統計力学 2 演習 A
『熱統計物理学演習、その 22』の **Q22-4**

藤井淳太朗

最終更新日
2021 年 7 月 20 日

Q22-4

(エネルギー E と粒子数 N の表式) この Bose 粒子あるいは Fermi 粒子からなる理想気体のエネルギー E と粒子数 N は、逆温度 β と化学ポテンシャル μ の関数として次のように表されることを示してください。:

$$\begin{cases} E = \displaystyle\int_0^\infty d\epsilon \epsilon f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon) D(\epsilon) \\ N = \displaystyle\int_0^\infty d\epsilon f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon) D(\epsilon) \end{cases} \quad (Z = \text{ Bose, Fermi }) 。 \tag{1}$$

ここで、$f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon)$ は Bose 分布関数 $(Z = \text{Bose})$ あるいは Fermi 分布関数 $(Z = \text{Fermi})$ です。:

$$\begin{cases} f^{\text{Bose}}_{\beta,\mu}(\epsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \\ f^{\text{Fermi}}_{\beta,\mu}(\epsilon) = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} 。\end{cases} \tag{2}$$

1 粒子固有エネルギーの分布関数 $D(\epsilon)$ としては、厳密に分析を進める場合には厳密な分布密度 $D^{\text{exact}}(\epsilon)$ を持ちます。近似的に分析を進めれば十分な場合には鳴らした分布密度 $D^{\text{smooth}}(\epsilon)$ を用います。つまり、

$$D(\epsilon) = D^{\text{exact}}(\epsilon) \text{ または } D^{\text{smooth}}(\epsilon) \tag{3}$$

です。

Fermi・Bose の分布関数は、エネルギー ϵ の 1 粒子状態に週称される粒子数の期待値を与える関数であるから、粒子数は全てのエネルギー状態を足し合わせればよく、

$$N = \sum_{n \in I} f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) \tag{4}$$

となる。同様に、

$$E = \sum_{n \in I} \epsilon_n f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) \tag{5}$$

となる。

まず厳密な分布密度 $D^{\mathrm{exact}}(\epsilon)$ に対して、1 式が成り立つことを示す。

$$N = \sum_{n\in I} f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) = \sum_{n\in I}\int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\delta(\epsilon-\epsilon_n) = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\sum_{n\in I}\delta(\epsilon-\epsilon_n) \tag{6}$$

と変形できる。また『熱統計物理学演習、その 22』の 9 式から

$$D^{\mathrm{exact}}(\epsilon) = \sum_{n\in I}\delta(\epsilon-\epsilon_n) \tag{7}$$

であるから、

$$N = \int_0^\infty d\epsilon f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) D^{\mathrm{exact}}(\epsilon) \tag{8}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n\in I} \epsilon f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) \\ &= \sum_{n\in I}\int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\epsilon\delta(\epsilon-\epsilon_n) \\ &= \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\epsilon\sum_{n\in I}\delta(\epsilon-\epsilon) \\ &= \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\epsilon D^{\mathrm{exact}}(\epsilon) \end{aligned} \tag{9}$$

となる。こうして 1 式が示された。

次に滑らかな分布密度 $D^{\mathrm{smooth}}(\epsilon)$ について、1 式が成り立つことを示す。一粒子エネルギーを幅 $\Delta\epsilon(>0)$ の区間に分割し、各区間ごとにまとめた和を考える。すると粒子数 N は

$$N = \sum_{n\in I} f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in((n-1)\Delta\epsilon<\epsilon_j<n\Delta\epsilon)} f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_j)、 \tag{10}$$

となる。ここで $f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon_n) \simeq f^Z_{\beta,\mu}(n\Delta\epsilon)$ とすると、

$$\simeq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in((n-1)\Delta\epsilon<\epsilon_j<n\Delta\epsilon)} f^Z_{\beta,\mu}(n\Delta\epsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\Omega(n\Delta\epsilon)-\Omega((n-1)\Delta\epsilon)\} f^Z_{\beta,\mu}(n\Delta\epsilon)、 \tag{11}$$

と状態数 $\Omega(\epsilon)$ の差を用いて表すことができる。滑らかな分布を考えているから、状態数の差 $\Omega(n\Delta\epsilon) - \Omega((n-1)\Delta\epsilon)$ を $\Delta\epsilon$ で一次近似し、

$$\underbrace{=}_{D^{\mathrm{smooth}}(\epsilon)=\frac{d\Omega}{d\epsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} D^{\mathrm{smooth}}(n\Delta\epsilon)\Delta\epsilon f^Z_{\beta,\mu}(n\Delta\epsilon) \simeq \int_0^\infty d\epsilon D^{\mathrm{smooth}}(\epsilon) f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon) \tag{12}$$

と 1 式が得られた。また最後の近似は $\Delta\epsilon$ が十分小さいとして、和を積分に変えた。E については N の議論において $f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon)$ を $\epsilon_n f^Z_{\beta,\mu}(\epsilon)$ で置き換えることで、1 式を得ることができる。