Tarea 1 - Problema 2 - Programación avanzada

Nicolás Aylwin

a) Velocidad con que sale del primer rebote:

Primero por conservacion de la energía, o sea, conversión de energía potencial gravitatoria en cinética se tendrá que la rapidez con que llega al chocar es:

$$v_0 = \sqrt{2g(y_0 - y_1)} \tag{1}$$

Siendo y_0 e y_1 la posición en y inicial y del primer rebote respectivamente, g aceleración de la gravedad y v_0 la rapidez.

Luego, se tiene que la velocidad con que choca, usando Ec.(1) es:

$$\vec{v_0} = v_0(0\hat{\imath} - \hat{\jmath}) = -\sqrt{2g(y_0 - y_1)}\hat{\jmath} \tag{2}$$

Por otro lado, el ángulo menor del plano formado por la recta tangente al punto donde choca es:

$$\alpha = -\arctan(\sin'(x_0)) = -\arctan(\cos(x_0)) \tag{3}$$

Con lo que es posible encontrar vectores unitarios tal que uno sea tangente y otro perpendicular a la curva en el punto (x_0, y_1). Usando trigonometría y considerando como llega la pelota (por conveniencia) se usarán:

$$\hat{t} = (\cos(\alpha), -\sin(\alpha)) \quad ; \quad \hat{n} = (-\sin(\alpha), -\cos(\alpha)) \tag{4}$$

Siendo $\hat{t}$ la componente tangencial y $\hat{n}$ la componente perpendicular. Ambos presentados respecto a $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Se sigue que la componente tangencial y perpendicular al plano de la velocidad presentada en la Ec.(2) será:

$$\vec{v_t} = (\vec{v_0} \cdot \hat{t})\hat{t} \quad ; \quad \vec{v_n} = (\vec{v_0} \cdot \hat{n})\hat{n}$$

Desarrollando esto último, usando Ecs.(2), (4) y expresando respecto a $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$:

$$\vec{v_t} = \left(\sqrt{2g(y_0 - y_1)}\sin(\alpha)\cos(\alpha), -\sqrt{2g(y_0 - y_1)}\sin^2(\alpha)\right) \tag{5}$$

$$\vec{v_n} = \left(-\sqrt{2g(y_0 - y_1)}\cos(\alpha)\sin(\alpha), -\sqrt{2g(y_0 - y_1)}\cos^2(\alpha)\right) \tag{6}$$

Se omitió expresar α según la Ec.(3) por estética.

Además, por la conservación del momentum y energía, luego del choque, la componente tangencial al plano se mantiene igual y la componente perpendicular se invierte. Dado esto, la velocidad con que sale del primer rebote, en terminos de $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, usando las Ecs.(5) y (6) finalmente es:

$$\vec{v_f} = \vec{v_t} - \vec{v_n}$$
$$\vec{v_f} = \left(2\sqrt{2g(y_0 - y_1)}\sin(\alpha)\cos(\alpha), \sqrt{2g(y_0 - y_1)}(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))\right)$$

Considerando que $y_1 = \sin(x_0)$, $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ y $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ se tiene finalmente:

$$\vec{v_f} = \sqrt{2g(y_0 - \sin(x_0))}\,(\sin(2\alpha), \cos(2\alpha))$$

b) Expresión para la posición del segundo impacto: Como $\vec{v_f}$ sale despedida con velocidad tanto en x como en y, se puede analizar como movimiento parabólico. Así se tiene:

$$x(t) = x_0 + v_{fx}t \tag{7}$$

$$y(t) = y_0 + v_{fy}t - \frac{gt^2}{2} = \sin(x_0) + v_{fy}t - \frac{gt^2}{2} \tag{8}$$

Siendo cada v_{fi} la componente de $\vec{v_f}$ en x e y respectivamente.

Despejando el tiempo en Ec.(7):

$$\frac{x(t) - x_0}{v_{fx}} = t$$

Y reemplazando en Ec.(8):

$$y = \sin(x_0) + \frac{v_{fy}}{v_{fx}}(x - x_0) - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_{fx}}\right)^2$$

Esta última ecuación describe la trayectoria de la parábola que sigue la pelota luego del primer rebote. Basta realizar un sistema de ecuaciones con $y = \sin(x)$ para tener la expresión buscada. Así se concluye:

$$f(x) = \sin(x_0) - \sin(x) + \frac{v_{fy}}{v_{fx}}(x - x_0) - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_{fx}}\right)^2 \tag{9}$$

Una de las raices de Ec.(9) corresponde al x del segundo rebote. Suponiendo que este sea x_1, se tendrá que la posición del segundo rebote es $(x_1, \sin(x_1))$.

c) En esta sección describiré el programa y como llegar al punto del tercer rebote: Primero se definieron todas las funciones que permiten calcular lo recién expuesto analíticamente. Luego de tener todos los valores numéricos de Ec.(9) (excepto x claramente pues es lo que buscamos), se procedió a graficar la función para analizar sus raíces y así usar el método de Newton-Raphson con conocimiento de que semilla nos llevará a lo que buscamos. Esto implicó derivar Ec.(9) y crear una función de esta.

Se adjunta el gráfico "raicesrebote2.png" de la Ec.(9) hecho en Gnuplot. En esta se ve que hay cuatro raices; dos menores que 3, lo que es imposible puesto la pelota rebota hacia la derecha, 3, pues claramente la parábola que describe el movimiento de la pelota pasa (y en particular choca con $\sin(x)$) por donde parte, y una mayor que 3. Esta última es la única respuesta con sentido físico.

Luego de obtener la posición del segundo rebote, que llamaré $(x_1, \sin(x_1))$, se obtiene la velocidad con que llega la pelota al segundo rebote. En particular por cinemática se tiene:

$$\vec{v_2} = \left(v_{fx}, v_{fy} - g\frac{x_1 - x_0}{v_{fx}} \right) \tag{10}$$

Usando Ec.(10) se puede reiterar el proceso de las componentes tangencial y perpendicular para encontrar la velocidad saliente del segundo rebote. Esta velocidad será $\vec{v_3}$.

Teniendo esta velocidad, basta llegar a la expresión de la posición para el tercer rebote. Siguiendo los mismos pasos previos, pero cambiando las constantes se tiene:

$$g(x) = \sin(x_1) - \sin(x) + \frac{v_{3y}}{v_{3x}}(x - x_1) - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_1}{v_{3x}}\right)^2$$

Una de las raíces de esta función corresponderá al x del rebote 3, llamémoslo x_2, con lo que la posición de este quedará determinada por $(x_2, \sin(x_2))$.

Esta última raiz también es obtenida con Newton-Raphson. En particular posee dos raíces, donde una es x_1 y la otra el esperado x_2. Se adjunta de igual manera el gráfico "raicesrebote3.png" hecho también con Gnuplot. La semilla en este caso también se escogió usando este gráfico.

El programa se ejecuta y directamente entrega en la terminal las condiciones iniciales y tanto las posiciones como velocidades en cada rebote.