概率论与数理统计课程小论文

递推在概率论中的应用

班号	计算机与电子通信七班
学号	111111
姓名	xx
日期	2025.12.01
成绩	

摘 要

本文旨在探讨递推思想在概率论与数理统计中的核心应用。递推方法通过全概率公式对随机过程的"第一步"进行条件分析，将复杂的概率问题分解为结构相同的子问题，从而构建出可求解的代数关系，本文讲解了三个经典问题：首先，分析"伯努利装错信封问题" $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$。其次，通过建立期望值的递推关系，分析了"递增游程问题"中抽牌数量的期望及其渐近性质。最后，通过"赌徒破产问题" $P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$ 的递推关系，推导了赌徒获胜概率的通项公式，计算出公平与不公平赌局下的不同结果，同时展示了马尔可夫链的应用。

关键字： 概率论　递推关系　错排问题　赌徒破产　递增游程

一、 递推在概率论中的应用

1.1 概率论中的序列问题与递推思想

概率论与数理统计中的许多核心问题，与序列性或时间或试验次数有关。这些问题考察的对象往往随时间或试验次数或某些因素变化，例如：一个系统在第 n 步的状态、在 n 次试验中等待某个模式的出现 。

递推关系是描述序列最强有力的数学工具之一，它通过序列的前 k 项来定义第 n 项。这种思想在计算机科学的算法分析中被广泛用于分析时间复杂度（例如斐波那契数列或归并排序 ）。然而，在概率论中，递推扮演着更为深刻的建模角色，通过对某个事件列出递推公式，我们可以将问题转化为数列求解问题，利用不动点，线性递推等方法求出通项公式。

1.2 递推方法的核心思想

我们可以通过全概率公式去推算出第 n 步与前面 $n-1$ 步的关系，从而建立递推关系。这种方法的核心在于将复杂的问题分解为更简单的子问题，通过递推公式逐步求解。递推方法的关键步骤包括：

1. 找出所求事件概率与某个参数的关系（例如，试验次数 n、赌徒的资本 i）的概率 P_n 或期望 E_n。
2. 我们利用全概率公式，将问题在 n 状态下的求解 。
3. 以概率为例， $P_n = \sum_j P(P_n \mid \text{第一步结果为 } j) \cdot P(\text{第一步结果为 } j)$。
4. 该方法的关键在于，在给定第一步的结果 j 之后，剩余的问题 $P(P_n \mid \text{第一步结果为 } j)$ 通常可以被简化为 同一类型（例如 $n-1$ 或 $n-2$）的子问题 。
5. 通过这种方式，我们建立了一个关于 P_n, P_{n-1} 和 P_{n-2} 的代数方程——即递推关系。
6. 最后根据递推公式求解通项公式。

二、 递推方法的应用

2.1 伯努利装错信封问题

“装错信封问题”是组合概率论中最经典的问题之一。

问题描述如下：将 n 封写给 n 个不同收信人的信，随机放入 n 个对应的信封（每个信封对应一个收信人）。我们关心的是“完全错配”的排列数量，即 没有 一封信被放入正确信封的排列数，记为 D_n 。我们的最终目标是求解在 $n!$ 种总排列中，发生完全错配的概率 $P_n = \frac{D_n}{n!}$ 。

2.1.1 递推关系的建立

$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

我们用有多少封信要装作为下标，考虑“第 1 封信”的放在哪里。总共有 $n!$ 种排列。

步骤一：考虑第 1 封信（记为信 1）。要构成一个错排，信 1 不能 放入第 1 个信封（记为信封 1）。因此，信 1 有 $(n-1)$ 种选择。我们假设信 1 被放入了第 k 个信封

步骤二：在信 1 放入信封 k 的前提下，我们对放在哪里进行分类讨论

- 信 k 放入了信封 1
  - 信 1 在信封 k 中，信 k 在信封 1 中
  - 问题被简化为：我们只需确保剩下的 $(n-2)$ 封信（即除了 1 和 k 之外的所有信）也必须全部装错（即信 i 不放入信封 i， $i \neq 1且i \neq k$）
  - 满足这种情况的方法数，根据定义，等于 $(n-2)$ 个元素的错排数，即 D_{n-2}
- 信 k 没有放入信封
  - 此时，信 1 在信封 k 中。对于剩下的 $(n-1)$ 封信，我们必须将它们放入剩下的 $(n-1)$ 个信封中
  - 这等价于一个 新 的 $(n-1)$ 元素的错排问题：我们有 $(n-1)$ 个元素和 $(n-1)$ 个“目标位置”。在这个新问题中，信 k 的“正确”位置被指定为信封 1，而其他信的正确位置保持不变，满足这种情况的方法数为 D_{n-1} 。

步骤三： 得到最终的递推关系： $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

初始条件为： $D_1 = 0, D_2 = 1$

步骤四：利用递推关系求解通项公式

根据以上的递推关系，我们可以得出通项公式是： $D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

2.1.2 极限分析

当 $n \to \infty$ 时，P_n 的表达式 $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ 正是指数函数 e^x 在 $x = -1$ 处的泰勒级数展开式。因此，我们有：$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$ 所以，随着信封数量的增加，完全错配的概率趋近于 $\frac{1}{e}$，这是一个很优美的结果。

2.1.3 装错信封问题总结

通过对装错信封问题的递推分析，我们不仅得到了错排数的递推关系，还推导出了其通项公式$D_n = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$。这一结果体现了递推方法在解决组合概率问题中的作用。

2.2 递增游程问题

本题目灵感来自于《The first course in probability》[1] 的游程问题。问题描述如下：一个牌堆中有 $1 \sim n$ 号牌，抽到每一种序号的概率是相等的。现在开始抽牌，要求抽出来的牌序号必须严格递增。一旦抽到的牌序号小于或等于上一张牌的序号，则停止抽牌，并将当前这张牌也算入拿走的牌中。例如：若抽取顺序是 “1, 2, 3, 4, 1”，由于最后一张 $1 < 4$，停止抽牌，共拿走 5 张牌。求拿走牌的数量的期望。

我们定义 E_n 为从 n 张牌中抽取时，拿走牌的数量的期望，显然 $E_0 = 1$ 。我们的目标是求解 E_n 。

2.2.1 递推关系的建立

步骤一 ：定义随机变量 L 为拿走牌的数量。我们引入指示变量 I_k 表示第 k 张牌是否被拿走：

$$I_k = \begin{cases} 1, \text{如果第 } k \text{ 张牌被拿走} \\ 0, \text{如果第 } k \text{ 张牌没被拿走} \end{cases} \tag{1}$$

显然，总共拿走的牌数 $L = \sum_{k=1}^{n} I_k$。根据期望的线性性质：

$$E[n] = E\left[\sum_{k=1}^{n} I_k\right] = \sum_{k=1}^{n-1} E[I_k] + E[I_n] \tag{2}$$

其中前 $n-1$ 项的和正是 $n-1$ 张牌时的期望 $E[n-1]$。而 $E[I_n] = P(I_n = 1)$，即第 n 张牌被拿走的概率。 因此可得递推关系：$E[n] = E[n-1] + P(L \geq n)$。 事件 $L \geq n$ 意味着前 n 张牌必须是严格递增的。

步骤二 ：计算 $P(L \geq n)$

对于任意 n 张牌，它们严格递增排列的概率是 $\frac{1}{n!}$。 因此，$P(L \geq n) = \frac{1}{n!}$ 。

步骤三： 建立递推关系

得到最终的递推关系： $E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n!}$

步骤四： 求出通项公式

利用累加法，我们可以直接得出通项公式为： $E_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$

2.2.2 极限分析

当 $n \to +\infty$ 时，级数 $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ 正是 e^x 在 $x = 1$ 处的泰勒展开。因此： $\lim_{n\to\infty} E_n = e$

这表明，当牌的数量非常大时，拿走牌的数量的期望趋近于 e。

2.2.3 递增游程问题总结

通过对递增游程问题的递推分析，我们建立了期望 E_n 的递推关系 $E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n!}$，并推导出了通项公式 $E_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$。这一结果不仅揭示了递推方法在解决期望计算中的应用，还展示了当牌的数量趋近于无穷大时，期望值趋近于数学常数 e 的优美性质。

2.3 赌徒破产问题

考虑一个赌徒，其初始资本为 i 元。在每轮独立的赌局中，他以概率 p 赢 1 元，以概率 $q = 1 - p$ 输 1 元。赌局在以下两种情况之一发生时结束：

1. 总资本达到 0 元。
2. 总资本达到 N 元。

我们定义 P_i 为赌徒从 i 元资本开始，在破产之前 成功达到目标 N 的概率

我们要求解 P_i (对于 $0 < i < N$)。这个问题的解完全由递推关系和结束条件确定：

- 结束条件 1: $P_0 = 0$。如果赌徒从 0 元开始，他已经破产，因此他达到 N 的概率为 0。
- 结束条件 1: $P_N = 1$。如果赌徒从 N 元开始，他已经达到了目标，因此概率为 1 。

2.3.1 递推关系的建立

步骤一 ：设 A 为赌徒最终达到 N 的事件。$P_i = P(A \mid 初始资本\ i)$ $P_i = P(A \mid 第一局赢) \cdot P(第一局赢) + P(A \mid 第一局输) \cdot P(第一局输)$ 。

步骤二： $P(第一局赢) = p$ 且 $P(第一局输) = q$，我们有：

- $P(A \mid 第一局赢)$：如果第一局赢了，赌徒的资本变为 $i + 1$。赌局是独立的，赌徒从 $i + 1$ 元出发并最终达到 N 的概率，根据 P_i 的定义，就是 P_{i+1}
- $P(A \mid 第一局输)$：如果第一局输了，赌徒的资本变为 $i - 1$。同理，他最终达到 N 的概率是 P_{i-1}。

步骤三：得到递推关系： $P_n = pP_{n+1} + qP_{n-1}$

步骤四：求解递推关系的特征根，设为 r_1 和 r_2，得到通解为：$P_n = Ar_1^n + Br_2^n$ 其中 A 和 B 由边界条件确定。（线性递推方程求解方法参考附录 2）

2.4 结果分析

2.4.1 公平赌局

如果输赢概率均为 $p=q=0.5$，则通项公式简化为： $P_i=\frac{i}{N}$

解释：在公平赌局中，赌徒获胜的概率等于其初始资本占总资本的比例。这是一个非常优美的结果。

2.4.2 不公平赌局

此时， $x_1=1, x_2=\frac{q}{p}\neq 1$，特征根是不同的

通项公式为： $P_i=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N-1}$ 解释：在不公平赌局中，赌徒获胜的概率取决于输赢概率的比值 $\frac{q}{p}$ 以及初始资本 i 和目标资本 N 。

2.5 赌徒破产问题总结

赌徒破产问题不仅体现了递推方法在概率论中的应用，还展示了线性递推方程的求解技巧，证明当一个问题与步数或时间有关时，递推关系是分析其概率性质的有力工具。

附录 1：

问题总结表格

经典问题	变量定义	递推关系	边界/初始条件	求解/极限
装错信封问题	D_n: n 个元素的错排数	$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$	$D_1 = 0$, $D_2 = 1$	$P_n = \frac{D_n}{n!} \to \frac{1}{e}$
递增游程问题	E_n: 从 n 张牌中 n 抽取牌数的期望	$E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n!}$	$E_0 = 1$	$E_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \to e$
赌徒破产问题	P_i: 从 i 元达到 N 元的概率	$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$	$P_0 = 0$, $P_N = 1$	$p = \frac{1}{2}$: $P_i = \frac{i}{N}$ $p \neq \frac{1}{2}$: $P_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$

表 1　三个经典递推问题的总结对比

附录 2：

线性递推方程的求解方法

2.6 线性递推方程简介

附录中对线性方程的介绍参考了 数学奥林匹克小丛书[2] 中的的内容。

线性递推方程（Linear Recurrence Relation）是形如：

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \tag{3}$$

的方程，其中 $c_1, c_2, ..., c_k$ 为常数系数。

2.6.1 步骤二：求解特征根

通过求解特征方程：

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - ... - c_k = 0 \tag{4}$$

解出特征根$r_1, r_2, ..., r_k$。

2.6.2 步骤三：构建通解

根据特征根的不同情况，构建通解：

- 若特征根互不相同，则通解为：

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + ... + A_m r_m^n \tag{5}$$

- 若存在重根，则通解中需乘以 n 的幂次。

2.6.3 步骤四：确定常数

利用初始条件，将初始条件代入通项公式，求解通解中的常数 $A_1, A_2, ..., A_m$。

参考文献

[1] ROSS S M. A First Course in Probability[M]. 9 版. Boston, MA: Pearson, 2014.

[2] 冯志刚. 数学奥林匹克小丛书·高中卷：数列与数学归纳法[M]. 3 版. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.