二、实数集的确界

1．确界的概念

定义：实数集 A 的最小上界称为**上确界**，记作 $\sup A$；实数集 A 的最大下界称为**下确界**，记作 $\inf A$.

Note：确界的唯一性（确界的确定性、界的不确定性）；确界与最值的关系.

2．确界的等价定义

定理：$M=\sup A \Leftrightarrow$（1）任给 $x\in A$，都有 $x\leqslant M$；（2）任给 $\varepsilon>0$，都存在 $x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon>M-\varepsilon$；

$m=\inf A \Leftrightarrow$（1）任给 $x\in A$，都有 $x\geqslant m$；（2）任给 $\varepsilon>0$，都存在 $x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon<m+\varepsilon$.

例：证明 $\inf\limits_{n\in Z^+}\left\{\dfrac{1}{n}\right\}=0$.

证：$\forall\, n\in Z^+$，都有 $\dfrac{1}{n}>0$，所以 0 是数集 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 的一个下界.

对于 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则 $n_0\in Z^+$，$n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以

$$\frac{1}{n_0}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon .$$

所以 0 是数集 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 的最大下界．故 $\inf\limits_{n\in Z^+}\left\{\dfrac{1}{n}\right\}=0$.

***例 2：**设函数 $f(x)$ 在 D 上有定义且有界，证明 $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.（书上习题）*

***证：**记 $m=\inf\{f(x)\}$，则 $\forall\, x\in D$，都有*

$$f(x)\geqslant m ,$$

且对于 $\forall\,\varepsilon>0$，都存在 $x_\varepsilon\in D$，使得

$$f(x_\varepsilon)<m+\varepsilon .$$

所以 $-f(x)\leqslant -m$，且对于 $\forall\,\varepsilon>0$，都存在 $x_\varepsilon\in D$，使得

$$-f(x_\varepsilon) > (-m) - \varepsilon .$$

故 $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\} = -m = -\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.

练习题：设 A,B 为非空有界集，证明 $A\cup B$ 有界，且 $\inf A\cup B = \min\{\inf A,\inf B\}$.

三、确界存在公理（定理）

定理：若实数集 A 有上界，则其在实数范围内有上确界；若实数集 A 有下界，则其在实数范围内有下确界.

Note：确界存在定理、单调有界收敛定理、区间套定理是实数连续性常见的三个等价定理.