Aula 03 - Parte 02 - Geometria Analítica

Álgebra Linear e Teoria da Informação

Prof. Tiago Tavares

Geometria das Matrizes: Transformando o Espaço

Como a multiplicação de matrizes pode ser usada para rotacionar, expandir e mover objetos, a base fundamental para toda a computação gráfica.

Por que?

Na computação gráfica, costumamos partir de um modelo abstrato, que nos diz, por exemplo, onde estão os vértices de uma forma geométrica. Mas, para compor o nosso mundo, combinamos essas formas pré-definidas após alterá-las (rotacionando, cisalhando, expandindo, transladando...), e isso permite montar paisagens complicadas à partir de formas mais simples. Usando matrizes, conseguimos modelar essas alterações de uma forma compacta, que executa muito rapidamente tanto em CPUs usuais quanto nas GPUs modernas.

Multiplicação Matricial é uma Função

Podemos pensar em uma matriz A como uma "máquina" que recebe um conjunto de pontos x e os transforma em um novo conjunto de pontos y.

A operação $y = Ax$ aplica a transformação geométrica definida por A a cada ponto em x.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

Pontos em x são independentes

Podemos pensar em uma matriz A como uma "máquina" que recebe um conjunto de pontos x e os transforma em um novo conjunto de pontos y.

A operação $y = Ax$ aplica a transformação geométrica definida por A a cada ponto em x.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} + x_{2,1} & x_{1,2} + x_{2,2} \\ 2x_{2,1} & 2x_{2,2} \end{bmatrix}$$

Para o caso geral...

Nosso exemplo era:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} + x_{2,1} & x_{1,2} + x_{2,2} \\ 2x_{2,1} & 2x_{2,2} \end{bmatrix}$$

Para o caso geral, temos vários vetores-coluna $x_1, x_2, \cdots, x_k$, isto é:

$$Ax = A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ Ax_1 & Ax_2 & \cdots & Ax_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

As Transformações Lineares Básicas

- **Expansão/Contração:** Altera o tamanho ao longo dos eixos.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Cisalhamento (Shear):** "Inclina" a forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Rotação:** Rotaciona a forma em torno da origem (θ radianos no sentido anti-horário).

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Exercício

Aplique as seguintes transformações sobre o ponto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

E se quisermos aplicar múltiplas transformações? Por exemplo, primeiro comprimir e depois rotacionar.

Podemos fazer isso em etapas. Partimos de uma matriz de rotação R e de uma matriz de compressão C e então conseguimos:

$$y = R(Cx) = RCx = (RC)x = Tx$$

A matriz $T = RC$ executa a compressão e a rotação simultaneamente!

A Translação

Existe uma transformação geométrica fundamental que não conseguimos fazer com uma matriz 2x2: a **translação** (mover a forma).

A translação é uma **soma** de vetores, não uma multiplicação: $y = x + \Delta x$.

A multiplicação matricial sempre deixa o ponto (0,0) no lugar. Para mover a forma inteira, precisamos de uma nova abordagem.

A Solução: Coordenadas Homogêneas

O truque é adicionar uma terceira dimensão "fictícia" aos nossos vetores, que sempre terá o valor 1.

O vetor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ se torna $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Com essa mudança, agora podemos representar uma translação usando uma **multiplicação matricial** com uma matriz 3x3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 + \Delta x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Matriz de Transformação Unificada

Com coordenadas homogêneas, podemos representar TODAS as transformações (rotação, escala, cisalhamento E translação) como uma única matriz 3x3.

As matrizes 2x2 anteriores são "promovidas" para 3x3:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CHAMADA!

1. Fazer a chamada
2. Notebook de hoje: aula 3 parte 2
3. APS 3 já está online
4. O teste da APS será na *quinta que vem*