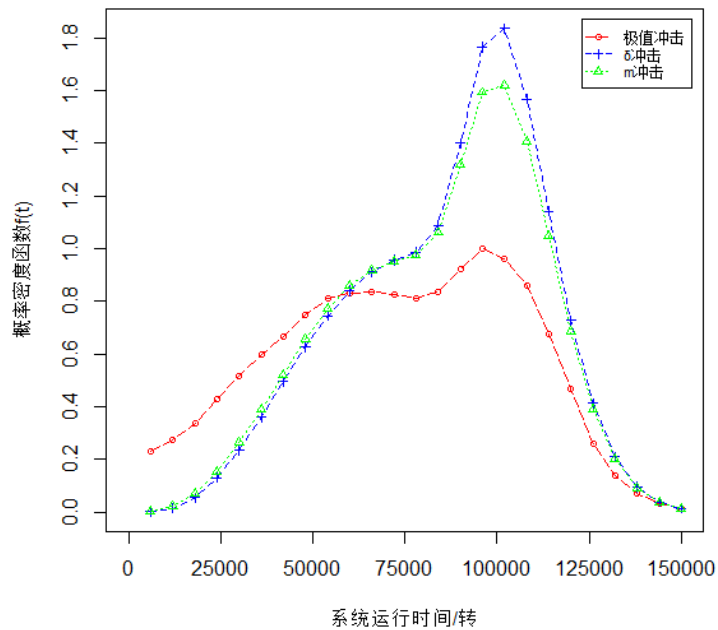


图 4-6 三种模型下产品寿命的密度函数曲线

4.6.2 冲击模型下产品的可靠性分析

由式(4-18)、式(4-27)和式(4-37)可知,产品的可靠度会受到外界冲击的影响,而其失效阈值又会因性能退化过程和外界冲击过程之间不同的相互关系,而呈现出不同的形式。

当极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击的失效阈值分别为固定常数 D^* 、 δ^* 和 M^* 时, 可由式(4-19)、式(4-28)和式(4-38)分别求出对应的可靠度曲线。本文取 $D=1.55Gpa$, $\delta^*=2\times 10^3 cycles$, $M^*=1.55Gpa$, 具体可靠度曲线如图 4-7、图 4-8 和图 4-9 的情形 1。

若突发失效的失效阈值不随产品退化量 $X_s(t)$ 进行变化, 而是当性能退化量 $X_s(t)$ 达到某一个固定值 L , 突发失效的失效阈值才发生变化, 则极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击的失效阈值分别为:

$$D(t)=\begin{cases} D_1, & X_s(t)\leq L \\ D_2, & X_s(t)>L \end{cases}, \quad \delta(t)=\begin{cases} \delta_1, & X_s(t)\leq L \\ \delta_2, & X_s(t)>L \end{cases}, \quad M(t)=\begin{cases} M_1, & X_s(t)\leq L \\ M_2, & X_s(t)>L \end{cases} \quad (4-39)$$

本文取 $D_1=1.55Gpa$, $D_2=1.4Gpa$, $\delta_1=2\times 10^3 cycles$, $\delta_2=2.5\times 10^3 cycles$, $M_1=1.55Gpa$, $M_2=1.4Gpa$, $L=7\times 10^{-4}\mu m^3$, 则各冲击类型下产品的可靠度函数曲线, 分别如图 4-7、图 4-8 和图 4-9 的情形 2 所示。

根据假设 4, 极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击的失效阈值随产品性能退化量的变化而变化且假设呈现线性关系, 如式(4-7)、式(4-20)和式(4-29)所示。则各冲击类型下产品的可靠度函数曲线, 如图 4-7、图 4-8 和图 4-9 的情形 3。

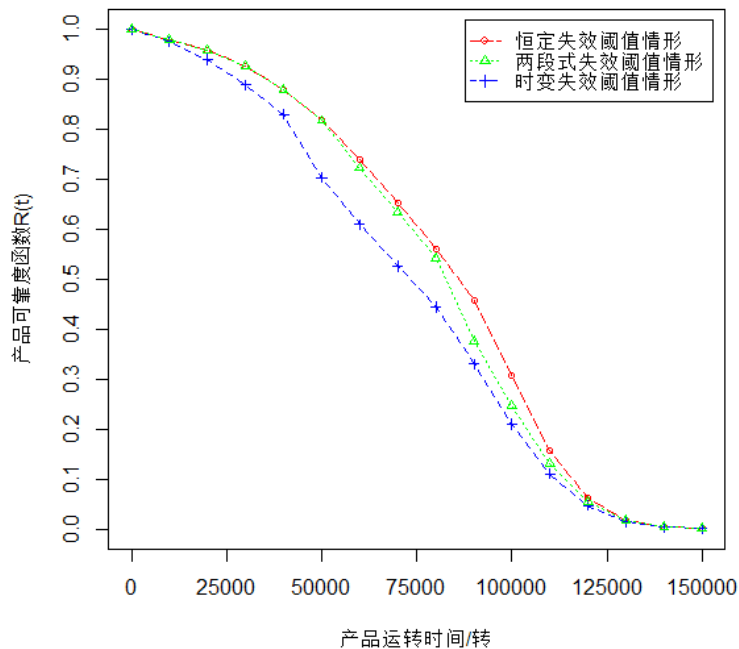
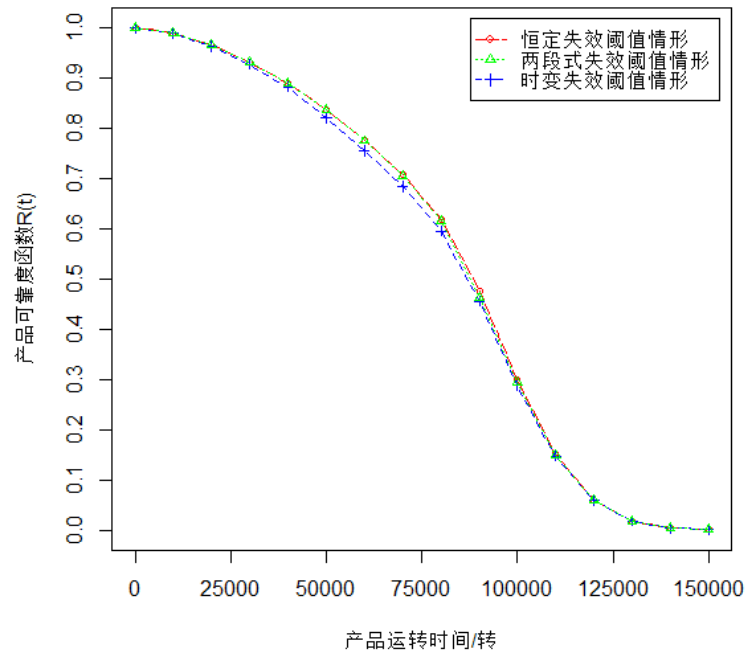
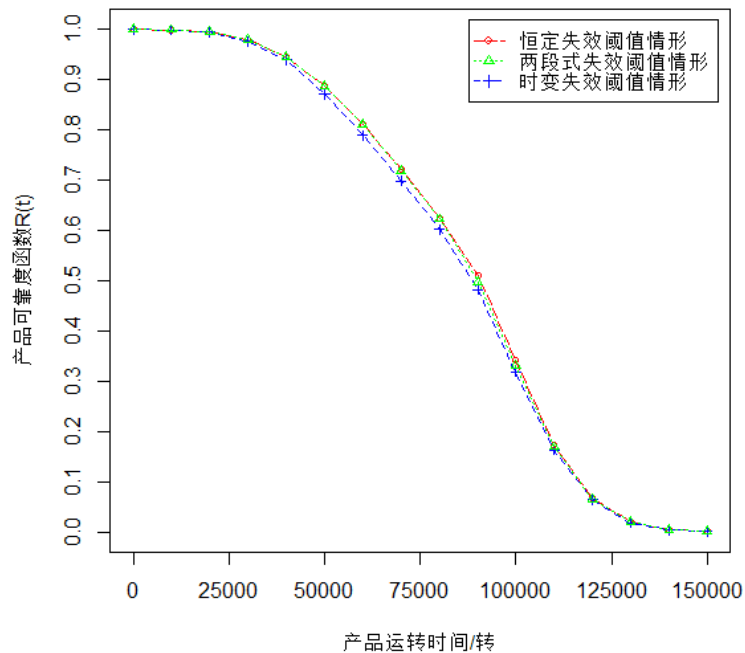


图 4-7 极值冲击模型下产品可靠度曲线对比图

图 4-8 δ 冲击模型下产品可靠度对比图图 4-9 m 冲击模型下产品可靠度对比图

结合图 4-7、图 4-8 和图 4-9，可以发现恒定失效阈值下产品的可靠度曲线，始终位于两种变失效阈值情形的上面。这是由于在恒定突发失效阈值下，外界冲击的失效阈值始终固定不变，认为产品抵抗外界冲击的能力不变，而变失效阈值情形下则认为产品抵抗外界冲击的能力会随退化量的增加而削弱。此外，两段式变失效情形下认为突发失效阈值的变化只呈现为两阶段，而不是随产品退化量增加逐步变化，所以此情

形下的可靠度曲线处于变失效阈值情形之上。在产品的实际使用中，每一次冲击和性能退化发生后，都会不同程度地导致产品抵抗外界冲击的能力降低，从而产品的可靠度会减少。所以相比恒定失效和两段式情形，变失效阈值情形更符合实际。

4.7 本章小结

本章针对退化和突发失效同时存在的竞争失效产品，在考虑外界冲击导致性能退化量增加的基础上，从失效阈值和退化量之间呈线性函数关系的角度，提出了变失效阈值动态可靠性评估模型，从而拓展两者之间的关联性研究。

基于冲击与退化之间的相关性，各自得到了极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击下产品的竞争失效可靠性模型，并通过对微引擎案例进行可靠性分析。该模型更实际地反映了冲击和退化过程之间的相关性，具有一定的实际价值。

全文总结与展望

本文基于退化与突发之间的相互作用关系，建立了竞争失效可靠性评估模型，文章主要进行了以下探索：

第三章基于突发与退化竞争失效模型，对两者分别展开讨论。1) 针对产品的退化过程，采用退化量分布函数进行刻画，弥补了伪失效寿命建模方法的缺陷。2) 对产品性能退化中伴有的突发失效，采用基于比例危险的突发失效模型，通过 AD 检验法获得基准失效率函数 $\lambda_0(t)$ ；而对模型中的 $h(x, S)$ ，则通过非参数方法和线性回归得到 $h(x, S)$ 中的参数估计。

第四章针对退化和突发失效同时存在的产品，在考虑外界冲击导致退化量增加的基础上，进一步考虑退化量增加对突发失效的影响，构建了突发失效阈值与退化量之间的线性函数关系，拓展了两者之间的研究。考虑退化为线性随机过程，分别建立极值冲击、 δ 冲击和 m 冲击类型下产品的评估模型，并通过对微引擎案例进行分析，可以发现在三种冲击类型下，基于本文所建立的变失效阈值型评估模型所得到的产品可靠度，均低于恒定和两段式情形下产品的可靠度，更符合产品的实际使用情形。

虽然本文的研究内容对竞争失效下的可靠性研究做出了一定的探索，但还是存在许多问题值得继续去探索与研究，列述如下：

(1) 第三章中提出的竞争失效场合下恒加退化可靠性模型，更加客观地反映了退化与突发的竞争过程，具有一定的工程应用价值，但对于存在多种退化和突发失效的问题还得继续探索。

(2) 第四章提出的基于变失效阈值的可靠性评估模型可以更真实地反映冲击与退化之间的相关性，具有一定的工程应用价值。但该模型只考虑了线性退化过程，在后续研究中可以考虑更为复杂、具体的工程情形，借助于 Winner 过程，Gamma 过程等理论开展进一步研究。

致 谢

时维六月，序属盛夏，草木盛而百花艳，夏夜长而百虫鸣。居蜀七年，修行未满，学识长而颜愈少，宾朋众而亲愈疏。辗转两院，成理西交，熟习两课，数学统计。觅得佳友，同门情深，“岂曰无衣，与子同袍”。

求学西交，悠悠三载，寒来暑往，步履蹒跚，腹内草莽，纸上空谈，幸有良师，不吝言传，引经据典，方才成文。

余忆癸巳九月，背故土以求真知，离至亲以近圣贤；小可不才，尚有经天纬地之心，博古通今之怀。蜀郡自古多才，盖“文章锦绣地，温柔富贵乡”是也，遂初至成理，踌躇满志，才疏学浅，今至西交，博闻广记，才情渐显。

师者，所以传道授业解惑也，古之如是，今亦如是。虽登大学之堂，对余之师，敬之更甚。犹记岁末，行文之难，抓耳挠腮，闭目不眠。吾师善言，推心置腹，事无巨细，亲身指点，理学之道，深入吾心。学习之草率，求学之艰辛，悔之愧之。

同窗三载，庚子即别，虽心有不舍，然“胜地不常，盛筵难再”，金兰之情，吾心常念。诸君来自五湖四海，亦必归于四海五湖，求贤问道而来，心怀天下而去，正有“玉在椟中求善价，钗于奁内待时飞”之感。虽“佳琴易得，知音难觅”，但不可踟躅不前。遂引高适之言以赠诸君“莫愁前路无知己，天下谁人不识君”，同窗之厚谊，手足之情深，思之念之。

吾辈今将入世，纷繁世界，尽收眼底。然不可忘立身之根本，立世之根基，国之重担，皆系我辈，不忘初心，砥砺前行。人生之价值，成事之捷径，皆重心重行。“人生到处知何似，应似飞鸿踏雪泥”，吾心之向，吾心之愿，特此与君共勉。

行文至此，已过大半，虽千言难尽，万字难书，然余之心，尽皆言明，一谢恩师之栽培，二谢同门之关怀，三谢父母之养育。青春路远，未来可期。

四人者：吾师何平、唐家银，吾伴曹玲，吾友梅峰，感激涕零。庚子年六月某日，成都曹某记。

参考文献

- [1] ELSAYED E A, ARGON Chengkang. Recent research and current issues in accelerated testing [C]//IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, San Diego, California, US,1998,5:4704-4709.
- [2] NELSON W. Accelerated life testing-step-stress models and data analysis [J].IEEE Transactions of Reliability, 1980, R29 (2):103-108.
- [3] T. Nakagawa, Shock and Damage Models in Reliability Theory. London, UK: Springer, 2007.
- [4] H. M. Bai, Z. H. Li and X.B Kong, “Generalize shock models based on a cluster point process,” IEEE. Trans.Reliability, 2006, 55:542-550.
- [5] F. Mallor and E. Omei, “Shocks, Runs and Random Sums,” Journal of Applied Probability, 2001, 38:438-448.
- [6] Finkelstein M. Shocks in Homogeneous and Heterogeneous Populations[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2007, 92(5):569-574.
- [7] Neloson W B. Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analyses [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1990.
- [8] COX D R. Regression models and life-tables [J].Journal of Royal Statistical Society, 1972, 34(2): 187-220.
- [9] EGHBALI G. Reliability estimate using accelerated degradation data [D].New Jersey: The State University of New Jersey, 2000.
- [10] Jiang L, Feng Q M, Coit DW. Reliability and maintenance modeling for dependent competing failure processes with shifting failure thresholds[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(4):932-948.
- [11] SU C, QU Z Z, HAO H B. Reliability assessment considering dependent competing failure process and shifting-threshold[J]. Journal of Southeast University, 2013, 29(1):52-56.
- [12] Rafiee K, Feng Q, Coit DW. Reliability modeling for dependent competing failure processes with changing degradation rate. IIE Trans.2014, 46(5):483-496.
- [13] Gao, H, Cui, L. and Kong, D. Reliability analysis for a Wiener degradation process model under changing failure thresholds. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 171, pp.1-8.

-
- [14] 赵建印, 刘芳等. 退化失效与突发失效共存下产品可靠性模型与评估方法研究[J]. 兵工学报, 2011: 1136-1139.
- [15] 安宗文, 王海红. 基于冲击衰减的竞争失效可靠性分析模型[J]. 兰州理工大学学报, 2018, 44(04):32-39.
- [16] 苏春, 张恒. 基于性能退化数据和竞争失效分析的可靠性评估[J]. 机械强度, 2011, 33(2):196-200.
- [17] 蔡忠义, 陈云翔, 张诤敏等. 基于比例失效率退化模型的可靠性评估方法[J]. 产品工程与电子技术, 2015, 37(8):1943-1947.
- [18] 王智明, 杨海鱼. 刀具混合三 Weibull 比例危险模型及可靠性评估[J]. 工具技术, 2018, 52(08):47-51.
- [19] 黄文平, 周经纶, 宁菊红, 金光. 基于变失效阈值的竞争失效可靠性模型[J]. 产品工程与电子技术, 2017, 39(04): 941-946.
- [20] Tang J, Chen C, Huang L. Reliability assessment models for dependent competing failure processes considering correlations between random shocks and degradations. Qual Relia Engng Int. 2019, 35:179-191.
- [21] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 高等教育出版社, 1986.
- [22] 赵建印. 基于性能退化数据的可靠性建模与应用研究[D]. 国防科学技术大学, 2005.
- [23] Meeker W Q, Escobar L A. Statistical methods for reliability data [M]. New York, John Wiley & Sons, 1998:324-325.
- [24] Tanner DM, Dugger MT. Wear mechanisms in a reliability methodology. Proc SPIE. 2003, 4980:22-40.
- [25] 龙哲, 申桂香, 王晓峰, 牟黎明, 韩辰宇. 竞争失效的刀具可靠性评估模型[J]. 吉林大学学报(工学版), 2019(01): 141-148.
- [26] Lu J C, MEFKER W Q. Using degradation measures to estimate a time-to-failure distribution [J]. Technometrics, 1993, 35(2): 161-173.
- [27] Wilson S P, Taylor D. Reliability assessment from fatigue micro-crack data[J]. IEEE Transactions on reliability, 1997, 46(2): 69-78.
- [28] Lu H, Kolarik W, Lu S. Real-time performance reliability prediction[J]. IEEE transactions on reliability, 2001, 50(4): 353-357.
-

-
- [29] 王玉明, 蔡金燕. 基于板级电路加速退化数据的可靠性分析%Reliability Analysis Based on Circuit Board Accelerated Degradation Data[J]. 电子产品可靠性与环境试验, 027(1):9-12.
- [30] Bae S J, Kvam P H. A nonlinear random-coefficients model for degradation testing[J]. Technometrics, 2004, 46(4): 460-469.
- [31] Yang K, Yang G. Degrdaation reliability assessments using severe critical value[J]. International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 1998, 5(1): 85-95.
- [32] C. J. Lu and W. Q. Meeker, "Using degradation measures to estimate a time-to-failure distribution," Technometrics, 1993, 35: 161-174.
- [33] J. P. Kharoufeh and S. M. Cox, "Stochastic models for degradation based reliability," IIE Transactions, 2005, 37: 533-542.
- [34] C. Park and W.J. Padgett, "Stochastic degradation models with several accelerating variables," IEEE Trans. Reliability, 2006, 55: 379-390.
- [35] Keedy E, Feng Q. A physics-of-failure based reliability and maintenance modeling framework for stent deployment and operation. Reliab Eng Syst Saf, 2012, 103(1): 94-101.
- [36] Huang W, Askin RG. A generalized SSI reliability model considering stochastic loading and strength aging degradation[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2004, 53(1):77-82.
- [37] Huang W, Askin RG. Reliability analysis of electronic devices with multiple competing failure models involving performance aging degradation. Qual Relia Engng Int., 2003, 19(3): 241-254.
- [38] Koosha Rafiee, Feng Q M, David W C. Reliability assessment of competing risks with generalized mixed shock models. Reliability Engineering and System Safety159, 2017: 1-11.
- [39] 王华伟, 高军, 吴海桥. 基于竞争失效的航空发动机剩余寿命预测[J].机械工程学报, 2014, 50(06): 197-205.
- [40] 黄文平. 基于性能退化与冲击的竞争失效可靠性建模与维修优化研究[D]. 国防科技大学, 2016.
- [41] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M].北京: 高等教育出版社, 2012.2.
- [42] 赵涛, 林青. 可靠性工程基础[M]. 天津: 天津大学出版社, 1999.
-

-
- [43] 谢里阳. 机械可靠性基本理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [44] Song S, David W C, Qian M F. Reliability for systems of degrading components with distinct component shocks sets. *Reliability Engineering and System, Safety*132, 2014: 115-124.
- [45] Liu, J., Zhang, Y. and Song, B. Reliability modeling for competing failure systems with instant-shift hard failure threshold. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 2018, 42(4): pp.457-467.
- [46] Guan, X., Zhao, G. and Xuan, J. Reliability modeling for multi-component systems subject to multiple dependent competing failure processes with shifting hard failure threshold. In *2017 Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Harbin)* (pp. 1-7). IEEE. 2017, July.
- [47] 陈亮, 胡昌华. 基于退化建模的可靠性分析研究现状 [J]. *控制与决策*, 2009, 24(9): 1281-1287
- [48] 长春波, 曾建潮. 冲击条件下相关性竞争失效的产品可靠性建模. *振动与冲击*, vol34, 2015: 203-213.
- [49] 刘晓娟, 王华伟, 徐璇. 考虑多退化失效和突发失效之间竞争失效的可靠性评估方法[J]. *中国机械工程*, 2017, 28(1): 7-12.
- [50] Rafiee, K., Feng, Q. and Coit, D.W. Reliability analysis and condition-based maintenance for failure processes with degradation-dependent hard failure threshold. *Quality and Reliability Engineering International*, 2017, 33(7): pp.1351-1366.
- [51] Hao, S. and Yang, J. Reliability analysis for dependent competing failure processes with changing degradation rate and hard failure threshold levels. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, 118: pp.340-351.
-

攻读硕士学位期间录用或发表的论文

- [1] 曹宇宇,唐家银,何平,曹玲. 竞争失效场合恒定应力加速退化试验统计分析[J]. 湖北大学学报 (自然科学版).