藤井淳太朗

問題2.

σ はパウリ行列として知られている。

$$\sigma = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right]$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$ とすると

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_3 & n_1 - i n_2 \\ n_1 + i n_2 & -n_3 \end{bmatrix}$$

同様に. $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$ として. $\sigma \cdot \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_3 & m_1 - i m_2 \\ m_1 + i m_2 & -m_3 \end{bmatrix}$.

よって

$$[\sigma \cdot \mathbf{n}] \otimes [\sigma \cdot \mathbf{m}] = \begin{array}{c|c|c} & 2 & 2 \\ \hline 2 & n_3(\sigma \cdot \mathbf{m}) & (n_1 - i n_2)(\sigma \cdot \mathbf{m}) \\ \hline 2 & (n_1 + i n_2)(\sigma \cdot \mathbf{m}) & -n_3(\sigma \cdot \mathbf{m}) \end{array}$$

と行列で表すことができる。これを A とおく.

今. Bell状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と表すことができる。

よって

$$\langle \psi | (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) \otimes [\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{m}] | \psi \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} - A_{13} \\ A_{22} - A_{23} \\ A_{32} - A_{33} \\ A_{42} - A_{43} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(A_{22} - A_{23} - A_{32} + A_{33} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(n_3 \cdot (-m_3) - (n_1 - i n_2)(m_1 + i m_2) - (n_1 + i n_2)(m_1 - i m_2) + (-n_3)(+m_3) \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-2 n_3 m_3 - \big(n_1 m_1 + i(n_1 m_2 - n_2 m_1) + n_2 m_2\big) - \big(n_1 m_1 + i(n_2 m_1 - n_1 m_2) + n_2 m_2\big) \Big)$$

$$= -(n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3) = \underline{-\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}$$