

DM1 : analyse des algorithmes.

Ce devoir est facultatif. Il doit vous permettre de travailler la précision et la concision de vos réponses et de votre argumentation. Vous ne devriez pas avoir besoin de plus de 3 ou 4 lignes pour répondre à chaque question, et l'ensemble du devoir doit tenir sur une page (recto simple). Je corrigerai - sans les noter - les devoirs que vous me rendrez, à condition que vous ayez fait cet effort de rédaction.

Recherche de l'élément majoritaire d'un tableau.

Etant donné un tableau T de n éléments, on veut savoir s'il existe un élément majoritaire, c'est-à-dire un élément dont le nombre d'occurrences k est strictement supérieur à $n/2$, et dans ce cas, le déterminer.

L'algorithme naïf qui consiste à vérifier pour chaque élément du tableau s'il est majoritaire a une complexité quadratique dans le nombre n d'éléments.

L'algorithme récursif étudié au TD1 et basé sur le principe *diviser pour régner* a une complexité en $n \log n$.

Nous étudions ici un troisième algorithme (voir verso).

1. Montrez qu'au cours de l'exécution de l'algorithme, si T_2 n'est pas vide, il ne contient que des éléments ayant la même valeur.
2. Montrez que T_1 ne contient pas deux éléments consécutifs de même valeur.
3. Montrez que T_1 ne peut contenir au maximum que $\lceil n/2 \rceil$ éléments identiques.
4. Supposons que T a un élément majoritaire x .
 - (a) Montrez que si T_2 est non vide à la fin de l'algorithme, alors tous les éléments de T_2 ont pour valeur x .
 - (b) Montrez que si T_2 est vide à la fin de l'algorithme, alors n est impair et $T_1[1] = T_1[n] = x$.
5. Montrez la correction de l'algorithme.
6. Quel est sa complexité? Trouvez un majorant du nombre de comparaisons effectuées dans le pire des cas.

Algorithme rechEltMajoritaire: Recherche d'un élément majoritaire dans un tableau

entrée : $T[1, n]$ est un tableau d'entiers positifs ou nuls et $n \geq 1$.

sortie : x , si x est majoritaire dans T et -1 sinon.

début

 # on utilise 2 autres tableaux T_1 et T_2

$T_1[1], i := 1$ # indice de l'élément courant dans T_1

$j := 0$ # indice de l'élément courant dans T_2

pour $k := 2$ à n **faire**

 # l'objectif est de remplir T_1 en alternant les valeurs

si $T[k] \neq T_1[i]$ **alors**

$T_1[i + 1] := T[k], i := i + 1$ # insertion dans T_1

sinon

si $j = 0$ **alors**

$T_2[j + 1] := T[k], j := j + 1$ # T_2 est vide - on y insère l'élément courant

sinon

si $T_2[j] \neq T[k]$ **alors**

$T_1[i + 1] := T_2[j], T_1[i + 2] := T[k], i := i + 2, j := j - 1$

 # on peut insérer deux éléments dans T_1

sinon

$T_2[j + 1] := T[k], j := j + 1$ # insertion de l'élément courant dans T_2

finsi

finsi

finsi

finpour

si $j \geq 1$ **alors**

$x := T_2[1]$ # premier élément de T_2

sinon

$x := T_1[1]$ # premier élément de T_1

finsi

si x est majoritaire dans T **alors**

 retourner x

sinon

 retourner -1

finsi

fin
