3. Dénombrement

Dénombrement

- L’étude du nombre de permutations, d’arrangements, de combinaisons ou de partitions (…) s’appelle traditionnellement en mathématiques l’analyse combinatoire.
- Elle est omniprésente en informatique. La résolution de nombreux problèmes consiste en l’énumération exhaustive des possibilités pour ensuite décider pour chacune si elle est solution ou non au problème.
  Et avant d’énumérer, il est prudent de dénombrer.
- Plusieurs autres raisons à cette omniprésence :
  - codage des données en binaire
  - propriétés combinatoires des structures de données
  - programmation itérative ou récursive
  - estimation du temps de calcul des algorithmes en fonction de la taille des entrées

Temps d’exécution

Par exemple, on implémente un programme pour lister toutes les parties de l’ensemble E à n éléments. Il y a 2^n.

Supposons pour simplifier que pour calculer et éditer une partie, l’ordinateur prenne une µ-seconde (10^{-6}s) :

|E|	0	10	20	30	40	50	60
Temps	1 µs	1,024 ms	1,048 s	17,9 mn	12,7 jours	35,7 ans	366 siècles

Problème du voyageur de commerce

- Toutes les villes d’une région sont reliées deux à deux.
  Le VRP habite dans l’une et doit visiter plusieurs clients, un dans chacune des villes voisines.
- On cherche le chemin le plus court lui permettant de parcourir toutes les villes sans jamais repasser deux fois dans la même sauf la sienne, au départ et à l’arrivée.
- On pense à un algorithme naïf :
  - on énumère tous les parcours possibles
  - on sélectionne le (ou les) plus court(s).
- Le seul hic est que pour n un peu grand, la réponse de l’ordinateur peut prendre … des lustres !

Permutations

Soit E un ensemble fini à n éléments.

- On appelle permutation p de E toute bijection de E dans E.
  Le nombre de permutations de E égale
  $$n!$$
- Il y a (n>1) : n choix pour le 1er élément de la permutation,
  n-1 choix pour le 2d
  …
  2 choix pour l'avant dernier
  1 seul pour le dernier.
  On <u>multiplie</u> le nombre de toutes ces possibilités soit n!
- Une permutation est aussi une suite ordonnée sans répétition ni omission d'éléments de E.

La factorielle

- L'ordre de grandeur de la factorielle est n^n.
- Une approximation de la factorielle est donnée par la formule de Stirling

$$n\,! = \sqrt{2\pi n}\;(n/e)^n\;(1+ \Theta(1/n))$$

Exemple

L'algorithme précédent doit énumérer toutes les permutations des villes du voisinage. Pour n villes, il y a n-1 villes voisines donc (n-1)! parcours d'où un temps d'exécution prohibitif de l'algorithme. A ce jour, on ne connaît pas d'algorithme permettant de résoudre ce problème en un temps acceptable quand n est très grand.

Arrangements

Soit E un ensemble fini à n éléments.

- On appelle arrangement de p éléments de E avec p≤n toute suite ordonnée et sans répétition de p éléments de E.
- Nombre d'arrangements de p éléments (p≠0) de E
  $$A_n^p = \frac{n\,!}{(n-p)!}$$
- Par convention, $A_n^0 = 1$.
- Un arrangement de p éléments pris parmi n peut être vu comme les p premiers éléments d'une permutation de n éléments. Chaque arrangement de p éléments donne donc lieu à (n-p)! permutations.

Exemple

Pour 12 chevaux au départ, il y a 1320 tiercés possibles.

Arrangements avec répétition

Soit E un ensemble fini à n éléments.

- On appelle arrangement avec répétition de p éléments de E toute application de {1,…,p} dans E. On en compte :
  $$n^p$$
- Il y a : n choix pour le 1er élément
  n choix pour le 2d
  …
  n choix pour le pième.
  On <u>multiplie</u> le nombre de toutes ces possibilités soit n^p.

Exemple

Combien existe-t-il d'octets ? 2^8.
On peut en déduire le nombre d'entiers de type `byte`, `short`, `int` et `long`, de réels de type `float` et `double` en JAVA, sachant qu'ils sont respectivement codés sur 1, 2, 4 , 8, 4 et 8 octets.

Combinaisons

- On appelle combinaison de p éléments pris parmi n éléments dans E toute partie de E à p éléments.

- Sauf avis contraire, les combinaisons sont sans répétition.

- Nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p!(n-p)!}$$

- Une combinaison ne tient pas compte de l'ordre des éléments ainsi un arrangement de p éléments pris parmi n donne lieu à p! combinaisons.

Remarques

- On pourrait vérifier que la somme du nombre des combinaisons pour les p variant de 0 à n redonne bien 2^n, le cardinal des parties de E …
- En anglais, on note $\binom{n}{p}$ les combinaisons de p éléments pris parmi n.

Propriétés

- Par convention, $C_n^p = 0$ pour tout p<0 ou p>n.

- Il est immédiat que $C_n^p = C_n^{n-p}$

- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ pour 0<p<n

- Triangle de Pascal

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
…							

Propriétés (suite)

- Les C_n^p sont aussi appelés les coefficients binomiaux car ils sont obtenus dans le développement du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{0\le i\le n} C_n^i\, a^i\, b^{n-i}$$

Récurrence sur n

- n=0, $(a + b)^0 = 1$
- n=1, $a + b = C_1^0\, a^0\, b + C_1^1\, a\, b^0$
- on suppose l'égalité vraie à l'ordre n.
- Calculons à l'ordre n+1 :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n\,(a+b) = \Big(\sum_{0\le i\le n} C_n^i\, a^i\, b^{n-i}\Big)(a+b) \text{ par hyp.réc.}$$
$$= \sum_{0\le i\le n} C_n^i\, a^{i+1}b^{n-i} + \sum_{0\le i\le n} C_n^i\, a^i b^{n+1-i}$$

Le coefficient de $a^i\, b^{n+1-i}$ est $C_n^{i-1} + C_n^i = C_{n+1}^i$ pour $1\le i\le n$

Celui de a^{n+1} est $C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$ et celui de b^{n+1} est bien $C_n^0 = C_{n+1}^0$.

Combinaisons avec répétitions

Soit E un ensemble fini à n éléments.

- On appelle combinaison avec répétition de p éléments pris parmi n éléments de E toute application f de E dans {1,…,p} qui vérifie

$$f(e_1) + \ldots + f(e_n) = p$$

- On en dénombre $K_n^p = C_{n+p-1}^{n-1}$ *(voir le transparent suivant).*

- C'est aussi le nombre de solutions entières de l'équation

$$x_1 + \ldots + x_n = p$$

Exemple

Sur l'alphabet {a,b,c},
il y a 9 mots w à 2 lettres : aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc
et que $K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = 6$ groupes associés <a,a<,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c> et <c,c>.
On considère la fonction f qui à une lettre associe son occurrence dans w :

$$f(a) = |w|_a,\ f(b)=|w|_b \text{ et } f(c)=|w|_c$$

On a bien : f(a) + f(b) + f(c) = 2

Interprétation

Pour dénombrer les combinaisons avec répétition de p éléments pris parmi $\{e_1, \ldots, e_n\}$, on a recours au moyen suivant :

- On considère n+p-1 emplacements pour y placer n-1 marqueurs.
- Le nombre d'emplacements vides entre les $i^{ème}$ et $i+1^{ème}$ marqueurs indique le nombre de répétitions de l'élément e_{i+1}.
  Celui avant le premier marqueur indique le nombre de e_1.
  Celui après le $(n-1)^{ème}$ et dernier marqueur indique le nombre de e_n.
- il y a bien C_{n+p-1}^{n-1} possibilités.

Exemple

Les 6 groupes de 2 lettres <a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c> et <c,c> sur {a,b,c} se schématisent ainsi :

<a,a>	_ _ ✓ ✓	<a,b>	_ ✓ _ ✓	<a,c>	_ ✓ ✓ _
<b,b>	✓ _ _ ✓	<b,c>	✓ _ ✓ _	<c,c>	✓ ✓ _ _

Nombres de partitions

Soit E un ensemble fini à n éléments.

On effectue une partition de E en k ensembles non vides $(E_i)_{1\le i\le k}$ de cardinaux respectifs $(n_i)_{1\le i\le k}$.

Nombre de partitions possibles :

$$\frac{n\,!}{n_1\,!\;n_2\,!\;\ldots\;n_k\,!}$$

Preuve par récurrence

- k = 1 : 1 partition : comme $n = n_1$ on a bien $1 = (n!)/\,n_1!$
- k = 2 : $(n!)/\,n_1!\,n_2!$ Si $n_1 = m$ et $n_2 = n-m$: $C_n^m = (n!)/\,m!(n-m)!$, ok.
- On suppose la propriété vraie aussi à l'ordre k.
  A-t'on le nombre de partitions en $(E_i)_{1\le i\le k+1}$ égal à $(n!)/\,n_1!\ldots n_k!\,n_{k+1}!$?
  Par hyp.réc. nombre de partitions en $(E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}, E_k \cup E_{k+1})$:
  $$(n!)/\,n_1!\ldots(n_k+n_{k+1})!$$
  Nombre de possibilités de partitionner $E_k \cup E_{k+1}$ en E_k et E_{k+1} :
  $$(n_k+n_{k+1})!\,/\,n_k!\,n_{k+1}!$$
  Reste à multiplier les possibilités.

Coefficients multinomiaux

- On note $C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ ce nombre de partitions d'un ensemble E à n éléments en k ensembles non vides $(E_i)_{1\le i\le k}$ de cardinaux respectifs $(n_i)_{1\le i\le k}$.
  $$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n\,!}{n_1\,!\;n_2\,!\;\ldots\;n_k\,!}$$
- Ce nombre est appelé coefficient multinomial.

  Il apparaît en effet dans le développement

  $$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n1+n2+\ldots nk=n} C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}\; x_1^{n1}\, x_2^{n2} \ldots x_k^{nk}$$

Exemples

- Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble de n = 50 invités.
- Combien y a-t-il de façon de les répartir par table sachant qu'il y a 3 tables de 8 personnes, 2 tables de 11 et une table de 4 personnes ?
- On cherche le nombre de partitions d'un ensemble E à 50 éléments en 6 ensembles non vides $(E_i)_{1\le i\le 6}$ de cardinaux respectifs $n_1 = 8$, $n_2 = 8$, $n_3 = 8$, $n_4 = 11$, $n_5 = 11$ et $n_6 = 4$.
  $$\frac{n\,!}{n_1\,!\;n_2\,!\;\ldots\;n_6\,!}$$
- La répartition par tables achevée, on pourrait encore se demander combien y a-t-il de possibilités de disposer les invités …