電磁気学レポート 2-5 答案

藤井淳太朗

(最終更新日)
2021 年 7 月 1 日

※本レポートは [1](`https://home.hiroshima-u.ac.jp/ino/lecture/`) の資料を参考に作成した。[*1]

問題を解く前に

- 単位時間、単位面積を通過する熱エネルギーを熱流束 [$\mathrm{J/s \cdot m^2}$] という。
- 熱流束は温度勾配 $\boldsymbol{\nabla} T$ に比例する（フーリエの法則)。

$$\boldsymbol{J} = -\kappa \boldsymbol{\nabla} T \tag{1}$$

  κ を熱伝導率という。
- Wiedemann–Franz 則 (1853,1872)：電気伝導率 σ と熱伝導率 κ の比 $\frac{\kappa}{\sigma}$ は温度 T に比例する。

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \mathrm{L}T \quad (\mathrm{L} \equiv \text{ローレンツ数}) \tag{2}$$

1 Drude 模型 (1900)

オームの法則の抵抗の起源を古典力学で理解で説明する。

自由電子の気体が陽イオン間を自由に動き回る。ただし「電子が一定の時間ごとに陽イオンにより散乱される（緩和時間近似)。」と仮定し、その単位時間当たりの散乱確率は $1/\tau$ で与えられる。

電子は拡散されると運動エネルギーを失うから、電子の平均運動量 $\langle \boldsymbol{P}(t) \rangle$ の運動方程式は

$$\frac{d \langle \boldsymbol{P}(t) \rangle}{dt} = -e\boldsymbol{E} - \frac{1}{\tau} \langle \boldsymbol{P}(t) \rangle \tag{3}$$

となり、

$$\langle \boldsymbol{P}(t) \rangle + e\tau \boldsymbol{E} \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{4}$$

となる。したがって、十分に時間がたつと電子の平均運動量が、$\langle \boldsymbol{P}(t) \rangle = -e\tau\boldsymbol{E}$ と一定になる。平均速度 $\boldsymbol{v}_d$ は平均運動量を電子の質量で割ることで

$$\boldsymbol{v}_d = -\frac{e\tau}{m}\boldsymbol{E} \tag{5}$$

となる。

[*1] また [1] はアシュクロフト・マーミンの「固体物理の基礎」を参考にしているようである。[1] よりも詳細が記載されている。

一方、時間 dt に面積 dS を通過する電荷量は、$dQ = \boldsymbol{j} dtdS$ となり、密度が n の電子集団が $\boldsymbol{v}_d$ で $dtdS$ を通過するとしたら $dQ = -en\boldsymbol{v}_d dtdS$ となる。よって、

$$\boldsymbol{j} = -en\boldsymbol{v}_d = -en\frac{e\tau}{m}\boldsymbol{E} \tag{6}$$

となる。さらにオームの法則 $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ から

$$-en\frac{e\tau}{m}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E} \leftrightarrow \sigma = e^2\frac{n\tau}{m} \tag{7}$$

となる。

2　問題 2-5

ここから本レポートの問題に取り掛かる。

問題の概要

x 方向に温度勾配がかかっている。緩和時間が τ、電子の速度が v_x で与えられており、x 方向は $\Delta x = \tau v_x$ にすべての粒子が集まっていると考える。このとき各点の電子のエネルギーはその点の温度に依存するものとする。$x \pm \Delta x$ から x に流れるエネルギーを考えて、熱流束と熱伝導率を求めよ（問題文の通りになることを確かめよ)。そして理論値と異なる値となることを考察せよ。

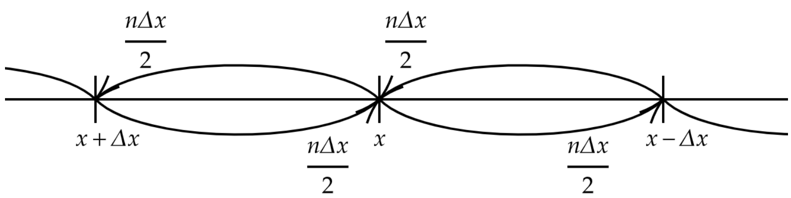

図 1

緩和時間が τ だから、x に至る粒子は $x \pm \Delta x$ にいた気体粒子となる。また各点の粒子は拡散されるから、各点にとどまり続けるものはなく、半分ずつ両隣に移動する。位置 x の温度を T として、一粒子あたりの熱エネルギーを $u(T)$、$x \pm \Delta x$ の温度を $T \pm \Delta T$ とすると、x に $x - \Delta x$ からくる熱流束は

$$j^+ = u(T - \Delta T)\frac{n}{2}v_x \tag{8}$$

x に $x + \Delta x$ からくる熱流束は

$$j^- = u(T + \Delta T)\frac{n}{2}v_x \tag{9}$$

したがって、正の方向に流れる熱流束は

$$\begin{aligned} j = j^+ - j^- &= \frac{nv_x}{2}(u(T - \Delta T) - u(T + \Delta T)) && (10)\\ &= \frac{nv_x}{2}\left(u(T) - \frac{du}{dT}\Delta T - u(T) - \frac{du}{dT}\Delta T + O((\Delta T)^2)\right) && (11)\\ &\simeq -nv_x\frac{du}{dT}\Delta T && (12) \end{aligned}$$

一粒子あたりの比熱は $c_V = \frac{du}{dT}$ であり、$\Delta T = \frac{dT}{dx}\Delta x = \frac{dT}{dx} v_x \tau$ となるから、

$$j = -v_x^2 \tau c_V n \frac{dT}{dx} \tag{13}$$

これで、問題文 (4) 式が示された。

さらにフーリエの法則 ($J = -\kappa \boldsymbol{\nabla} T$) であったから、熱伝導率 $\kappa = c_v v_x^2 n\tau$ となり、問題文で与えられた $v_x = \frac{k_B T}{m}, c_V = \frac{3}{2}k_B$ を代入すると、

$$\kappa = \frac{3k_B^2 T n\tau}{2m} \tag{14}$$

これで、問題文 (5) 式が示された。

さて Lorenz 数は Wiedemann–Franz 則から $\mathrm{L} = \frac{\kappa}{T\sigma}$ であった。また本問題を解く前に考察した Drude 模型の議論から $\sigma = e^2 \frac{n\tau}{m}$ が得られている。よって、

$$L = \frac{1}{T}\frac{m}{e^2 n\tau}\frac{3k_B^2 T n\tau}{2m} = \frac{3k_B^2}{2e^2} \underbrace{\simeq}_{e \sim 1.6\times 10^{-19}[\mathrm{C}], k_B \sim 1.38\times 10^{-23}[\mathrm{J/K}} 1.11 \times 10^{-8} [\mathrm{W\Omega/K^2}] \tag{15}$$

となる。

理論値に関して、[2, 金属の電気抵抗率, 金属の熱伝導率] のデータからローレンツ数を計算した。二つのデータにおいて、金属の種類がばらばらだったり、温度によって載っていない項目が多数あった。なので電気抵抗率、金属の熱伝導率のデータがあるものを抜き出し、図 2 にまとめた。

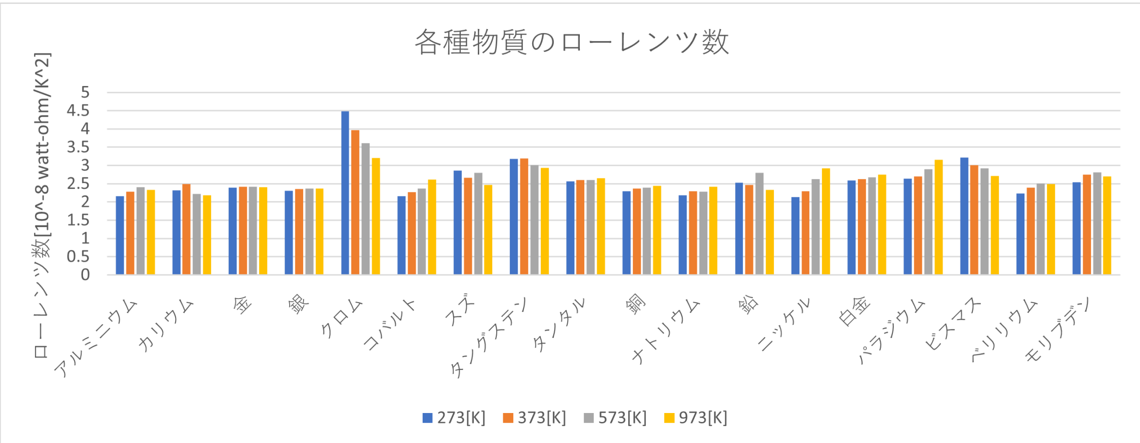

図 2　各種金属のローレンツ数、横軸に金属名を並べて、温度ごとのローレンツ数を棒グラフにした。縦軸はローレンツ数であり $[10^{-8}\mathrm{W\Omega/K^2}]$ となっている。おおむね温度や金属の種類によらず一定値となっている。

また、文献 [1, 第 2 章] によると実験値は $L \sim 2.3 \times 10^{-8}$ $[\mathrm{W\Omega/K^2}]$ としていた。

まとめると、古典的な Drude 模型のローレンツ数では実験値の約半分ほどになってしまっている。

2.1　なぜ異なるか

電子を自由粒子のように扱ってしまったのがずれの原因である。電子はフェルミ粒子であり、多くの電子はエネルギーを失うことができない。自由に動き回ることができる電子はフェルミ球の一番外側の電子に限ら

れ、実際の電子の比熱や速度は異なる。そうした値を入れれば正しい値が得られるだろう。[1, 第 4 章] に詳しい説明があり、フェルミ統計を考慮したローレンツ数の値 $L \sim 2.44 \times 10^{-8}[\mathrm{W\Omega/K^2}]$ という値を導く過程が説明されている。

参考文献

[1] 井野明洋. 固体物理学 1, 2017. `https://home.hiroshima-u.ac.jp/ino/lecture/`.

[2] 国立天文台. 理科年表 = Chronological scientific tables. Rika nenpyo (Chronological scientific tables). 丸善出版, 東京, Japan, 机上版, 2020.11 2020.