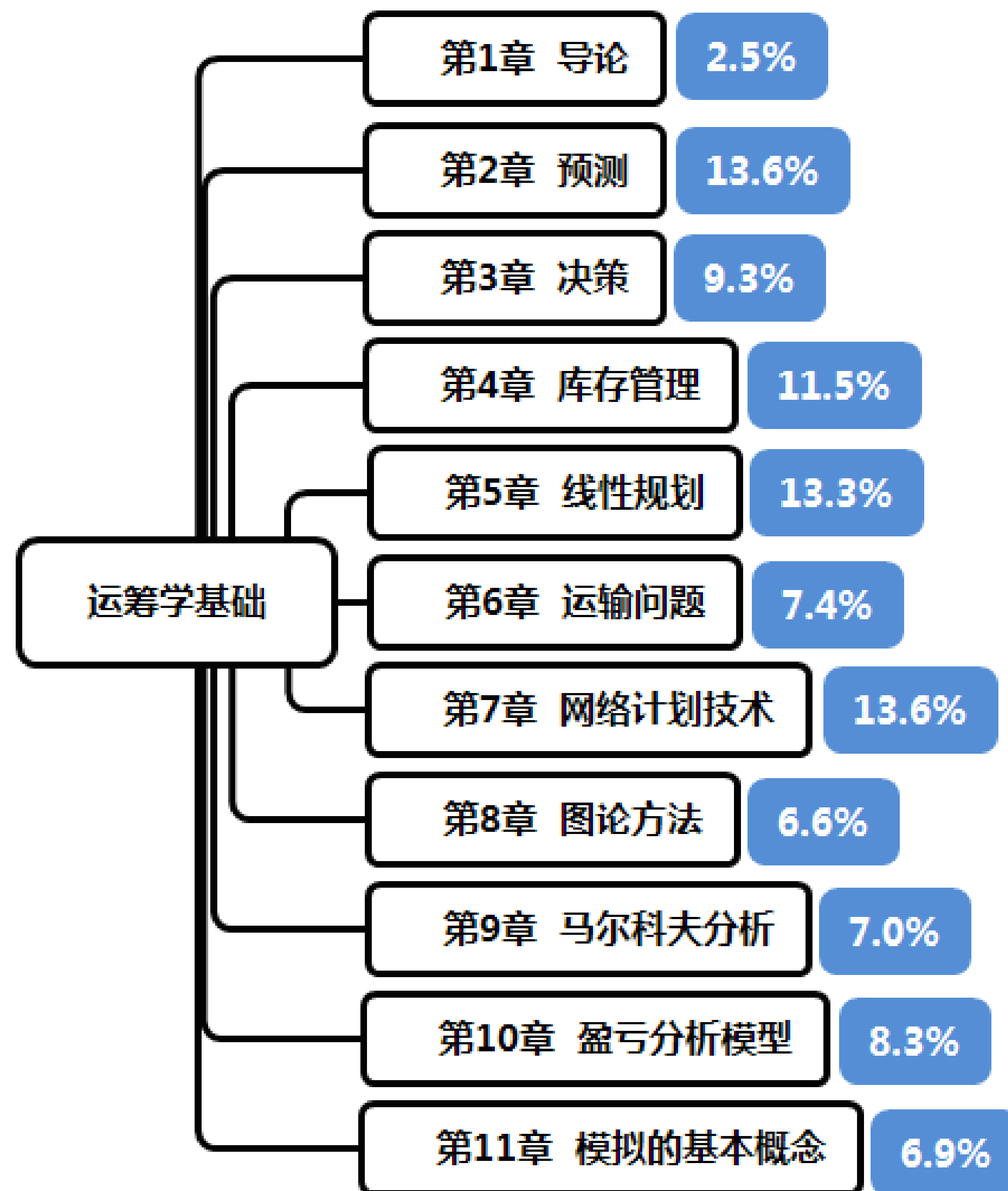
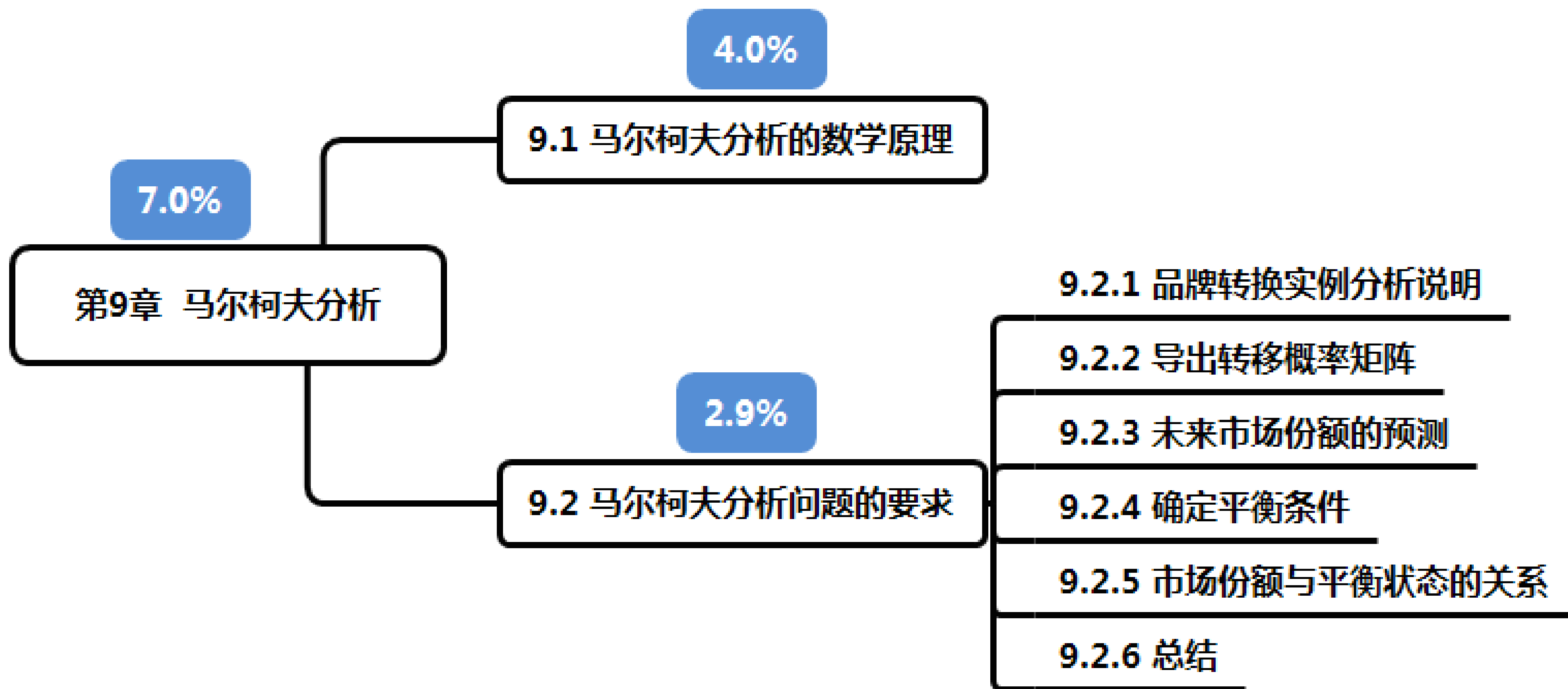


运筹学基础







➤ 任意一个向量 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，如果它内部的各个元素为**非负数**，且**总和等于1**，则此向量称为**概率向量**。

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$$



选择/填空

9.1 马尔柯夫分析的数学原理

第9章 马尔柯夫分析

9.1 马尔柯夫分析的数学原理

9.2 马尔柯夫分析问题的要求

- 任意一个向量 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，如果它内部的各个元素为**非负数**，且**总和等于1**，则此向量称为**概率向量**。
- 一个方阵中，如果其**各行都是概率向量**，则此方阵称为**概率矩阵**或**概率方阵**。

例：

$$\begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix}$$

选择/填空

矩阵的平方 M^2 是一个新的矩阵，这个矩阵的第 i 行第 j 列等于矩阵 M 的第 i 行和第 j 列对应元素乘积求和。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵的平方 M^2 是一个新的矩阵，这个矩阵的第 i 行第 j 列等于矩阵 M 的第 i 行和第 j 列对应元素乘积求和。

例： M^2 的第一行第一列元素等于 $1 \times 1 + 1 \times 0 = 1$

第一行第二列元素等于 $1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$

第二行第一列元素等于 $0 \times 1 + 1 \times 0 = 0$

第二行第二列元素等于 $0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

已知概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, 则 $P^2 =$ _____。

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

9.1 马尔柯夫分析的数学原理

➤ 任意一个向量 (a_1, a_2, \dots, a_n) ，如果它内部的各个元素为**非负数**，且**总和等于1**，则此向量称为**概率向量**。

➤ 一个方阵中，如果其**各行都是概率向量**，则此方阵称为**概率矩阵**或**概率方阵**。

例：

$$\begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix}$$

➤ 如果A和B都是概率矩阵，则**AB乘积**亦为概率矩阵， A^n 亦为概率矩阵。

任意一个向量，如果它内部的各个元素均为非负数，且总和等于1，则该向量称之为（ ）

A:固定概率矩阵

B:马尔柯夫向量

C:概率向量

D:概率矩阵

【答案】：C

任意一个方阵，如果其各行都是概率向量，则该方阵称之为（ ）

A:固定概率矩阵

B:马尔柯夫向量

C:概率向量

D:概率矩阵

【答案】：D

不是概率向量的是 ()

A : (0 , 0.2 , 0.3 , 0.5)

B : (0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4)

C : (0.2 , 0.3 , 0.4 , 0.5)

D : (0.15 , 0.33 , 0.27 , 0.25)

【答案】 : C

下列矩阵中不属概率矩阵的是（ ）

$$A: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.33 & 0.34 & 0.33 \end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1.5 & -0.25 & -0.25 \\ 0.33 & 0.34 & 0.33 \end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$D: \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

【答案】：B

下列矩阵中，不可能成为平衡概率矩阵的是（ ）

$$\text{A: } \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\text{B: } \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{C: } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{D: } \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

【答案】：C

如果A和B都是概率矩阵，则下列矩阵中必为概率矩阵的是（ ）

A: $A^2 + B^2$

B: $A^2 - B^2$

C: $2A + 2B$

D: $A^2 B^2$

【答案】：D

如果A是概率矩阵，则下列一定是概率矩阵的是（ ）

A: A^3

B: $3A$

C: $\frac{1}{3}A$

D: $3A^2$

【答案】：A

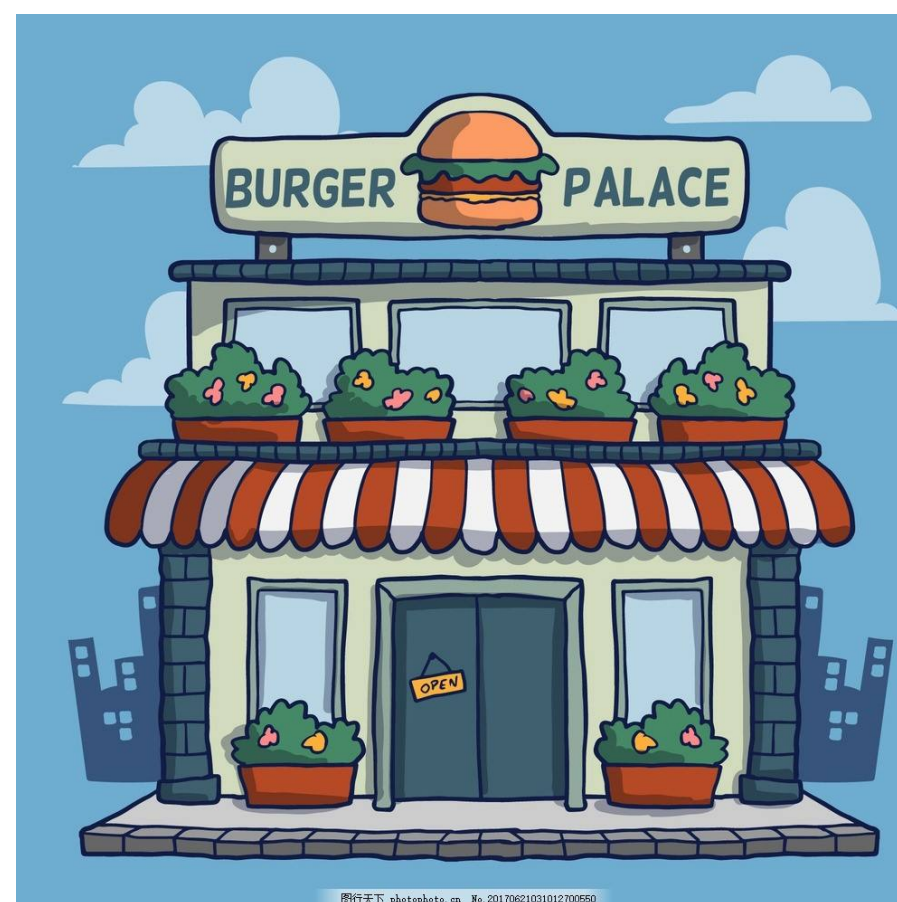
- 在**20世纪初**（1907年）俄国数学家马尔柯夫发现：许多事物未来的发展或演变，往往受该事物**现在的状况**所支配。即：



选择/填空

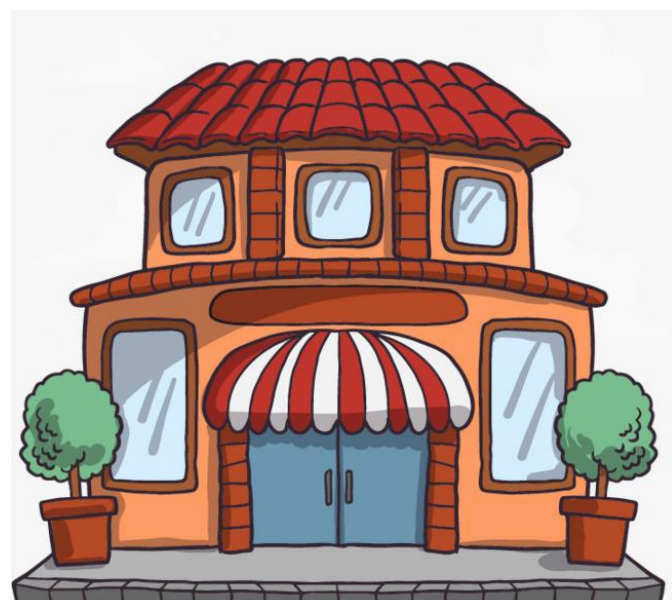
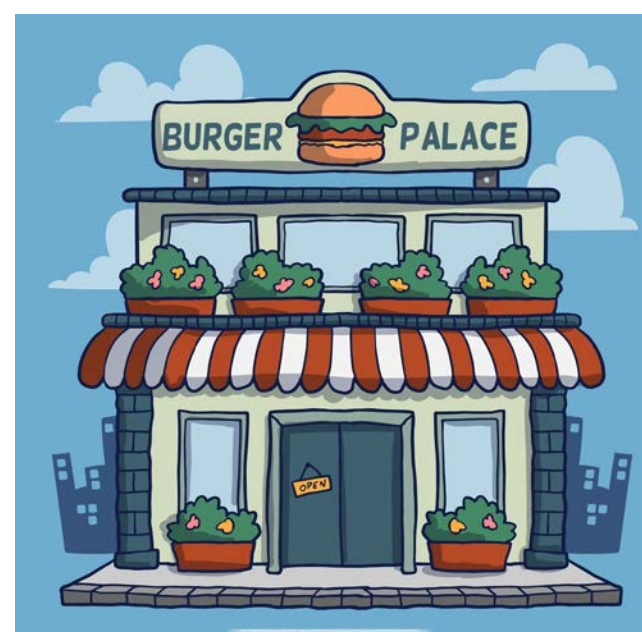
9.1 马尔柯夫分析的数学原理

- 在**20世纪初**（1907年）俄国数学家马尔柯夫发现：许多事物未来的发展或演变，往往受该事物**现在的状况**所支配。即：



9.1 马尔柯夫分析的数学原理

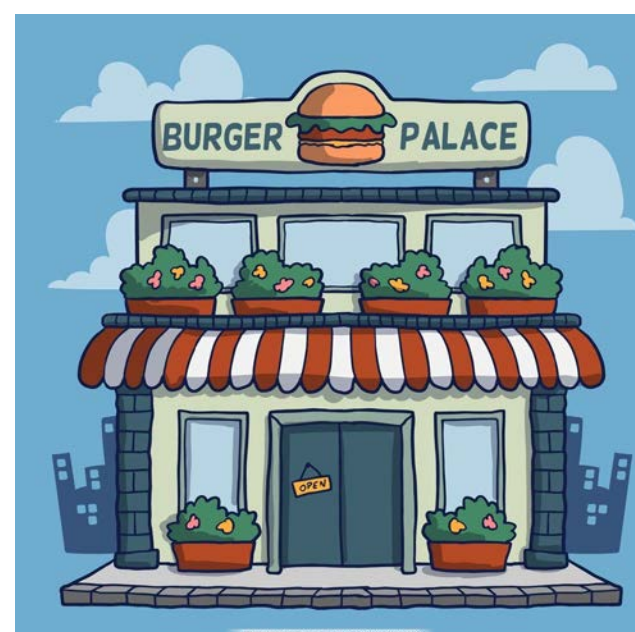
- 在**20世纪初**（1907年）俄国数学家马尔柯夫发现：许多事物未来的发展或演变，往往受该事物**现在的状况**所支配。即：
- 在某些事物的概率转换过程中，第 n 次试验的结果，常常由**第 $n-1$ 次试验的结果**所决定。
- 对于由一种情况转换至另外一种情况的过程，若该过程具有转换概率，而且此种**转换概率**又可以依据其**紧接的前项情况推算出来**，则这种过程即称为**马尔柯夫过程**。



选择/填空

9.1 马尔柯夫分析的数学原理

- 对于由一种情况转换至另外一种情况的过程，若该过程具有转换概率，而且此种**转换概率**又可以依据其**紧接的前项情况推算出来**，则这种过程即称为**马尔柯夫过程**。
- 一连串马尔柯夫转换过程的整体称为**马尔科夫锁链**。
- 对于马尔柯夫过程或马尔柯夫锁链可能产生的演变加以分析，以观察和**预测**该过程或该锁链**未来变动的趋向**，这种分析、观察和预测的工作即称为**马尔柯夫分析**。



选择/填空

马尔柯夫过程是俄国数学家马尔柯夫于（ ）

A:20世纪初发现的

B:第二次世界大战期间发现的

C:19世纪中叶发现的

D:20世纪30年代发现的

【答案】：A

在某些事物的概率转换过程中，第 n 次试验的结果常常由第 $n-1$ 次试验的结果所决定。这样的过程称之为（ ）

A:马尔柯夫分析

B:马尔柯夫过程

C:马尔柯夫锁链

D:高阶马尔柯夫链式公式

【答案】：B

在概率矩阵中，下列哪一项的各元素之和必等于1？（ ）

A:每个行向量

B:每个列向量

C:每个行向量和列向量

D:全部矩阵元素

【答案】：A

如果A和B都是概率矩阵，则下列矩阵中必为概率矩阵的是（ ）

A: $A+B$

B: $A-B$

C: A/B

D: AB

【答案】：D

对于概率矩阵，说法错误的为（ ）

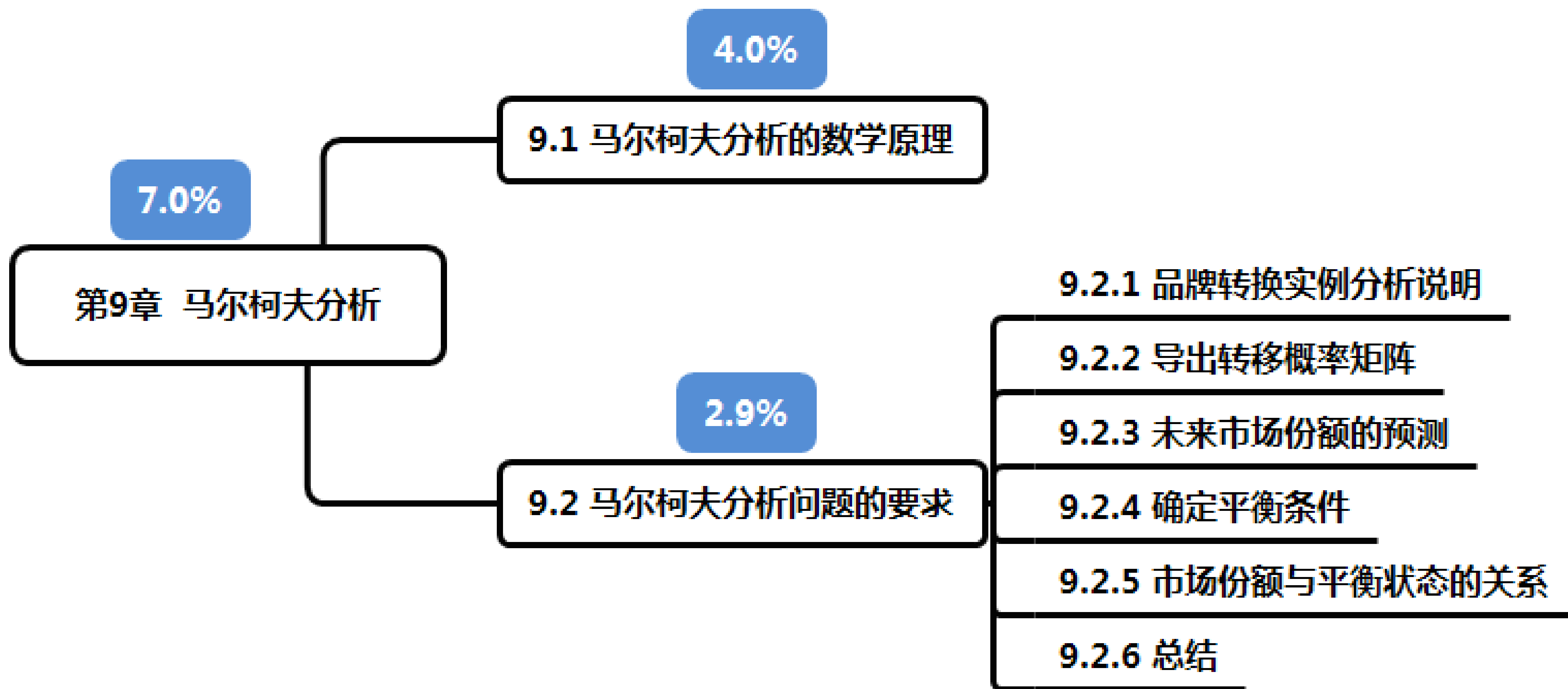
A:若A与B都是概率矩阵，则 $A+B$ 也是概率矩阵

B:若A与B都是概率矩阵，则 AB 也是概率矩阵

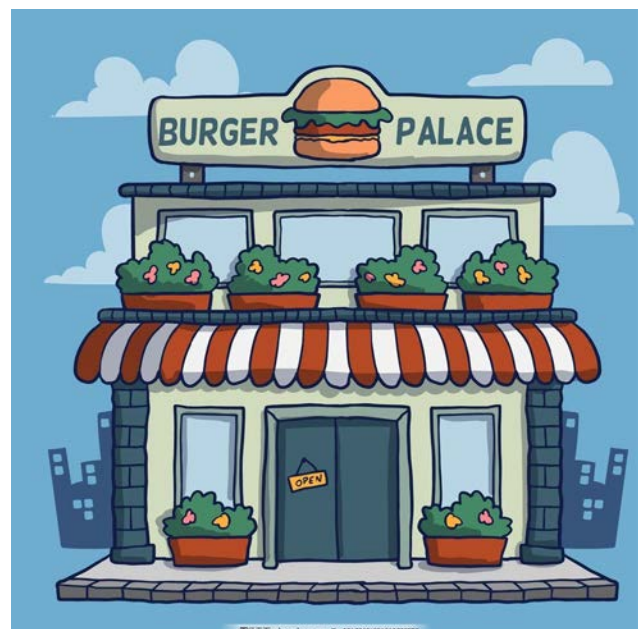
C:若A是概率矩阵， n 是自然数，则也是概率矩阵

D:概率矩阵中的每个行向量都是概率向量

【答案】：A



- **一阶**马尔柯夫过程的假定，在确定事件周期的选择概率时，只考虑**当前周期**的事件选择情况。
- **二阶**马尔柯夫过程假定对某种事件未来周期的选择取决于**前两个周期**的事件的选择情况。
- **三阶**马尔柯夫过程基于假定顾客的行为，能够借观察和考虑其**过去三个周期**中的行为而很好的给以预测。



选择/填空

一阶马尔柯夫过程假定在确定事件周期的选择概率时，只考虑（ ）的事件选择情况。

A:过去两个周期

B:过去一个周期

C:当前周期

D:过去三个周期

【答案】：C

二阶马尔柯夫过程假定对某种事件未来周期的选择取决于（ ）顾客的选择情况。

A:前三周期

B:前一周期

C:前两周期

D:当前周期

【答案】：C

9.2.1 品牌转换实例分析说明

假设某居民小区的牛奶全部由A、B、C三个牛奶场供应。每个牛奶场都知道，由于宣传广告、服务不周等原因，订户在一段时间内经常发生从一家牛奶场订奶转向另一家牛奶场订奶的情况。下表展示了从6月1日至7月1日，三家牛奶场的用户转移情况。

表 9-4 订户的流通

牛奶场	6月1日订户数	获得			损失			7月1日订户数
		从A	从B	从C	给A	给B	给C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

表 9-3 保持订户的转移概率

牛奶场	6月1日订户数	损失数	保持数	保持的概率
A	200	40	160	$160/200=0.8$
B	500	50	450	$450/500=0.9$
C	300	45	255	$255/300=0.85$

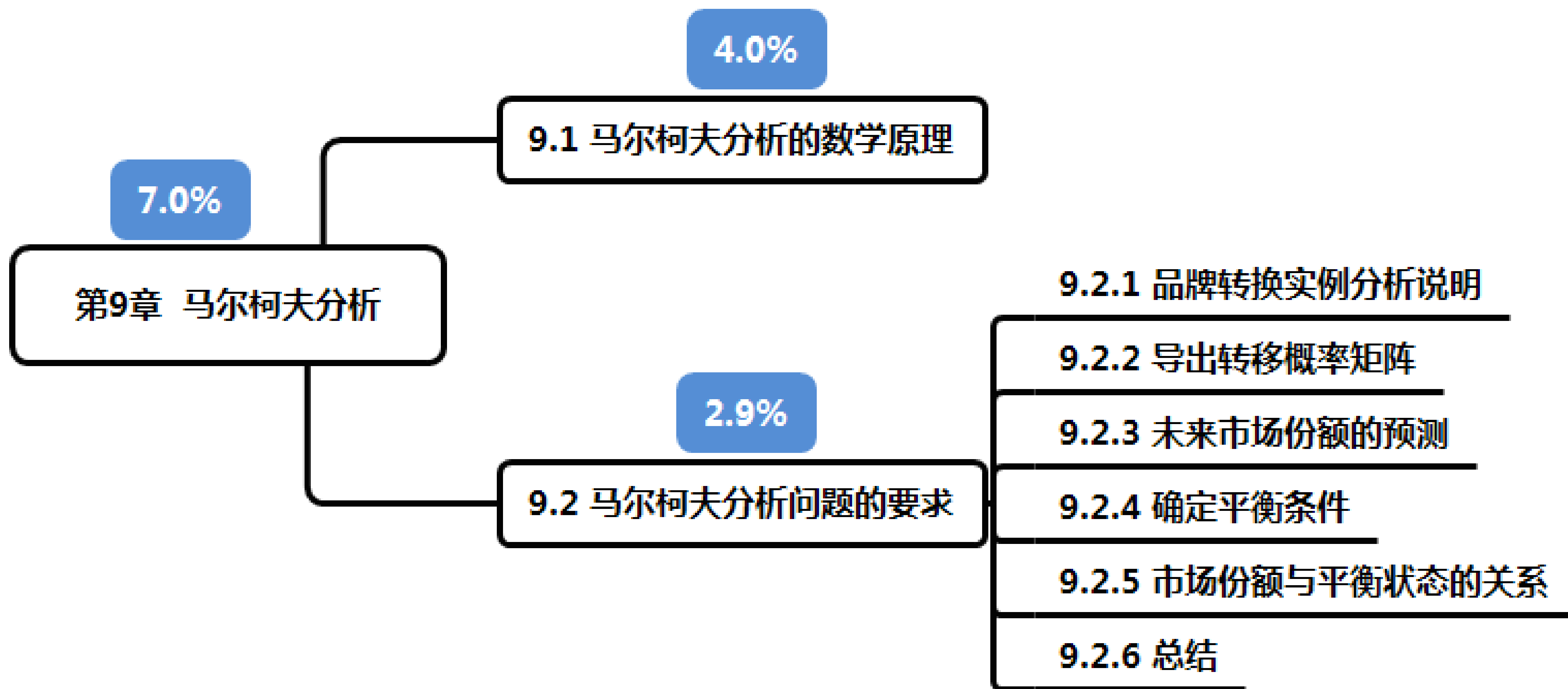


表 9-4

订户的流通

牛奶场	6月1日订户数	获得			损失			7月1日订户数
		从 A	从 B	从 C	给 A	给 B	给 C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

表 9-3

保持订户的转移概率

牛奶场	6月1日订户数	损失数	保持数	保持的概率
A	200	40	160	$160/200 = 0.8$
B	500	50	450	$450/500 = 0.9$
C	300	45	255	$255/300 = 0.85$

表 9-4

订户的流通

牛奶场	6 月 1 日订户数	获得			损失			7 月 1 日订户数
		从 A	从 B	从 C	给 A	给 B	给 C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

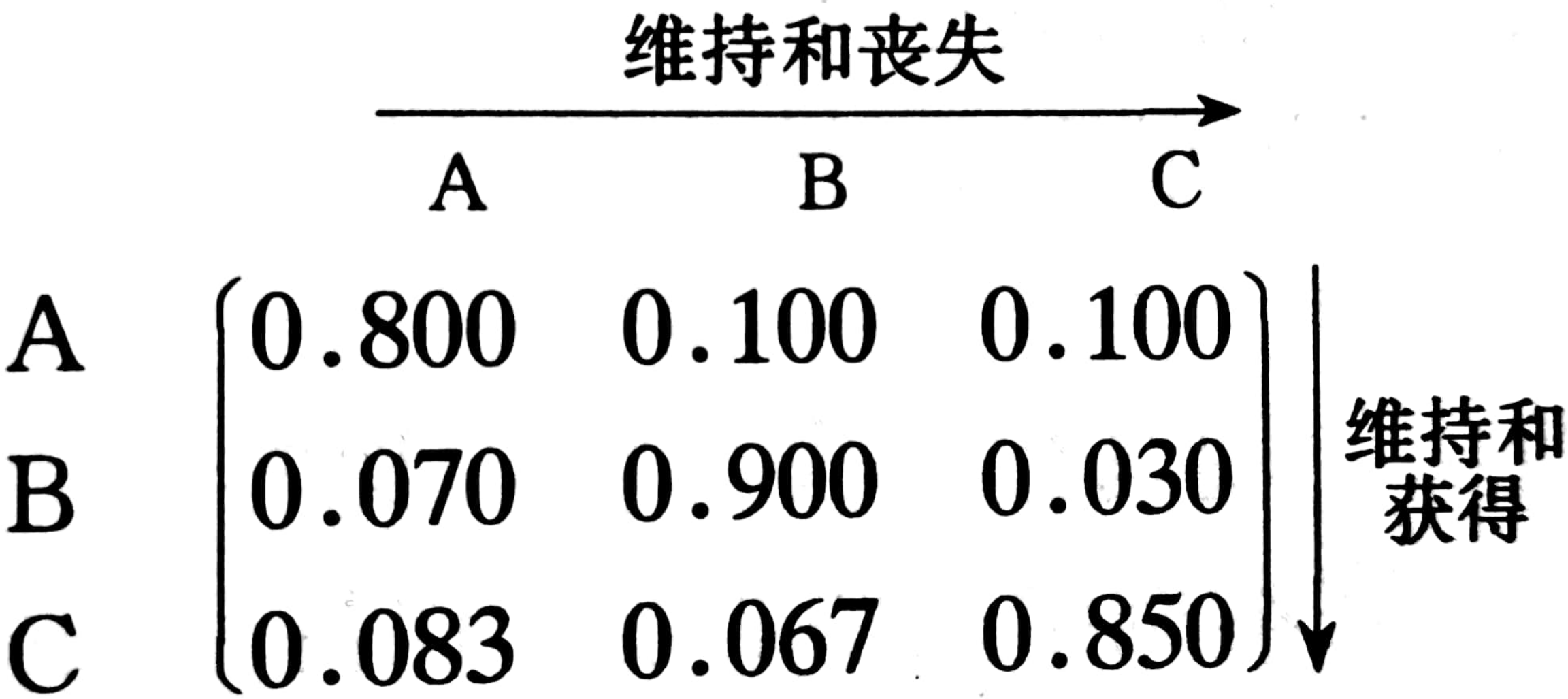


Figure 1



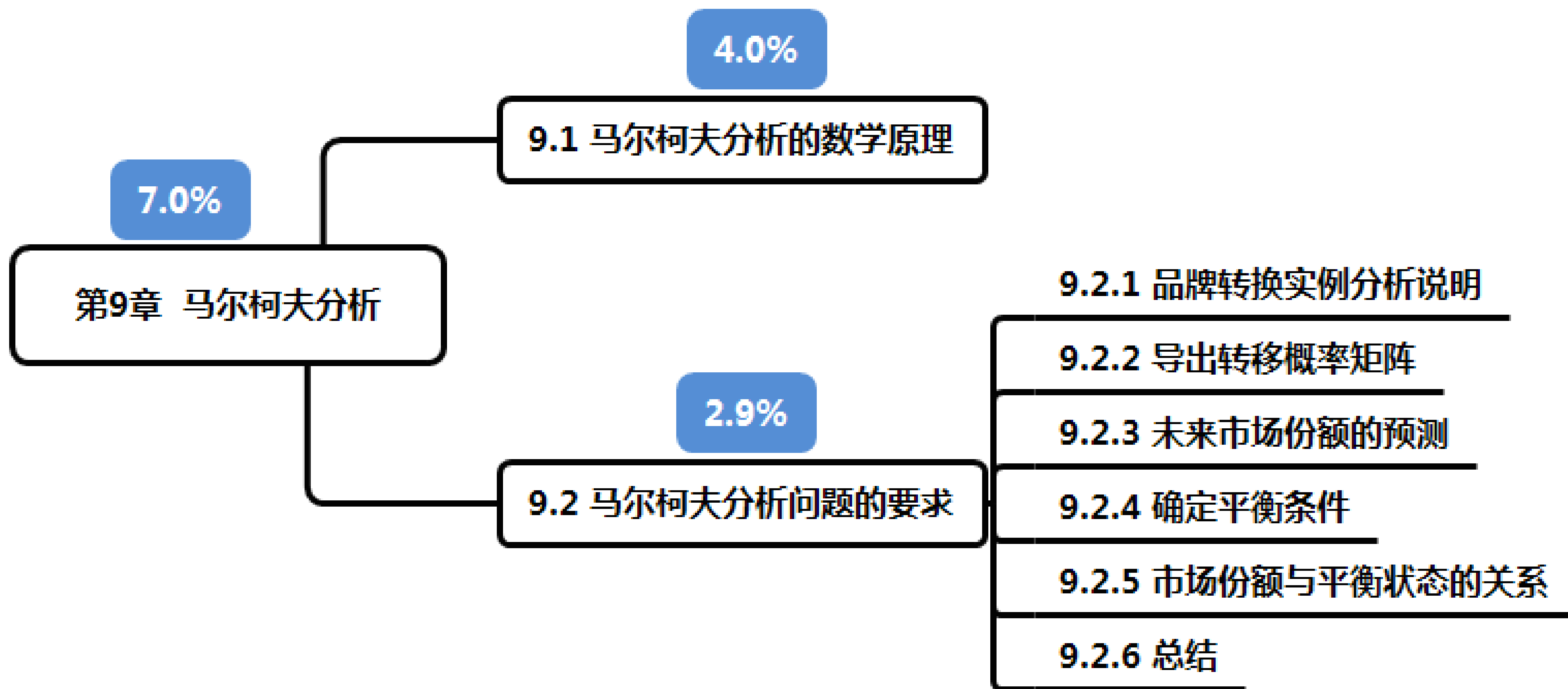
维持和丧失

→

	A	B	C
A	0.800	0.100	0.100
B	0.070	0.900	0.030
C	0.083	0.067	0.850

↓

维持和获得



9.2.3 未来市场份额的预测

- 假定**转移概率矩阵保持稳定**，7月1日的市场份额为A=22%，B=49%，C=29%，则预测8月1日的市场份额（A'，B'，C'）为：**向量（A，B，C）与转移概率矩阵的乘积**

$$(0.22 \quad 0.49 \quad 0.29) \times \begin{pmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{pmatrix}$$

$$= (0.234, 0.483, 0.283)$$

9.2.3 未来市场份额的预测

- 假定**转移概率矩阵保持稳定**，7月1日的市场份额为A=22%，B=49%，C=29%，则预测8月1日的市场份额（A'，B'，C'）为：**向量（A，B，C）与转移概率矩阵的乘积**

$$(0.22 \quad 0.49 \quad 0.29) \times \begin{pmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{pmatrix}$$

$$0.22 \times 0.800 + 0.49 \times 0.070 + 0.29 \times 0.083,$$

$$= (0.234, 0.483, 0.283)$$

9.2.3 未来市场份额的预测

- 假定**转移概率矩阵保持稳定**，7月1日的市场份额为A=22%，B=49%，C=29%，则预测8月1日的市场份额（A'，B'，C'）为：**向量（A，B，C）与转移概率矩阵的乘积**

$$(0.22 \quad 0.49 \quad 0.29) \times \begin{pmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{pmatrix}$$

$$0.22 \times 0.800 + 0.49 \times 0.070 + 0.29 \times 0.083,$$

$$0.22 \times 0.100 + 0.49 \times 0.900 + 0.29 \times 0.067,$$

$$= (0.234, 0.483, 0.283)$$

9.2.3 未来市场份额的预测

- 假定**转移概率矩阵保持稳定**，7月1日的市场份额为A=22%，B=49%，C=29%，则预测8月1日的市场份额（A'，B'，C'）为：**向量（A，B，C）与转移概率矩阵的乘积**

$$(0.22 \quad 0.49 \quad 0.29) \times \begin{pmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{pmatrix}$$

$$0.22 \times 0.800 + 0.49 \times 0.070 + 0.29 \times 0.083,$$

$$0.22 \times 0.100 + 0.49 \times 0.900 + 0.29 \times 0.067,$$

$$0.22 \times 0.100 + 0.49 \times 0.030 + 0.29 \times 0.850,$$

$$= (0.234, 0.483, 0.283)$$

某地区有甲、乙、丙三厂家销售洗衣粉，经调查，8月份买甲、乙、丙三厂家洗衣粉的用户分别占30%、20%和50%，9月份里，甲厂家的老顾客中只有70%仍保留，而有10%和20%的顾客将分别转向乙、丙厂家；乙厂家也只能保住原有顾客的70%，而有10%和20%的顾客将分别转向甲、丙厂家；丙厂家保住原有顾客的88%，而有8%和4%的顾客将分别转向甲、乙厂家。假定这种趋势一直保持不变。

(1) 转移概率矩阵。

(2) 9月份各厂家分别拥有的市场份额。

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{bmatrix}$$

某地区有甲、乙、丙三厂家销售洗衣粉，经调查，8月份买甲、乙、丙三厂家洗衣粉的用户分别占30%、20%和50%，9月份里，甲厂家的老顾客中只有70%仍保留，而有10%和20%的顾客将分别转向乙、丙厂家；乙厂家也只能保住原有顾客的70%，而有10%和20%的顾客将分别转向甲、丙厂家；丙厂家保住原有顾客的88%，而有8%和4%的顾客将分别转向甲、乙厂家。假定这种趋势一直保持不变。

(1) 转移概率矩阵。

(2) 9月份各厂家分别拥有的市场份额。

$$(0.3, 0.2, 0.5) \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{bmatrix}$$

某地区有甲、乙、丙三厂家销售洗衣粉，经调查，8月份买甲、乙、丙三厂家洗衣粉的用户分别占30%、20%和50%，9月份里，甲厂家的老顾客中只有70%仍保留，而有10%和20%的顾客将分别转向乙、丙厂家；乙厂家也只能保住原有顾客的70%，而有10%和20%的顾客将分别转向甲、丙厂家；丙厂家保住原有顾客的88%，而有8%和4%的顾客将分别转向甲、乙厂家。假定这种趋势一直保持不变。

(1) 转移概率矩阵。

(2) 9月份各厂家分别拥有的市场份额。

$$(0.3, 0.2, 0.5) \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0.88 \end{bmatrix} = (0.27, 0.19, 0.54)$$

所以9月份甲、乙、丙三厂家的市场份额分别为27%、19%、54%

已知甲、乙、丙三家养殖场同时向市场投放禽蛋供应，第一年底三家养殖场所占的市场份额分别为40%、40%、20%，但在第二年市场份额发生了如下变化：甲养殖场保有其顾客的80%，丧失15%给乙，丧失5%给丙；乙养殖场保有其顾客的85%，丧失10%给甲，丧失5%给丙，丙养殖场保有其顾客的80%，丧失10%给甲，丧失10%给乙，试求第二年年底三家养殖场各占多少市场份额。

转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}$$

已知甲、乙、丙三家养殖场同时向市场投放禽蛋供应，第一年底三家养殖场所占的市场份额分别为40%、40%、20%，但在第二年市场份额发生了如下变化：甲养殖场保有其顾客的80%，丧失15%给乙，丧失5%给丙；乙养殖场保有其顾客的85%，丧失10%给甲，丧失5%给丙，丙养殖场保有其顾客的80%，丧失10%给甲，丧失10%给乙，试求第二年年底三家养殖场各占多少市场份额。

转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}$$

$$(0.4, 0.4, 0.2) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.85 & 0.05 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} = (0.38, 0.42, 0.20)$$

求得第二年年底三家养殖场所占市场份额分别为(0.38, 0.42, 0.20)。

已知今年1月初,甲、乙、丙三家啤酒公司分别占有本地市场份额的40%、30%、30%,根据调查,今后甲公司保有其顾客的90%,丧失5%给乙,丧失5%给丙;乙公司保有其顾客的80%,丧失15%给甲,丧失5%给丙;丙公司保有其顾客的85%,丧失5%给甲,丧失10%给乙,试求明年初该三家公司各占多少市场份额?

转移概率矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{pmatrix}$$

已知今年1月初,甲、乙、丙三家啤酒公司分别占有本地市场份额的40%、30%、30%,根据调查,今后甲公司保有其顾客的90%,丧失5%给乙,丧失5%给丙;乙公司保有其顾客的80%,丧失15%给甲,丧失5%给丙;丙公司保有其顾客的85%,丧失5%给甲,丧失10%给乙,试求明年初该三家公司各占多少市场份额?

转移概率矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{pmatrix}$$

$$(0.4, 0.3, 0.3) \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{pmatrix} = (0.42, 0.29, 0.29)$$

故明年初该三家公司占市场份额分别为: 42%, 29%, 29%。

某居民小区的牛奶全部由A、 B、 C三个牛奶厂供应，下表是三个牛奶厂在一个月的观察期内订户的流动情况，假定在此期间既无老订户退出，也没有新订户加入。试计算三个牛奶厂的转移概率矩阵。

牛奶场	6 月 1 日 订户数	获得			损失			7 月 1 日 订户数
		从 A	从 B	从 C	给 A	给 B	给 C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

$160/200=0.800$ $20/200=0.100$ $20/200=0.100$

$35/500=0.070$ $450/500=0.900$ $15/500=0.030$

$25/300=0.083$ $20/300=0.067$ $255/300=0.850$

即，转移概率矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix}$$

甲、乙两家公司同时向市场投放一种产品，初时，它们所占市场份额相等。第二年，两公司为吸引顾客，都改换了各自的产品包装，其结果是：甲公司保持其顾客的80%，丧失20%给乙公司；乙公司保持其顾客的60%，丧失40%给甲公司。第三年，假设顾客的购买倾向与第二年末相同，但甲、乙两公司都为自己的产品大做广告，其结果是：甲公司保持其顾客的85%，丧失15%给乙公司；乙公司保持其顾客的65%，丧失35%给甲公司。

(1) 第二年末，两家公司各占多少市场份额？

(2) 第三年末，两家公司各占多少市场份额？

(1) 初始时，两公司的市场占有率均为50%

$$(0.5, 0.5) \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = (0.6, 0.4)$$

第二年末甲乙的市场占有率为：60%、40%

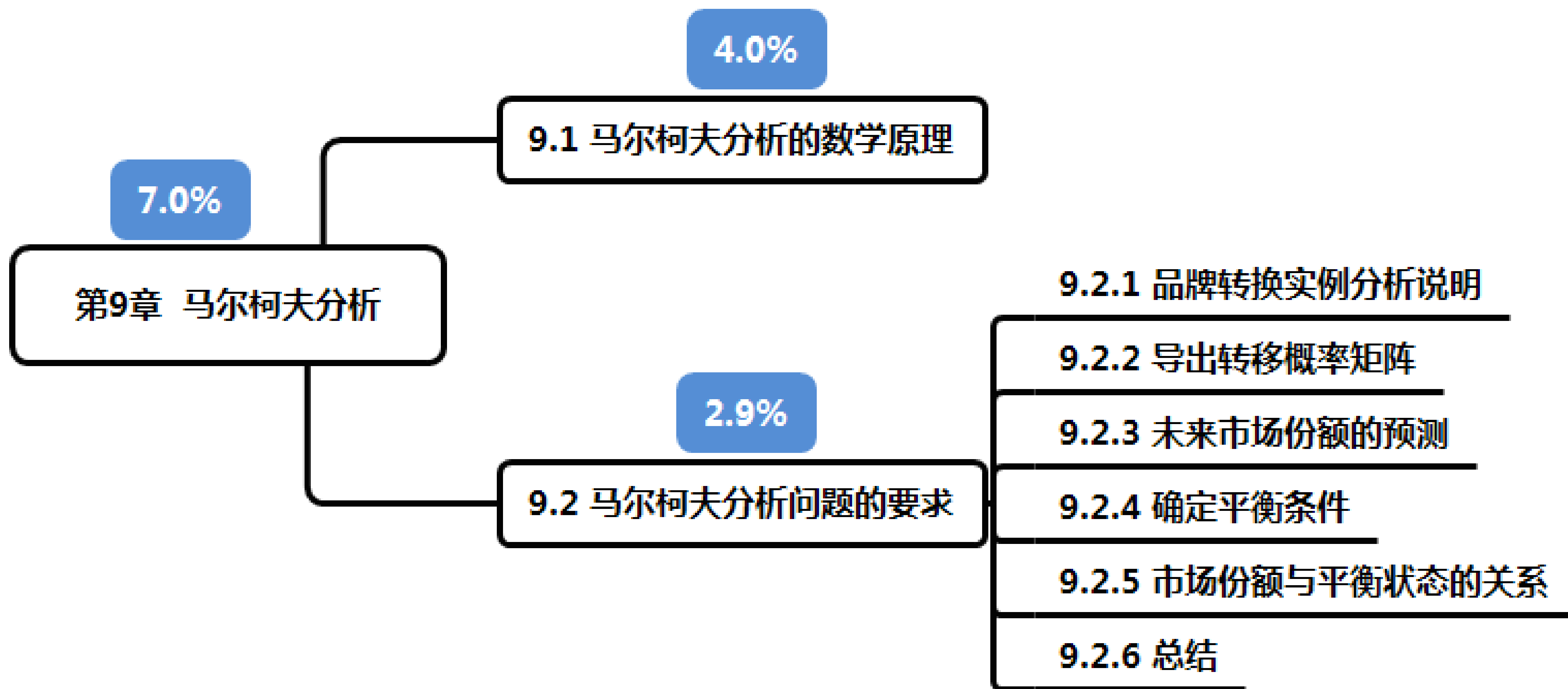
甲、乙两家公司同时向市场投放一种产品，初时，它们所占市场份额相等。第二年，两公司为吸引顾客，都改换了各自的产品包装，其结果是：甲公司保持其顾客的80%，丧失20%给乙公司；乙公司保持其顾客的60%，丧失40%给甲公司。第三年，假设顾客的购买倾向与第二年末相同，但甲、乙两公司都为自己的产品大做广告，其结果是：甲公司保持其顾客的85%，丧失15%给乙公司；乙公司保持其顾客的65%，丧失35%给甲公司。

(1) 第二年末，两家公司各占多少市场份额？

(2) 第三年末，两家公司各占多少市场份额？

$$(2) \quad (0.6, 0.4) \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} = (0.65, 0.35)$$

第三年末甲乙的市场占有率为：65%、35%



➤ 在平衡达到的时刻，保留、增加和减少的顾客数不再改变了，市场份额也冻结不变了。

$$\begin{aligned} & (0.22 \quad 0.49 \quad 0.29) \times \begin{pmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{pmatrix} \\ & = (0.234, 0.483, 0.283) \end{aligned}$$

9.2.4 确定平衡条件

- 在平衡达到的时刻，保留、增加和减少的顾客数不再改变了，市场份额也冻结不变了。
- 仅在**没有竞争改变转移概率矩阵**的情况下，才能达到平衡条件。

$$(X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix} = (X_1, X_2, X_3)$$

$$X_1 = 0.800 X_1 + 0.070 X_2 + 0.083 X_3$$

$$X_2 = 0.100 X_1 + 0.900 X_2 + 0.067 X_3$$

$$X_3 = 0.100 X_1 + 0.030 X_2 + 0.850 X_3$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1.0$$

$$X_1 = 0.273, X_2 = 0.454, X_3 = 0.273$$

9.2.4 确定平衡条件

- 在平衡达到的时刻，保留、增加和减少的顾客数不再改变了，市场份额也冻结不变了。
- 仅在**没有竞争改变转移概率矩阵**的情况下，才能达到平衡条件。

$$(X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix} = (X_1, X_2, X_3)$$

$$(0.273 \quad 0.454 \quad 0.273) \times \begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix} = (0.273 \quad 0.454 \quad 0.273)$$

已知甲、乙、丙三家快递公司同时为本地提供快递服务，已知今年初它们分别占有本地市场份额的40%、40%、20%，根据调查，今后甲公司保有其顾客的70%，丧失10%给乙，丧失20%给丙，乙公司保有其顾客的60%，丧失20%给甲，丧失20%给丙，丙公司保有其顾客的80%，丧失10%给甲，丧失10%给乙，试求在平衡时各家的占有率各是多少？

转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}$$

已知甲、乙、丙三家快递公司同时为本地提供快递服务，已知今年初它们分别占有本地市场份额的40%、40%、20%，根据调查，今后甲公司保有其顾客的70%，丧失10%给乙，丧失20%给丙，乙公司保有其顾客的60%，丧失20%给甲，丧失20%给丙，丙公司保有其顾客的80%，丧失10%给甲，丧失10%给乙，试求在平衡时各家的占有率各是多少？

转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)$$

已知甲、乙、丙三家快递公司同时为本地提供快递服务，已知今年初它们分别占有本地市场份额的40%、40%、20%，根据调查，今后甲公司保有其顾客的70%，丧失10%给乙，丧失20%给丙，乙公司保有其顾客的60%，丧失20%给甲，丧失20%给丙，丙公司保有其顾客的80%，丧失10%给甲，丧失10%给乙，试求在平衡时各家的占有率各是多少？

转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{cases} 0.7x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 = x_1 \\ 0.1x_1 + 0.6x_2 + 0.1x_3 = x_2 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 = x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

已知甲、乙、丙三家快递公司同时为本地提供快递服务，已知今年初它们分别占有本地市场份额的40%、40%、20%，根据调查，今后甲公司保有其顾客的70%，丧失10%给乙，丧失20%给丙，乙公司保有其顾客的60%，丧失20%给甲，丧失20%给丙，丙公司保有其顾客的80%，丧失10%给甲，丧失10%给乙，试求在平衡时各家的占有率各是多少？

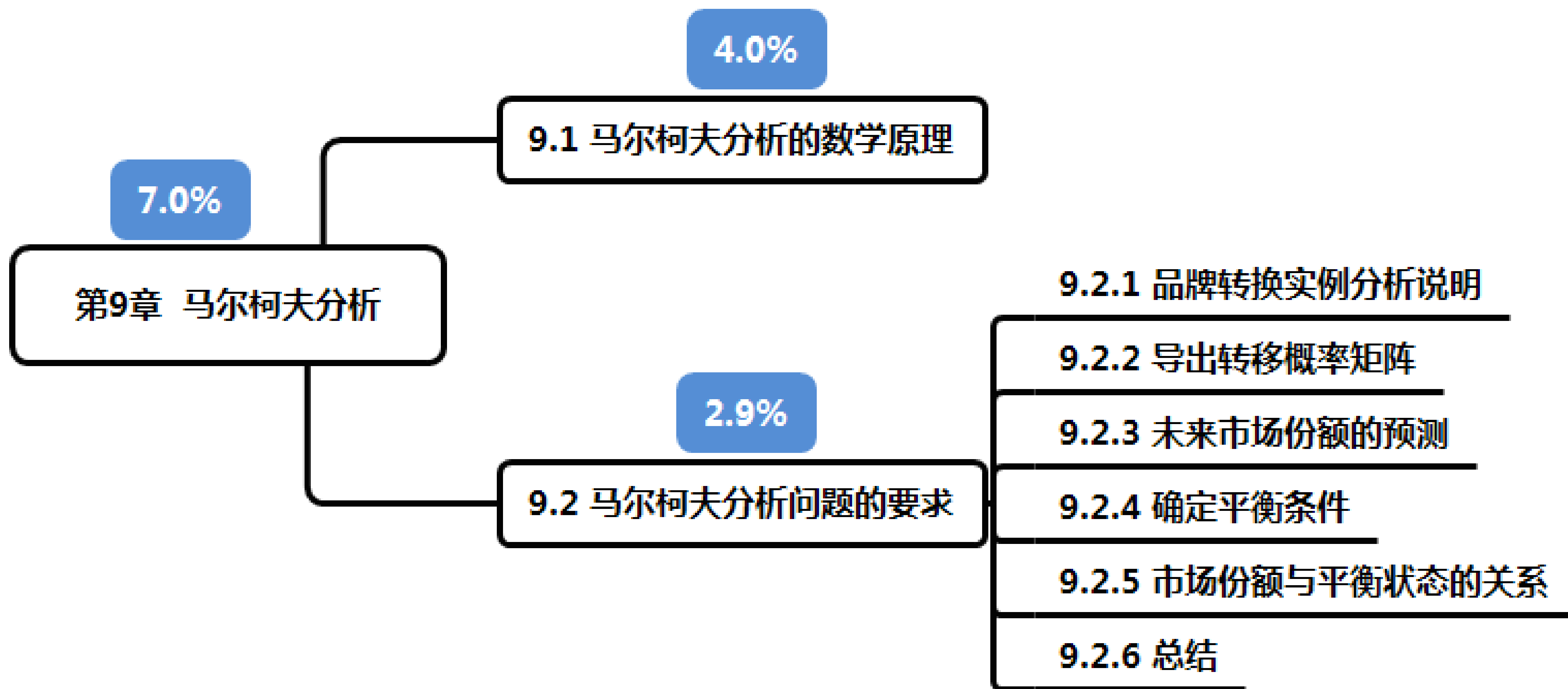
转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0.70 & 0.10 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.10 & 0.10 & 0.80 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)$$

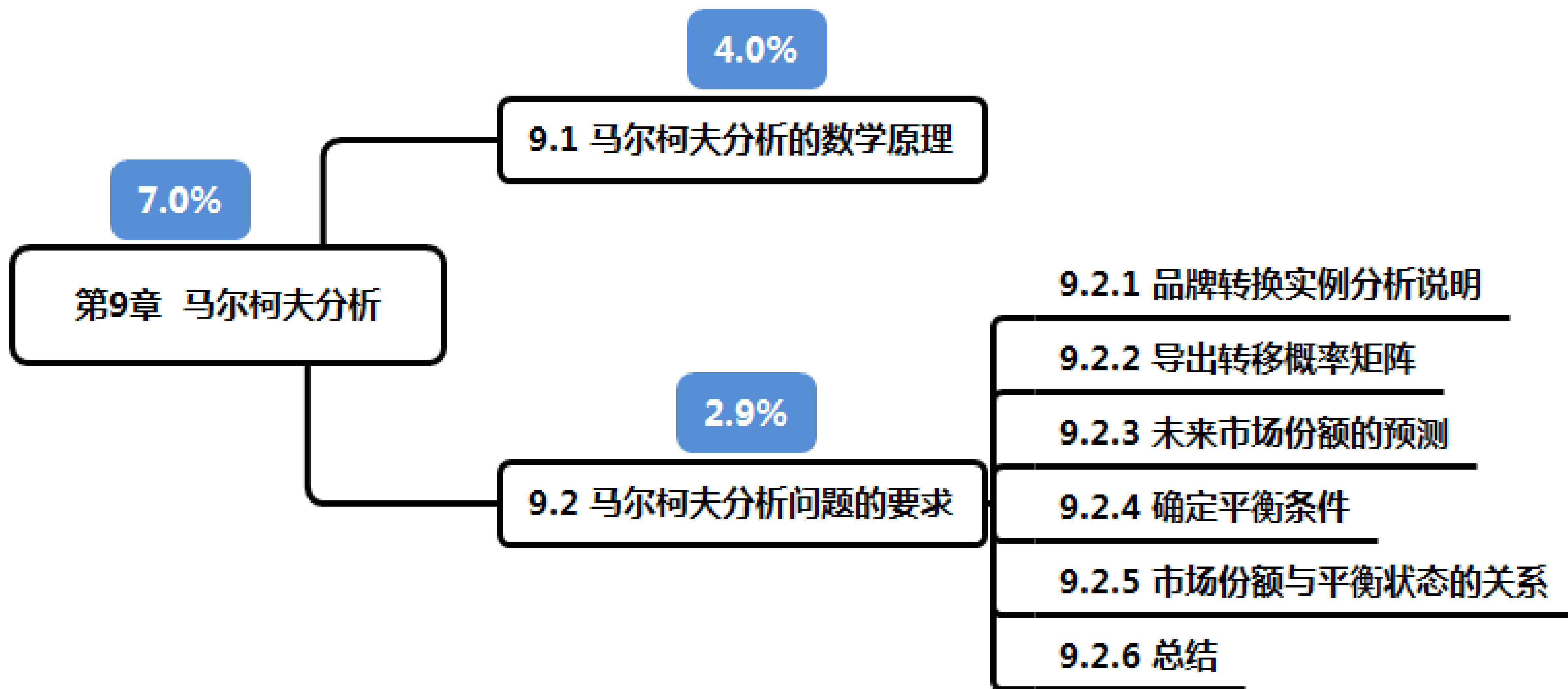
$$\begin{cases} 0.7x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 = x_1 \\ 0.1x_1 + 0.6x_2 + 0.1x_3 = x_2 \\ 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 = x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{求得： } (x_1, x_2, x_3) = (0.30, 0.20, 0.50)$$



- 最终平衡状态**取决于转移概率**，而与初始市场份额无关
- 马尔柯夫分析的一个有趣的事实是：不管各式各样的生产者和供应者一开始占有的市场份额如何，**最终平衡状态是一样的**（假设**转移概率矩阵不变**）。
- 最初市场份额与平衡时的市场份额**越相近**，则达到平衡状态就**越快**。

$$(X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 0.800 & 0.100 & 0.100 \\ 0.070 & 0.900 & 0.030 \\ 0.083 & 0.067 & 0.850 \end{bmatrix} = (X_1, X_2, X_3)$$



➤ 马尔柯夫分析方法的使用步骤：

- 第一步：了解用户需求、品牌/牌号转换商情
- 第二步：建立转移概率矩阵
- 第三步：计算未来可能市场分享率（市场份额）
- 第四步：确定平衡条件

表 9 - 4		订户的流通						
牛奶场	6 月 1 日订户数	获得			损失			7 月 1 日订户数
		从 A	从 B	从 C	给 A	给 B	给 C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

马尔柯夫分析表明，不管各式各样的生产者和供应者一开始占有的市场份额如何，
() 总是一样的。

A:最终平衡状态

B:转移概率矩阵

C:转移情况

D:达到平衡的时间

【答案】：A

马尔柯夫分析的一个有趣的事实是：不管各式各样的生产者和供应者一开始占有的市场份额如何，最终平衡状态总是一样的，这是基于（ ）假设。

A:平衡条件不变

B:转移概率的矩阵不变

C:一阶情况

D:高阶情况

【答案】：B

对于市场份额问题，（ ），则达到平衡状态就越快。

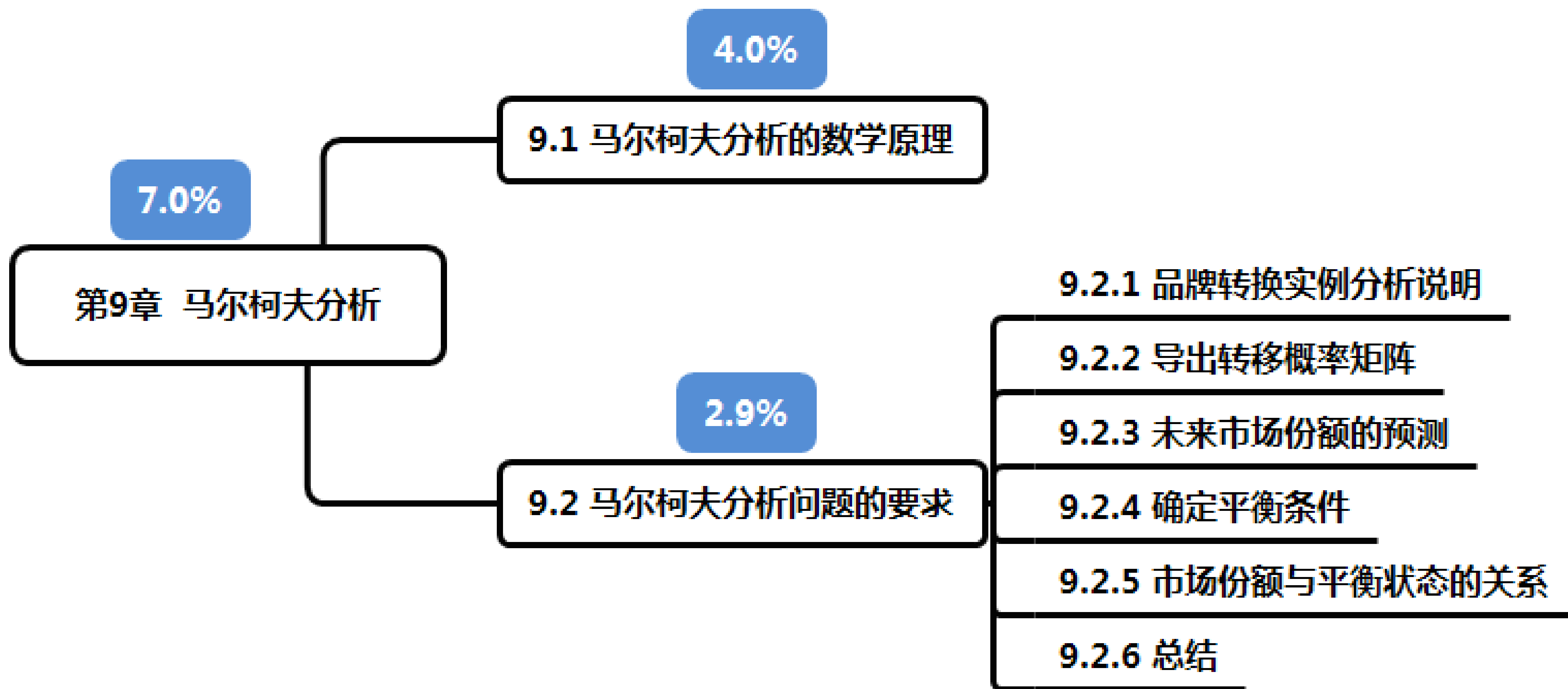
A:最初市场份额与平衡时的市场份额越相近

B:各家最初市场份额越相近

C:各家最初市场份额差别越大

D:平衡时的市场份额越相近

【答案】：A



设任一概率矩阵 P ，则当 $n \rightarrow \infty$ 时，必有：
$$P^n = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$$

即 P^n 矩阵中的每一个行向量都相等。

P^n 称作 P 的固定概率矩阵或平衡概率矩阵。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.31 & 0.69 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

$$P^7 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.31 & 0.69 \end{pmatrix}$$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

设任一概率向量 $T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 任一概率矩阵 P , 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 必有:

$$TP^n = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

其中向量 (z_1, z_2, \dots, z_n) 是固定概率矩阵 P^n 中的任一行向量。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.31 & 0.69 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

$$P^7 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.34 & 0.66 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.63 \\ 0.31 & 0.69 \end{pmatrix}$$

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

$$P^8 = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.67 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

对于概率矩阵 P ，当 $n \rightarrow \infty$ 时， P^n 称之为 P 的（ ）

A:固定概率矩阵

B:马尔柯夫向量

C:概率向量

D:概率方针

【答案】：A

设 T 是概率向量， P 是概率矩阵，则当 $n \rightarrow \infty, TP^n$ 等于 ()

A: P 中的任一行

B: P 中的任一行列

C: P^n 中的任一行

D: P^n 中的任一行列

【答案】：C

设 $T=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 为概率向量, $P=(p_{ij})_{n \times n}$ 为概率矩阵, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 必有 ()

- A、 TP^k 等于 P 的平衡概率矩阵
- B、 TP^k 不等于 P 的平衡概率矩阵
- C、 TP^k 与 P 的平衡概率矩阵中的任一行向量都相等
- D、 TP^k 与 P 的平衡概率矩阵中的任一行向量都不相等

【答案】 : C

可以作为概率向量的是 ()

A: ($1/2$, $1/2$, $1/2$)

B: ($1/3$, $1/3$, $1/3$)

C: ($1/4$, $1/4$, $1/4$)

D: ($1/5$, $1/5$, $1/5$)

【答案】 : B

下列矩阵中，属概率矩阵的是（ ）

$$A: \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$D: \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

【答案】：D

下列向量中的概率向量是 ()

A: (0.1 , 0.4 , 0 , 0.5)

B: (0.1 , 0.4 , 0.1 , 0.5)

C: (0.6 , 0.4 , 0 , 0.5)

D: (0.6 , 0.1 , 0.8 , -0.5)

【答案】 : A

以下方阵中，可以作为概率方阵的是（ ）

A: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

B: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$

C: $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$

D: $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$

【答案】：B

一阶马尔柯夫过程基于这样的假定：在确定事件周期的选择概率时，只考虑_____的事件选择情况。

【答案】：当前周期

使用马尔柯夫分析方法的步骤之一是建立_____矩阵。

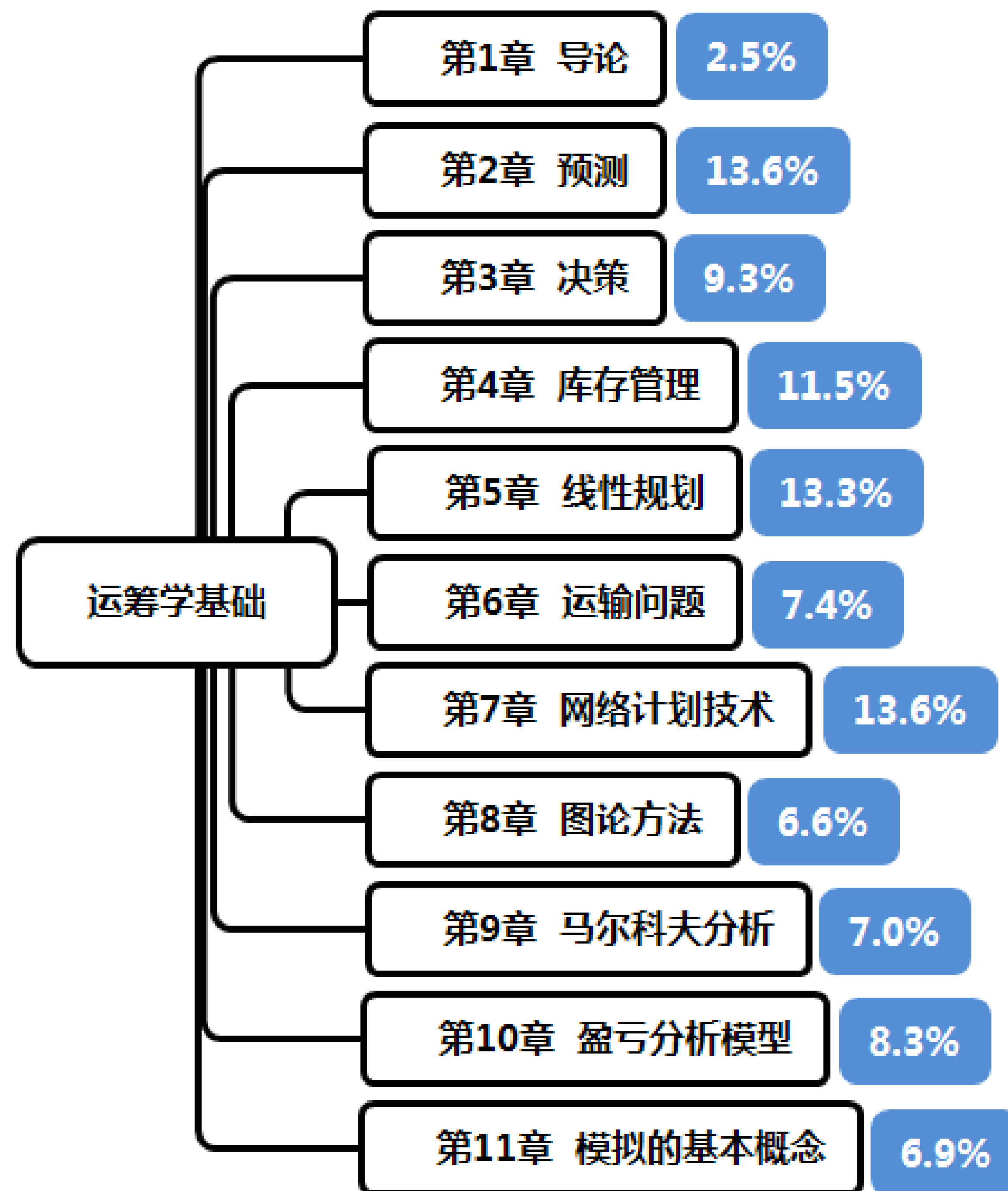
【答案】：转移概率

最初市场份额与平衡时的市场份额越相近，则达到平衡状态就越_____。

【答案】：快

仅在没有竞争改变_____矩阵的前提下，才能达到市场平衡份额的条件。

【答案】：转移概率



THANK YOU