五、反函数

1．反函数的概念

定义： 设 f：$D \to Z_f$，g 是一对应关系．若对任意的 $y \in Z_f$，通过 g 找到唯一的 $x \in D$，使得 $y = f(x)$，则称 g 是 f 的反函数，记作 f^{-1}．

Note1：$f^{-1}(f(x)) = x$，$f(f^{-1}(x)) = x$；

Note2：函数与其反函数的定义域和值域的关系．

2．函数与其反函数图形的关系

定理： 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称．

证： 设点 (a,b) 在 $y = f(x)$ 的图象上，则 $b = f(a)$．由反函数的定义，知 $a = f^{-1}(b)$，即点 (b,a) 在 $y = f^{-1}(x)$ 的图象上．

因为点 (a,b) 与点 (b,a) 关于直线 $y = x$ 对称，所以函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称．

3．反函数存在的充要条件（一一对应）、充分条件（单调）

例 1： 求 $y = \dfrac{x-1}{x+1}\ (x > 1)$ 的反函数．

解： 由 $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ 得 $x = \dfrac{y+1}{1-y}$．

又因为当 $x > 1$ 时，$0 < y = \dfrac{x-1}{x+1} < 1$，所以 $y = \dfrac{x-1}{x+1}\ (x > 1)$ 的反函数是 $y = \dfrac{x+1}{1-x}\ (0 < x < 1)$．

例 2： 求函数 $y = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ 的反函数．

解： 因为

$$y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2\mathrm{e}^x},$$

所以 $(\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$．

解得 $e^x=\dfrac{2y+\sqrt{4y^2+4}}{2}=y+\sqrt{y^2+1}$.

故 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

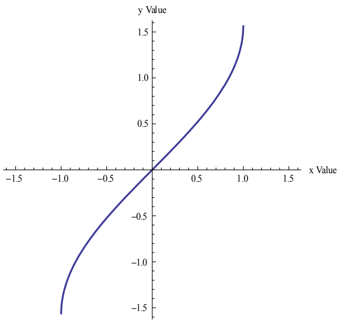
4. 反三角函数

（1）**反正弦函数** $y=\arcsin x$，定义域 $[-1,1]$，值域 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

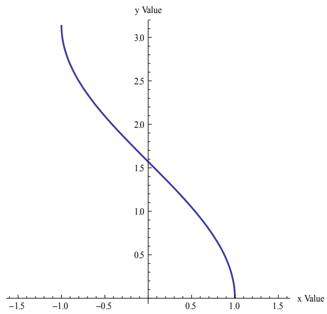
（2）**反余弦函数** $y=\arccos x$，定义域 $[-1,1]$，值域 $[0,\pi]$

（3）**反正切函数** $y=\arctan x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

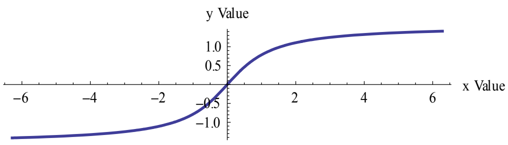
（4）**反余切函数** $y=\operatorname{arccot} x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域 $(0,\pi)$



$y=\arcsin x$



$y=\arccos x$



$y=\arctan x$