A quick guide to Lineare Algebra

Mengen

→ $X \cap Y = Y \cap X$
→ $X \cup Y = Y \cup X$
→ $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
→ $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
→ $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
→ $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
→ $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$
→ $X \cap Y = X \Leftrightarrow X \subseteq Y$
→ $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$
→ $b \in X$ ist obere Schranke von $A \subseteq X$, wenn $x \leq b \forall x \in A$
→ $b \in X$ ist Supremum von $A \subseteq X$, wenns die kleinste obere Schranke ist.(ist eindeutig)
→ $b \in X$ ist Maximales Element von $A \subseteq X$, wenn $b \in A$ und $\forall x \in A: \ b \leq x \Rightarrow x = b$ (Kein Element von A ist Größer).
→ $b \in X$ ist Maximum von $A \subseteq X$, wenn $b \in A$ und $\forall x \in A: \ x \leq b$ (Maximum ist eindeutig)
→ $a \in X$ ist Untere Schranke von $A \subseteq X$, wenn $a \leq x \forall x \in A$
→ $b \in X$ ist Infimum von $A \subseteq X$, wenns die größte untere Schranke ist. (ist eindeutig)
→ $b \in X$ ist Minimales Element von $A \subseteq X$, wenn $a \in A, \forall x \in A: x \leq a \Rightarrow x = a$
→ $b \in X$ ist Minimum von $A \subseteq X$, wenn $a \in A, \forall x \in A: a \leq x$(Minimum ist eindeutig)

Weiteres

$x|y \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: y = nx$

Tupel

$A \times B := \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Relationen

(R,X,X). R ist:
→reflexiv→ $(x,x) \in R \quad \forall x \in X$
→symmetrisch→ $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
→antisymmetrtisch→ $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$
→transitiv→ $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$
→total→ (x,y)oder$(y,x) \in R \forall x,y \in X$
→ **Ordungsrelation** →reflexiv,antisymmetrisch, transitiv
→ **Äquivalenzrelation** → reflexiv,symmetrisch, transitiv
→ Äquivalenzrelationen erzeugen Partitionen von Mengen.

Funktionen

↪ linkstotal → jedes x hat y
↪ rechtseindeutig → 1 x hat keine 2 y

Bild u. Urbild Dinger

→ $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$
→ $f(\bigcap_{i \in I} X_i) \supseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
→ $f^{-1}(\bigcup_{j \in I} Y_j) = \bigcup_{j \in I} f^{-1}(Y_i)$
→ $f^{-1}(\bigcap_{j \in I} Y_j) = \bigcap_{j \in I} f^{-1}(Y_j)$

Kompositionen

$f: X \to Y; \quad g: Y \to Z; \quad h: Z \to W$
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
↪ $Assoziativ$ → f,g sind injektiv → g ∘ f ist injektiv
→ f,g sind surjektiv → $g \circ f$ ist surjektiv
→ $g\circ$ f injektiv → f ist injektiv
→ $g o$f surjektiv → g ist surjektiv
→ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
→ $f: X \to Y$; X,Y sind endlich ⇒ Äquivalent: f ist injektiv, f ist surjektiv, f ist bijektiv

Strukturen

Halbgruppe

Menge H mit assoziativer Verknüpfung:
$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

Monoid

Halbgruppe mit e: $e \star x = x \star e = x$ → Einheitengruppe ist Teilmenge eines Monoids, welche eine Gruppe ist.

Translation

$\star_a: H \ni x \mapsto x \star a \in H$
$_a\star: H \ni x \mapsto a \star x \in H$
a ist fest und x läuft durch

Inverse

$a \star b = e = b \star a$ → Inverse sind eindeutig

Gruppe

→ assoziative Verknüpfung
→ Monoid
→ jedes Element hat ein Inverses
Es gilt:
→ $a \star b_1 = a \star b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$
→ Egal ob abelsch, muss man nur eine Sache testen, entweder $a \star b = e$ oder anderschrum
→ $(a')' = a$
→ $(a \star b)' = b' \star a'$
→ Translationen in Gruppen sind bijektiv
→ Abelsche Gruppe, wenn $a \star b = b \star a \quad \forall a, b \in G$
→ $ord(a) = n, f \ddot{u} r n \in \mathbb{N}$kleinstes n für das gilt:$a^n = 1 bzw. na = 0$ (n-mal verknüpfen ist neutrales Element)
→In einer Gruppe sind alle links- und rechtstranlationen bijektive Abbildungen. von $G \to G$
→Eine nichtleere Halbgruppe mir surjektiven links und rechtstranslationen ist eine Gruppe.

Symmetrsiche Gruppe

→ $S(X) = \{f: X \to X$|f ist bijektiv$\}$
→ $(S(X), \circ)$ →Symmetrsiche Gruppe
→ Elemente aus S(X) heißen Permutationen σ von X
→ $S_{speziell}$ wenn$X_1 = [\![1, n]\!] \Rightarrow S_n$
→ $\tau(i,j)$ ist eine Funktion, die nur zwei Elemente aus X_1 vertauscht
→ Fehlstand: i< j und $\sigma(i) > \sigma(j)$
→ $sgn\sigma = (-1)^{\text{AnzahlderFehlstaende}}$
→ $sgn\tau = -1$
→ $sgn(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (sgn\sigma_1) \cdot (sgn\sigma_2)$

Untergruppenkriterium

Wenn $U \subseteq G$ und $U \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in U$ gilt $a \star b' \in U$ dann ists Untergruppe

Erzeugnis

$E \subseteq G$
→ $\langle E \rangle = \bigcap \{U$|U ist UG und $E \subseteq U\}$

Untergruppeninduzierte Äquivalenzrelation

$a \sim^U b \Rightarrow b \in a \star U \Leftrightarrow a' \star b \in U$
$a \ {}^U\!\!\sim b \Rightarrow a \in U \star a \Leftrightarrow a \star b' \in U$
$[a]_{\sim U} = a \star U$
$[a]_{U\sim} = U \star a$

Satz von Lagrage

$\#U | \#G$; G ist Gruppe, U ist Untergruppe

Gruppenmorphismus

→ $f(a \star b) = f(a) \square f(b)$
→ $f(e_1) = e_2$
→ $(f(a))' = f(a')$
→ Bild(f), Kern(f) sind jeweils Untergruppen
→ Wenn Kern(f) = $\{e_1\}$, ist f injektiv

Normalteiler

N ist Untergruppe von G
↪wenn $a \star N = N \star a$
Wobei nur die Mengen gleich sein muessen, dann ist N ein Normalteiler
→ Kern(f) ist immer Normalteiler

Faktorgruppe

→ $G/N = \{[a] = a \star N | a \in G\}$
→ $\bar{\star} = [a] \bar{\star} \ [b] = [a \star b]$
→ kanonsiche Surjektion: $\pi: \begin{cases} G \to G/N \\ a \mapsto [a] \end{cases}$

Homomorphiersatz

$G/Kern(f) \cong Bild(f)$

Ring

→ $(R, +, \cdot)$
→ $(R, +)$ ist abelsche Gruppe
→ $(R, \cdot)$ ist Halbgruppe
↪ Distributivgesetze müssen gelten:
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
→ kommutativer Ring ⇒ $(R, \cdot)$ kommutiert
→ Ring mit Eins ⇒ $(R, \cdot)$ ist Monoid
→ Charakteristik ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ für die im Ring gilt: $n \cdot 1_R = 0_R$ (Char(R))
→ char(R) = 0 wenn $n \cdot 1_R \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
→ Nullteiler $a \cdot b = 0_R$ für $b \in R \setminus \{0_R\}$
→ Nullteilerfrei: $\forall a, b \in R (a \cdot b = 0_R \Rightarrow a = 0_R$ oder $b = 0_R)$
→ Integritätsring = Ring mit Eins, kommutativ, Nullteilerfrei
→ Restklassenring modulo m ist ein Integritätsring wenn m eine Primzahl ist

Ringmorphismen

→ $f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b)$
→ $f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)$
→ wenn beide Ringe eine 1 haben: $f(1_{R1}) = 1_{R2}$

Körper

→ (K,+) ist abelsche Gruppe
→ $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
→ Es gelten die Distributivgesetze (wie im Ring)
→ Da $0_K \neq 1_K$ hat ein Körper immer min. 2 Elemente
→ Jeder Körper ist ein Integritätsring
→ Ringrechenregeln gelten hier auch
→ endliche Integritätsringe sind Körper

Körpermorphismen

→ $f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b)$
→ $f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)$
→ $f(1_{K1}) = 1_{K2}$
→ $f(0_{K1}) = 0_{K2}$
→ Körpermorphismen sind automatisch injektiv

Polynome

$p = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot t^i \ ; \quad q = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot t^i$

Addition:

$p + q = \sum_{i=0}^{max(m,n)} (a_i + b_i) \cdot t^i$

Multiplikation:

$p \cdot q = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot t^k \ ; \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$

→ Polynome bilden einen Ring (R[t],+,·)
→ monisch, normiert = Leitkoeffizient ist 1_R
→ deg(p+q) ≤ max(deg(p),deg(q))
→ deg(p· q) $\leq_1$ deg(p) + deg(q)
→ Wenn R Nullteilerfrei wird $\leq_1$ zu =
→ ist R ein Integritätsring, dann auch R[t]

Polynomdivision

→ R[t] ist niemals ein Körper. Aber R muss für die Polynomdivision ein Körper sein (multiplikative Inverse).
→ p_2 ist Teiler von p_1, wenn q existiert, mit $p_1 = q \cdot p_2$
→ $p_1 = q \cdot p_2 + r$ mit deg(r) < deg(p_2)
→ q ist eindeutig
→ Beispiel Division:

$$
\begin{array}{l}
3t^3 \quad + 2t + 1 = (t^2 - 4t)(3t + 12) + 50t + 1 \\
\underline{-3t^3 + 12t^2} \\
\quad 12t^2 \ + 2t \\
\quad \underline{-12t^2 + 48t} \\
\qquad 50t + 1
\end{array}
$$

Nullstelle

→ λ ist Nullstelle, wenn $p(\lambda) = 0_R$
→ Folgendes ist äquivalent:
↪ $\lambda \in K$ ist Nullstelle von K
↪ $(t - \lambda) \in K[t]$ ist Teiler von p
→ **Zerlegung**
↪ K sei Körper, $p \in K[t]$
$p = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$, wobei q keine Nullstelle in K hat.
→ p hat höchstens deg(p) verschiedene Nullstellen s ≤(p)
→ Ist K ein unendlicher Körper, Φ: K[t] → K^K ist injektiv

Vektorraum

→ $(V, +)$ →abelsche Gruppe
→ Für · mit Skalar aus Skalarkörper muss gelten:
↪ $\alpha \odot (u \oplus V) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
↪ $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
↪ $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
↪ $1_K \odot v = v$
↪ $0_K \odot v = 0_V \ , \ \alpha \odot 0_V = 0_V$

Linearkombination

$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot v_j$

Unterraumkriterium

→ $U \neq \emptyset; \forall u, v \in U; \alpha \in K$ gilt $u + v \in U; \alpha \cdot v \in U$
→ $U \neq \emptyset; \forall u, v \in U; \alpha, \beta \in K$ gilt $\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U$
→ $\langle E \rangle$ erzeugter Unterraum, wie bei der Gruppe, kann man sich vorstellen, als alle möglichen Linearkombinationen mit Vektoren aus E.
Es gilt weiter:
→ $\langle E_1 \cup E_2 \rangle = \langle \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle \rangle$
→ $\langle E_1 \cap E_2 \rangle = \langle \langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle \rangle$

Lin. Unabhängigkeit

→ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = 0$ nur wenn alle $\alpha_i = 0$ sind.
→ Menge/Famillie an Vektoren, die den Nullvektor enthält sind immer linear abhängig.

Basis

Sei $B \subseteq V$, B ist lin. unabhängig, $\langle B \rangle = V$
Sei A lin unabhängig Menge und $A \subseteq V und A \subseteq E$, wobei E → $\langle E \rangle$ = V, dann existiert eine Basis B mit $A \subseteq B \subseteq E$
→ Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
→ aus E mit $\langle E \rangle$ = V lässt sich eine Basis auswählen.
→ jede lin. unabhängige $A \subseteq V$ kann zu einer Basis erweitert werden.

Dimension

↪ Kardinalität der Basis, dim(V)= $\#B$, wenn B endlich
↪ Wenn B unendlich, ist dim (V)= ∞
→ Austauschlemma, Sei B = $\{v_1 \ldots, v, \ldots\ldots, v_n\}$ ein Basis
Sei $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ wobei nicht alle $\alpha_i = 0$ sein dürfen.
Dann ist $B_0 = \{v_1, \ldots, w, \ldots, v_n\}$ auch nh Basis
→ Sei B eine Basis von V mit #B = n, und A eine lin. unabhängige Untermenge von V mit #A = m, dann gilt: $m \leq n$
→ alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V sind gleichmächtig.

Summe von Unterräumen

→ $\langle U \cup W \rangle = U + W$
→ dim(U+W) = dim(V) + dim(W) - dim($U \cap W$)
→ wenn $U \cap W$ = 0, dann ist die Summe direkt ⊕
Es ist Äquivalent:
↪ $V = U \oplus W$
↪ $\forall v \in V$ existiren eindeutige Vektoren u,w, sodass v = u+w
Sind U und W endlich dimensional gilt weiterhin:
↪ $dim(V) = dim(U) + dim(W)$ und $dim(U \cap W) = 0$
→ Sei B eine Basis von V, B = $\{B_1, B_2\}$ eine Partition, es gilt: V = $\langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$
→ U_1, U_2 sind UR von V und haben die Basen $B_1, B_2, V = U_1 \oplus U_2$,so ist$B_1 \cup B_2$ eine Basis von V
→ Wenn $V = U \oplus W$, ist W ein komplementärer Unterraum von U.
→Dimension des komplementären Unterraums heißt Kodimension von U, also dim(W) = codim(U).

Summe von Familien von Unterräumen

→ $\sum_{i \in I} U_i = \langle \bigcup_{i \in I} U_i \rangle$
→ Direkt, wenn $U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\} \quad \forall j \in I$

Matrizen

→ $K^{n \times m}$ ist Matrize über K
→ k-te Diagonale ist j-i=k, für i = Zeilenindex, j = Spaltenindex
→ Addition $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
→Skalare Multiplikation: $(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$
→ $(K^{n \times m}, +, \cdot)$ ist Vektorraum mit Standartbasis E_{ij}

Matrix-Matrix Multiplika

$\cdot : K^{n\times m} \times K^{m\times l} \to K^{n\times l}$, innerer Index kollabiert

$K^{n\times l} \ni c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$ für $1 \le i \le n$ und $1 \le k \le l$

Es gilt:
→ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
→ $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
→ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
→ $A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$
→ $I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$, wobei I die Einheitsmatrix ist.

Rang

→ $0 \le ZRang = SRang \le min(m, n)$ für $K^{n\times m}$
→ Rangfaktorisierung: $A \in K^{n\times m}$ ist r = Rang(A), $\exists B \in K^{n\times r}, C \in K^{r\times m}$, sodass $A = B \cdot C$
→ Spalten r von B sind Basis von SR(A), Zeilen von C sind Basis von ZR(A)
Sei $A \in K^{n\times m}, B \in K^{m\times l}$
→ $0 \le Rang(A \cdot B) \le min(Rang(A), Rang(B)) \le min(l, m, n)$

Elementare Zeilenumformungen

→ Typ I: Multiplikation der i-ten Zeile mit Skalar (nicht null)
→ Typ II: Addition des α-fachen von j-ter Zeile, zur i-ten Zeile ($i \ne j$)
→ Typ III: Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile ($i \ne j$)
Eigenschaften:
→ elemtare Zeilenumformungen ändern den Rang nicht!
→ elemtare Zeilenumformungen sind Invertierbar
→ jede Matrix kann in Zeilenstufenform gebracht werden

Rangfaktorisierung

Sei $A \in K^{n\times m}$, C die Zeilenstufenform von A, $C \in K^{r\times m}$
↪ $E_k \cdots E_2 E_1 A = C$ → die E's invertieren
↪ $A = E_1' E_2' \cdots E_k' C$ → Zamfasse
↪ $B = E_1' E_2' \cdots E_k'$
↪ $A = B \cdot C$ → nur noch Nullzeilen/spalten streichen.

Transposition

→ Spalten mit Zeilen Tauschen (an 0ten Diagonalen spiegeln)
→ $(A^T)^T = A$
→ $(A + b)^T = A^T + B^T$
→ $(\alpha \cdot A)^T = \alpha A^T$
→ $(AC)^T = C^T \cdot A^T$
→ $Rang(A^T) = Rang(A)$
Symmetrische:
→ A ist symmetrisch, wenn $A = A^T$
→ A ist antisymmetrisch, wenn $A = -A^T$
→ $dim(K^{nxn}_{sym}) = \frac{1}{2}n(n + 1)$
→ $dim(K^{nxn}_{skew}) = \frac{1}{2}n(n - 1)$
→ $K^{n\times n} = K^{n\times n}_{skew} \oplus K^{n\times n}_{sym}$

Matrizenring

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring, n ≥ 2 ⇒ nicht kommutativ
→ nilpotent, wenn für $A^k = 0$ ein k existiert.
→ obere, unteren Dreiecksmatrizen (und diagonalmatrizen) bilden Unterringe davon

Invertierbarkeit

→ A heißt invertierbar, wenn es ein B gibt, mit AB = BA = I
→ Allgemeine linaere Gruppe, GL(n,K)= $\{A \in K^{n\times n}|$ A ist invertierbar }
→ Kürzungsregeln, involutorsich und:
→ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
→ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Sei $A \in K^{n\times n}$, C ist Zeilenstufenform. Ist Äquivalent:
↪ A ist invertierbar
↪ Rang(A) = n
↪ Rang(C) = n
↪ C ist invertierbar
↪ C hat keine Nullzeilen/Spalten
Sei $A \in K^{n\times m}, B \in K^{n\times n}, C \in K^{m\times m}$ und B,C sind invertierbar, dann gilt:
↪ Rang(BAC) = Rang(A)

LGS

→ Hat die Form: Ax = b
→ homogen, wenn b = 0
→ $[A, b] \in K^{n\times(m+1)}$ → erweiterte Koeffizientenmatrix
→ $\mathcal{L}(A, b) = \{x \in K^m | Ax = b\}$
→ $\mathcal{L}(A, 0)$ Ist Unterraum von K^m, mit dim m - Rang(A)
→ $\mathcal{L}(A, b) = x_0 + \mathcal{L}(A, 0)$, wobei x_0 irgendeine Lösung ist von Ax = b
Folgendes ist Äquivalent:
↪ $Ax = b$ ist Lösbar
↪ $b \in SR(A)$
↪ $Rang(A) = Rang[A, b]$
Folgendes ist Äquivalent:
↪ $Ax = b$ ist eindeutig Lösbar.
↪ $Ax = c$ für jedes $c \in K^m$ eindeutig lösbar.
↪ A ist invertierbar.
LGS Lösen:
↪ erweiterte Koeefizienten Matrix aufstellen und in RZF bringen.
↪ für partikuläre Lösung: alle unabhängigen Variablen auf 0 setzen. und Lösung rechts ablesen.
↪ homogene Lösung: setze Rechte Seite auf Null und unabhängige Variablen auf auf 1.Dann Berechnen!
↪ Gibt es mehrere unabhängige Variablen: dann ist der homogene Lösungsraum mehrdimensional und wir brauchen mehr basisvektoren ⇒ die unabhängigen Variablen durchcyclen mit **jeweils einer** 1 an der Stelle der Unabhängigen.

→ reduzierte Zeilenstufenform → alle Pivot Elemente sind 1 und haben über sich nur 0en.
→ Von A das Inverse bilden geht so: [A|I] und dann so umformen, dass A zu I wird: $[I|A^{-1}]$. Rechte Seite ist Inverse zu A.

Lin. Homomorhismen

Additivität: $f(v +_1 u) = f(v) +_2 f(u)$
Homogenität: $f(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 f(u)$
→ Kompositionen linearer Abbildungen sind wieder lineare Abbildungen.

Eigenschaften

→ f(0) = 0
→ f(-v) = -f(v) $\forall v \in V$
→ $f(\sum \alpha_i v_i) = \sum \alpha_i f(v_i)$
→ Ist $E \subseteq V, f(\langle E\rangle) = \langle f(E)\rangle$, gilt auch für Familien
→ Ist $U \subseteq V$ein Unterraum, dann $f(U) \subseteq W$ auch
→ Ist $Z \subseteq W$ein Unterraum, dann $f^{-1}(Z) \subseteq V$ auch
→ Ist $M \subseteq V$ lin. abhängig, dann auch $f(M) \subseteq W$, gilt auch für Familien.
→ Bild(f) ist Unterraum von W
→ f ist surjektiv , wenn Bild(f) = W
→ Kern(f) ist Unterraum von V
→ f ist injektiv, wenn Kern(f) = 0
→ ist $(v_i)_{i\in I}$ lin unabhängig gibt es eine lineare Abbildung f mit $f(v_i) = w_i$
→ ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis, gibt es genau eine lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ mit folgenden Eigenschaften:
↪ Bild(f) = $\langle (w_i)_{i\in I}\rangle$
↪ wenn $\langle (w_i)_{i\in I}\rangle = W$ → f ist surjektiv
↪ wenn $\langle (w_i)_{i\in I}\rangle$ lin. unabhängig → f ist injektiv.
↪ wenn $\langle (w_i)_{i\in I}\rangle$ eine Bases von W → f ist bijektiv

Lin. Abbildungen Matrix Vektor

→ $f_A(x) = Ax, K^m \to K^n$
→ $f_A \circ f_B = f_{AB}$
→ ist f: $K^m \to K^n$, eine lineare Abbildung gibt es ein f = f_A
→ A ist invertierbar, wenn f_A invertierbar ist:
$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}$

Vektorraum der linearen Homomorphismen

Hom(V,W) = $\{f : V \to W|$f ist homomorphismus}
End(V) = Hom(V,V)
→ f + g definiert als (f + g)(u) = f(u) + g(u)
→ $\alpha \cdot f$ definiert als $(\alpha \cdot f)(u) = \alpha \cdot f(u)$
→ (Hom(V,W),+, ·) ist Vektorraum

Endomorphismenring

(End(v),+,∘)
→ f+g definiert als (f+g)(u) = f(u) + g(u)
→ $f \circ g$ definiert als $(f \circ g)(u) = f(g(u))$

Faktorraum

V/U = $\{[v] = v + U|v \in V\}, U \subseteq V$, Unterraum
→ [v] $\tilde{+}$ [w] = [v+w]
→ $\alpha \,\tilde{\cdot}\, [v] = [\alpha \cdot v]$
→ (V/U,$\tilde{+}$,$\tilde{\cdot}$) ist Vektorraum
→ kanonsiche Surjektion: $\pi : \begin{cases} V \to V/U \\ v \mapsto [v] \end{cases}$
→ Kern(π) = U
→ Kern(f) ist ein Unterraum, bzw, $U \subseteq V$ Unterraum, U ist immer Kern eines geeigneten linearen Homomorphimus (siehe Kern(π)=U)

Homomorphisatz

V/Kern(f) $\cong Bild(f)$

Dimensionssätze

→ Sind V, W isomorph gilt dim(V)=dim(W)
Wenn V,W endlich dimensonal ist äquivalent:
↪ V und W sind Isomorph
↪ dim(V) = dim (W)

Isomorphisatz

→ $(U_1 + U_2)/U_1 \cong U_2/(U_1 \cap U_2)$, wenn die Us Unterräume von V
Wenn $(U_1 \cap U_2) = \{0\}$ gilt:
→ $(U_1 \oplus U_2)/U_1 \cong U_2$

Dimension des Unterraums

→ dim(V)= dim(U) + dim(V/U)
→ wenn V unendlich ist, muss einer der Summanten auch unendlich sein
→ dim(V/U) = codim(U)
Ist V-endlich dimensional:
↪ dim(V/U) = dim(V) - dim(U)
→ dim(Kern(f)) + dim(Bild(f)) = dim(V)
→ Rang(f) = dim(Bild(f))
→ Defekt(f) = dim(Kern(f))
→ Defekt(f) + Rang(f) = dim(V)

weitere Eigenschaften

→ Sind V,W endlichdimensional und dim(V) = dim(W), dann ist äquivalent:
↪ A ist injektiv
↪ Defekt(f) = 0
↪ f ist surjektiv
↪ Rang(A) = dim(V)
↪ f ist bijektiv
→ Ist V endlich dimensional und ist dim(V)<dim(W) $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.
→ Ist W endlich dimensional und ist dim(w)<dim(V) $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.

Koordinatendarstellung

$\Phi_B \; : K^n \ni \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$

ist ein Linearer Isomorphismus.

Inverses:

$\Phi_B^{-1} \; : \; V \ni v \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n,$

wobei B jeweils immer eine Basis von V ist.

weiter

Sei V, W endlich dimensionale V Über selben Körper, Bv und Bw sind jeweilig die Basen. Zu jeder lin. Abbildung f: $V \to W$ gibt es eine Matrix $A = \mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f)$, wobei $A \in K^{n\times m}$

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \quad \forall j = 1, \ldots, m$

lin.iso. zwischen Darstellungsmatritzen

Die Zuordnung einer Matrix zu einem f ist selbst ein linearere Isomorphismus:
$\mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f) : Hom(V, W) \ni f \mapsto \mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f) \in K^{n\times m}$
$\mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \\ \Phi^{-1}_{Bw}(f(e_1)) & \Phi^{-1}_{Bw}(f(e_2)) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$
Wobei e_1, e_2, etc die Basisvektoren in der Basis Bv sind.
Sei dim(V)=n, dim(W)=m, dann gilt:
dim(Hom(V,W)) = $n \cdot m$

$f_A = \Phi^{-1}_{Bw} \circ f \circ \Phi_{Bv} : K^m \to K^n$

$f = \Phi_{Bw} \circ f_A \circ \Phi^{-1}_{Bv} : V \to W$

Sei $g : U \to V; \quad f : V \to W$
$\mathcal{M}^{Bu}_{Bw}(f \circ g) = \mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f)\mathcal{M}^{Bu}_{Bv}(g)$

Matrix	Lin. Abbildung
Bild(A) = SR(A)	Bild(f) = $\{f(u) \in W\|u \in U\} = f(V)$
SRang(A) = dim(SR(A))	Rang(f) = dim(Bild(f))
Kern(A) = $\{x \in K^m\|Ax = 0\}$	Kern(f) = $\{u \in U\|f(u) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$
Defekt(A) = dim(Kern(A))	Defekt(f) = dim(Kern(f))

Eigenschaften

Existiert A = $\mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f) \in K^{n\times m}$
→ Bild(f) = $\Phi_{Bw}(Bild(A))$
→ Rang(f) = SRang(A) = Rang(A)
→ Kern(f) = $\Phi_{Bv}(Kern(A))$
→ Defekt(f) = Defekt (A)

Sei $A \in K^{n\times m}$ dann gibt es 2 Möglichkeiten die Basis des Bilds von f zu bestimmen:
→ Rangfaktorisierung A=BC → Spalten von B sind Basis von SR(A) = Bild(A)
→ $Bild(A) = SR(A) = [ZR(A^T)]^T$, A^T in ZSF (Zeilenstufenform) und dann Transponieren
Und Kern(A) ist:
Kern(A) = $\mathcal{L}(A, 0)$, des mit den abhängigen und unabhängigen Variablen.

Sei dim(U) = dim(W) = n, $f : V \to W, A = \mathcal{M}^{Bv}_{Bw}(f) \in K^{n\times n}$, dann ist äquivalent:
↪ f ist Bijektiv
↪ Rang(f) = n
↪ Defekt(f) = 0
↪ A ist invertierbar
↪ Rang(A) = n
↪ Defekt(A) = 0
Ist f bijektiv, dann gilt:
→ $\mathcal{M}^{Bw}_{Bv}(f^{-1}) = f^{-1}$

Funfacts

→ Über jedem Körper existiert der Nullraum mit nur dem Nullvektor.
→ Jeder Körper ist Vektorraum über sich selbst.
→ Der K^n Vektorraum der Spaltenvektoren heißt Standardvektorraum. (K^0 existiert und ist ein Spaltenvektor ohne Einträge).
→ Sei (K,+,·) ein Körper, dann ist $K^X = \{f|f : X \to K\}$ mit $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\alpha \odot f) = \alpha \cdot f(x)$ auch ein Vektorraum.
→ triviale Unterräume = Nullraum und ganzer Vektorraum
→ Die leere Menge ist lin. unabhängig.
→ K^X Charakteristische Funktionen: $e_y : X \to K$ mit $x \mapsto e_y(x) = \delta_{xy}$
→ Leere Menge ist Bais des Nullraums
→ Nullraum hat als einziges Dimension 0
→ Komplementäre Unterräume sind i.A. nicht eindeutig
→ Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.
→ "vec" = das Vektorisieren einer Matrix = übereinanderstapeln der Spalten der Matrix
→ Die Identitätsreladion id_x ist eine Halbordnung und Äquivalenzrelation auf jeder Menge X.
→ Familien können Elemente mehrfach enthalten.
→ $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ist kein Körper, da $(\mathbb{R}^X, \cdot)$ i.A keine Gruppe ist(wenns Funktionen gibt, die irgentwo Null werden). (Außer für $\mathbb{R}_{\ne 0}$)
→ Trivialer Homomorphismus schickt alles aufs neutrale Element.
→ Normalteiler sind (wie bei Vektorräumen) Kerne geeigneter Gruppenhomomorphismen
→ Nullring ist der Einzige Ring mit Char = 1
→ $a_0 \in R[t]$ heißt konstantes Polynom. Lineare Polynom = $a_0 + a_1 t$ mit $a_1 \ne 0$
By Captain Joni.info