Aula 02 - Parte 03 - Sistemas Lineares e Matrizes

Álgebra Linear e Teoria da Informação

Prof. Tiago Tavares

Resolvendo um sistema linear

Já sabemos resolver sistemas lineares. Por exemplo, para resolver:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Antes de prosseguir, resolva esse sistema, encontrando x e y em função de a e b.

Resolvendo um sistema!

Uma solução possível é assim:
podemos somar e subtrair as duas equações. Daí, partimos de:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

E encontramos:

$$\begin{cases} \text{Somando: } x + y + (x - y) = a + b \\ \text{Subtraindo: } x + y - (x - y) = a - b \end{cases} \to \begin{cases} 2x = a + b \\ 2y = a - b \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Analisando nossa solução

Veja como agora temos dois sistemas:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Podemos escrever os dois sistemas na forma matricial!

Soluções: forma matricial

Nossos sitemas ficam assim:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Exercício: calcule

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

Se tudo deu certo, você encontrou que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veja que:

- Essa matriz quadrada, com 1 na diagonal principal e 0 em todos os outros elementos, se chama *Matriz Identidade* (I).
- Quando a multiplicação $AB = I$, dizemos que B é a inversa de A, ou $B = A^{-1}$.
- Qualquer matriz, multiplicada por I, é igual a ela mesma: $XI = X = IX$

Exercício

Sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcule X em:

$$X = A(AA^{-1})(IA^{-1})AIA^{-1}A^{-1}(A^{-1}A^{-1})^{-1}$$

Exercício

Sabendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

verifique que $A = A^{-1}$.