電磁気学 3 演習 A 演習問題 6-4

藤井淳太朗

提出日時（最終更新日）
2021 年 7 月 29 日

問題 6-4: 強磁性帯におけるファラデー効果
強磁性体での電磁波を考える。電束密度が $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} + i(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g})$ に従うとする。$\boldsymbol{g}$ は磁荷に比例しており、以下では $\boldsymbol{g} = (0, 0, g)$ とする。$+z$ 方向に進行する平面波を考える。その周波数を ω、$|g| < \epsilon$、透磁率を μ とする。また、系に電流および電荷はないとする。
(1) 波数 $\boldsymbol{k}$ と電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ の満たす方程式を求めよ。求めた方程式が非自明な解を持つことを考慮して、$\boldsymbol{k}$ を ω で表し、右円偏光及び左円偏光の速度を求めよ。
(2) $z = 0$ で $\boldsymbol{E} = (E_0 e^{i\omega t}, 0, 0)$ という x 方向に直線偏光している光を入射した時、$z = L$ における偏光を求めよ。さらに、$z = 0$ で同じ直線偏光の電磁波が － z 方向に伝搬する場合、$z = -L$ での偏光を求めよ。

(1). 物質中の電束密度・電場が満たす方程式を求める。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} \quad \text{（アンペール・マクスウェルの法則、電流がないことを用いた。）} \\
\Longleftrightarrow\ &\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} \quad \text{（透磁率}\mu\text{を用いて、}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu\text{）} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\left(-\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} \quad \text{（ファラデーの法則）} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{-1}{\mu}\left(\mathrm{grad}(\underbrace{\mathrm{div}\boldsymbol{E}}_{0\ \text{下で説明}}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2} \\
\Longleftrightarrow\ &\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{D}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ について、ガウスの法則から以下のように求める。$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} + i(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g})$ であるから、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\mathrm{div}(\epsilon \boldsymbol{E} + i(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g})) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\epsilon \mathrm{div}\boldsymbol{E} + i(\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\mathrm{rot} \cdot \boldsymbol{g}) = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで $\boldsymbol{E}$ は $+z$ に進む平面波だから、

$$
\boldsymbol{E} = (E_x \boldsymbol{e}_x + E_y \boldsymbol{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \tag{3}
$$

となる。また $\boldsymbol{g} = g\boldsymbol{e}_z$ を代入すると、2 式は

$$
\begin{aligned}
&\epsilon \mathrm{div}\boldsymbol{E} + i(\underbrace{g\boldsymbol{e}_z \cdot (-E_y\boldsymbol{e}_y + E_x\boldsymbol{e}_y)ike^{i(kz-\omega t)}}_{0} - \boldsymbol{E}\cdot 0) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\epsilon \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ が得られた。

1 式に $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ の具体的な表式を代入する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= (E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y)e^{i(kz-\omega t)} \\
\boldsymbol{D} &= \epsilon\boldsymbol{E} + i(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{g}) = \{(\epsilon E_x + iE_y g)\boldsymbol{e}_x + (\epsilon E_y - iE_x g)\boldsymbol{e}_y\}e^{i(kz-\omega t)}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となるから、

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2} \\
\Longleftrightarrow &-k^2(E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y) = \mu(-\omega^2)\left[(\epsilon E_x + iE_y g)\boldsymbol{e}_x + (\epsilon E_y - iE_x g)\boldsymbol{e}_y\right]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ で整理すると、波数 $\boldsymbol{k}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ に関する関係式

$$
\begin{bmatrix} (k^2 - \mu\epsilon\omega^2) & -i\mu g\omega^2 \\ i\mu g\omega^2 & k^2 - \mu\epsilon\omega^2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{7}
$$

が得られる。非自明な解を持つには

$$
\det\begin{vmatrix} (k^2 - \mu\epsilon\omega^2) & -i\mu g\omega^2 \\ i\mu g\omega^2 & k^2 - \mu\epsilon\omega^2 \end{vmatrix} = 0
\tag{8}
$$

となり、これを解くと、$k = \pm\omega\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}$ となる。$+z$ への進行波を考えているから、$k = \omega\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}$ となる。よって、

$$
\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)} \end{pmatrix}
\tag{9}
$$

となる。

正の解について、7 式に代入すると、

$$
E_x = e^{-\frac{\pi}{2}i}E_y
\tag{10}
$$

が得られる。よって、この解が左円偏光になる。

負の解について、7 式に代入すると、

$$
E_x = e^{\frac{\pi}{2}i}E_y
\tag{11}
$$

が得られる。よってこの解が右円偏光になる。

また位相速度・群速度ともに、

$$
\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}} = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}}
\tag{12}
$$

となるから、左円偏光の速度は $1/\sqrt{\mu(\epsilon+g)}$、右円偏光は $1/\sqrt{\mu(\epsilon-g)}$ となる。

再掲:
(2) $z=0$ で $E = (E_0 e^{i\omega t}, 0, 0)$ という x 方向に直線偏光している光を入射した時、$z = L$ における偏光を求めよ。さらに、$z = 0$ で同じ直線偏光の電磁波が $-z$ 方向に伝搬する場合、$z = -L$ での偏光を求めよ。

(2). 物質中に電磁波が侵入すると、(1) から左と右の円偏光ごとに異なる速度で進行するため、物質中を進む

につれて合成した光の偏光が変化する。距離 L にかかる時間は $\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}L$ となるから、位相の差は

$$\Delta\phi = \omega(\sqrt{\mu(\epsilon+g)} - \sqrt{\mu(\epsilon-g)})L \tag{13}$$

と与えられる。したがって、L における電場は、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \frac{E_0}{2}\begin{bmatrix}\cos(\omega t + \Delta\phi)\\ \sin(\omega t + \Delta\phi)\end{bmatrix} + \frac{E_0}{2}\begin{bmatrix}\cos(\omega t)\\ -\sin(\omega t)\end{bmatrix}\\
&= \frac{E_0}{2}\begin{bmatrix}2\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos\frac{\Delta\phi}{2}\\ 2\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\sin\frac{\Delta\phi}{2}\end{bmatrix}\\
&= E_0\cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\begin{bmatrix}\cos\frac{\Delta\phi}{2}\\ \sin\frac{\Delta\phi}{2}\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

となるので、$\frac{\Delta\phi}{2}$ だけ傾いた直線偏光が得られる。よって、$z = L$ における偏光は x 軸から反時計回りに $\frac{\omega}{2}(\sqrt{\mu(\epsilon+g)} - \sqrt{\mu(\epsilon-g)})L$ だけ回転した直線偏光が得られる。

また負方向進む場合は、逆向きに回転する。よって、$-\frac{\omega}{2}(\sqrt{\mu(\epsilon+g)} - \sqrt{\mu(\epsilon-g)})L$ だけ回転した直線偏光が得られる。