LA Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Lösungsraum folgendes Linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Sei $p, q \in \mathbb{Z}_7[t]$. Berechne:
$(6t^5 + 5t^3 + 3t + 2) : (5t^2)$ (Achtung, wir sind im Restklassenkörper $\mathbb{Z}_7$, nicht der Höchstgrad)

Aufgabe 3

Finden Sie mithilfe eines LGS ein Polynom p = $c_2t^2 + c_1t + c_0 \in \mathbb{Z}_5[t]$, dessen zugehörige Polynomfunktion folgendes erfüllt:
$\widetilde{p}(0) = 3, \widetilde{p}(1) = 2, \widetilde{p}(3) = 4$
(Achtung, wir sind im Restklassenkörper $\mathbb{Z}_5$, nicht der Höchstgrad)

Aufgabe 4

Gegeben sei die Punktauswertungsabbildung:

$$f : \mathbb{R}_3[t] \ni p \mapsto \begin{pmatrix} \widetilde{p}(-2) \\ \widetilde{p}(0) \\ \widetilde{p}(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bezüglich der Monombasis und der Standardbasis in R^3.
Geben Sie die Darstellungsmatrix an und berechnen Sie das Bild und den Kern dieser.

Weiter noch:
Berechne die Darstellungsmatrix der obigen Punkteauswertungsabbildung mit der Monombasis und der R^3 Basis: $\{(1,1,0)^T, (0,1,1)^T, (1,0,1)^T\}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass der Restklassenring $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$ ein Körper ist.

Aufgabe 6

Darstellungsmatrizen

1te Subaufgabe

Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : R^2 \to R^2$ definiert durch f(x,y)=(2x+y,x-3y). Bestimme die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis in R^2.

2te Subaufgabe

Gegeben sei eine lineare Abbildung $g : R^3 \to R^3$ definiert durch g(x,y,z)=(x+2y-z,2x-y+z,x+y). Bestimme die Darstellungsmatrix von g bezüglich der Standardbasis in R^3

3te Subaufgabe

Gegeben seien die Basen $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ und $C = \{(1, 1), (1, -1)\}$ von R^2. Bestimme die Darstellungsmatrix der Identitätsabbildung $id : R^2 \to R^2$ bezüglich der Basis B für den Definitionsbereich und der Basis C für den Zielbereich.

4te Subaufgabe

Gegeben sei eine lineare Abbildung $h : R^2 \to R^2$ definiert durch h(x,y)=(3x+4y,2x+3y). Bestimme die Darstellungsmatrix von h bezüglich der Basis $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$

5te Subaufgabe

Gegeben sei eine lineare Abbildung $k : R^3 \to R^3$ definiert durch k(x,y,z)=(x+y,y+z,z+x). Bestimme die Darstellungsmatrix von k bezüglich der Basis B=$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ für den Definitionsbereich und der Basis $C = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ für den Zielbereich.

6te Subaufgabe

Gegeben sei das Polynom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$. Bestimme die Koordinatendarstellung des Polynoms bezüglich der Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

7te Subaufgabe

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 5, \\ 2x - y + z &= 1, \\ x + y + z &= 3. \end{aligned}$$

Schreibe dieses LGS in Matrixform Ax=b und bestimme die Lösungsmenge.

8te Subaufgabe

Gegeben sei das Polynom $r(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3$. Bestimme die Darstellungsmatrix des Polynoms bezüglich der neuen Basis $B = \{1, x + 2, (x + 2)^2, (x + 2)^3\}$.

Aufgabe 7

1te Subaufgabe

Seien ($\mathbb{Z}$,+) und ($\mathbb{Z}$,+) die Gruppen der ganzen Zahlen mit der Addition. Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch f(x)=2x. Zeige, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist.

2te Subaufgabe

Seien $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ die Gruppen der reellen Zahlen ohne Null mit der Multiplikation bzw. der Addition. Die Abbildung $g : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) = ln|x|$. Zeige, dass g ein Gruppenhomomorphismus ist.

3te Subaufgabe

Seien $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ die Gruppen der ganzen Zahlen modulo 6 mit der Addition. Die Abbildung l:$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ sei definiert durch l([x])=[3x]. Zeige, dass l ein Gruppenhomomorphismus ist.

Kleine Beweiße

1te Subaufgabe

Gruppen: Zeige, dass in jeder Gruppe G das neutrale Element eindeutig ist.

2te Subaufgabe

Ringe: Sei R ein Ring und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

3te Subaufgabe

Körper: Sei K ein Körper und $a \in K$. Zeige, dass wenn $a \neq 0$, dann ist das multiplikative Inverse von a eindeutig

4te Subaufgabe

Vektorräume: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $v \in V$. Zeige, dass $0 \cdot v = 0$.

5te Subaufgabe

Gruppenhomomorphismen: Seien G und H Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $f(e_G) = e_H$, wobei e_G unde_H die neutralen Elemente von G bzw. H sind.

Gemischt

Gegeben sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ mit:
$a \sim b \Leftrightarrow (a - b) : 5 = n \ \forall n \ \in \mathbb{Z}$
1. Zeige das $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
2. Beschreiben Sie wie die Äquivalenzklassen von $\sim$ aussehen.
3. Zeige das die Operation $+ : ([a]_\sim, [b]_\sim) \mapsto [a + b]_\sim$ wohldefiniert ist.
4. Zeige, dass $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\sim$ ein Surjektiver Homomorphismus ist.

By Captain Joni.info