Aula 03 - Parte 01 - Geometria Analítica

Álgebra Linear e Teoria da Informação

Prof. Tiago Tavares

A Reta e a Equação

Toda equação de primeiro grau, como $y = ax + b$, pode ser representada como uma reta em um plano.

- a é o **coeficiente angular**, que define a inclinação da reta.
- b é o **coeficiente linear**, que define onde a reta cruza o eixo y.

Cada ponto (x, y) na reta é uma "solução" para a equação.

O Ponto de Encontro

Considere dois corredores:

- **Corredor 1:** Parte do km 3 e corre a 5 km/h. ($y = 5x + 3$)
- **Corredor 2:** Parte do km 5 e corre a 2 km/h. ($y = 2x + 5$)

Quando e onde eles se encontrarão?

A Visão Algébrica: O Sistema Linear

O problema dos corredores pode ser escrito como um **sistema de equações**. Encontrar a solução do sistema é o mesmo que encontrar o ponto de interseção das retas.

$$\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

A solução deste sistema é o único par (x, y) que satisfaz **ambas** as equações simultaneamente.

A Conexão: Cada Linha da Matriz é uma Reta

Podemos reescrever nosso sistema na forma matricial $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{Y}$. Cada linha da matriz A define uma das retas do nosso sistema.

$$\begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + y = 3 \\ -2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\text{Y}}$$

- A primeira linha $[-5, 1]$ corresponde à equação $-5x + 1y = 3$.
- A segunda linha $[-2, 1]$ corresponde à equação $-2x + 1y = 5$.

E Quando as Retas Não se Cruzam?

Duas retas são **paralelas** quando elas têm a mesma inclinação (mesmo coeficiente angular a).

Quando um sistema de equações é formado por retas paralelas, não há um ponto de interseção. Isso significa que o sistema **não tem solução única**.

O Teste do Cruzamento: O Determinante

Como saber se as retas de um sistema se cruzam sem precisar desenhá-las? Usamos o **determinante** da matriz A.

O determinante é um número único calculado a partir da matriz que nos diz sobre a geometria do sistema.

- Se $\det(A) \neq 0$: As retas se cruzam em um único ponto. O sistema tem uma solução única.
- Se $\det(A) = 0$: As retas são paralelas (sem solução) ou coincidentes (infinitas soluções). O sistema não tem solução única.

Como calcular um determinante (2x2)

Vamos partir do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

1. Quais são as retas determinadas pelo sistema?
2. Qual é o coeficiente angular das retas?
3. Como podemos calcular D para que as retas sejam paralelas (mesmo coeficient angular)?
4. Extrapole esse resultado para o caso geral:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Matriz Singular

Uma matriz cujo determinante é zero é chamada de **matriz singular**.

O fato mais importante sobre matrizes singulares é que elas **não possuem uma matriz inversa**.

É por isso que a tentativa de resolver um sistema com retas paralelas usando `np.linalg.inv(A)` resulta em um erro. A geometria (retas que não se cruzam) e a álgebra (a matriz não pode ser invertida) estão nos dizendo a mesma coisa: não há uma solução única para ser encontrada.

Conclusão: Três Visões, Um Problema

Para um sistema de duas equações com duas variáveis, existem três maneiras de enxergar o mesmo conceito:

Visão	Tem Solução Única	Não Tem Solução Única
Realidade	Corredores se encontram	Corredores nunca se encontram
Geometria	As retas se cruzam em um ponto	As retas são paralelas
Álgebra	$det(A) \neq 0$ (A matriz é invertível)	$det(A) = 0$ (A matriz é singular)