

Facultad de Lenguas y Educación

Dpto. de Educación

Nombre del alumno: José Manuel Sánchez Vilchez

Nombre del tutor: Raquel Martínez Muñoz

Propuesta de
enseñanza-
aprendizaje de las
matemáticas
mediante cuadernos
Jupyter

Trabajo de Fin de Máster



UNIVERSIDAD
NEBRIJA



**CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PUBLICACIÓN DE TFM EN EL
CATÁLOGO DE LA BIBLIOTECA NEBRIJA**

Yo JOSE MANUEL SANCHEZ VILCHEZ alumno/a del Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Autorizo

No autorizo

La publicación del presente trabajo en el catálogo de la Biblioteca Nebrija en caso de que así lo considere la propia Universidad.

Paris, 12 de Agosto del 2021

Fdo: JOSE MANUEL SANCHEZ VILCHEZ

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "JOSE MANUEL SANCHEZ VILCHEZ", is written over a series of overlapping blue loops.

Resumen

La integración de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las matemáticas es cada vez más necesaria para fomentar la motivación de los alumnos. El principal desafío es como retener la atención de los alumnos y motivarlos y que estén predisuestos para el aprendizaje de las matemáticas. Teniendo en cuenta que los adolescentes de hoy en día son nativos digitales, completamente marcados por las redes sociales y la hiper-conectividad, debemos plantearnos clases más interactivas, donde participen más de diferentes formas y colaborando entre ellos. Las nuevas pedagogías intentan centrar las clases en el alumno y en sus intereses para motivarlo, donde el profesor debe adoptar un rol de mediador digital. El presente TFM propone una metodología de innovación educativa para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos de secundaria en el área de matemáticas mediante los cuadernos Jupyter. Esta propuesta didáctica innovadora tiene por meta permitir al docente estructurar y secuenciar los recursos TIC existentes en unidades didácticas y en proyectos mediante dichos cuadernos para dotar a las clases de la interactividad necesaria, así como la continuidad para motivarlos.

Palabras clave: cuadernos jupyter, TIC, matemáticas, geogebra, python

Abstract

When it comes to teaching maths and motivate the alumni, TIC integration is more and more necessary. The main challenge is how to retain the attention and motivate them to be predisposed to learn. Taking into account that adolescents today are digital native, and are as consequence completely tight by social networks and hyper-connectivity, we have to design more interactive courses where alumni can participate in different manners and fostering collaboration among them. New pedagogical approaches try to center courses on alumni to motivate them, where teachers have to adopt a digital mediation role. This project consists of a innovative educational proposal for alumni in secondary and baccalaureat in the areas of maths through Jupyter notebook. This didactic proposal has as main goal to allow teachers to structure their TIC content in lessons through those notebooks to empower classes with interactivity.

Keywords : jupyter notebook, TIC, maths, geogebra, python

Índice General

Abstract	III
Índice General	IV
Lista de imágenes	VI
Lista de tablas	VIII
1. Introducción	1
1.1. Justificación	1
1.2. Objetivos y finalidad del TFM.....	3
1.3. Estructura del TFM	3
2. Estado de la cuestión	5
3. Marco teórico	9
3.1. Marco legal	9
3.2. Bloqueos y dificultades en aprendizaje de las matemáticas.....	9
3.3. Teorías del aprendizaje	10
3.4. Metodologías del aprendizaje	13
3.5. Recursos TIC para la enseñanza de las matemáticas	17
4. Diseño de la propuesta de innovación educativa.....	25
4.1. Principios de la propuesta educativa.....	25
4.2. Cuadernos dinámicos Jupyter para estructurar los contenidos en unidades didácticas	25
4.3. Ventajas de la propuesta de intervención innovadora	26
4.4. Implementación de la propuesta de intervención innovadora.....	27
4.5. Selección de tipos de recursos TIC integrables en un cuaderno Jupyter	31
4.6. Propuesta de actuación 1: Aprendizaje por descubrimiento mediante la búsqueda automática de recursos Geogebra para el primer ciclo de la ESO.....	44
4.7. Propuesta de actuación 2: Generación de actividades dinámicas mediante los cuadernos Jupyter y el lenguaje Python	48

4.8. Propuesta de actuación 3: Ejemplo de aplicación de los cuadernos Jupyter para programar una unidad didáctica de 2º de la ESO	52
4.9. Estructura del repositorio GitHub con los cuadernos Jupyter mostrados en el presente TFM.....	58
5. Conclusiones	59
6. Limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación	60
6.1. Análisis DAFO	60
6.2. Futuras líneas de investigación.....	61
7. Bibliografía	62
8. Anexos.....	65

Lista de imágenes

Figura 1. Evolución del uso de las TIC desde 2010 hasta 2019. Fuente: INE (2019)	2
Figura 2. Indicadores del uso de las TIC en España y Europa. INTEF (2016)	6
Figura 3. Esquema del proyecto estadístico con sus diversas fases	14
Figura 4. Metodología a base de piezas algebraicas para la representación de polinomios	16
Figura 5. Ejemplo de factorización de un polinomio de grado dos mediante Geogebra (Cayetano Rodriguez. J, 2020)	16
Figura 6. Resolución de ecuación de primer grado mediante el método de las balanzas en Geogebra (Kerr, 2017)	17
Figura 7. Evolución de la adopción de Python como lenguaje de programación. Statista (2020).....	23
Figura 8. Impresión por pantalla del mensaje “Hola mundo” mediante el lenguaje Python...	26
Figura 9. Propuesta de innovación didáctica para estructurar recursos TIC en Cuadernos Jupyter	26
Figura 10. Vista preliminar del encabezado de un cuaderno Jupyter.....	27
Figura 11. Ejemplo de una celda code en un cuaderno Jupyter	27
Figura 12. Aplicación Jupyter para la ejecución de cuadernos dinámicos	28
Figura 13. Funcionalidades o plugins “Nbextensions” que han sido instalados para este TFM	29
Figura 14. Vista preliminar de una tabla de contenido para cuatro niveles	30
Figura 15. Activación del plugin Python Markup en un cuaderno Jupyter para poder insertar variables Python en texto markdown	30
Figura 16. Inclusión de una función en código Python en un cuaderno Jupyter	32
Figura 17. Operación con operaciones algebraicas en lenguaje Python	33
Figura 18. Evaluación mediante cuaderno Jupyter de los valores introducidos por un alumno	33
Figura 19. Inclusión de texto en formato Latex para explicar la resolución de una ecuación lineal	34
Figura 20. Inserción de contenido en PDF extraído de la web Actiludis	35
Figura 21. Inserción de un diagrama de Gantt para aprendizaje basado en proyectos	36
Figura 22. Identificación del identificador de un recurso Geogebra.....	36
Figura 23. Inserción de un recurso Geogebra en un cuaderno Jupyter.....	37
Figura 24. Inserción de un video Youtube en un cuaderno Jupyter.....	37
Figura 25. Inserción de la calculadora Descartes	38
Figura 26. Inserción de una unidad didáctica del proyecto Descartes	39
Figura 27. Inserción de una aplicación en Dash para mostrar gráficos interactivos	40
Figura 28. Obtención del enlace para incrustar el mapa mental en un cuaderno Jupyter	40
Figura 29. Inserción de un mapa mental en un cuaderno Jupyter	41
Figura 30. Obtención del enlace a un formulario en Google Forms para su integración en un cuaderno Jupyter.....	41
Figura 31. Inserción de los recursos de gamificación Kahoot y GoConqr	42
Figura 32. Inserción de recurso de pizarra digital Draw.Chat para seguir explicaciones online	43
Figura 33. Proceso de creación de una rúbrica e inserción en un cuaderno Jupyter	43

Figura 34. Generación automática de una nube de palabras con todos los términos que se abordarán en los recursos Geogebra extraídos para 1º de la ESO	46
Figura 35. Primer ejercicio extraído de la web de Geogebra sobre los conjuntos	47
Figura 36. Segundo ejercicio extraído de la web de Geogebra sobre los conjuntos	47
Figura 37. Tercer ejercicio extraído de la web de Geogebra sobre los conjuntos.....	48
Figura 38. Generación de ecuaciones de primer grado con coeficientes aleatorios en Python y Latex.....	49
Figura 39. Generación de ecuación de segundo grado con coeficientes aleatorios en Python y Latex.....	50
Figura 40. Generación de un problema de ecuaciones con datos variables mediante Python	51
Figura 41. Generación de matriz con valores aleatorios mediante Python	51
Figura 42. Generación de sistemas de ecuaciones 2×2 y 3×3 con coeficientes aleatorios	52
Figura 43. Planificación de la unidad didáctica mediante un cuaderno Jupyter	53
Figura 44. Integración de contenido multimedia antes de comenzar la parte teórica de ecuaciones	54
Figura 45. Integración de una celda con la explicación teórica de ecuaciones de primer grado	55
Figura 46. Integración de una celda con una nube de palabras con los conceptos más relevantes de la unidad didáctica de ecuaciones por frecuencia de aparición	55
Figura 47. Integración de una celda con un ejercicio extraído de Geogebra para resolver una ecuación de primer grado	56
Figura 48. Proceso de envío de un cuaderno Jupyter para su evaluación mediante Google Forms	57
Figura 49. Ejemplo de rúbrica integrada en la unidad didáctica del cuaderno Jupyter	57

Lista de tablas

Tabla 1. Recursos online por tipología (* aquellos recursos que se han integrado en cuadernos Jupyter)	17
Tabla 2. Herramientas TIC integrables en un cuaderno Jupyter y su justificación didáctica .	31
Tabla 1. Análisis DAFO de la propuesta del presente TFM	61

1. Introducción

1.1. Justificación

Tal como dijo Piaget sobre la educación “La educación, para la mayoría, significa intentar que el niño se parezca al adulto típico de su sociedad. Pero para mí, significa hacer creadores, tienes que hacer inventores, innovadores, y no conformistas”, el aprendizaje de las matemáticas debería partir de la misma base.

Sin embargo, las matemáticas son una de las materias que más desapego generan entre los alumnos en secundaria. De hecho, pueden llegar a ser una fuente de desmotivación y de frustración, generando bloqueos de diferente naturaleza y por ende una actitud negativa, principalmente por su dificultad y naturaleza acumulativa de conocimientos. De hecho, según Gómez-Chacón (2000) las matemáticas son percibidas por los alumnos como una materia difícil, científica, exacta y rígida, donde la mayoría de problemas se resuelven de las formas más difícilmente posibles.

Una de las razones por las que las matemáticas crean tal desapego, es el abuso del libro de texto, acuñado por Villella (2005) como textocentrismo que es cuando hay una centralización excesiva en el libro como única fuente de conocimiento, cerrando las puertas a otro tipo de contenido que podría enriquecer la enseñanza. Es necesario introducir otro tipo de contenidos que permitan al alumno visualizar las matemáticas, así como de poder manipularlas para su mejor comprensión.

El principal desafío es como retener la atención de los alumnos y motivarlos y que estén predisuestos para el aprendizaje de las matemáticas en un contexto tan tecnológico. Para ello, la introducción del dinamismo y la interactividad en las clases es fundamental, principalmente guiadas mediante las TIC. Tal como destacó Aguirre (2018), la interactividad permite al propio alumno construir su propio conocimiento y darle un rol mucho más protagonista en dicha construcción mental haciendo que el proceso de enseñanza aprendizaje sea gestionado conjuntamente entre el profesor, guía del proceso, y el propio alumno.

De hecho, Las TIC (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) son una realidad dentro y fuera de las aulas. Según el Instituto Nacional de Estadística, INE (2019), (Figura 1) el uso de los ordenadores entre los adolescentes es muy elevado (89,7% de los menores son poseedores de uno), e incluso aún más el acceso a internet (el 92,9%). Esta aceleración de la tendencia la marca también un factor fundamental, que es el hecho que dos de cada tres niños adolescentes de 10 a 15 años tengan un móvil.

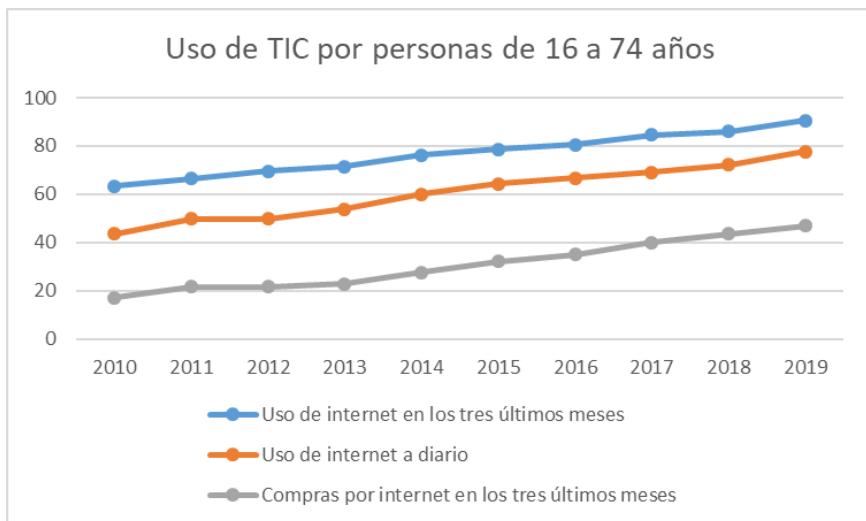


Figura 1. Evolución del uso de las TIC desde 2010 hasta 2019. Fuente: INE (2019).

Estas estadísticas muestran que la realidad docente está cada vez más ligada con las tecnologías, teniendo por alumnos nativos digitales, que están siendo continuamente bombardeados por constantes flujos de información en forma de contenido multimedia principalmente, pero también de redes sociales y completamente híper conectados.

El desafío principal que se pretende abordar en el presente TFM es el de atraer la atención de los alumnos y fomentar su motivación, mediante la inclusión de las TIC sobre todo para plantear clases más interactivas, donde los alumnos participen más, y de diferentes formas y colaborando entre ellos. Esto sólo es posible mediante el uso de las mismas armas tecnológicas, y haciendo una transición hacia un nuevo modelo de enseñanza digital donde el docente ya no es de mero transmisor de enseñanza y de información como ocurría en las clases magistrales. Esto implica que el docente debe saber adaptarse a un rol de mediador digital, siendo capaz de integrar nuevos tipos de recursos digitales para adaptarse a la realidad tan cambiante de nuestros días y prepara a los alumnos para un mañana cada vez más incierto y a la vez más apasionante en lo que nuevos retos suponen.

El presente TFM pretende adoptar una metodología que reúna tres elementos esenciales: las redes sociales e internet, los dispositivos de nueva generación y la interactividad con el alumno. Dichos tres pilares se pueden integrar en la herramienta denominada cuadernos Jupyter. Un cuaderno Jupyter es una aplicación web de código libre que permite crear y compartir documentos que contienen código, texto, gráficos, imágenes, etc. Los cuadernos Jupyter son una herramienta de tipo colaborativa, que no requiere de una instalación compleja y que funciona completamente en la nube.

Tal como se verá posteriormente, los cuadernos Jupyter pueden ser clave para integrar y estructurar diversos tipos de contenidos TIC, pero, aun así, no han sido muy explorados en lo que se refiere a la enseñanza secundaria en el área de matemáticas. Un

cuaderno Jupyter nos permite desde una misma interfaz la visualización, ya sea desde un móvil, una tablet o un ordenador mostrar todo tipo de contenido sin tener que cambiar de soporte. Este tipo de cuadernos son como un libro en blanco, adaptables a cualquier curso dentro del ámbito de secundaria y de las matemáticas. Tal como se verá en el capítulo correspondiente, se expondrá como los cuadernos Jupyter permiten integrar perfectamente todo tipo de recursos TIC para estructurar una unidad didáctica según los contenidos del currículo en el contexto de educación secundaria.

1.2. Objetivos y finalidad del TFM

El presente TFM propone una metodología de innovación educativa para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos de secundaria en el área de matemáticas mediante los cuadernos dinámicos Jupyter como elemento estructurador. Esta propuesta didáctica innovadora tiene por meta permitir al docente estructurar los recursos TIC existentes en unidades didácticas mediante dichos cuadernos dinámicos.

El objetivo a medio largo plazo es que permita a los docentes reemplazar un libro de texto por un cuaderno digital e interactivo. Este TFM consta de los siguientes objetivos concretos:

- Proponer una selección de diferentes tipos de recursos TIC para su integración en la herramienta cuaderno Jupyter para optimizar y enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje en todas sus fases. Los tipos de contenidos TIC que proponemos permitirán responder a todas las necesidades educativas.
- Propuesta de una serie de programas informáticos de web crawling que pueden descubrir de forma automática los recursos TIC de Geogebra e incluirlos en un cuaderno Jupyter según el bloque de matemáticas a impartir.
- Propuesta de una serie de programas informáticos que generan estructuras algebraicas con coeficientes generados dinámicamente según el alumno, para que no puedan copiarse en sí ni tengan la tentación de memorizar soluciones.

Los objetivos derivados que se pueden conseguir mediante el presente TFM serían todos aquellos derivados del uso de las TIC, como lo son el desarrollo del aprendizaje por descubrimiento, el desarrollo de la autonomía del alumno, la introducción al alumno de la programación, el aprendizaje mediante problemas, el desarrollar las competencias transversales como la competencia digital, entre otros.

1.3. Estructura del TFM

El presente TFM se estructura en dos partes bien diferenciadas.

La primera parte de este TFM es una revisión bibliográfica que se divide en dos objetivos:

- Analizar las dificultades de las matemáticas, así como las debilidades de la metodología magistral de enseñanza de las matemáticas
- Analizar el rol de las TIC en la educación en matemáticas, así como sus dificultades de aplicación en el contexto educativo.

La segunda parte contiene la propuesta de innovación didáctica basada en cuadernos dinámicos Jupyter, que mostrará una metodología integradora contextualizada al marco legislativo vigente como medio para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el contexto de educación secundaria.

Se presentarán los principales recursos TIC seleccionados y su adaptación para poder integrarlos a los cuadernos TIC, para posteriormente mostrar las aplicaciones de los cuadernos Jupyter para tres actuaciones educativas de índole diferente:

- Primera actuación: Aprendizaje por descubrimiento mediante la búsqueda automática de recursos Geogebra para el primer ciclo de la ESO
- Segunda actuación: Aprendizaje de las ecuaciones de primer y segundo grado mediante la generación de ejercicios y problemas con variables dinámicas mediante los cuadernos Jupyter y el lenguaje Python
- Tercera actuación: Programación de una unidad didáctica mediante el uso de los cuadernos Jupyter para 2º de la ESO

2. Estado de la cuestión

Existen varios factores que intervienen en la falta de motivación en el aprendizaje de las matemáticas, como los derivados de la enseñanza magistral (i), los factores derivados del propio alumnado (ii), y los factores derivados de las dificultades de las matemáticas (iii).

- (i) La enseñanza magistral está centrada en el profesor, y asume un proceso unidireccional que parte siempre del profesor. Suele transmitir los conocimientos como algo ya terminado y que no necesita evolución, como clases magistrales, donde dicha metodología fragmenta los contenidos y dificulta en gran medida que los alumnos puedan unir los diferentes conceptos. Las clases están pensadas para resolver problemas mediante métodos claramente mecánicos donde la memorización es muy importante a nivel intelectual. El docente se centra en definiciones abstractas y en muchas ocasiones sin justificar al alumno, lo que crea un cierto desapego.

Otro aspecto crucial de la enseñanza magistral que puede influir en la motivación del alumnado de matemáticas es el textocentrismo (Villella, 2005), que es cuando hay una centralización excesiva en el libro como única fuente de conocimiento, cerrando las puertas a otro tipo de contenido que podría enriquecer la enseñanza. Esto tiene una serie de desventajas como son la falta de innovación, la falta de trabajo de campo y la experimentación, la falta de un análisis previo de las actividades contenidas en el libro y posibles colisiones con la metodología didáctica del profesor o con los intereses de los alumnos, al no estar centradas en sus motivaciones o círculo de interés. Al tener como única fuente un libro de texto, se está mostrando el contenido matemático desde un único prisma, que puede no ser el idóneo ni propicio para todo tipo de alumnado.

- (ii) Los alumnos son heterogéneos en múltiples aspectos. Un primer aspecto es desde su propia concepción, donde cada alumno tiene ocho tipos de capacidades o tipos de inteligencia (Gardner, 1995), que le hace que la forma de aprender de formas diferentes. Un segundo aspecto refiere a la forma en que perciben, organizan y usan la información tal como definieron Bandler y Grinder (1976).

- (iii) Las matemáticas entrañan una serie de dificultades, que podríamos dividir en varios grupos según Socas (1997), como son las propias de la matemática (epistemológicas), las que hacen que la metodología de enseñanza carezca de sentido (didácticas), las intrínsecas al alumno y las afectivas u emocionales, que generan sentimientos de miedo e incapacidad y son fuente de varios tipos de bloqueos (Miguel de Guzmán, 1995).

Esta realidad tecnológica hace que los centros educativos se tengan que adaptar en consecuencia. El Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, INTEF, (2016) indica en un informe dos indicadores clave del uso de las TIC por parte de los centros educativos a nivel estatal (Figura 2): (i) el número medio de alumnos por ordenador y, (ii) el porcentaje de centros que tiene acceso a conexión de internet. Según dicho podemos observar que el número medio de alumnos por ordenador en cada centro público ha disminuido de 13 a 3 desde el curso académico 2002/2003 hasta el 2014/2015, lo que denota un gran esfuerzo en la introducción de la tecnología en nuestro país. Por ejemplo, según Fernández. R (2020), se refleja que en el curso académico 2018/2019 la comunidad mejor equipada a nivel de TIC sería Extremadura (1.1 alumnos por ordenador) y la región peor equipada la de Murcia (4.2 alumnos por ordenador). Esto evidencia que hoy en día cualquier centro público puede llevar a cabo cualquier proyecto que integre recursos TIC, en mayor o en menor medida.

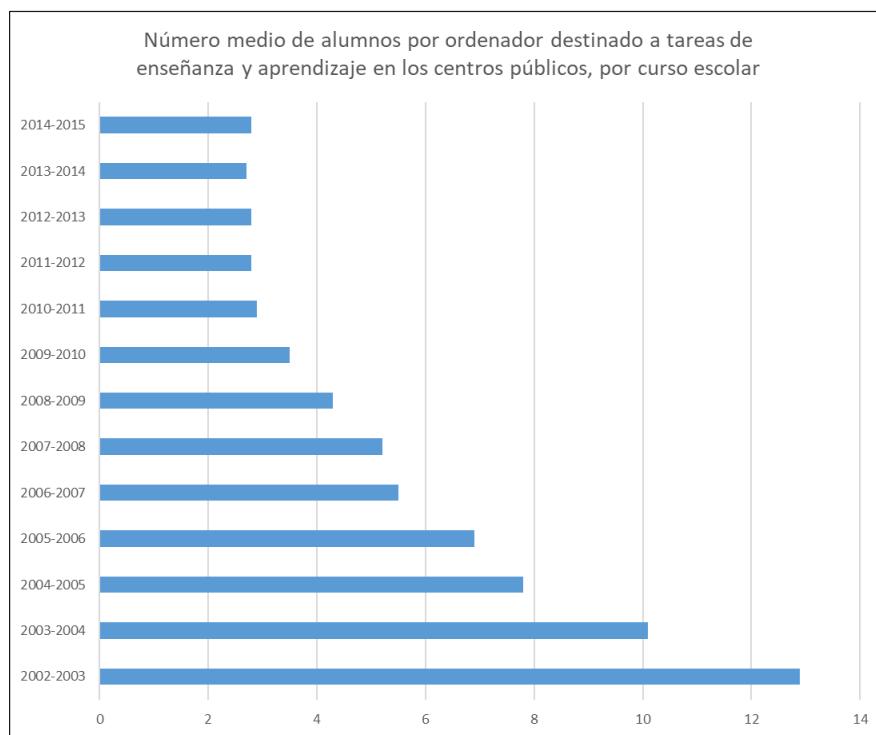


Figura 2. Indicadores del uso de las TIC en España y Europa. INTEF (2016)

Por el contrario, la inclusión en el ámbito educativo de los recursos digitales y las TIC no es por si sola suficiente. Es crucial que los recursos TIC se estructuren de forma coherente en la programación didáctica y de forma equitativa para evitar que los alumnos se dispersen y tenga un impacto contraproducente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El profesor tiene que tener en mente que las TIC son un medio y no un fin, con lo que debe saber

equilibrar y en su justa medida su inclusión de forma equitativa, pero para ello tiene que poder estructurarlas de forma coherente.

No obstante, si se usan de forma adecuada, las TIC conllevan muchas ventajas. La primera de ellas y la más importante es que implican al alumno y les demandan un mayor nivel de participación, con lo que las sesiones pasan a estar directamente centradas en el alumno y no en el profesor. La motivación del alumnado se ve mejorada en gran medida, llegando a tener un impacto en el proceso de aprendizaje, tal como constataron los investigadores Ruiz-Jaramillo y Vargas-Yáñez (2018). Por otro lado, la investigación de R. Ruiz (2014) concluyó que las TIC favorecen la autonomía y la autorregulación del alumnado, particularmente gracias a una metodología de trabajo colaborativo a través de wikis, logs, pizarra digital, WebQuest, entre otras herramientas.

Sin embargo, a pesar de que las TIC estén en auge y sean parte de la estrategia en materia de educación, su adopción por parte de la comunidad docente tiene varias contrapartidas fundamentales.

La primera contrapartida radica en que el proceso de preparación de las clases mediante TIC es mayor que en las clases magistrales, como constató el investigador Coca (2014). Esto es principalmente debido a que es necesario incluir en el proceso de planificación la búsqueda y selección de recursos TIC idóneos para las clases. Se requiere mucho tiempo para búsqueda de recursos, así como un alto grado de conocimiento y manejo de las TIC para incluirlas en la enseñanza de forma eficaz, duradera, y transparente al proceso de enseñanza-aprendizaje. El hecho de formarse en tales herramientas implica en muchos casos tener un conocimiento exhaustivo de la informática, donde no todos los docentes están igualmente motivados ni preparados. Según Llorente (2020), la comunidad docente tiene un perfil tecnológico muy heterogéneo lo que dificulta una predisposición uniforme a la adopción de las TIC. El manejo de las TIC es algo que evoluciona muy rápido y requiere de una predisposición continua a aprender que, si no es el caso, puede no ser del todo suficiente para estar a la altura del desafío de integrar las TIC en el aula a nivel didáctico. Por ejemplo, (Delgado, 2009) et al son conscientes del hecho que la implantación de las TIC ya no es tan crucial por los aspectos técnicos, sino por el grado de formación y preparación del docente. En su artículo proponen seis talleres con la finalidad que el docente sea consciente de los beneficios e inconvenientes de las TIC, de cómo optimizar el proceso de enseñanza aprendizaje en ambientes virtuales, revisión de sitios con contenido educativo, entre otras finalidades. Una de las conclusiones que sacan en su estudio es que las TIC de por sí no son la panacea en educación, si no van ligadas a un proceso y una metodología que fomente el aprendizaje.

La segunda contrapartida concierne la heterogeneidad de las herramientas TIC. Existen multitud de herramientas TIC con objetivos muy diversos. Dado que existen múltiples estilos de aprendizaje (Bandler y Grinder, 1976) y múltiples tipos de inteligencias (Gardner, 1995) no todos los recursos TIC son adecuados para todo el tipo de aprendientes ni para la enseñanza de todo tipo de contenidos, con lo que se requiere de una planificación muy minuciosa para una integración óptima en cada una de las unidades didácticas y no afecte de forma negativa el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La tercera contrapartida radica en el hecho que las TIC pueden ser percibidas más por la comunidad docente como una fuente de distracción, haciendo perder el foco de los contenidos y objetivos al manejo de la tecnología. Según (M. Ruiz, 2010), la dificultad de adopción de las TIC no radica en el estudiante, quien es un nativo digital, si no en el propio docente quien se puede sentir inseguro o inferior respecto a su manejo de tales herramientas. El docente pasa de ser el único poseedor de conocimiento a ser un guía y asesor, lo que puede crear reticencias y hacerle ver las TIC como enemigo. El principal problema que observan dichos autores es que el docente no percibe la implementación de las TIC una dificultad en sí si no en el uso didáctico de las mismas. Dichos autores se centran también en que la formación del profesor debe incidir no sólo en cómo realizar material TIC sino también en cómo encontrarlo, dada la inmensidad de recursos que se pueden encontrar en la web.

No obstante, la ardua realidad, como ha sido la pandemia debida al COVID-19, puede y debe acelerar la adopción de las TIC, así como hacer tomar conciencia a los propios docentes de sus beneficios. (Aznar, 2021) pone claramente de manifiesto que, a pesar de la falta de preparación del estado español para pasar a la modalidad online, se pueden dar soluciones mínimamente viables a tal problema, tal como demostró en un estudio de duración de 3 meses para realizar un seguimiento de los alumnos en plena pandemia. Dicho estudio consistía en la coordinación con las familias a través de herramientas digitales, siempre mediante una planificación semanal de la carga tanto lectiva como de deberes del alumno, así como un seguimiento particular a nivel de alumno mediante una serie de reuniones semanales para poder ahondar en las dificultades de cada uno de ellos.

3. Marco teórico

3.1. Marco legal

Las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje son consideradas clave dentro del marco legislativo, como se puede observar en la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE), de 29 de diciembre, donde se cita, en el preámbulo IV “Necesitamos propiciar las condiciones que permitan el oportuno cambio metodológico, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje. Los alumnos y alumnas actuales han cambiado radicalmente en relación con los de hace una generación. La globalización y el impacto de las nuevas tecnologías hacen que sea distinta su manera de aprender, de comunicarse, de concentrar su atención o de abordar una tarea.”

Por otro lado, la irrupción de la pandemia de la COVID-19, ha exigido la adaptación de la legislación que permitan flexibilizar el currículo o el pasar a un modelo semi-presencial. En este caso, la Orden EFP/365/2020, de 22 de abril, estableció una serie de medidas.

3.2. Bloqueos y dificultades en aprendizaje de las matemáticas

3.2.1. Tipos de bloqueos

Bloqueo de origen afectivo: El pensar implica cierto esfuerzo que los alumnos no están siempre dispuestos a realizar, ya sea por apatía o por falta de motivación simplemente, con lo que el docente tiene que buscar la forma de motivarlos a hacer tal esfuerzo. Otra posible causa del bloqueo afectivo es el miedo al fracaso, o al examen, o al de ser diferente, lo que conlleva a una predisposición negativa al pensamiento matemático.

Bloqueo cognoscitivo: Este tipo de bloqueo es el más sencillo de resolver ya que radica en la falta de herramientas, o en la percepción errónea del problema o en su forma de plantearlo. Un caso particular de bloqueo cognoscitivo es el efecto túnel, donde se le puede plantear al alumno un problema irresoluble y no vea que no tiene salida. Aquí las metodologías que mejoren el pensamiento crítico y la toma de decisiones en el alumno son clave. El docente debe buscar la forma de guiar al alumno y de aportarle las herramientas necesarias, así como las metodologías planteándole diferentes tipos de problemas para permitirles construir su pensamiento.

Bloqueos culturales: Todo ser humano está inherentemente condicionado por su entorno y su cultura, lo que puede condicionar también su forma de afrontar los problemas. Esto sucede por ejemplo cuando se le plantean problemas cuyas soluciones dan números redondos o exactos, con lo que al alumno se le está condicionando a dar resultados cerrados y no tiene la capacidad de ver más allá y de afrontar nuevas situaciones.

3.2.2. Dificultades propias de las matemáticas

Existe una serie de dificultades (Socas, 1997) como las propias de la naturaleza del álgebra (epistemológicas), las didácticas, las arraigadas en el propio alumno, así como las afectivas, las cuales englobarían las presentadas en la sección previa.

Paso de la aritmética al álgebra

El álgebra suele aparecer en la vida del alumno de secundaria por varias vías, mediante la generalización de la aritmética, mediante la simbolización, y mediante la modelización.

En particular, son de interés para el presente TFM las dificultades relacionadas con la simbolización, donde el alumno tiene problemas para la resolución de ecuaciones. Más en particular, el manejo de las variables, la generalización, el uso de los símbolos, el establecer ecuaciones e interpretar sus soluciones. Otro tipo de dificultad muy generalizadas entre los estudiantes de secundaria es la propia de la traducción del lenguaje verbal al algebraico, principalmente debido a que el estudiante hace una traducción literal.

Visualización

Otro de los problemas o dificultades que se tiene en las matemáticas en general es la visualización de la matemática. Esto consiste en interpretar, manipular y transformar los objetos matemáticos en sus diferentes representaciones numérico, gráfico, algebraico y verbal.

3.3. Teorías del aprendizaje

Se presentarán a continuación las dos teorías de aprendizaje que se consideran más relevantes para el desarrollo de este TFM.

3.3.1. Cognitivismo

El cognitivismo es una corriente psicológica que analiza el conocimiento, su adquisición y su desarrollo, haciendo un énfasis principalmente en aquellos procesos cognitivos que afectan al aprendizaje, así como la forma en que el cerebro almacena la información. Importantes autores que influenciaron dicha teoría fueron Piaget o Vygotsky.

Sus características son las siguientes:

- Se hace especial énfasis en el proceso mental o cognitivo del alumno
- Se enfatiza en los procesos que almacenan la información, la reciben y la organizan
- El conocimiento es resultado de un proceso de codificación interna y su estructuración por el alumno

- El docente ofrece recursos y estrategias para optimizar el tratamiento de la información para ser más eficaz en la adquisición del conocimiento
- Elementos clave: lectura, escritura, la participación activa y la memoria

3.3.2. Constructivismo

Esta teoría fue concebida como la opuesta al conductismo, y sus autores referentes fueron (Piaget, 1952), (Vygotsky, 1978), (Ausubel, 1963) entre otros. Su tesis principal es que la mente se construye por el propio alumno y no puede ser construida de forma pasiva.

Sus características principales son:

- El alumno construye su propio conocimiento de forma activa a partir de sus conocimientos previos
- El aprendizaje es concebido como un proceso activo de interpretación de ideas y resolución de problemas
- El alumno es el protagonista de su propio proceso de aprendizaje
- La interacción con el medio es considerada esencial para el proceso de enseñanza-aprendizaje

3.3.3. Fases de aprendizaje de Van Hiele en geometría

El holandés Van Hiele (Van Hiele, 1986) propuso un modelo de razonamiento en Geometría, cuyos niveles son jerárquicos y requieren que para pasar de un nivel al siguiente dominar completamente el anterior, de forma continua. Dichos niveles son los siguientes:

- Nivel 0: Visualización
- Nivel 1: Análisis
- Nivel 2: Deducción informal
- Nivel 3: Deducción formal
- Nivel 4: Rigor

En el nivel de visualización el aprendiente es capaz de aportar una serie de propiedades por objeto geométrico, más basada en una mera descripción “una puerta tiene cuatro lados”. Por otro lado, el nivel de deducción informal implica un primer nivel de razonamiento donde el aprendiente puede entender demostraciones formales, por ejemplo, pero no será hasta el nivel de deducción formal donde pueda llegar a razonar mediante formalismos, sin tener que memorizar. El nivel de rigor, prácticamente inalcanzable en la etapa educativa de secundaria, implica estudiar geometrías sin tener un modelo en particular.

Los niveles definidos previamente indican las fases del razonamiento del alumno, en cambio, es necesario conocer las fases del desarrollo de dicho pensamiento en cada uno de los niveles de Van Hiele, también definidas por él mismo:

- **Información:** El rol del docente es el de poner en contacto al alumno con el nuevo contexto a través de un lenguaje conocido para el alumno.
- **Orientación guiada:** Se produce un primer contacto con el nuevo lenguaje, donde el docente planifica dicha interacción mediante los ejercicios que lo permitan.
- **Explicitación:** El docente pone de manifiesto las relaciones del nuevo lenguaje (las explicita), donde tiene un rol de guía.
- **Orientación libre:** En esta fase, el protagonismo del profesor se transfiere al alumno, quien tiene que orientarse por sí mismo para trabajar las nuevas propiedades del lenguaje a este nivel.
- **Integración:** En esta última fase, el profesor guía al alumno, sobre todo en lo referente a la reflexión del alumno.

Dicho modelo de aprendizaje y fases de desarrollo evidencian que una propuesta innovadora debe adaptarse a diferentes roles del profesor en el acompañamiento del alumno, para diferentes etapas educativas.

3.3.4. Fases de razonamiento y en álgebra y niveles de algebrización

Hay una serie de diferencias en el razonamiento aritmético y el algebraico. Una de ellas, por ejemplo, que en aritmética se parte de lo conocido a lo desconocido, mientras que en el algebraico es al revés.

Los niveles de algebrización se definen en base a una serie de criterios como la generalización (o generación de variables), el reconocimiento de variables unitarias, la formalización y la utilización de variables en los cálculos (transformación).

(Ruiz et al., 2010) definen cuatro niveles de algebrización:

- Nivel 0: ausencia de algebrización
- Nivel 1: algebrización incipiente
- Nivel 2: algebrización intermedia
- Nivel 3: algebrización consolidada

En contraste, Godino et al (2015) proponen un análisis más preciso por etapa educativa, principalmente primaria y secundaria.

Respecto a primaria se proponen 4 niveles:

- Nivel 0: operación con números
- Nivel 1: operación con clases de números
- Nivel 2: uso de representaciones simbólicas
- Nivel 3: uso de símbolos de forma analítica

Respecto a secundaria se proponen 3 niveles:

- Nivel 4, donde se usan parámetros únicamente como registros, así como representación de familias de ecuaciones con parámetros y coeficientes.
- Nivel 5: Cálculos analíticos junto a parámetros y variables
- Nivel 6: Estudio de estructuras algebraicas en sí mismas

3.4. Metodologías del aprendizaje

3.4.1. Aprendizaje basado en problemas

La metodología de aprendizaje basada en problemas permite la mejora de la destreza de pensamiento del alumno, así como el ser capaz de seleccionar y utilizar estrategias de resolución de problemas.

Uno de los métodos de resolución de problemas por autonomía es el método de Pólya (Polya, G, 1945), que se basa en cuatro fases fundamentales:

1. **Paso 1 Entender el problema:** esta fase inicial implica leer bien el enunciado y determinar lo que se pide, así como los datos de los que se parten como conocidos.
2. **Paso 2 Configurar un plan:** esta fase requiere de un breve análisis para ver si se han encontrado problemas parecidos, o planteando el enunciado de una forma alternativa.
3. **Paso 3 Ejecutar el plan:** esta fase se basa en aplicar una estrategia y en volver a empezar si el resultado no es el esperado.
4. **Paso 4 Examinar la solución obtenida:** dicha fase implica verificar el resultado y comprobar si es posible que es el mismo mediante otra estrategia para asegurarse de la correcta resolución del problema

3.4.2. Proyecto estadístico

El proyecto estadístico es una herramienta para fomentar el sentido estadístico de los estudiantes, y que es eficaz en la motivación del alumno (Batanero, Díaz, Contreras y Arteaga, 2011) ya que suele tratar problemas del mundo real. Un proyecto estadístico se basa en cuatro fases fundamentales:

- Fase 1: Planteamiento del problema

- Fase 2: Extracción de datos
- Fase 3: Análisis de datos
- Fase 4: Elaboración del informe

El proyecto estadístico (Figura 3) tiene como características que se hace un uso de las herramientas tecnológicas, se incentiva el diálogo con argumentos estadísticos y que las ideas son más importantes que las herramientas o procedimientos.

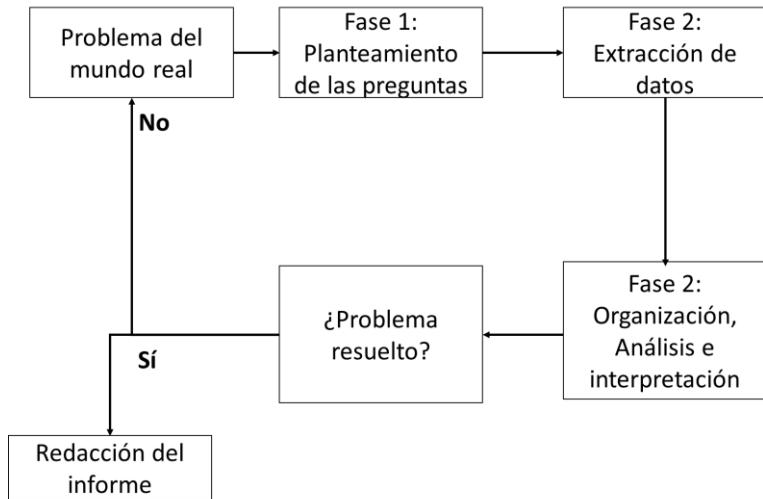


Figura 3. Esquema del proyecto estadístico con sus diversas fases

3.4.3. Aprendizaje por proyectos (ABP)

Esta metodología es una estrategia integral que pretende que los estudiantes planeen implementen y evalúen proyectos del mundo real, con sus dificultades y sus características intrínsecas (Blank, 1997; Dickinson, et al, 1998; Harwell, 1997). De forma general, dichos proyectos son complejos problemas abiertos que requieren de un cierto proceso de investigación y una previa fase de planificación bastante rigurosa. Una de las características de esta metodología es que los alumnos tienen una total capacidad de decisión y es por ello que suelen desarrollar mucho la autonomía, ya que dichas metodologías están centradas en el alumno.

Un proyecto debe estar claramente definido, con tres fases: inicio, desarrollo y final, así como estar basado en problemas del mundo real. El resultado esperado es un producto final, de forma que pueda ser compartido con el resto de la clase.

3.4.4. Modelo SAMR (Substitution-Augmentation-Modification-Redefinition)

El modelo SAMR (Puentedura, 2006) es un modelo de transformación de la educación a través de la tecnología. Este modelo es de especial relevancia ya que antes de aplicar las TIC se debe el docente plantear en qué profundidad una propuesta pedagógica basada en

TIC transforma lo existente en referencia a la educación. Dicho modelo se basa en cuatro niveles (S, A, M, R):

- S (Substitution o Sustitución): en dicho nivel, no existe un cambio funcional, se hace un uso de las TIC para sustituir. Un ejemplo sería el uso de una aplicación de Geogebra para representar una función.
- A (Amplification o Amplificación): en dicho nivel, ya existe una mejora funcional. A modo de ejemplo, sería utilizar el mismo applet de Geogebra para representar la función variando los valores de sus coeficientes para ver como afectar a dicha gráfica.
- M (Modification o Modificación): en este nivel ya hay un rediseño significativo de tareas aprovechando su potencial. Siguiendo el ejemplo anterior, podríamos plantear una actividad donde se les pide a los alumnos que exploren a modificar los coeficientes y ver que patrones aparecen.
- R (Redefinition o Redefinición): en este nivel lo que ocurre es que se pueden llevar a cabo tareas que no se podían hacer anteriormente. Un ejemplo interesante es pedirles a los alumnos que tomen obtengan los coeficientes de una parábola para ajustarlos a una fotografía dada.

Cabe destacar que los niveles S y A son una mejora del proceso enseñanza-aprendizaje, mientras que los niveles R y M ya están a un nivel superior, implicando una cierta transformación de dicho proceso.

3.4.5. Aprendizaje mediante métodos basados en herramientas manipulativas

Los métodos manipulativos tienen una serie de ventajas en los procesos de enseñanza-aprendizaje ya que implican que el alumno tenga un rol activo en el aprendizaje.

Método de las piezas algebraicas: Dicho método es otro método manipulativo que permite factorizar polinomios en una y dos variables, así como realizar todo tipo de manipulaciones algebraicas. Dicho método se basa en los métodos para completar cuadrados de los textos babilónicos. El ejemplo de la Figura 5 muestra cómo se pueden representar mediante dichas piezas un polinomio de orden 2 con coeficientes positivos y negativos.

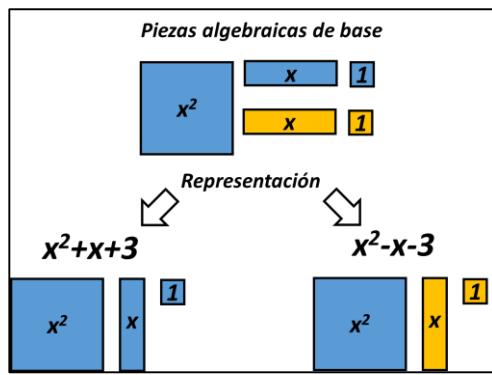


Figura 4. Metodología a base de piezas algebraicas para la representación de polinomios

Existen implementaciones de dicho método en Geogebra (Cayetano Rodriguez. J, 2020) para factorizar polinomios y operar con expresiones algebraicas en una variable, tal como se muestra en la Figura 5.

The screenshot shows a Geogebra applet for polynomial factorization. The text instructions are:

- Visualizamos $(2x+4)(x+3)$ mediante el área de un rectángulo de base $2x+4$ y altura $x+3$. ¿Conseguiremos que resulte x^2+x-2 ?
- Para obtener el resultado, bastará contar cuántas figuras hay de cada tipo.

The visual representation shows a large rectangle divided into smaller regions representing terms: x^2 , x^2 , x , x , x , x . Below the rectangle are several checkboxes and buttons:

- Coeficiente de "x" siempre 1
- Solo ejemplos con signos sencillos
-
-
-
-

Figura 5. Ejemplo de factorización de un polinomio de grado dos mediante Geogebra (Cayetano Rodriguez. J, 2020)

Método de las balanzas: El método de las balanzas es un método manipulativo, lo que implica que es un método donde el alumno tiene un rol activo en el aprendizaje.

(Kerr, 2017) implementó este método manipulativo para Geogebra, donde hay varios ejemplos. Al inicio se parte de una ecuación balanceada (1) y se tiene que ir haciendo operaciones equivalentes a ambos lados hasta conseguir dejar la x aislada a uno de los dos lados (5). Si se hace una operación incorrecta o no se balancea, la propia balanza indicará un signo de desigualdad. La Figura 6. Resolución de ecuación de primer grado mediante el método de las balanzas en Geogebra (Kerr, 2017) muestra un ejemplo de la resolución de una ecuación de primer grado mediante dicho método.

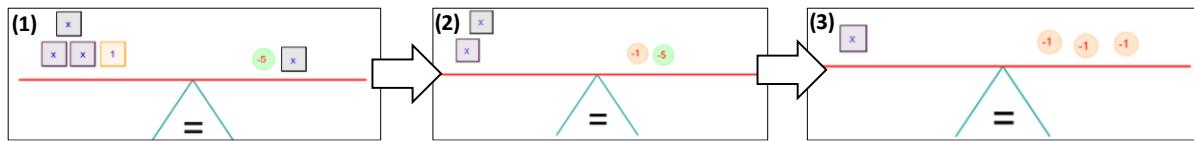


Figura 6. Resolución de ecuación de primer grado mediante el método de las balanzas en Geogebra (Kerr, 2017)

3.5. Recursos TIC para la enseñanza de las matemáticas

Existen multitud de recursos online en internet con un riesgo evidente de pérdida para el docente, con lo que el objetivo de esta sección es hacer énfasis en aquellos recursos TIC concretos que se pueden integrar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como ejemplos concretos de su aplicación ya en la propia propuesta didáctica del presente TFM.

En la presente tabla se hace una recopilación de herramientas TIC clasificadas por tipología (pizarra digital, contenido multimedia, de colaboración, inserción de contenido en PDF, geometría dinámica, creación de mapas mentales, gamificación, etc). Para la elaboración de dicha tabla se han tenido en cuenta herramientas que permitan un proceso de enseñanza online.

Tabla 1. Recursos online por tipología (* aquellos recursos que se han integrado en cuadernos Jupyter)

Tipología de recurso TIC	Nombre y enlace del recurso
Pizarra Digital	Mural.ly Ziteboard* Draw.Chat*
Gamificación	Kahoot* Quizizz* GoConqr*
Geometría dinámica	Geogebra*
Recursos y unidades didácticas integrables en HTML	Orientación Andújar Academy Totemguard Educación 2.0 Portal Educación Castilla y León Actiludis (contenido en formato PDF)

	EducaLab (INTEF) Proyecto Descartes*
Plataformas de contenido multimedia	Youtube* Twitch
Herramientas para colaborar	Google forms* Google Drive
Creación diagramas Gantt (ABP)	Librería Python Plotly*
Mapas mentales	Bubbl.us* Popplet
Rúbricas	Rubistar

Fuente: Elaboración propia.

3.5.1. La pizarra digital online para la enseñanza de las matemáticas

Las pizarras interactivas (PDI) son una herramienta digital que permite hacer anotaciones sobre una imagen proyectada. Existen dos tipos, aquellas que conectan un ordenador a un proyector para permitir escribir en dicha proyección, y aquellas herramientas online que permiten proyectar las anotaciones en otro ordenador. Esto tiene numerosas ventajas como la flexibilidad, interactuar con las imágenes. La principal ventaja es que permite vincular las explicaciones teóricas con todo tipo de contenido de internet, pero también el aprendizaje colaborativo y online.

Según Gallego (2009) las PDI tienen numerosas ventajas: como la facilidad de manipulación de imágenes y textos, tomar notas manuscritas en el ordenador, o crear lecciones con múltiples tipos de contenido (video, audio, etc), entre otras. También se destaca su versatilidad y el fomento de la interacción y el debate en el aula, así como un aumento de la motivación del estudiante al estar expuesto a nuevas formas de enseñanza más dinámicas.

Existen estudios recientes, como el de Cancelo (2017), que investigaron el impacto de dichas pizarras en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la materia de matemáticas, más concretamente en la motivación de los estudiantes. En dicho estudio se interrogó a los alumnos de primer ciclo de la ESO mediante un cuestionario, donde se concluyó que se sienten un poco más motivados en general, aunque no haya diferencias significativas. No se logró demostrar un impacto significativo en las dimensiones motivacionales del estudio, salvo en la falta de motivación, donde se concluyó que cuando no se usó la PDI el alumno tenía bastante menos motivación que cuando se usó.

En cuanto a aplicaciones de pizarra digital, se analizaron dos en el presente TFM. Por un lado, la aplicación Draw.Chat, una herramienta gratuita de dibujo que permite dar o seguir clases online mediante la pizarra, pero también tiene otras aplicaciones como vídeo, audio, o chat de texto. Por otro lado, la aplicación Ziteboard, otra herramienta de dibujo pensada para el trabajo colaborativo. Como características se puede dibujar, poner capturas de pantallas e imágenes, así como hacer zoom y todo tipo de actividades relacionadas con la visualización.

3.5.2. Plataformas de contenido multimedia en la enseñanza de las matemáticas

La plataforma de contenido multimedia que sin duda más destaca. La principal ventaja de tal herramienta es que motiva a los alumnos rompiendo con el ritmo monótono de la clase magistral de pizarra con un tipo de contenido mucho más visual, divertido e inspirador.

Ramírez (2016) y otros investigadores en investigaron las posibilidades de Youtube en materia de enseñanza, apuntando que en general Youtube mejora las habilidades de búsqueda, selección y evaluación de contenidos por el propio alumno entorno a un determinado tema. A un nivel más general, tanto Ramírez como (Berk, 2009; Burke & Snyder, 2008; Duffy, 2008; Snelson & Bowers, 2009; Bonk, 2008) coinciden que Youtube:

- Ilustra conceptos mediante fragmentos de películas o animaciones de gran calidad que pueden motivar al alumno o inspirarlo
- Dispone de alternativas muy potentes de divulgación (e.g. charlas TED)
- Muestra aplicaciones de las matemáticas en tiempo real y en el mundo real
- Permite crear una biblioteca digital de contenidos
- Fomentan el desarrollo de la autonomía del estudiante mediante la búsqueda y selección de contenidos.

Youtube puede ser un gran aliado del docente si sabe integrarlas con criterio, teniendo en cuenta que pueden potenciar y mucho la tarea docente.

Además, existen multitud de canales de muy alta calidad y contrastados por la comunidad educativa con muy buenos divulgadores científicos. Se pretende hacer una subdivisión, por un lado, los vídeos que tienen como objetivo el acercamiento de las matemáticas y la divulgación, como el canal de derivando de Sáenz de Cabezón o el de ArquímedesTube, ya que pueden ser usados a modo de introducción en cada unidad didáctica y para motivar al alumnado. En cambio, existen muchos otros canales que tienen otras finalidades, mucho más concretas, como el resolver problemas, como el canal SusiProfe, y que pueden ser muy útiles para guiar a los alumnos en el transcurso de ciertas unidades didácticas con breves tutoriales para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Existe otro tipo de recursos multimedia que pueden tener un contenido más extenso y tiene

por finalidad la explicación de aspectos teóricos, como las funciones o los límites. Un ejemplo de este tipo de contenidos es por ejemplo el canal El traductor de ingeniería, más orientado a un nivel más avanzado en matemáticas.

En el anexo I se propone una lista no exhaustiva de canales de divulgación de las matemáticas, resolución de ejercicios y problemas, así como de aspectos más teóricos. Más adelante se propondrá toda una unidad didáctica que incluirá contenidos previamente seleccionados de varios de estos canales en el contexto de secundaria.

3.5.3. Gamificación en la enseñanza de las matemáticas

La gamificación implica socialización y aprendizaje, tal como indica Gallardo (2018), así como fortalece la psicomotricidad según Molina (2016). L.Vazquez (2020) proponen la gamificación como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas y la química, ya que motiva al alumnado, provee de placer y gratificación, activa la conducta humana, así como desarrollar habilidades y competencias. En esta proposición en concreto se proponen varios tipos de juegos para los contenidos de fracciones, concepto de números primos y ecuaciones simples, multiplicación, rectas y ángulos. Dichos juegos son el tabú, el tangram, los puzzles, entre otros. La conclusión es bastante positiva, sobre todo para reducir el nivel de aburrimiento

3.5.4. Geometría dinámica y manipulativa en la enseñanza de las matemáticas

Geogebra es un software que integra aritmética, la geometría, el álgebra y el cálculo, destacando en el área de geometría dinámica y manipulativa en particular.

Uno de los puntos fuertes de este software es que es gratuito, y que cuenta con una comunidad docente que ha desarrollado una infinidad de recursos que permiten al docente integrarlos en las clases según sus necesidades.

Diversos artículos demuestran que Geogebra puede ser un gran acelerador del aprendizaje en matemáticas en las diversas etapas educativas, en especial, primaria, secundaria.

El uso de Geogebra es fundamental en las etapas de secundaria para hacer evolucionar al alumno en matemáticas y más particular en geometría, tal como se demuestra en la tesis doctoral llevada a cabo por Garcia (2011), donde se hace un estudio del desarrollo de competencias del alumnado durante el uso de Geogebra para un curso de 3º de la ESO. En dicha tesis, el objeto de estudio fue la aplicación de dicho software en el proceso de enseñanza-aprendizaje. El uso de Geogebra contribuyó en todos los aspectos ligados a la matemática (modelización, planteamiento y resolución de problemas, representación) salvo en la comunicación de resultados. J. Garcia (2017) coincide en que Geogebra es una

herramienta excelente para la resolución de problemas, sobre todo en lo que refiere a las competencias de manipulación de objetos matemáticos y a la visualización.

Otros estudios como el de Gómez (2015) corroboran el potencial de dicha herramienta para el desarrollo de competencias ligadas a la investigación, en particular los procesos de modelado así su interpretación, en el grado décimo en Colombia, que podríamos equiparar a un nivel de bachillerato.

Es de particular interés que dicho software sea utilizado en metodologías constructivistas, como es el caso del estudio llevado a cabo por Sarmiento (2017) sobre la aplicación de Geogebra en el bloque de cálculo (funciones, integrales, derivadas e integrales). La metodología consistía en clases dirigidas que una vez el alumno ha consolidado la práctica educativa mediante Geogebra, va a ir deduciendo los resultados gracias a una práctica en dicho software. En dicho estudio se da como ejemplo un problema de optimización sobre la ley de la demanda y la oferta, concluyendo que los alumnos alcanzan los niveles requeridos.

Se considera que Geogebra debe formar parte integral de la propuesta didáctica, ya que tiene características que otro tipo de herramientas TIC no tiene, como la capacidad de visualizar gráficas y funciones, así como los elementos geométricos y las relaciones entre ellos.

3.5.5. Lenguajes de programación en la enseñanza de las matemáticas

La programación es un excelente acelerador del aprendizaje de las matemáticas, en particular acelera el aprendizaje y el razonamiento lógico-matemático, pensamiento estructurado y la creatividad. A un nivel más general, permite una capacidad de abstracción para resolver cualquier tipo de problema García-Peñalvo (2016). Según García Monsálvez, (2017), aunque no hay una relación concluyente en cuanto a la transferencia del pensamiento computacional a otras áreas, dicho tipo de pensamiento tiene ventajas evidentes en ciencias e ingeniería en general.

Según los autores Briz Redon (2017), los lenguajes de programación permiten centrarse en el diseño de algoritmos y permite un nivel de experimentación superior al de la educación magistral. Dichos autores hicieron un estudio del lenguaje de programación orientado a matemáticas R para observar el impacto en el aprendizaje en la etapa de educación secundaria en el tema de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros. En la primera etapa se hizo uso del lenguaje R como calculadora, para posteriormente pasar a crear variables y realizar operaciones aritméticas, para pasar a operaciones más complejas con listas, bucles, entre otros. De las dificultades que se destacan el uso del lenguaje R es sobre todo su sintaxis que es estricta, así como la forma de razonar que en ocasiones es

contra intuitiva, lo que derivó en algunas dificultades iniciales al aprender la programación que se hubieran resuelto si hubieran extendido la metodología más en el tiempo.

Por otro lado, hay metodologías basadas en el lenguaje de programación Python según García Monsálvez (2017) para la misma etapa educativa. Los autores proponen una propuesta multidisciplinar para usar dicho lenguaje en todos los niveles de secundaria. Precisamente la premisa de los autores es que la alta legibilidad del lenguaje Python permite reducir la curva de aprendizaje de los alumnos, ya que una parte sustancial del aprendizaje conlleva aprender la sintaxis.

3.5.6. Lenguaje de programación Python

Dicho lenguaje fue creado por Guido van Rossum en 1989, y su única premisa era el facilitar el aprendizaje de personas ajena a las ciencias informáticas.

El lenguaje Python cuenta con muchas ventajas, ya que es sencillo de aprender y es totalmente gratuito. Cuenta con más de 137.000 bibliotecas diferentes, con un gran soporte de la comunidad Opensource y se puede ejecutar en cualquier tipo de máquina. Sus principales usos son la inteligencia artificial, la visualización de datos, big data, testing, y desarrollo web, pero cada vez es más frecuente para la iniciación a la programación debido a su sencillez de sintaxis y alta legibilidad. Otras características interesantes de Python en cuanto a método de enseñanza-aprendizaje, es su versatilidad, su polivalencia, disponibilidad de recursos educativos abiertos, entorno friendly de desarrollo interactivo.

Esto se puede observar en la comunidad, donde Python lleva estableciéndose ya varios años como lenguaje más utilizado entre los usuarios. Por ejemplo, tal como se muestra en la Figura 7, las búsquedas de tutoriales en Python aumentaron en torno a un 30 % desde febrero del 2019 hasta febrero del 2020 (Statista, 2020) y parece ser que esta tendencia no hará más que acelerarse en los próximos años. A este comportamiento se debe sumar el hecho que Python es el lenguaje que más se usa en inteligencia artificial y el machine learning, donde el lenguaje R es su competidor más directo, pero está mucho más abajo en dicha clasificación (3.7%), principalmente debido al hecho que no tiene el soporte a nivel de comunidad ni de librerías tan extenso como Python.

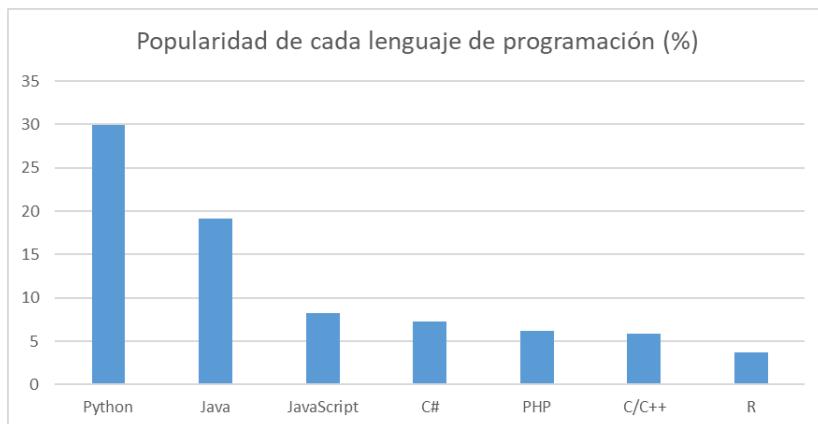


Figura 7. Evolución de la adopción de Python como lenguaje de programación. Statista (2020)

La mayor ventaja que tiene Python y es por lo que se ha elegido dicho lenguaje en la presente propuesta didáctica, es que es la base de los cuadernos Jupyter. (García Monsálvez, 2017) proponen también todo un conjunto de herramientas educativas basadas en Python como snakify, codestersm o trinket, pero en el presente TFM nos centraremos exclusivamente en los cuadernos Jupyter.

Los cuadernos Jupyter son una aplicación interactiva que se ejecuta en un explorador web y que integra múltiples tipos de contenido (visualización, ecuaciones, código Python, texto, entre otros).

El aspecto realmente interesante desde el punto de vista educativo es que los cuadernos Jupyter son como libros digitales e interactivos. El contenido de este tipo de cuadernos está dividido en celdas independientes, donde cada celda puede integrar contenido de naturaleza diferente. Un claro ejemplo es al inicio insertar contenido multimedia para contextualizar una unidad didáctica para luego pasar a otra celda donde se explique el contenido teórico de forma breve permitiendo insertar ecuaciones para posteriormente pasar a otra celda con contenido de geometría dinámica mediante un recurso Geogebra, para finalizar con problemas como si fuera un libro digital.

Existe algún trabajo de investigación relacionado con el uso de los cuadernos Jupyter en niveles educativos de secundaria, como el de (Franco, 2019) aplicado a una unidad didáctica sobre fuerzas gravitatorias en la asignatura de física y química de 4º de la ESO. En el cuaderno Jupyter propuesto se incluyen varias secciones:

- una primera parte que contiene la parte teórica explicando la fuerza gravitatoria, mediante notación matemática en lenguaje matemático,
- una segunda parte que contiene un ejercicio sobre cálculos de gravedad,
- una tercera parte que incluye un vídeo sobre un astronauta haciendo un alunizaje

- una última parte que termina con un ejercicio clásico resuelto paso por paso, pero con una versión mucho más interactiva que incluye código con variables Python para simular diferentes condiciones gravitatorias.

Son dos las ventajas que destacan los autores respecto a los cuadernos Jupyter: (i) el hecho de incluir contenido multimedia dentro del propio cuaderno Jupyter no rompe con el ritmo de la clase ya que todos los recursos están en la misma herramienta, (ii) los ejercicios interactivos con código Python permiten simular diferentes situaciones que permiten adquirir un conocimiento intuitivo, que no es posible con un simple lápiz y papel.

4. Implementación de la propuesta de innovación educativa

4.1. Principios de la propuesta educativa

La presente propuesta educativa plantea poner al alumno como centro de la enseñanza, adaptándose a su realidad y su forma de percibir las matemáticas y sus intereses.

El principio pedagógico es el aprendizaje basado en problemas y por descubrimiento, siempre centrado en el alumno y contextualizando los conceptos. Dicha propuesta pretende que el alumno aprenda diferentes formas de razonar y de pensar, mediante la manipulación, descubrimiento y la experimentación.

Otro principio es el planteamiento innovador de problemas, donde se intenta que los problemas que se planteen estén adaptados a la realidad actual del alumno y le motiven.

A nivel técnico se pretende que tal metodología tenga una implementación online y presencial, para evitar que futuras pandemias rompan el ritmo de aprendizaje del alumno.

El principal objetivo de la presente propuesta es proponer un framework al docente de estructuración de contenidos. Esto le servirá como base para estructurar las clases de forma dinámica, donde es él el que va a ir seleccionando una serie de recursos que encuentre por internet en diferentes formatos (PDF, contenido multimedia, HTML, Geogebra, etc). La presente propuesta le permite haciendo mínimos cambios en Python integrar cada uno de esos recursos, reduciendo así la necesidad de tener grandes conocimientos a nivel de programación. Se pretende que el docente se centre en estructurar sus lecciones y programaciones didácticas y no en comprender los aspectos ligados a la programación y a la propia herramienta más de lo estrictamente necesario.

4.2. Cuadernos dinámicos Jupyter para estructurar los contenidos en unidades didácticas

El elemento clave del presente TFM es el uso de cuadernos Jupyter para estructurar diferentes tipos de recursos TIC para impartir matemáticas. Los cuadernos Jupyter son cuadernos dinámicos que se pueden visualizar desde un móvil, una tablet o un explorador web y permiten la interactividad con el alumno. Dichos cuadernos tienen como principales características que son interactivos, con lo que su contenido puede ser adaptado mediante pocos cambios del lenguaje de programación Python.

A modo de breve introducción al lenguaje de programación Python, es un lenguaje que permite la ejecución de instrucciones secuenciales. La Figura 8. muestra la impresión por pantalla de mensaje típico hola mundo.

```
print("Hola Mundo");
```

Figura 8. Impresión por pantalla del mensaje “Hola mundo” mediante el lenguaje Python

Permiten la inserción de multitud de recursos en celdas independientes, permitiendo planificar el contenido de una unidad didáctica integrando multitud de diferentes recursos.

También permite la inclusión de texto, tanto en lenguaje matemático Latex como texto ordinario, lo que permite abordar la teoría de forma limitada para enseñar las matemáticas con la rigurosidad y los estándares que se requiere.

La propuesta concreta de este TFM es usar los cuadernos Jupyter como entorno para estructurar un conjunto de recursos TIC de naturaleza heterogénea para adaptarlos a cada etapa educativa del área de matemáticas. Tal como se verá en el capítulo correspondiente, se expondrá con ejemplos concretos los cuadernos Jupyter puede estructurar perfectamente las unidades didácticas previamente preparadas por el docente como si fuera un libro de texto. La Figura 9 muestra de forma esquemática nuestra propuesta.

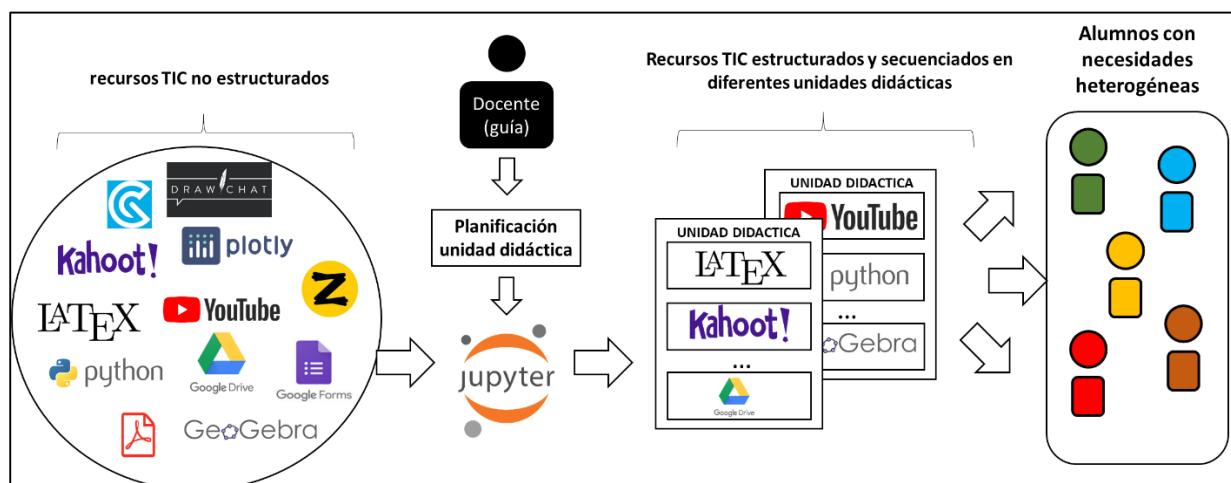


Figura 9. Propuesta de innovación didáctica para estructurar recursos TIC en Cuadernos Jupyter

De hecho, los cuadernos Jupyter están pensados para incluir diferentes tipos de contenido, no sólo contenido programado en el lenguaje de programación Python. La propuesta de este TFM se basa en la selección y en la integración de ciertos tipos de recursos TIC en dichos cuadernos Jupyter.

4.3. Ventajas de la propuesta de intervención innovadora

- Estructura y secuencia los recursos TIC de naturaleza heterogénea en unidades didácticas concretas
- Permite una implementación online 100 % o presencial

- Introduce a los alumnos a los conceptos de programación y su enlace con las matemáticas (transversalidad de competencias)
- Reduce el tiempo empleado por parte de los profesores para encontrar dichos recursos Geogebra mediante la automatización
- Permite a los profesores crear una biblioteca de recursos TIC estructurada por unidad didáctica
- Reduce el tiempo necesario por parte de los profesores para plantear nuevos problemas mediante la búsqueda automatizada y aleatorización de contenido mediante el lenguaje Python
- Reduce el tiempo necesario en la clase para pasar de un tipo de recurso TIC a otro (ejemplo: abrir el explorador para mostrar un video de Youtube)

4.4. Implementación de la propuesta de intervención innovadora

4.4.1. Breve introducción a los cuadernos Jupyter

El presente TFM no pretende realizar un tutorial extenso sobre la utilización de los cuadernos Jupyter en sí, ya que se entiende que no es el objetivo, con lo que se deja al lector su total comprensión mediante el enlace siguiente (Kuffo, 2020).

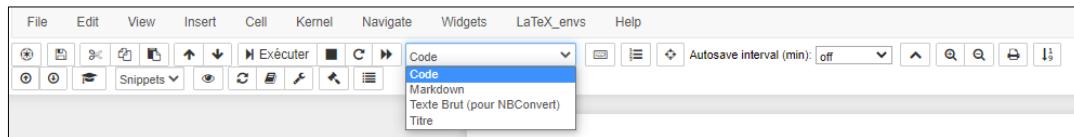


Figura 10. Vista preliminar del encabezado de un cuaderno Jupyter

Un cuaderno Jupyter, también denominado notebook, puede ser considerado como un código que ha sido dividido en ‘trozos’ o células (**cells**) que se ejecutan una tras otra, de forma que se pueden seleccionar las que se ejecutan, ya que lo hacen de forma independiente. Cada celda se compone de una entrada donde se introduce el código a ejecutar, y la salida que contiene el resultado de dicha ocasión (la Figura 11 muestra un ejemplo de una suma) .

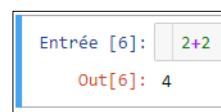


Figura 11. Ejemplo de una celda code en un cuaderno Jupyter

Una celda de un cuaderno Jupyter tiene dos modos de ejecución:

- **Modo de ejecución de texto (markdown):** En dicho método el texto insertado es interpretado como texto plano no interpretable.

- **Modo ejecución de código Python (code):** En dicho método el texto insertado es interpretado como código Python, tal como se observa en el ejemplo previamente mostrado de la suma (Figura 11) .

Por defecto, una celda está declarada como Code, lo que implica que se inserta código Python. Como se verá en secciones posteriores, la principal ventaja de los cuadernos Jupyter es que se puede insertar todo tipo de contenido con el que interactuar, ya sea textual u otro tipo de contenido incrustable en HTML.

4.4.2. Instalación de los cuadernos Jupyter

La instalación de los cuadernos Jupyter se hace mediante Anaconda (Anaconda), que integra una serie de herramientas tal como se muestra en la Figura 12. Ejemplos de estas herramientas son por ejemplo el propio Jupyter notebook que nos permitirá ejecutar los cuadernos Jupyter de los que se hablará en el presente TFM. También existen otras herramientas como Spyder que permiten escribir código Python para ejecutarlo directamente sin usar cuadernos Jupyter.

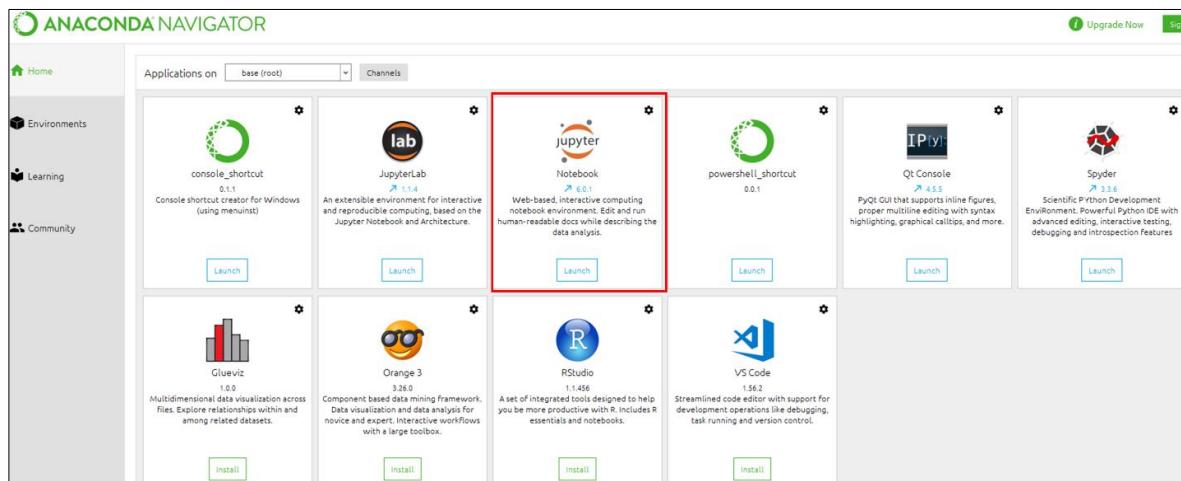


Figura 12. Aplicación Jupyter para la ejecución de cuadernos dinámicos

Los cuadernos Jupyter también se pueden instalar en un móvil Android mediante la aplicación Pydroid 3 (Pydroid 3). Una vez descargada, se tiene que clicar en la pestaña izquierda PIP y escribir 'jupyter' para descargar los cuadernos Jupyter. Una vez descargado hay que clicar en la pestaña izquierda 'Terminal' y escribir 'jupyter notebook' para abrir la aplicación. El siguiente enlace (Instalación Pydroid) contiene una guía completa para su instalación. De forma similar, también se pueden instalar en un Ipad, mediante la aplicación de pago Juno (Juno, 2021).

4.4.3. Instalación de extensiones adicionales (plugins)

En el presente TFM, se presupone que se instala el programa Anaconda y la funcionalidad (NBExtensions, 2021) para poder tener todas las características que se van a explicar para poder implementar dicha propuesta de innovación pedagógica.

Son tres las funcionalidades que se van a integrar en la implementación de una sesión didáctica y se muestran en la Figura 13. Dichas funcionalidades o extensiones de Anaconda o plugins se denominan: (1) hide input all, (2) table of contents, (3) Python markdown. A continuación, se detalla la funcionalidad específica de cada una de estas extensiones.

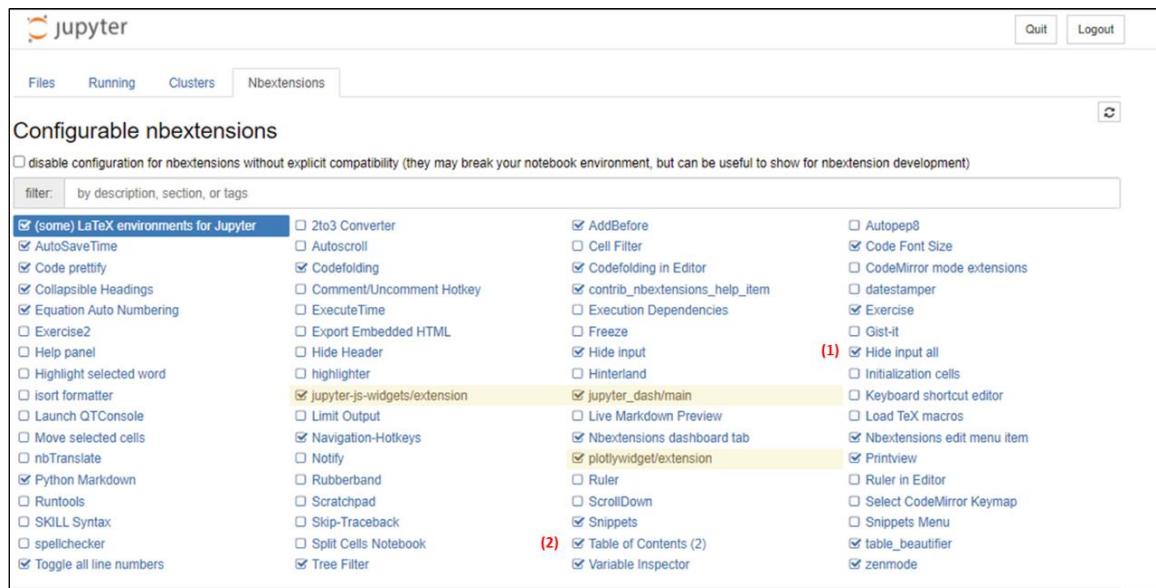


Figura 13. Funcionalidades o plugins “Nbextensions” que han sido instalados para este TFM

(1) Ocultación del código Python irrelevante al alumno (plugin hide input all)

En el presente TFM se han tenido que definir bastantes métodos en lenguaje Python y declaración de variables que son irrelevantes al alumno. Sólo el docente y no en gran medida, puede intentar comprender tal código. Mediante la funcionalidad que permite esconder el código Python de cada una de las celdas, ya que lo que nos interesa es mostrar solo la salida de las celdas, que es lo que deben ver los alumnos. Esto se puede realizar a través del ojo que se observa en la `code`. Es muy importante que las celdas que se vayan a ocultar estén marcadas como **Markdown** ya que el plugin va a ocultar sólo las que estén marcadas como **code**.

(2) Inserción de tabla de contenido para estructurar unidades didácticas (plugin table of contents)

Otra característica de especial relevancia a nivel didáctico es la inserción de una tabla de contenido. Esto permite al alumno tener una visión del contenido de forma jerárquica y más clara y le permite saltar a ciertas secciones con un solo clic sin tener que haciendo scroll. Esta parte se podrá ver en la unidad didáctica del anexo 2.

A modo de ejemplo, si se estructura una unidad didáctica en un cuaderno Jupyter, que a su vez está estructurado en celdas, cada una de las celdas ha de ser marcada como Markdown. El primer nivel debe ir precedido de un # con un espacio entre la almohadilla y el texto de esa sección, tal como se muestra en la Figura 14 y así sucesivamente incrementando el número de almohadillas para bajar nivel.



Figura 14. Vista preliminar de una tabla de contenido para cuatro niveles

Esta metodología de identaciones en niveles permite que un contenido estructurado en Jupyter se pueda editar como si fuera un documento de Word, pero donde los contenidos que hay en cada una de esas secciones puedan ser de todo tipo, tal como se mostrará en secciones posteriores.

(3) Permitir que las variables Python se muestren mediante notación Latex (Python markdown)

Esta funcionalidad, tal como se verá en la sección 4.7.2, es necesaria para permitir declarar variables en Python y que se muestren como objetos matemáticos Latex. El objetivo es utilizar los métodos Python que permiten generar variables aleatorias como `randint` y luego imprimirlas en pantalla en Latex.

Para activar este tipo de funcionalidad hay que habilitar la extensión “Python Markdown” de la librería Nbextensions, tal como se muestra en la Figura 15.

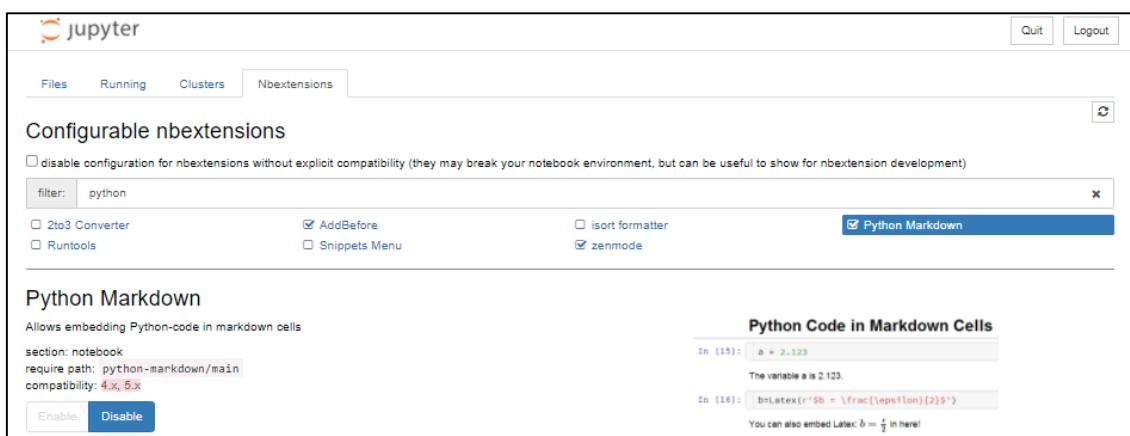


Figura 15. Activación del plugin Python Markup en un cuaderno Jupyter para poder insertar variables Python en texto markdown

4.5. Selección de tipos de recursos TIC integrables en un cuaderno Jupyter

Toda esta sección está dedicada a describir cómo se inserta otro tipo de contenidos y de recursos TIC en cada una de las secciones de un cuaderno Jupyter. Una de las contribuciones de este TFM es hacer una lista de aquellos recursos TIC que se pueden insertar fácilmente por el docente en un cuaderno Jupyter. Dichos recursos TIC se pueden incrustar como código HTML y permiten enriquecer y personalizar nuestra propuesta educativa de forma sustancial.

Las herramientas TIC que se proponen para su integración en un cuaderno Jupyter están descritas en la siguiente tabla.

Tabla 2. *Herramientas TIC integrables en un cuaderno Jupyter y su justificación didáctica*

Herramientas	Justificación didáctica
Youtube	Visualización contenido multimedia
	Motivación del alumnado
	Introducción lúdica de las unidades
Gamificación (GoConqr, Kahoot, Quizziz)	Motivación del alumnado
	Diversión
	Interacción
Pizarra digital (Draw.chat, Ziteboard)	Interactividad
	Colaboración
	Explicaciones
	Tomar notas
Geometría dinámica (Geogebra)	Visualización de objetos matemáticos
	Manipulación de objetos geométricos
	Representación gráfica funciones
Programación (Python)	Pensamiento algorítmico
Framework Dash	Para la visualización de conceptos estadísticos, probabilidad y funciones gráficas
Mapas mentales (bubblu.us)	Organización conocimiento e ideas

Formularios	Recogida feedback
	Evaluación alumnos
Rúbricas	Evaluación alumnos
Inserción de contenido en PDF	Combinar con otros tipos de contenidos u libros de texto

Fuente: Elaboración propia.

Se han elegido dichas herramientas por varias razones fundamentales: son gratuitas, son de fácil manejo, y cubren muy diferentes y complementarias funcionalidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a nuestro modo de entender, una gran parte del espectro de posibilidades docentes.

Para facilitar al docente el modo de la celda (markdown o code) se proveerá en paréntesis.

4.5.1. Inserción de contenido HTML (code)

El bloque que permite incrustar un recurso TIC mediante código HTML en un cuaderno Jupyter se basa en dos líneas en Python y en la librería IFrame:

```
from IPython.display import IFrame
IFrame(src='URL_recurso_TIC', width='1000px', height='600px')
```

Donde se especifica la URL del recurso TIC, así como el ancho y el alto que debe ocupar en la pantalla.

4.5.2. Inserción de contenido en lenguaje de programación Python (code)

Definicion de funciones matemáticas: El tipo de contenido más utilizado en los cuadernos Jupyter, es código Python, ya que es la base de este tipo de cuadernos. La Figura 16 muestra un ejemplo de código Python para calcular el factorial de un número de forma recursiva. También se pueden declarar librerías y hacer cualquier tipo de manipulación de variables que se requiera de forma análoga.

```
Entrée [2]: def fact_recursividad(n):
    if n > 1:
        return n * fact_recursividad(n - 1)
    else:
        return 1
fact_recursividad(12)

Out[2]: 479001600
```

Figura 16. Inclusión de una función en código Python en un cuaderno Jupyter

Operar con expresiones algebraicas: El lenguaje Python también permite el operar con expresiones algebraicas, como, por ejemplo se muestra en la Figura 17, mediante la función Python expand.

<pre>polynomial = (2*x + 3)**4 polynomial.expand()</pre>
$16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Figura 17. Operación con operaciones algebraicas en lenguaje Python

Evaluación de resultados enviados por el alumno: El lenguaje Python tiene dos funciones especialmente útiles en cuanto a la interactividad con el alumno mediante la instrucción **input**, que acepta un valor del alumno mediante teclado. También se ha implementado una solución que comprueba si la solución introducida por el alumno es correcta. La Figura 18 muestra el proceso de verificación de los coeficientes de una ecuación de segundo grado y su correspondiente evaluación, donde a la izquierda se observa el código Python y a la derecha tal como lo verá el alumno.

The figure shows two side-by-side screenshots of a Jupyter Notebook cell. On the left, the student's input is shown, and on the right, the teacher's evaluation is displayed. Both screenshots show the same process for solving the equation $-x^2 + 7x - 10 = 0$.

Student Input (Left):

```

-x^2 + 7x - 10 = 0

%% latex
EJERCICIO: Calcula los coeficientes $a,b,c$ de la siguiente ecuación:
EJERCICIO: Calcula los coeficientes a, b, c de la siguiente ecuación:

%% latex
¿Cuanto vale $a$?
¿Cuanto vale a?

a_user=input()
-1

print(comprueba_solución(int(a),int(a_user)))
Enhorabuena! La solución es correcta

%% latex
¿Cuanto vale $b$?
¿Cuanto vale b?

b_user=input()
7

print(comprueba_solución(int(b),int(b_user)))
Enhorabuena! La solución es correcta

%% latex
¿Cuanto vale $c$?
¿Cuanto vale c?

c_user=input()
-10

```

Evaluation (Right):

```

-x^2 + 7x - 10 = 0

EJERCICIO: Calcula los coeficientes a, b, c de la siguiente ecuación:
¿Cuanto vale a?
-1
Enhorabuena! La solución es correcta
¿Cuanto vale b?
7
Enhorabuena! La solución es correcta
¿Cuanto vale c?
-10
Enhorabuena! La solución es correcta

```

Figura 18. Evaluación mediante cuaderno Jupyter de los valores introducidos por un alumno

4.5.3. Inserción de texto con notación matemática en lenguaje Latex (markdown)

Otra característica muy interesante de los cuadernos Jupyter es que podemos incluir en las celdas contenido matemático mediante el lenguaje Latex (Latex, 2021). Las ventajas del lenguaje Latex es que permite una notación matemática idónea para la explicación del contenido matemático con la rigurosidad que se requiere.

La siguiente página web (Manual de Latex, 2020) recoge como declarar los principales operadores y símbolos matemáticos de interés.

Hay que tener en cuenta que se debe declarar dicha celda como Markdown, ya que no es código Python lo que se está integrando en dicha celda , sino texto plano.

1 Resolución de una ecuación lineal

Considera la siguiente ecuación lineal:

$$2y + 3 = 3x - 1 \quad (1)$$

Esta ecuación incluye dos variables diferentes x e y . Estas variables dependen una de la otra; el valor de x se determina en parte por el valor de y y viceversa, con lo que no podemos resolver la ecuación y encontrar valores absolutos para x y para y . Sin embargo, podemos resolver la ecuación para una de las dos variables y obtener un resultado que describa una relación relativa entre las dos variables.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación para y . Primero nos deshacemos de la constante de la derecha añadiendo 1 a los dos lados:

$$2y + 4 = 3x \quad (2)$$

Seguidamente, usaremos la misma técnica para mover la constante de la izquierda a la derecha y aislar el término y restándole 4 a ambos lados:

$$2y = 3x - 4 \quad (3)$$

Ahora podemos ocuparnos del coeficiente de y dividiendo ambos lados por 2:

$$y = \frac{3x - 4}{2} \quad (4)$$

Hemos resuelto la ecuación. Hemos aislado y y la hemos definido como $\frac{3x-4}{2}$.

Mientras que no podemos expresar y como un valor particular, sí podemos calcularlo para cada valor de x . Por ejemplo, si x vale 6, entonces y puede ser calculado como:

$$y = \frac{3 \cdot 6 - 4}{2} \quad (5)$$

Esto da el resultado siguiente $\frac{14}{2}$ que puede ser simplificado a 7.

Figura 19. Inclusión de texto en formato Latex para explicar la resolución de una ecuación lineal

4.5.4. Inserción de contenido en PDF (code)

Los cuadernos Jupyter también permiten insertar contenido en formato PDF. Existen multitud de sitios web, como Actiludis, que albergan contenido de usuarios (El Blog Abnnero de Sandra) en este formato. Esto es también aplicable a contenido existente en libros de texto que se el docente considere oportuno integrar mediante un escaneado previo.

Para implementar la integración de dicho contenido, es necesario escribir ciertas líneas de código, que se pueden encontrar disponibles dentro del cuaderno Jupyter en el enlace GitHub que se encuentra en la sección 4.9.

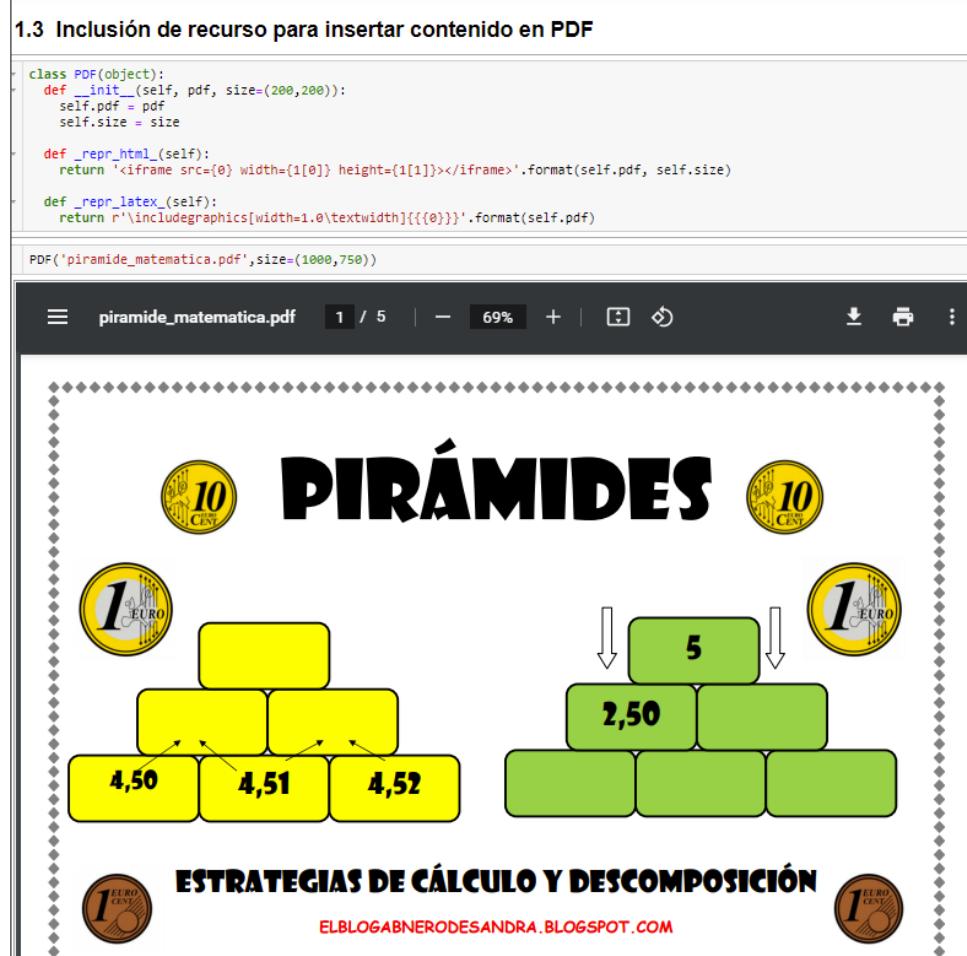


Figura 20. Inserción de contenido en PDF extraído de la web Actiludis

4.5.5. Inserción de diagramas de Gantt (code)

La librería de Python (Plotly,2021) permite la representación de diagramas de Gantt para la gestión de proyectos. Se pueden definir una serie de tareas representarlas en colores y agruparlas por tipo. En este caso mostramos un ejemplo con los estados (Completado, No empezado y no completado), pero se puede definir cualquier tipo. La Figura 21 representa un ejemplo de 4 tareas. También se puede usar dicha representación para secuenciar las sesiones de una unidad didáctica, tal como se verá en el anexo II.

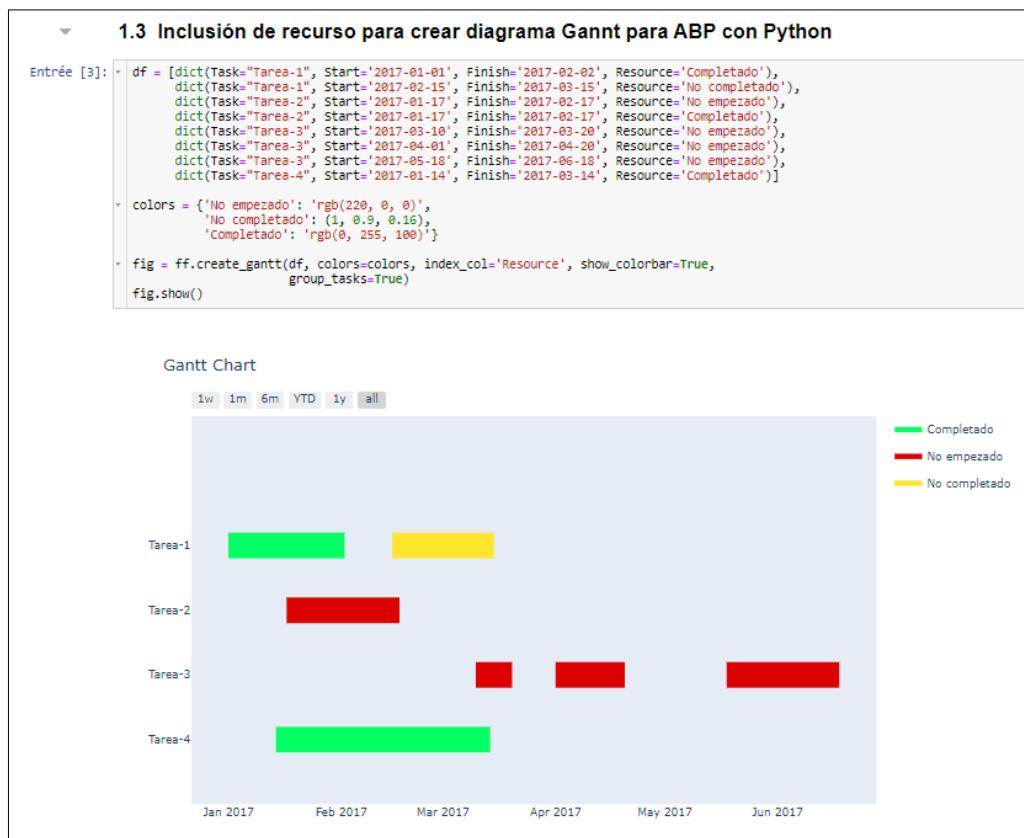


Figura 21. Inserción de un diagrama de Gantt para aprendizaje basado en proyectos

4.5.6. Inserción de recursos Geogebra (code)

Para incrustar un recurso Geogebra en un cuaderno Jupyter, hay que incrustarlo mediante su enlace en el formato siguiente:

[https://www.geogebra.org/m/\[id_recurso_geogebra\]](https://www.geogebra.org/m/[id_recurso_geogebra])

Dicho id se puede obtener seleccionando el recurso Geogebra y copiando el identificador del navegador, en este caso siendo el identificador id_recurso_geogebra = m2y6cwd3.



Figura 22. Identificación del identificador de un recurso Geogebra

Una vez tenemos el identificador URL del recurso Geogebra, sólo hay que incrustarlo en el cuaderno Jupyter como un IFrame, con el código previamente mostrado.



Figura 23. Inserción de un recurso Geogebra en un cuaderno Jupyter

4.5.7. Inserción de contenido multimedia (code)

De forma análoga, se puede insertar contenido multimedia. Para la inserción de un recurso Youtube se usaría el código siguiente:

```
from IPython.display import YouTubeVideo
```

```
YouTubeVideo('identificador', width=width, height=height)
```

El identificador se puede obtener al reproducir el vídeo en Youtube:

<https://www.youtube.com/watch?v=identificador>

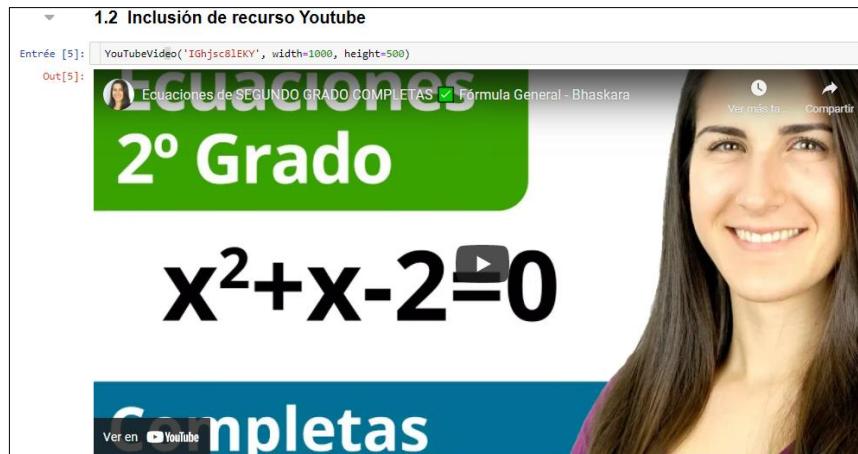


Figura 24. Inserción de un video Youtube en un cuaderno Jupyter

La Figura 24 muestra la inserción de un video Youtube del canal Susi Profe sobre ecuaciones completas de segundo grado.

4.5.8. Inserción de recursos de Proyecto Descartes (code)

En el presente TFM se considera de especial relevancia el contenido del Proyecto Descartes (Proyecto Descartes), que abarca toda una colección de unidades didácticas que cuentan con el reconocimiento de la comunidad de profesores de matemáticas. Dicha web contiene unidades didácticas estructuradas según el currículo, lo que nos permite estructurarlas en las unidades didácticas mucho más fácilmente.

Hay dos tipos de recursos que se pueden insertar en un cuaderno Jupyter, uno de ellos es la calculadora científica Descartes, y otro son las unidades didácticas.

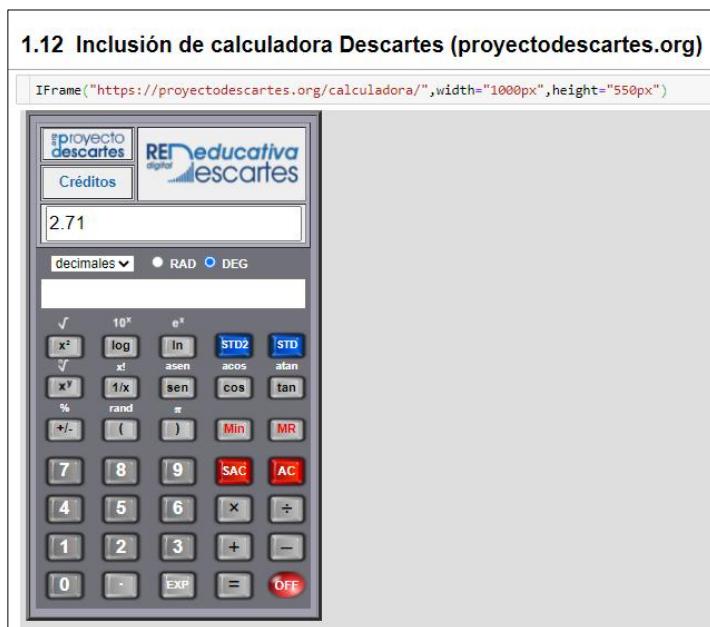


Figura 25. Inserción de la calculadora Descartes

Las unidades didácticas propuestas en el proyecto Descartes están estructuradas por índice temático (Álgebra, Análisis, Geometría, Estadística y probabilidad, Matemáticas aplicadas), por nivel académico (primaria ESO, Bachillerato y universidad). La Figura 25 muestra como ejemplo la inserción en el cuaderno Jupyter de una calculadora de la distribución normal.

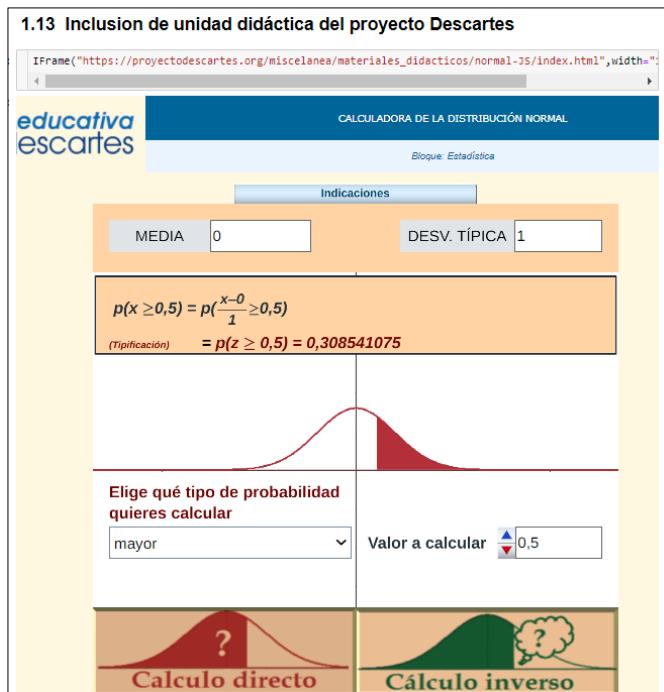


Figura 26. Inserción de una unidad didáctica del proyecto Descartes

4.5.9. Inserción de gráficos dinámicos con librerías Dash y Plotly (code)

Otra herramienta muy interesante que se puede integrar en un cuaderno Jupyter son los gráficos interactivos mediante el framework de Python denominado Dash. Dicho framework está basado en las librerías Plotly, Flask, y ReactJS. Dash permite integrar en una aplicación de explorador web gráficos dinámicos, que permiten actualizar en tiempo real gráficas y hacer zooms en ciertas áreas en tiempo real, al contrario que las gráficas estáticas que se pueden mostrar mediante las librerías Plotly or Seaborn. En la Figura 27 se muestra un ejemplo de aplicación con Dash donde se muestra un gráfico interactivo que va agregando datos en tiempo real y donde se puede hacer zoom en cualquier zona del mismo. Este tipo de recurso TIC es fundamentalmente interesante en los proyectos estadísticos.

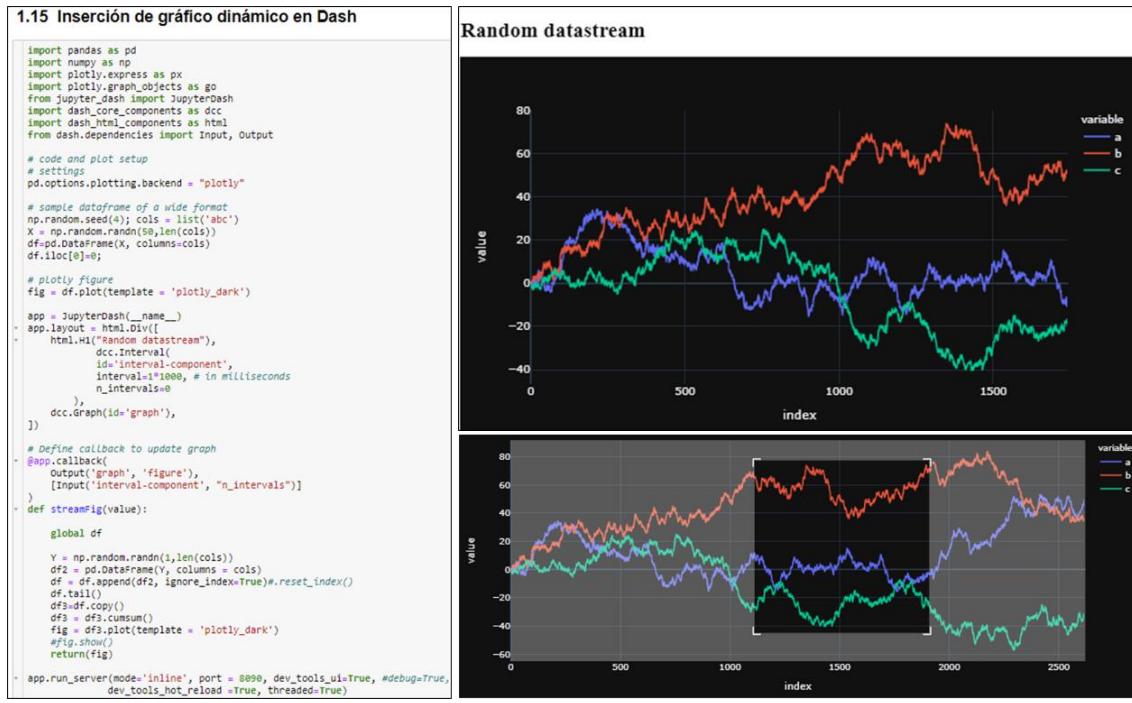


Figura 27. Inserción de una aplicación en Dash para mostrar gráficos interactivos

4.5.10. Inserción de mapas mentales (code)

Otra herramienta esencial para la organización y estructuración del nuevo conocimiento y su asimilación es la realización de mapas mentales (mind maps). Un cuaderno Jupyter también permite la inserción de tales tipos de recursos TIC, tal como se muestra a continuación. Para obtener el enlace, se debe crear el mapa mental o abrir uno ya creado y clicar en Share As (Figura 28)



Figura 28. Obtención del enlace para incrustar el mapa mental en un cuaderno Jupyter

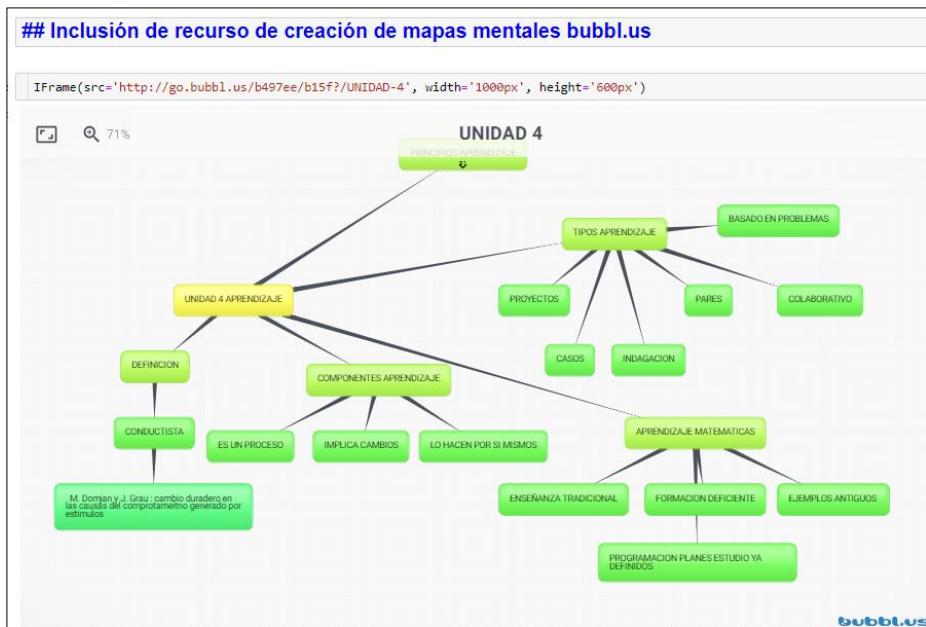


Figura 29. Inserción de un mapa mental en un cuaderno Jupyter

4.5.11. Inserción de formularios (code)

Los usos que se le pueden dar a Google Forms son varios, desde evaluar el conocimiento previo de los alumnos y adaptar así la unidad didáctica en consecuencia, a que el alumno anote sus conclusiones acerca de su aprendizaje, o para subir archivos por Google Drive al profesor para que evalúe los ejercicios y problemas. La inserción de un recurso en Google Forms se realizaría de forma análoga a todos los casos anteriores mediante el enlace al formulario, que se obtiene al clicar en el botón Enviar (1) y seleccionar la pestaña enlace (2), tal como se muestra en la Figura 30.



Figura 30. Obtención del enlace a un formulario en Google Forms para su integración en un cuaderno Jupyter

4.5.12. Inserción de recursos de Gamificación (code)

De forma análoga a los casos anteriores, se pueden incluir también recursos de gamificación como Kahoot, GoConqr y Quizizz. Todo este tipo de recursos dinamizan mucho más las clases, con lo que los alumnos se motivan en mayor medida dentro de la propia unidad didáctica.



Figura 31. Inserción de los recursos de gamificación Kahoot y GoConqr

4.5.13. Inserción de recursos de pizarra digital (code)

En el presente estudio, hemos integrado en los cuadernos Jupyter dos tipos de recursos de pizarra digital: DrawChat y ZiteBoard.

Ziteboard está más pensada para la toma de apuntes manuscritos mediante pizarra digital con lo que se puede usar para que el alumno pueda tomar notas manuscritas si se cuenta con una tableta gráfica. Esto es de especial ayuda cuando el alumno necesita hacer pruebas en el proceso de resolución de una ecuación, por ejemplo.

Draw.chat, en cambio, permite seguir las explicaciones en pizarra digital hechas por un tercero, en este caso el profesor. De hecho, ZiteBoard en su versión gratuita no permite el seguimiento de explicaciones de un tercero en tiempo real, es por eso que se investigó algún otro tipo de recursos de pizarra digital cuya versión gratuita permita seguir las explicaciones manuscritas del profesor.

Para obtener el identificador URL de la clase, el docente, antes de comenzar las clase iría al sitio web <https://draw.chat> y clicaría en start new whiteboard.

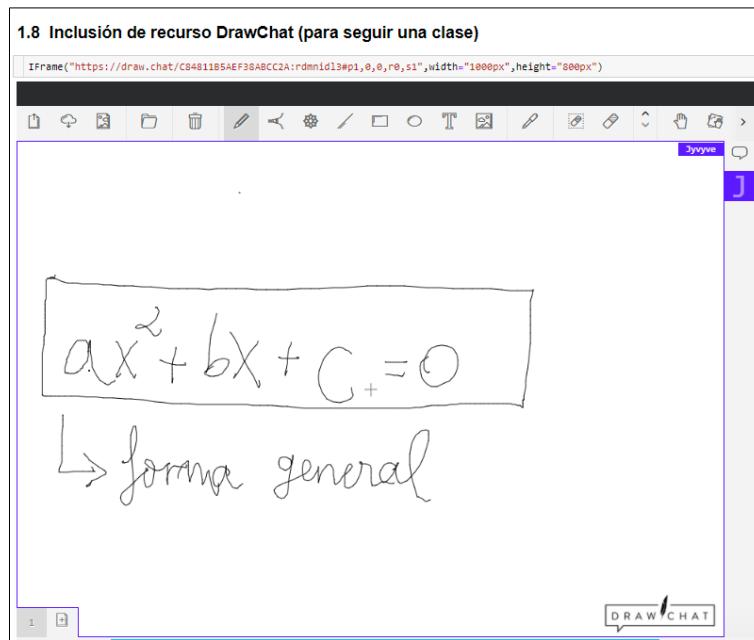


Figura 32. Inserción de recurso de pizarra digital Draw.Chat para seguir explicaciones online

4.5.14. Inserción de rúbricas de evaluación (code)

(Rubistar, 2020) es una herramienta web que permite realizar rúbricas de evaluación de forma sencilla, reduciendo el tiempo por parte del docente. Dicha herramienta se propone como candidata a la integración a los cuadernos Jupyter. Para su incrustación en un cuaderno Jupyter, tal como se muestra en la Figura 33, es necesario realizar la rúbrica (1,2,3) y previsualizarla (4) para obtener el identificador (en este caso 2866863) para insertarla en el cuaderno Jupyter (5) mediante el código siguiente:

```
!IFrame("http://rubistar.4teachers.org/index.php?screen=PrintRubric&rubric_id=2866863",width="1200px",height="800px")
```

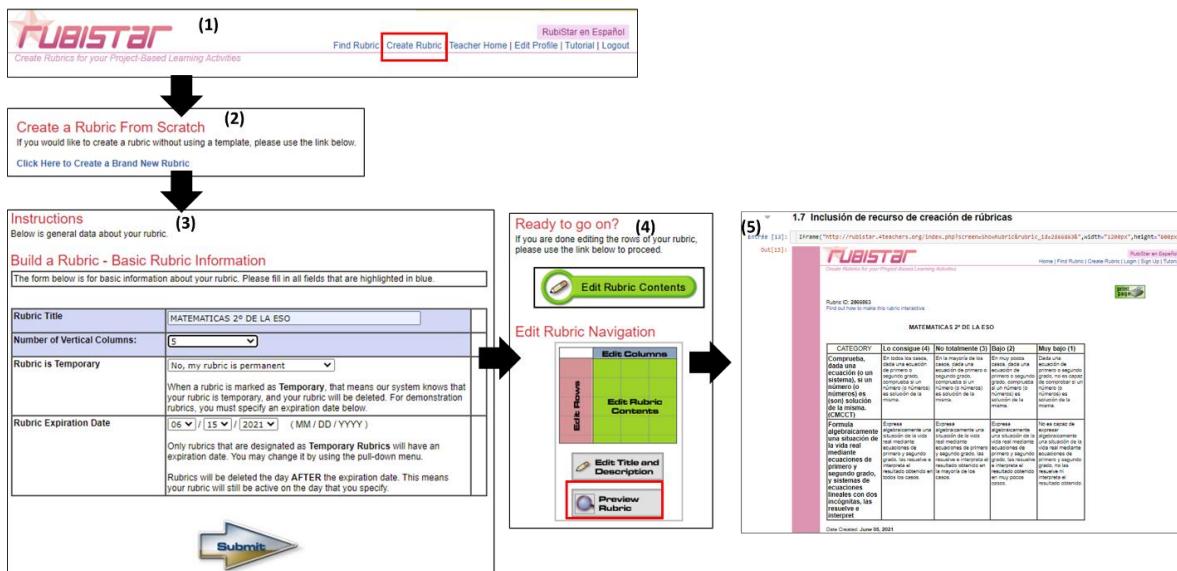


Figura 33. Proceso de creación de una rúbrica e inserción en un cuaderno Jupyter

En el anexo 3, se adjunta todo un cuaderno Jupyter con todos los tipos de recursos TIC integrados, así como un repositorio github donde se pueden descargar dichos cuadernos.

4.6. Propuesta de actuación 1: Aprendizaje por descubrimiento mediante la búsqueda automática de recursos Geogebra para el primer ciclo de la ESO

Uno de los problemas más habituales cuando se integran las TIC, es la búsqueda y selección de recursos concretos para exemplificar los contenidos. En esta propuesta de actuación se ha pensado en este aspecto, proponiendo un algoritmo de selección de recursos mediante *web crawling*. El objetivo es leer todos los enlaces presentes en la página web de Geogebra y guardarlos en una lista para un uso posterior.

En el presente TFM se propone un cuaderno Jupyter que recorre la web que contiene los recursos de Geogebra, para guardar los enlaces para posteriormente integrarlos en dicho cuaderno Jupyter de forma automática.

La web de recursos de Geogebra (geogebra.org/materials) está estructurada en recursos de forma jerárquica en los diferentes bloques del área de matemáticas, donde cada contenido en particular puede albergar cientos de recursos Geogebra diferentes, lo cual da una idea de la inmensidad del contenido. Lo que se propone en esta sección es poder recorrer todos esos recursos de forma automatizada y presentarlos en un cuaderno dinámico Jupyter para permitir a los alumnos el descubrir dichos recursos partiendo como base la temática y el contenido.

Una vez se filtra el área temática de la matemática que se quiere incluir en el cuaderno, el algoritmo selecciona las palabras clave de los diferentes contenidos a tratar y genera una imagen con una nube de palabras con los contenidos (Figura 34), donde el tamaño de cada contenido es directamente proporcional a la frecuencia de aparición del término en la web. Esto es especialmente útil para dar una idea de cómo de importante es un concepto en una determinada unidad didáctica.

Esta técnica de web crawling se puede extrapolar a cualquier página web que contenga gran cantidad de recursos, para no tener que el docente no tenga que ir clicando uno por uno cada uno de esos recursos.

Al final del presente TFM se da el enlace que contiene el cuaderno Jupyter que permite recuperar todos los recursos de forma automática de la web de Geogebra y mostrar su contenido de forma secuencial en un cuaderno Jupyter.

Esto permite que los alumnos puedan recorrer de forma automática los recursos Geogebra de un área determinada de las matemáticas (álgebra, geometría, etc.) o etapa educativa concreta (primaria, secundaria o bachillerato).

A continuación, se muestra un ejemplo de la propuesta de actuación para 1º de la ESO de matemáticas en el bloque de números y álgebra. Respecto a la legislación vigente, se partirá del currículo tal como está establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Propuesta de intervención para 1º de la ESO

En dicha propuesta de intervención se van a tratar los conjuntos numéricos y los números enteros, así como las operaciones entre conjuntos. Al inicio de la práctica educativa, se le introduce al alumno el tema de forma general mediante la metodología magistral durante los primeros minutos de la clase para posteriormente dejarle familiarizarse y profundizar dichos conceptos mediante los ejercicios prácticos extraídos del software Geogebra integrados en cuaderno Jupyter para que se los vaya mostrando e ir avanzando progresivamente. En dicha propuesta educativa se pretende que cada alumno tenga una experiencia personalizada y única, ya que se los ejercicios de Geogebra que se mostrarán a cada alumno será extraídos de forma aleatoria. Al final de la actuación se propone una sesión final para que los alumnos compartan con el resto de la clase todo aquello que más les ha marcado o aquellas dificultades que han experimentado.

Fase 1: La primera fase de dicha propuesta de actuación es la introducción al tema de los conjuntos numéricos mediante las nubes de palabras, donde el alumno se le da una breve introducción de los conceptos que se van a tratar para que se vaya familiarizando con los términos.

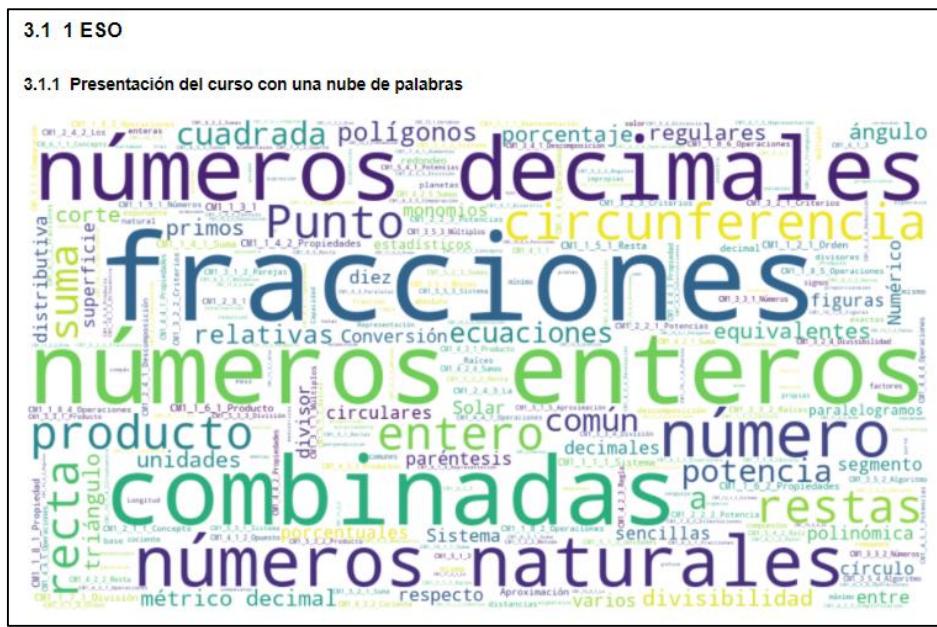


Figura 34. Generación automática de una nube de palabras con todos los términos que se abordarán en los recursos Geogebra extraídos para 1º de la ESO

Fase 2: La segunda fase de la propuesta de actuación consiste en una secuenciación de diferentes ejercicios automáticamente extraídos de la web de Geogebra y presentados en celdas separadas del cuaderno Jupyter, como si fuera una biblioteca. A modo de ilustración se mostrarán tres ejercicios que el alumno tendrá que resolver en la propuesta de actuación.

Los tres ejercicios que se muestran han sido elaborados por Terán (2015). En el primer y segundo ejercicios se pretende que el alumno se familiarice con la operación de la unión y la diferencia simétrica mediante unos sencillos ejercicios visuales.

IFrame(str(third_level_links[1]),width="1000px",height="650px")

≡ GeoGebra

Conjuntos - unión (ejercicios)

Autor: Nelson Lillo Terán

Tema(s): Matemáticas, Teoría de conjuntos

Desarrolle el ejercicio propuesto. Haga click en "Respuesta" para comprobarla y después en "Nuevo ejercicio" para obtener otro desafío.

CONJUNTOS – Unión

A = { , , **}**

B = { , , , **,** ,  **}**

A ∪ B =

Respuesta

Nuevo ejercicio

Figura 35. Primer ejercicio extraído de la web de Geogebra sobre los conjuntos

IFrame(str(third_level_links[1]),width="1000px",height="650px")

≡ GeoGebra

CREAR LECCIÓN

Conjuntos - diferencia simétrica (ejercicios)

Autor: Nelson Lillo Terán

Tema(s): Matemáticas, Teoría de conjuntos

Desarrolle el ejercicio propuesto. Haga click en "Respuesta" para comprobarla y después en "Nuevo ejercicio" para obtener otro desafío.

CONJUNTOS – Diferencia simétrica

A = { , , , **}**

B = { , , , , , , **}**

A Δ B =

Respuesta

Nuevo ejercicio

Figura 36. Segundo ejercicio extraído de la web de Geogebra sobre los conjuntos

Este último ejercicio ha sido elaborado por Javier Cayetano Rodríguez (2018), y consiste en que el alumno sea capaz de situar en la recta real el número entero correspondiente. Como se puede observar se basa en Geogebra, con lo que el alumno podrá interactuar de forma ágil y aprenderá de una forma mucho más dinámica que mediante la metodología magistral.



Figura 37. Tercer ejercicio extraído de la web de Geogebra sobre los conjuntos

La última fase de dicha propuesta de actuación sería una sesión donde los alumnos plantearían las dudas a posteriori de haber realizado los ejercicios. El docente podría proyectar en la pantalla cada uno de los ejercicios e ir resolviendo dudas de los alumnos, así como lo que han aprendido en cada uno de ellos.

4.7. Propuesta de actuación 2: Generación de actividades dinámicas mediante los cuadernos Jupyter y el lenguaje Python

Anteriormente, se mostró cómo usar Latex como texto estático, donde las variables y objetos matemáticos no podían variar. Se cree que puede resultar de utilidad el poder crear variables aleatorias en Python y mostrarlas como objetos matemáticos Latex para crear así un contenido mucho más dinámico de cara al alumno.

Esto es de especial relevancia a nivel educativo ya que permite manipular objetos matemáticos generados mediante lenguaje Python y mostrados al alumno en lenguaje matemático Latex, de forma totalmente transparente ya que la parte en Python se puede ocultar.

El objetivo de esta sección es doble:

- (i) evitar que los alumnos tengan la tentación de copiarse entre sí y evitar que memoricen soluciones,
- (ii) el plantear problemas completamente abiertos donde la solución pueda ser una fracción o no tenga soluciones reales, para que el alumno no esté pre-

condicionado en su forma de resolver el problema y aprenda así a tomar decisiones en situaciones más abiertas.

Como se verá en secciones posteriores, dichas variables pueden incluirse en problemas para tratar en particular los aspectos ligados a las dificultades de traducción del lenguaje verbal al algebraico, entre otros.

4.7.1. Ecuaciones de primer grado con coeficientes generados aleatoriamente (1º de la ESO)

En esta sección se muestran dos ejemplos de generación de ecuaciones de primer grado variables con coeficientes aleatorios, enteros y racionales como ejemplo. Para ello, se utiliza la función de la librería random de Python denominada randint(a, b) que genera un entero aleatorio en un determinado rango [a,b].

Se puede observar que se pueden generar ecuaciones con dos niveles de algebrización según (Ruiz et al., 2010) (1.2 nivel 1, 1.3 nivel 2). En el caso 1.2, se trata de la ecuación $ax+b=0$, con un nivel de algebrización 1. En el caso 1.3 se trata de la ecuación del tipo $a*x+b=c*x+d$, con un nivel de algebrización 2. En la Figura 38 se puede observar el código Python a la izquierda para generar las ecuaciones, y a la derecha como lo observará el alumno en el examen o ejercicio.

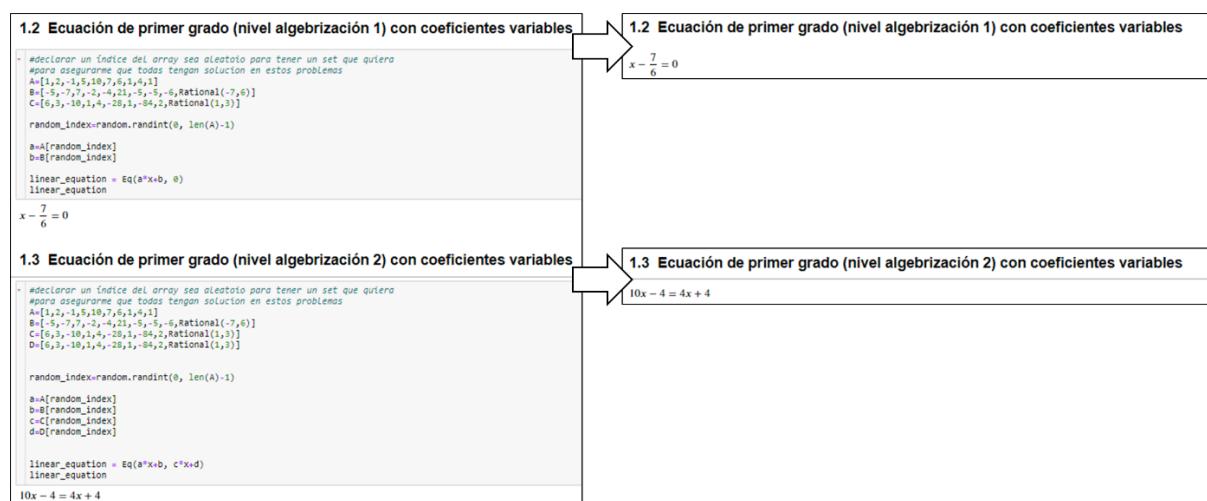


Figura 38. Generación de ecuaciones de primer grado con coeficientes aleatorios en Python y Latex

4.7.1. Ecuaciones de segundo grado con coeficientes generados aleatoriamente (2º de la ESO)

La generación de ecuaciones de primer y de segundo grado con coeficientes aleatorios permite que los alumnos no tengan la intención de memorizar procedimientos algebraicos y automatiza el proceso de examen y de puesta de ejercicios y problemas.

El código siguiente (Figura 39) genera una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes varíen dentro de un determinado rango de valores. Este rango de valores ha sido definido para que las soluciones de las ecuaciones den soluciones reales y positivas, aunque se puede hacer que no se cumplan estas condiciones para que el alumno no quede condicionado. La Figura 39 muestra la ecuación a resolver de salida, donde el código en Python se puede ocultar en todo momento por el profesor como explicado en secciones anteriores.

```

from IPython.display import display, Math
import IPython
import random
from sympy import *
from IPython.display import display, Markdown, Latex
from sympy import simplify
from sympy.abc import x

#declarar un índice del array sea aleatorio para tener un set que quiera
#para asegurarme que todas tengan solución en estos problemas
A=[1,2,-1,1,1,7,6,1,4,1]
B=[-5,-7,7,-2,-4,21,-5,-5,-6,Rational(-7,6)]
C=[6,3,-10,1,4,-28,1,-84,2,Rational(1,3)]

random_index=random.randint(0, len(A)-1)

a=A[random_index]
b=B[random_index]
c=C[random_index]

coeff=[a,b,c]

quadratic_equation = Eq(a*x**2+b*x+c, 0)
quadratic_equation

```

$$7x^2 + 21x - 28 = 0$$

Figura 39. Generación de ecuación de segundo grado con coeficientes aleatorios en Python y Latex

4.7.2. Generación de problemas con coeficientes y datos variables (2º de la ESO)

El objetivo de esta sección es mostrar cómo integrar variables aleatorias generadas en Python en forma de texto para plantear problemas cuyos datos varíen según el alumno.

El procedimiento es bastante sencillo. La celda de arriba, donde se declaran las variables en Python que se quieren insertar en el texto que será presentado al alumno, se marca como **code**. El texto que se muestra al alumno, ubicado en la celda posterior, se marca como **markdown**, donde se hace referencia a cada una de las variables a insertar en el texto {{nombre_variable}}.

La Figura 40 muestra un ejemplo sobre un problema de ecuaciones con distancias, donde en la parte izquierda se puede observar el código Python y en la parte derecha se muestra el problema planteado tal como lo vería el alumno.

1.4 Generación de problemas con ecuaciones de primer grado con coeficientes variables

```

dias = 3
kilometros = 30
A=['tercera','cuarta','quinta','sexta']
random_index_A=random.randint(0, len(A)-1)
random_index_B=random.randint(0, len(A)-1)

Traduce el siguiente problema en una ecuación:
Un viajero hace un trayecto en {{dias}} días.
1) El primer día recorre la {{A[random_index_A]}} parte del camino
2) El segundo día recorre la {{A[random_index_B]}} parte de lo que le queda por recorrer
3) El último dia recorre {{l_r}} km
¿Qué distancia recorre en total?

```

Traduce el siguiente problema en una ecuación:

Un viajero hace un trayecto en {{dias}} días.

1) El primer día recorre la {{A[random_index_A]}} parte del camino

2) El segundo día recorre la {{A[random_index_B]}} parte de lo que le queda por recorrer

3) El último dia recorre {{l_r}} km

¿Qué distancia recorre en total?

Figura 40. Generación de un problema de ecuaciones con datos variables mediante Python

4.7.3. Generación de matrices de números generados aleatoriamente (1º de bachillerato)

Otro tipo de estructura algebraica que se puede insertar en un cuaderno Jupyter en lenguaje Python son las matrices. Lo que se propone en este TFM es una extensión mediante una función programada en Python para introducir valores controlables mediante variables Python. La Figura 41 muestra la generación de una matriz de 2x2 con valores generados dinámicamente, que a cada ejecución tendrán valores diferentes.

1.5 Generación de matrices con valores variables

```

from IPython.display import display, Math

def print_matrix(array):
    matrix = ''
    for row in array:
        try:
            for number in row:
                matrix += f'{number}&'
        except TypeError:
            matrix += f'{row}&'
    matrix = matrix[:-1] + r'\begin{bmatrix}' + matrix+r'\end{bmatrix}'
    display(Math(r'\begin{bmatrix}' + matrix+r'\end{bmatrix}'))

print_matrix([[['a_1','a_2'],['a_3','a_4']])
[[a_1 a_2]
 [a_3 a_4]]

a,b,c,d=random.randint(0, 5),random.randint(0, 1),random.randint(0, 1),random.randint(0, 2)
print_matrix([[a,b],[c,d]])
[[2 0]
 [1 1]]

```

Figura 41. Generación de matriz con valores aleatorios mediante Python

4.7.1. Generación de sistemas de ecuaciones con coeficientes variables (3º de la ESO)

Se pueden generar de forma análoga sistemas de ecuaciones tanto de dos ecuaciones con dos incógnitas como de tres ecuaciones con tres incógnitas cuyos coeficientes se definan mediante variables aleatorias en Python. Para ello se han definido dos funciones, **print_system_2** y **print_system_3** que han sido creadas para tal efecto. La Figura 42 muestra los dos tipos de sistemas así como un ejemplo (esto será lo único que vea el alumno en la sesión didáctica).

<p>1.6 Generación de un sistema 2 x 2 con coeficientes variables</p> <pre> from IPython.display import display, Math #begin{cases} 3x + 5y + z \\ 7x - 2y + 4z \\ -6x + 3y + 2z \end{cases} def print_system_2(array): system = '' for row in array: if row[0] == 1: s0='x +'; else: s0=str(row[0])+'x +'; if row[1] == 1: s1='y +'; else: s1=str(row[1])+'y +'; if row[2] == 1: s2='z +'; else: s2=str(row[2])+'z +'; system += s0 + s1 + s2 + '=' + str(row[3]) + r'\\\' display(Math(r'\begin{cases}' + system + r'\end{cases}')) </pre> <pre> a,b,c,d,e,f=random.randint(1, 5),random.randint(1, 1),random.randint(0, 5),random.randint(1, 5),random.randint(1, 1),random.randint(0, 5) print_system_2([[a,b,c],[d,e,f]]) </pre> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> $\begin{cases} 5x + y = 5 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ </div>	<p>1.7 Generación de un sistema 3 x 3 con coeficientes variables</p> <pre> from IPython.display import display, Math #begin{cases} 3x + 5y + z \\ 7x - 2y + 4z \\ -6x + 3y + 2z \end{cases} def print_system_3(array): system = '' for row in array: if row[0] == 1: s0='x +'; else: s0=str(row[0])+'x +'; if row[1] == 1: s1='y +'; else: s1=str(row[1])+'y +'; if row[2] == 1: s2='z +'; else: s2=str(row[2])+'z +'; system += s0 + s1 + s2 + '=' + str(row[3]) + r'\\\' display(Math(r'\begin{cases}' + system + r'\end{cases}')) </pre> <pre> a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l=random.randint(1, 5),random.randint(1, 1),random.randint(0, 5),random.randint(1, 5),random.randint(1, 1),random.randint(0, 5),random.randint(1, 5),random.randint(1, 1),random.randint(0, 5),random.randint(1, 5),random.randint(1, 1),random.randint(0, 5) print_system_3([[a,b,c,d],[e,f,g,h],[i,j,k,l]]) </pre> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 2 \\ 4x + y + 4z = 1 \end{cases}$ </div>
---	--

Figura 42. Generación de sistemas de ecuaciones 2 x 2 y 3 x 3 con coeficientes aleatorios

Todos los cuadernos Jupyter así como todas las funciones y métodos realizados en lenguaje Python mostrados aquí, serán puestos a disposición en el siguiente enlace GitHub (Repositorio GitHub TFM, 2021).

4.8. Propuesta de actuación 3: Ejemplo de aplicación de los cuadernos Jupyter para programar una unidad didáctica de 2º de la ESO

La presente sección tiene como objetivo detallar como integrar y secuenciar varios de los anteriores recursos TIC para programar una unidad didáctica para 2º de la ESO, que se encuentra en el anexo 2. Aunque dicha propuesta de intervención innovadora se podría también aplicar a metodologías de aprendizaje mediante proyectos, flipped classroom y otras metodologías.

Se partirá como base de una unidad didáctica de 2º de la ESO del libro de texto Editorial SM (2021). Posteriormente, dicho contenido se ha enriquecido con una selección de herramientas TIC presentadas anteriormente para mostrar cómo se puede intercalar contenido tradicional, que se puede encontrar en cualquier unidad didáctica de un libro de texto, con contenido más interactivo.

En la presente propuesta de actuación se propone partir de la siguiente estructura de para una lección de 2º de la ESO para impartir la unidad de ecuaciones de primer y de segundo grado:

1. Gráfico Gantt para estructurar la unidad didáctica y su temporalización
2. Video introductorio sobre ecuaciones y su origen para motivar al alumno
3. Introducción de contenido teórico al inicio de cada sección
4. Generación de nubes de palabras con los conceptos clave de cada sección

5. Propuesta de métodos de la balanza para la resolución de ecuaciones mediante Geogebra
6. Propuesta de examen y corrección

1. Gráfico Gantt para estructurar la unidad didáctica y su temporalización

Los cuadernos Jupyter, tal como se detalló en la sección anterior, permiten crear gráficos de Gantt. En la presente propuesta de actuación, se propone comenzar la unidad didáctica mediante el uso de tales gráficos para darles una idea a los alumnos de la duración temporal y la secuenciación de la unidad didáctica de 2º de la ESO sobre las ecuaciones de primer y de segundo grado.

La Figura 43 muestra dicha planificación, donde cada sesión tiene una duración de 50 minutos. Cada sección de la unidad didáctica se ha impartido en tres sesiones (S1, S2 y S3).

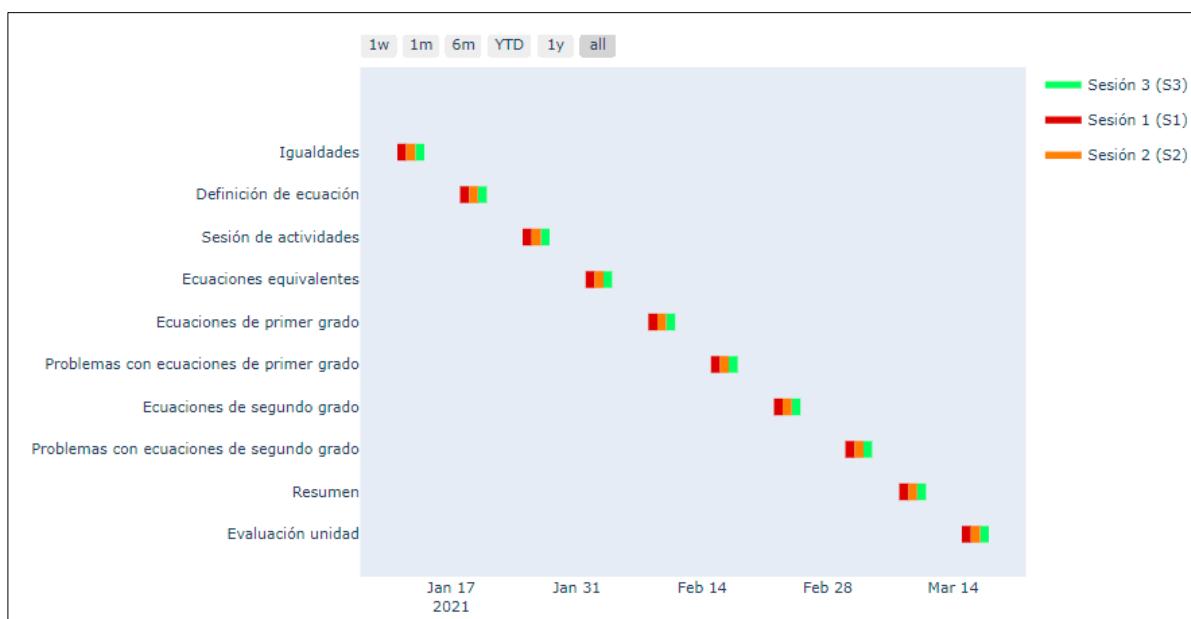


Figura 43. Planificación de la unidad didáctica mediante un cuaderno Jupyter

2. Video introductorio sobre ecuaciones y su origen para motivar al alumno

En esta parte del cuaderno Jupyter se pretende integrar contenido multimedia para motivar al alumno en las ecuaciones, así como en sus aplicaciones prácticas. Para ello, se han seleccionado los canales más reconocidos a nivel de divulgación de matemáticas. Dichos canales se encuentran en el anexo 1 del presente TFM.

3.

1 Unidad didáctica ecuaciones (2º de la ESO)

1.1 Introducción



1.2 Igualdades: Identidades y ecuaciones

1.2.1 Monomios y binomios

Un monomio consta de un sólo término formado por un producto

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} x^2 \\ yx^2 \\ m^3x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Un binomio consta de una suma o diferencia de dos monomios

Ejemplos:

$$\frac{x^2 - y^2}{a + b} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

Figura 44. Integración de contenido multimedia antes de comenzar la parte teórica de ecuaciones

3. Introducción de un breve contenido teórico al inicio de cada sección

En esta sección se pretende añadir contenido teórico para que el alumno se familiarice con las ecuaciones.

1.3.1 Reglas de la suma y del producto

Para la resolución de ecuaciones se aplican técnicas que permitan determinar otra ecuación que sea más sencilla utilizando la regla de la suma y del producto

1.3.1.1 Regla de la suma

Si en una ecuación se suma o se resta el mismo número o la misma expresión algebraica en los dos miembros se obtiene una expresión equivalente

$$3x + 6 = x + 16 \quad (20)$$

$$3x + 6 - 6 = x + 16 - 6 \quad (2D)$$

$$3x = x + 10 \quad (22)$$

$$3x - x = x + 10 - x \quad (23)$$

$$2x \equiv 10 \quad (24)$$

1.3.1.2 Regla del producto

Si en una ecuación se multiplica o se divide por un mismo factor (distinto a cero) en los dos miembros se obtiene una expresión equivalente.

Aplica la regla del producto para aislar el valor de x en la expresión $2x = 10$

$$2x = 10 \quad (25)$$

$$2x/2 = 10/2 \quad (26)$$

$$x = 5 \quad (27)$$

Figura 45. Integración de una celda con la explicación teórica de ecuaciones de primer grado

4. Generación de nubes de palabras con los conceptos clave de cada sección

Cada una de las secciones de la unidad didáctica se puede presentar de forma visual al alumno mediante las nubes de palabras, concepto que ya fue presentado en secciones anteriores.



Figura 46. Integración de una celda con una nube de palabras con los conceptos más relevantes de la unidad didáctica de ecuaciones por frecuencia de aparición

5. Propuesta de métodos de la balanza para la resolución de ecuaciones mediante Geogebra

En esta parte de la unidad didáctica se pretenden plantear ejercicios que permitan al alumno familiarizarse en la manipulación algebraica. Como se detalló anteriormente, los métodos manipulativos como las balanzas son una muy buena técnica y que los cuadernos Jupyter permiten integrar, ya que viene en forma de recursos Geogebra.

1.3.1.6 Método de las balanzas

Ejercicio mediante el método de las balanzas: Mueve y distribuye los diferentes componentes que tienes en la balanza hasta dejar las x en la x

≡ GeoGebra

Solving equations by balancing

Autor: Andrew Kerr

Tema(s): Ecuaciones

Move the numbers until you have an x on one side and integers on the other, while keeping the equation balanced; to solve for x.

Answer

Figura 47. Integración de una celda con un ejercicio extraído de Geogebra para resolver una ecuación de primer grado

6. Propuesta de examen de la unidad y corrección

La evaluación del aprendizaje del alumnado mediante dicha propuesta de intervención innovadora es bastante sencilla de implementar y se describe a continuación.

Una vez los alumnos hayan completado los ejercicios, problemas o actividades del cuaderno Jupyter, lo pueden guardar como PDF mediante el plugin Jupyter-to-PDF (1). Posteriormente, podrán subir el PDF al Google drive propuesto por el docente (3) mediante

el formulario Google Forms que tendrán habilitado (2) en la última celda de dicho cuaderno, tal como se muestra en la Figura 48.

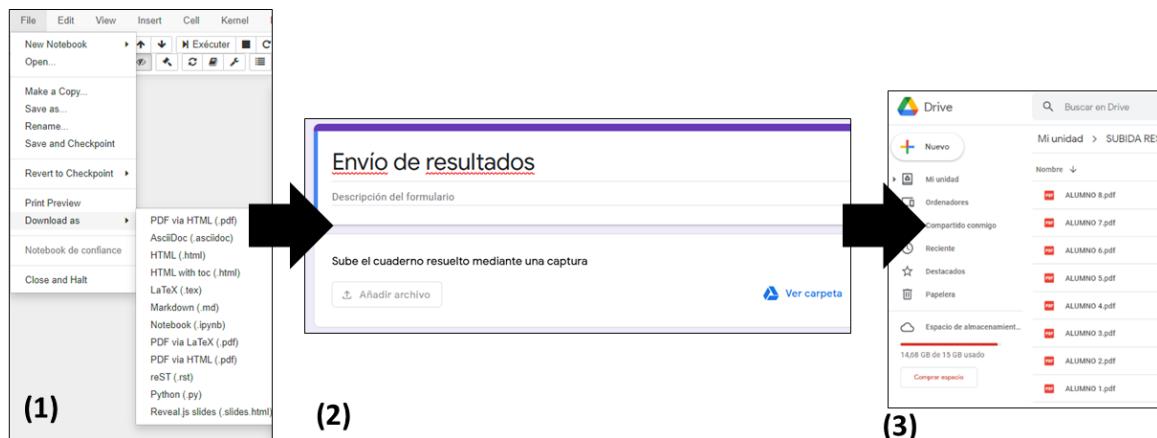


Figura 48. Proceso de envío de un cuaderno Jupyter para su evaluación mediante Google Forms

Tras la recogida de los resultados de los alumnos el docente puede hacer uso de las rúbricas, tal como se mostró en la sección anterior. La Figura 49 muestra el ejemplo de rúbrica para el caso concreto de la comprobación de soluciones en las ecuaciones o sistemas.

1.9 Evaluación del ejercicio mediante rúbrica				
MATEMATICAS 2º DE LA ESO				
CATEGORY	Lo consigue (4)	No totalmente (3)	Bajo (2)	Muy bajo (1)
Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma. (CMCCT)	En todos los casos, dada una ecuación de primer o segundo grado, comprueba si un número (o números) es solución de la misma.	En la mayoría de los casos, dada una ecuación de primer o segundo grado, comprueba si un número (o números) es solución de la misma.	En muy pocos casos, dada una ecuación de primer o segundo grado, comprueba si un número (o números) es solución de la misma.	Dada una ecuación de primer o segundo grado, no es capaz de comprobar si un número (o números) es solución de la misma.
Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primero y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta	Expresa algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido en todos los casos.	Expresa algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido en la mayoría de los casos.	Expresa algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido en muy pocos casos.	No es capaz de expresar algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, no las resuelve ni interpreta el resultado obtenido.

Figura 49. Ejemplo de rúbrica integrada en la unidad didáctica del cuaderno Jupyter

4.9. Estructura del repositorio GitHub con los cuadernos Jupyter mostrados en el presente TFM

Todos los cuadernos Jupyter y sus respectivas funciones presentadas en el presente TFM han sido subidos a un repositorio Repositorio GitHub TFM (2021) para que sean accesibles a la comunidad docente. Su estructura es la siguiente:

- Cuaderno Jupyter denominado “**TFM_blocks.ipynb**” con los diferentes tipos de recursos TIC que son integrables (uno por celda) (sección 8.4.2)
- Cuaderno Jupyter denominado “**Descubrimiento de recursos de GeoGebra.ipynb**” que descubre todos los recursos de la web de Geogebra y los muestra en celdas separadas (sección 8.5)
- Cuaderno Jupyter denominado “**TFM_problemas_variables.ipynb**” con diversas estructuras algebraicas, ecuaciones, sistemas de ecuaciones, matrices, y problemas con coeficientes variables aleatorios (sección 8.6)
- Cuaderno Jupyter denominado “**UNIDAD_DIDATICA.ipynb**” que incluye una unidad didáctica de un libro mejorada con recursos TIC (sección 8.8)

5. Conclusiones

En el presente TFM se ha propuesto una propuesta innovadora didáctica para estructurar de forma coherente los recursos TIC de naturaleza tan diferente que existen en internet como recursos textuales, imágenes, contenido matemático, recursos en Geogebra, etc.

Dicha propuesta está basada en los cuadernos Jupyter, cuadernos interactivos basados en el lenguaje Python que permiten insertar en diferentes celdas diferente tipo de contenido (textual, de geometría dinámica, contenido matemático en Latex, scripts en Python, PDF, mapas mentales, nubes de palabras, entre otros).

En dicha propuesta el profesor tiene un rol de guía y el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje pasa a ser el alumno, quien tiene que adoptar un rol mucho más activo para ir construyendo su propio conocimiento mediante metodologías constructivistas.

Con esta metodología se ha pretendido aportar al docente de plantillas realizadas mediante una serie de funciones programadas en Python que le pueden ayudar a integrar todo tipo de recursos TIC en una única herramienta de cuadernos Jupyter a modo de biblioteca que es adaptable a cualquier etapa educativa no sólo de la asignatura de matemáticas.

6. Limitaciones del estudio y futuras líneas de investigación

6.1. Análisis DAFO

A continuación, se propone un estudio DAFO (Debilidades, Amenazas, Fortalezas, Oportunidades) para analizar la presente propuesta.

En primer lugar, la propuesta innovadora no ha sido aún probada en clase debido principalmente al hecho que cuando el TFM ha sido realizado ya ha terminado el curso docente. No obstante, es por ello que se ha puesto a disposición de cualquier docente los cuadernos desarrollados en el presente TFM a través de un enlace GitHub para el próximo curso académico.

A nivel de fortalezas, como se ya se indicó al inicio dicha metodología nos permite estructurar las unidades didácticas mediante una secuenciación ininterrumpida, haciendo uso de la automatización y de la integración automática de nuevos tipos de recursos TIC.

Existen una serie de oportunidades que se resuelven mediante dicha propuesta, que combate el textocentrismo mediante la integración de diferentes tipos de recursos. Otro aspecto importante es que fomenta el aprendizaje por descubrimiento y permite plantear los contenidos mediante distintos tipos de recursos. También permite integrar recursos manipulativos, así como visuales mediante el software Geogebra, por ejemplo.

No obstante, hay una serie de debilidades, como que tanto como el profesor como el alumno deben formarse previamente, sobre todo el profesor lo que implica tener ciertos conocimientos en programación. Lo positivo es que el lenguaje Python es el más sencillo debido a su legibilidad. Los scripts han sido comentados para que el docente pueda entender las tareas que realizan para poder adaptarlos a otras situaciones. Para que la propuesta sea implementable, se necesita que cada alumno tenga acceso a un ordenador (no es necesario una Tablet). En caso que esto no fuera posible, también sería posible que fuera el propio docente el que interactuara con el cuaderno en la propia clase y lo proyectara, pero el nivel de interactividad y de dinamismo podría hacer que los alumnos desconectaran de las clases más rápidamente ya que no tendrían el mismo nivel de participación.

Para concluir, las amenazas de la metodología están ligadas sobre todo a la correcta planificación del docente, ya que, si no hay una correcta secuenciación y estructuración del contenido, la propuesta innovadora quedará relegada a una mera biblioteca de recursos.

Tabla 3. Análisis DAFO de la propuesta del presente TFM

	Internas	Externas
Negativas	<u>Debilidades</u>	<u>Amenazas</u>
	<ul style="list-style-type: none"> • Requiere que tanto el profesor como el alumno se forme mínimamente • Requiere que cada alumno tenga un ordenador, tableta o móvil 	<ul style="list-style-type: none"> • Sin una estructuración coherente, el alumno puede perderse entre tantos tipos de recursos TIC
Positivas	<u>Fortalezas</u>	<u>Oportunidades</u>
	<ul style="list-style-type: none"> • Inclusión de diferentes recursos TIC en la misma herramienta para no renunciar a ninguna ventaja de ninguna aplicación • Automatización de ciertos tipos de recursos para que el alumno descubra contenido de forma más autónoma • Se pueden intercalar diferentes tipos de recursos de forma continua, sin interrumpir la clase 	<ul style="list-style-type: none"> • Aprendizaje por descubrimiento • Combate el texto centrismo • Permiten al alumno iniciarse en la programación mediante Python

6.2. Futuras líneas de investigación

Las futuras líneas de investigación se centrarán en los siguientes aspectos:

- Aplicar dicha propuesta como modelo experimental a un instituto
- Realizar una serie de proyectos estadísticos en cuadernos Jupyter para fomentar el aprendizaje colaborativo
 - Introducción al alumno a la inteligencia artificial y aprendizaje automático
 - Introducción al alumno a la estadística
 - Introducción al alumno a la optimización

7. Bibliografía

Polya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method, Princeton Science Library.

Piaget, J. (1952). The origins of intelligence in children. Nueva York: International Universities, Press, INC.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. United State of America: Academic Press.

Ausubel, D. (1963). The psychology of meaningful verbal learning. Nueva York : Grune and Stratton.

Vigotsky, L. (1978). Interaction Between Learning and Development. Readings on the development of children, 34-40.

García, M.D. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir Geogebra en el aula.

Gómez, J. A. P., Sánchez, Z. C. N., & Colmenares, C. A. G. (2015). Modelación matemática y Geogebra en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. Revista Logos, Ciencia & Tecnología, 7(1), 65-70.

Sarmiento, W., & Altamirano, K. L. (2017). Aplicación del software GeoGebra en prácticas matemáticas bajo una metodología constructivista. Killkana sociales: Revista de Investigación Científica, 1(2), 45-50.

García, J. G. J., & Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad, 4(7).

Kerr Andrew (2017). Geogebra [Free Software Foundation]. Método de las balanzas. Recuperado de: <https://www.geogebra.org/m/Da2uk8XN>

Ramírez-Ochoa, M. I. (2016). Posibilidades del uso educativo de YouTube. RA ximhai, 12(6), 537-546.

Méndez-Coca, D., & Méndez-Coca, M. (2014). El profesorado de ciencias y matemáticas y la comunicación a través de las TIC. Historia y comunicación social, 19(Especial), 315-326.

Fernández, R. (2020). Obtenido de Statista: <https://es.statista.com/estadisticas/511965/numero-de-alumnos-por-ordenador-en-centros-educativos-publicos-de-educacion-secundaria-por-comunidad-en-espana/>

Fernández, R. (2020). Obtenido de <https://es.statista.com/estadisticas/527808/porcentaje-total-de-centros-educativos-con-conexion-wifi-en-espana-por-comunidad-autonoma/>

INE. (2019). Encuesta sobre Equipamiento y Uso de Tecnologías de Información y Comunicación en los hogares. Obtenido de https://www.ine.es/prensa/tich_2019.pdf

Vázquez, M. A. L., & Martínez, V. G. (2020). El juego como recurso didáctico para la enseñanza de las ciencias: Matemáticas y Química. Espacio I+D: Innovación más Desarrollo, 9(23).

Molina, R. (2016). El concepto de juego y su importancia dentro del ámbito educativo en escolares de 10 a 12 años. Educación Física y Deportes, Revista Digital, 221(1).

Gallardo-López, J. A., & Gallardo Vázquez, P. (2018). Teorías sobre el juego y su importancia como recurso educativo para el desarrollo integral infantil.

Instituto Nacional de tecnologías educativas y de formación del profesorado (INTEF). (2016). Obtenido de <http://educalab.es/intef>

Delgado, M., Arrieta, X., & Riveros, V. (2009). Uso de las TIC en educación, una propuesta para su optimización. Omnia, 15(3), 58-77.

Briz Redón, Á., & Serrano Aroca, Á. (2018). Aprendizaje de las matemáticas a través del lenguaje de programación R en Educación Secundaria. Educación matemática, 30(1), 133-162.

Cayetano Rodriguez. J (2020). Geogebra [Free Software Foundation]. Factorizar polinomios con baldosas algebraicas "Algebra-Tiles". Recuperado de: <https://www.geogebra.org/m/dr3295ax>

Gallego, D. J., Cacheiro, M. L., & Dulac, J. (2009). La pizarra digital interactiva como recurso docente. Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, 10(2), 127-145.

Cancelo, M. J. V., & Caamaño, F. J. S. (2017). La motivación en el aprendizaje de las matemáticas con Pizarra Digital Interactiva. Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 073-076.

Franco, I. V. (2019). Recursos digitales para la enseñanza de la física: dispositivos móviles, redes sociales y cuadernos de Jupyter. Caracteres: estudios culturales y críticos de la esfera digital, 8(2), 18-41.

Llorente, J. G. S., Córdoba, Y. A. P., & Mora, B. R. (2018). Causas que determinan las dificultades de la incorporación de las TIC en las aulas de clases. Panorama, 12(22), 4.

Van Rossum, G., & Drake, F. L. (2000). Python reference manual. Indiana: iUniverse.

Monsálvez, J. C. G. Python como primer lenguaje de programación textual en la Enseñanza Secundaria Python as First Textual Programming Language in Secondary Education.

Grisales Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. Entramado, 14(2), 198–214. <https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751>

Ruiz, J. R. R. (2014). Los recursos TIC favorecedores de estrategias de aprendizaje autónomo: el estudiante autónomo y autorregulado. In Crescendo, 5(2), 233-252.

Leonardo Kuffo (2020). Jupyter Notebook en 20 minutos (Python) [Youtube]

Manual de Latex (2021). Recuperado de: <https://manualdelatex.com/simbolos>

Statista, Lenguaje de programación más utilizados, <https://www.statista.com/chart/21017/most-popular-programming-languages/>

Plugin Jupyter-to-PDF, Recuperado de: <https://towardsdatascience.com/jupyter-notebook-to-pdf-in-a-few-lines-3c48d68a7a63>

Plugin NBExtensions, Recuperado de : <https://medium.com/@jicksy.john/adding-nbextensions-to-jupyter-notebook-2f4070aca5de>

Repositorio GitHub TFM (2021) https://github.com/capachivas/TFM_MFP_2020_2021

Chacón, I. M. G. (2000). Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático (Vol. 83). Narcea Ediciones.

Villella, J., & González, L. C. C. (2005). La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática. La Gaceta de la RSME, 8, 419-433.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.

8. Anexos

Anexo 1: Principales canales sobre matemáticas en la plataforma Youtube

Canal Youtube
<u>Susi profe</u>
<u>Derivando (Sáenz de Cabezón)</u>
<u>ArquímedesTube</u>
<u>Unicoos</u>
<u>Derivando</u>
<u>Math2me</u>
<u>El traductor de ingeniería</u>
<u>Jaque en mates</u>
<u>Vitual</u>
<u>Matemovil</u>
<u>Mates con Andrés</u>
<u>Matemáticas profe Alex</u>
<u>Podemos aprobar matemáticas</u>
<u>Julio Profe</u>
<u>Lasmatematicas.es</u>
<u>Las Matemáticas de Jalón</u>
<u>Profesor10demates</u>
<u>Academia Rubiños</u>
<u>Física y Matemáticas</u>
<u>Cuadernos de Matemáticas</u>
<u>MateSimplificadas</u>

Fuente: Elaboración propia.

