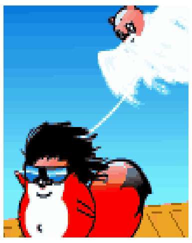
# 人教A版高中数学选修4-1课后习题答案



**习题 1.1（第 5 页）**

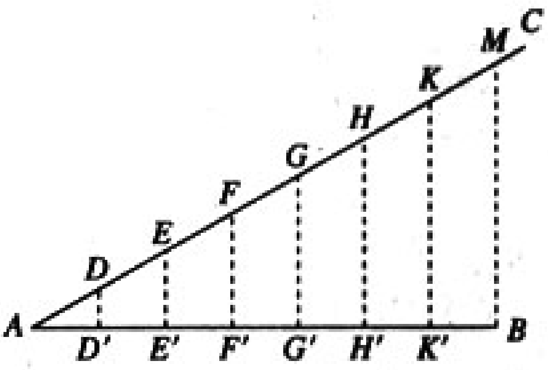
1. 设 $AB$ 的长为 6 厘米.

(1) 过点 $A$ 作射线 $AC$；

(2) 在射线 $AC$ 上以适当的长度顺次截取 $AD=DE=EF=FG=GH=HK=KM$；

(3) 连结 $BM$；

(4) 过 $D$、$E$、$F$、$G$、$H$、$K$ 作 $BM$ 的平行线，分别交 $AB$ 于点 $D'$、$E'$、$F'$、$G'$、$H'$、$K'$. 则 $D'$、$E'$、$F'$、$G'$、$H'$、$K'$ 即为线段 $AB$ 的 7 等分点.




（第 1 题）

2. 猜想：$BE=EF=FD$.

证明如图，∵ $M$ 是 $AB$ 的中点，$N$ 是 $DC$ 的中点，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AM \parallel CN$，且 $AM=CN$.

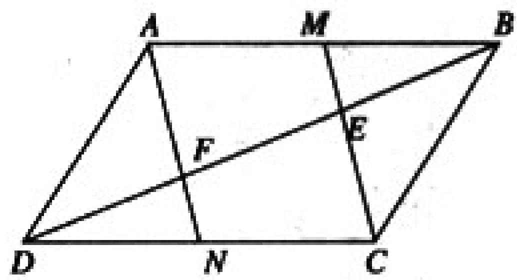
∴ 四边形 $ANCM$ 是平行四边形.

∴ $MC \parallel AN$.

∴ $ME$ 平分 $BF$，即 $BE=EF$.

同理可证 $FD=EF$.

∴ $BE=EF=FD$.




（第 2 题）

3. 如图，∵ $E$、$F$ 分别是梯形 $ABCD$ 中 $AB$、$DC$ 边上的中点，

∴ $EF \parallel AD$，$EF \parallel BC$.

∴ $G$、$H$ 分别是梯形对角线 $BD$、$AC$ 的中点.

∴ $EG=\frac{1}{2}AD$，$FH=\frac{1}{2}AD$，$EH=\frac{1}{2}BC$，$FG=\frac{1}{2}BC$.

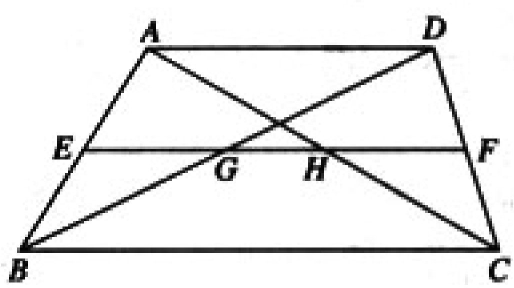
又∵ $GH=EH-EG$，$GH=FG-FH$，

∴ $2GH=EH+FG-(EG+FH)$

$$=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}BC-\left(\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}AD\right)$$

$$=BC-AD.$$

∴ $GH=\frac{1}{2}(BC-AD)$.




（第 3 题）

**习题 1.2（第 9 页）**

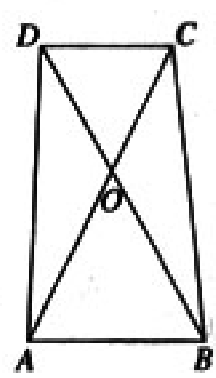
1. 如图，由本节例 3 知，$\triangle OCD$ 与 $\triangle OAB$ 的三边对应成比例.

∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OD}$.

∵ $CD=6$，$AB=8$，$BD=15$，

∴ $\frac{8}{6}=\frac{OB}{15-OB}$.

解得 $OB=\frac{60}{7}$.




（第 1 题）

$\therefore OD=15-\frac{60}{7}=\frac{45}{7}$.

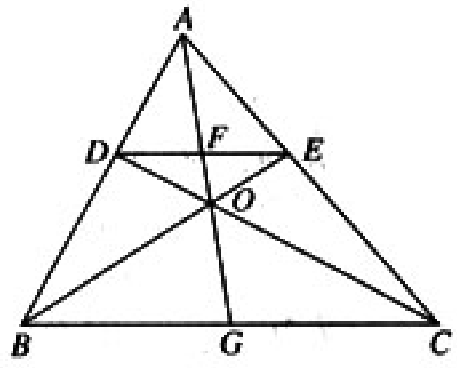
2. 如图，

(1) $\because$ $DE /\!/ BC$，

$\therefore$ $\frac{DF}{BG}=\frac{AF}{AG}$，$\frac{FE}{GC}=\frac{AF}{AG}$.

$\therefore$ $\frac{DF}{BG}=\frac{FE}{GC}$.

$\therefore$ $\frac{BG}{GC}=\frac{DF}{FE}$. ①



（第 2 题）

(2) $\because$ $DE /\!/ BC$，

$\therefore$ $\frac{FE}{BG}=\frac{OF}{OG}$，$\frac{DF}{GC}=\frac{OF}{OG}$.

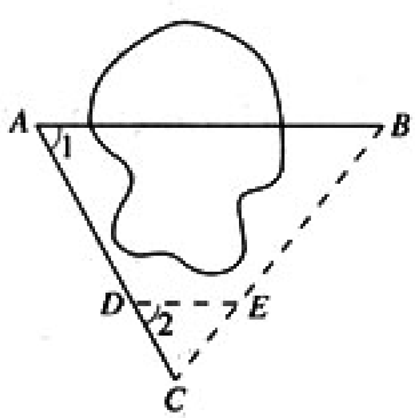
$\therefore$ $\frac{FE}{BG}=\frac{DF}{GC}$，即 $\frac{BG}{GC}=\frac{FE}{DF}$. ②

由①、②得 $\frac{BG}{GC}=\frac{GC}{BG}$，即 $BG^2=GC^2$.

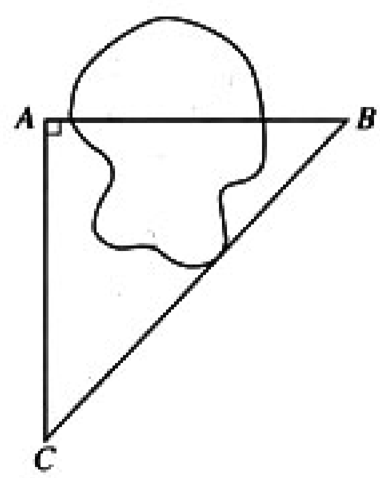
$\therefore$ $BG=GC$.

3. **方案 1** 如图，在 $AB$ 的一侧选择一个点 $C$，连结 $AC$，测量出 $AC$ 的长．在 $AC$ 上选一点 $D$，过点 $D$ 作 $DE /\!/ AB$（即$\angle 1=\angle 2$），再测量出 $CD$、$DE$ 的长．此时，$\triangle CDE$ 与$\triangle CAB$ 的三边对应成比例，所以由 $\frac{CD}{AC}=\frac{DE}{AB}$，就可以计算出 $AB$ 的距离．

**方案 2** 如图，在 $AB$ 的一侧选择一个点 $C$，使 $AC\perp AB$．同时保证 $BC$ 的距离能够测量．测出 $AC$、$BC$ 的长度，由勾股定理即可算出 $AB$ 的长．



方案 1



方案 2

（第 3 题）

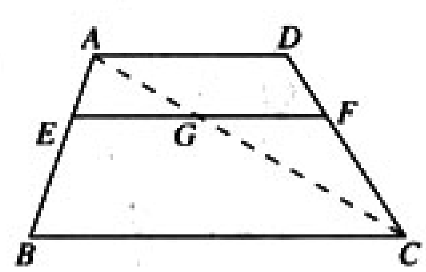
**说明** 此题是一个开放性问题，测量 $AB$ 长度的方案还有许多（如取$\angle ACB$ 为特殊角等），因此，可以鼓励学生去积极探索不同方案．

4. (1) 如图，连接 $AC$，$\because$ $EF /\!/ AD /\!/ BC$，

$\therefore$ $\frac{EG}{BC}=\frac{AE}{AB}$，即 $EG=\frac{AE}{AB}\cdot BC$；

$\frac{GF}{AD}=\frac{CF}{CD}$，即 $GF=\frac{CF}{CD}\cdot AD$.

$\because$ $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{2}$，



（第 4 题）

$\therefore\quad \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{1}{3}$. 而$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{DF}{CD}$,

$\therefore\quad \dfrac{DF}{CD}=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore\quad \dfrac{CF}{CD}=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore\quad EF=EG+GF$

$=\dfrac{AE}{AB}\cdot BC+\dfrac{CF}{CD}\cdot AD$

$=\dfrac{1}{3}BC+\dfrac{2}{3}AD$.

$\therefore\quad 3EF=BC+2AD$.

(2) 如果$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{2}{3}$，那么$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2}{5}$.

同理可推得 $\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{3}{5}$.

$\therefore\quad EF=EG+GF$

$=\dfrac{AE}{AB}\cdot BC+\dfrac{CF}{CD}\cdot AD$

$=\dfrac{2}{5}BC+\dfrac{3}{5}AD$.

$\therefore\quad 5EF=2BC+3AD$.

(3) 如果$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{m}{n}$，那么$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{m}{m+n}$.

同理可推得 $\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{n}{m+n}$.

$\therefore\quad EF=EG+GF$

$=\dfrac{m}{m+n}BC+\dfrac{n}{m+n}AD$.

$\therefore\quad (m+n)EF=mBC+nAD$.

**习题 1.3（第 19 页）**

1. 如图，连接 $BE$、$CD$.

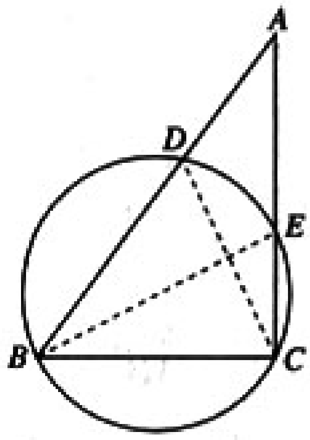
$\because\quad \angle ABE$ 和$\angle ACD$ 是同弧上的圆周角，

$\therefore\quad \angle ABE=\angle ACD$.

又$\because\quad \angle A=\angle A$,

$\therefore\quad \triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

$\therefore\quad \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$.



（第 1 题）

2. 如图，(1) 在$\triangle ABE$ 和$\triangle ACD$ 中，

$\because\quad \angle BAE=\angle CAD$，$\angle ABE=\angle ACD$,

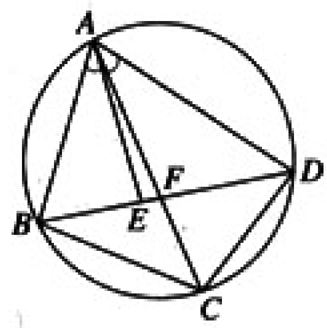
$\therefore\quad \triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

$\therefore\quad \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CD}$.

$\therefore\quad AB\cdot CD=AC\cdot BE$.

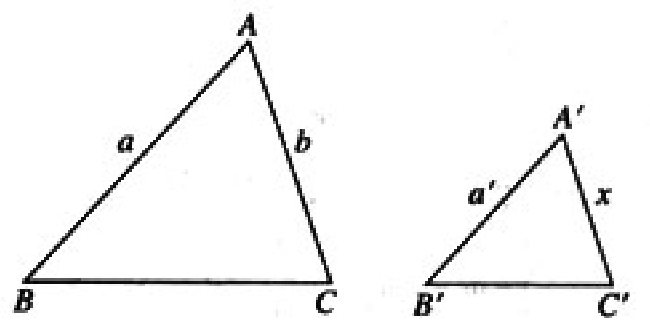
(2) 在$\triangle ABC$ 和$\triangle AED$ 中，

$\because$ $\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC$（或$\angle BAC=\angle BAE-\angle EAC$），
$\angle EAD=\angle CAD+\angle EAC$（或$\angle EAD=\angle CAD-\angle EAC$），
又$\because$ $\angle BAE=\angle CAD$，
$\therefore$ $\angle BAC=\angle EAD$.
又$\because$ $\angle BCA=\angle EDA$，
$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle AED$.
$\therefore$ $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{ED}$.
$\therefore$ $AC\cdot ED=AD\cdot BC$.



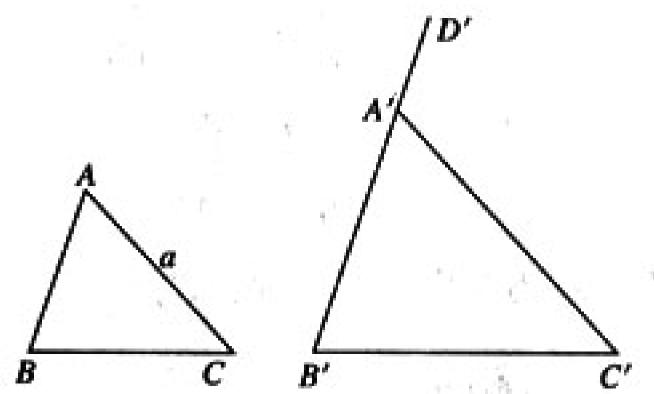
（第 2 题）

3. 如图，设 $A'C'=x$. 要使$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，只需$\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{x}$即可.
$\because$ $\angle A=\angle A'$，
$\therefore$ 当 $x=\dfrac{a'b}{a}$时，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.



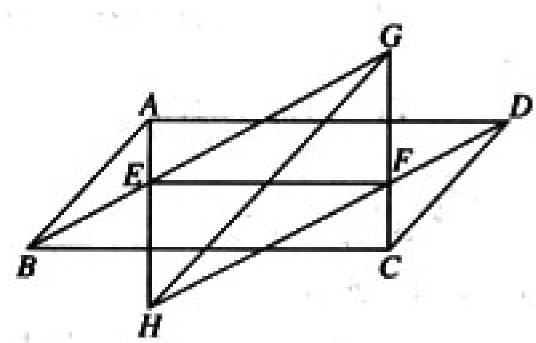
（第 3 题）

4. 作法：
(1) 作线段 $B'C'$，使 $B'C'=\dfrac{3}{2}BC$；
(2) 以 $B'$ 为顶点，$B'C'$为始边作$\angle D'B'C'=\angle B$；
(3) 在 $B'D'$ 上截取线段 $B'A'$，使 $B'A'=\dfrac{3}{2}AB$；
(4) 连接 $A'C'$，则$\triangle A'B'C'$为所作三角形.



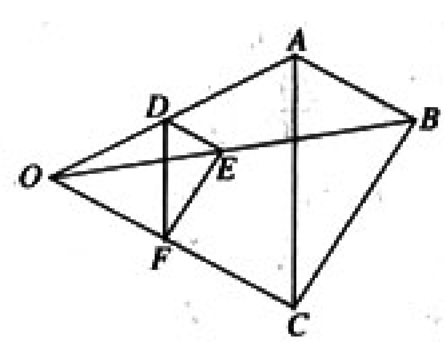
（第 4 题）

5. 如图，$\because$ $EF/\!/AD/\!/BC$，
$\therefore$ $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{EF}{BC}$，$\dfrac{HE}{HA}=\dfrac{EF}{AD}$.
$\because$ $AD=BC$，
$\therefore$ $\dfrac{GE}{GB}=\dfrac{HE}{HA}$.
$\therefore$ $\dfrac{GE}{BE}=\dfrac{HE}{AE}$.
又$\because$ $\angle AEB=\angle HEG$，
$\therefore$ $\triangle AEB\backsim\triangle HEG$.
$\therefore$ $\angle ABE=\angle HGE$.
$\therefore$ $GH/\!/AB$.



（第 5 题）

6. $\because$ $DE/\!/AB$，
$\therefore$ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OE}{OB}$. ①
又$\because$ $EF/\!/BC$，
$\therefore$ $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OF}{OC}$. ②
$\therefore$ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}$.
由①、②知 $\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OF}{OC}$，而$\angle FOD=\angle COA$，



（第 6 题）

∴　$\triangle FOD \backsim \triangle COA$.

∴　$\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{OD}{OA}$.

∴　在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，有$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}$.

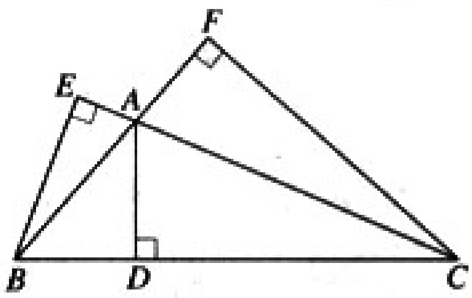
∴　$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

7. 在$\triangle ACD$和$\triangle BCE$中，

∵　$\angle ADC=\angle BEC=90°$，$\angle ACD=\angle BCE$，

∴　$\triangle ACD \backsim \triangle BCE$.

∴　$\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{AC}{BC}$，即 $AD \cdot BC=BE \cdot AC$.




（第 7 题）

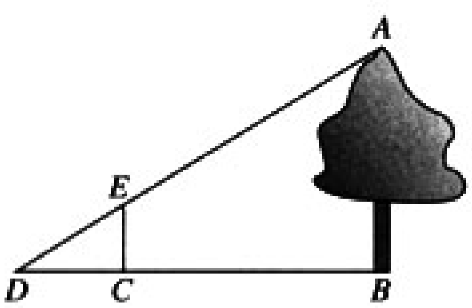
8. **方案 1**　（1）在地面适当位置选取一点 $C$，连结 $BC$，测量出 $BC$ 的距离；

（2）在点 $B$ 竖立一根垂直于地面的标尺杆；

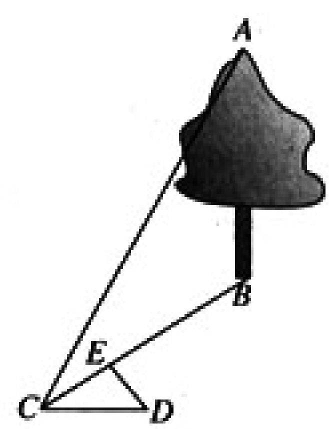
（3）在 $BC$ 的延长线上取一点 $D$，使点 $D$、标尺杆的顶点 $E$ 和树尖在一条直线上；

（4）测量 $CD$ 的距离.

在这个方案中，由于$\triangle DCE \backsim \triangle DBA$，而 $BC$、$CD$、$CE$ 的长可以由测量而得，所以可以求出树高 $AB$ 的长.（没有考虑测量仪的脚架高）




（第 8 题方案 1）




（第 8 题方案 2）

**方案 2**　（1）在地面上选取一点 $C$，连结 $BC$；

（2）测出$\angle BCA$；

（3）在地面上选取一点 $D$，使$\angle DCB=\angle BCA$；

（4）过 $D$ 作 $BC$ 的垂线，交 $BC$ 于 $E$；

（5）测量 $DE$、$CE$、$BC$ 的长，由这三个量可以求得 $AB$ 的长.

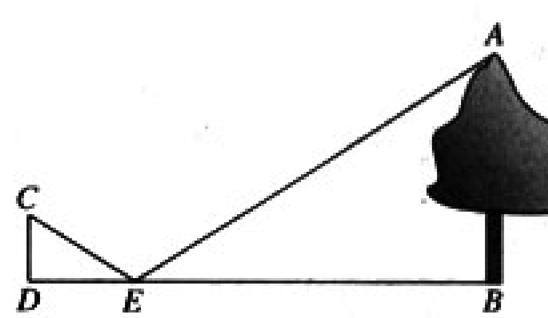
因为按方案 2 的实施，易知 $Rt\triangle ABC \backsim Rt\triangle DEC$.（没有考虑测量仪的脚架高）

**方案 3**　（1）把一面镜子放在离树 $a$ 米的点 $E$；

（2）一个人望着镜子后退到点 $D$，这时恰好在镜子里望到树梢点 $A$；

（3）量得 $ED$ 为 $b$ 米，人的眼睛距地面的高度为 $c$ 米，即可求 $AB$ 的长.

因为根据光学中的反射定律，知$\angle AEB=\angle CED$，所以$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$.




（第 8 题方案 3）

9. 如图，设$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 $k$.

(1) 设 $AD$ 是 $\triangle ABC$ 中 $BC$ 边上的中线，$A'D'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的中线.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

又∵ $D$、$D'$ 分别为 $BC$、$B'C'$ 的中点，

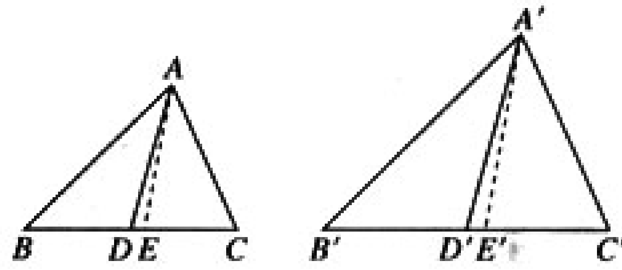
∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{2BD}{2B'D'}=\dfrac{BD}{B'D'}$.

又∵ $\angle B=\angle B'$，

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

其余两组对应中线之比同理可证.



（第 9 题）

(2) 设 $AE$、$A'E'$ 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 中 $\angle A$ 和 $\angle A'$ 的内角平分线.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

∴ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

∴ $\angle BAE=\angle B'A'E$.

∴ $\triangle ABE \backsim \triangle A'B'E'$.

∴ $\dfrac{AE}{A'E'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

同理可证，其余两个对应角的内角平分线之比也等于相似比.

10. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CDF$ 中，

∵ $\angle DCF=\angle EAF$，

$\angle DFC=\angle EFA$，

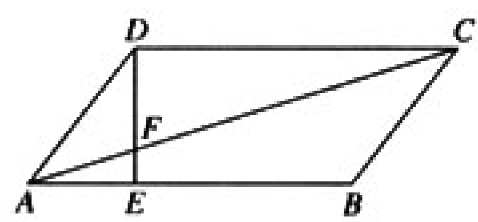
∴ $\triangle AEF \backsim \triangle CDF$.

∴ $\dfrac{\triangle AEF\text{ 的周长}}{\triangle CDF\text{ 的周长}}=\dfrac{AE}{CD}=\dfrac{1}{3}$.

∴ $\dfrac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle CDF}}=k^2=\dfrac{1}{9}$.

而 $S_{\triangle AEF}=6$，

∴ $S_{\triangle CDF}=9S_{\triangle AEF}=9\times 6=54(\text{cm}^2)$.



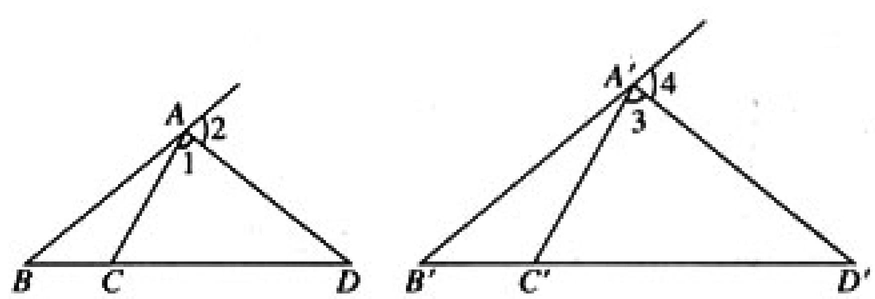
（第 10 题）

11. 问题 1：相似三角形对应角的外角平分线之比等于相似比.

证明：设 $\triangle ABC \backsim A'B'C'$. $AD$、$A'D'$ 分别是 $\angle A$，$\angle A'$ 的外角平分线，分别交 $BC$、$B'C'$ 的延长线于 $D$、$D'$.

∵ $\triangle ABC \backsim A'B'C'$，

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.



（第 11 题图 1）

又∵ $\angle BAC+\angle 1+\angle 2=\angle B'A'C'+\angle 3+\angle 4$，

而 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

∴ $\angle 1=\angle 3$.

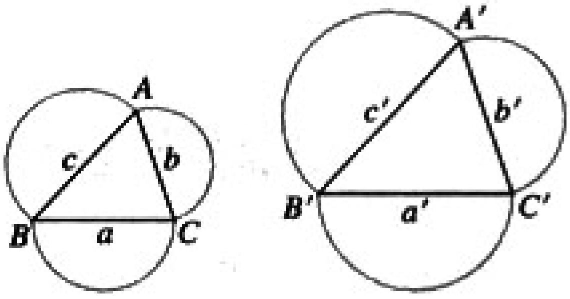
∴ $\angle BAD=B'A'D'$.

又∵ $\angle B=\angle B'$，

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$.

问题 2　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，以$\triangle ABC$的三条边为直径，分别向$\triangle ABC$外作半圆（如图），同样，以$\triangle A'B'C'$的三条边为直径，分别向$\triangle A'B'C'$外作半圆．则



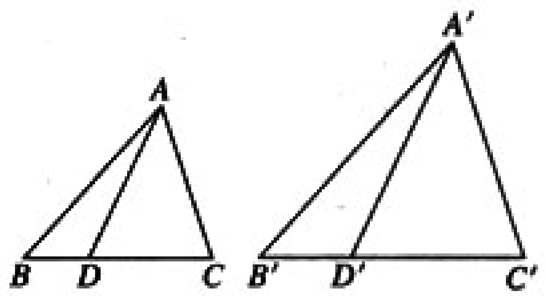

两个三角形中三个对应半圆的面积之比等于相似比的平方.

说明：将三个半圆改为三个等边三角形、正方形、正多边形等，可以得到更多的命题.

问题 3

如图，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 $k$，$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{B'D'}{C'D'}$．则 $\dfrac{AD}{A'D'}=k$.

说明：该题是一个开放型问题，可以由联想、类比等方法得到许多新问题．在教学中应引导、启发和鼓励学生去探究、猜想.




（第 11 题图 3）

**习题 1.4（第 22 页）**

1. ∵ $\triangle ABC$ 是直角三角形，$CD$ 是 $AB$ 边上的高，

∴ $CD^2=AD\cdot BD$.

∴ $60^2=25\times BD$.

∴ $BD=144$.

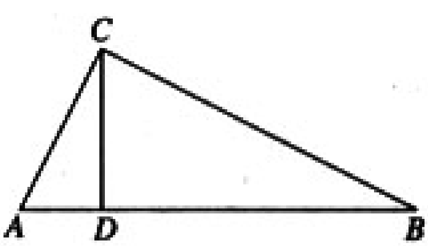
∴ $AB=AD+BD=25+144=169$.

又∵ $AC^2=AD\cdot AB$，

∴ $AC=\sqrt{25\times169}=65$.

又∵ $BC^2=BD\cdot AB$，

∴ $BC=\sqrt{144\times169}=156$.




（第 1 题）

2. ∵ $CD\perp AB$，∴ $\triangle ACD$ 是直角三角形.

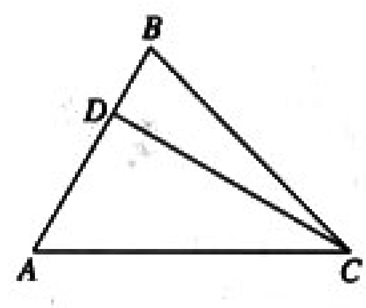
又∵ $\angle BAC=60°$，

∴ $\angle ACD=30°$.

∴ $AD=\dfrac{1}{2}AC$.

又∵ $BD=AB-AD$，

∴ $BD=AB-\dfrac{1}{2}AC$.



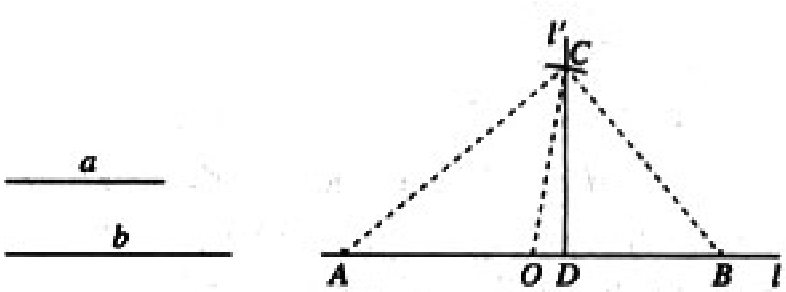

（第 2 题）

3. 作法：

(1) 作一直线 $l$，在 $l$ 上截取线段 $AD=b$，$BD=a$；

(2) 过 $D$ 作 $AB$ 的垂线 $l'$；

(3) 以 $AB$ 的中点 $O$ 为圆心，$OB$ 的长为半径作弧，与 $l'$ 交于点 $C$，则 $CD$ 即为所求.




（第 3 题）

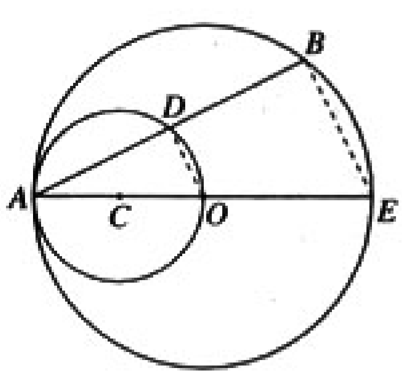
证明：连结 $AC$、$BC$、$OC$．∵ $OC=OB=\dfrac{1}{2}AB$，

∴ $\triangle ABC$ 为直角三角形．∵ $CD\perp AB$，∴ $CD^2=AD\cdot BD=ab$．∴ $CD$ 为线段 $a$ 和 $b$ 的比例中项.

| 问　　题 | 设计意图 | 师　生　活　动 |
| --- | --- | --- |
| 2. 你能发现第27页"探究"中这些四边形有什么共同的特征吗？ | 让学生通过观察、测量的方法去归纳图形中四边形的共同特征，从而猜想出圆内接四边形的性质定理，这样，既可以使学生体验探究数学问题的过程，又可以培养学生的观察力和概括能力. | 师：我们发现并不是所有的四边形都存在外接圆．现在我们反过来思考问题：如果一个圆有内接四边形，那么这样的四边形有什么特征？<br>教师展示一组图形.<br>师：同学们可以从四边形的边或角之间的关系去考虑.<br>学生讨论.<br>师：同学们可以用三角板、量角器对图形进行测量.<br>学生活动.<br>生：我们发现，圆内接四边形的对角是互补的. |
| 3. 定理1：圆内接四边形的对角互补.<br>定理2：圆内接四边形的外角等于它的内角的对角. | 从猜想转向证明，使学生体会数学的严谨性，同时发展学生的逻辑思维能力. | 教师引导学生探索定理证明的思路.<br>师：我们可以看出，之所以$\angle A+\angle C=180^\circ$，是因为$\angle A$所对的弧和$\angle B$所对的弧刚好组成圆周，是$360^\circ$的弧．因此，连结$OA$、$OC$，利用圆心角$\alpha$、$\beta$即可沟通$\angle A$和$\angle C$.<br>学生完成定理的证明. |
| 4. 定理1的逆命题成立吗？即：四边形$ABCD$中，$\angle B+\angle D=180^\circ$，则$A$、$B$、$C$、$D$四点共圆吗？ | 训练学生逆向思维的意识. | 师：定理1的逆命题成立吗？请同学们写出定理1的逆命题，并思考应该如何证明. |
| 5. 探究圆内接四边形判定定理的证明思路. | 使学生体会分类讨论思想，掌握反证法. | 师：我们知道，三点可以确定一个圆，不妨设过$A$、$B$、$C$三点的圆为$\odot O$，那么我们只需证明$\odot O$必然经过$D$点即可．点$D$与$\odot O$的位置关系有且只有三种情形：点$D$在圆外；点$D$在圆内；点$D$在圆上．如果能证明前面两种情况不可能成立，那么点$D$就只能在圆上．而要证明"不可能"性问题，常常采用反证法.<br>师生分析思路，学生证明过程. |
| 6. 定理2的逆命题成立吗？ | | 师：定理2的逆命题证明不需要按判定定理的证明方法去考虑，而可以直接利用判定定理将其推出，即定理2的逆命题可作为判定定理的推论．请同学们完成证明. |
| 7. 例1和例2. | 培养学生解决问题的能力.<br>加深对定理的理解. | 师生共同进行证明思路分析.<br>教师指出当两个圆相交时，一般可以考虑连结两圆的交点作辅助线. |
| 8. 展示本节课的知识点. | 使知识系统化. | 教师从知识和方法两个维度进行小结. |

注：如果本节课还有时间，可以补充"编写意图与教学建议"中的例题.

## 五、习题解答



（第1题）

**习题2.1（第26页）**

1. 如图，设$AO$的延长线与$\odot O$相交于$E$，则$AE$是$\odot O$的直径．连接$DO$、$BE$.

$\because$ $AO$是$\odot O$的直径，$AE$是$\odot O$的直径，

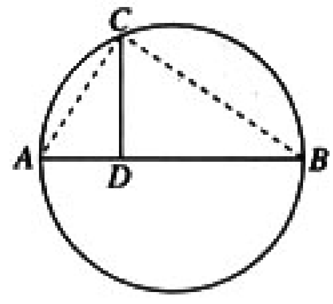
$\therefore$ $\angle ADO=\angle ABE=90^\circ$.

∴ $DO // BE$.

又∴ $O$ 是 $AE$ 的中点，

∴ $AD=BD$，即点 $D$ 是 $AB$ 的中点.

2. 连接 $BC$、$AC$.




（第 2 题）

∵ $AB$ 是圆的直径，

∴ $\angle ACB$ 是直角.

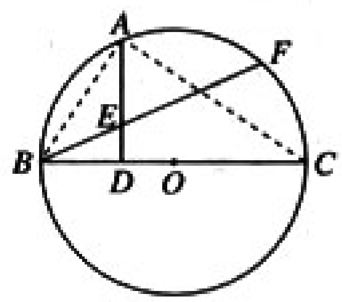
由射影定理得 $CD^2=AD \cdot BD$，

即 $CD^2=AD(AB-AD)$.

∴ $6^2=AD(13-AD)=13AD-AD^2$.

解得 $AD=4$ 或 $AD=9$.

3. 如图，连接 $AB$、$AC$.




（第 3 题）

∵ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AF}$，

∴ $\angle ABE=\angle ACD$.

又∵ $BC$ 是$\odot O$ 的直径，

∴ $\angle BAC=90°$.

∴ $\angle BAE=90°-\angle DAC$.

又∵ $AD \perp BC$，

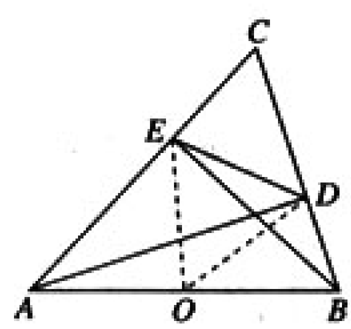
∴ $\angle ACD=90°-\angle DAC$.

∴ $\angle ABE=\angle BAE$.

即$\triangle ABE$ 是等腰三角形，故 $AE=BE$.

**习题 2.2（第 30 页）**

1. ∵ $AD \perp BC$，$BE \perp AC$，




（第 1 题）

∴ $\triangle ABD$ 和$\triangle ABE$ 均为直角三角形.

设 $O$ 是 $AB$ 的中点，连接 $OE$、$OD$，则

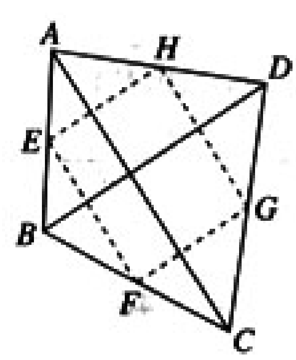
$OE=\frac{1}{2}AB$，$OD=\frac{1}{2}AB$，

∴ $OE=OD=OA=OB$.

∴ $A$、$B$、$D$、$E$ 四点共圆.

∴ $\angle CED=\angle ABC$.

2. 如图，设四边形 $ABCD$ 的对角互相垂直，点 $E$、$F$、$G$、$H$ 分别是 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 的中点. 连接 $EF$、$FG$、$GH$、$HE$，则




（第 2 题）

$FG // BD$，$GH // AC$.

又∵ $AC \perp BD$，

∴ $FG \perp GH$.

同理可证 $HE \perp EF$.

∴ $\angle HEF+\angle FGH=180°$.

∴ $F$、$G$、$H$、$E$ 四点共圆.

3. 如图，∵ $A$、$B$、$C$、$D$ 四点共圆，

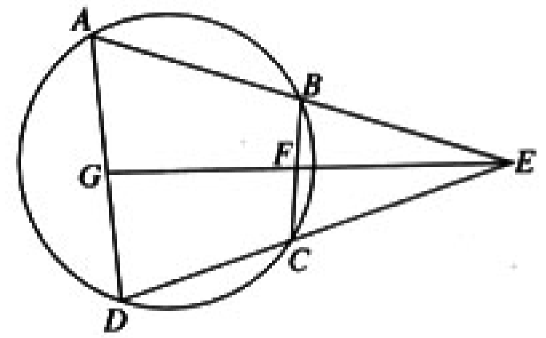
∴ $\angle FCE=\angle A$.

∵ $\angle CFG=\angle FCE+\angle CEF$,

$\angle DGF=\angle A+\angle AEG$,

而 $\angle AEG=\angle CEF$,

∴ $\angle CFG=\angle DGF$.




（第 3 题）

**习题 2.3（第 32 页）**

1. 如图，连接 $OD$、$AO$，过 $O$ 作 $AC$ 的垂线与 $AC$ 相交于 $E$.

∵ $AB$ 是⊙$O$ 的切线，

∴ $OD\perp AB$.

∵ $\triangle ABC$ 是等腰三角形，

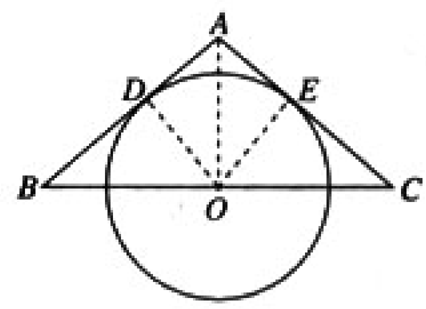
∴ $\angle BAO=\angle CAO$.

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ADO\cong\mathrm{Rt}\triangle AEO$.

∴ $OD=OE$.

∴ 点 $E$ 在圆上.

∴ $AC$ 与⊙$O$ 相切.




（第 1 题）

2. 如图，连接 $OQ$，则 $OQ$ 是⊙$O$ 的半径，且 $OQ\perp RQ$.

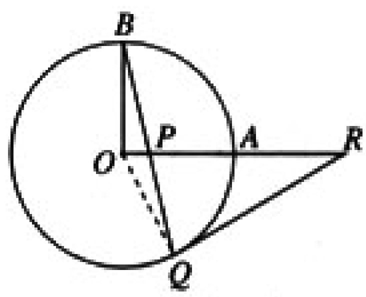
∴ $\angle B=\angle OQB$.

∵ $\angle QPR=\angle BPO=90^\circ-\angle B$,

$\angle PQR=90^\circ-\angle OQB$,

∴ $\angle QPR=\angle PQR$.

∴ $RP=RQ$.




（第 2 题）

3. 如图，连接 $OD$.

∵ $AD/\!/OC$,

∴ $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

又∵ $OA=OD$,

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ $\angle 2=\angle 4$.

又∵ $OC=OC$，$OB=OD$,

∴ $\triangle CDO\cong\triangle CBO$.

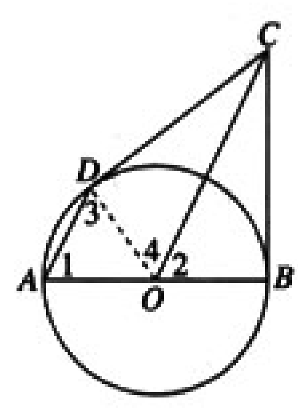
∴ $\angle CDO=\angle CBO$.

∵ $BC$ 是⊙$O$ 的切线，

∴ $\angle CBO=90^\circ$.

∴ $\angle CDO=90^\circ$.

∴ $DC$ 是⊙$O$ 的切线.



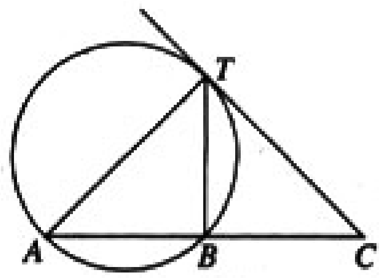

（第 3 题）

**习题 2.4（第 34 页）**

1. ∵ $TC$ 是圆的切线，

∴ $\angle BTC=\angle A$.

∵ $\angle ATC=\angle ATB+\angle BTC$,




（第 1 题）

$\angle TBC=\angle A+\angle ATB$，

∴ $\angle ATC=\angle TBC$.

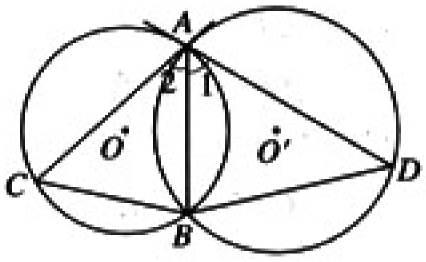
2. ∵ $AC$ 是⊙$O$ 的切线，$AD$ 是⊙$O'$ 的切线，

∴ $\angle 1=\angle C$，$\angle 2=\angle D$，

∴ $\triangle ACB\backsim\triangle DAB$.

∴ $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$.

∴ $AB^2=BC\cdot BD$.



（第 2 题）

**习题 2.5（第 40 页）**

1. 如图，设两条弦相交于 $P$，$PA=12$，$PB=18$，$PD:PC=3:8$. 令 $PD=x$，

则 $PC=\dfrac{8}{3}PD$.

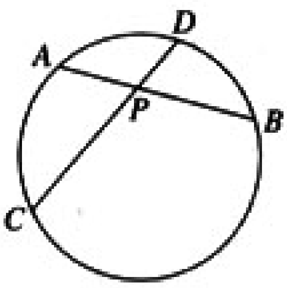
由相交弦定理得　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

∴ $12\times 18=\dfrac{8}{3}x^2$.

得　$x=9(\text{cm})$. 即 $PD=9$ cm.

∴ $PC=\dfrac{8}{3}\times 9=24$ cm.

故　$CD=24\text{ cm}+9\text{ cm}=33$ cm.



（第 1 题）

2. 如图（1）是轴纵断面图，图（2）是圆头部分的图形，其中弦 $CD=40$，直径 $AB=72$，且 $AB\perp CD$ 于 $M$，因此 $BM$ 就是圆头部分的长. 设 $BM=x$，由相交弦定理得　$MC\cdot MD=MB\cdot MA$. 而 $MC=MD$，

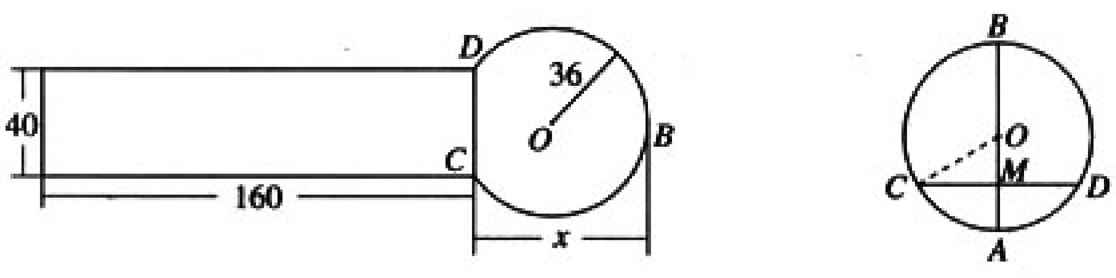
∴ $\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2=MB\cdot MA=(AB-MB)\cdot MB$.

∴ $20^2=(72-x)x$.

解得　$x\approx 36\pm 30$，

∴ $x_1\approx 66$，$x_2\approx 6$.

∴ 轴的全长可能是 $160+66=226$，或是 $160+6=166$.



(1)　(2)

（第 2 题）

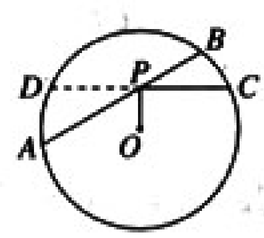
3. 如图，延长 $CP$ 与圆相交于点 $D$.

∵ $OP\perp PC$，

∴ $PC=PD$.

∵ $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

∴ $PC^2=PA\cdot PB$.



（第 3 题）

4. 设⊙$O$ 的半径为 $x$.

∵ $PO=PC+x$，

[木鱼石制作]

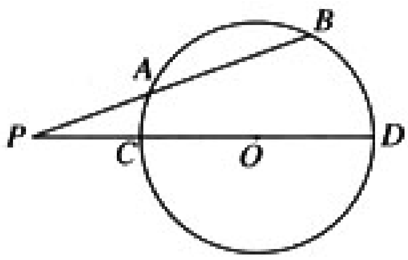
∴ $PC=PO-x=12-x$.

又 $PB=PA+AB=6+7\frac{1}{2}=\frac{27}{2}$.

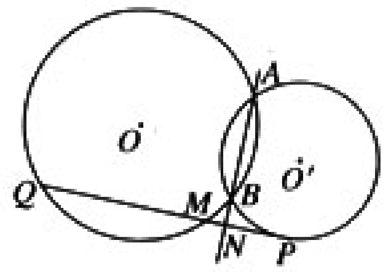
∵ $PA\cdot PB=PC\cdot PD$,

∴ $6\times\frac{27}{2}=(12-x)(12+x)$.

解得 $x=15$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. ∵ $NM\cdot NQ=NB\cdot NA$,

而 $PQ$ 是$\odot O'$的切线,

∴ $NB\cdot NA=PN^2$.

∴ $PN^2=NM\cdot NQ$.

6. ∵ $PA$ 是$\odot O$ 的切线,

∴ $MA^2=MB\cdot MC$.

∵ $M$ 是 $PA$ 的中点,

∴ $MP=MA$.

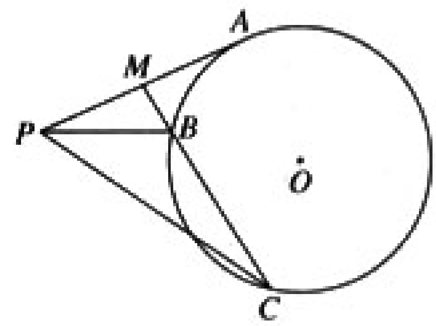
∴ $MP^2=MB\cdot MC$.

∴ $\frac{MB}{MP}=\frac{MP}{MC}$.

又∵ $\angle BMP=\angle PMC$,

∴ $\triangle BMP\backsim\triangle PMC$.

∴ $\angle MPB=\angle MCP$.



（第 6 题）

7. 如图，连接 $GC$.

∵ $\angle 1$ 和$\angle 2$ 是同弧上的圆周角,

∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ $AD\perp BC$，$CF\perp AB$,

∴ $\angle 2=90^\circ-\angle ABD$,

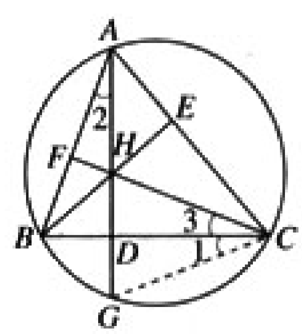
$\angle 3=90^\circ-\angle ABD$.

∴ $\angle 2=\angle 3$.

∴ $\angle 1=\angle 3$.

∴ $Rt\triangle CHD\cong Rt\triangle CGD$.

∴ $DH=DG$.



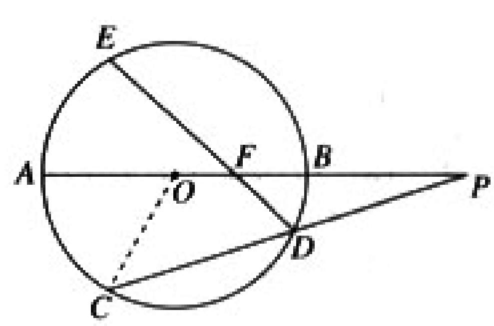
（第 7 题）

8. 如图，连接 $OC$，则$\angle AOC$ 等于弧$\overset{\frown}{AC}$的度数.

∵ $\angle CDE$ 等于弧$\overset{\frown}{EAC}$度数的一半，而$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AE}$,

∴ $\angle AOC=\angle CDE$.

∴ $\angle POC=\angle PDF$.



（第 8 题）

又$\because$ $\angle DPF=\angle OPC$,

$\therefore$ $\triangle POC\backsim\triangle PDF$.

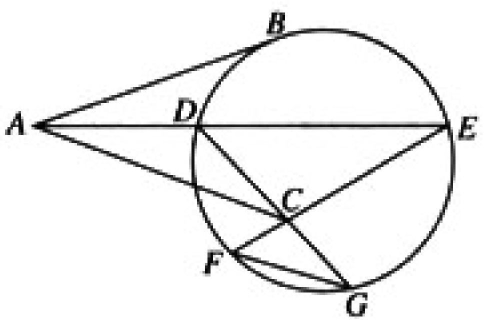
$\therefore$ $\dfrac{PO}{PD}=\dfrac{PC}{PF}$.

$\therefore$ $PO\cdot PF=PC\cdot PD$.

又$\because$ $PC\cdot PD=PB\cdot PA$,

$\therefore$ $PO\cdot PF=PB\cdot PA$.

9. 如图（1），$\because$ $DG$ 和 $FE$ 是圆内相交的弦，




（1）

$\therefore$ $CF\cdot CE=CD\cdot CG$. （1）

$\because$ $AB$ 是圆的切线，

$\therefore$ $AB^2=AD\cdot AE$.

$\because$ $AB=AC$,

$\therefore$ $AC^2=AD\cdot AE$, （2）

即 $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AD}{AC}$.

而 $\angle CAD=\angle EAC$,

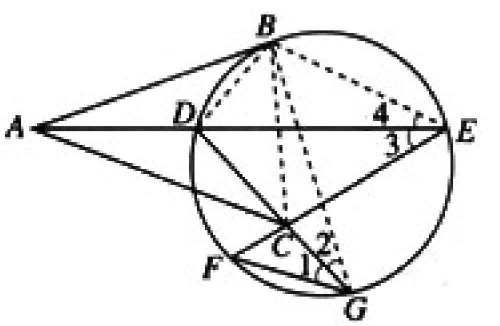
$\therefore$ $\triangle ACD\backsim\triangle AEC$.

$\because$ $\angle AEC=\angle G$,

$\therefore$ $\angle ACD=\angle G$.

$\therefore$ $AC/\!/FG$. （3）

如果$\angle BAD=\angle CAD$，如图（2），连接 $BC$，$BD$，$BG$，$BE$.




（2）

（第 9 题）

$\because$ $AB=AC$，$AD=AD$,

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.

$\therefore$ $BD=CD$. （4）

$\therefore$ $\angle ABD=\angle ACD$.

$\because$ $\angle ACD=\angle 1$，$\angle ABD=\angle 2$,

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$. （5）

$\therefore$ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{FD}$. （6）

$\because$ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$,

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$.

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle ACE$.

$\therefore$ $BE=CE$. （7）

$\because$ $AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$,

$\therefore$ $AE\perp BC$. （8）

$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 各边的中点在同一个圆周上. （9）

$\because$ $AB=AC$，$EB=EC$,

$\therefore$ $AB+EC=AC+EB$. （10）

由（10）可以推出，四边形 $ABEC$ 存在内切圆（证明略）. （11）

续表

| 问　　题 | 设计意图 | 师　生　活　动 |
| --- | --- | --- |
| 2. 猜想椭圆的焦点.<br>观察教科书图 3-6，当 $P$ 与 $G_2$ 重合时，可以得到什么结论? | 鼓励学生猜想，通过猜想去发展学生的直觉思维能力.<br>考察当 $P$ 与 $G_2$ 重合的情形，是把问题特殊化，以便利用已复习的结论. | 师：图 3-6 实质是把两个球放入圆柱中，球与圆柱面内相切，此时平面 $\gamma$ 与圆柱面的截线是一个椭圆．请同学们猜测该椭圆的两个焦点在什么位置?<br>生：凭感觉，似乎应该是平面 $\gamma$ 与两个球的切点.<br>师：很好! |
| 3. 对观察的结论"圆柱形物体的斜截口是椭圆"进行证明. | 培养学生的逻辑思维能力. | 师：要证明该截线是椭圆，应该从哪里入手?<br>生：只要能证明 $\lvert PF_1\rvert+\lvert PF_2\rvert$ 为定值即可.<br>师：请同学们思考两个球的作用.<br>学生讨论.<br>教师作图（过点 $P$ 作母线），分析证明思路，板书证明过程. |
| 4. 探讨椭圆的准线和离心率. | 对椭圆的结构进行更深入地探究，使学生头脑中的知识结构系统和完善. | 师：下面我们进一步研究椭圆的结构．我们知道，椭圆存在准线和离心率，结合教科书第 49 页的图 3-8，同学们估计该椭圆的准线应该是哪两条直线?<br>学生讨论.<br>生：似乎应当是直线 $l_1$ 和 $l_2$.<br>师：下面请大家选择一条（譬如 $l_1$）进行证明，即要证 $\dfrac{PF_1}{P\text{到}l_1\text{的距离}}=$定值．还要考察特殊情形，当 $P$ 与 $G_2$ 重合时，结论成立吗?<br>教师再引导学生讨论一般情形.<br>师：我们把这个定值 $\cos\varphi$ 记为 $e$，称 $e$ 是椭圆的离心率. |
| 5. 展示本节知识点，小结. | 使知识系统化. | 教师就知识和方法两个方面进行总结. |
| 6. 在解析几何中，离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，能否将 $\dfrac{c}{a}$ 与 $\cos\varphi$ 联系起来呢? | 培养学生反思问题的意识和能力. | 教师提出问题，安排学生课后作为作业去探讨. |

## 五、习题解答

**习题 3.2（第 47 页）**

如图（1），$\angle QPK_1=\varphi$，$\cos\varphi=\dfrac{PK_1}{PQ}=\dfrac{PF_1}{PQ}$.

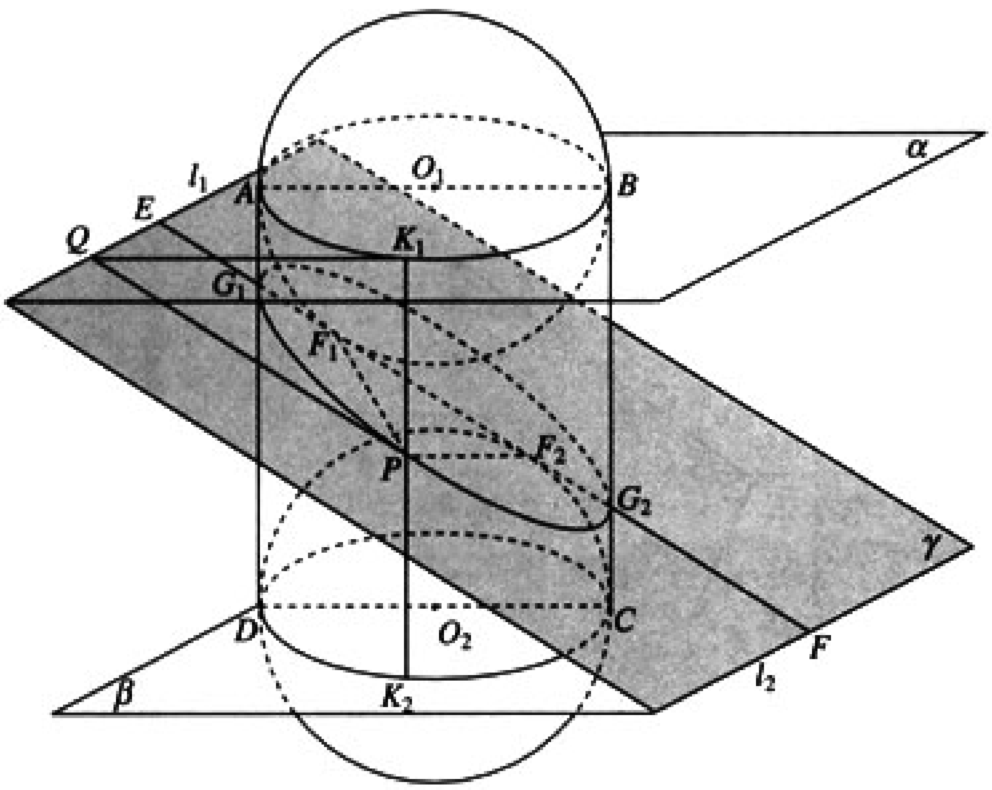
考察轴线面 $ABCD$，$\angle AG_2B=\varphi$，$\cos\varphi=\dfrac{G_2B}{G_2E}$，

$\therefore\ \dfrac{PK_1}{PQ}=\dfrac{G_2B}{G_2E}$.

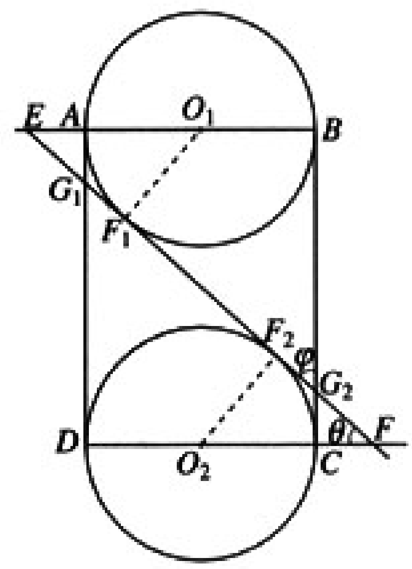
将图（1）的轴截面取出来得图（2）．则 $F_1F_2=2c$，$G_1G_2=2a$，且

$G_2B=G_2F_1=a+c$，

$G_2E=G_1G_2+G_1E=2a+G_1E$.




图（1）




图（2）

$\because$ $\triangle EAG_1 \backsim \triangle EBG_2$，

$\therefore$ $\dfrac{EG_1}{EG_2}=\dfrac{G_1A}{G_2B}$.

$\therefore$ $EG_1=\dfrac{G_1A \cdot EG_2}{G_2B}=\dfrac{G_1F_1(EG_1+G_1G_2)}{G_2F_1}$.

$\because$ $G_1F_1=\dfrac{2a-2c}{2}=a-c$，$G_1G_2=2a$，$G_2F_1=a+c$，

$\therefore$ $EG_1=\dfrac{(a-c)(EG_1+2a)}{a+c}$.

解得 $EG_1=\dfrac{a(a-c)}{c}$.

$\therefore$ $\dfrac{PK_1}{PQ}=\dfrac{G_2B}{G_2E}=\dfrac{G_2F_1}{G_2E}=\dfrac{a+c}{2a+\dfrac{a(a-c)}{c}}=\dfrac{c(a+c)}{a^2+ac}=\dfrac{c}{a}$.

$\therefore$ $\dfrac{PF_1}{PQ}=\dfrac{c}{a}$.

**习题 3.3（第 51 页）**

1. 如图，设平面 $\pi$ 与圆锥内切球相切于点 $F_1$，球与圆锥的交线为 $S$，过该交线的平面为 $\pi'$，$\pi$ 与 $\pi'$ 相交于直线 $m$.

在平面 $\pi$ 与圆锥的截线上任取一点 $P$，连接 $PF_1$. 过点 $P$ 作 $PA\perp m$，交 $m$ 于点 $A$，过点 $P$ 作 $\pi'$ 的垂线，垂足为 $B$，连接 $AB$，则 $AB\perp m$，所以$\angle PAB$ 是 $\pi$ 与 $\pi'$ 所成二面角的平面角. 连接点 $P$ 与圆锥的顶点，与 $S$ 相交于点 $Q_1$，连接 $BQ_1$. 则$\angle BPQ_1=\alpha$，$\angle APB=\beta$.

在 Rt$\triangle APB$ 中，$PB=PA\cos\beta$.

在 Rt$\triangle PBQ_1$ 中，$PB=PQ_1\cos\alpha$.

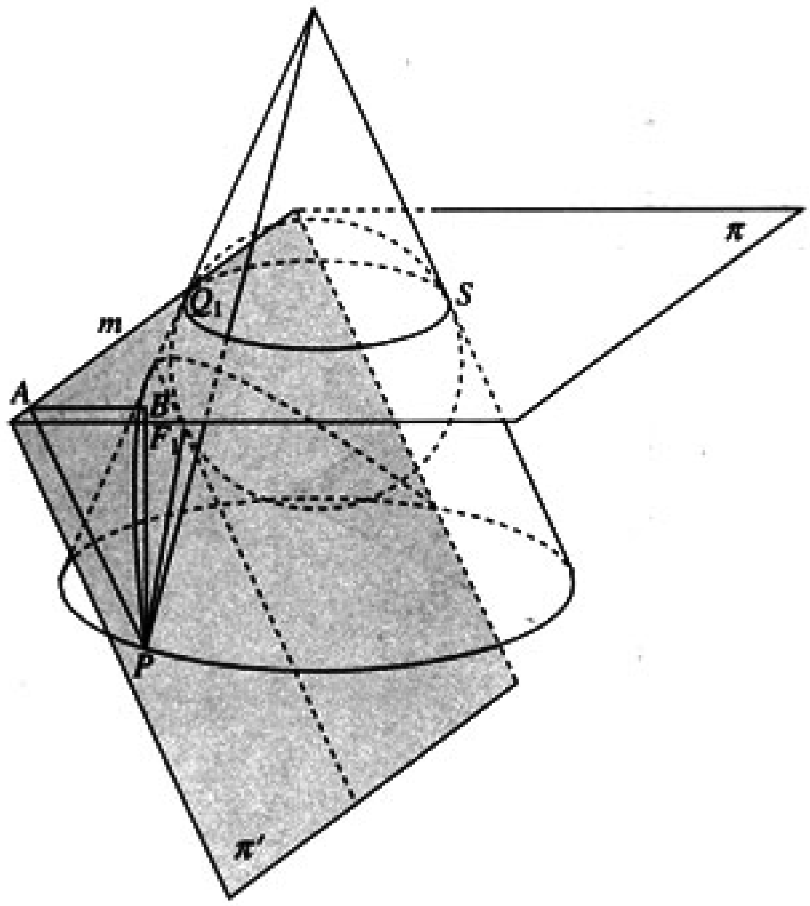
$\therefore$ $\dfrac{PQ_1}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

又$\because$ $PQ_1=PF_1$，$\alpha=\beta$，

$\therefore$ $\dfrac{PF_1}{PA}=1$，

即 $PF_1=PA$，动点 $P$ 到定点 $F_1$ 的距离等于它到定直线 $m$ 的距离，故当 $\alpha=\beta$ 时，平面与圆锥的

交线为抛物线.




2. 我们就教科书第 50 页图 3-13 中下面的 Dandelin 球进行讨论，即讨论一条准线的情形，上面一支双曲线的准线同理可证.

在截口上任取一点 $P$，连接 $PF_2$. 过 $P$ 和圆锥顶点 $O$ 作母线，与球相切于 $Q_2$，球与圆锥的交线为圆 $S$，记圆 $S$ 所在的平面为 $\pi'$. 截面 $\pi$ 与平面 $\pi'$ 相交于直线 $m$.

过点 $P$ 在 $\pi$ 中作 $PA\perp m$，交 $m$ 于点 $A$. 过 $P$ 作平面 $\pi'$ 的垂线，垂足为 $B$. 连接 $Q_2B$、$AB$. 则 $\triangle PBQ_2$ 为直角三角形，且 $\angle Q_2PB=\alpha$. $\triangle PAB$ 也是直角三角形，且 $\angle APB=\beta$.

在 Rt$\triangle PBQ$ 中，$PB=PQ_2\cos\alpha$.

在 Rt$\triangle PAB$ 中，$PB=PA\cos\beta$.

$\therefore\ \dfrac{PQ_2}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

又$\because\ PF_2=PQ_2$,

$\therefore\ \dfrac{PF_2}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=$定值.

$\because\ 0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,

$\therefore\ \cos\beta>\cos\alpha$.

$\therefore\ \dfrac{PF_2}{PA}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}>1$.

$\therefore$ $m$ 是双曲线的一条准线，且 $e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}>1$.

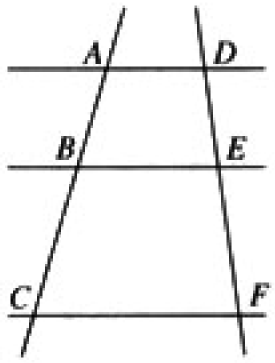
## III 自我检测题

**一、选择题（每小题只有一个正确选项）**

1. 如图，已知 $AD/\!/BE/\!/CF$，下列比例式成立的是（　　）.

(A) $\frac{AB}{DE}=\frac{AD}{BE}$　　(B) $\frac{AB}{EF}=\frac{DE}{BC}$

(C) $\frac{AC}{EF}=\frac{DF}{BC}$　　(D) $\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$




（第 1 题）

2. 下列各组的两个图形一定相似的是（　　）.

(A) 对应边成比例的两个多边形

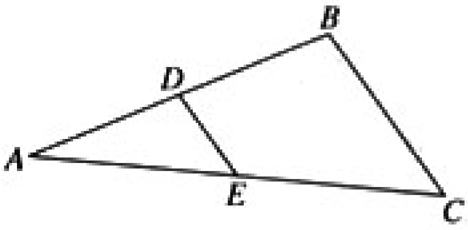
(B) 有一个角对应相等的两个菱形

(C) 等腰梯形的中位线分成的两个梯形

(D) 邻边之比都等于 2 的两个平行四边形

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$、$E$ 分别是 $AB$、$AC$ 的中点．则 $\triangle ADE$ 与四边形 $DECB$ 的面积之比是（　　）.

(A) 1∶3　(B) 1∶2　(C) 1∶5　(D) 1∶4



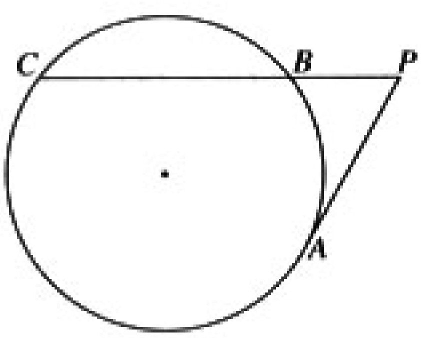

（第 3 题）

4. 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的度数之比为 2∶3∶6，$\angle D$ 的度数为（　　）.

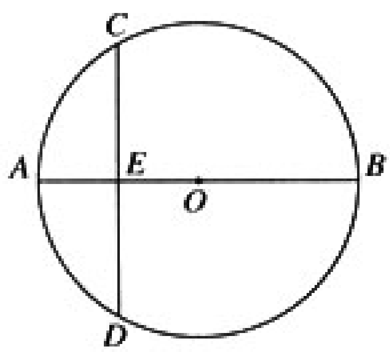
(A) $45^\circ$　(B) $67.5^\circ$　(C) $135^\circ$　(D) $112.5^\circ$

5. 如图，$PA$ 是圆的切线，$A$ 为切点，$PBC$ 是圆的割线，且 $PB=\frac{1}{2}BC$，则$\frac{PA}{PB}$的值为（　　）.

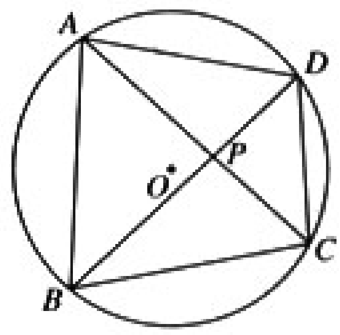
(A) 2　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 1




（第 5 题）




（第 6 题）




（第 7 题）

6. 如图，$\odot O$ 的直径是 $AB$，弦 $CD$ 垂直平分 $OA$，垂足为 $E$ 点，则弧$\overset{\frown}{CAD}$的度数是（　　）.

(A) $150^\circ$　(B) $120^\circ$　(C) $90^\circ$　(D) $60^\circ$

7. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，且 $AC$、$BD$ 交于点 $P$．则此图形中一定相似的三角形有（　　）对.

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

8. 半径为 5 cm 的圆内有两条平行弦，其长分别为 6 cm 和 8 cm，则两平行弦之间的距离为（　　）.

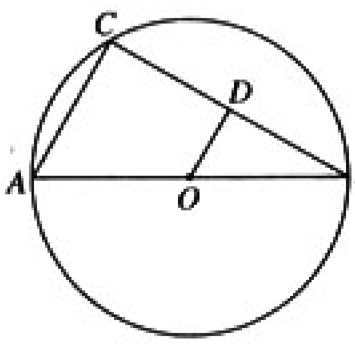
(A) 1 cm 或 7 cm　(B) 1 cm 或 4 cm　(C) 1 cm　(D) 7 cm

## 二、填空题

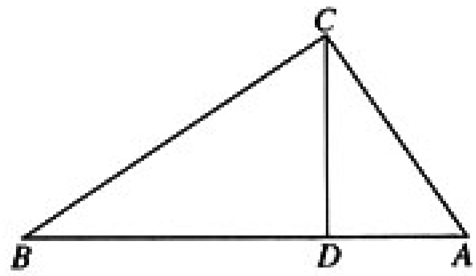
9. 如图，$AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$C$ 为圆周上一点，$\overset{\frown}{AC}=60^\circ$，$OD\perp BC$，$D$ 为垂足，且 $OD=10$，则 $AC=$______，$AB=$______.

10. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 $D$，$CD=2$，$BD=3$，则 $BC=$______.

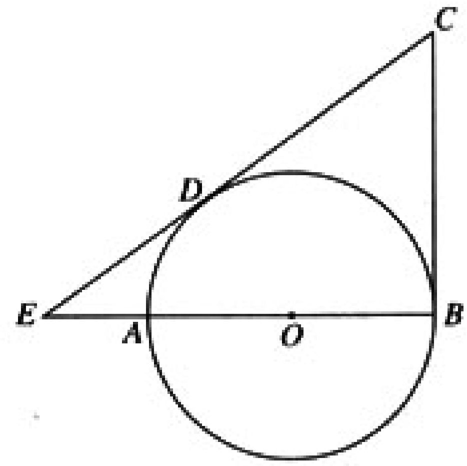
11. 如图，$AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$CB$ 切 $\odot O$ 于 $B$，$CD$ 切 $\odot O$ 于 $D$，交 $BA$ 的延长线于 $E$．若 $AB=3$，$ED=2$，则 $BC$ 的长为______.




（第 9 题）




（第 10 题）




（第 11 题）

12. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$AC=2\sqrt{3}$. 则$\triangle ABC$外接圆的半径等于______.

**三、证明题**

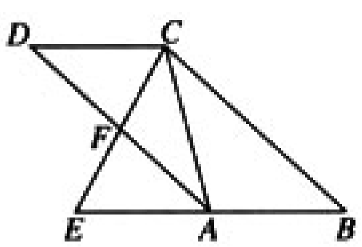
13. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 $E$ 在边 $BA$ 的延长线上，$CE$ 交 $AD$ 于点 $F$，$\angle ECA=\angle D$.

求证：$AC\cdot BE=CE\cdot AD$.

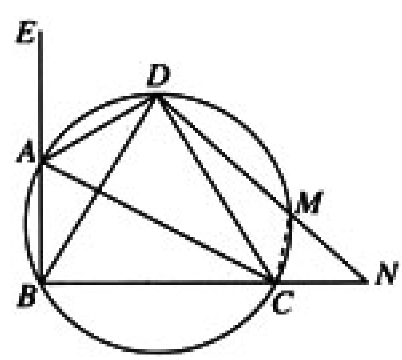
14. 如图，$AD$ 是$\triangle ABC$ 外角$\angle EAC$ 的平分线，$AD$ 与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 $D$，$N$ 为 $BC$ 延长线上一点，$ND$ 交$\triangle ABC$ 的外接圆于点 $M$. 求证：

(1) $DB=DC$；

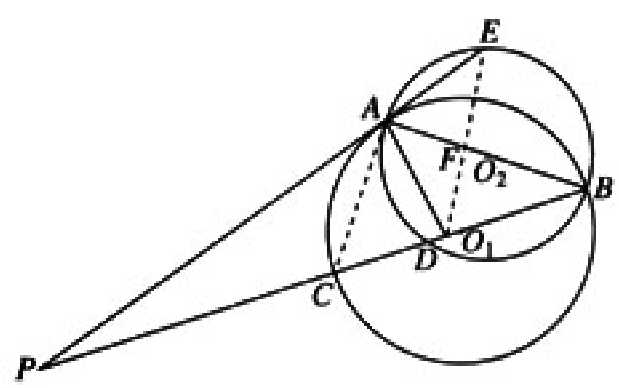
(2) $DC^2=DM\cdot DN$.




（第 13 题）




（第 14 题）




（第 15 题）

15. 如图，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 $A$、$B$ 两点，$AB$ 是$\odot O_2$ 的直径，过 $A$ 点作$\odot O_1$ 的切线交$\odot O_2$ 于点 $E$，并与 $BO_1$ 的延长线交于点 $P$. $PB$ 分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 交于 $C$、$D$ 两点. 求证：

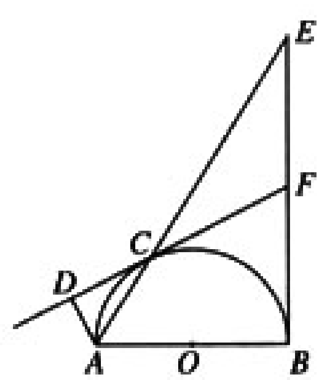
(1) $PA\cdot PD=PE\cdot PC$；

(2) $AD=AE$.

**四、探究题**

16. 如图，已知 $AB$ 为半圆的直径，$O$ 为圆心，$BE$、$CD$ 分别为半圆的切线，切点分别为 $B$ 和 $C$. $DC$ 的延长线交 $BE$ 于 $F$，$AC$ 的延长线交于 $BE$ 于 $E$. $AD\perp DC$，$D$ 为垂足.

根据这些条件，你能推出哪些结论？请你给出尽量多的结论.




（第 16 题）

**参考答案**

1. D.　2. B.　3. A.　4. D.　5. C.　6. B.　7. C.　8. A.　9. 20，40.

10. $\sqrt{13}$.　11. 3.　12. 2.

13. ∵　四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore\ AF /\!/ BC.$

$\therefore\ \dfrac{CE}{BE}=\dfrac{EF}{EA}.$

又$\because\ AE /\!/ CD$，

$\therefore\ \triangle AFE \backsim \triangle DFC.$

$\therefore\ \dfrac{EA}{CD}=\dfrac{EF}{CF}$，即$\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{EF}{EA}=\dfrac{CE}{BE}.$

又$\because\ \angle ECA=\angle D$，$\angle CAF=\angle DAC$，

$\therefore\ \triangle AFC \backsim \triangle ACD.$

$\therefore\ \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{CF}{CD}.$

$\therefore\ \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{CE}{BE}.$

$\therefore\ AC \cdot BE=CE \cdot AD.$

14. (1) $\because\ \angle EAD=\angle DAC$，而$\angle DAC$与$\angle DBC$是同弧上的圆周角，即$\angle DAC=\angle DBC$，

$\therefore\ \angle EAD=\angle DBC.$

又$\because$ A、B、C、D四点共圆，

$\therefore\ \angle EAD=\angle DCB.$

$\therefore\ \angle DBC=\angle DCB.$

$\therefore\ DB=DC.$

(2) 连接$CM$. $\angle DCN=180^\circ-\angle DCB.$

$\because$ B、C、M、D四点共圆，

$\therefore\ \angle DMC=180^\circ-\angle DBC.$

由(1)知 $\angle DBC=\angle DCB$，

$\therefore\ \angle DMC=\angle DCN.$

又$\because\ \angle CDN=\angle MDC$，

$\therefore\ \triangle DMC \backsim \triangle DCN.$

$\therefore\ \dfrac{DM}{DC}=\dfrac{DC}{DN}.$

$\therefore\ DC^2=DM \cdot DN.$

15. (1) $\because$ PAE、PDB分别是$\odot O_2$的割线，

$\therefore\ PA \cdot PE=PD \cdot PB.$　　①

又$\because$ PA、PCB分别是$\odot O_1$的切线和割线，

$\therefore\ PA^2=PC \cdot PB.$　　②

由①、②得 $PA \cdot PD=PE \cdot PC.$

(2) 连接$AD$，连接$AC$、$ED$，$ED$与$AB$相交于$F$.

$\because$ $BC$是$\odot O_1$的直径，

$\therefore\ \angle CAB=90^\circ.$

$\therefore$ $AC$是$\odot O_2$的切线.

又由(1)知 $\dfrac{PA}{PE}=\dfrac{PC}{PD}$，

$\therefore\ AC /\!/ ED.$

$\therefore\ AB \perp ED.$

$\therefore\ \angle PAC=\angle AED.$

又$\because$ $AC$是$\odot O_2$的切线，

$\therefore\ \angle CAD=\angle AED.$

又$\because\ \angle CAD=\angle ADE$，

∴ $\angle ADE=\angle AED$.

∴ $AD=AE$.

16. 如图，∵ $EB$、$ECA$ 分别是⊙$O$ 的切线和割线，

∴ $EB^2=EC\cdot EA$. ①

又∵ $FC$ 也是圆的切线，

∴ $FC=FE$. ②

连接 $BC$. 则$\angle ACB=90°$.

∵ $DF$ 是圆的切线，

∴ $\angle DCA=\angle CBA$.

又∵ $AD\perp DC$，

∴ $\triangle ADC\backsim\triangle ACB$.

∴ $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{AC}{AB}$.

∴ $AC^2=AD\cdot AB$. ③

连接 $OF$. 由于 $FC$、$FB$ 是半圆的切线，

∴ $OF$ 垂直平分 $BC$.

∴ $OF/\!/AE$.

∴ $BF=EF$. ④

又∵ $\angle ABF=90°$，$\angle ADF=90°$，

∴ $A$、$B$、$F$、$D$ 四点共圆. ⑤

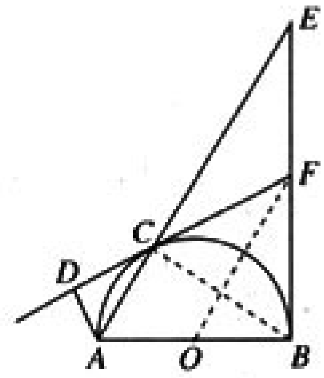
∴ $\angle EFD=\angle DAB$. ⑥

∵ $\angle CBA=90°-\angle CAB$，$\angle E=90°-\angle CAB$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABC\backsim\mathrm{Rt}\triangle AEB$.

∴ $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AB}$.

∴ $AB^2=AE\cdot AC$. ⑦




（第 16 题）

**说明** 第 16 题是一个开放性问题，除了以上 7 个结论，还可以推出其他一些结论．应鼓励学生去尽量努力探究.

所得到的结论应该是简单的，它能反映图中各已知线段（一般不考虑辅助线段之间的表达式）或角之间的关系.

计分方式可以采用：给出一个正确的、容易推导的结论计 2 分；给出一个正确的，但需借助于辅助线推导的结论计 3 分.

该题也可以留给学生在课外去探究．在题目中增加一些条件，让学生完成一篇小论文．譬如，在图 11 中，增加条件：$CE:CA=3:1$，则可推得：$CF:AC:AD=2\sqrt{3}:2:1$．如果推广为 $CE:CA=n:m$，又能推出什么结论呢？让学生去合作或独立探究.