

# 用 Schechter 函数拟合星系的光度分布

陈奥 (2019302020220)

(武汉大学物理科学与技术学院, 湖北省 武汉市 430072)

2022 年 5 月 24 日

**摘要:** 简要介绍光度函数并使用 MLE 方法对 6dFGS 样本进行拟合。

**关键词:** 光度函数, 最大概然估计

## Fit Luminosity Distribution with Schechter Function

**Abstract:** A brief introduction to luminosity function and use MLE method to fit 6dFGS samples.

**Key words:** luminosity function, MLE

### 第 1 节 基本概念

#### 1.1 共动体积 (comoving volume)

参考: [1]

RW 度规:

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right\} \quad (1)$$

Hubble Parameter:

$$H(z) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H_o \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (2)$$

其中  $H_o$  是哈勃常数,  $\Omega$  是宇宙各组分的归一化密度, 本文取  $H_o = 67.66 \text{ km/s/Mpc}$ ,  $\Omega_M = 0.3111$ ,  $\Omega_k = 0.0007$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.6889$ ,  $z$  为红移。

物体扣除宇宙膨胀后相对观察者的 (径向) 距离称为共动距离 (comoving distance):

$$D_C = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3)$$

在天球上相距角距离  $\delta\theta$  且红移同为  $z$  的两物体的共动距离为  $D_M$ :

$$D_M = \begin{cases} \frac{D_H}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh [\sqrt{\Omega_k} D_C / D_H], & \Omega_k > 0 \\ D_C, & \Omega_k = 0 \\ \frac{D_H}{\sqrt{|\Omega_k|}} \sin [\sqrt{|\Omega_k|} D_C / D_H], & \Omega_k < 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 Hubble distance 为:  $D_H = c/H_o$ 。那么共动体积元就应为:

$$dV_C = dD_C \cdot D_M^2 \cdot d\Omega = \frac{c}{H(z)} dz \cdot D_M^2 \cdot d\Omega = \frac{c D_M^2}{H(z)} d\Omega dz \quad (5)$$

即扣除宇宙膨胀后的体积元, 用于定义光度函数。astropy.cosmology 中的 LambdaCDM 能根据给定的宇宙学参数计算相关的共动参量。

## 1.2 光度与星等

AB magnitude 系统 [2]:

$$m_{\text{AB}} = -2.5 \log_{10}(F_{\nu}) - 48.60 \quad (6)$$

$f_{\nu}$  单位为  $\text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$ 。由此可得光度:

$$L = 4\pi D_L^2 F \quad (7)$$

其中  $D_L$  为光度距离:

$$D_L = (1 + z) D_M \quad (8)$$

## 第 2 节 光度函数

参考: [3]

### 2.1 Schechter 函数

以  $\mathbf{x}$  为中心的体积  $dV_C$  中, 绝对星等  $(M + dM, M)$  范围内的星系/恒星数目为  $dN$ :

$$dN = \Phi(M, \mathbf{x}) dM dV_C = [\Phi(M) dM] [\nu(\mathbf{x}) dV_C] \quad (9)$$

$\Phi(M)$  被称为光度函数, 它测量不同光度星系/恒星的相对份额,  $\nu(\mathbf{x})$  测量在点  $\mathbf{x}$  处的星系/恒星总数密度。讨论光度函数前必须剔除空间分布  $\nu(\mathbf{x})$  的影响。

$$\phi(L, z) = \frac{d^2 N(L, z)}{dV dL} \quad (10)$$

用星等表示的 Schechter[4]函数:

$$\Phi(M) = (0.4 \ln 10) \Phi^* 10^{0.4(\alpha+1)(M^*-M)} \exp(-10^{0.4(M^*-M)}) \quad (11)$$

用光度表示的 Schechter 函数:

$$\Phi(L) = \left( \frac{\Phi^*}{L^*} \right) \left( \frac{L}{L^*} \right)^{\alpha} \exp(-L/L^*) \quad (12)$$

$\alpha$  的典型值接近-1, 它预言了巨大数目的低光度星系。

### 2.2 场星系光度函数

考虑宇宙区域中“场”星系的  $\Phi(M)$  的一般步骤:

- 测量选定样本中所有星系的视星等
- 由观测到的星系的红移得距离, 再将星系的视亮度转化为绝对星等

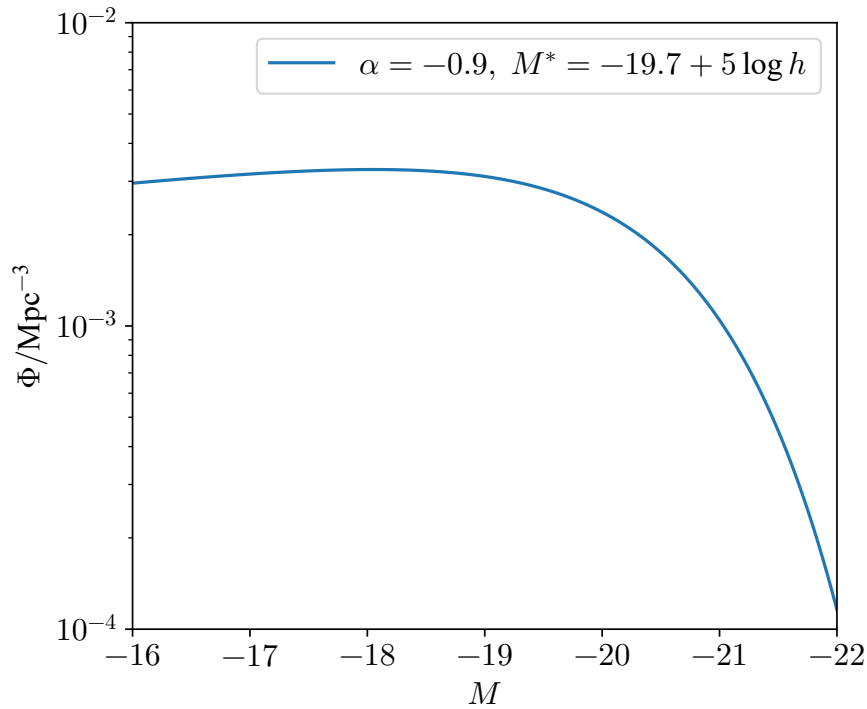


图 1: Schechter 函数, 参数取自 [5]

- 数出每个绝对星等间隔  $(M, M + dM)$  范围内的星系数目, 并结合巡天的空间体积  $V$ , 将其转化为所要求的星系密度。

用蓝光来研究光度函数有一个缺点: 产生大部分蓝光的年轻恒星实际只占了银河系星族中的一小部分, 可以推测其他星系的情况也与此类似。因而, 用蓝光得到的光度函数也许不能恰当地代表这些系统中恒星的平均性质。较新近的研究是在红外波段进行的, 该波段的辐射为比较典型的恒星所主导。

### 2.3 其他

更细致的划分还包括团星系光度函数和按形态划分的光度函数。

## 第 3 节 Malmquist 偏离

测定一个光度函数的许多方法都涉及到计算天空某个给定区域内视星等范围  $(m + dm, m)$  内的天体数目  $dN$ 。恒星计数函数

$$A(m) \equiv \frac{dN}{dm} \quad (13)$$

明显依赖于天体的空间分布和它们的光度函数。因为确定  $A(m)$  至任意暗星等是不可能的, 必将有某个**极限星等**  $m_1$ , 使  $A(m)$  只对  $m < m_1$  适用。这个能使  $A(m)$  建立起来的最简单天体样本是**星等限定的**, 其由天空中一个特定区域内所有亮于  $m_1$  的天体组成。不难看出, 在这样一个样本中, 天体的平均绝对星等将比整个总体的平均绝对星等要亮。因此在使用巡天数据时一定要考虑星等限定的

影响。

## 第4节 6dFGS 巡天

根据相关论文 [6] 中给出的公式：

$$M_{b_j} = b_j - \mu - A_{b_j} - K_{b_j}^z \quad (14)$$

其中  $b_j$  为视星等， $\mu = 5 \log \left( \frac{D_L}{10 \text{pc}} \right)$  是距离模数， $A_{b_j}$  是消光， $K_{b_j}^z$  是 k 改正： $K_{b_j}^z = 2.6z + 4.3z^2$ 。忽略消光，可以得到光度数据：

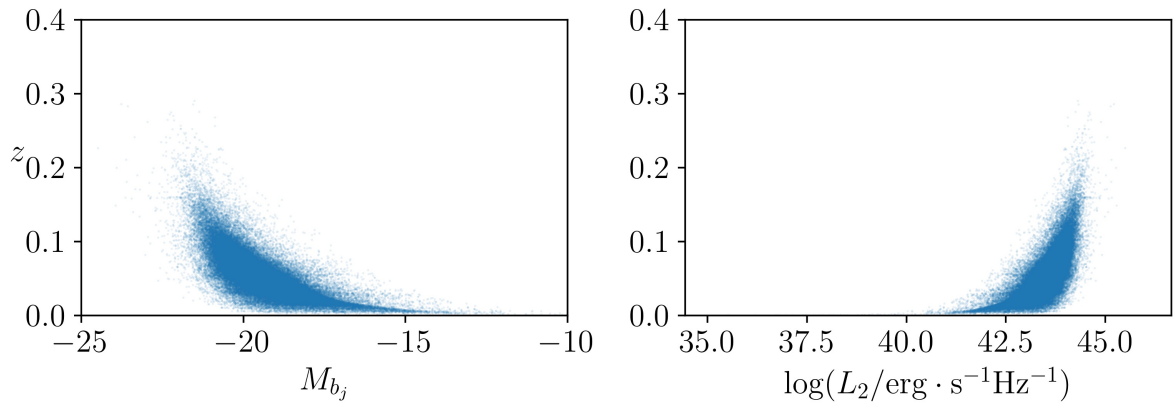


图 2: M-z 与 L-z 的分布

## 第5节 拟合方法

主要参考 [7] 的方法。

$$p(L, z|\theta) = \prod_{i=1}^N p(L_i, z_i|\theta) \quad (15)$$

其中  $\theta = (\alpha, L^*)$ 。考虑星等限定的样本：假设整个区域中视星等  $b_j > 17.5$  的源均未被观测到，如图3所示。数学上反映为一个额外的选择函数 (selection function):  $p(I|L, z)$ ，再设整个区域中共有  $N$  个源，其中  $n$  个被观察到，likelihood 函数则为：

$$p(L_{\text{obs}}, z_{\text{obs}}, \mathbf{I}|\theta, N) = C_n^N \prod_{i \in \mathcal{A}_{\text{obs}}} p(I_i = 1|L_i, z_i) p(L_i, z_i|\theta) \times \prod_{j \in \mathcal{A}_{\text{mis}}} p(I_j = 0|L_j, z_j) p(L_j, z_j|\theta) \quad (16)$$

由于未被观察到的源  $\{\mathcal{A}_{\text{mis}}\}$  的  $L$  和  $z$  未知，用积分代替，可得：

$$p(L_{\text{obs}}, z_{\text{obs}}, \mathbf{I}|\theta, N) \propto C_n^N [p(I = 0|\theta)]^{N-n} \prod_{i \in \mathcal{A}_{\text{obs}}} p(L_i, z_i|\theta) \quad (17)$$

其中  $p(I = 0|\theta) = \int \int p(I = 0|L, z) p(L, z|\theta) dL dz$  为对图3阴影部分的积分。

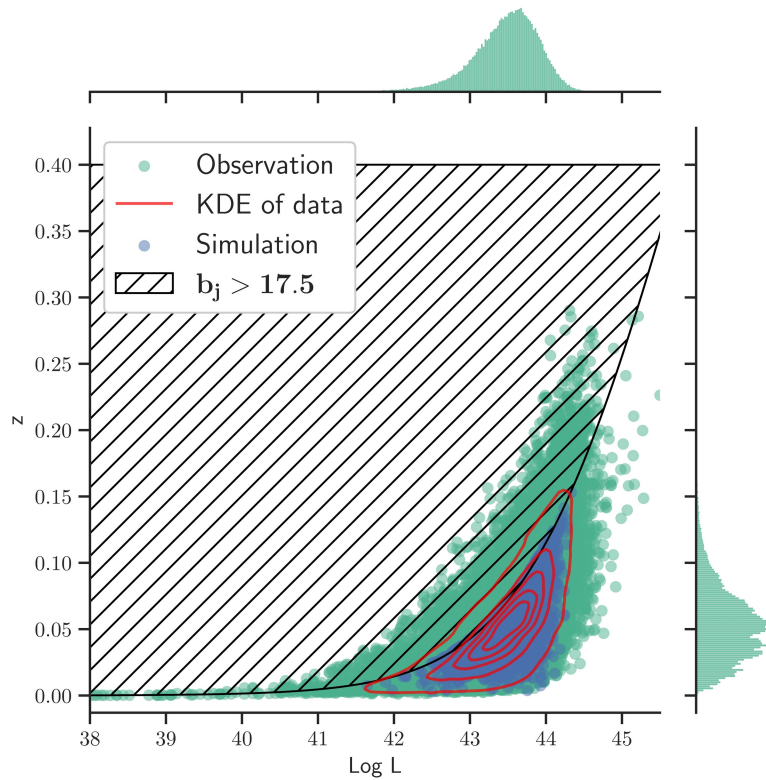


图 3: 星等限定示意图

为简单起见, 使用一刀切的选择函数: 
$$\begin{cases} p(I = 1 | b_j < 17.5) = 1 \\ p(I = 0 | b_j > 17.5) = 0 \end{cases}$$

初步结果: 
$$\begin{cases} \alpha = -7.8 \times 10^{-2} \\ L^* = 2.0 \times 10^{43} \text{ erg/s} \end{cases}$$

根据得到的  $\alpha$  和  $L^*$  作蒙特卡罗模拟 (图3中的蓝点), 与观测数据对比如下:

## 第 6 节 分析与讨论

模拟与观测数据都呈拖尾分布, 中心值接近, 但两端的拖尾分布差别较大, 可能是因为拟合时使用的数据未加筛选, 不能满足星系均匀分布的前提条件。可从数据中进一步选取那些星系空间分布较为均匀的星系团再作拟合。如 [8]就使用了 60 个至少包含 40 个星系的星系团。

图 3做的非常漂亮! 现在的问题转化成: 如何比较两套数据 (一套来自于观测, 一套来自于数值模拟) 是否来源于同一个分布。图4 是一个定性的对比。原则上由别的方法来定量的回答这个问题。

也可改进 Selection Function, 将二值函数改为一个高斯分布, 从而避免一刀切, 浪费观测数据。另外, 除了 MLE 方法外, 也可使用贝叶斯估计和非参数化的 Lynden-Bell's  $C^-$  method。

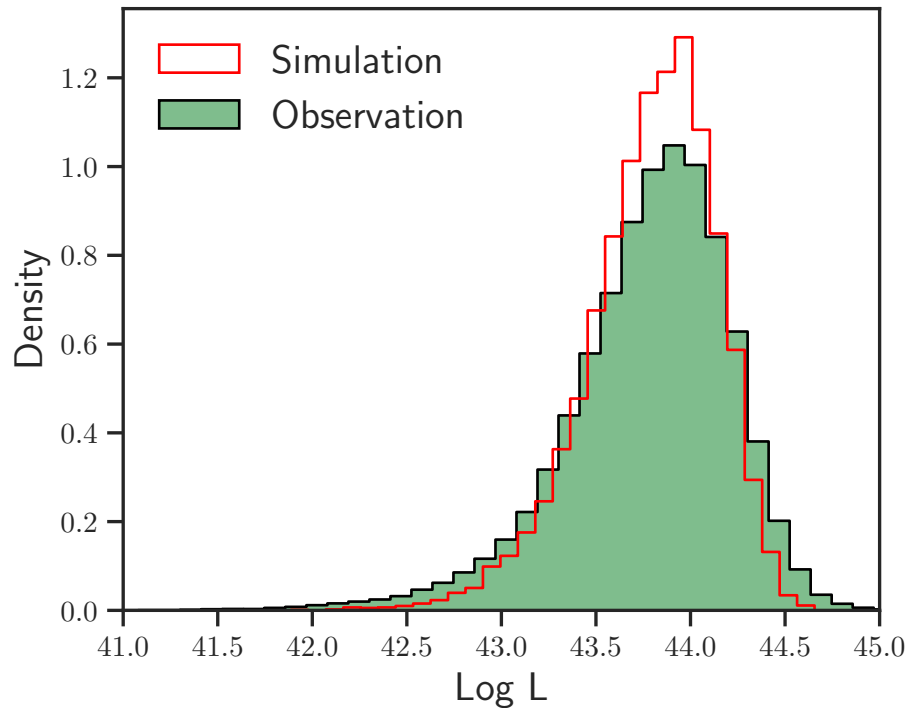


图 4: 蒙特卡罗模拟与观测对比

## 参考文献

- [1] David W. Hogg. Distance measures in cosmology, 1999. 1.1
- [2] Wikipedia contributors. Ab magnitude — Wikipedia, the free encyclopedia, 2021. [Online; accessed 2-April-2022]. 1.2
- [3] James Binney and Michael Merrifield. *Galactic Astronomy*. 1998. 2
- [4] P. Schechter. An analytic expression for the luminosity function for galaxies. , 203:297–306, January 1976. 2.1
- [5] G. Efstathiou, Richard S. Ellis, and Bruce A. Peterson. Analysis of a complete galaxy redshift survey. II. The field-galaxy luminosity function. , 232:431–461, May 1988. 1
- [6] Roberto De Propris, Matthew Colless, Simon P. Driver, Warrick Couch, John A. Peacock, Ivan K. Baldry, Carlton M. Baugh, Joss Bland-Hawthorn, Terry Bridges, Russell Cannon, Shaun Cole, Chris Collins, Nicholas Cross, Gavin B. Dalton, George Efstathiou, Richard S. Ellis, Carlos S. Frenk, Karl Glazebrook, Edward Hawkins, Carole Jackson, Ofer Lahav, Ian Lewis, Stuart Lumsden, Steve Maddox, Darren S. Madgwick, Peder Norberg, Will Percival, Bruce Peterson, Will Sutherland, and Keith Taylor. The 2dF Galaxy Redshift Survey: the luminosity function of cluster galaxies. , 342(3):725–737, July 2003. 4

- 
- [7] Brandon C. Kelly, Xiaohui Fan, and Marianne Vestergaard. A flexible method of estimating luminosity functions. *The Astrophysical Journal*, 682(2):874–895, aug 2008. 5
- [8] Michael R. Blanton, David W. Hogg, Neta A. Bahcall, J. Brinkmann, Malcolm Britton, Andrew J. Connolly, István Csabai, Masataka Fukugita, Jon Loveday, Avery Meiksin, Jeffrey A. Munn, R. C. Nichol, Sadanori Okamura, Thomas Quinn, Donald P. Schneider, Kazuhiro Shimasaku, Michael A. Strauss, Max Tegmark, Michael S. Vogeley, and David H. Weinberg. The Galaxy Luminosity Function and Luminosity Density at Redshift  $z = 0.1$ . , 592(2):819–838, August 2003. 6