Ejercicio 1

Halle una descomposición en valores singulares de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Solución

Buscamos matrices ortogonales U, V y una matriz diagonal Σ tales que $A = U\Sigma V^T$

Comenzamos por computar $B = A^T A$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Luego, nos interesa conocer los autovalores λ y autovectores $v \neq 0$ a derecha de B, tales que

$$\begin{aligned} Bv &= \sigma^2 v \\ \left(B - \sigma^2 I\right) v &= 0 \\ Cv &= 0 \end{aligned}$$

Como $v \neq 0$, C debe ser singular, con determinante $|\cdot|$ igual a cero. Construimos el *polinomio característico* correspondiente:

$$\begin{aligned} p(x) &= |C| \\ &= |B - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 8-x & 2 \\ 2 & 5-x \end{vmatrix} \\ &= (8-x)(5-x) - 4 \\ &= 40 - 8x - 5x + x^2 - 4 \\ &= x^2 - 13x + 36 \end{aligned}$$

Disgresión Para toda matriz cuadrada A de 2x2, su polinomio característivo es $p(x) = \det A - (\mathrm{Tr} A)\, x + x^2$. Para toda matrix cuadrada de 3x3, su p.c. es $p(x) = \det A + (a_{ij}a_{ji} - a_{ii}a_{jj})\, x + (\mathrm{Tr} A)\, x^2 - x^3$. Pruébelo.

Las raíces de $p(x)$ resultan ser

$$\begin{aligned} \{x_0, x_1\} &= \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 36}}{2} \\ &= \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \{9, 4\} \end{aligned}$$

Y los valores singulares no-nulos de Σ son las raíces de los autovalores hallados, $\{3, 2\}$. Excelente! Como A es de 2x2, U, Σ y V también. En particular, ya podemos completar $\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, y no hace falta "acolchonarla" con columnas de ceros.

Sabemos además que las columnas de V son los autovectores (normalizados) correspondientes a los autovalores de B. Computamos:

$$(B - 9I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se ve que un autovector cpte. a $\lambda_1 = 9$ es $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Procediendo análogamente para $(B - 4I)\, v = 0$, encontramos $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Como la norma de ambos vectores es $\sqrt{5}$, podemos escribir

$$V = V^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Con un poco de manipulación algebraica, podemos encontrar una expresión sencilla para U:

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^T \\ AV &= U\Sigma V^T V = U\Sigma \\ AV\Sigma^{-1} &= U\Sigma\Sigma^{-1} = U \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} U &= AV\Sigma^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lo cual completa nuestra descomposición

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T$$

Ejercicio 2

1. Escriba una función en Python, $dvs\left(A\right)$, que devuelva una terna U, S, VT con la descomposición en valores singulares de A, donde U y V son las matrices U, V^T; y S es un vector tal que $\Sigma = diag\left(S\right)$.

2. Compruebe que $dvs\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)$ retorna una solución equivalente a la que obtuvo en (1).

3. Genere 20 matrices $M_1, \ldots, M_{20}$ de 3x4 con entradas uniformemente elegidas entre 0 y 1. Compute $dvs\left(A\right)$, y compruebe que en todos los casos, el resultado sea equivalente a la implementación de referencia, $numpy.linalg.svd$