

電磁気学 3 演習 A 演習問題 6-4

藤井淳太郎

提出日時（最終更新日）

2021 年 7 月 27 日

問題 6-4: 強磁性帯におけるファラデー効果

強磁性体での電磁波を考える。電束密度が $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g})$ に従うとする。 \mathbf{g} は磁荷に比例しており、以下では $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ とする。 $+z$ 方向に進行する平面波を考える。その周波数を ω 、 $|g| < \epsilon$ 、透磁率を μ とする。また、系に電流および電荷はないとする。

(1) 波数 \mathbf{k} と電場ベクトル \mathbf{E} の満たす方程式を求めよ。求めた方程式が非自明な解を持つことを考慮して、 \mathbf{k} を ω で表し、右円偏光及び左円偏光の速度を求めよ。

(2) $z = 0$ で $\mathbf{E} = (E_0 e^{i\omega t}, 0, 0)$ という x 方向に直線偏光している光を入射した時、 $z = L$ における偏光を求めよ。さらに、 $z = 0$ で同じ直線偏光の電磁波が $-z$ 方向に伝搬する場合、 $z = -L$ での偏光を求めよ。

(1). 物質中の電束密度・電場が満たす方程式を求める。

$$\begin{aligned} \text{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad (\text{アンペール・マクスウェルの法則、電流がないことを用いた。}) \\ \iff \text{rot} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad (\text{透磁率 } \mu \text{ を用いて、} \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu) \\ \iff \frac{1}{\mu} \text{rot} (-\text{rot} \mathbf{E}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \quad (\text{ファラデーの法則}) \\ \iff \frac{-1}{\mu} \left(\text{grad} \left(\underbrace{\text{div} \mathbf{E}}_{0 \text{ 下で説明}} \right) - \nabla^2 \mathbf{E} \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \\ \iff \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $\text{div} \mathbf{E} = 0$ について、ガウスの法則から以下のように求める。 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g})$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \iff \text{div}(\epsilon \mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g})) &= 0 \\ \iff \epsilon \text{div} \mathbf{E} + i(\mathbf{g} \cdot \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot} \cdot \mathbf{g}) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで \mathbf{E} は $+z$ に進む平面波だから、

$$\mathbf{E} = (E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y) e^{i(kz - \omega t)} \tag{3}$$

となる。また $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ を代入すると、2 式は

$$\begin{aligned} \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + i \underbrace{(g\mathbf{e}_z \cdot (-E_y\mathbf{e}_y + E_x\mathbf{e}_y))}_{0} i k e^{i(kz-\omega t)} - \mathbf{E} \cdot 0 &= 0 \\ \iff \epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

と $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ が得られた。

1 式に \mathbf{E}, \mathbf{D} の具体的な表式を代入する。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y)e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{D} &= \epsilon\mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g}) = \{(\epsilon E_x + iE_y g)\mathbf{e}_x + (\epsilon E_y - iE_x g)\mathbf{e}_y\}e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \\ \iff -k^2(E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y) &= \mu(-\omega^2)[(\epsilon E_x + iE_y g)\mathbf{e}_x + (\epsilon E_y - iE_x g)\mathbf{e}_y] \end{aligned} \quad (6)$$

\mathbf{e}_x と \mathbf{e}_y で整理すると、波数 \mathbf{k} と電場 \mathbf{E} に関する関係式

$$\begin{bmatrix} (k^2 - \mu\epsilon\omega^2) & -i\mu g\omega^2 \\ i\mu g\omega^2 & k^2 - \mu\epsilon\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

が得られる。非自明な解を持つには

$$\det \begin{bmatrix} (k^2 - \mu\epsilon\omega^2) & -i\mu g\omega^2 \\ i\mu g\omega^2 & k^2 - \mu\epsilon\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

となり、これを解くと、 $k = \pm\omega\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}$ となる。 $+z$ への進行波を考えているから、 $k = \omega\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}$ となる。よって、

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

となる。

再掲:

(2) $z = 0$ で $\mathbf{E} = (E_0 e^{i\omega t}, 0, 0)$ という x 方向に直線偏光している光を入射した時、 $z = L$ における偏光を求めよ。さらに、 $z = 0$ で同じ直線偏光の電磁波が $-z$ 方向に伝搬する場合、 $z = -L$ での偏光を求めよ。

(2). 物質中に電磁波が侵入すると、(1) から左と右の円偏光ごとに異なる速度で進行するため、物質中を進むにつれて合成した光の偏光が変化する。距離 L にかかる時間は $\sqrt{\mu(\epsilon \pm g)}L$ となるから、位相の差は

$$\Delta\phi = \omega(\sqrt{\mu(\epsilon + g)} - \sqrt{\mu(\epsilon - g)})L \quad (10)$$

と与えられる。したがって、 L における電場は、

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \Delta\phi) \\ \sin(\omega t + \Delta\phi) \end{bmatrix} + \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{E_0}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos \frac{\Delta\phi}{2} \\ 2 \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \sin \frac{\Delta\phi}{2} \end{bmatrix} \\ &= E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos \frac{\Delta\phi}{2} \\ \sin \frac{\Delta\phi}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

となるので、 $\frac{\Delta\phi}{2}$ だけ傾いた直線偏光が得られる。よって、 $z = L$ における偏光は x 軸から反時計回りに $\frac{\omega}{2}(\sqrt{\mu(\epsilon + g)} - \sqrt{\mu(\epsilon - g)})L$ だけ回転した直線偏光が得られる。

また負方向進む場合は、逆向きに回転する。よって、 $-\frac{\omega}{2}(\sqrt{\mu(\epsilon + g)} - \sqrt{\mu(\epsilon - g)})L$ だけ回転した直線偏光が得られる。