統計力学 2 演習 A
『熱統計物理学演習、その 24』の **Q24-11**

藤井淳太朗

最終更新日
2021 年 7 月 27 日

『熱統計物理学演習、その 24』から以下の事実を引用する。引用する箇所は (1),(4),(5),(6),(50),(51) 式となる。

理想気体のエネルギー E と粒子数 N は、逆温度 β と化学ポテンシャル μ の関数として、次のように表されます：

$$E = E(\beta, \mu) \equiv \int_0^\infty d\epsilon \epsilon f^{\mathrm{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon) D(\epsilon), \tag{1}$$

1 粒子固有エネルギーの分布密度 $D(\epsilon)$ として、ならした分布密度 $D^{\mathrm{smooth}}(\epsilon)$ は

$$D(\epsilon) = D^{\mathrm{smooth}}(\epsilon) \equiv \frac{\gamma}{\epsilon_0}\frac{\pi}{4}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \quad (\epsilon \geq 0)。 \tag{2}$$

ただし、

$$\epsilon_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mV^{2/3}}。 \tag{3}$$

となる。また、γ はスピンの縮退度です：

$$\gamma = 2s + 1。 \tag{4}$$

<u>Fermi 粒子系における低温展開の公式</u>:

$$\begin{aligned} F_{\beta,\mu}[u] &\equiv \int_0^\infty d\epsilon u(\epsilon) f^{\mathrm{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon) \\ &= F_{\infty,\mu}[u] + \frac{\pi^2}{6}u'(\mu)\beta^{-2} + \frac{7\pi^4}{360}u'''(\mu)\beta^{-4} + \cdots \quad (\beta\mu \gtrsim 4) \end{aligned} \tag{5}$$

ただし、

$$F_{\infty,\mu}[u] = \int_0^\mu d\epsilon u(\epsilon) \tag{6}$$

この事実をもとに **Q24-11** を解く。

($E(\beta,\mu)$ の計算) 低温展開により、逆温度 β と化学ポテンシャル μ の関数としてのエネルギー $E(\beta,\mu)$ を計算します。
(i) 示してください:

$$\begin{aligned} E(\beta,\mu) &= \int_0^\infty d\epsilon\epsilon f^{\mathrm{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon)D(\epsilon) \\ &= \gamma\frac{\pi}{4}\epsilon_0^{-3/2}F_{\beta,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right]。\end{aligned} \tag{7}$$

1 式のように $E(\beta,\mu)$ が定義されている。また、2 式のように分布密度が定まっているから、

$$\begin{aligned} E(\beta,\mu) &= \int_0^\infty d\epsilon f^{\mathrm{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon)\frac{\gamma}{\epsilon_0^{3/2}}\frac{\pi}{4}\epsilon^{3/2} \\ &= \gamma\frac{\pi}{4}\epsilon_0^{-3/2}\int_0^\infty d\epsilon\epsilon^{3/2}f^{\mathrm{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon) \\ u(\epsilon) = \epsilon^{3/2}&\text{とすると} \\ &= \gamma\frac{\pi}{4}\epsilon_0^{-3/2}\int_0^\infty d\epsilon u(\epsilon)f^{\mathrm{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon) \\ &5\text{ 式から} \\ &= \gamma\frac{\pi}{4}\epsilon_0^{-3/2}F_{\beta,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

と計算される。こうして 7 式が示された。

(ii) 示してください：

$$F_{\infty,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] = \int_0^\mu d\epsilon\epsilon^{3/2} = \frac{2}{5}\mu^{5/2}。 \tag{9}$$

6 式から、

$$\begin{aligned} F_{\infty,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] = F_{\infty,\mu}[u] &= \int_0^\mu d\epsilon u(\epsilon) \\ &= \int_0^\mu d\epsilon\epsilon^{3/2} = \frac{2}{5}\mu^{5/2} \end{aligned} \tag{10}$$

と計算される。こうして 9 式が示された。

(iii) 示してください：

$$\begin{aligned} F_{\beta,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] &= F_{\infty,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] + \frac{\pi^2}{6}\left.\frac{d\epsilon^{3/2}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=\mu}\beta^{-2} + \frac{7\pi^4}{360}\left.\frac{d^3\epsilon^{3/2}}{d\epsilon^3}\right|_{\epsilon=\mu}\beta^{-4} + \cdots \\ &= \frac{2}{5}\mu^{5/2}\left\{1 + \frac{5\pi^2}{8}(\beta\mu)^{-2} - \frac{7\pi^4}{384}(\beta\mu)^{-4} + \cdots\right\}。\end{aligned} \tag{11}$$

5 式から、

$$F_{\beta,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] = F_{\infty,\mu}\left[\epsilon\mapsto\epsilon^{3/2}\right] + \frac{\pi^2}{6}\left.\frac{d\epsilon^{3/2}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=\mu}\beta^{-2} + \frac{7\pi^4}{360}\left.\frac{d^3\epsilon^{3/2}}{d\epsilon^3}\right|_{\epsilon=\mu}\beta^{-4} + \cdots \tag{12}$$

と 11 式の 1 行目が得られて、

$$\left.\frac{d\epsilon^{3/2}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=\mu} = \frac{3}{2}\mu^{1/2}, \quad \left.\frac{d^3\epsilon^{3/2}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=\mu} = -\frac{3}{8}\mu^{-3/2} \tag{13}$$

と計算される。この結果と 9 式を 11 式の 1 行目に代入すると 11 式の 2 行目が得られる。

(iv) 示してください：

$$E(\beta,\mu) = \epsilon_0 \gamma \frac{\pi}{10} \left(\frac{\mu}{\epsilon_0}\right)^{5/2} \left\{1 + \frac{5\pi^2}{8}(\beta\mu)^{-2} - \frac{7\pi^4}{384}(\beta\mu)^{-4} + \cdots\right\}。 \tag{14}$$

11 式を 7 式に代入することで、 14 式が得られる。