A quick guide to Linear Algebra 2

Letzen Themen der LA1

Basiswechsel

Transformatrix
Sei V ein K-V-Raum mit Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ und den Basen B und $\widehat{B}$
$\hookrightarrow \mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v} = \mathcal{M}^{B_v}_{\widehat{B}_v}(id_V) \in K^{n \times n}$

Eigenschaften
$\hookrightarrow$ Ist $x \in K^n$ Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. B_v, dann ist es $\hat{x} = \mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v} x$ bzgl. $\widehat{B}_v$
$\hookrightarrow \mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v} \in K^{n \times n}$ ist invertierbar.
$\hookrightarrow (\mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v})^{-1} = \mathcal{T}^{\widehat{B}_v}_{B_v}$
$\hookrightarrow$ Lin. Abbildung von $\mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v}$ ist
$\Phi^{-1}_{\widehat{B}_v} \circ \Phi_{B_v} \in Aut(K^n)$
Im Fall $V = K^n$ gilt:
$\mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v} = (\widehat{B}_v)^{-1} B_v$ (Die Basen spaltenweise als Matrix geschrieben).
Wenn sogar Standartbasen:
$\hookrightarrow \mathcal{T}^{B_v}_{(e_1,\ldots,e_n)} = B_v$
$\hookrightarrow \mathcal{T}^{(e_1,\ldots,e_n)}_{\widehat{B}_v} = (\widehat{B}_v)^{-1}$

Basiswechsel in V und W
Gegeben haste schon $\mathcal{M}^{B_v}_{B_w}(f)$ für Homomorph.
$f : V \to W$, jetzt änderst du die Basis von V und W. $\widehat{B}$ heißt neue Basis.
$\mathcal{M}^{\widehat{B}_v}_{\widehat{B}_w}(f) = \mathcal{T}^{B_w}_{\widehat{B}_w}\ \mathcal{M}^{B_v}_{B_v}\ \mathcal{T}^{\widehat{B}_v}_{B_v}$

Äquivalente Matrizen
A und $\widehat{A} \in K^{n \times m}$ $(n, m \in \mathbb{N}_0)$ sind äquivalent, wenns invertierbare $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$ gibt, sodass: $\widehat{A} = S\ A\ T^{-1}$
mit $S = \mathcal{T}^{B_w}_{\widehat{B}_w}$ und $T^{-1} = \mathcal{T}^{\widehat{B}_v}_{B_v}$
$\to$ Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times m}$
Es ist äquivalent:
$\hookrightarrow$ A und $\widehat{A}$ sind äquivalent.
$\hookrightarrow$ $\widehat{A}$ ist Darstellungsmatrix eines lin. Hom $f : V \to W$ mit geeigneten Basen: $\widehat{B}_v, \widehat{B}_w$
$\hookrightarrow$ Rang(A) = Rang($\widehat{A}$)

Rang-Normalform
Sei $A \in K^{n \times m}$ und Rang(A)=r, dann existiren invertierbare $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$, sodass:
$SAT^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in K^{n \times m}$
Diese Matrix mit der Einheitsmatrix oben links und sonst nur Nullzeilen/spalten heißt Rang-Normalform von A.

Transformatritzen für Endomorphismen
B_v und $\widehat{B}_v$ sind Basen von V:
$\mathcal{M}^{\widehat{B}_v}_{\widehat{B}_v}(f) = \mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v}\ \mathcal{M}^{B_v}_{B_v}(f)\ \mathcal{T}^{\widehat{B}_v}_{B_v}$

Ähnlichkeit von Matrizen
A und $\widehat{A} \in K^{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ heißen ähnlich, wenns invertierbare $T \in K^{n \times n}$ gibt, sodass:
$\widehat{A} = T\ A\ T^{-1}$
$\to$ Ähnlichkeit ist auch Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$
Es ist äquivalent:
$\hookrightarrow$ A und $\widehat{A}$ sind ähnlich.
$\hookrightarrow$ $\widehat{A}$ ist Darstellungsmatrix von Endo f bzgl. einer geeigneten Basis $\widehat{B}_v$

Invariante Unterräume
Sei V ein K-V-Raum, $f : V \to V$ ein Endo. Unterraum $U \subseteq V$ heißt f-invarianter Unterraum wenn:
$f(U) \subseteq U$
Also werden Vektoren in U durch f wieder auf Vektoren in U abgebildet. Gleiches gilt für Matritzen.

Eigenvektoren
Sei V über K und $f : V \to V$ ein Endo.
$v \in V \backslash \{0\}$ ist Eigenvektor mit Eigenwert λ wenn:
$f(v) = \lambda v$
Bei Matrizen:
$Ax = \lambda x$
Wenn A die Darstellungsmatrx eines ENDO f ist, dann ist λ der Eigenwert von f und von A. (Also v ist Eigenvektor mit λ, dann ist seine Koordinatendarstellung $\Phi^{-1}_{B_v}(v)$) auch Eigenvektor von A mit λ.
$\to$ Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte. (Dieselben Eigenwerte heißt aber nicht umbedingt ähnliche Matrizen)

Berechnung von Eigenwerten
$det(\lambda I - A)$
$\to$ daraus ergibt sich ein Polynom mit λ, davon bestimmen wir die Nullstellen, diese sind dann die Eigenwerte. Eigenvektoren ergeben sich daraus λ in $\widehat{A} = A - \lambda I$ einzusetzen und dann $\widehat{A}x = 0$ zu lösen. (Es können zu einem Eigenwert auch mehrdimensionale Unterräume auftretten).

Diagonalisierte Matrix
Die Matrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen ist die Diagonalisierte Matrix von A (Def. $A \in K^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.)
Sei V endlich dimensiol, f ein Endo und A die Matrix zu f, dann ist gleich:
$\hookrightarrow$ f ist diagonalisierbar
$\hookrightarrow$ V besitzt Basis mit Eigenvektoren von f (Eigenbasis)
$\hookrightarrow$ A ist diagonalisierbar
$\hookrightarrow$ K^n besitzt Basis aus Eigenvektoren von A.

Dualräume

Dualraum
Dualraum = $V^* = Hom(V, K)$
Wichtige Beispiele:
$\to$ Projektion auf die i-te Koordinate
$\to$ Auswertungsabbildung und Ableitungsabbildung (Polynome)

Duale Paarung
$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle = v^*(v) \in K$
Duale Paarung ist linear in Beiden Argumenten:
$\langle \alpha v^* + \beta w^*, v \rangle = \alpha \langle v^*, v \rangle + \beta \langle w^*, v \rangle$
$\langle v^*, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle v^*, v \rangle + \beta \langle v^*, w \rangle$

Dimension Dualraum
Wenn V endlich Dimensional ist, dann gilt
$dim(V) = dim(V^*)$

Basis des Dualraumes
$\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij}$ (Also Covektorren, die für jeweils einen Basisvektor aus B_v 1 ergeben und bei den dann Restlichen 0)
Für $v^* \in V^*$ gilt als LK:
$v^* = \sum_{i=1}^{n} v^*(v_i) v_i^*$ wobei $v^*(v_i)$ die Koeffizienten sind.
Folglich ist die Basis abhängig von der Basis in B_v, jede Basis in B_v hat eigene "duale Basis".

Koordinatenvektoren von Vektoren und Linearformen
$\to$ für $x = \Phi^{-1}_{B_v}(v)$ für $v \in V$ gilt: $x_i = \langle v_i^*, v \rangle$ i = 1,..,n
$\to$ für $\xi = \Phi^{-1}_{B_v^*}(v^*)$ i = 1,...,n

Basiswechselmatrizen im Dualraum
Sei $T = \mathcal{T}^{B_v}_{\widehat{B}_v} = \mathcal{M}^{B_v}_{\widehat{B}_v}(id_v)$
Dann ist der wechsel der zwei dazugehörigen Dualbasen die transponierte inverse von T:
$T^{-T} = \mathcal{T}^{B_v^*}_{\widehat{B}_v^*}$

Annihilatoren

Annihilatoren
Ist $M \subseteq V$, dann ist der Annihilator:
$M^0 = \{v^* \in V^* | \langle v^*, v \rangle = 0\ \forall v \in M\}$
Sei $F \subseteq V^*$, dann ist der Präannihilator:
${}^0F = \{v \in V | \langle v^*, v \rangle = 0\ \forall v^* \in F\}$
Es gilt:
$\to \{0_V\}^0 = V^*$
$\to V^0 = \{0_{V^*}\}$
$\to {}^0\{0_{V^*}\} = V$
$\to {}^0(V^*) = \{0_V\}$

(Prä-)Annihilatoren sind Unterräume.
Sei B endliche Basis von V mit dualer Basis B^*.
$\to$ ist $(v_1, \ldots v_k)$ eins Basis des Unterraums $U \subseteq V$, dann ist $(v^*_{k+1}, \ldots .v^*_n)$ eine Basis vong U^0 und es gilt:
dim(U^0)= dim(V)-dim(U)= codim(U).
$\to$ ist $(v_1^*, \ldots v_k^*)$ eins Basis des Unterraums $F \subseteq V^*$, dann ist $(v_{k+1}, \ldots .v_n)$ eine Basis vong ${}^0F$ und es gilt:
dim(${}^0F$)= dim(V^0)-dim(F)= dim(F)-dim(V)= codim(F).

Unterräume sind (Prä-)Annihilatoren
Für jeden Unterraum U von V gilt:
$U = \bigcap_{v^* \in U^0} Kern(v^*) = {}^0(U^0)$

Duale Homomorphsimen

dualeHoms
V,W K-Vektorräume mit $f \in Hom(V, W)$
$f^* : W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^*$
$\to \langle f^*(w^*), v \rangle = \langle w^*, f(v) \rangle$
Duale Homs sind wieder Homomorphismen:
$f^* \in Hom(W^*, V^*)$

Dualisieren einer Komposition
$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Eigenschaften
$\to$ Die Abbildung I, die jedem f ein f^* zuordnet ist injektiven Homomorphismus.
$I : Hom(V, W) \ni f \mapsto f^* \in Hom(W^*, V^*)$
$\to$ Wenn V, W endlich-dimensional sogar ein Isomorphismus:
$dim(Hom(W^*, V^*)) = dim(Hom(V, W)) = dim(V) dim(W)$

FunFakt
Mit Auswahlaxiom kann man zeigen, dass I für unendlich dim V und endlich dim Bildraum W sogar Surjektiv ist. Und andernfalls nicht.

Allgemeine Aussagen zu dualen Homs
$\to f \in Hom(V, W)$ist injektiv wenn
$f^* \in Hom(W^*, V^*)$ surjektiv ist.
$\to f \in Hom(V, W)$ist surjektiv wenn
$f^* \in Hom(W^*, V^*)$ injektiv ist.
$\to f \in Hom(V, W)$ist bijektiv wenn
$f^* \in Hom(W^*, V^*)$ bijektiv ist.
$\to$ Wenn f und f^* beide bijektiv, gilt
$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

Dartellungsmatrizen dualer Homs
V, W endlich dims K-Vektorräume mit Basen B_v, B_w , f ein Hom und f^* dualer Hom, dann ist:
$A = \mathcal{M}^{B_v}_{B_w}(f)$ und $A^T = \mathcal{M}^{B_w^*}_{B_v^*}(f^*)$
Es gilt:
Rang(f) = Rang (f^*)
$(f_A)^* = f_{A^T}$

Fundamentale Unterräume
$Bild(f^*) = Kern(f)^0$ in V^*
$Kern(f^*) = Bild(f)^0$ in W^*
$Bild(f) = {}^0\ Kern(f^*)$ in W
$Kern(f) = {}^0\ Bild(f^*) inV$
Selbiges gilt für f = A und * = T (also transponieren)

Dualraum eines Faktorraumes
$(V/U)^* \cong U^0$

Faktorraum eines Dualraums
$V^*/U^0 \cong U^*$

Bidualraum

Bidualraum
Der Bidualraum sind alle Linearformen auf V^*.
Für jedes feste $v \in V$ ist:
$V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$
eine Linearform auf V^*.

Kanonische Injektion
$i_v = V \ni v \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$
Injektion(homomorphismus von V nach V^{**}) (Wenn V endlich dim ist, sogar eine Bijektion)
Wenn V endlich dimensional ist, gilt:
$\to \forall F \subseteq V^*$ gilt $F^0 = i_v({}^0F)$
$\to \forall U \subseteq V$ (U ist Unterraum) gilt
$(U^0)^0 = i_v(U)$

Bidualer Hom
$\to f^{**} : V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} = v^{**} \circ f^* \in W^{**}$
$\to i_w \circ f = f^{**} \circ i_v$

Billineare Abbildungen

Bil-Abbildunden
$\to$f mit $f : U \times V \to W$ heißt billinear, wenn in beiden Argumenten linear.
$\to$ Menge aller Billienaren Abbildungen: Bil(U,V; W)
$\to$ Wenn W = K, dann heißts Bilienarform
$\to$ Bil(U,V;W) ist ein Unterraum von $W^{U \times V}$

Eindeutigkeitssatz/Tensorproduktraum
Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $(v_j)_{j \in J} von V$ und $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familien von Vektoren in W.
$\to$ Es gibt genau eine bil.Abbildung mit:
$f(u_i, v_j) = w_{ij} \forall (i, j) \in I \times J$
$\to$ Diese Familie ist i.A keine Basis. $\to$ für bilineare Abbildungen gilt: $f(\alpha u, v) = f(u, \alpha v)$
Ein Vektorraum, indem $(\alpha u, v) = (u, \alpha v)$ gilt, heißt Tensorproduktraum.

Konstruktion des Tensorproduktraums:
Seien U und V über K mit den Basen $(u_i)_{i \in I}$ und $(v_j)_j \in J$
Betrachte Unterraum von $K^{I \times J}$:
$U \otimes V = \{T : I \times J | T(i, j) \neq 0 \text{für endlich viele}(i, j)\}$
$\to u_i \otimes v_j = [(k, l) \mapsto \delta_{ik} \delta_{lj}]$ wobei $(k, l) \in I \times J$
$\to B = (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist eine Basis des Tensorproduktraumes.

Eigenschaften Tensorpüroduktraum
$\to$ Elemente in $V \otimes U$ heißen Tensoren.
$\to$ Die Abbildung die (u,v) auf $u \otimes v$ mapped heißt univerlesse bilineare Abbildung genannt.
$\to$ Tensoren mit $u \otimes v$ und u,v $\neq 0$ heißen Elementartensoren.
Sei $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i$ und $v = \sum_{j \in J'} \beta_j v_j$ wobei I',J' endliche Teilmengen der Basisindexmengen sind.
$\otimes(u, v) = \otimes(\sum_{i \in I'} \alpha_i u_i, \sum_{j \in J'} \beta_j v_j) = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j)$
Es gilt weiter:
$\to dim(U \otimes V) = dim(U) \cdot dim(V)$

Rechenregeln
$\to (u \otimes v) + (\hat{u} \otimes v) = (u + \hat{u}) \otimes v$
$\to (u \otimes v) + (u \otimes \hat{v}) = u \otimes (v + \hat{v})$
$\to (\alpha u) \otimes v = \alpha(u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$

Rang eines Tensors
Rang(T) ist die minimale Anzahl an Summanden, sodass T darstellbar ist mit:
$T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ wobei u und v beliebige Vektoren aus V und U sind.
$\to$ Der Nulltensor ist der einzige Tensor mit Rang 0.
$\to$ Jeder Elementartensor, also $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ hat Rang 1

universelle Eigenschaft
$\to g \in Bil(U, V; W)\ \exists!\ f \in Hom(U \otimes V; W)$, sodass $g = f \circ \otimes$, also $g(u, v) = f(u \otimes v)$
$\to$ Diese Zuordnung, also $g \mapsto f$ ist ein Vektrorraumisomorphismus.

weitere Isomorphismen
Sein V,U,W endlich dimensionale Vräume, über K.
$Hom(U \otimes V; W) \cong Bil(U, V; W) \cong Hom(U, Hom(V, W)) \cong Hom(V, Hom(U, W))$
Wenn W der Köprer ist, folgt
$Bil(U, V; K) \cong Hom(U \otimes V; K) \cong (U \otimes V)^* \cong Hom(U, V^*) \cong Hom(V, U^*)$

Multilineare Abbildungen

Multilin Abbildungen
$\to$ Abbildungen f mit $f : V_1 \times \cdots \times V_N \to W$, die in allen Argumenten linear sind.
$\to$ Menge aller: $Mult(V_1, \ldots, V_N; W)$
$\to$ Es gilt der Eindeutigskeitsatz.

Tensorproduktraum multilienarer
Seien $V_1, .., V_N$- K-Vräume mit $N \in \mathbb{N}_0$ und $(v_{1,i_1})_{i_1 \in I_1}, \ldots, (v_{N,i_N})_{i_N \in I_N}$
$\to \bigotimes_{i=1}^{N} V_i = \{T : I_1 \times \ldots \times I_N \to K | T(i_1, \ldots, i_N) \neq 0 \text{für endlich viele}(i_1, \ldots, i_N)\}$
$\to$ Elemente davon heißen Tensoren der Stufe/Ordnung N.
$\to$ universale mutltilineare Abbildung:
$v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N} = [(K_1, \ldots, k_N) \mapsto \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_N k_N}]$

universelle Eigenschaft(Mult)
$\to g \in Mult(V_1 \times \cdots \times V_N; W)\ \exists!\ f \in Hom(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N; W)$
, sodass $g = f \circ \otimes$
$\to$ Diese Zuordnung, also $g \mapsto f$ ist ein Vektrorraumisomorphismus.

Tensoren über Vektroraum

$\mathcal{T}^r_s(V) = V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$
hier ist V r-mal tensoriert mit V^* s-mal tensoriert. Diese heißen Tensoren vom Typ (r,s) über V.
$\to$ Basis davon ist:
$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_s}$
mit $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$ und $1 \leqslant j_1, \ldots ., j_s \leqslant n$
Jeder Tensor $T \in \mathcal{T}^r_s(V)$ ist eine LK:
$T = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n} T^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_s}$
Dabei ist: $T^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s}$ die Komponenten, quasi als Matrix mit r+s Dimensionen und n^{r+s} Einträgen.
DIe Zuordnung:
$\mathcal{T}^r_s(V) \ni T \mapsto T^{i_1, \ldots, i_r}_{j_1, \ldots, j_s} \in (K^n)^{r+s}$
ist ein Vraumisomorphimus.

Tensoren als Abbildungen
$\to \mathcal{T}^0_0(V) = K$
$\to \mathcal{T}^0_1(V) = V^* \cong Hom(V, K)$
$\to \mathcal{T}^1_0(V) = V \cong Hom(V^*, K)$
$\to \mathcal{T}^0_2(V) = V^* \otimes V^* \cong Hom(V \otimes V, K) \cong Hom(V, V^*)$
$\to \mathcal{T}^1_1(V) = V \otimes V^* \cong Hom(V^* \otimes V, K) \cong Hom(V, V) \cong Hom(V^*, V^*)$
$\to \mathcal{T}^2_0(V) = V \otimes V \cong Hom(V^* \otimes V^*, K) \cong Hom(V^*, V)$

Symmetrische und Schiefsymmetrische
$\to$ Tensoren $T \in \mathcal{T}^r_0$ sind symmetrsich, wenn gilt:
$T(\epsilon^{i_1}, \ldots, \epsilon^{i_r}) = T(\epsilon^{i_{\sigma(1)}}, \ldots, \epsilon^{i_{\sigma(r)}})$
$\to$ Tensoren $T \in \mathcal{T}^r_0$ sind schiefsymmetrsich, wenn gilt:
$T(\epsilon^{i_1}, \ldots, \epsilon^{i_r}) = (sgn\sigma) T(\epsilon^{i_{\sigma(1)}}, \ldots, \epsilon^{i_{\sigma(r)}})$
$\to$ Alternierender Tensor ist, wenn zwei verschiedene Argumente gleich sind, der Tensor = 0 wird

Eigenschaften
$\to$Ist T alternierend, dann ist T auch schiefsymmetrsich.
$\to$ wenn $char(K) \neq 2$, so gilts auch umgekehrt.
$\to$ wenn char(K) = 2, ist
$\mathcal{T}^r_0(V)_{sym} = \mathcal{T}^r_0(V)_{skew}$
$\to$ wenn r = 0 oder 1 gilt:
$\mathcal{T}^r_0(V)_{sym} = \mathcal{T}^r_0(V)_{skew} = \mathcal{T}^r_0(V)$

Symmetrie auch für Komponenten
Es ist äquivalent:
$\to T \in \mathcal{T}^r_0(V)$ ist symmetrisch.
$\to$ Die Komponenten sind
$T^{i_1, \ldots, i_r} = T^{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}}$
und
$\to T \in \mathcal{T}^r_0(V)$ ist schiefsymmetrisch. $\to$ Die Komponenten sind
$T^{i_1, \ldots, i_r} = (sgn\sigma) T^{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}}$
$\to$Die Menge der schiefsymmetrischen bzw. symmetrsichen Tensoren sind Unterräume.

Projektion
$P \in End(V)$ ist Projektion, wenn gilt: $P \circ P = P$
Eine Projektion auf den Unterraum Bild(P).
Der Endo:
$\mathcal{T}^r_0(V) \ni T \mapsto proj_{sym}(T) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \in \mathcal{T}^r_0(V)$
ist eine Projektion auf Menge der symmatrischen Tensoren.
Der Endo:
$\mathcal{T}^r_0(V) \ni T \mapsto proj_{skew}(T) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (sgn\sigma) \sigma(T) \in \mathcal{T}^r_0(V)$
ist eine Projektion auf Menge der schiefsymmatrischen Tensoren.

Dimension der Unterräume
V ein K-Raum mit char(K)$\neq$ 2 und r $\in \mathbb{N}_0$ und dim(V)= n:
$dim(\mathcal{T}^r_0(V)_{skew}) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Determinanten Det-Form
V immer endlich dimensional
$\Delta : V^n \to K$ heißt determinantenform, wenn:
$\to \Delta$ eine n-lineare Form auf V^n ist.
$\to \Delta$ ist alterniered.
$\to \Delta$ ist nicht die Nullform.
Δ wird durch genau einen $T \in \mathcal{T}^0_n$ repräsentiert
Es ist äquivalent:
$\to$ T ist alternierend.
$\to$ Wenn $(v_1, \ldots, v_i)$ lin. abhängig ist, ist $T(v_1, \ldots, v_i) = 0$

Determinantenformform
$v \in V$ und $(b_1, .., b_i)$ einen Basis von V und Δform auf V^n
$\to \Delta(v_1, \ldots, v_n) = (\sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n}) \cdot \Delta(b_1, \ldots ., b_n)$
$\forall (v_1, .., v_n) \in V^n$ mit T die eindeutige Matrix:
$v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} b_i$

Basiserkenner
Äquivalent:
↪ $\Delta(v_1, ..., v_n) \neq 0$
↪ $(v_1, ..., v_n)$ ist Basis von V.
Determinanten einer Matrix
Sei $a_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i$ eins Matrix $\in V^n$
mit V = K^n also $V^n \cong K^{n \times n}$
$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$
Eigenschaften Determante
→ det(A) ist eine alternierende Mutlform der Spaltenvektoren von A.
→ $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$
→ $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A ist regulär $\Leftrightarrow$ Rang(A)=n
$\Leftrightarrow (a_{.1}, ..., a_{.n})$ ist lin unabhäng.
→det(I)=1
→ det(AB)=det(A)det(B)
→ $det(A^{-1}) = 1/det(A)$, wenn A invertierbar.
→ $det(A^T) = det(A)$
→ Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante.
→ $det(A \in K_{\triangleright}^{n \times n}) = a_{1,1} \cdots a_{n,n}$
→ $det(A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}) = det(A_{11}) det(A_{22})$
(Block A_{21}, kann auch Block A_{12} sein) Für Elementare Zeilenumformungen gilt:
→ Matrix D: Typ 1: Multiplikation der i-ten Zeile mit einen Skalar $\alpha \Rightarrow$ det(D) = α
→ Matrix S: Typ 2: Addition des α-fachen zur i-ten Zeile: $\Rightarrow det(S) = 1$
→ Matrix T: Typ 3: Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile: $\Rightarrow det(T) = -1$
Begriffe
→ Streichugnsmatrix: Die $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix, die sich ergibt, wenn man die i-te und die j-te Zeile streicht: $(A)_{\neq i, \neq j}$.
→ Unterdeterminante / Minor: Ist die Determinante der Streichungsmatrix: zum jeweiligen i und j: $[A]_{ij} = det((A)_{\neq i, \neq j})$
→ Kofaktor: $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} [A]_{ij}$ ist der Kofaktor von A zu den Indices i,j.
→ $cof(A) = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ heißt die Kofaktormatrix von A.
→ $adj(A) = cof(A)^T$ das Transponierte der cof(A), nennen wir die adjungierte Matrix von A.
Für die adjungierte gilt:
→ $adj(A)A = Aadj(A) = det(A)I$ (Bis aud den Faktor det(A)ist die adjungierte das Inverse von A)
Laplace Entwicklung
$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det((A)_{\neq i, \neq j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij}$
Cramersche Regel
Sei A invertierbar, dann gilt für Ax=b, die einzelenen Koordinaten des Lösungsvetors:
$x_i = \frac{det(a_{.1}, ..., a_{.i-1}, b, a_{.i+1}, ..., a_{.n})}{det(A)}$ für i = 1,...,n.
Also den Vektor b in die i-te Spate einsetzen.
Det von Endos
Sei f ein Endo, dann: det(f) = det(A) für $A = \mathcal{M}_{Bv}^{Bv}(f)$
Dabei ist die Basis egal, solange es dieselbe ist. (Weil ähnliche Matrizen ist det gleich).
→ $det(\alpha f) = \alpha^n det(f)$
→ $det(f) \neq 0 \Rightarrow f invertierbar \Leftrightarrow Rang(f) = n$
→ $det(id_V) = 1$
→ $det(f \circ g) = det(f) det(g)$
→ $det(f^{-1}) = 1/det(f)$, falls f invertierbar
→ $det(f^*) = det(f)$ für f^*, die zu f duale abbildung.
geordneter Körper
K ist geordnet, wenn es eine totalordnung $\leqslant$ gibt, sodass $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$ und $\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta \geqslant 0$
Rechenregeln im geordneten Körper
→ $\alpha \geqslant 0 \Rightarrow -\alpha \leqslant 0$
→ $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant \delta \Rightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$
→ $\alpha \leqslant \beta, \gamma \geqslant 0 \Rightarrow \alpha\gamma \leqslant \beta\gamma$
→ $\alpha \leqslant \beta, \gamma \leqslant 0 \Rightarrow \beta\gamma \leqslant \alpha\gamma$
→ $\alpha^2 \geqslant 0$
→ $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 > 0$
→ $\alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 0 \rightarrow \beta > \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$
→ $char(K) = 0$
orientierungtreuer Auto Sei $f \in Aut(V)$, wenn $det(f) > 0$ heißt er Orientierungstreu, wenn $det(f) < 0$ heißt er Orientieungsuntreu.
Orientierung von Basen
Zwei Basen B und G von V heißen gleich orientiert, wenn es $det(\mathcal{T}_B^G) > 0$ gilt. Wenn die Determinante der Transformatrix < 0 ist, dann heißen die Basen umgekehrt orientiert.

→Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V (mit genau zwei Äuwivalenzklassen).

Normalformen

Diagonalisierbarkeit
Diagonalform = Eigenwerte entlang der Hauptdiagonalen. Besitzt ein Endo f über V mit dim(V) = n, genau n paarweise verschiedene Eigenwerte, so ist f diagonalisierbar.
Eigenschaften
→ f ist injektiv ⇔ 0 ist kein Eigenwert fon f.
→ Wenn $dim(V) = n \in \mathbb{N}$, f ist bijektiv ⇔ 0 ist kein Eigentwert von f.
Bestimmung von Eigenvektoren zu geg. Eigenwert
→ LGS Lösen: $(\lambda I - A)x = 0$
Äquivalent, wenn $n \in \mathbb{N}$
↪ A ist regulär
↪ 0 ist kein Eigenwert von A
Eigenraum
→ $Eig(f, \lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$
Geometrische Vielfachheit:
→ $\mu^{geo}(f, \lambda) = dim(Eig(f, \lambda))$
Gleiches gilt für Matrizen.
Eigenschaften:
→ $Eig(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von V.
→ $Eig(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f
→ $Eig(f, \lambda) \backslash \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren zu f.
→ $Eig(f, \lambda) = Kern(\lambda id_V - f)$
→ Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschieden,dann $Eig(f, \lambda_1) \cap Eig(f, \lambda_2) = \{0\}$
Gleiches gilt für Matrizen. Insbesondere ist Kern(A) der Eigenraum zu $0 \in K$
→ Eigenräume zu verschiedenen EIgenwert bilden direkte Summen.
Projektoren sind diagonalisierbar
Es gilt:
→ $V = Kern(P) \bigoplus Bild(P)$
→ P kann nur 0 oder 1 als Eigenwerte haben (merhfach möglich).

Berechnung von Eigenwerten

f ist Endo in einem endlichdim. V. Dann ist äquivalent
↪ λ ist ein Eigenwert von f.
↪ $det(\lambda id_V - f) = 0$
Gleiches gilt für die Dartellungsmatrizen.
charackteristisches Polynom
$\chi_A = det(\lambda I - A) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$
Die zahlen n_i heißen algebraische Vielfachheit von λ_i: $\mu^{alg}(A, \lambda_i) = n_i$
$\mu^{alg}(A, \lambda_i) = max\{k \in \mathbb{N} | (t - \lambda_i)^k | \chi_A\}$ Wir dürfen Polynome in Matrizen und det einsetzen, weil wir den rationalen Funktionskörper gebildet haben.
Spur
→ $Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
Eigenschaften charakteristisches Polynom
→ $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i \in K_n[\lambda]$
→ χ_A ist ein normiertes Polynom mit $deg(\chi_A) = n$, es gilt: $\alpha_n = 1$
Im Fall $n \geqslant 1$ gilt:
→ α_{n-1} = -Spur(A).
→ $\alpha_0 = (-1)^n det(A)$
Vielfachheiten, zusammenhang
→ $1 \leqslant \mu^{geo}(A, \lambda) \leqslant \mu^{alg}(A, \lambda)$
ähnlich Matrizen haben haben dasslebe χ
→ A ähnlich zu $\widehat{A}$, dann ist $\chi_A = \chi_{\widehat{A}}$
Char.polynom von Endos
Wir definieren $\chi_f = \chi_A$ für $A = \mathcal{M}_{Bv}^{Bv}(f)$
→Eigenwerter sind Nullstellen des char. Polynoms
→ ähnliche Matrizen haben selbe Spur
Wir definieren:
→ Spur(f) = Spur(A), für $A = \mathcal{M}_{Bv}^{Bv}(f)$
Diagonalisierbarkeit
f ist diagonalosierbar
$\Leftrightarrow \chi_f = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_i)^{n_i}$, also χ_f ganz zerfällt.
Die vielfachheiten gilt: $\sum_{i=1} n_i = n$
→ $\mu^{geo} = \mu^{alg} \Rightarrow$ diaogonalisierbarkeit

Algebren

Definition
$(A, +, \cdot, \star)$ über K ist eine (assoziative) Algebra, wenn:
→ $(A, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.
→ $(A, +, \star)$ ist ein Ring.
→$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b), \forall \alpha \in K, \forall a, b \in A$
↪ Eine Algebra ist kommutativ, wenn $\star$ kommutativ ist.
↪ Eine Uniutäre Algerba hat ein neutrales Element bezüglich $\star$.
Multiplika $-\star$ ist bilinear
→ $(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \star c = \alpha \cdot (a \star c) + \beta \cdot (b \star c)$
→ $a \star (\beta \cdot b + \gamma \cdot c) = \beta \cdot (a \star b) + \gamma \cdot (a \star c)$
Es gilt:
→ Jeder Körper ist kommutative Algebra über sich selbst.
Algebrahoms
→ $f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b)$
→ $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a)$
→ $f(a \star_1 b) = f(a) \star_2 f(b)$
→ wenn algebra mit 1 muss $f(1_1) = 1_2$
Algebrahoms kommutieren mit Polynomen
Wenn p() ein Polynom ist, und f ein Algebrahom, dann
→ $f(p(a)) = p(f(a))$

Satz von Cayley Hamilton

→ $\chi_A(A) = 0$, also A in ihr Polynom eingesetzt ist null.
→ gilt für endos f
A^{-1} is ein Polyno von A
Wenn A invertierbar, gibt es ein p, sodass
→ $A^{-1} = p(A)$

Ideale

Ideale sind Unterringe, sodass:
→ $RJ \subset J$ und $JR \subset J$
→ Kerne von Ringhoms sind Ideale.
→ Durchschnitt von Idealen ist wieder Idieal
Ideal erzeugen:
→ $(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \middle| \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, .., n (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}$
→ Wenn Ring mit eins, so muss a_i nur$\in RER$
→ Hauptideal ist Ideal, welches nur ein Element als Erzeuger hat.

Minimalpolynom

annulierende Polynome sind ein Ideal
→ $J_A = \{p \in K[\lambda] \mid p(A) = 0\}$
Minimalpolynom
→ μ_A heißt Minimalpolynom, wenn $\mu_A \in J_A$ und das normierte Polynom kleinsten Grades ist.
→ $\mu_A = \mu_f$, wenn A Darstellungsmatrix von f ist.
→ ähnliche Matrizen haben gleiches Minimalpolynom
Bestimmen vong μ
→ char Polynom von A aufstellen, Faktorisieren, Potenzen Weglassen, aber schauen, dass μ_A noch χ_A teilt, und dann A einsetzen und schauen ob die Nullmatrix rauskommt.
Zweiter Weg
Potenzen von der Matrix A aufstellen (bei 0 anfangen), diese MAtrizen dann vectoriesiern (GanzesA als ein Spaltenvektor), dann schauen ab welcher Potenz sich lin. abhängigkeit einschleicht. Matrix aufstellen mit den Spalten = die vektorisierten MatrizenPotenzen (bis zu potenz wos lin abhängig wird) dann den Kern dieser Matrix bestimmen. Kern ist ein Vektor, der zu einem Polynom synthetisiert werden kann.
Minimalpolynom Eigenachaften
→ μ_A teilt jedes $p \in J_A \rightarrow \mu_A$ hat gleiche Nullstellen wie χ_A
→ Eigenwerte sind Nullstellen von μ_A
→ zerfällt μ_A in einfache (Potenz 1) Linearefaktoren, so ist A diagonalisierbar
Begleitmatrix
Fürn normiertes Polynom ist C_p die Begleitmatrix:
$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$
Es gilt: $\chi_{Cp} = \mu_{Cp} = p$

Frobenius Normalform

Vowissen für Frob
→ lokal annulierende Polynome sind Ideal:
→ $J_{A,x} = \{p \in K[\lambda] \mid p(A)x = 0\}$
→lokales Minimalpolynom = $\mu_{A,x} \in J_{A,x}$, normiertes mit kleinstem Grad.
→ $\mu_{A,x} = \mu_{f,v}$, wenn A Darstellungsmatrize von f ist, und x der Koordinatenvektor von v.
→ lokales Minimalpolynom teilt alle $p \in J_{A,x}$
→ lokales Minimalpolynom teilt das Minimalpolynom
→ Fürn lokales Minimalpolynom $\mu_{A,x}$, ist der Unterraum $\langle x, Ax, A^2x, .., A^{d-1}x \rangle$, ein A-invarianter Unterraum.
→ Wählen wir x so, dass der A-invariante Unterraum möglichst goß ist, heißt x, ein maximaler Vektor.
→ lokale Minimalpolynome mit maximalen Vektor sind minimal Polynome
Frobenius Normalform
→ $p_1 = \mu_A$ und $P_{j+1} \mid p_j$
A ist ähnlich zu $\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}$
→ Sowol die Matrix, also auch p_j sind eindeutig.
→ Die p_j heißen Normalteiler der Matrix A
→ Begleitmatrix dim=m hat maximal 2m-1 Einträge $\neq 0$, damit hat FrobNormalform maximal 2n-k Einträge $\neq 0$
→ Zwei matrizen sind genau dann ähnlich wenn diegleiche Frob.normalform.

JordanNormalform

Verallgemeineter Eigenvektor/Hauptvektor
Hauptvektor zum Eigenwert λ der Matrix A ist:
→ $(\lambda I - A)^k x = 0$ wobei k, die Stufe des Hauptvektors genannt wird
→ Die Menge aller Hauptvektoren von A zu λ nennen wir verallgemeineter Eigenraum: $GEig(A, \lambda)$
→ Verallgemeinerte Eigenräume sind A-invariant
→ Wenn $A \in K^{n \times n}$, dann gilt: $Kern(A^n) = Kern(A^{n+j})$
→Wenn χ_A vollständig in linearfaktoren zerfällt, dann gilt:
$K^n = \bigoplus_{j=1}^{s} GEig(A, \lambda_j)$.
Jordanblock
Ein Jordanblock der dimension r ist:
$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$
→ für r=1 ist der BLock nur λ
→ $J_r(\lambda)$ ist ähnlich zu C_p von $p = (t - \lambda)^r$
↪ $\chi_{J_r(\lambda)} = \mu_{J_r(\lambda)} = (t - \lambda)^r$
→ Jordan-Normalform hat nur Jordanblöcke auf der Diagonalen
→ Die Jordannormalformen von A unterscheiden sich nur in Reihenfolge der BLöcke
→ Wenn χ_A komplett in LF zerfällt, gibt es eine Jordannormalform
Eigenschaften Jordanform
→ $\chi_A = \prod_{j=1}^{k} (t - \lambda_j)^{r_j}$
→ $\mu_A = \prod_{\lambda \in \Lambda(A)} (t - \lambda)^{max\{r_j | \lambda_j = \lambda\}}$
→ $\mu^{alg}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} r_j$
Also Summe der Dimensionen aller Jordanblöcke mit diesem Lampda.
→ $\mu^{geo}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} 1$
Anzahl der Jordanblöcke mit genau dem lamdda.

Innenprodukte

Bilineraformen Billineraformen sind:
→ symmetersich, wenn $\gamma(u, v) = \gamma(v, u)$
→schiefsymmetrisch, wenn $\gamma(u, v) = -\gamma(v, u)$
→alternierend, wenn $u = v \Rightarrow \gamma(u, v) = 0$
Darstellungsmatrix von γ
Sei $B_v = (v_1, ..v_n)$ Basis von V
→ $\mathcal{M}_{B_v^*}^{B_v}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{i,j=1}^{n} \in K^{n \times n}$
→ Wenn endlich dimensional ist die duale Bilinerarform γ^* von γ gegeben durch:
↪ $\gamma^*(u, v) = \gamma(v, u)$
→ Transformation mit $\widehat{A} = T^{-T} A T^{-1}$, wenn T von alt nach neu
Kongruenztansform
→ $A, \widehat{A}$ heißen kongruent, wenn
↪ $\widehat{A} = T^{-T} A T^{-1}$
→ $\widehat{A}$ ist dann symmterisch, wenn es A ist. (Symmetrei bleibt erhalten)
Rang
→ $Rang(\gamma) = Rang(A)$, wenn A darstellungatrix von γ.
Eigenschaften
→ γ ist nicht ausgeartet, wenn die linearen Abbildungen, bei denen ich jeweils ein Argument einsetzte und das Andere frei lasse, beide injektiv sind.
→ γ heißt perfekt, wenn diese lin, Abbildung sogar bijektiv sind.
Es ist äquivalent:
↪ $u \mapsto \gamma(u, \cdot)$ ist injektiv
↪ $v \mapsto \gamma(\cdot, v)$ ist injektv
↪ γ ist nicht ausgeartet.
↪ γ ist perfekt.
↪ A ist regulär.
↪ Rang(γ) = Rang(A) = n
quadratische Formen
q(v) ist quadratische Form, wenn gilt:
↪ $q(\alpha v) = \alpha^2 q(v)$
↪ $\Gamma(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$ ist $\in Bil(V, K)$
→ Menge aller Quadratischen Formen = QF(V).
→ Quadratische Formen bilden Vektorraum
→ $q_\lambda(u) = \gamma(u, u)$
→ Wenn $char(K) \neq 2$ sind die quadratischen Isomorph zu den symmetrischen bilineraformen.
→ $dim(QF(V)) = dim(Bil_{sym}(V, V)) = \frac{1}{2} n(n+1)$
Polarisationsformeln, um von q-form zu bilinear zu kommen:
$\gamma_q(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$
Orthogonalität → (V, γ) heißt quadratischer Raum, wenn γ ein sym. bilinearform ist.
→ Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn gilt $\gamma(u, v) = 0$, also u $\perp$ v
→die mengen$E_1 \perp E_2$ sind orhogonal, wenn jedes Ihrer elemente orthogonal sind.
→ Eine Menge $E \subset V$ heißt orthognal, wenn $u \perp v, \ \forall u, v \in E$
→ $E^{\perp} = \{v \in V | \gamma(u, v) = 0, \ \forall u \in E\}$heißt orhtogonales komplement
Satz vong Pythagoras
→ $\gamma\left(\sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j\right) = \sum_{i=1}^{k} \gamma(v_i, v_j)$
orhtogonale direkte Summe
→ $U_i \perp U_j, \forall i \neq j$.
→ geschreiben: $\bigoplus_{i \in I} U_i$.
→ U_i sind Unterräume, die zueinander orthogonal sind.
→ Wenn B_v eine orhtogonalbasis von V ist, dann ist die Darstellungsmstrix $\mathcal{M}_{B_v^*}^{B_v}(\gamma)$ diagonal.
Homomorphismen quadratischer Räume
↪ f muss linear sein.
↪ $\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v), \ \forall u, v \in V$
→ ISt f ein Isio quad räume, dann auch f^{-1}, Wenn endlich dim, dann $Rang(\gamma_1) = Rang(\gamma_2)$
→ Man kann die Basis so wählen, dass Darstellungsmtrix von γ nur einträge aud der Diagonalen hat (bis zum Rang r von γ), danach nur noch 0en auf der Hauptdioagonalen
→ Jede symmetrische Matrix ist kongruent zu einer Diagonalmatrix
Signatur
→Is der Körper = $\mathbb{R}$, gibt es eine Basis von V, sodass:
$\mathcal{M}_{B_v^*}^{B_v}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0} \end{bmatrix}$
→ Signatur(n_+, n_-, n_0)
→Is der Körper = $\mathbb{C}$, gibt es eine Basis von V, sodass:
$\mathcal{M}_{B_v^*}^{B_v}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_r & \\ & 0 \end{bmatrix}$ Mit $r = rang(\gamma)$
Trägheitssatz vong Sylvester

Die Signatur, der durch A induzierten Bilinarform γ_A ist durch A eindeutig festgelegt.

Euklidische Räume

Definitheit

Für eine Bilinearform γ gilt:
$\hookrightarrow$ positiv definit, wenn $\gamma(v,v) > 0 \forall v \neq 0$
$\hookrightarrow$ positiv semidefinit, wenn $\geqslant$.
$\hookrightarrow$ negatv definit, wenn $\gamma < 0$.
$\hookrightarrow$ negativ semidefinit, wenn $\leqslant$.
$\hookrightarrow$ indefitnit, wenn nix davon stimmt.
$\rightarrow$ Definitheit kann man ablesen, wenn Darstellugnmatrix nur positive eintrage hat. etc.

Euklidischer Raum

Euklidicsher Raum ist ein Vektorraum mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform
$\rightarrow$ Also haben diese Bilinearformen die Signatur(n,0,0)
$\rightarrow$ $(x,y) \mapsto y^T x$ heißt Standart Innenprodukt/Skalaprodukt
$\rightarrow$ Im euklidischen Raum sind orthogonale Familien an Vektoren auch Linear unabhängig.

Cauchy-Schwarz Ungleichung

$\rightarrow \gamma(u,v)^2 \leqslant \underline{\gamma(u,u)\gamma(v,v)}$ oder
$|\gamma(u,v)| \leqslant \sqrt{\gamma(u,u)}\sqrt{\gamma(v,v)}$

Normen

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn:
$\hookrightarrow \|u\| \geqslant 0$ und $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
$\hookrightarrow \|\alpha U\| = |\alpha|\|u\|$
$\hookrightarrow \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$
$\rightarrow$ BilForm induzieren Norm
$\|\cdot\|_\gamma : u \mapsto \|u\|_\gamma = \sqrt{\gamma(u,u)}$
$\rightarrow$ Satz von Pythagoras

$$\left\|\sum_{k}^{i=1} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2$$

Normieren

$\rightarrow u \in V$ ist ein einheitsvektor(normierter Verktro), wenn $\|u\| = 1$.
$\rightarrow u$ zu normieren, teilt man den Vektor durch seine Norm $\frac{u}{\|u\|}$

Orthogonale Projektion

$$proj_u^\gamma(v) = \frac{\gamma(v,u)}{\|u\|^2} u$$

$\rightarrow V = Bild(proj_u^\gamma) \bigcirc\!\!\!\!\!\perp Kern(proj_u^\gamma)$

Gramm-Schmidt-Verfahren

Nur wenn char(K) $\neq 2$, Macht aus lineare unabhängigen Familie eine Orhogonale fam.
v_i sind lin unabhängigr fam, und u_i soll der Output sein.
Setze $u_1 = v_1$, danach:

$$u_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} proj_{u_i}^\gamma(v_j)$$

jetzt hat man u_1 und findet mit der Formel oben u_2 heraus und macht das für jedes weitere u_i, das mach braucht.
Will man eine Orthonormale menge, so normiert man alle vektoren halt noch.
$\rightarrow$ Es gilt: $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$

Orthogonale Abbildungen

$\rightarrow f : V \rightarrow W$, für V und W Euklidische Räume. f soll orthogonal sein.
$\hookrightarrow$f muss linear sein.
$\hookrightarrow \gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u,v)$
$\rightarrow$ Orthogonale Abbildungen f sind injektiv
$\rightarrow$ Haben die beiden Räume, diegleiche endliche Dimension, ist f auch bijektiv
$\rightarrow$ Komposition orthogonaler Abbildungen ist Orthogonale
$\rightarrow$ Wenn M die Darstellungsmatrix von γ ist und x der Koordinatenvektorn von v und y der ...von v, dann gilt: $\gamma(u,v) = x^T M y$

Orthogonalität von f

$\hookrightarrow f$ ist (γ_1, γ_2)-orthogonal.
$\hookrightarrow A^T M_2 A = M1$, wenn M wieder Darstellung von γ ist und A die Darstellung von f.
$\rightarrow$ Wenns Orthonormalbasen sind, dann ist $M_2 = I_n$ und $M_1 = I_m$
$\rightarrow$ Bei Endos ist $M_1 = M_2 = M$
$\rightarrow$ Eigenwerte von γ-orthogonalen Endos sind nur 1 oder -1.

Orthogonale Gruppe

$\rightarrow \gamma$-orhtogonale Endos bilden mit Komposition eine Gruppe, genannt: $O(V, \gamma)$
$\rightarrow$ die spezielle Orthogonale Gruppe ist:
$SO(V,\gamma) = \{f \in O(V,\gamma) | det(f) = 1\}$
$\rightarrow$ Gleiches gilt für deren Darstellugnsmtarizen.

Riez-Abbildung

Riez-Iso

Im endlich dim.ist $\Gamma : V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$ ein Iso.
$\gamma(u,v) = \langle\Gamma(v), u\rangle = \langle\Gamma(u), v\rangle = \gamma^{-1}(\Gamma(u), \Gamma(v))$
Man schreibt fü den Riez-Iso auch: $\Gamma_{V \rightarrow V^*}$
$\rightarrow$ Bei R^n, dann $\Gamma : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Mx \in (\mathbb{R}^n)^*$
Wenn zwei euklidische Räume gleiche dim haben ist äquivalent:
$\hookrightarrow$ f ist (γ_1, γ_2)-orthogonal
$\hookrightarrow f^*$ ist $(\gamma_2^{-1}, \gamma_1^{-1})$-orthogonal
Bei Endos dann:
$\hookrightarrow$ f ist λ-orhtogonal.
$\hookrightarrow f^*$ ist γ^{-1}- orthogonal

Adjungierte Homs

Sei $f \in Hom(V,W)$, für V,W euklidische Räume, so ist die zu f adjungierte Abildung
$\rightarrow f^\circ = \Gamma^{-1}_{V \rightarrow V^*} \circ f^* \circ \Gamma_{W \rightarrow W^*}$ geht von $W \rightarrow V$
Es gilt für die adjungierte:
$\rightarrow \gamma_2(w, f(v)) = \gamma_1(f^\circ(w), v)$
Die Adjugierte ist von den jeweiligen Bililinearformen γ_1, γ_2 abhängig.
Wenn A die Darstellung von f ist, gilt:
$\rightarrow A^\circ = \mathcal{M}_{Bv}^{Bw}(f^\circ) = M_1^{-1} A^T M_2$
$\rightarrow A^\circ$ ist Darstellung von f°
$\rightarrow$ Die zu f biadjungierte ist identisch zu f, also $f^{\circ\circ} = (f^\circ)^\circ = f$

Fundamentale Unterräume

$\rightarrow Bild(f^\circ) = Kern(f)^\perp \in V$
$\rightarrow Kern(f^\circ) = Bild(f)^\perp \in W$
$\rightarrow Bild(f) = Kern(f^\circ)^\perp \in W$
$\rightarrow Kern(f) = Bild(f^\circ)^\perp \in V$
$\rightarrow$ Ednlich Dim V gilt:
$\rightarrow V = Kern(f) \bigcirc\!\!\!\!\!\perp Bild(f^\circ)$
$\rightarrow V = Kern(f^\circ) \bigcirc\!\!\!\!\!\perp Bild(f)$

Selbstadjungiertheit und normale Endos

$\rightarrow$ f ist $\gamma-$selbstadjungiert, wenn $f = f^\circ$
$\rightarrow$ f ist $\gamma-$normal, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$
Wenn M darstellung von γ und A die Darstellung von einem Endo f, ist äquivalent:
$\hookrightarrow$ f ist $\gamma-$selbstadjungiert.
$\hookrightarrow$ A erfüllt $A^\circ = A$, also $M^{-1} A^T M = A$
Bei orthonormalbasis ist M = I, also muss nur $A = A^T$
Wenn M darstellung von γ und A die Darstellung von einem Endo f, ist äquivalent:
$\hookrightarrow$ f ist $\gamma-$normal.
$\hookrightarrow$ A erfüllt $AA^\circ = A^\circ A$, also $AM^{-1}A^T M = M^{-1} A^T MA$
Bei orthonormalbasis $AA^T = A^T A$
$\rightarrow$ ist f $\gamma-$selbstadjungiert, dann auch normal
$\rightarrow$ ist f $\gamma-$orhtogonal, dann auch normal

KErn und bild selbstadjungierter

$\rightarrow Kern(f^\circ) = Kern(f)$
$\rightarrow Bild(f^\circ) = Bild(f)$
$\rightarrow V = Kern(f) \bigcirc\!\!\!\!\!\perp Bild(f)$
$\rightarrow V = Kern(f^\circ) \bigcirc\!\!\!\!\!\perp Bild(f^\circ)$

Eigenvektoren selbstadjungierter

$\rightarrow$ Sei f selbstadjunkter Endo mit λ_1, λ_2 verschiede Eignewerte und v_1, v_2die Eigenvektoren dazu. Dann sind v_1, v_2 bzgl. γ Orthogonal.
$\rightarrow$ Sei f selbstadjunkter endo und U ein f-invarianter U-Raum, dann ist U^T auch f-invariant.
Gleiches gilt für Matrizen, die darstellung von Endo sind.

Einheitsphäre/ Rayleigh-Quotient

$\rightarrow$ Einheitsshäre: $S(V,\gamma) = \{v \in V | \|v\|_\gamma = 1\}$
$\rightarrow$ Rayleigh Quotient:

$$R_{f,\gamma} : V \backslash \{0 \ \ni v \mapsto \frac{\gamma(v, f(v))}{\|v\|_\gamma^2} \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ Der Quitient hat ein Supremum und nimmt diese als MAximum an.
$\rightarrow$ Der maximaste Rayleigh qutient m ist auch der größte eigenwert von f.

Spektralsatz

V endlich dim. Euklidische Raum und f ein endo.
Es ist äquivalent:
$\hookrightarrow$ f ist $\gamma-$selbstadjungiert.
$\hookrightarrow$ f ist diagonalisierbar und es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von f, die $\gamma-$orthogonal sind.

Komplexes Innenprodukt

Antilinear

f ist antilinear wenn gilt:
$\rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$
$\rightarrow f(\alpha u) = \overline{\alpha} f(u)$
dabei ist $\overline{\alpha}$, das komplex konjugierte zu α.
Für w_i, v_i Basisvektoren, wenn $f : V \rightarrow W$
Die Darstellungsmatrix von f ist auch wieder $A = \mathcal{M}_{Bw}^{Bv}(f)$
Es gilt aber:

$$\rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j w_i, \text{ wenn f linear}$$

$$\rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\overline{\alpha_j} w_i, \text{ wenn f antilinear}$$

Sequilinearform

Sequilinieraform $\theta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, wenn antilienar im ersten Arguemnt und linear im zweiten:
$\rightarrow \theta(\alpha u + \beta v, w) = \overline{\alpha}\theta(u,w) + \overline{\beta}\theta(v,w)$
$\rightarrow \theta(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\theta(u,v) + \beta\theta(u,w)$
$\rightarrow$ wenn $\theta(u,v) = \overline{\theta(v,u)}$ ist hermetisch
$\rightarrow$ wenn $\theta(u,v) = -\overline{\theta(v,u)}$ ist schiefhermetisch
Es ist äquivalent:
$\hookrightarrow \theta$ ist hermetisch.
$\hookrightarrow \theta(v,v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$

Definiteiten/Innenprodukt

$\rightarrow$ Die Definiteheitne sind genuaso definiert wie bei bilinearformen,
$(\theta(v,v) > 0 => positivdefinit)$
$\rightarrow$ Eine positiv definite hermetische Sequilinearform θ ist ein Innenprodukt auf Komplexen Vektorräumen.
Darstellung:
$\mathcal{M}_{B^*w}^{Bv}(\theta) = (\theta(v_i, v_j))_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Nützliches bsp.

v_i sind Basis in V

$$\theta(v,u) = \theta\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \sum_{i=1}^n \beta_j \theta(u_i, v_j) = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} \mathcal{M}_{B^*w}^{Bv}(\theta) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

konjungiert transponierte Matrix

Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times m} = (a_{ij})$ dann ist das konjungiert Transponierte $\overline{A}^T = A^H \in \mathbb{C}^{m \times n}$ hat die Einträge $\overline{a_{ji}}$
Das geht auch für Spalten $\mathbb{C}^m$, also:

$$\theta(u,v) = \alpha^H \mathcal{M}_{B^*w}^{Bv}(\theta)\beta$$

$\rightarrow$ Hermetisch, wenn $A = A^H$
$\rightarrow$ antihermetisch, wenn $A = -A^H$

Rechenregeln für konjugierte Transpo

$\rightarrow (A^H)^H = A$
$\rightarrow (A+B)^H = A^H + B^H$
$\rightarrow (\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$
$\rightarrow (AC)^H = C^H A^H$

Transformation

$\mathcal{M}_{\widehat{B}^*v}^{\widehat{B}v}(\theta) = \overline{\mathcal{T}_{\widehat{B}^*v}^{B^*v}} \mathcal{M}_{B^*v}^{Bv}(\theta) \mathcal{T}_{Bv}^{\widehat{B}v}$
$\rightarrow$ hermetisch kongruent $\widehat{A} = T^{-H} A T^{-1}$

Ähnlichkeiten

$\rightarrow$ Chauchy Schwarz is gleich
$\rightarrow$ Norm ist gleich definiert
$\rightarrow$ Satz von pythagoras gleich
$\rightarrow \theta(v,u) = 0$, dann orthogonal
$\rightarrow$normieren geht gleich
$\rightarrow$ gram schmidt geht genauso, projektion also auch, Zerlegung von V mittles PRojekttion auch.
$\rightarrow$ Achtung: reihenfolge der Argumente darf NICHT vertauscht werden

Unitäre Abbildungen

$\rightarrow$ copy paste mit T durch H ersetzt.
$\rightarrow$ Unitäre gruppe = copy paste von Orhtogonaler

Eigenwerte unitärer

Ist f unitär, ist der Betrag jedes Eigenwertes $|\lambda|$ = 1
Die eigenwerte selbstadjungierter sind reel

Riez-Iso- Komplex

$\rightarrow \Theta : V \ni u \mapsto \theta(u, \cdot) \in V^*$
$\rightarrow \theta(u,v) = \langle\Theta(u), v\rangle = \overline{\langle\Theta(v), u\rangle} = \theta^{-1}(\Theta(u), \Theta(v))$

Spektralsatz komplex

$\hookrightarrow f$ ist θ-normal.
$\hookrightarrow$ f ist orthonormal diagonalisierbar.
By Captain Joni.info