§1.3 函数的运算

一、函数的四则运算

定义：设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域分别为 D_1 和 D_2，且 $D=D_1\bigcap D_2$ 非空．定义

（1） 加法 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$， $x\in D$；

（2） 数乘 $(kf)(x)=kf(x)$， $k\in \mathrm{R}$， $x\in D_1$；

（3） 乘法 $(fg)(x)=f(x)g(x)$， $x\in D$；

（4） 除法 $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}\,(g(x)\neq 0)$， $x\in D$.

Note：定义域，例如 $f(x)=x+\sqrt{x}$， $g(x)=x-\sqrt{x}$，则 $f(x)+g(x)=2x\ \ (x\geqslant 0)$.

二、函数的复合运算（复合函数）

定义：设 f 和 g 是分别定义在 D_f 和 D_g 上的两个函数．若 $Z_g\subset D_f$，则对任意的 $x\in D_g$，存在唯一的 $g(x)\in Z_g\subset D_f$，进而存在唯一的 $f(g(x))\in Z_f$．这个从 D_g 到 Z_f 的对应关系，称为函数 f 与 g 的复合，记作 $f\circ g$，即 $f\circ g(x)=f(g(x))$.

Note：两个函数能复合的条件是 $Z_g\bigcap D_f\neq\varnothing$. 例如：$y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 可以得到复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}\ \ (|x|\leqslant 1)$；$y=\arcsin u$ 与 $u=2^x+1$ 则不能做复合运算．

例：已知 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f\circ g(x)$ 的表达式．

解：$f\circ g(x)=\begin{cases}4-g^2(x), & |g(x)|\leqslant 2,\\ 0, & |g(x)|>2\end{cases}=\begin{cases}4, & |x|<1,\\ 3, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$

Problem：函数复合的运算律

交换律：$f\circ g=g\circ f$ ×

分配律：$f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$ ×；$(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$ √

$f\circ(g\,h)=(f\circ g)(f\circ h)$ ×；$(g\,h)\circ f=(g\circ f)(h\circ f)$ √

结合律：$f\circ g\circ h=f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ √