Лабораторная работа №1

Подготовлено Дарьей Вершицкой

Апрель 2022

1 Условие

Вычислить интеграл

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz$$

в следующих заданиях контура: 1) $|z-i|=2$; 2) $|z+2-i|=3$

2 Решение

Особые точки подынтегральной функции: i кратности 2, -2.
1). В указанную область попадает точка i

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \oint_{|z-i|=2} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-i)^2}dz = 2\pi i f\prime(i) = 2\pi i(\frac{e^z(z+2)-e^z}{(z+2)^2})|_i = 2\pi i\frac{e^i(1+i)}{(i+2)^2}$$

2). В указанную область попадают точки i, -2

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz,$$

где C_1C_2 - границы непересекающихся областей точек i и -2;

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{z+2}dz = 2\pi i\frac{e^i(1+i)}{(i+2)^2} + 2\pi i\frac{e^z}{(z-i)^2}|_{-2} =$$

$$= 2\pi i\frac{e^i(1+i)}{(i+2)^2} + 2\pi i\frac{e^{-2}}{(i+2)^2} = \frac{2\pi i}{(i+2)^2}(e^i(1+i)+e^{-2})$$