高等数学（上）补充专题

一、 数列极限

1.直接化简

例题 1 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]^n$$

解：原式 $=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\frac{-n}{n+1}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}$$

2.利用夹逼准则

例题 2 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1^2}}+\frac{n+2}{\sqrt{n^4+2^2}}+\frac{n+3}{\sqrt{n^4+3^2}}+\cdots+\frac{n+n}{\sqrt{n^4+n^2}}\right)$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}}[(n+1)+\cdots(n+n)]<\text{原式}<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+1^2}}[(n+1)+\cdots(n+n)]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+n^2}}<\text{原式}<\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+1^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4+1^2}}=\frac{3}{2}$$

3.转化为定积分

例题 3 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$$

4.数学归纳与单调有界

例题 4　设$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{2(1+a_n)}{2+a_n}(n=1,2,\cdots)$，证明该数列存在极限并求该极限值。

解：首先根据单调有界准则来证明该数列有极限：

用数学归纳法，证明其单调性：

$$a_1=1,a_2=\frac{2(1+a_1)}{2+a_1}=\frac{4}{3}>a_1$$

$n=1$时，$a_{n+1}>a_n$成立；设$n=k$时，$a_{n+1}>a_n$成立，则：

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{2(1+a_{k+1})}{2+a_{k+1}}-\frac{2(1+a_k)}{2+a_k}=\frac{2(a_{k+1}-a_k)}{(2+a_{k+1})(2+a_k)}>0$$

所以$n=k+1$时，$a_{n+1}>a_n$也成立，所以该数列单调递增。

然后证明其有界性：$a_1=1,a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{2+a_n}$,则$1<a_{n+1}<2$，数列有界。

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则由极限的唯一性可知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$，于是有：

$a=\dfrac{2(1+a)}{2+a}$，解得$a=\sqrt{2},a=-\sqrt{2}$(与$a_n>1$不符，舍去)

所以极限值$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$.

练习 1 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n^2+2}+\ldots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n}\right)$

$$n\cdot\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n+\frac{1}{i}}{n^2+i}\le n\cdot\frac{n+1}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{n+1}{n^2+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+\frac{1}{i}}{n^2+i}=1$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}+\dfrac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{n}+\dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)}{n}+\cdots\dfrac{\sin\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$

原式$=\displaystyle\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x=\cos 0-\cos 1$

练习 2 设$a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明该数列存在极限并求该极限值。

解：

$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+a_1}>\sqrt{2}$，猜想数列$\{a_n\}$是递增的，假设$a_k>a_{k-1}$ $(k\geqslant 2)$，则$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}>\sqrt{2+a_{k-1}}=a_k$，根据数学归纳法得证数列$\{a_n\}$递增；

猜想数列$\{a_n\}$有上界为 2，已知$a_1=\sqrt{2}<2$，假设$a_k\leqslant 2$ $(k\geqslant 2)$，则有$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\leqslant\sqrt{2+2}=2$，根据数学归纳法得证数列$a_n\leqslant 2$.

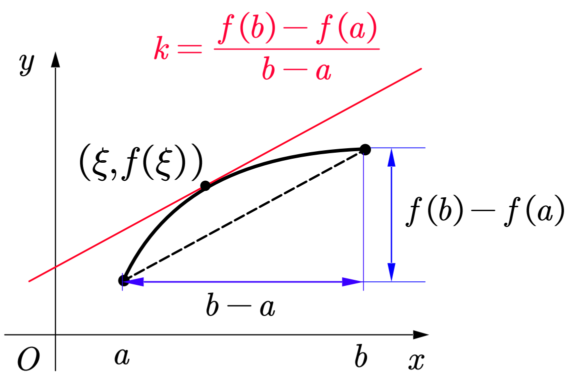
综上所述，数列$\{a_n\}$单调递增且有上界，则存在极限a，有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

所以：$a=\sqrt{2+a}$，解得极限$a=2$.

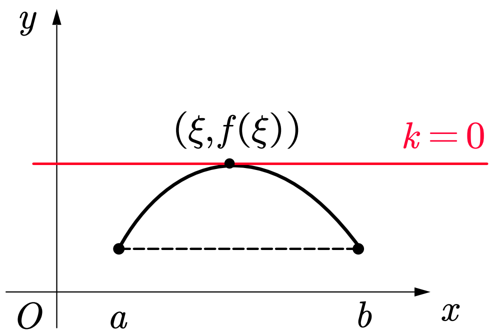
二、 中值定理

前提条件	定理名称	定理主要内容
函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导。	罗尔定理	如果 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 中存在一个 ξ，使得：$f'(\xi)=0$ **(一般用于证明等式)**
	拉格朗日中值定理	在 (a,b) 中存在一个 ξ，使得：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **（一般用于证明双侧不等式）**
	柯西中值定理（不常考）	$f(x)$、$g(x)$ 均满足前提条件，则在 (a,b) 中存在一个 ξ，使得：$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ （不常考）

从图像上理解罗尔/拉格朗日中值定理：



拉格朗日中值定理



罗尔中值定理

1.利用罗尔中值定理证明等式

第一步：将需要证明的等式中的“ξ”换为“x”，将右侧项移至左侧，设左侧的内容为 $g(x)$，则原题需要证明的结论转化为：需要证明 $g(x)=0$ 在 $(0,a)$ 内有实根；

第二步：需要构造辅助函数 $G(x)$，满足 $G'(x)=g(x)$，或者 $G'(x)$ 中含有 $g(x)$；

第三步：结合题目给出的其他条件，在区间 $[0,a]$ 上找到两点，使辅助函数 $G(x)$ 在这两点处函数值相等，结合罗尔定理，证明结论。

此类题目的难点无非两点：构造辅助函数，证明两处值相等。

1.构造辅助函数的方法：

a.常用辅助函数对应关系：

需要证明根存在的$g(x)$	辅助函数$G(x)$
$xf'(x)+f(x)$	$xf(x)$
$xf'(x)-f(x)$	$\frac{f(x)}{x}\quad(x\neq 0)$
$f'(x)+f(x)$	$e^{x}f(x)$
$f'(x)-f(x)$	$e^{-x}f(x)$

b.通过计算不定积分得到辅助函数：

将需要证明的等式写成下列格式：

$$f'(x)+g(x)f(x)=0$$

计算不定积分$\int g(x)\mathrm{d}x$，则辅助函数为$f(x)e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$.

c.观察题目条件中有无合适的格式.

2.找到两处辅助函数值相等

a. 区间的两端

b. 利用介质定理进行构造

c. 利用拉格朗日中值定理

例题 1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$bf(a)-af(b)=0$.请证明：至少存在一点$\xi\in(0,a)$，使得：$f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

第一步：设$g(x)=f(x)-xf'(x)$；

第二步：设$G(x)=\frac{f(x)}{x}$，有$G'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$；

第三步：由于$G(a)=\frac{f(a)}{a}$，$G(b)=\frac{f(b)}{b}$，由题意$bf(a)-af(b)=0$可知：$G(a)=G(b)$，由罗尔定理可知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$G'(\xi)=0$，即$g(\xi)=0$，$f(\xi)=\xi f'(\xi)$.

例题 2 设函数$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，试证明至少有一点存在$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\xi)\tan\xi+f(\xi)=0$.

第一步：设$g(x)=f(x)+f'(x)\tan x$；

第二步：设$G(x)=f(x)\cdot\sin x$，且有：

$G'(x)=f(x)\cos x+f'(x)\sin x=\cos x[f(x)+f'(x)\tan x]$；

第三步：由于$G(0)=G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，由罗尔定理可知，存在$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$G'(\xi)=0$，又有$\cos\xi\neq 0$，所以$f'(\xi)\tan\xi+f(\xi)=0$.

例题 3 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)\cdot f(b)>0$，$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，试证明至少有一点存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=f(\xi)$.

第一步：设$g(x)=f'(x)-f(x)$；

第二步：设$G(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，有$G'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$；

第三步：$G(a)=\mathrm{e}^{-a}f(a)$，$G\left(\frac{a+b}{2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，$G(b)=\mathrm{e}^{-b}f(b)$，

则有：$G(a)\cdot G\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，$G(b)\cdot G\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$

则于区间$\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$、$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$中分别存在$\xi_1$、$\xi_2$使得：$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$，根据罗尔中值定理，则在区间$(\xi_1,\xi_2)$中存在$\xi$使得：$G'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=f(\xi)$.

例题 4 设函数$f(x)$在闭区间$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|\leq 1$，又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，证明：在$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)+f''(\xi)=0.$$

证明：

令$g(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，则有$g'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$，$g(0)=4$.

由*Lagrange*中值定理，

$$\exists\xi_1\in(-2,0)，使得f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},$$

$$\exists\xi_2\in(0,2)，使得f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2},$$

由$|f(x)|\leq 1$，得$|f'(\xi_1)|\leq 1$，$|f'(\xi_2)|\leq 1$。

则$g(\xi_1)\leq 2$，$g(\xi_2)\leq 2$，又因为$g(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得$g(\xi)$为$g(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上的最大值，即$g(\xi)=M$，且$g(\xi)\geq 4$，

又$g(x)$在(ξ_1,ξ_2)上可导，故$g'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0$

若$f'(\xi)=0$，由$g(\xi)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\geq 4$知$|f(\xi)|\geq 2$

与条件$|f(x)|\leq 1$矛盾，故$f'(\xi)\neq 0$。即$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-2,2)$，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$。

2.利用拉格朗日中值定理证明不等式

例题 5 设$0<a<b$，证明：$\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

方法：在处理这类双侧不等式的时候，常常用到的就是拉格朗日中值定理。

第一步：需要找到一个辅助函数$F(x)$，它的导数$F'(x)$也应在不等式中出现：一般来说不等式的中间部分$F(b)-F(a)$，左右两侧分别含有$F'(a)$、$F'(b)$.

第二步：找到$F(x)$后，根据拉格朗日中值定理，$F'(\xi)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$，$a<\xi<b$.

第三步：证明题目给出的不等式。

证明：设$F(x)=\ln x$，则$F'(x)=\dfrac{1}{x}$.

根据拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$，即$\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

由于$a<\xi<b$，$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$.将$\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$代入，得：

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$$

进而证得：

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

3.利用拉格朗日中值定理求极限

例题 6 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

根据拉格朗日中值定理可知：$e^{b}-e^{a}=e^{\theta}(b-a)\quad(a<\theta<b)$，题目中套用该形式可知：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{\theta\to 0}e^{\theta}=1$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n^{2}\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$

根据拉格朗日中值定理可知：$\arctan b-\arctan a=\dfrac{1}{1+\theta^{2}}(b-a)\quad(a<\theta<b)$

$$\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\theta^{2}}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\theta^{2}}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

其中$\dfrac{1}{n+1}<\theta<\dfrac{1}{n}$，当$n\to\infty$时，$\theta\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}n^{2}\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0}}n^{2}\cdot\frac{1}{1+\theta^{2}}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \theta\to 0}}\frac{1}{1+\theta^{2}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1$$

三、 导数

1.利用泰勒公式求高阶导数

例题 1 求函数$f(x)=x^2\cdot\ln(1+x)$在$x=0$处的 5 阶导数$f^{(5)}(0)$

解：在$x\to 0$时：

已知：$\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$$f(x)=x^2\cdot\ln(1+x)=x^2\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)$$

$$=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^5+o(x^5)$$

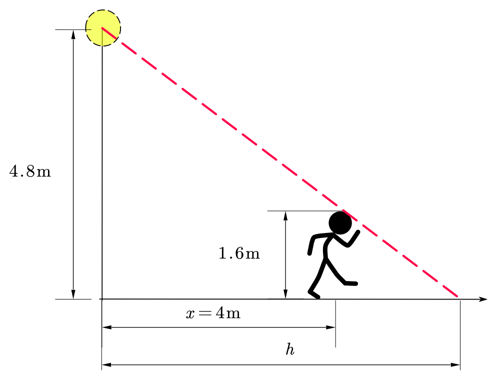
根据泰勒公式将$f(x)$在$x=0$处附近展开：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)\cdot x}{1!}+\frac{f''(0)\cdot x^2}{2!}+\frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!}+\frac{f^{(4)}(0)\cdot x^4}{4!}+\frac{f^{(5)}(0)\cdot x^5}{5!}+o(x^5)$$

所以：$\dfrac{1}{3}=\dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}$，$f^{(5)}(0)=\dfrac{5!}{3}=40$

2.相关变化率

例题 2 已知路灯高 4.8 米，行人身高 1.6 米，行人在距离路灯 4 米远处，以 2m/s 的速度沿着路灯指向行人的方向移动，请问行人影子最远点的移动速度。



人的位置为x，影子最远点的位置为h，则有：

$$\frac{h-x}{h}=\frac{1.6}{4.8},\quad h=\frac{3x}{2}$$

已知$\dfrac{dx}{dt}=2$，那么$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{dh}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{2}\cdot 2=3$(单位：m/s).

四、 特殊类型的积分

1.有理函数的积分

最简分式的四种形式：

$$\frac{A}{x-a} \qquad \frac{A}{(x-a)^k}$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

注意，其中$p^2-4q<0$，否则最简形式应是上面两行的类型.

例题 2 请将下列分式化为上述四种最简分式的类型：

$$\frac{x^4-3}{x^2-2x+2}$$

设其拆解后为：$\dfrac{x^4-3}{x^2-2x+2}=ax^2+bx+c+\dfrac{dx+e}{x^2-2x+2}$

$$ax^2+bx+c+\frac{dx+e}{x^2-2x+2}=\frac{ax^4+(b-2a)x^3+(2a-2b+c)x^2+(2b-2c+d)x+2c+e}{x^2-2x+2}$$

于是：

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ 2a-2b+c=0 \\ 2b-2c+d=0 \\ 2c+e=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \\ d=0 \\ e=-7 \end{cases}$$

所以：$\dfrac{x^4-3}{x^2-2x+2}=x^2+2x+2-\dfrac{7}{x^2-2x+2}$

例题 3 求解不定积分$\displaystyle\int \frac{x^5-1}{x^3+1}\mathrm{d}x$

$$\frac{x^5-1}{x^3+1}=\frac{x^5-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=ax^2+bx+c+\frac{d}{x+1}+\frac{ex+f}{x^2-x+1}$$

$$=x^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

$$原式=\int\left(x^2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$=\int x^2dx-\frac{2}{3}\int\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx$$

其中：

$$\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{3}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

综上，$原式=\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

2.三角有理式的积分

万能代换：令$\tan\frac{x}{2}=t$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

但同时，若积分式$R(\sin x,\cos x)$存在下列条件：

（1）$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，凑出$\sin x dx=-d\cos x$；

（2）$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，凑出$\cos x dx=d\sin x$；

（3）$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，凑出$\sec^2x dx=d\tan x$；

例题 4 求解下列不定积分

（1）$\int\sin^3x\cos^2x dx$

$$原式=-\int\sin^2x\cos^2x d\cos x=-\int(1-\cos^2x)\cos^2x d\cos x$$

$$=\int(t^4-t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}\cos^5x-\frac{1}{3}\cos^3x+C$$

（2）$\int\frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx$

$$原式=\int\frac{1}{2\sin x\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{2\sin^2 x\cos x+2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{2(1-\cos^2 x)\cos x+2(1-\cos^2 x)}=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-t)(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{(1-t)}+\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{8}\left[-\ln(1-t)-\frac{2}{1+t}+\ln(1+t)\right]+C$$

$$=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}-\ln(1+\cos x)\right]+C$$

（3）$\int\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$

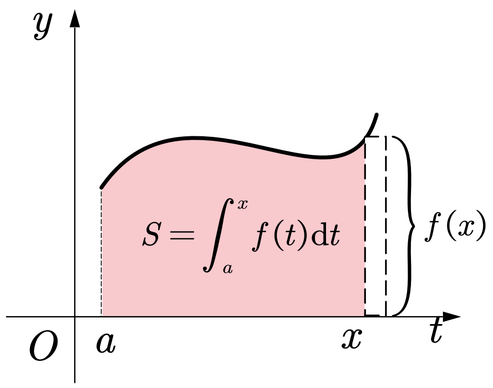
$$原式=\int\frac{1}{1+2\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{\sec^2 x+2\tan x}\mathrm{d}\tan x$$

$$=\int\frac{1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+t}+C$$

$$=-\frac{1}{1+\tan x}+C$$

3.变上限积分



例题 1 求下列不同函数$S(x)$所对应的$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$.

（1）$S(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ $\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2}$

（2）$S(x)=\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$ $\qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x$

（3） $S(x)=\int_{\sin x}^{x^2} t^2 \mathrm{d} t$

$$S(x)=\int_{\sin x}^{0} t^2 \mathrm{d} t+\int_{0}^{x^2} t^2 \mathrm{d} t=-\int_{0}^{\sin x} t^2 \mathrm{d} t+\int_{0}^{x^2} t^2 \mathrm{d} t$$

$$\frac{\mathrm{d} S}{\mathrm{d} x}=-\sin^2 x \cdot \cos x+x^4 \cdot 2x=-\sin^2 x \cdot \cos x+2x^5$$

（4） $S(x)=\int_{0}^{x} \sin (t+x) \mathrm{d} t$

换元，令 $n=t+x$，$\mathrm{d}n=\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_{x}^{2x} \sin (n) \mathrm{d} n \\ &= \int_{x}^{0} \sin (n) \mathrm{d} n+\int_{0}^{2x} \sin (n) \mathrm{d} n \\ &= -\int_{0}^{x} \sin (n) \mathrm{d} n+\int_{0}^{2x} \sin (n) \mathrm{d} n \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d} S}{\mathrm{d} x}=-\sin x+2 \sin 2x$$