Algorithmique et Complexité Avancés

Master 1 ML
Departement Informatique — Université de Lille

DS ACA - Partie Approximations

1h30 - Une feuille A4 manuscrite autorisée

1 Classes

Q1 . Retrouver les inclusions entre les classes APX, FPTAS, NPO et PTAS.

> FPTAS $\subseteq$ PTAS $\subseteq$ APX $\subseteq$ NPO

Q2 . Qu'est ce qu'un problème complet pour une classe ? Citer une classe de problèmes d'optimisation admettant des problèmes complets.

> Un problème est complet pour une classe si tous les problèmes de cette classe peuvent se réduire vers lui. La complétude est donc liée à la réduction utilisée.
> Pour les problèmes de décision la définition classique de la réduction vue en cours (Karp reduction ou appelée aussi many-one reduction) permet de définir des problèmes NP-Complets.
> Parmi les nombreuses réductions définies entre les problèmes d'approximation de NPO certaines ne permettent pas d'obtenir des problèmes complets. Par exemple la réduction stricte ne permet pas d'avoir des problèmes NPO-Complet mais c'est possible avec une AP-reduction. Pour la classe APX on peut utiliser une L-reduction ou une PTAS-reduction pour montrer que des problèmes problèmes sont complets pour cette classe, relativement à ces réductions.
> Minimum Vertex Cover est un problème APX-Complet.

Q3 . A quoi correspond la classe APX-intermediate ? Donner un exemple de problème appartenant à cette classe [1].

> Les problèmes APX-intermediate sont des problèmes qui sont bien dans APX mais qui ne sont ni APX-Complet, ni PTAS, ils ont donc une complexité d'approximation intermedaire entre ces deux sous classes d'APX, sous l'hypothèse que $P \neq NP$. Les problèmes Minimum Bin Packing et Minimum Edge Coloring sont supposés être APX-intermediate.

Q4 . La réduction stricte [2] préserve-t-elle l'appartenance à PTAS ? En d'autres terme est ce que si $\Pi_1 \leq_S \Pi_2$ et $\Pi_2 \in$ PTAS alors $\Pi_1 \in$ PTAS ? Justifier.

1. Dans l'état actuel des connaissances.
2. Définie dans l'annexe.

La réduction stricte préserve bien l'appartenance à PTAS.
Comme $\Pi_2 \in$ PTAS il admet un schéma d'approximation polynomial, donc pour tout $\varepsilon > 0$ un algorithme polynomial d'approximation de facteur $1 + \varepsilon$.
Si $\Pi_1 \leq_S \Pi_2$ alors, en reprenant les notations de la définition en annexe, on a $R_2(f(x_1), y_2) \geq R_1(x_1, g(x_1, y_2))$, et donc pour tout $\varepsilon > 0$ on peut obtenir pour Π_1 un facteur d'approximation d'au plus $1 + \varepsilon$ grâce à un algorithme polynomial basé sur la réduction et sur une $(1 + \varepsilon)$-approximation pour Π_2.
Cet algorithme pour Π_1 consiste à calculer pour une instance $x_1 \in \Pi_1$ l'instance $x_2 = f(x_1) \in \Pi_2$ puis obtenir avec l'algorithme polynomial de $(1 + \varepsilon)$-approximation de Π_2 une solution y_2 de x_2. Enfin la fonction g permet de calculer une solution $y_1 = g(x_1, y_2)$ en temps polynomial et dont le ratio avec l'optimal est garanti comme étant $1 + \varepsilon \geq R_2(f(x_1), y_2) \geq R_1(x_1, g(x_1, y_2))$.
Π_1 admet donc un schéma d'approximation polynomial, il est donc aussi dans PTAS.

2 Facteur d'approximation

Pour le problème Minimum Vertex Cover MVC, l'algorithme glouton consistant à ajouter itérativement les deux extrémités d'une arête à la couverture puis à retirer ces deux sommets du graphe jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'arêtes dans le graphe est une 2-approximation.

En basant le choix glouton non plus sur les arêtes mais sur les sommets on peut obtenir un nouvel algorithme : ajouter itérativement à la couverture le sommet de plus grand degré puis le supprimer du graphe, jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'arêtes dans le graphe.

Q5 . Montrer que l'algorithme glouton basé sur les sommets est une $\mathcal{O}(\log n)$-approximation pour le problème MVC. *Indication :* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \in \mathcal{O}(\log n)$, *à chacun sa part et les arêtes seront bien couvertes.*

Cette preuve est a peu près la même que pour l'algorithme de Minimum Set Cover vu en cours : le coût de la couverture est réparti sur les arêtes et on essaie de trouver une borne supérieure pour chaque arête.

On note OPT une solution optimale, c'est-à-dire un ensemble de sommets de taille minimum permettant de couvrir toutes les arêtes du graphe. On note S l'ensemble de sommets, vide initialement, auquel on ajoute des sommets au cours du glouton, S contient donc une couverture des arêtes à la fin du glouton. Le graphe est $G = (V, E)$ et on note $m = |E|$ et $n = |V|$.

Au cours du glouton, un sommet permet de couvrir toutes les arêtes non encore couvertes qui lui sont incidentes : à une étape du glouton plusieurs arêtes peuvent donc être couvertes en même temps, mais on les ordonne alors arbitrairement pour pouvoir s'intéresser à la k^e arête couverte.

Lorsqu'on couvre la k^e arête on pourrait le faire en choisissant tous les sommets de OPT qui ne sont pas déjà dans la solution gloutonne S, donc pour un coût de |S-OPT| $\leq$ |OPT|. Les $m - k + 1$ arêtes restantes (il n'y en a en effet que $k - 1$ déjà couvertes) seraient couvertes donc le coût par arête serait de |S-OPT|$/(m - k + 1) \leq |OPT|/(m - k + 1)$. C'est un coût moyen par arête qui est atteignable : OPT existe et donc on pourrait vraiment terminer la couverture avec le coût |S-OPT|$/(m - k + 1)$ par arête. Comme c'est un coût moyen il existe une arête dont le coût de couverture est inférieur ou égal à ce coût.

La k^e arête est couverte par le sommet de plus grand degré du graphe à cette étape du glouton, c'est-à-dire avec le coût par arête le plus faible possible (1/degré du sommet choisi). Le coût de la k^e arête est ainsi inférieur où égal à |S-OPT|$/(m - k + 1) \leq |OPT|/(m - k + 1)$.

Le coût de la couverture ayant été réparti sur toutes les arêtes il suffit de faire la somme sur toutes les arêtes pour en obtenir une borne supérieure :

|S| $\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|OPT|}{m-k+1}$ = |OPT| $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m-k+1}$ = |OPT| H_m Comme S est une solution réalisable d'un problème de minimisation on a donc :

|OPTl $\leq$ |S| $\leq$ |OPT| H_m

Dans un graphe $m = |E| \leq n^2 = |V|^2$, on peut donc en déduire que $H_m \in \mathcal{O}(\log n^2) = \mathcal{O}(\log n)$ car $\log n^2 = 2 \log n$.

3 Réduction

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une réduction stricte de MWVC vers MWC.

Q6 . Montrer que, dans un graphe biparti complet $G = (V_1, V_2, E)$, une couverture minimum des arêtes de $E = V_1 \times V_2$ par les sommets ne peut pas contenir des sommets appartenant aux deux sous ensembles de sommets V_1 et V_2 en même temps. *Remarque : ce résultat n'est pas nécessairement à utiliser tel quel dans la suite mais la résolution de cette question avant la réduction aidera quand même beaucoup.*

On suppose qu'il y existe une couverture S minimum qui contient des sommets de V_1 et des sommets de V_2. Il s'agit de montrer soit qu'elle n'est pas minimum soit que ce n'est pas une couverture.
Supposons qu'au moins un des deux ensembles V_1 ou V_2 est entièrement inclu dans S, et sans perte de généralité qu'il s'agit de V_1. Alors V_1 permet de couvrir toutes les arêtes car le graphe est biparti. Les sommets de $V_2 \cap S$ sont donc inutils pour couvrir les arêtes et on peut les supprimer de S qui n'était donc pas une couverture minimum.
Supposons maintenant au contraire qu'aucun des deux sous ensembles de sommets V_1 et V_2 ne soit entièrement inclus dans S. Alors il existe au moins un sommet $v_1 \in V_1$ et un sommet $v_2 \in V_2$ qui ne sont pas dans S. Le graphe étant biparti complet, l'arête $\{v_1, v_2\}$ existe bien dans E et n'est pas couverte. Donc S , n'est pas une couverture des arêtes.
En conclusion soit $S \subseteq V_1$ soit $S \subseteq V_2$. On peut de plus déduire de ce qui précéde que S doit être égal à l'un des deux sous ensembles, sinon ce ne serait pas une couverture, et qu'il s'agit de celui de taille minimum, sinon S ne serait pas une couverture minimum.

Q7 . Proposer une construction pour la réduction stricte de MWVC vers MVC (ie la fonction f) et montrer qu'elle est polynomiale.

La construction associe au sommet v_i de poids w_i de l'instance de MWVC w_i sommets de poids unitaire dans l'instance de MVC construite.
Si l'arête $\{v_i, v_j\}$ existe dans le graphe de l'instance de MWVC, alors on construit un graphe biparti complet entre les sous ensembles de sommets associés à v_i et à v_j dans l'instance de MVC.

Q8 . L'instance du problème MVC admet des solutions ayant une propriété particulière, quelle est cette propriété ?

Une couverture pour l'instance MVC a la propriété que les w_i sommets correspondant à un même sommet v_i de poids w_i de MWVC soit appartiennent tous soit n'appartiennent pas à la couverture.

Q9 . Montrer que la propriété évoquée dans la question précédente est vraie.

Q10 . Expliquer comment obtenir la solution de l'instance réduite à partir de la solution de l'instance vers laquelle se fait la réduction (ie la fonction g).

D'après la propriété d'une couverture pour l'instance de MVC construite il suffit de prendre les dans une couverture pour MWVC tous les sommets v_i dont les w_i sommets associés appartiennent à la couverture pour MVC.

Q11 . Montrer que les fonctions f et g obtenues constituent bien une réduction stricte de MWVC vers MVC.

Les deux fonctions f et g sont polynomiales. Il faut regarder les rapports entre les valeurs et les valeurs optimales.

Q12 . Qu'en conclure pour MWVC sachant que MVC est 2-approximable ?

2-approximable aussi grâce à la réduction stricte.

4 Annexe

4.1 Problèmes

Une couverture par sommets d'un graphe G est un ensemble S de sommets tel que chaque arête de $G = (V, E)$ est incidente à au moins un sommet de S, c'est-à-dire un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ tel que pour chaque arête $(u, v) \in E$, on a $u \in S$ ou $v \in S$.

Le problème d'optimisation consistant à trouver une couverture minimale se décline en deux versions : trouver une couverture de cardinalité minimum (MVC) ou trouver une couverture de poids minimum (MWVC).

Minimum Vertex Cover (MVC)
Instance Graphe $G = (V, E)$,
Solution S une couverture de G de taille minimum, c'est-à-dire que $|S|$ est minimum parmi toutes les couvertures de G.

Minimum Weigthed Vertex Cover (MWVC)
Instance Graphe $G = (V, E)$, poids $w_i \in \mathbb{N}$ pour chaque sommet $v_i \in V$,
Solution S une couverture de G de poids minimum, c'est-à-dire que $\sum_{v_j \in S} w_j$ est minimum parmi toutes les couvertures de G.

4.2 Réduction stricte

Definition 1 (Réduction Stricte) *Soient Π_1 et $\Pi_2 \in NPO$ deux problèmes de minimisation. Alors Π_1 se réduit vers Π_2 ($\Pi_1 \leq_S \Pi_2$) s'il existe deux fonctions f et g calculables en temps polynomial satisfaisant les propriétés suivantes :*

- *f est une fonction qui construit à partir d'une instance x_1 de Π_1 une instance $x_2 = f(x_1)$ de Π_2,*
- *g construit une solution $y_1 = g(x_1, y_2)$ d'une instance x_1 de Π_1 à partir de la solution y_2 de l'instance $x_2 = f(x_1)$ du problème Π_2,*
- *Pour toute instance x_1 de Π_1 et toute solution y_2 de l'instance $x_2 = f(x_1)$ de Π_2, $R_2(f(x_1), y_2) \geq R_1(x_1, g(x_1, y_2))$, où $R(i, s) = m(i, s)/m^*(i)$ est le rapport entre la valeur $m(i, s)$ de la solution s de l'instance i et la valeur optimale $m^*(i)$ de l'instance i.*