

統計力学 2 演習 A

『熱統計物理学演習、その 20』の Q20-12

藤井淳太郎

提出日時（最終更新日）
2021 年 7 月 6 日

Q20-12

次の論理的同値性を説明してください。

「理想気体が古典的である。」 \Leftrightarrow 「熱運動している各粒子の量子力学的広がり_aは重なり合っていない。」(1)

$\Leftrightarrow \frac{N}{V} V_Q \ll 1$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m} \right)^{3/2} \ll 1.$ (3)

a,b,c それぞれについて同値性を示す。^{*1}

a について

(\Rightarrow)

古典的な理想気体とは理想気体の性質に以下の性質を加えたものとして与えることにする。

1. 気体を構成する各粒子の体積は気体の体積に対し、いくらでも小さいと考えられる。

各粒子の体積をいくらでも小さく考えることができるから、体積 0 としてもよい。したがって粒子は重なることがない。

(\Leftarrow)

『粒子の量子力学的広がりが重なり合っていない』ため、粒子が衝突することがない場合を考えている。粒子は熱運動してランダムに動いても衝突しないのは、気体の体積に対して、各粒子の体積が十分小さいからである。 □

^{*1} 物理における同値性のルールとして十分小さいとできる場合は無視できる、すなわち概念的にないものとみなせるとした。数学的な証明においてこうしたことは許されないが、私の力量では叶わなかった。

b について

(\Rightarrow)

『熱統計物理学演習、その 20』の (20) 式から 1 粒子の量子力学的広がり V_Q となる。粒子が自由に熱運動しているから一粒子あたりの気体の体積が 1 粒子の量子力学的広がりよりも十分大きい。

$$V_Q \ll \frac{V}{N} \iff \frac{N}{V} V_Q \ll 1. \quad (4)$$

(\Leftarrow)

$V_Q \ll \frac{V}{N}$ であるから、 V/N のスケールにおいて、 V_Q を無視できる。つまり粒子の体積が無視できるから、各粒子は重なり合わない。 \square

c について

『熱統計物理学演習、その 20』の (17) 式より、

$$V_Q \equiv \left(\frac{2\pi\hbar^2\beta}{m} \right)^{3/2} \quad (5)$$

と与えられている。よって明らかに満たされる。 \square