第 1 章 实数与函数

§ 1.1 实数集的界与确界

一、 实数集的界

引例：某班同学的身高集合与自然数集合的不同.

1. 界的概念

定义：设 A 是一个非空实数集，若存在 $M>0$，使得对任意的 $x \in A$，都有 $|x| \leqslant M$，则称实数集 A 有界，M 称为 A 的**界**； 若存在 $M \in \mathrm{R}$，使得对任意的 $x \in A$，都有 $x \leqslant M$，则称实数集 A 有上界，M 称为 A 的**上界**； 若存在 $M \in \mathrm{R}$，使得对任意的 $x \in A$，都有 $x \geqslant M$，则称实数集 A 有下界，M 称为 A 的**下界.**

Note：界的不唯一性.

2. 界与上、下界之间的关系

定理：实数集 A 有界的充分必要条件是其既有上界、又有下界.

证明：必要性证明. 设 M 是实数集 A 的界，则

$$-M \leqslant x \leqslant M, \quad \forall x \in A.$$

所以实数集 A 既有上界、又有下界.

充分性证明. 设 M_1， M_2 分别是实数集 A 的下界和上界，则

$$M_1 \leqslant x \leqslant M_2, \quad \forall x \in A.$$

取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则

$$-M \leqslant x \leqslant M, \quad \forall x \in A.$$

所以实数集 A 有界.

3. 实数集 A 无界的严格描述

实数集 A 无界 $\Leftrightarrow$ 任给 $M>0$，总存在 $x_M \in A$，使得 $|x_M|>M$.

Note：实数集 A 无上界、无下界的严格描述.

例 1：证明正整数集 Z^{+} 无上界.

证明：任给 $M>0$，取 $n_0=[M]+1$，则 $n_0\in Z^{+}$，且 $n_0>M$.

例 2：证明数集 $\left\{n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}(n=1,2,3,\cdots)$ 无界.

证明：任给 $M>0$，取 $n_0=2[M]+1$，则

$$\left|a_{n_0}\right|=(2[M]+1)\left|\sin\frac{2[M]+1}{2}\pi\right|=2[M]+1>M.$$

Note：取 $n_0=4[M]+1$ 可以说明无上界；取 $n_0=4[M]+3$ 可以说明无下界.

练习题：证明数集 $A=\{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\mid x\neq0,x\in\mathrm{R}\}$ 无界.

因为任给 $M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{2[M]\pi+\frac{\pi}{2}}$，则 $\frac{1}{x_0}\sin\frac{1}{x_0}=2[M]\pi+\frac{\pi}{2}>M$.