A quick guide to Lineare Algebra

Mengen

 $\rightarrow X \cap Y = Y \cap X$

 $\rightarrow X \cup Y = Y \cup X$

 $\rightarrow (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

 $\rightarrow (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

 $\rightarrow \stackrel{\checkmark}{X} \cap (\stackrel{\checkmark}{Y} \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

 $\rightarrow X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

 $\to X \smallsetminus Y = X \smallsetminus (X \cap Y)$

 $\to X \cap Y = X \iff X \subseteq Y$ $\rightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$

 $\rightarrow b \in X$ ist obere Schranke von $A \subseteq X$, wenn $x \leq b \forall x \in A$ $\rightarrow b \in X$ ist Supremum von $A \subseteq X$, wenns die kleinste obere Schranke ist.(ist eindeutig)

 $\rightarrow b \in X$ ist Maximales Element von $A \subseteq X$, wenn $b \in A$ und $\forall x \in A: b \leq x \Rightarrow x = b$ (Kein Element von A ist Größer).

 $\rightarrow b \in X$ ist Maximum von $A \subseteq X$, wenn $b \in A$ und $\forall x \in A : x \leq b \text{ (Maximum ist eindeutig)}$

 $\rightarrow a \in X$ ist Untere Schranke von $A \subseteq X$, wenn $a \leq x \forall x \in A$ $\rightarrow b \in X$ ist Infimum von $A \subseteq X$, wenns die größte untere Schranke ist. (ist eindeutig)

 $\rightarrow b \in X$ ist Minimales Element von $A \subseteq X$, wenn

 $a \in A$, $\forall x \in A : x \le a \Rightarrow x = a$

 $\rightarrow b \in X$ ist Minimum von $A \subseteq X$, wenn

 $a \in A, \forall x \in A : a \leq x (Minimum ist eindeutig)$

Weiteres

 $x|y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : y = nx$

Tupel

 $A \times B := \{(a, b) | a \in A \land b \in B\}$

Relationen

(R,X,X). R ist:

 \rightarrow reflexiv \rightarrow $(x, x) \in R \quad \forall x \in X$

 \rightarrow symmetrisch $\rightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

 \rightarrow antisymmetrtisch \rightarrow $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$ \rightarrow transitiv \rightarrow $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

 $\rightarrow \text{total} \rightarrow (x,y) \text{oder}(y,x) \in R \forall x,y \in X$

→ Ordungsrelation →reflexiv,antisymmetrisch, transitiv

→ Äquivalenzrelation → reflexiv, symmetrisch, transitiv

→ Äquivalenzrelationen erzeugen Partitionen von Mengen.

Funktionen \rightarrow linkstotal \rightarrow jedes x hat y

 \rightarrow rechtseindeutig \rightarrow 1 x hat keine 2 y

Bild u. Urbild Dinger

 $\to f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$

 $\to f(\bigcap_{i \in I} X_i) \supseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$ $\rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$

 $\to f^{-1}(\bigcap_{j\in I} Y_j) = \bigcap_{j\in I} f^{-1}(Y_j)$

Kompositionen

 $f: X \to Y; \quad g: Y \to Z; \quad h: Z \to W$

 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Assoziativ → f,g sind injektiv → g o f ist injektiv

 \rightarrow f,g sind surjektiv \rightarrow g o f ist surjektiv

→ go f injektiv → f ist injektiv

 $\rightarrow g$ of surjektiv \rightarrow g ist surjektiv

 $\rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

 $\rightarrow f: X \rightarrow Y; X, Y \text{ sind endlich} \Rightarrow \text{Äquivalent: f ist injektiv, f}$ ist surjektiv, f ist bijektiv

Strukturen

Halbgruppe

Menge H mit assoziativer Verknüpfung: $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

Monoid

Halbgruppe mit e: $e \star x = x \star e = x \to \text{Einheitengruppe}$ ist Teilmenge eines Monoids, welche eine Gruppe ist.

Translation

 $\star_a: H \ni x \mapsto x \star a \in H$ $a \star : H \ni x \mapsto a \star x \in H$ a ist fest und x läuft durch

$a \star b = e = b \star a \rightarrow \text{Inverse sind eindeutig}$

Gruppe

 \rightarrow assoziative Verknüpfung

→ Monoid

→ jedes Element hat ein Inverses

Es gilt:

 $\rightarrow a \star b_1 = a \star b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

→ Egal ob abelsch, muss man nur eine Sache testen, entweder $a \star b = e$ oder anderschrum

 $\rightarrow (a \star b)' = b' \star a'$

 \rightarrow Translationen in Gruppen sind bijektiv

 \rightarrow Abelsche Gruppe, wenn $a \star b = b \star a \quad \forall a, b \in G$

 $\rightarrow ord(a) = n, f \ddot{u} r n \in \mathbb{N}$ kleinstes n für das $gilt:a^{n} = 1bzw.na = 0$ (n-mal verknüpfen ist neutrales

→In einer Gruppe sind alle links- und rechtstranlationen bijektive Abbildungen. von $G \rightarrow G$

→Eine nichtleere Halbgruppe mir surjektiven links und rechtstranslationen ist eine Gruppe.

Symmetrsiche Gruppe

 $\rightarrow S(X) = \{f : X \rightarrow X | \text{f ist bijektiv} \}$

 $\rightarrow (S(X), \circ) \rightarrow Symmetrsiche Gruppe$

 \rightarrow Elemente aus S(X) heißen Permutationen σ von X

 $\rightarrow S_{speziell} \text{ wenn} X_1 = [1, n] \Rightarrow S_n$

 $\rightarrow \tau(i,j)$ ist eine Funktion, die nur zwei Elemente aus X_1

 \rightarrow Fehlstand: i< j und $\sigma(i) > \sigma(j)$

 $\rightarrow sgn\sigma = (-1)^{\text{AnzahlderFehlstaende}}$

 $\rightarrow sgn(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (sgn\sigma_1) \cdot (sgn\sigma_2)$

Untergruppenkriterium

Wenn $U \subseteq G$ und $U \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in U$ gilt $a \star b' \in U$ dann ists Untergruppe

Erzeugnis

 $\rightarrow \langle E \rangle = \bigcap \{ U | U \text{ ist UG und } E \subseteq U \}$

Untergruppeninduzierte Äquivalenzrelation

 $a \sim^U b \Rightarrow b \in a \star U \Leftrightarrow a' \star b \in U$

 $a \overset{U}{\sim} b \Rightarrow a \in U \star a \Leftrightarrow a \star b' \in U$

 $[a]_{U_{\alpha}} = U \star a$

Satz von Lagrage

#U|#G; G ist Gruppe, U ist Untergruppe

Gruppenmorphismus

 $\rightarrow f(a \star b) = f(a) \square f(b)$

 $\rightarrow f(e_1) = e_2$

 $\rightarrow (f(a))' = f(a')$

 \rightarrow Bild(f), Kern(f) sind jeweils Untergruppen

 \rightarrow Wenn Kern(f) = $\{e_1\}$, ist f injektiv

Normalteiler

N ist Untergruppe von G

 $\rightarrow \text{wenn } a \star N = N \star a$

Wobei nur die Mengen gleich sein muessen, dann ist N ein

→ Kern(f) ist immer Normalteiler

Faktorgruppe

 $\rightarrow G/N = \{[a] = a \star N | a \in G\}$

 $\rightarrow \widetilde{\star} = [a]\widetilde{\star} [b] = [a \star b]$ \rightarrow kanonsiche Surjektion: $\pi: \begin{cases} G \rightarrow G/N \\ a \mapsto \lceil a \rceil \end{cases}$

Homomorphiersatz

 $G/Kern(f) \cong Bild(f)$

Ring

 $\rightarrow (R, +, \cdot)$ $\rightarrow (R, +)$ ist abelsche Gruppe

 \rightarrow (R, \cdot) ist Halbgruppe \rightarrow Distributivgesetze müssen gelten:

 $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

 \rightarrow kommutativer Ring \Rightarrow (R, \cdot) kommutiert

 \rightarrow Ring mit Eins \Rightarrow (R, \cdot) ist Monoid

 \rightarrow Charakteristik ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ für die im Ring

⇒ Charakterisk is die keiniste Zain $n \in \mathbb{N}$ für die im Ring gilt: $n \cdot 1_R = 0_R$ (Char(R)) ⇒ char(R) = 0 wenn $n \cdot 1_R \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ⇒ Nullteiler $a \cdot b = 0_R$ für $b \in R \setminus \{0_R\}$ ⇒ Nullteilerfrei: $\forall a, b \in R(a \cdot b = 0_R \Rightarrow a = 0_R \text{ oder } b = 0_R)$ ⇒ Integritätsring = Ring mit Eins, kommutativ, Nullteilerfrei → Restklassenring modulo m ist ein Integritätsring wenn m

Ringmorphismen

 \rightarrow wenn beide Ringe eine 1 haben: $f(1_{R1}) = 1_{R2}$

Körper

→ (K,+) ist abelsche Gruppe

→ $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe → Es gelten die Distributivgesetze (wie im Ring)

→ Da $0_K \neq 1_K$ hat ein Körper immer min. 2 Elemente → Jeder Körper ist ein Integritätsring

→ Ringrechenregeln gelten hier auch → endliche Integritätsringe sind Körper

Körpermorphismen

 $\rightarrow f(0K1) = 0K2$ $\rightarrow K$ örpermorphismen sind automatisch injektiv

Polynome

$$p = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot t^i ; \quad q = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot t^i$$

$$p+q = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) \cdot t^i$$

$$\begin{aligned} & \text{Multiplikation:} \\ & p \cdot q = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot t^k \ ; \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i \cdot b_{k-i} \end{aligned}$$

 \rightarrow Polynome bilden einen Ring (R[t],+,·)

 \rightarrow monisch, normiert = Leitkoeffizient ist 1_R

 $\rightarrow \deg(p{+}q) \leq \max(\deg(p),\deg(q))$

 $\begin{array}{l} \rightarrow \deg(p \cdot q) \leq_1 \deg(p) + \deg(q) \\ \rightarrow \text{Wenn R Nullteilerfrei wird} \leq_1 zu = \\ \rightarrow \text{ist R ein Integritätsring, dann auch R[t]} \end{array}$

Polynomdivision

 \rightarrow R[t] ist niemals ein Körper. Aber R muss für die Polynomdivision ein Körper sein (multiplikative Inverse).

 $\rightarrow p_2$ ist Teiler von p_1 , wenn q existiert, mit $p_1 = q \cdot p_2$

 $\rightarrow p_1 = q \cdot p_2 + r \text{ mit deg(r)} < \text{deg}(p_2)$

→ q ist eindeutig → Beispiel Division:

$$3t^{3} + 2t + 1 = (t^{2} - 4t)(3t + 12) + 50t + 1$$

$$-3t^{3} + 12t^{2}$$

$$12t^{2} + 2t$$

$$-12t^{2} + 48t$$

$$50t + 1$$

Nullstelle

 $\rightarrow \lambda$ ist Nullstelle, wenn $p(\lambda) = 0_R$

→ Folgendes ist äquivalent: $\hookrightarrow \lambda \in K$ ist Nullstelle von K

 $\hookrightarrow (t - \lambda) \in K[t]$ ist Teiler von p → Zerlegung

 $\begin{array}{l} \hookrightarrow \text{K sei K\"{o}rper},\ p\in K[t]\\ p=(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_s)^{n_s}\cdot q,\ \text{wobei}\ \text{q keine Nullstelle in K} \end{array}$

→ p hat höchstens deg(p) verschiedene Nullstellen s ≤(p) \rightarrow Ist K ein unendlicher Körper, Φ : K[t] \rightarrow K ist injektiv

Vektorraum

 $\rightarrow (V, +) \rightarrow abelsche Gruppe$

→ Für · mit Skalar aus Skalarkörper muss gelten:

 $\rightarrow \alpha \odot (u \oplus V) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$ \rightarrow $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

 $\hookrightarrow (\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

 $\hookrightarrow 1_K \odot v = v$

$\hookrightarrow 0_K \odot v = 0_V \ , \ \alpha \odot 0_V = 0_V$

Linearkombination
$$\sum_{i=1}^{n} a_{i} \cdot v_{i}$$

Unterraumkriterium

 $\rightarrow U \neq \emptyset$; $\forall u, v \in U$; $\alpha \in K$ gilt $u + v \in U$; $\alpha \cdot v \in U$

 $\rightarrow U \neq \emptyset$; $\forall u, v \in U$; $\alpha, \beta \in K$ gilt $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U$

→ ⟨E⟩ erzeugter Unterraum, wie bei der Gruppe, kann man sich vorstellen, als alle möglichen Linearkombinationen mit

Lin. Unabhängigkeit

 $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0 \text{ nur wenn alle } \alpha_i = 0 \text{ sind.}$

→ Menge/Famillie an Vektoren, die den Nullvektor enthält sind immer linear abhängig.

Basis

Sei $B\subseteq V,$ B ist lin. unabhängig, $\langle B\rangle=V$

Sei A lin unabhängig Menge und $A \subseteq VundA \subseteq E$, wobei $E \rightarrow$

 $\langle E \rangle = V$, dann existiert eine Basis B mit $A \subseteq B \subseteq E$

→ Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

→ aus E mit ⟨E⟩ = V lässt sich eine Basis auswählen. \rightarrow jede lin. unabhängige $A \subseteq V$ kann zu einer Basis erweitert

Dimension \rightarrow Kardinalität der Basis, $\dim(\mathbf{V}) = \#B$, wenn B endlich

→ Wenn B unendlich, ist dim (V)= ∞ \rightarrow Austauschlemma, Sei B = $\{v_1, \dots, v, \dots, v_n\}$ ein Basis

Sei $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ wobei nicht alle $\alpha_i = 0$ sein dürfen.

Dann ist $B_0 = \{v_1, ..., w, ..., v_n\}$ auch nh Basis \rightarrow Sei B eine Basis von V mit # B = n, und A eine lin.

unabhängige Untermenge von V mit #A = m, dann gilt: → alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V sind

gleichmächtig.

Summe von Unterräumen

 $\rightarrow \langle U \cup W \rangle = U + W$ $\rightarrow \dim(U+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

 \rightarrow wenn $U \cap W = 0$, dann ist die Summe direkt \oplus

Es ist Äquivalent: $\rightarrow \forall v \in V$ existiren eindeutige Vektoren u,w, sodass v=u+w

Sind U und W endlich dimensional gilt weiterhin: $\rightarrow dim(V) = dim(U) + dim(W)$ und $dim(U \cap W) = 0$

 \rightarrow Sei B eine Basis von V, B = $\{B_1, B_2\}$ eine Partition, es gilt: $V = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$ $\rightarrow U_1, U_2$ sind UR von V und haben die Basen $B_1, B_2, V = U_1 \oplus U_2$, so ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V

 \rightarrow Wenn $V = U \oplus W$, ist W ein komplementärer Unterraum →Dimension des komplementären Unterraums heißt

Kodimension von U, also dim(W) = codim(U). Summe von Familien von

Unterräumen

$$\begin{split} & \rightarrow \sum_{i \in I} U_i = (\bigcup_{i \in I} U_i) \\ & \rightarrow \text{Direkt, wenn } U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\} \quad \forall j \in I \end{split}$$

Matrizen

 $\to K^{n \times m}$ ist Matrize über K

→ k-te Diagonale ist j-i=k, für i = Zeilenindex, j = Spaltenindex

 \rightarrow Addition $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ \rightarrow Skalare Multiplikation: $(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

 $\rightarrow (K^{n \times m}, +, \cdot)$ ist Vektorraum mit Standartbasis E_{ij}

Matrix-Matrix Multiplika

 $: K^{n \times m} \times K^{m \times l} \to K^{n \times l}$, innerer Index kollabiert $K^{n\times l}\ni c_{ik}=\sum_{j=1}^m a_{ij}\cdot b_{jk} \text{ für } 1\leq i\leq n \text{ und } 1\leq k\leq l$

- $\rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $\rightarrow (A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
- $\rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $\rightarrow A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$
- $\rightarrow I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

Rang

- $\rightarrow 0 \leq ZRang = SRang \leq min(m,n)$ für $K^{n \times m}$
- \rightarrow Rangfaktorisierung: $A \in K^{n \times m}$ ist r = Rang(A),
- $\exists B \in K^{n \times r}, C \in K^{r \times m}, \text{ sodass } A = B \cdot C$
- \rightarrow Spalten r von B sind Basis von SR(A), Zeilen von C sind Basis von ZR(A)

Sei $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times l}$

 $\rightarrow 0 \le Rang(A \cdot B) \le min(Rang(A), Rang(B)) \le min(l, m, n)$

Elementare Zeilenumformungen

- → Typ I: Multiplikation der i-ten Zeile mit Skalar (nicht null) \rightarrow Typ II: Addition des α -fachen von j-ter Zeile, zur i-ten Zeile $(i \neq i)$
- \rightarrow Typ III: Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile $(i \neq j)$ Eigenschaften:
- → elemtare Zeilenumformungen ändern den Rang nicht!
- \rightarrow elemtare Zeilenumformungen sind Invertierbar
- → jede Matrix kann in Zeilenstufenform gebracht werden

Rangfaktorisierung

Sei $A \in K^{n \times m}$, C
 die Zeilenstufenform von A, $C \in K^{r \times m}$

- $\hookrightarrow E_k \cdots E_2 E_1 A = C \to \text{die E's invertieren}$
- $\hookrightarrow A = E_1' E_2' \cdots E_k' C \to \text{Zamfasse}$
- $\rightarrow B = E_1' E_2' \cdots E_k'$
- $\hookrightarrow A = B \cdot C \to$ nur noch Nullzeilen/spalten streichen.

Transposition

- → Spalten mit Zeilen Tauschen (an 0ten Diagonalen spiegeln)
- $\rightarrow (A^T)^T = A$
- $\rightarrow (A+b)^T = A^T + B^T$
- $\rightarrow (\alpha \cdot A)^T = \alpha A^T$
- $\rightarrow (AC)^T = C^T \cdot A^T$
- $\rightarrow Rang(A^T) = Rang(A)$
- Symmetrische:

- \rightarrow A ist symmetrisch, wenn $A = A^T$
- \rightarrow A ist antisymmetrisch, wenn $A = -A^T$
- $\rightarrow dim(K_{sym}^{n\times n}) = \frac{1}{2} n(n+1)$

Matrizenring

 $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring, $n \ge 2 \Rightarrow$ nicht kommutativ

- → nilpotent, wenn für A^k = 0 ein k existiert.
- → obere, untere Dreiecksmatrizen (und diagonalmatrizen) bilden Unterringe davon

Invertierbarkeit

- \rightarrow A heißt invertierbar, wenn es ein B gibt, mit AB = BA = I → Allgemeine linaere Gruppe, GL(n,K)= {A ∈ K^{n×n} | A ist invertierbar }
- → Kürzungsregeln, involutorsich und:
- $\rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $\rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Sei $A \in K^{n \times n}$, C ist Zeilenstufenform. Ist Äquivalent:

- → A ist invertierbar
- \rightarrow Rang(A) = n
- \rightarrow Rang(C) = n
- → C ist invertierbar
- → C hat keine Nullzeilen/Spalten

Sei $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{n \times n}$, $C \in K^{m \times m}$ und B.C sind invertierbar, dann gilt:

 $\hookrightarrow \operatorname{Rang}(\operatorname{BAC}) = \operatorname{Rang}(A)$

LGS

- → Hat die Form: Ax = b
- → homogen, wenn b = 0
- $\rightarrow \lceil A,b \rceil \in K^{n \times (m+1)} \rightarrow$ erweiterte Koeffizientenmatrix
- $\rightarrow \mathcal{L}(A, b) = \{x \in K^m | Ax = b\}$
- $\rightarrow \mathcal{L}(A,0)$ Ist Unterraum von K^m , mit dim m Rang(A)
- $\rightarrow \mathcal{L}(A,b) = x_0 + \mathcal{L}(A,0)$, wobei x_0 irgendeine Lösung ist von

Folgendes ist Äquivalent:

- $\Rightarrow Ax = b$ ist Lösbar
- $\rightarrow b \in SR(A)$
- $\hookrightarrow Rang(A) = Rang[A, b]$

Folgendes ist Äquivalent:

- $\rightarrow Ax = b$ ist eindeutig Lösbar.
- $\rightarrow Ax = c$ für jedes $c \in K^m$ eindeutig lösbar.
- → A ist invertierbar.

LGS Lösen

- → erweiterte Koeefizienten Matrix aufstellen und in RZF bringen.
- \hookrightarrow für partikuläre Lösung: alle unabhängigen Variablen auf 0 setzen. und Lösung rechts ablesen.
- → homogene Lösung: setze Rechte Seite auf Null und unabhängige Variablen auf auf 1.Dann Berechnen!
- → Gibt es mehrere unabhängige Variablen: dann ist der homogene Lösungsraum mehrdimensional und wir brauchen mehr basisvektoren \Rightarrow die unabhängigen Variablen durchcyclen mit jeweils einer 1 an der Stelle der
- \rightarrow reduzierte Zeilenstufenform \rightarrow alle Pivot Elemente sind 1 und haben über sich nur 0en.
- \rightarrow Von A das Inverse bilden geht so: [A|I] und dann so umformen, dass A zu I wird: $[I|A^{-1}]$. Rechte Seite ist Inverse zu A.

Lin. Homomorhismen

Additivität: $f(v +_1 u) = f(v) +_2 f(u)$

Homogenität: $f(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 f(u)$

→ Kompositionen linearer Abbildungen sind wieder lineare

Eigenschaften

- $\rightarrow f(0) = 0$
- $\rightarrow f(-v) = -f(v) \ \forall v \in V$
- $\rightarrow f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i)$
- \rightarrow Ist $E \subseteq V$, $f(\langle E \rangle) = \langle f(E) \rangle$, gilt auch für Familien
- \rightarrow Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann $f(U) \subseteq W$ auch
- \rightarrow Ist $Z \subseteq W$ ein Unterraum, dann $f^{-1}(Z) \subseteq V$ auch
- \rightarrow Ist $M\subseteq V$ lin. abhängig, dann auch $f(M)\subseteq W,$ gilt auch für Familien.
- → Bild(f) ist Unterraum von W
- → f ist surjektiv , wenn Bild(f) = W
- → Kern(f) ist Unterraum von V
- → f ist injektiv, wenn Kern(f) = 0
- \rightarrow ist $(v_i)_{i \in I}$ lin unabhängig gibt es eine lineare Abbildung f mit $f(v_i) = w_i$
- \rightarrow ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis, gibt es genau eine lineare
- Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ mit folgenden Eigenschaften:
- $\to \operatorname{Bild}(\mathbf{f}) = \langle (w_i)_{i \in I} \rangle$ $\rightarrow \text{ wenn } \langle (w_i)_{i \in I} \rangle = W \rightarrow \text{f ist surjektiv}$
- \rightarrow wenn $\langle (w_i)_{i \in I} \rangle$ lin. unabhängig \rightarrow f ist injektiv.
- \hookrightarrow wenn $\langle (w_i)_{i \in I} \rangle$ eine Bases von W \rightarrow f ist bijektiv

Lin. Abbildungen Matrix Vektor

- $\rightarrow f_{\Delta}(x) = Ax, K^m \rightarrow K^n$
- $\rightarrow f_A \circ f_B = f_{AB}$
- \rightarrow ist f: $K^m \rightarrow K^n$, eine lineare Abbildung gibt es ein f = f_A \rightarrow A ist invertier bar, wenn f_A invertier bar ist:
- $(f_A)^{-1} = f_{A-1}$

Vektorraum der linearen Homomorphismen

 $\operatorname{Hom}(V,W) = \{f : V \to W | \text{f ist homomorphismus} \}$ End(V) = Hom(V,V)

- \rightarrow f + g definiert als (f + g)(u) = f(u) + g(u)
- $\rightarrow \alpha \cdot f$ definiert als $(\alpha \cdot f)(u) = \alpha \cdot f(u)$
- → (Hom(V,W),+,·) ist Vektorraum

Endomorphismenring

 $(End(v),+,\circ)$

- \rightarrow f+g definiert als (f+g)(u) = f(u) + g(u)
- $\rightarrow f \circ g$ definiert als $(f \circ g)(u) = f(g(u))$

Faktorraum

 $V/U = \{ [v] = v + U | v \in V \}, U \subseteq V, Unterraum \}$

- \rightarrow [v] $\widetilde{+}$ [w] = [v+w]
- $\rightarrow \alpha \sim [v] = [\alpha \cdot v]$
- $\rightarrow (V/U, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ ist Vektorraum
- \rightarrow kanonsiche Surjektion: $\pi:\begin{cases} V \rightarrow V/U \\ v \mapsto [v] \end{cases}$
- $\rightarrow \text{Kern}(\pi) = V$
- \rightarrow Kern(f) ist ein Unterraum, bzw
, $U\subseteq V$ Unterraum, U ist immer Kern eines geeigneten linearen Homomorphimus (siehe

Homomorphisatz

 $V/Kern(f) \cong Bild(f)$

Dimensionssätze

- → Sind V, W isomorph gilt dim(V)=dim(W) Wenn V,W endlich dimensonal ist äquivalent:
- → V und W sind Isomorph
- $\hookrightarrow \dim(V) = \dim(W)$

Isomorphisatz

 $\rightarrow (U_1 + U_2)/U_1 \cong U_2/(U_1 \cap U_2),$ wenn die Us Unterräume

Wenn $(U_1 \cap U_2) = \{0\}$ gilt:

 $\rightarrow (U_1 \oplus U_2)/U_1 \cong U_2$

Dimension des Unterraums

- $\rightarrow \dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U)$
- \rightarrow wenn V unendlich ist, muss einer der Summanten auch unendlich sein
- $\rightarrow \dim(V/U) = \operatorname{codim}(U)$
- Ist V-endlich dimensional:
- $\rightarrow \dim(V/U) = \dim(V) \dim(U)$
- $\rightarrow \dim(\mathrm{Kern}(f))\,+\,\dim(\mathrm{Bild}(f))\,=\,\dim(V)$
- $\rightarrow \operatorname{Rang}(f) = \dim(\operatorname{Bild}(f))$ \rightarrow Defekt(f) = dim(Kern(f))
- → Defekt(f) + Rang(f) = dim(V)

weitere Eigenschaften

- \rightarrow Sind V,W endlichdimensional und dim(V) = dim(W),
- dann ist äquivalent:
- \hookrightarrow A ist injektiv → Defekt(f) = 0
- → f ist surjektiv
- $\hookrightarrow \operatorname{Rang}(A) = \dim(V)$
- → f ist bijektiv
- → Ist V endlich dimensional und ist dim(V)<dim(W)
- $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$ dann kann f
 nicht surjektiv sein. \rightarrow Ist W endlich dimensional und ist $\dim(w) < \dim(V)$ $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein

Koordinatendarstellung

$$\Phi_{B} : K^{n} \ni \begin{bmatrix} x_{1} \\ \vdots \\ x_{n} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_{i} v_{i} \in V$$

ist ein Linearer Isomorphismus

$\Phi_B^{-1} : V \ni v \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n,$

wobei B jeweils immer eine Basis von V ist.

weiter

Sei V, W endlich dimensionale V Über selben Körper, Bv und Bw sind jeweilig die Basen. Zu jeder lin. Abbildung f: $V \to W$ gibt es eine Matrix $A = \mathcal{M}_{Rw}^{Bv}(f)$, wobei $A \in K^{n \times m}$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \quad \forall j = 1, \dots, m$$

lin.iso. zwischen

Darstellungsmatritzen

Die Zuordnung einer Matrix zu einem f ist selbst ein linearere Isomorphismus:

$$\mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f) : Hom(V, W) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f) \in K^{n \times m}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \Phi_{Bw}^{-1}(f(e_1)) & \Phi_{Bw}^{-1}(f(e_2)) & \cdots \end{bmatrix}$$

Wobei e_1, e_2, etc die Basisvektoren in der Basis Bv sind. Sei $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, dann gilt: $\dim(\operatorname{Hom}(V,W)) = n \cdot m$

$$f_A = \Phi_{Bw}^{-1} \circ f \circ \Phi_{Bv} : K^m \to K^n$$

$$f = \Phi_{Bw} \circ f_A \circ \Phi_{Bu}^{-1} : V \to W$$

Sei
$$g: U \rightarrow V$$
; $f: V \rightarrow W$
 $\mathcal{M}_{Bw}^{Bu}(f \circ g) = \mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f) \mathcal{M}_{Bv}^{Bu}(g)$

	Matrix	Lin. Abbildung	
	Bild(A) = SR(A)	$Bild(f) = \{f(u) \in W u \in U\} = f(V)$	Γ
Ī	SRang(A) = dim(SR(A))	Rang(f) = dim(Bild(f))	Γ
	$Kern(A) = \{x \in K^m Ax = 0\}$		Γ
	Defekt(A) = dim(Kern(A))	Defekt(f) = dim(Kern(f))	Γ

Eigenschaften

Existiert $A = \mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f) \in K^{n \times m}$

- → $Kern(f) = \Phi_{Bv}(Kern(A))$ → Defekt(f) = Defekt(A)

Sei $A \in K^{n \times m}$ dann gibt es 2 Möglichkeiten die Basis des Bilds von f zu bestimmen:

- → Rangfaktorisierung A=BC → Spalten von B sind Basis von SR(A) = Bild(A)
- $\rightarrow Bild(A) = SR(A) = [ZR(A^T)]^T, A^T \text{ in ZSF}$

Zeilenstufenform) und dann Transponieren

Und Kern(A) ist: $Kern(A) = \mathcal{L}(A, 0)$, des mit den abhängigen und

unabhängigen Variablen. Sei dim(U) = dim(W) = n, $f: V \rightarrow W$, $A = \mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f) \in K^{n \times n}$,

- dann ist äquivalent:
- → f ist Bijektiv
- $\rightarrow \operatorname{Rang}(f) = n$
- → Defekt(f) = 0
- → A ist invertierbar
- → Rang(A) = n \rightarrow Defekt(A) = 0 Ist f bijektiv, dann gilt:

$\rightarrow \mathcal{M}_{Bv}^{Bw}(f^{-1}) = f^{-1}$

Vektorraum.

- Funfacts → Über jedem Körper existiert der Nullraum mit nur dem
- Nullvektor.
- → Jeder Körper ist Vektorraum über sich selbst. → Der Kⁿ Vektorraum der Spaltenvektoren heißt Standardvektorraum. (K^0 existiert und ist ein Spaltenvektor
- ohne Einträge). \rightarrow Sei (K,+,·) ein Körper, dann ist $K^X=\{f|f:X\rightarrow K\}$ mit $(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x)$ und $(\alpha\odot f)=\alpha\cdot f(x)$ auch ein
- → triviale Unterräume = Nullraum und ganzer Vektorraum → Die leere Menge ist lin. unabhängig.
- $\rightarrow K^{X}$ Charakteristische Funktionen: $e_{\mathcal{Y}}: X \rightarrow K$ mit
- $x \mapsto e_y(x) = \delta_{xy}$ \rightarrow Leere Menge ist Bais des Nullraums
- → Nullraum hat als einziges Dimension 0
- → Komplementäre Unterräume sind i.A. nicht eindeutig → Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig → "vec" = das Vektorisieren einer Matrix =
- übereinanderstapeln der Spalten der Matrix
- ightarrow Die Identitätsreladion id_x ist eine Halbordnung und Äquivalenzrelation auf jeder Menge X. → Familien können Elemente mehrfach enthalten. → (\mathbb{R}^X ,+,·)ist kein Körper, da (\mathbb{R}^X ,·) i.A keine Gruppe
- ist(wenns Funktionen gibt, die irgentwo Null werden). (Außer für R_{≠0})
- → Trivialer Homomorphismus schickt alles aufs neutrale → Normalteiler sind (wie bei Vektorräumen) Kerne
- geeigneter Gruppenhomomorphismen
- → Nullring ist der Einzige Ring mit Char = 1 → a₀ ∈ R[t] heißt konstantes Polynom. Lineare Polynom =
- $a_0 + a_1 t$ mit $a_1 \neq 0$ By Captain Joni.info