Aula 01 - Parte 02 - Módulo e Direção

Álgebra Linear e Teoria da Informação

Prof. Tiago Tavares

Vetores: Módulo e Direção

Nesta aula, vamos além da soma. Veremos que vetores têm um **tamanho** (módulo) e uma **direção** (argumento), e como usar essas propriedades para controlar o movimento de forma mais precisa.

O Módulo: O Comprimento do Vetor

Um vetor pode ser visto como a hipotenusa de um triângulo retângulo. Nesse triângulo, as componentes (x, y) são os catetos.

O **módulo** (ou norma) de um vetor é o seu comprimento. Usando o Teorema de Pitágoras, podemos calculá-lo:

Para um vetor $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y]$:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Calculando o Módulo

Calcular o módulo é uma aplicação direta de Pitágoras.

- Para o vetor **[3, 4]**:
  $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$
- Para o vetor **[-3, 4]**:
  $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

O sinal dos componentes não afeta o comprimento do vetor.

Módulo em Múltiplas Dimensões

A ideia do Teorema de Pitágoras se generaliza para qualquer número de dimensões. Para um vetor $\boldsymbol{x}$ com n dimensões:

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$$

Em código, podemos fazer isso com um laço, mas o NumPy nos oferece uma função para isso:.

```
mod = np.linalg.norm(x)
```

A Direção: O Argumento do Vetor

Além do tamanho, um vetor tem uma direção, que pode ser representada pelo ângulo ϕ que ele forma com o eixo horizontal.

Usando trigonometria básica no triângulo retângulo do vetor, podemos encontrar esse ângulo.

A função `np.arctan2(y, x)` calcula automaticamente esse ângulo.

Efeito da Multiplicação por Escalar

O que acontece quando multiplicamos um vetor $\boldsymbol{v}$ por um número (escalar) a?

- **Módulo:** O novo módulo será $|a| \times |\boldsymbol{v}|$. O comprimento é escalonado pelo valor absoluto do número.
- **Direção:**
  - Se $a \geq 0$, a direção **não muda**.
  - Se $a < 0$, a direção é **invertida** (somamos 180 graus ou π radianos ao ângulo).

Normalização: demonstração matemática

Partimos de um vetor x. Gostaríamos de um vetor y, com a mesma direção de x, mas com módulo 1. Então, temos que:

$$
\begin{aligned}
x &= |x|\angle\phi_x \\
y &= 1\angle\phi_x
\end{aligned}
$$

Sabemos também que:

$$ax = a|x|\angle\phi_x$$

Normalização: demonstração matemática (parte 2)

Se fizemos $y = ax$, então temos:

$$\begin{aligned} 1\angle\phi_x &= a|x|\angle\phi_x \\ 1 &= a|x| \\ a &= \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

Isso significa que, ao multiplicar x por $1/|x|$, encontramos um vetor y com mesma direção de x mas com módulo 1.