Unidad 3

Ecuaciones e inecuaciones

1. Ecuaciones

Un poco de historia...

Entre los elementos matemáticos, las *ecuaciones* ocupan un lugar destacado. Son igualdades entre *expresiones algebraicas* en las que aparecen constantes (valores conocidos) e incógnitas (cantidades desconocidas), por ejemplo, $-16\,t^2+48\,t+100=0$ es una ecuación con una incógnita, y $3\,x+5\,y=\frac{1}{2\,x}$ es una ecuación con dos incógnitas. El interés principal es hallar el valor de las cantidades desconocidas, llamadas *soluciones*. No obstante, también se encuentran ecuaciones que no tienen solución.

En cuanto al origen de las ecuaciones, todo parece indicar que los babilonios sabían resolver ecuaciones de primer grado y algunas de segundo grado. Sin embargo, fue el matemático árabe Al-Juarismi quien escribió hacia el año 800 d. C. el primer tratado sistemático sobre resolución de ecuaciones de primero y segundo grados, por lo cual se lo considera "*el padre del Álgebra*".

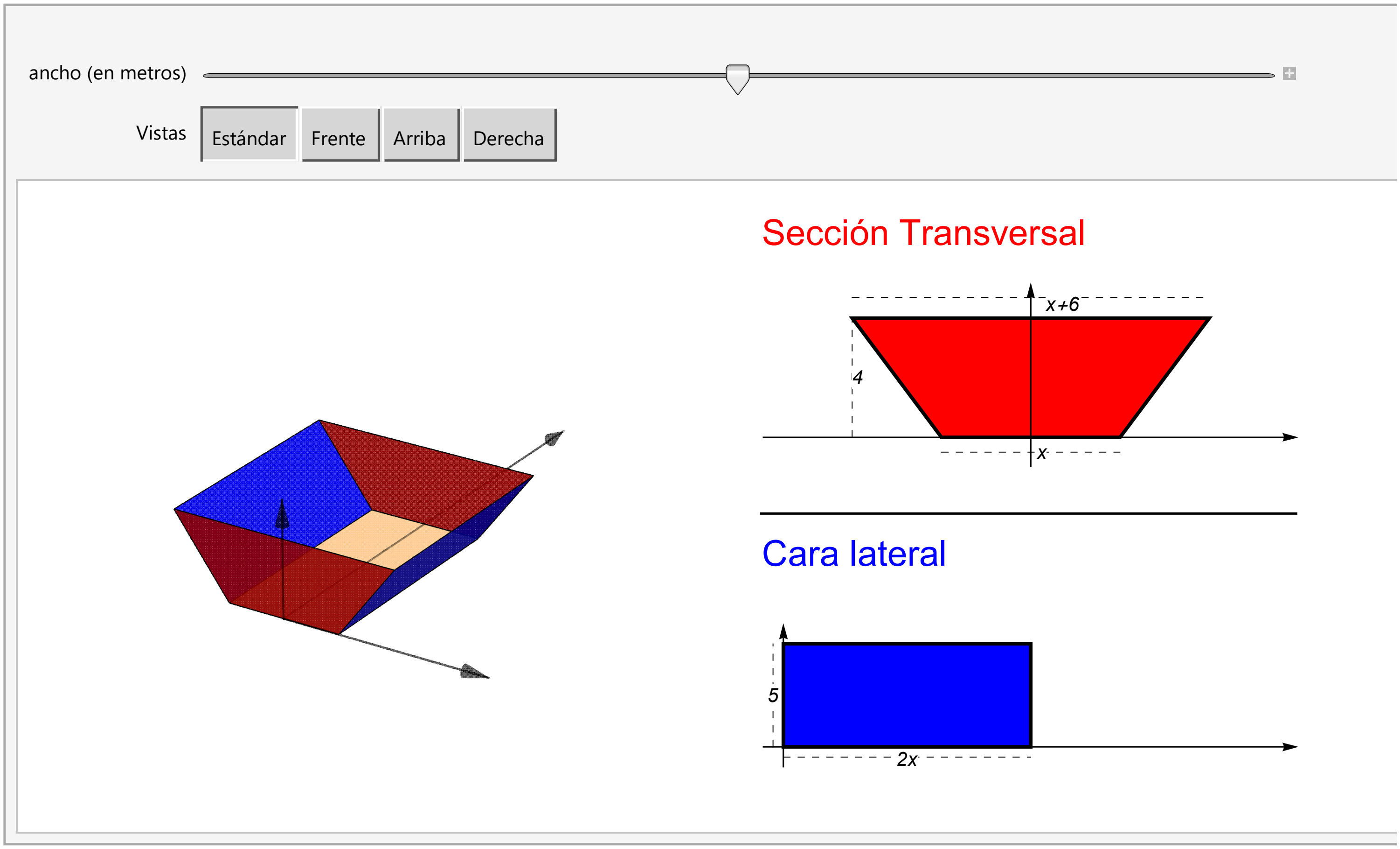
1.1 Trabajando con ecuaciones

Situación: Almacenamiento de agua, parte 1

En un proyecto sobre almacenamiento de agua se construye un tanque a escala cuya sección transversal es un trapecio isósceles. El tanque debe cumplir las siguientes condiciones:

- la diferencia entre las base menor y la base mayor debe ser de 6 metros,
- la altura del tanque es de 4 metros,
- la longitud del tanque es 200% la longitud de la base menor.

manípule el **siguiente interactivo** con el que se puede dar una idea de la construcción del tanque. Se ha asignado x a la longitud de la base menor. En la parte derecha puede identificar una sección transversal y una cara lateral del tanque:



Problema 1

Suponga que el área transversal mide el cincuenta por ciento del área de una cara lateral.

⇒ *Cuáles son las dimensiones del tanque que satisface todas las condiciones?*

Recuerde: el área de una figura plana depende de su forma, si desea identificarlas hacer clic en el enlace ⇒ Área

Solución

La sección transversal tiene forma de *trapecio isósceles*, y siendo x la medida de la longitud de la base menor, la base mayor tiene una medida de $x+6$ (acorde con la segunda condición: *la diferencia entre las bases menor y mayor debe ser 6 metros*). Por tanto, el área del trapecio isósceles es:

$$A_T = \frac{4\,(x+(x+6))}{2}$$

simplificando esta expresión se tiene:

$$A_T = 2\,(2\,x+6)$$

La forma del costado (cara lateral) es un *rectángulo*, hay que tener en cuenta que:

- Su longitud es $2\,x$ (acorde con la primera condición: *el área de un costado es dos veces el área de la sección transversal*)
- La longitud de su altura es 5 metros, porque es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 3 y 4 (ver el *applet*: vista de frente)

Por tanto, el área del costado es

$$A_C = 5\,(2\,x) = 10\,x$$

Ya se tiene el valor de ambas áreas con solo una variable x (medida de la longitud de la base menor), acorde con el enunciado del problema se quiere **encontrar las dimensiones del tanque cuya área transversal (A_T) mida el** 50 × % **del área de una cara lateral (A_C)**, por tanto, se puede escribir la siguiente expresión:

$$A_T = 0.5\,(A_C)$$

Reemplazando, expandiendo y simplificando la expresión se llega a:

$$\begin{aligned} A_T &= 0.5\,(A_C) \\ 2\,(2\,x + 6) &= 0.5\,(10\,x) \\ 4\,x + 12 &= 5\,x \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Así, las dimensiones del tanque son: base menor 12 metros, base mayor 18 metros, longitud 24 metros.

« Respuesta

Resumen

La forma que se escogió para resolver la pregunta del problema anterior fue por medio de una ***igualdad.***

Primero, se encontraron las expresiones que representan el áreas del trapecio A_T y el área del costado del recipiente A_C, luego se estableció la igualdad que cumplía con lo pedido: "*encontrar las dimensiones del tanque cuya área transversal* (A_T) *mida el 50* × % *del área de una cara lateral* (A_C)", la cual quedó:

$$\begin{aligned} A_T &= 0.5\,(A_C) \\ 2\,(2\,x + 6) &= 0.5\,(10\,x) \end{aligned}$$

Podemos observar en esta igualdad el uso de una ***variable*** (x), lo que generalmente significa que desconocemos su valor, pero conocemos su significado (para el caso, x es la *medida de la longitud de la base menor*).

El objetivo fue encontrar el valor de x ya que corresponde al valor de la base menor y conociendo este se puede encontrar el valor de la base mayor, y así responder el problema.

Ecuaciones

Definición

Definición de ecuación:

Una ecuación es la **igualdad** de dos *expresiones matemáticas* que contienen al menos una **incógnita**.

Resolver una ecuación significa *encontrar todos los números reales que hacen la ecuación verdadera*. Estos números son llamados **soluciones** o **raíces** de la ecuación y todas las soluciones de la ecuación forman el **conjunto solución.**

Cabe notar que el **conjunto solución** puede *ser vacío* o tener ⇒ *única solución* *dos o más soluciones* *infinitas soluciones*

» Ejemplos:

1. El conjunto solución de la ecuación $2\,x - 5 = 3\,x + 8$ es $\{-13\}$ pues al reemplazar $x = -13$ en la igualdad se tiene que la expresión es verdadera:

$$\begin{aligned} 2x-5 &= 3x+8 \\ 2(-13)-5 &= 3(-13)+8 \\ -26-5 &= -39+8 \\ -31 &= -31 \end{aligned}$$

En este caso, **la ecuación tiene única solución**.

2. El conjunto solución de la ecuación $x^2-1=0$ es $\{-1,\ 1\}$.
   Si se reemplaza $x=-1$ se tiene que $(-1)^2-1=0$, la igualdad se cumple.
   Si se reemplaza $x=1$ se tiene que $(1)^2-1=0$, la igualdad se cumple.
   En este caso, **la ecuación tiene dos soluciones**.
3. La ecuación $2x-3=2x-1$ no tiene solución, pues no existe ningún valor para x que al reemplazar en la ecuación cumpla la igualdad. En este caso, **el conjunto solución es vacío** y **la ecuación no tiene solución**.
4. El conjunto solución de la ecuación $2x-2=-x+8$ es $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ pues al reemplazar $x=\frac{10}{3}$ en la igualdad se tiene que la expresión es verdadera:

$$\begin{aligned} 2x-2 &= -x+8 \\ 2\left(\tfrac{10}{3}\right)-2 &= -\left(\tfrac{10}{3}\right)+8 \\ \tfrac{20}{3}-2 &= -\tfrac{10}{3}+8 \\ \tfrac{14}{3} &= \tfrac{14}{3} \end{aligned}$$

   En este caso, **la ecuación tiene única solución**.
5. La ecuación $x^2=-2$ no tiene solución, pues no existe ningún valor para x que al reemplazar en la ecuación cumpla la igualdad (en los números reales no existen raíces negativas). En este caso, **el conjunto solución es vacío** y **la ecuación no tiene solución**.

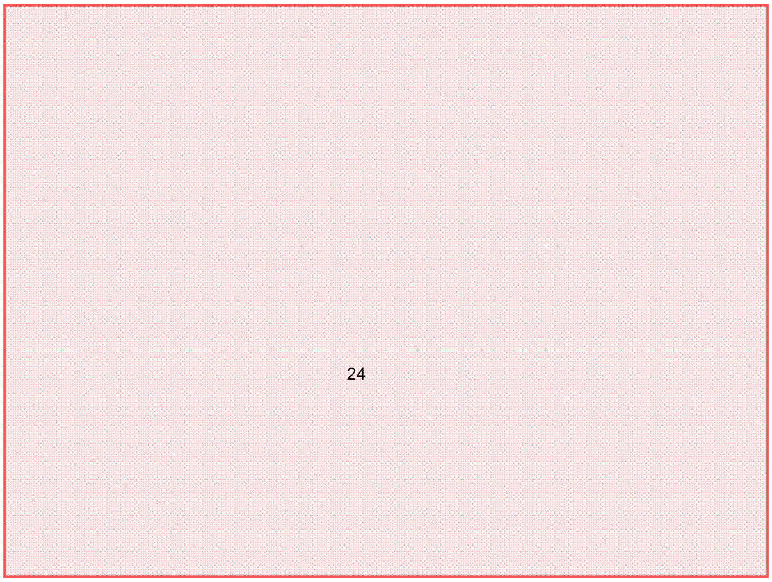
1.2 Tipos de ecuaciones

Ecuaciones lineales

Situación: Almacenamiento de agua, parte 2

Suponga ahora que el tanque tiene las dimensiones:

- la base menor mide 12 metros,
- la base mayor mide 18 metros,
- la altura mide 4 metros,
- la longitud mide 24 metros.



Problema 1

Como labor de mantenimiento, el tanque debe ser desocupado y hay dos mangueras disponibles: una de ellas lo desocupa en dos horas y, la otra en tres. estando el tanque con agua hasta el nivel que equivale al 45% del volumen total:

⇒ *¿Cuánto tiempo tardan las dos mangueras, funcionando al tiempo, en desocupar el tanque?*

Solución

Suponga que el tiempo que tardarían las dos mangueras en desocupar el tanque completo es t horas. Ya que es una labor compartida, cada manguera efectuará una fracción del trabajo y la suma de estas fracciones debe ser el total de trabajo, es decir, la unidad.

Así, cada manguera trabajando sola se puede representar de la siguiente manera:

Parte del tanque que se desocupa al cabo de			
	Una hora	Dos horas	Tres horas
Manguera uno	Medio $\frac{1}{2}$	Todo $\frac{2}{2}$	Uno completo y medio más $\frac{3}{2}$
Manguera dos	Una tercera parte $\frac{1}{3}$	Dos terceras partes $\frac{2}{3}$	Todo $\frac{3}{3}$

Si ambas mangueras trabajan juntas, y el tiempo que tardan en desocupar el tanque es t horas, cada una aportará una fracción: la manguera uno desocupa $\frac{t}{2}$ partes del tanque y la manguera dos desocupa $\frac{t}{3}$ partes del tanque.

La siguiente ecuación muestra el aporte de cada manguera:

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 1$$

La parte que desocupa la manguera uno, más la parte que desocupa la manguera dos, es el trabajo total, es decir, la unidad.

Simplificando y despejando t de la expresión se tiene que:

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 1$$
$$\frac{5t}{6} = 1$$
$$t = \frac{6}{5}$$

Así, las dos mangueras juntas tardan $\frac{6}{5}$ de hora, es decir *una hora y doce minutos* en desocupar el tanque completo (*¿por qué?).*

El problema consiste en hallar el tiempo que tardan las dos mangueras trabajando simultáneamente para desocupar el 45 % de tanque. Esto es:

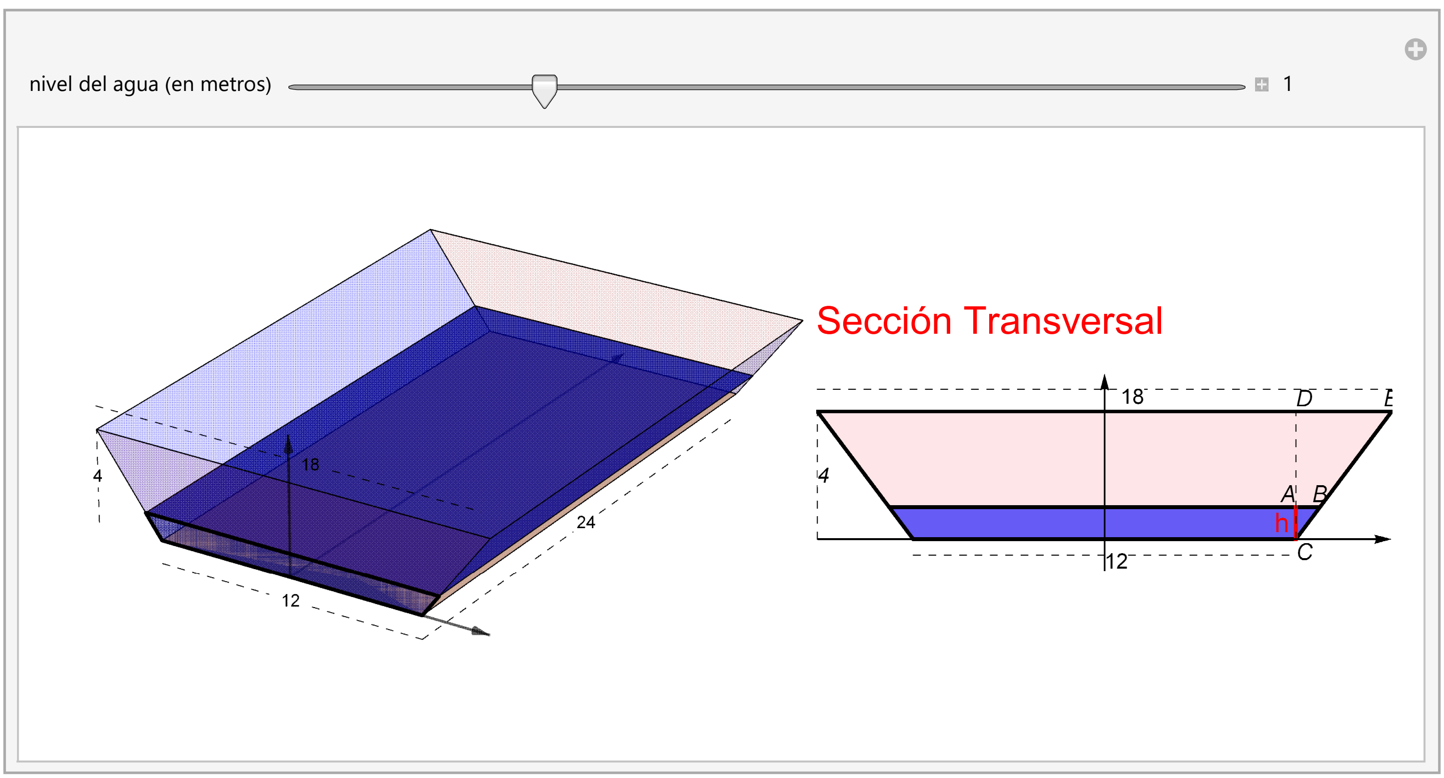
$$\begin{aligned}\frac{6}{5}(0.45) &= \frac{6}{5}\left(\frac{45}{10}\right)\\ &= \frac{6}{5}\left(\frac{9}{20}\right)\\ &= \frac{27}{50}\end{aligned}$$

pero $\frac{27}{50}$ de hora equivale a 32 minutos y 24 segundos (*¿por qué?*).

Las dos mangueras desocupan el 45 % de tanque en 32 minutos y 24 segundos. « Respuesta

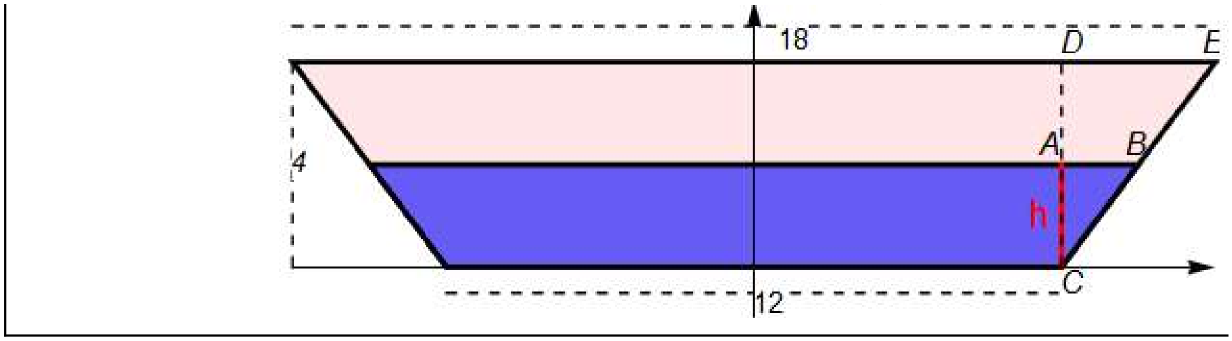
Problema 2

En este momento el tanque contiene agua hasta cierto nivel (h) que equivale al 45 % del volumen total, puede manipular el siguiente interactivo para subir y bajar el nivel del agua.



Es claro que cuando el nivel de agua está a la mitad ($h = 2$), el tanque no está al 50 % de su capacidad (¿por qué?). Píldora

Cuando el tanque está a 45 % de su capacidad, la distancia entre los puntos A y B es de 1.5 metros, ¿cuál es el nivel del agua?

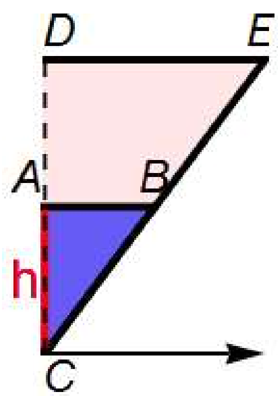


Números racionales como razón y proporción ⇒ enlace

Proporción en la geometría: Triángulos semejantes ⇒ enlace

Solución

De la vista de la sección transversal se va a trabajar solo con la parte derecha:



En donde se evidencia que los triángulos ΔDCE y ΔACB son semejantes (pues varía el tamaño, pero sus formas son idénticas), por tanto, se puede establecer la siguiente relación de proporcionalidad con los lados de los triángulos:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

donde $DE = 3$ *¿por qué?*, $CD = 4$, $AB = 1.5$ y $AC = h$, por tanto:

$$\frac{3}{1.5} = \frac{4}{h}$$

simplificando y despejando h de la expresión se tiene que:

$$\frac{3}{1.5} = \frac{4}{h}$$

$$3h = 4 \times 1.5$$

$$h = \frac{6}{3}$$

$$h = 2$$

Por tanto,

Si el tanque está lleno al $45 \times$ % del volumen total, el nivel del agua es de 2 metros.

« Respuesta

Resumen

En los dos problemas de la anterior situación se evidencia la necesidad de resolver ecuaciones para determinar la solución. Las ecuaciones se pueden clasificar de acuerdo con el grado de la variable o de acuerdo con el procedimiento para resolverlas. En nuestro curso veremos algunos *algoritmos* comúnmente utilizados para resolver ecuaciones.
El más sencillo se utiliza en **ecuaciones lineales**:

Ecuaciones

Definición **Lineal**

Definición de una ecuación lineal:
Toda ecuación de la forma $a\,x + b = 0$, donde a y b son números reales y a es distinto de cero, es llamada **ecuación lineal** en x o **ecuación de primer grado** en x.

Para resolver ecuaciones lineales se utilizan las propiedades de la ⇒ *adición y sustracción* *multiplicación y división*

Ejemplos de solución de ecuaciones lineales

Ejemplo 1
Ejemplo 2
Ejemplo 3
Ejemplo 4
Ejemplo 5
Ejemplo 6
Ejemplo 7
Ejemplo 8

Resolver la ecuación $2\,x + 3 = -11$

$$2\,x + 3 = -11$$
$$2\,x + 3 - 3 = -11 - 3$$
$$2\,x = -14$$
$$\frac{2\,x}{2} = -\frac{14}{2}$$
$$x = -7$$

El conjunto solución es $\{-7\}$.

Note cómo en algunos ejemplos no se han escrito todos los procedimientos, pues con un poco de práctica muchos pasos se pueden desarrollar mentalmente e ir escribiendo solo algunos de estos.

Ejercicios de refuerzo*

» Ejercicios procedimentales

1. ¿Es $x = 2$ solución de la ecuación $\frac{9-2\,x}{3} - 1 = \frac{4\,(2-x)}{3}$? Justifique su respuesta.
2. Halle la solución de la ecuación $2 - 3\left(\frac{5-x}{7} + 5\right) = 3\,x - 1$.
3. Despeje z, si $z\,a + M = z\,k$.

» *Soluciones a los ejercicios*

1. ¿Es $x = 2$ solución de la ecuación $\frac{9-2\,x}{3} - 1 = \frac{4\,(2-x)}{3}$? Justifique su respuesta.

   Para determinar si $x = 2$ es solución, este valor se reemplaza en la ecuación, si la igualdad es verdadera

$x = 2$ es solución, en caso contrario no lo es:

$$\frac{9-2x}{3} - 1 = \frac{4(2-x)}{3}$$
$$\frac{9-2(2)}{3} - 1 = \frac{4(2-(2))}{3}$$
$$\frac{9-4}{3} - 1 = \frac{4(0)}{3}$$
$$\frac{5}{3} - 1 = 0$$
$$\frac{2}{3} = 0$$

como $\frac{2}{3} \neq 0$, la igualdad es falsa, por tanto, $x = 2$ no es solución de la ecuación.

2. Halle la solución de la ecuación $2 - 3\left(\frac{5-x}{7} + 5\right) = 3x - 1$.

La solución es:

$$2 - 3\left(\frac{5-x}{7} + 5\right) = 3x - 1$$
$$2 - 3\left(\frac{5-x}{7} + \frac{35}{7}\right) = 3x - 1$$
$$2 - 3\left(\frac{5-x+35}{7}\right) = 3x - 1$$
$$2 - \frac{3(40-x)}{7} = 3x - 1$$
$$\frac{14}{7} - \frac{120-3x}{7} = 3x - 1$$
$$\frac{14-(120-3x)}{7} = 3x - 1$$
$$14 - 120 + 3x = 7(3x - 1)$$
$$-106 + 3x = 21x - 7$$
$$3x - 21x = -7 + 106$$
$$-18x = 99$$
$$x = -\frac{99}{18}$$
$$x = -\frac{11}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{11}{2}\right\}$.

3. Despeje z, si $za + M = zk$.

Al despejar z se obtiene:

$$za + M = zk$$
$$za - zk + M = 0$$
$$za - zk = -M$$
$$z(a-k) = -M$$
$$z = -\frac{M}{a-k}$$

» Problemas de aplicación

1. Un obrero construye un muro de ladrillos en 8 horas. Si su aprendiz, trabajando solo, tarda 12 horas en construir un muro con las mismas características, ¿cuál es la fracción del muro que construyen trabajando juntos cuatro horas? ¿Cuánto tiempo tardarán juntos en construir todo el muro?

2. La suma de tres pares consecutivos es 50. ¿Cuáles son dichos números?

3. Un terreno rectangular está rodeado por 72 metros de cerca. Si ese terreno se divide con una cerca paralela al lado más corto, se necesitan en total 88 metros de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

4. Un empresario tiene 10 000 dólares invertidos al 10%. ¿Cuánto dinero adicional debe invertir al 16%, si desea obtener un rendimiento del 12% sobre el total de las dos inversiones?

5. En el primer periodo del semestre, cuyo valor es el 30% de la nota definitiva del curso, un estudiante de matemáticas ha obtenido:
   - Quizzes (10%): 3,2
   - Proyecto de aula (5%): 2,5
   - Parcial (15%)

   - Para que apruebe el primer corte de esta asignatura, ¿cuál debe ser la nota mínima del parcial?
   - Si su nota del primer corte fue 3,7, ¿cuánto obtuvo en el parcial?
   - ¿Cuál es la nota máxima que puede obtener en el primer corte?

** Algunos ejercicios propuestos son tomados de la cartilla: "Introducción a las matemáticas", desarrollada por docentes del Departamento de Matemáticas. Segundo semestre 2012.*

» *Soluciones a los ejercicios*

1. **Un obrero construye un muro de ladrillos en 8 horas. Si su aprendiz, trabajando solo, tarda 12 horas en construir un muro con las mismas características, ¿cuál es la fracción del muro que construyen trabajando juntos cuatro horas? ¿Cuánto tiempo tardarán juntos en construir todo el muro?**

   En una hora, el obrero construye $\frac{1}{8}$ del muro, en el mismo tiempo el aprendiz construye $\frac{1}{12}$ de muro, es decir que juntos en una hora construyen $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ de muro:

   Una hora trabajando juntos $\Rightarrow$ $\frac{5}{24}$ de muro.

   La fracción del muro que construyen juntos en cuatro horas equivale a $(4)\,\frac{5}{24}=\frac{5}{6}$.

   El tiempo que tardan en construir todo el muro se puede conocer mediante la expresión $x\left(\frac{5}{24}\right)=1$, al despejar x se tiene que $x=\frac{24}{5}$ horas, equivalente a 4 horas y 48 minutos.

2. **La suma de tres números pares consecutivos es 50. ¿Cuáles son dichos números?**

   Primero se debe encontrar una expresión matemática para la frase "La suma de tres pares consecutivos es 50", la cual puede ser $x+(x+2)+(x+2)=50$, donde x es el primero de los tres números pares, $(x+2)$ es el siguiente número par y $(x+4)$ es el último número par. Al resolver la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} x+(x+2)+(x+4) &= 50 \\ 3\,x+6 &= 50 \\ 3\,x &= 44 \\ x &= \frac{44}{3} \end{aligned}$$

   pero la solución no tiene sentido porque $\frac{44}{3}$ no es un número par, la respuesta es un número racional pero no un número entero, por tanto, el problema no tiene solución.

3. **Un terreno rectangular está rodeado por 72 metros de cerca. Si ese terreno se divide con una cerca paralela al lado más corto, se necesitan en total 88 metros de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?**

   Como el terreno es rectángular y la medida de los lados no se conoce, se puede llamar p a la medida del lado menor y q a la medida del lado mayor; como el perímetro de un rectángulo es la suma de sus lados, se tiene que

$$\begin{aligned} 2\,p+2\,q &= P \\ 2\,p+2\,q &= 72 \end{aligned}$$

   de aquí se puede despejar alguna de las medidas de los lados

$$2p + 2q = 72$$
$$p + q = 36$$
$$p = 36 - q$$

cuando se coloca otra cerca paralela al lado más corto se esta sumando q, por tanto:

$$2p + 3q = 88$$

esta ecuación tiene dos variables; como una depende de la otra, se puede reemplazar de la siguiente manera

$$2p + 3q = 88$$
$$2(36 - q) + 3q = 88$$

y se procede a despejar q

$$2(36 - q) + 3q = 88$$
$$72 - 2q + 3q = 88$$
$$q = 16$$

por tanto, la medida del lado q es de 11 metros, la medida de p es $36 - 16 = 20$ metros.

4. Un empresario tiene 10 000 dólares invertidos al 10%. ¿Cuánto dinero adicional debe invertir al 16%, si desea obtener un rendimiento del 12% sobre el total de las dos inversiones?

Sea g el *dinero que va a invertir al 16%*, el total de las dos inversiones está dado por las expresiones:
Dinero obtenido de la inversión 1: $10\,000 + 10\,000\,(0.1)$
Dinero obtenido de la inversión 2: $g + g\,(0.16)$
Dinero total obtenido: $(10\,000 + g) + (10\,000 + g)\,(0.12)$
Por tanto:

$$(10\,000 + 10\,000\,(0.1)) + (g + g(0.16)) = (10\,000 + g) + (10\,000 + g)\,(0.12)$$

donde g denota el dinero adicional a invertir en la segunda inversión, simplificando y despejando, la variable queda:

$$(10\,000 + 10\,000\,(0.1)) + (g + 0.16\,g) = (10\,000 + g) + (10\,000 + g)\,(0.12)$$
$$10\,000 + 1000 + 1.16\,g = 10\,000 + g + 1200 + 0.12\,g$$
$$1.16\,g - g - 0.12\,g = 10\,000 + 1200 - 10\,000 - 1000$$
$$0.04\,g = 200$$
$$g = \frac{200}{0.04}$$
$$g = 5000$$

Así, se debe invertir 5000 dólares al 16% para obtener un rendimiento del 12% sobre el total de las dos inversiones.

5. En el primer periodo del semestre, cuyo valor es el 30 × % de la nota definitiva del curso, un estudiante de matemáticas ha obtenido:

- Quizzes (10 × %): 3.2
- Proyecto de aula (5 × %): 2.5
- Parcial (15 × %)

- Para que apruebe el primer corte de esta asignatura, ¿cuál debe ser la nota mínima del parcial?
- Si su nota del primer corte fue 3.7, ¿cuánto obtuvo en el parcial?
- ¿Cuál es la nota máxima que puede obtener en el primer corte? ¿Cuál la mínima?

■ Para que apruebe el primer corte de esta asignatura, ¿cuál debe ser la nota mínima del parcial?

Primero, se debe encotrar una expresión o estructura para la nota del primer corte, esta es:

$$(\textbf{Nota Quiz})\times 10\,\% + (\textbf{Proy Aula})\times 5\,\% + (\textbf{Parcial})\times 15\,\% = (\textbf{Nota fina}l)\times 30\,\%$$

Al escribir la expresión con decimales, se tiene:

$$(\textbf{Nota Quiz})\ 0.1 + (\textbf{Proy Aula})\ 0.05 + (\textbf{Parcial})\ 0.15 = (\textbf{Nota final})\ 0.3$$

Ahora, para aprobar el primer corte la **nota final** debe ser 3 (*nota mínima para aprobar*), la expresión queda:

$$(3.2\times 0.1) + (2.5\times 0.05) + (x\times 0.15) = 3\times 0.3$$

donde x es la nota del parcial; simplificando la expresión se llega a la ecuación:

$$0.15\,x + 0.445 = 0.9$$
$$0.15\,x = 0.455$$
$$x = \frac{0.455}{0.15}$$
$$x = 3.0333$$

al despejar x se tiene que la nota del parcial debe ser 3.

- Si su nota del primer corte fue 3.7, ¿cuánto obtuvo en el parcial?

  Comenzando con la expresión

  $$(\textbf{Nota Quiz})\times 10\ \% + (\textbf{Proy Aula})\times 5\ \% + (\textbf{Parcial})\times 15\ \% = (\textbf{Nota fina}l)\times 30\ \%$$

  si la **nota final** es 3.7, la expresión queda:

  $$(3.2\times 0.1) + (2.5\times 0.05) + (x\times 0.15) = 3.7\times 0.3$$

  donde x es la nota del parcial; simplificando la expresión se llega a la ecuación:

  $$0.15\,x + 0.445 = 1.11$$
  $$0.15\,x = 0.665$$
  $$x = \frac{0.665}{0.15}$$
  $$x = 4.4333$$

  al despejar x se tiene que la nota debe ser 4.43.

- ¿Cuál es la nota máxima que puede obtener en el primer corte?

  Comenzando con la expresión

  $$(\textbf{Nota Quiz})\times 10\ \% + (\textbf{Proy Aula})\times 5\ \% + (\textbf{Parcial})\times 15\ \% = (\textbf{Nota fina}l)\times 30\ \%$$

  si la nota máxima del parcial es 5, la expresión queda:

  $$(3.2\times 0.1) + (2.5\times 0.05) + (5\times 0.15) = x\times 0.3$$

  donde x es la nota final, simplificando la expresión se llega a la ecuación:

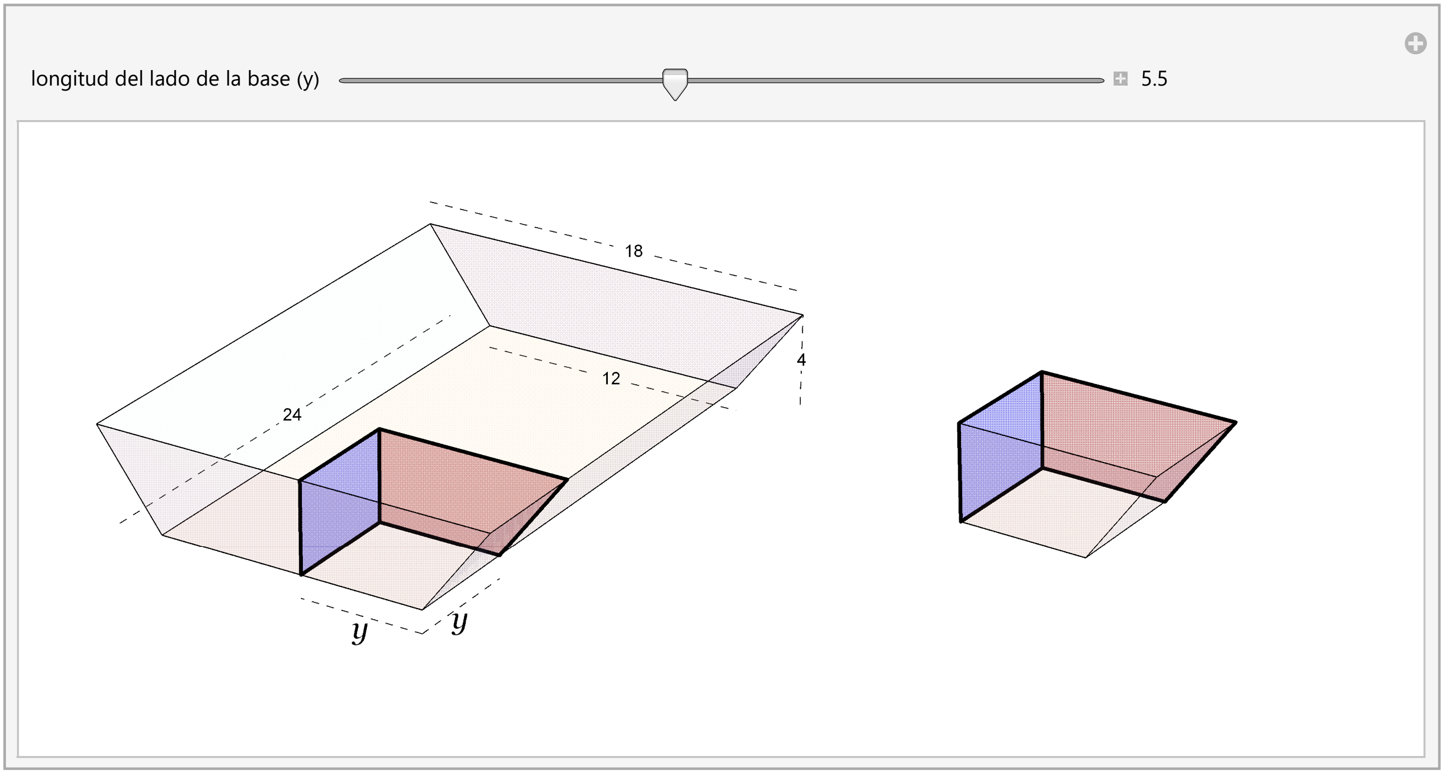
  $$1.195 = 0.3\,x$$
  $$x = \frac{1.195}{0.3}$$
  $$x = 3.9833$$

  al despejar x se tiene que la nota final es 4.

Ecuaciones cuadráticas

Situación: Almacenamiento de agua, parte 3

El tanque también es utilizado para realizar pruebas con sustancias jabonosas o diversos tipos de soluciones. Para evitar que toda la superficie interna entre en contacto con la nueva sustancia, se aísla una sección del tanque instalando dos esclusas verticales, una rectangular (esclusa de superficie azul) y otra en forma de trapecio (esclusa de superficie roja), ambas de 4 m de altura y con una base de igual longitud, puede manipular el siguiente interactivo del tanque con las esclusas mencionadas.



Problema 1

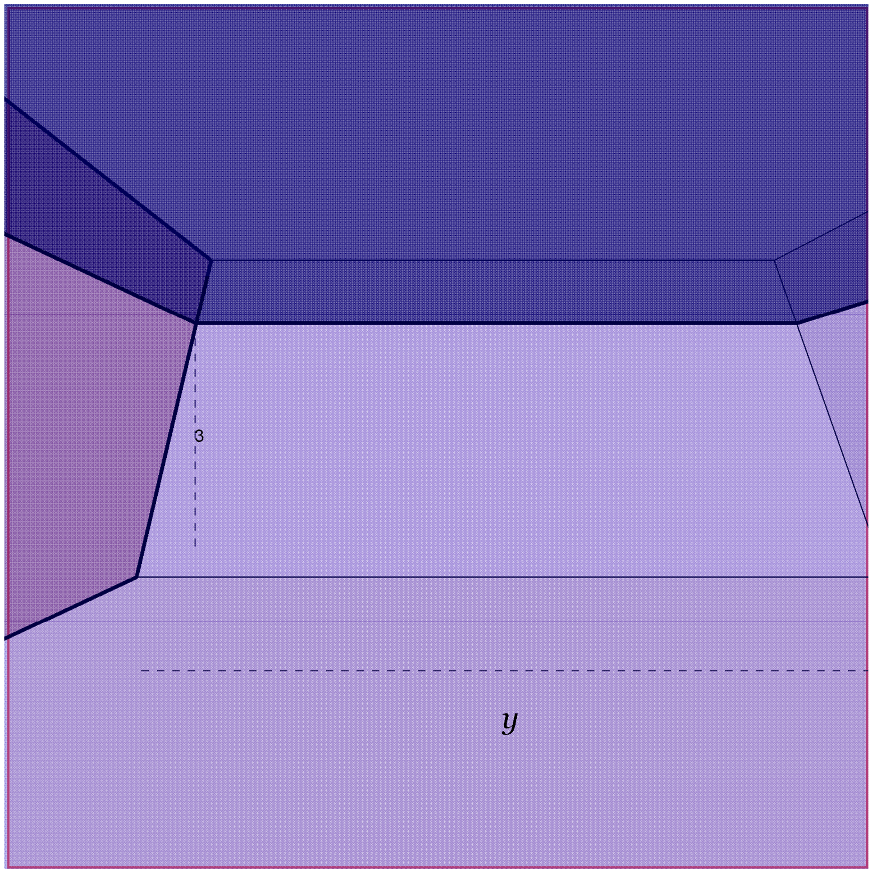
Si se realiza una prueba con 378 m^3 de una sustancia jabonosa que al verterse en el tanque queda un metro abajo del borde:

⇒

¿Cuáles deben ser las dimensiones de cada esclusa?
¿Cuál es el área de cada esclusa?

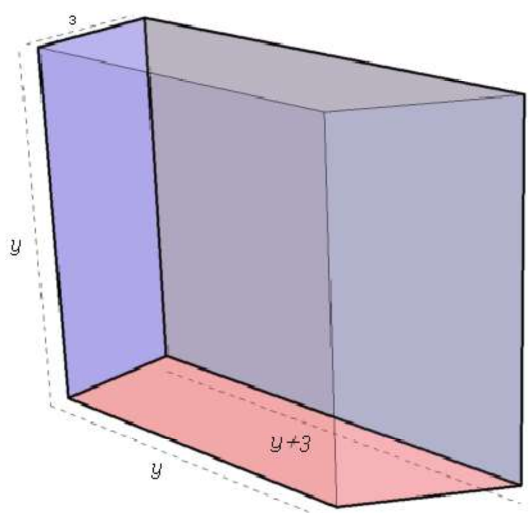
Solución

Cada esclusa tiene 4 m de altura pero la sustancia jabonosa llega hasta los 3 metros. Suponga que las esclusas tienen y metros de base. Por tanto, en la esclusa roja y será la base menor y $y + 3$ será la base mayor.



Como la altura de la sustancia jabonosa es 3 m, el volumen del sólido acotado por las esclusas y el tanque está dado por:

$$V = (A_{\text{esclusa roja}}) \times (\text{profundidad})$$



(El sólido se rota para entender la fórmula)

La esclusa roja tiene forma de trapecio, por lo que su área es

$$\begin{aligned} A_{\text{esclusa roja}} &= \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2} \\ &= \frac{((3+y)+y)\times 3}{2} \\ &= \frac{3\,(3+2\,y)}{2} \end{aligned}$$

La profundidad está dada por y, por tanto, el volumen del sólido acotado por las esclusas es

$$
\begin{aligned}
V &= (A_{\text{esclusa roja}}) \times (\text{profundidad}) \\
&= \frac{3\,(3+2\,y)}{2} \times y \\
&= \frac{3\,y(3+2\,y)}{2}
\end{aligned}
$$

y al igualar esta expresión con el volumen del líquido utilizado queda

$$\frac{3\,y(3+2\,y)}{2} = 378$$

Operando y simplificando la expresión anterior se tiene

$$\frac{9\,y+6\,y^2}{2} = 378$$

$$3\,y^2 + \frac{9\,y}{2} = 378$$

En ecuaciones, así como en expresiones algebraicas, simplificar para trabajar con cantidades enteras o más pequeñas resulta útil, por ejemplo, multiplicar por el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores y/o dividir por el máximo común divisor (MCD), a ambos lados de la ecuación.

Píldora

Que equivale a:

(multiplicando cada término por 2 y dividiendo por 3)

$$2\,y^2 + 3\,y = 252$$

(Verificar el resultado anterior)

Una forma de resolver esta ecuación es igualar a cero y luego factorizar:

$$2\,y^2 + 3\,y - 252 = 0 \qquad (\S)$$

$$(2\,y - 21)\,(y + 12) = 0$$

Se tienen ahora dos factores: $(2\,y-21)$ y $(y+12)$, cuyo producto es cero; y la única forma en que esto ocurre es que uno de ellos o ambos sean iguales a cero, es decir,

Propiedad
Si r, t son números reales tales que $r \cdot t = 0$ entonces $r = 0$ o $t = 0$. En otras palabras, *algún factor debe ser cero.*

De acuerdo con esta propiedad: $2\,y - 21 = 0$, o $y + 12 = 0$.
Al resolver estas ecuaciones lineales se obtienen las soluciones:

$$y = \frac{21}{2} = 10.5 \quad \text{o} \quad y = -12$$

La ecuación tiene entonces dos soluciones: $y = 10.5$ y $y = -12$ ¿Es posible que estos dos valores den solución al ejercicio?

1. $y = 10.5$ quiere decir que las dimensiones de las esclusas serían: **esclusa rectangular (1):** 4 metros de alto y 10.5 metros de largo (base) y **esclusa en forma de trapecio (2):** bases de 10.5 m y 13.5 m, altura 4 metros. El área de la **esclusa (1)** es
   $A_1 = 4\,(10.5) = 45$ metros cuadrados,
   y el área de **esclusa 2** es
   $A_2 = \frac{4\,(10.5+13.5)}{2} = 48$ metros cuadrados.

Prueba: Si $y = 10,\ 5$ entonces el volumen ocupado por la mezcla jabonosa es
$V = \frac{3\,(10.5+13.5)}{2} \cdot (10.5) = \frac{3\,(24)}{2} \cdot (10.5) = 36 \cdot 10.5 = 378\ m^3$.

2. La solución $y = -12$ se descarta porque está asociado a una longitud, a la base 'común' de las esclusas y no puede tomarse un valor negativo.

Las dimensiones son:
Esclusa de forma rectangular: *base* 10.5mm, *altura* 4 m
Esclusa de forma de trapecio: *base menor* 10.5 m, *base mayor* 13.5 m, *altura* 4 m.

≪ Respuesta

El área de la esclusa rectangular es 42 m^2 y,
El área de la esclusa en forma de trapecio es 48 m^2.

≪ Respuesta

En este problema se solucionó por medio de una ***ecuación cuadrática****. Una de las estrategias para resolver este tipo de ecuaciones es igualar a cero, factorizar y encontrar la solución de cada factor.*

Problema 2

Se van a instalar dos logos rectangulares de la empresa que fabrica los tanques de cuatro metros cuadrados cada uno. Si el logo original tiene dimensiones de 50 cm × 80.9 cm,

⇒ *¿Cuáles son las dimensiones de los nuevos logos?*

Solución

El ancho (w) y el largo (l) del nuevo logo deben ser correspondientes con el logo de referencia, es decir, los dos rectángulos deben ser semejantes. A partir de esto se obtiene la proporción

$$\frac{l}{w} = \frac{80.9}{50} \tag{1}$$

Otra condición para el diseño del logo a instalar es que su área sea cuatro metros cuadrados, es decir:

$$w \cdot l = 4 \tag{2}$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se pueden obtener las dimensiones, para esto se despeja l de la ecuación (1),

$$l = \frac{80.9}{50}\, w$$

y se reemplaza en la ecuación (2), lo que origina la ecuación

$$\frac{80.9}{50}\, w^2 = 4 \qquad (\S\S)$$

Una forma de despejar w es:

$$\frac{80.9}{50}\, w^2 = 4$$
$$w^2 = \frac{200}{80.9}$$
$$w = \pm\sqrt{\frac{200}{80.9}}$$

De los dos valores de w que dan solución a la ecuación solo se toma el positivo (*¿por qué?*). Así que, $w \approx 1.572$ metros y $l \approx 2.544$ metros.

1. Las dimensiones del nuevo logo son 1.572×2.544.

Prueba: Si $w \approx 1.572$ y $l \approx 2.544$ entonces $\frac{l}{w} = \frac{2.544}{1.572} \approx 1.618 \approx \frac{80.9}{50}$ (la proporción se cumple).

También se cumple que $w \cdot l = (1.572)(2.544) \approx 4$

2. $w \approx -1.572$ fue descartado.

El nuevo logo tiene de ancho 1.572 metros, aproximadamente y 2.544 metros de largo.

≪ Respuesta

Resumen

En los dos problemas anteriores las ecuaciones (§) y (§§) son llamadas ***ecuaciones cuadráticas***, y para resolverlas se pueden considerar varios métodos, entre ellos: *factorizar, completar cuadrados* y *fórmula cuadrática*.

Toda ecuación de la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, donde $a,\ b$ y c son números reales con $a \neq 0$, es llamada **ecuación cuadrática** en x o **ecuación de segundo grado** en x.

Este tipo de ecuaciones no siempre tiene solución; de tener solución real, una ecuación cuadrática puede tener máximo dos soluciones.

Ecuaciones

Definición | **Lineal** | **Cuadrática**

Definición de una ecuación cuadrática:
Toda ecuación de la forma $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, donde a, b y c son números reales y a es distinto de cero, es llamada **ecuación cuadrática** en x o **ecuación de segundo grado** en x.

Para resolver ecuaciones cuadráticas es necesario que uno de los lados de la igualdad sea cero (se conoce como *igualar a cero*), luego se puede aplicar el método de la ⇒ factorización , fórmula cuadrática

Tipos de solución de una ecuación cuadrática

Ejemplos de solución de ecuaciones cuadráticas

Ejemplo 1 | Ejemplo 2 | Ejemplo 3 | Ejemplo 4 | Ejemplo 5 | Ejemplo 6 | Ejemplo 7 | Ejemplo 8

Resolver la ecuación $\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 2 = -1$

$$\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 2 = -1$$

$$\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 3 = 0$$

$$6\left(\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 3\right) = 0\ 6$$

$$10\,t^2 - 13\,t + 18 = 0$$

$$t = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\ 10\ 18}}{2\ 10}$$

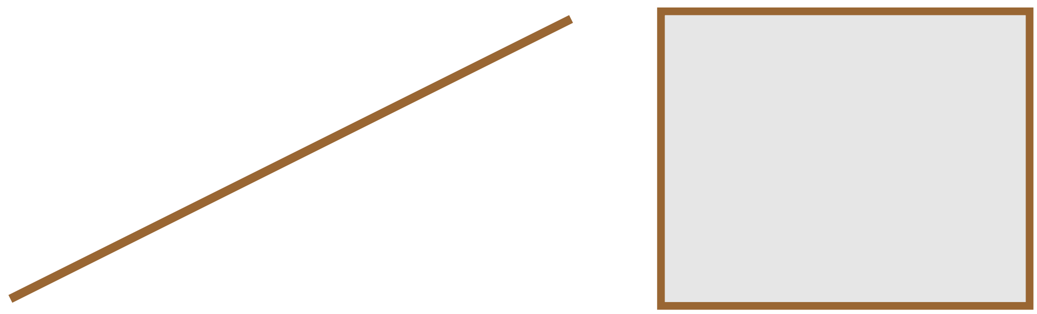
$$t = \frac{13 \pm \sqrt{-551}}{20}$$

No tiene solución, el conjunto solución es vacío.

Ejemplos que involucran el uso de ecuaciones cuadráticas

» Ejemplo 1

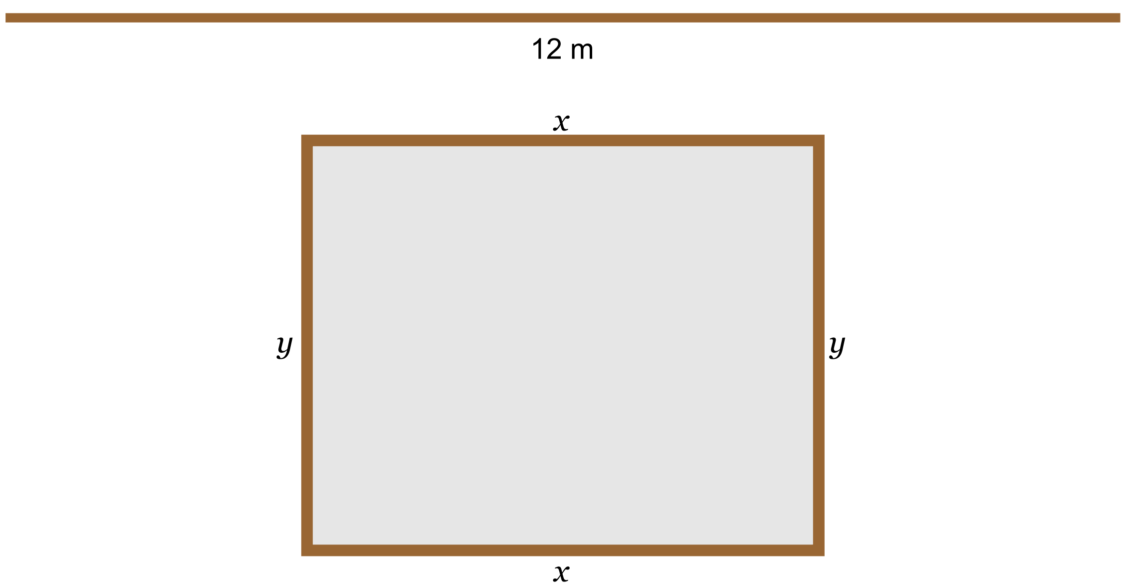
Se tiene una tira de madera de 12 metros para construir el bastidor de un cuadro de pintura cuyo lienzo debe ser el más grande posible.



¿Cuánto lienzo se necesita?
¿Qué tipo de figura resulta ser el cuadro?

Solución

Se considera un cuadro de largo x metros y ancho y metros. A partir de la condición de la cinta se tiene la ecuación $2x + 2y = 12$.



La ecuación $2x + 2y = 12$ se puede simplificar dividiendo entre 2 cada término de la igualdad, quedando $x + y = 6$ (1).

Al suponer que el área del lienzo es A metros cuadrados, la ecuación asociada toma la forma $A = xy$, y de la ecuación (1) de la cinta se despeja y, que luego se reemplaza en el área, así:

$$y = 6 - x,$$
$$A = xy$$
$$A = x(6 - x)$$

Operando e igualando a cero se llega a la ecuación cuadrática:

$$-x^2 + 6x - A = 0$$

Ya que el coeficiente de x^2 es negativo, se puede multiplicar cada término de la igualdad por (-1) y así cambiar los signos en la ecuación, quedando:

$$x^2 - 6x + A = 0$$

Tratar de resolver esta ecuación cuadrática por el método de factorización no es posible, debido a la A, del último término, y en estos casos es útil emplear la fórmula cuadrática; lo primero que se hace es identificar los coeficientes que intervienen en la fórmula cuadrática:
$a = 1,\ b = -6$ y $c = A$.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\,(1)\,(A)}}{2\,(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4A}}{2}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{9 - A}$$

Esta solución deja ver que el área (A) debe ser de 9 o menos y positiva, es decir, el mayor valor que puede tomar el área del lienzo es 9 m^2 y las dimensiones son $x = y = 3$ metros (*¿por qué?).*

Se requieren 9 m^2 de lienzo y aunque son muchos los cuadros en forma de rectángulo que tienen 12 metros de perímetro, el que tiene la mayor área posible es un cuadrado. *≪ Respuesta*

» Ejemplo 2

Caída libre: Suponga que cierto cuerpo se deja caer desde una altura h_0 sobre el nivel del suelo (por ejemplo, desde un edificio). La altura del cuerpo después de t segundos se puede modelar con la ecuación:

$$h = -4.9\,t^2 + h_0,$$

donde la altura h se mide en metros y el tiempo t en segundos.

⇒ *Si una bola de bolos se deja caer desde 50 metros de altura, ¿cuál es la altura después de 3 segundos de ser lanzada? ¿cuánto tarda en llegar al suelo?*

Solución

Como el cuerpo se deja caer desde 50 metros, entonces $h_0 = 50$, por tanto, la ecuación queda:

$$h = -4.9\,t^2 + 50,$$

al reemplazar $t = 3$ se tiene que

$$\begin{aligned} h &= -4.9\,(3)^2 + 50 \\ &= 5.9 \end{aligned}$$

Después de 3 segundos la altura de la bola de bolos es de 5.9 metros. *≪ Respuesta*

Cuando la bola llega al suelo significa que la altura es cero, por tanto, en la ecuación a despejar es:

$$0 = -4.9\,t^2 + 50$$

en este caso no es necesario usar la fórmula cuadrática, la ecuación se puede despejar de la siguiente manera:

$$0 = -4.9\,t^2 + 50$$

$$4.9\,t^2 = 50$$

$$t^2 = \frac{50}{4.9}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{50}{4.9}}$$

por tanto, las soluciones son, aproximadamente $t \approx 3.19438$ y $t \approx -3.19438$, como t representa el tiempo, la solución negativa se debe descartar.

La bola de bolos tarda aproximadamente 3.2 segundos en llegar al suelo. « Respuesta

» Ejemplo 3

Un supermercado cuenta con grandes existencias de manzanas que debe vender rápidamente. El gerente sabe que, si las manzanas se ofrecen a p pesos por libra, venderá x libras. La relación entre p y x es:

$$x = \frac{45}{2} - \frac{p}{400} \qquad (1)$$

⇒ *El ingreso obtenido de la venta es la cantidad de libras de manzanas vendidas por el valor de cada libra, es decir $I = xp$.*
¿Qué precio se debe fijar con el fin de obtener un ingreso de $45,000 por venta?

Solución

La ecuación de ingreso es $I = xp$, reemplazando x de la ecuación (1) se tiene que:

$$I = \left(\frac{45}{2} - \frac{p}{400}\right) p \qquad (2)$$

la cual es una ecuación cuadrática que al expandir queda:

$$I = \frac{45\,p}{2} - \frac{p^2}{400}$$

ya que se desea conocer el precio p para un ingreso de $45,000 por venta, la ecuación a despejar es:

$$45\,000 = \frac{45\,p}{2} - \frac{p^2}{400}$$

cuyas soluciones son $p = 3000$ y $p = 6000$.

(despeje p de la ecuación $45\,000 = \frac{45\,p}{2} - \frac{p^2}{400}$ y compruebe las soluciones*)*

Al fijar un precio de $3,000 o de $6,000 por libra de manzana, se obtiene el ingreso deseado de $45,000 por venta. « Respuesta

Ejercicios de refuerzo*

» Ejercicios procedimentales

1. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas. De no tener solución, comente.
   - $-7\,x^2 + 2\,x + 5 = 0$
   - $5\,x^2 + 3 = 5$
   - $\frac{9\,x^2}{5} + \frac{6\,x}{4} + 1 = 0$
2. Resolver las siguientes ecuaciones:
   - $(x - 3)\,(2\,x + 7) = 0$
   - $3\left(\frac{-9\,x+2}{4}\right)^2 - 5\,x = 1$
   - $(x - 3)\,(2\,x + 7) = 1$
3. De la ecuación $A = p\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$, despeje la variable i.
4. De la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, despeje la variable x.

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas. De no tener solución, comente.

- $-7\,x^2+2\,x+5=0$

  La solución es:

$$\begin{aligned} -7\,x^2+2\,x+5 &= 0 \\ 7\,x^2-2\,x-5 &= 0 \\ x &= \tfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\,(7)\,(-5)}}{2\,(7)} \\ x &= \tfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\,(7)\,(-5)}}{2\,(7)} \\ x &= \tfrac{2\pm\sqrt{4+140}}{14} \\ x &= \tfrac{2\pm\sqrt{144}}{14} \\ x &= \tfrac{2\pm12}{14} \\ x_1 &= \tfrac{2+12}{14},\quad x_2 = \tfrac{2-12}{14} \\ x_1 &= 1,\quad x_2 = -\tfrac{5}{7} \end{aligned}$$

  El conjunto solución es $\left\{1,\ -\frac{5}{7}\right\}$.

- $5\,x^2+3=5$

  La solución es:

$$\begin{aligned} 5\,x^2+3 &= 5 \\ 5\,x^2 &= 2 \\ x^2 &= \tfrac{2}{5} \\ x &= \pm\sqrt{\tfrac{2}{5}} \\ x_1 &= \sqrt{\tfrac{2}{5}},\quad x_2 = -\sqrt{\tfrac{2}{5}} \end{aligned}$$

  El conjunto solución es $\left\{-\sqrt{\frac{2}{5}},\ \sqrt{\frac{2}{5}}\right\}$.

- $\frac{9\,x^2}{5}+\frac{6\,x}{4}+1=0$

  La solución es:

$$\frac{9x^2}{5} + \frac{6x}{4} + 1 = 0$$
$$\frac{(9x^2)(4)}{5 \times 4} + \frac{(6x)(5)}{4 \times 5} + \frac{(1)(20)}{20} = 0$$
$$\frac{36x^2}{20} + \frac{30x}{20} + \frac{20}{20} = 0$$
$$\frac{36x^2+30x+20}{20} = 0$$
$$36x^2 + 30x + 20 = 0$$
$$2(18x^2 + 15x + 10) = 0$$
$$18x^2 + 15x + 10 = 0$$
$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{(15)^2 - 4(18)(10)}}{2(18)}$$
$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225-720}}{36}$$
$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{-495}}{36}$$

La ecuación no tiene solución real, el conjunto solución es vacío.

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

- $(x-3)(2x+7) = 0$

  Ya que la ecuación está factorizada e igualada a cero, la solución es:

$$(x-3)(2x+7) = 0$$
$$x - 3 = 0, \qquad 2x + 7 = 0$$
$$x = 3, \qquad x = -\frac{7}{2}$$

  El conjunto solución es $\left\{-\frac{7}{2}, 3\right\}$.

- $(x-3)(2x+7) = 1$

  Para dar solución a la ecuación, primero se expande el lado izquierdo y luego se iguala a cero:

$$(x-3)(2x+7) = 1$$
$$2x^2 + x - 21 = 1$$
$$2x^2 + x - 22 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-22)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{177}}{4}$$
$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{177}}{4}, \qquad x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{177}}{4}$$

  El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{177}}{4}, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{177}}{4}\right\}$.

3. De la ecuación $A = p\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$, despeje la variable i.

Para despejar la variable i se puede encontrar las raíces a ambos lados:

$$A = p\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$$
$$\frac{A}{p} = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{A}{p}} = 1 + \frac{i}{100}$$
$$1 + \frac{i}{100} = \pm\sqrt{\frac{A}{p}}$$
$$\frac{i}{100} = \pm\sqrt{\frac{A}{p}} - 1$$
$$i = 100\left(\pm\sqrt{\frac{A}{p}} - 1\right)$$
$$i_1 = 100\sqrt{\frac{A}{p}} - 100, \quad i_2 = -100\sqrt{\frac{A}{p}} - 100$$

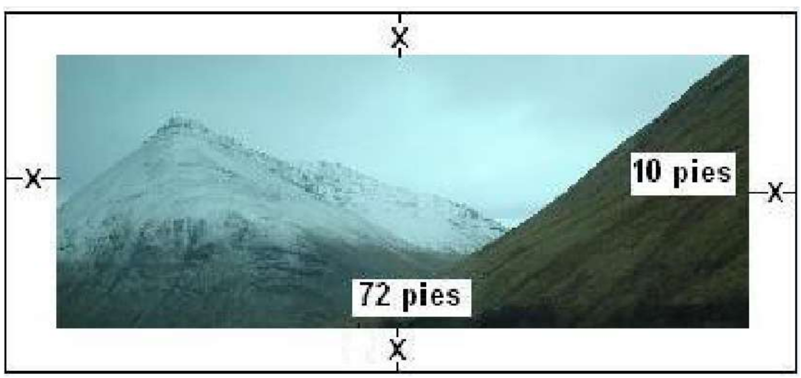
4. De la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, despeje la variable x.

Para despejar la variable x se puede encontrar las raíces a ambos lados:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 = r^2 - y^2$$
$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$$
$$x_1 = \sqrt{r^2 - y^2}, \quad x_2 = -\sqrt{r^2 - y^2}$$

» Problemas de aplicación

1. ¿Qué ancho (x) tiene el marco que rodea la foto de la figura si el área del marco es igual al área de la foto?



2. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm² cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halle las dimensiones de la caja.

3. Al lanzar un objeto hacia arriba con una velocidad incial v_i, su altura (en metros) después de t segundos se puede modelar mediante la ecuación $h = v_i\,t - 4.9\,t^2$. Suponga que una pelota se lanza directamente hacia arriba con una velocidad de 40 m / s.

3.1. ¿Es posible que la pelota llegue a una altura de 50 m?

3.2. ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 10 m?

3.3. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la pelota cae al suelo?

4. Una compañía editorial sabe que si fija un precio de $39,000 a su nuevo libro, se venderán 10,000 copias. Por cada $1,000 que aumente el precio se dejará de vender 100 libros.

La siguiente expresión relaciona la cantidad de copias vendidas (n), con el precio de venta (p):

$$n = -\frac{1}{10}\,p + 13\,900 \qquad (1)$$

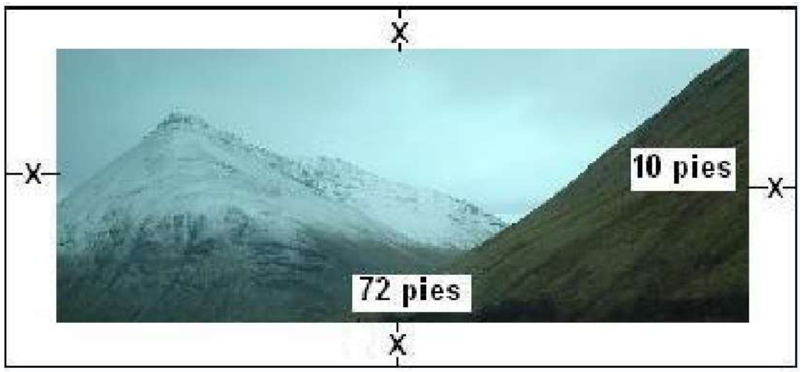
¿Cuál debe ser el precio al que se debe vender cada libro para generar un ingreso de \$480,000,000?

** Algunos ejercicios propuestos son tomados de la cartilla: "Introducción a las matemáticas", desarrollada por docentes del Departamento de Matemáticas. Segundo semestre 2012.*

» *Soluciones a los ejercicios*

1. ¿Qué ancho (x) tiene el marco que rodea la foto de la figura si el área del marco es igual al área de la foto?

El área de la foto es $A = 72 \times 10 = 720$ pies^2, para encontrar el área del marco este se puede dividir en cuatro partes (note que no es la única manera de dividir el marco):



Las partes superior e inferior son iguales y sus áreas son: $A_{P1} = 72\,x$, las partes de los lados también son iguales y sus áreas son: $A_{P2} = x(10 + 2\,x)$.

Por tanto, el área del marco se puede expresar como: $2\,A_{P1} + 2\,A_{P2} = 2\,(72\,x) + 2\,x(10 + 2\,x)$. Al igualar las dos expresiones se tiene:

$$720 = 2\,(72\,x) + 2\,x(10 + 2\,x)$$
$$720 = 144\,x + 20\,x + 4\,x^2$$
$$0 = 4\,x^2 + 164\,x - 720$$
$$4\,x^2 + 164\,x - 720 = 0$$
$$x^2 + 41\,x - 180 = 0$$
$$(x + 45)\,(x - 4) = 0$$
$$x = -45, \quad x = 4$$

Aunque se tiene dos soluciones para la ecuación, la solución $x = 4$ es la solución que se puede utilizar en el problema ($x = -45$ no sirve porque no hay distancias negativas).

El ancho del marco debe ser de 4 pies.

2. Para encerrar un terreno rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Como no se conocen las dimensiones del terreno, suponga que el largo mide x metros y el ancho mide y metros. Por tanto, el área del terreno es de $A = x\,y = 750$.

Los 110 m de alambre rodean el terreno, por tanto, representan el perímetro de este $P = 2\,x + 2\,y = 110$.

Al despejar x de la ecuación $2\,x + 2\,y = 110$ se tiene que $x = 55 - y$. Reemplazando este valor en la ecuación de área queda: $(55 - y)\,y = 750$, la cual es una ecuación cuadrática en la cual se puede encontrar el valor de y.

$$(55-y)\,y = 750$$
$$55\,y - y^2 - 750 = 10$$
$$-y^2 + 55\,y - 750 = 0$$
$$y^2 - 55\,y + 750 = 0$$
$$(y-25)\,(y-35) = 0$$
$$y = 25, \quad y = 35$$

Por tanto, las soluciones son: $\{y = 25,\ y = 35\}$. Cuando el ancho es de $y = 25$ m el largo es de $x = 35$ m, y cuando el ancho es de $y = 35$ m, el largo es de $x = 25$ m. Esto quiere decir que las dos soluciones de la ecuación llevan a la misma solución del problema.

El terreno tiene unas dimensiones de 35 metros de largo por 35 metros de ancho.

3. Al lanzar un objeto hacia arriba con una velocidad incial v_i (metros sobre segundo), su altura (en metros) después de t segundos se puede modelar mediante la ecuación $h = v_i\,t - 4.9\,t^2$. Suponga que una pelota se lanza directamente hacia arriba con una velocidad de 40 m / s.

3.1. ¿Es posible que la pelota llegue a una altura de 50 m?

Para saber si la pelota llega a una altura de $h = 50$ metros es necesario despejar t de la ecuación:

$$50 = 40\,t - 4.9\,t^2$$

$$50 = 40\,t - 4.9\,t^2$$
$$4.9\,t^2 - 40\,t + 50 = 0$$
$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(40)^2 - 4\,(4.9)\,(50)}}{2\,(4.9)}$$
$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{620}}{9.8}$$
$$t = \frac{40 + \sqrt{620}}{9.8}, \qquad t = \frac{40 - \sqrt{620}}{9.8}$$
$$t \approx 1.54, \qquad t \approx 6.62$$

Entonces, la pelota llega dos veces a una altura de 50 metros.

3.2. ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 10 m?

Para saber cuándo llega la pelota a una altura de $h = 10$ metros es necesario despejar t de la ecuación:

$$10 = 40\,t - 4.9\,t^2$$

La solución de la ecuación es:

$$10 = 40\,t - 4.9\,t^2$$
$$4.9\,t^2 - 40\,t + 10 = 0$$
$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(40)^2 - 4\,(4.9)\,(10)}}{2\,(4.9)}$$
$$t = \frac{-(-40) \pm \sqrt{1404}}{9.8}$$
$$t = \frac{40 + \sqrt{1404}}{9.8}, \qquad t = \frac{40 - \sqrt{1404}}{9.8}$$
$$t \approx 0.26, \qquad t \approx 7.91$$

La pelota tiene una altura de 10 metros aproximadamente a los 0.26 segundos y a los 7.91 segundos de ser lanzada.

3.3. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la pelota cae al suelo?

Para saber cuándo la pelota llega al suelo ($h = 0$ metros) es necesario despejar t de la ecuación:

$$0 = 40\,t - 4.9\,t^2$$

La solución de la ecuación es:

$$
\begin{aligned}
0 &= 40\,t - 4.9\,t^2\\
4.9\,t^2 - 40\,t &= 0\\
t(4.9\,t - 40) &= 0\\
t = 0, &\quad 4.9\,t - 40 = 0\\
t = 0, &\quad t = \tfrac{40}{4.9}\\
t = 0, &\quad t \approx 8.16
\end{aligned}
$$

Como $t = 0$ es el tiempo en que se lanzó la pelota, esta cae al suelo aproximadamente a los 8.16 segundos de ser lanzada.

4. Una compañía editorial sabe que si fija un precio de \$39,000 a su nuevo libro, se venderán 10 000 copias. Por cada mil pesos que aumente el precio se dejará de vender 100 libros.
La siguiente expresión relaciona la cantidad de copias vendidas (n), con el precio de venta (p):

$$n = -\tfrac{1}{10}\,p + 13\,900 \qquad (1)$$

¿cuál debe ser el precio al que se debe vender cada libro para generar un ingreso de \$480,000,000?

Los ingresos obtenidos resultan del número de copias vendidas (n), multiplicado por el precio de cada copia (p), esto es:

$$I = n\,p = 480\,000\,000$$

Reemplazando n por (1) se tiene que

$$\left(-\tfrac{1}{10}\,p + 13\,900\right) p = 480\,000\,000$$

La cual es una ecuación cuadrática, que se resuelve de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\left(-\tfrac{1}{10}\,p + 13\,900\right) p &= 480\,000\,000\\
-\tfrac{1}{20}\,p^2 + 13\,900\,p &= 480\,000\,000\\
-\tfrac{1}{10}\,p^2 + 13\,900\,p - 480\,000\,000 &= 0\\
\tfrac{1}{10}\,p^2 - 13\,900\,p + 480\,000\,000 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{-(-13\,900) \pm \sqrt{(13\,900)^2 - 4\left(\frac{1}{10}\right)(480\,000\,000)}}{2\left(\frac{1}{10}\right)}\\
p &= \frac{13\,900 \pm \sqrt{1\,210\,000}}{\frac{1}{5}}\\
p &= 5\,(13\,900 \pm 1100)\\
p &= 5\,(13\,900 + 1100), \;\; p = 5\,(13\,900 - 1100)\\
p &= 75\,000, \qquad\qquad p = 64\,000
\end{aligned}
$$

Para obtener un ingreso de \$480,000,000 se pueden vender los libros a \$64,000 o \$75,000.

Ecuaciones no lineales y no cuadráticas

Situación: Construcción de ventanales

Suponga que usted tiene un negocio que se encarga de diseñar ventanales, los cuales pueden ser triangulares, rectangulares, circulares o la unión de alguno de los anteriores.

Matemáticamente, considere el ventanal como una figura plana, por tanto, el **área** del ventanal se puede representar por la medida de la superficie del vidrio y el **perímetro** por la medida de la longitud del marco.

Para esta situación es necesario conocer o recodar algunas definiciones y fórmulas que permiten encontrar los valores del **área** y **perímetro** de figuras planas.

Píldora

El **área** es una noción de medida de **extensión** de la **superficie** de una región plana (dos dimensiones), se expresa en unidades cuadradas (*unidades de superficie*), el área de una región depende de su forma.

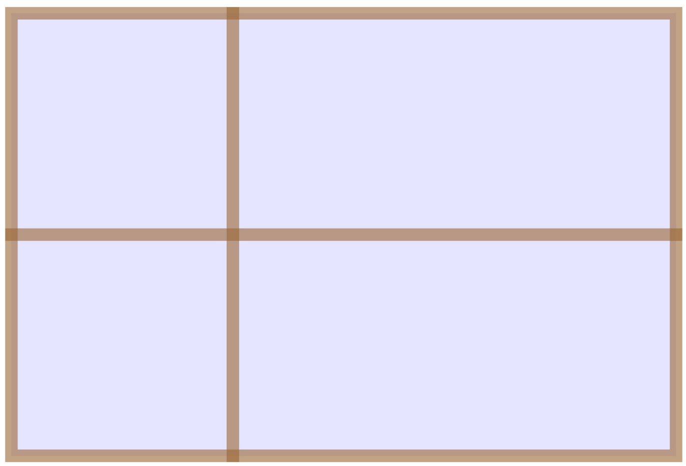
El **perímetro** es una noción de medida de **longitud** del borde o contorno de una región, también depende de su forma.

Píldora

Fórmulas de área y perímetro de algunas figuras planas ⇒ Área y perímetro

Problema 1

Suponga que tiene 12 metros de una tira de madera para diseñar un ventanal rectangular con un área de 3.75 metros cuadrados, dividido en cuatro ventanas como lo indica la siguiente figura:



El marco horizontal divide el ventanal en dos partes iguales y el vertical está ubicado de tal manera que las ventanas de la parte izquierda son cuadradas.

⇒

¿Cuáles son las dimensiones del ventanal?
¿Cuál es el área de cada ventana?

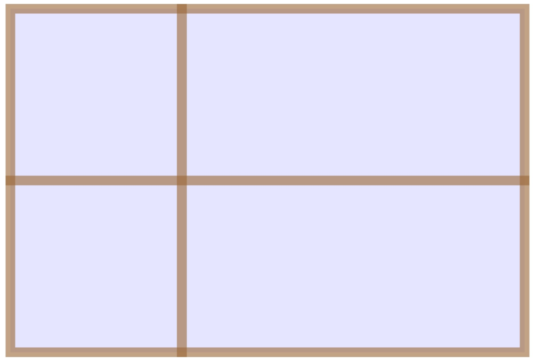
Solución

En esta actividad se pide:

- Encontrar las dimensiones del ventanal.
- Encontrar el área de cada ventana.

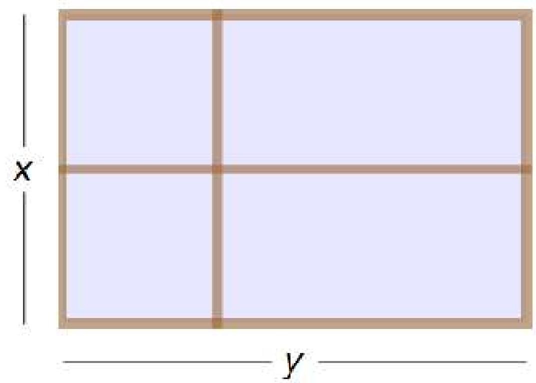
Los datos dados son:

- La forma del ventanal es



- Se utilizan 12 metros de tira de aluminio para el marco.
- El ventanal debe tener un área de 3.75 metros cuadrados.
- El marco horizontal divide el ventanal en dos partes iguales.
- El vertical está ubicado de tal manera que las ventanas de la parte izquierda son cuadradas.

Para determinar las dimensiones del ventanal es necesario asignar variables (pues no la conoce): Sea x la medida de uno de los lados de la ventana y sea y la medida del otro lado, por tanto, el ventanal queda:



Se van a utilizar 12 metros de tira de aluminio para recubrir el ventanal y para los marcos horizontal y vertical, se puede formular la ecuación

$$3\,x + 3\,y = 12 \tag{1}$$

Además, como el área del ventanal es de 3.75 metros cuadrados, se puede formular la ecuación

$$3.75 = x\,y \tag{2}$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se puede determinar los valores de las variables, lo primero es despejar una variable de alguna ecuación. Por ejemplo, al despejar y de la ecuación (2) se tiene:

$$y = \frac{3.75}{x}$$

entonces este valor se puede reemplazar en la ecuación (1), quedando

$$3\,x + 3\left(\frac{3.75}{x}\right) = 12$$

Al despejar x de esta ecuación se encuentra el valor de uno de los lados y luego el valor del otro.

La ecuación $3\,x + 3\left(\frac{3.75}{x}\right) = 12$ **no es lineal ni tampoco cuadrática**, por tanto, las estrategias utilizadas anteriormente no se pueden usar *directamente*, recuerde, el objetivo es despejar la variable x y encontrar el o los valores que den solución al problema.

Una de las manera de despejar x de $3\,x + 3\left(\frac{3.75}{x}\right) = 12$ es:

$$3\,x+3\left(\frac{3.75}{x}\right)=12$$
$$3\,x+\frac{11.25}{x}=12$$
$$\frac{3\,x^2+11.25}{x}=12$$
$$3\,x^2+11.25=12\,x\,,\qquad (x\neq 0)$$
$$3\,x^2-12\,x+11.25=0$$

Entonces, por medio de operaciones aritméticas y simplificación de expresiones en la ecuación $3\,x+3\left(\frac{3.75}{x}\right)=12$, que no es lineal ni cuadrática se llegó a la ecuación $3\,x^2-12\,x+11.25=0$ que es una ecuación cuadrática (note que $x\neq 0$ es porque no se puede dividir entre cero).
La ecuación tiene dos soluciones: $x=1.5$ y $x=2.5$ (*¿porqué?*), ¿es posible que la pregunta tenga dos soluciones?

1. $x=1.5$ quiere decir que uno de los lados del ventanal mide 1.5 metros, por tanto, el otro lado mide $y=\frac{3.75}{x}=\frac{3.75}{1.5}=2.5$ metros.

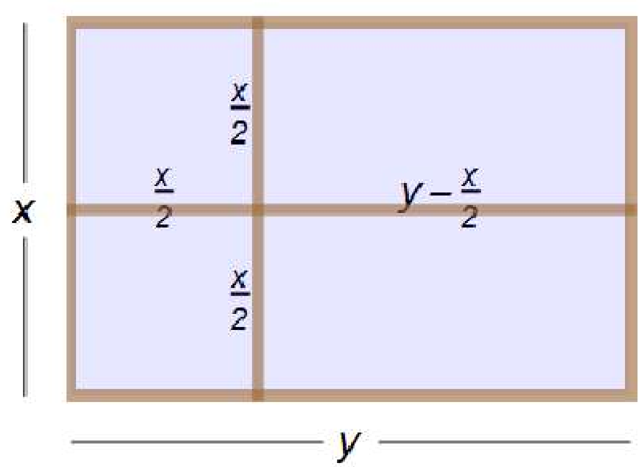
   Prueba: Si $x=1.5\,m$, $y=2.5\,m$.
   Entonces el área es $A=x\,y=1.5\times 2.5=3.75\,m^2$.

   Y el material utilizado para el marco es $3\,x+3\,y=(3\times 1.5)+(3\times 2.5)=12\,m$.

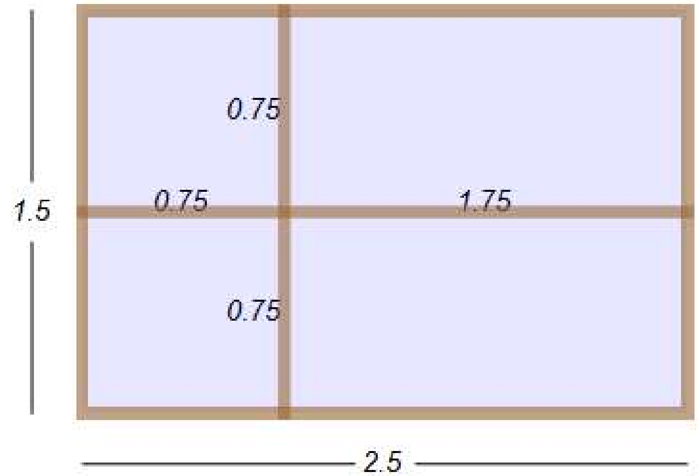
2. $x=2.5$ quiere decir que uno de los lados del ventanal mide 2.5 metros y el otro mide 1.5 metros, es la misma respuesta del numeral anterior. Por tanto, **las dos soluciones de la ecuación llevan al mismo resultado**.

Las dimensiones del ventanal son 1.5 metros y 2.5 metros. « *Respuesta*

Ahora, teniendo en cuenta las condiciones de los marcos horizontal y vertical, se puede deducir que la medida del lado del cuadrado es $x/2$, por tanto, se puede asignar las siguientes variables.



Reemplazando por los valores encontrados se tiene



y ahora se puede encontrar el área de cada ventana

Área de las ventanas cuadradas: $A = 0.75^2 = 0.5625$ metros cuadrados.
Área de las ventanas rectangulares: $A = 0.75 \times 1.75 = 1.3125$ metros cuadrados.

« Respuesta

*Con esta actividad se evidenció una aplicación de otro tipo de ecuaciones (**las no lineales y no cuadráticas**). Una de las estrategias para resolver este tipo de ecuaciones es "convertirlas" en lineales o cuadráticas, encontrar las soluciones y probar dicho tipo de soluciones en la ecuación original (o en el contexto). A continuación, se resolverán algunos ejemplos de estas ecuaciones, lea detenidamente cada uno para identificar las estrategias empleadas, intente resolver solo alguno de los ejercicios y compruebe su desarrollo con el planteado.*

Ejemplos de solución de ecuaciones

» Ejemplo 1:

De ser posible, encontrar la solución de la ecuación $-1 - \frac{-z+2}{-3z-1} = 0$

Solución:

Primero se debe analizar las restricciones del denominador de tal manera que no sea cero, en esta caso $z \neq \frac{1}{3}$

La estrategia es sumar las fracciones para que la suma de los dos términos dé solo una fracción

$$\begin{aligned} -1 - \frac{-z+2}{-3z-1} &= 0 \\ \frac{-1(-3z-1)}{-3z-1} - \frac{-z+2}{-3z-1} &= 0 \\ \frac{-(-3z-1)-(-z+2)}{-3z-1} &= 0 \\ \frac{3z+1+z-2}{-3z-1} &= 0 \\ \frac{4z-1}{-3z-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se tiene una sola fracción igualada a cero. "*La única forma que una división sea cero es cuando el numerador es cero*", por tanto:

$$\frac{4z-1}{-3z-1} = 0$$
$$4z-1=0$$
$$z=\frac{1}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

» Ejemplo 2.

De ser posible, encontrar la solución de la ecuación $\sqrt{2y-2} - y = -1$

Solución:

La estrategia es dejar a un lado de la igualdad la raíz, de tal manera que se pueda elevar al cuadrado en ambos lados de la igualdad para que la raíz se "*cancele*" $\left(\sqrt{\textbf{exp}}\right)^2 = \textbf{exp}$.

$$\sqrt{2y-2} - y = -1$$
$$\sqrt{2y-2} = y-1$$
$$\left(\sqrt{2y-2}\right)^2 = (y-1)^2$$
$$2y-2 = y^2-2y+1$$

Ahora que no está la expresión con la raíz se tiene una ecuación cuadrática, la cual se puede organizar y resolver con los métodos ya conocidos,

$$2y-2 = y^2-2y+1$$
$$-y^2+4y-3=0$$
$$y^2-4y+3=0$$
$$(y-3)(y-1)=0$$
$$y=3, \quad y=1$$

En este tipo de ecuaciones es importante probar las soluciones encontradas, ya que al elevar al cuadrado las expresiones, se pueden introducir falsas soluciones.

Prueba:

$y=3$, $\sqrt{2(3)-2} - (3) = \sqrt{4} - 3 = 2-3 = -1$, sí es solución.

$y=1$, $\sqrt{2(1)-2} - (1) = 0-1 = -1$, sí es solución.

El conjunto solución es $\{1, 3\}$.

» Ejemplo 3.

De ser posible, encontrar la solución de la ecuación $\frac{3t+3}{t+2} - \frac{-2t+1}{2t-1} = 3$

Solución:

Primero se debe analizar las restricciones del denominador, de tal manera que no sea cero, en este caso $t \neq -2$ y $t \neq \frac{1}{2}$.

Primero se debe igualar la ecuación a cero y luego sumar las fracciones para que la suma de los términos dé solo una fracción

$$\frac{3t+3}{t+2} - \frac{-2t+1}{2t-1} = 3$$
$$\frac{3t+3}{t+2} - \frac{-2t+1}{2t-1} - 3 = 0$$
$$\frac{(3t+3)(2t-1)}{(t+2)(2t-1)} - \frac{(-2t+1)(t+2)}{(2t-1)(t+2)} - \frac{3(2t-1)(t+2)}{(2t-1)(t+2)} = 0$$
$$\frac{(3t+3)(2t-1)-(-2t+1)(t+2)-3(2t-1)(t+2)}{(t+2)(2t-1)} = 0$$
$$\frac{6t^2+3t-3-(-2t^2-3t+2)-(6t^2+9t-6)}{(t+2)(2t-1)} = 0$$
$$\frac{2t^2-3t+1}{(t+2)(2t-1)} = 0$$

Ahora se tienen una sola fracción igualada a cero. "*La única forma que una división sea cero es cuando el numerador es cero*", por tanto:

$$\frac{2t^2-3t+1}{(t+2)(2t-1)} = 0$$
$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$
$$t = \frac{1}{2}, \quad t = 1$$

Como $t \neq \frac{1}{2}$, entonces esa no es una solución de la ecuación original, por tanto, conjunto solución es $\{1\}$.

» Ejemplo 4.

De ser posible, encontrar la solución de la ecuación $x^3 - x = 0$

Solución:

Ya que el grado de la expresión es 3, no se puede resolver con la fórmula cuadrática (que solo sirve para ecuaciones de grado 2). En este caso la estrategia consiste en factorizar.

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x+1)(x-1) = 0$$
$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$$

Si los factores de una multiplicación están igualados a cero indica que alguno de ellos debe ser cero, por tanto, cada uno de los factores se iguala a cero y se despeja x.

El conjunto solución es $\{-1, 0, 1\}$.

» Ejemplo 5.

De ser posible, encontrar la solución de la ecuación $2(x-4)^{-1} = -3(x+1)^{-1}$

Solución:

Antes de comenzar a resolver la ecuación es necesario escribirla como fraccionario

$$\frac{2}{x-4} = \frac{-3}{x+1}$$

Primero se debe analizar las restricciones de los denominadores, de tal manera que no sean cero, en este caso $x \neq 4$ y $x \neq -1$.

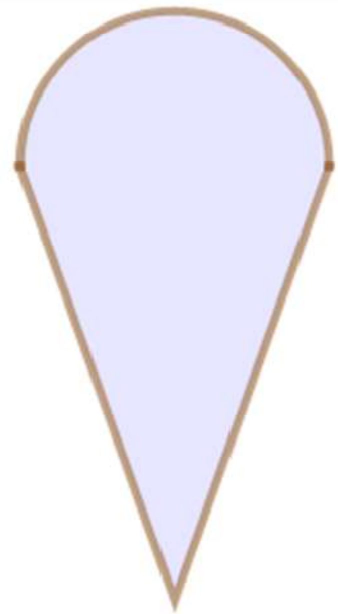
Haciendo uso del conocimiento de proporciones, se sabe que se puede realizar el producto cruzado, por tanto:

$$\frac{2}{x-4} = \frac{-3}{x+1}$$
$$2\,(x+1) = -3\,(x-4)$$
$$2\,x+2 = -3\,x+12$$
$$5\,x = 10$$
$$x = 2$$

El conjunto solución es $\{2\}$.

Problema 2

En esta actividad usted debe encontrar las dimensiones de dos modelos diferentes de ventanales correspondientes a los siguientes diseños:

Modelo ventanal 1	Modelo ventanal 2
	

Para ambos casos dispone de 15 metros de una tira de madera delgada para el marco y el área encerrada debe ser de 4 metros cuadrados.

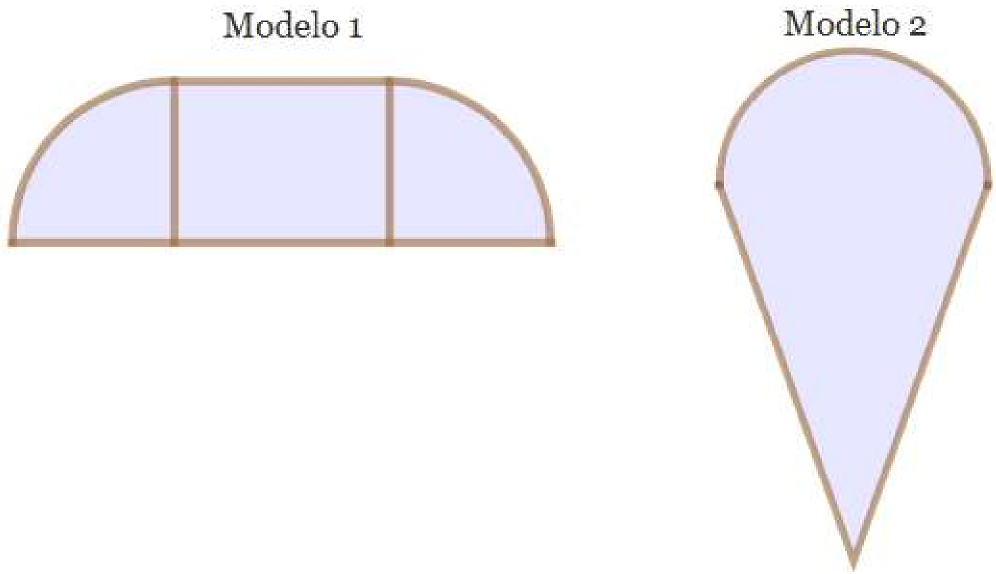
Solución

En esta actividad se pide:

- Encontrar las dimensiones de cada modelo de ventanal.

Los datos dados son:

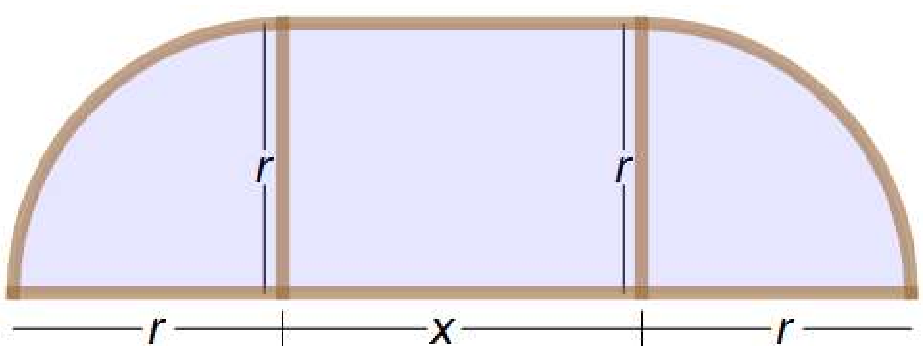
- La forma de los ventanales son



- En cada uno se utilizan 15 metros de una tira de madera para el marco.
- Cada ventanal debe tener un área de 4 metros cuadrados.

» *Modelo ventanal 1*

Como piden las dimensiones del ventanal es necesario asignarle variables (pues hay datos que no conoce), el ventanal está compuesto por dos cuartos de circunferencia con el mismo radio (uno a cada lado) y en la mitad de estas un rectángulo.
Las dimensiones de las circunferencias dependen de la medida del radio, por tanto, la variable r representa la medida del radio de las circunferencias.
Las dimensiones del rectángulo dependen de las medidas de los lados, uno de ellos es r y x representa la medida del otro.
El ventanal queda:



Se va a utilizar 15 metros de tira de madera para recubrir el ventanal y para los marcos verticales, sumando cada pedazo de marco, teniendo en cuenta que en las secciones laterales son curvos (como el perímetro de un cuarto de círculo), se tiene que:

$$15 = r + x + r + \left(\frac{1}{4}\right) 2\pi r + x + \left(\frac{1}{4}\right) 2\pi r + r + r$$

$$15 = 4r + 2x + \left(\frac{2}{4}\right)(2\pi r)$$

$$15 = 4r + 2x + \pi r \qquad (1)$$

Además, como el área del ventanal es de 5 metros cuadrados, y está compuesta por el área de dos cuartos de circunferencia y un rectángulo, se tiene que

$$5 = \left(\frac{1}{4}\right)\pi\, r^2 + x\, r + \left(\frac{1}{4}\right)\pi\, r^2$$
$$5 = \left(\frac{2}{4}\right)\pi\, r^2 + x\, r$$
$$5 = \left(\frac{1}{2}\right)\pi\, r^2 + x\, r \qquad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se puede determinar los valores de las variables r y x, lo primero es despejar una variable de alguna ecuación. Por ejemplo, al despejar x de la ecuación (2) se tiene:

$$5 = \frac{\pi\, r^2}{2} + x\, r$$
$$5 - \frac{\pi\, r^2}{2} = x\, r$$
$$\frac{10-\pi\, r^2}{2} = x\, r$$
$$x = \frac{10-\pi\, r^2}{2\, r}$$

entonces este valor se puede reemplazar en la ecuación (1), quedando:

$$15 = 4\, r + 2\left(\frac{10-\pi\, r^2}{2\, r}\right) + \pi\, r$$

Al despejar r de esta ecuación se encuentra el valor de una de las dimensiones y con este se puede encontrar la otra.

La ecuación $15 = 4\, r + 2\left(\frac{10-\pi\, r^2}{2\, r}\right) + \pi\, r$ **no es lineal ni tampoco cuadrática**, a continuación se muestra una de las maneras de despejar r.

$$15 = 4\, r + 2\left(\frac{10-\pi\, r^2}{2\, r}\right) + \pi\, r$$
$$15 = 4\, r + \frac{10-\pi\, r^2}{r} + \pi\, r$$
$$15 = 4\, r + \frac{10}{r} - \frac{\pi\, r^2}{r} + \pi\, r$$
$$15 = 4\, r + \frac{10}{r} - \pi\, r + \pi\, r$$
$$15 = \frac{4\, r^2+10}{r}$$
$$15\, r = 4\, r^2 + 10, \qquad (r \neq 0)$$
$$4\, r^2 + 10 - 15\, r = 0$$
$$4\, r^2 - 15\, r + 10 = 0$$

Por tanto, cuando $r \neq 0$, la ecuación $15 = 4\, r + 2\left(\frac{10-\pi\, r^2}{2\, r}\right) + \frac{\pi\, r}{2}$ es semejante a la ecuación cuadrática $4\, r^2 - 15\, r + 10 = 0$. Cuyas soluciones son $r \approx 0.867218$ y $r \approx 2.88278$

1. $r \approx 0.867$ quiere decir que el radio del ventanal mide aproximadamente 0.867 metros, por tanto, el lado del rectángulo mide $x = \frac{10-\pi\, r^2}{2\, r} \approx \frac{10-\pi\,(0.867218)^2}{2\,(0.867218)} \approx 4.403$ metros.

   Prueba: Si $r \approx 0.867\, m$, $x = 4.403\, m$.
   Entonces el área es $A = \frac{\pi\, r^2}{2} + x\, r \approx \frac{\pi\,(0.867)^2}{2} + (0.867)\,(4.403) \approx 5\, m^2$.

   Y el material utilizado para el marco es $4\, r + 2\, x + \pi\, r \approx 4\,(0.86) + 2\,(4.40) + \pi\,(0.867) \approx 15\, m$.

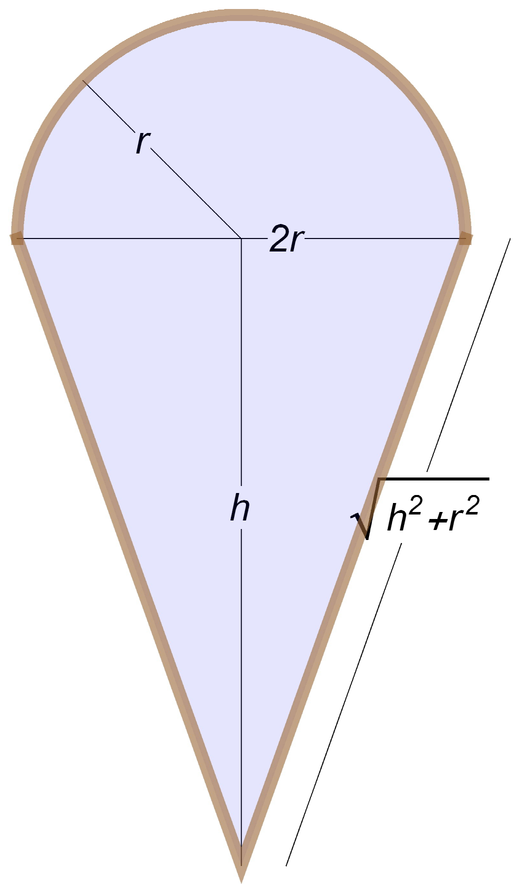
2. $r \approx 2.88$ quiere decir que el radio del ventanal mide aproximadamente 2.882 metros, por tanto, el lado del rectángulo mide $x = \frac{10-\pi\, r^2}{2\, r} \approx \frac{10-\pi\,(2.88)^2}{2\,(2.88)} \approx -2.793$ metros. Entonces esta **solución no sirve** por que x es negativo y no tiene sentido en el problema.

Las dimensiones del ventanal son: 0.867 metros en los radios de las circunferencias y 4.403 metros en uno de los lados del rectángulo.

≪ *Respuesta*

» *Modelo ventanal 2*

Como piden las dimensiones del ventanal es necesario asignar variables (pues hay datos que no conoce), el ventanal está compuesto por media circunferencia y un triángulo *isósceles*.
La circunferencia depende de la medida del radio, por tanto, r representa la medida del radio de la circunferencia.
La dimensión del triángulo depende de las medidas de los lados, si h representa la altura del triángulo, la base mide $2\,r$ (la base mide igual que el diámetro de la circunferencia) y $\sqrt{h^2+r^2}$ es la medida de los otros dos lados (aplicando teorema de Pitágoras se encuentra la hipotenusa de un triángulo rectángulo),
El ventanal queda:



Se va a utilizar 15 metros de tira de madera para recubrir el ventanal, sumando cada pedazo de marco, teniendo en cuenta que la sección superior es curva (como el perímetro de medio círculo), se tiene que:

$$15 = \left(\tfrac{1}{2}\right) 2\,\pi\, r + 2\,\sqrt{h^2+r^2}$$

$$15 = \pi\, r + 2\,\sqrt{h^2+r^2}$$

$$15 = \pi\, r + 2\,\sqrt{h^2+r^2} \qquad (1)$$

El área de media circunferencia es $\left(\frac{1}{2}\right)\pi \mathrm{r}^2$ y el área del triángulo es $\frac{(2\,r)\,(h)}{2} = r\,h$. Como el área del ventanal es de 5 metros cuadrados, y está compuesta por el área del triángulo isósceles y media circunferencia, entonces

$$5 = \left(\tfrac{1}{2}\right)\pi \mathrm{r}^2 + \; r\,h \qquad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se puede determinar los valores de las variables r y h, lo primero es despejar una variable de alguna ecuación. Por ejemplo, al despejar h de la ecuación (2) se tiene:

$$5 = \frac{\pi r^2}{2} + r h$$
$$5 - \frac{\pi r^2}{2} = r h$$
$$\frac{10 - \pi r^2}{2} = r h$$
$$h = \frac{10 - \pi r^2}{2 r}$$

entonces este valor se puede reemplazar en la ecuación (1), quedando

$$15 = \pi r + 2 \sqrt{\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2}$$

Al despejar r de esta ecuación se encuentra el valor de una de las dimensiones y con esta se puede encontrar la otra.

La ecuación $15 = \pi r + 2 \sqrt{\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2}$ **no es lineal ni tampoco cuadrática**, a continuación se muestra una de las maneras de despejar r.

$$15 = \pi r + 2 \sqrt{\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2}$$
$$15 - \pi r = 2 \sqrt{\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2}$$
$$(15 - \pi r)^2 = \left(2 \sqrt{\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2}\right)^2$$
$$225 - 30 \pi r + (\pi r)^2 = 4 \left(\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2\right)$$
$$225 - 30 \pi r + \pi^2 r^2 = 4 \left(\frac{(10 - \pi r^2)^2}{(2 r)^2} + r^2\right)$$
$$225 - 30 \pi r + \pi^2 r^2 = 4 \left(\frac{100 - 20 \pi r^2 + (\pi r^2)^2}{4 r^2} + r^2\right)$$
$$225 - 30 \pi r + \pi^2 r^2 = 4 \left(\frac{100 - 20 \pi r^2 + \pi^2 r^4 + 4 r^4}{4 r^2}\right)$$
$$225 - 30 \pi r + \pi^2 r^2 = \frac{100 - 20 \pi r^2 + \pi^2 r^4 + 4 r^4}{r^2}$$
$$225 r^2 - 30 \pi r^3 + \pi^2 r^4 = 100 - 20 \pi r^2 + \pi^2 r^4 + 4 r^4, \quad r \neq 0$$
$$4 r^4 + \pi^2 r^4 - 20 \pi r^2 + 100 - 225 r^2 + 30 \pi r^3 - \pi^2 r^4 = 0$$
$$4 r^4 + 30 \pi r^3 - 20 \pi r^2 - 225 r^2 + 100 = 0$$

Por tanto, cuando $r \neq 0$, la ecuación $15 = \pi r + 2 \sqrt{\left(\frac{10 - \pi r^2}{2 r}\right)^2 + r^2}$ es semejante a la ecuación

$4 r^4 + 30 \pi r^3 - 20 \pi r^2 - 225 r^2 + 100 = 0$, la cual es de **cuarto grado** y no se conoce alguna estrategia que permita resolverla. En este caso se debe recurrir a algún *software* matemático que la resuelva e indique cuáles son las soluciones (si las hay).

Note que la importancia de entender cómo formular ecuaciones es más importante que saber resolverlas, pues en casos como este se llega a ecuaciones que analíticamente no pueden resolverse.

En el momento en que quiera aplicar los conceptos matemáticos a problemas o situaciones reales se va a encontrar con ecuaciones de alto nivel de complejidad que algún *software* podrá resolver.

Por tanto, las soluciones de la ecuación $4\,r^4 + 30\,\pi\,r^3 - 20\,\pi\,r^2 - 225\,r^2 + 100 = 0$ son $\{r \approx -26.2969,\ r \approx -0.543994,\ r \approx 0.669782,\ r \approx 2.6092\}$, de las cuales la única solución que sirve en el problema es $r \approx 0.669782$.

1. $r \approx 0.669$ quiere decir que el radio del ventanal mide aproximadamente 0.669 metros, por tanto la altura del triángulo mide $h = \frac{10-\pi\,r^2}{2\,r} \approx \frac{10-\pi\,(0.669)^2}{2\,(0.669)} \approx 6.413$ metros.

   Los lados congruentes del triángulo isósceles miden $\sqrt{h^2 + r^2} \approx \sqrt{6.41303^2 + 0.669782^2} \approx 6.447$ metros

   Prueba: Si $r \approx 0.669\ m$, $h = 6.413\ m$.
   Entonces el área es $A = \frac{\pi r^2}{2} + r\,h \approx \frac{\pi\,(0.669)^2}{2} + (0.669)\,(6.413) \approx 5\ m^2$.

   Y el material utilizado para el marco es $\pi\,r + 2\sqrt{h^2 + r^2} \approx \pi\,(0.669) + 2\sqrt{6.413^2 + 0.669^2} \approx 15\ m$.

Las dimensiones del ventanal son 0.669782 metros en el radio de la circunferencia y 6.41303 metros en la altura del triángulo isósceles.

≪ Respuesta

Resumen

Toda ecuación que no sea lineal o cuadrática se clasifica como ecuación "*no lineal y no cuadrática*", tenga en cuenta las siguientes observaciones:

1. No hay una forma única de resolver ecuaciones, ponga en práctica diferentes estrategias.
2. Dependiendo de la ecuación, esta puede tener o no tener solución (o varias soluciones).
3. No toda ecuación se puede resolver analíticamente, en algunas ocasiones es necesario recurrir a programas especiales para poder encontrar la solución.
4. Por esta razón es más importante entender cómo plantear las ecuaciones que den solución al problema. Resolver una ecuación pasa a segundo plano.

Ecuaciones

Este tipo de ecuaciones son las que no se pueden expresar de forma líneal ($a\,x + b = 0$) ni de forma cuadrática ($a\,x^2 + b\,x + c = 0$).

No hay un proceso general. Una de las estrategias para resolver este tipo de ecuaciones es convertirlas en lineales o cuadráticas, encontrar las soluciones y probar dicho tipo de soluciones en la ecuación original (o en el contexto).

Ejemplos de solución

Ejemplo 1 | Ejemplo 2 | Ejemplo 3 | Ejemplo 4 | Ejemplo 5 | Ejemplo 6

Resolver la ecuación $-1 - \frac{-z+2}{-3\,z-1} = 0$

$$\frac{-1\,(-3\,z-1)}{-3\,z-1} - \frac{-z+2}{-3\,z-1} = -1$$
$$\frac{3\,z+1-(-z+2)}{-3\,z-1} = 0$$
$$\frac{4\,z-1}{-3\,z-1} = 0$$
$$4\,z - 1 = 0$$
$$z = \frac{1}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

Ejercicios de refuerzo*

» Ejercicios procedimentales

De ser posible, resolver las siguientes ecuaciones, tenga en cuenta los valores indeterminados en las expresiones.

1. $3 = \frac{2\,m-1}{2\,m+2}$
2. $\frac{2\,x+1}{3\,x-1} = \frac{-3\,x-2}{9\,x^2-6\,x+1}$
3. $\frac{t+1}{3\,t+3} + \frac{-3\,t-2}{t+2} = -1$
4. $\frac{2\,z-3}{z-1} + \frac{2\,z+3}{z^2-1} = 0$
5. $2 = \frac{u-1}{-2\,u+2}$
6. $\sqrt{2\,z-1} = z-2$

» *Soluciones a los ejercicios*

De ser posible, resolver las siguientes ecuaciones, tenga en cuenta los valores indeterminados en las expresiones.

1. $3=\frac{2m-1}{2m+2}$

La solución es:

$$\begin{aligned} 3 &= -\frac{2m-1}{2m+2} \\ 3+\frac{2m-1}{2(m+1)} &= 0 \\ \frac{3(2(m+1))}{2(m+1)}+\frac{2m-1}{2(m+1)} &= 0 \\ \frac{6(m+1)+(2m-1)}{2(m+1)} &= 0 \\ \frac{6m+6+2m-1}{2(m+1)} &= 0 \\ \frac{8m+5}{2(m+1)} &= 0 \\ 8m+5 &= 0, \qquad (m\neq -1) \\ m &= -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

2. $\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{-3x-2}{9x^2-6x+1}$

La solución es:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3x-1} &= \frac{-3x-2}{9x^2-6x+1} \\ \frac{2x+1}{3x-1}-\frac{-3x-2}{9x^2-6x+1} &= 0 \\ \frac{(2x+1)(3x-1)}{(3x-1)(3x-1)}-\frac{(-3x-2)(1)}{(3x-1)(3x-1)} &= 0 \\ \frac{(2x+1)(3x-1)-(-3x-2)}{(3x-1)^2} &= 0 \\ \frac{6x^2+4x+1}{(3x-1)^2} &= 0 \\ 6x^2+4x+1 &= 0, \qquad x\neq \frac{1}{3} \\ x &= \frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(6)(1)}}{2(6)} \\ x &= \frac{-4\pm\sqrt{16-24}}{12} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{-8}}{12} \end{aligned}$$

La ecuación no tiene solución real, el conjunto solución es vacío.

3. $\frac{t+1}{3t+3}+\frac{-3t-2}{t+2}=-1$

La solución es:

$$\frac{t+1}{3\,t+3}+\frac{-3\,t-2}{t+2}=-1$$
$$\frac{t+1}{3\,(t+1)}+\frac{-3\,t-2}{t+2}+1=0$$
$$\frac{(t+1)\,(t+2)}{3\,(t+1)\,(t+2)}+\frac{(-3\,t-2)\,(3\,(t+1))}{3\,(t+1)\,(t+2)}+\frac{1\,(3\,(t+1))\,(t+2)}{3\,(t+1)\,(t+2)}=0$$
$$\frac{(t+1)\,(t+2)+(-3\,t-2)\,(3\,(t+1))+(3\,(t+1))\,(t+2)}{3\,(t+1)\,(t+2)}=0$$
$$\frac{(t^2+3\,t+2)+(-9\,t^2-15\,t-6)+(3\,t^2+9\,t+6)}{3\,(t+1)\,(t+2)}=0$$
$$\frac{-5\,t^2-3\,t+2}{3\,(t+1)\,(t+2)}=0$$
$$-5\,t^2-3\,t+2=0,\qquad (t\neq-1,\,-2)$$
$$t=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\,(-5)\,(2)}}{2\,(-5)}$$
$$t=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{-10}$$
$$t=\frac{3\pm7}{10}$$
$$t=-\frac{3+7}{10},\qquad t=-\frac{3-7}{10}$$
$$t=-1,\qquad t=\frac{2}{5}$$

Como la restricción dice que $t\neq-1,\,-2$ (no se puede dividir por cero), la solución $t=-1$ se debe excluir. El conjunto solución es $\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

4. $\frac{2\,z-3}{z-1}+\frac{2\,z+3}{z^2-1}=0$

La solución es:

$$\frac{2\,z-3}{z-1}+\frac{2\,z+3}{z^2-1}=0$$
$$\frac{2\,z-3}{z-1}+\frac{2\,z+3}{(z-1)\,(z+1)}=0$$
$$\frac{(2\,z-3)\,(z+1)}{(z-1)\,(z+1)}+\frac{2\,z+3}{(z-1)\,(z+1)}=0$$
$$\frac{(2\,z-3)\,(z+1)+(2\,z+3)}{(z-1)\,(z+1)}=0$$
$$\frac{(2\,z^2-z-3)+(2\,z+3)}{(z-1)\,(z+1)}=0$$
$$\frac{2\,z^2+z}{(z-1)\,(z+1)}=0$$
$$2\,z^2+z=0,\qquad (z\neq-1,\,1)$$
$$z(2\,z+1)=0$$
$$z=0,\quad z=-\frac{1}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{2},\,0\right\}$.

5. $2=\frac{u-1}{-2\,u+2}$

La solución es:

$$2-\frac{u-1}{-2u+2}=0$$
$$2-\frac{u-1}{-2(u-1)}=0$$
$$\frac{2(-2(u-1))}{-2(u-1)}-\frac{u-1}{-2(u-1)}=0$$
$$\frac{2(-2(u-1))-(u-1)}{-2(u-1)}=0$$
$$\frac{(4-4u)-(u-1)}{-2(u-1)}=0$$
$$\frac{5-5u}{-2(u-1)}=0$$
$$5-5u=0, \qquad (u\neq 1)$$
$$-5u=-5$$
$$u=1$$

Como la restricción dice que $u \neq 1$ (no se puede dividir por cero), la solución se debe excluir. El conjunto solución es vacío.

6. $\sqrt{2z-1}=z-2$

La solución es:

$$\sqrt{2z-1}=z-2$$
$$\left(\sqrt{2z-1}\right)^2=(z-2)^2$$
$$2z-1=z^2-4z+4$$
$$0=z^2-4z-2z+4+1$$
$$0=z^2-6z+5$$
$$z^2-6z+5=0$$
$$(z-5)(z-1)=0$$
$$z=5, \qquad z=1$$

En el caso de ecuaciones con raíces se deben probar las soluciones

Cuando $z=1$, se tiene que:

$$\sqrt{2(1)-1}=(1)-2$$
$$\sqrt{1}=-1$$
$$1=-1$$

pero esto es una contradicción, por tanto, $z=1$ no es solución de la ecuación.

Cuando $z=5$, se tiene que:

$$\sqrt{2(5)-1}=(5)-2$$
$$\sqrt{9}=3$$
$$3=3$$

como la igualdad se cumple, $z=5$ es solución de la ecuación.

El conjunto solución es $\{5\}$.

» Problemas de aplicación

1. Se reparten \$60,000 entre cierto número de amigos presentes en una reunión, de tal manera que a cada uno le corresponda lo mismo y no sobre dinero. Una persona advierte que si hubiera dos amigos menos, a cada uno se le asignarían \$2,500 más. ¿Cuántos son los amigos presentes y cuánto le corresponde a cada uno?

2. María hace un viaje de negocios a una ciudad que queda a 200 km de su casa y días después debe regresar. El promedio de velocidad en el viaje de retorno es 10 km menos que su velocidad promedio de ida. Si el tiempo total de viaje fue de nueve horas, ¿cuál fue la velocidad promedio de viaje en cada dirección?
3. La resistencia total R de un circuito eléctrico con dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo está dada por $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Si la resistencia total del circuito es 6.8 ohmios y la diferencia entre las dos resistencias conectadas es de 10 ohmios, ¿cuánto mide cada una?
4. El tiempo (en segundos) total transcurrido entre dejar caer una piedra a un pozo y escuchar el ruido cuando cae está dado por la ecuación:

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{4.9}} + \frac{d}{332.2}$$

donde t_1 es el tiempo que demora en caer y t_2 es el tiempo que tarda el sonido en regresar. La variable d representa la distancia (en metros) que la roca cayó hasta tocar el suelo.
¿Cuál es la profundidad del pozo si el tiempo total transcurrido es de 3.6 segundos?

* *Algunos ejercicios propuestos son tomados de la cartilla: "Introducción a las matemáticas", desarrollada por docentes del Departamento de Matemáticas. Segundo semestre 2012.*

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Se reparten \$60,000 entre cierto número de amigos presentes en una reunión, de tal manera que a cada uno le corresponda lo mismo y no sobre dinero. Una persona advierte que si hubiera dos amigos menos, a cada uno se le asignarían \$2,500 más. ¿Cuántos son los amigos presentes y cuánto le corresponde a cada uno?

Sea n el número de amigos en la reunión y sea p la cantidad de dinero que cada uno recibe. La primera parte del problema se puede escribir como:

$$p = \frac{60\,000}{n} \tag{1}$$

la segunda parte dice que si hubiera dos amigos menos, es decir: $n - 2$, la cantidad recibida sería \$2,500 más, es decir $p + 2500$; esto se puede escribir como:

$$p + 2500 = \frac{60\,000}{n-2} \tag{2}$$

reemplazando el valor de p de la ecuación (1) en la ecuación (2) se tiene:

$$\frac{60\,000}{n} + 2500 = \frac{60\,000}{n-2}$$

la cual es una ecuación no lineal ni cuadrática. A continuación se propone una de las maneras para despejar la variable n; en este caso convirtiéndola en una ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}
\frac{60\,000}{n} + 2500 &= \frac{60\,000}{n-2} \\
\frac{60\,000}{n} - \frac{60\,000}{n-2} &= -2500 \\
\frac{60\,000\,(n+2)}{n(n-2)} - \frac{60\,000\,(n)}{(n-2)\,(n)} &= -2500 \\
\frac{60\,000\,(n-2) - 60\,000\,(n)}{n(n-2)} &= -2500 \\
\frac{60\,000\,n - 120\,000 - 60\,000\,n}{n(n+2)} &= -2500 \\
\frac{-120\,000}{n(n+2)} &= -2500 \\
-120\,000 &= -2500\,n(n+2), \qquad (n \neq 0, -2) \\
-120\,000 &= -2500\,n^2 - 5000\,n \\
2500\,n^2 + 5000\,n - 120\,000 &= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, con las restricciones $n \neq 0, -2$, las ecuaciónes $\frac{60\,000}{n} + 2500 = \frac{60\,000}{n+2}$ y

$2500\, n^2 + 5000\, n + 120\,000 = 0$ tienen las mismas soluciones, las cuales son: $\{n = -8,\ \ n = 6\}$. $n = 6$ es la solución del problema, por tanto: $p = \frac{60\,000}{n} = \frac{60\,000}{6} = 10\,000$.

Hay presentes 6 amigos y cada uno recibe $10,000.

2. María hace un viaje de negocios a una ciudad que queda a 200 km de su casa y días después debe regresar. El promedio de velocidad en el viaje de retorno es 10 km menos que su velocidad promedio de ida. Si el tiempo total de viaje fue de nueve horas, ¿cuál fue la velocidad promedio de viaje en cada dirección?

Teniedo en cuenta que la velocidad promedio, el tiempo y la distancia recorrida se relacionan mediante la expresión:

$$v = \frac{d}{t}$$

y que en el problema la distancia de los trayectos es fija: 200 km ida y 200 km regreso, la velocidad y el tiempo de cada trayecto varía.

Sea $v_1,\ \ t_1$ la velocidad promedio y el tiempo del viaje de ida y $v_2,\ \ t_2$ la velocidad promedio y el tiempo del viaje de regreso, con los datos del problema se pueden formular las siguientes expresiones:

- "El promedio de velocidad en el viaje de retorno es 10 km menos que su velocidad promedio de ida"
$$v_2 = v_1 - 10 \tag{1}$$
- "El tiempo total de viaje fue de nueve horas"
$$t_1 + t_2 = 9 \tag{2}$$
- Tiempo transcurrido en el viaje de ida:
$$t_1 = \frac{100}{v_1} \tag{3}$$
- Tiempo transcurrido en el viaje de regreso:
$$t_2 = \frac{100}{v_2} \tag{4}$$

Reemplazando las ecuaciones (3) y (4) en (2) se tiene:

$$9 = \frac{100}{v_1} + \frac{100}{v_2} \tag{5}$$

En esta última ecuación se desconocen las velocidades v_1 y v_2, pero la relación entre ellas está dada por la ecuación (1), la cual se puede reemplazar en (5), quedando:

$$9 = \frac{100}{v_1} + \frac{100}{(v_1 - 10)}$$

la cual es una ecuación no lineal ni cuadrática. A continuación se propone una de las maneras para despejar la variable v_1; convirtiéndola en una ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned}
9 &= \frac{100}{v_1} + \frac{100}{(v_1-10)} \\
\frac{100}{v_1} + \frac{100}{v_1-10} &= 9 \\
\frac{100\,(v_1-10)}{v_1(v_1-10)} + \frac{100\,(v_1)}{(v_1-10)\,(v_1)} &= 9 \\
\frac{100\,(v_1-10)+100\,(v_1)}{v_1(v_1-10)} &= 9 \\
\frac{100\, v_1-1000+100\, v_1}{v_1(v_1-10)} &= 9 \\
\frac{200\, v_1-1000}{v_1(v_1-10)} &= 9 \\
200\, v_1 - 1000 &= 9\, v_1(v_1 - 10), \qquad (v_1 \neq 0,\ 10) \\
200\, v_1 - 1000 &= 9\, {v_1}^2 - 90\, v_1 \\
9\, {v_1}^2 - 290\, v_1 + 1000 &= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, con la restricción $v_1 \neq 0,\ 10$, las ecuaciónes $9 = \frac{100}{v_1} + \frac{100}{v_1-10}$ y $9\, {v_1}^2 + 90\, v_1 - 1000 = 0$, tienen las mismas soluciones, las cuales son aproximadamente: $\{v_1 \approx 3.92683,\ \ v_1 \approx 28.2954\}$.

La solución $v_1 \approx 3.92683$ no tiene sentido en el problema, porque $v_2 \approx 3.927 - 10 \approx -6.073$ es negativa y se supone que la velocidad promedio debe ser positiva.

La solución del problema es $v_1 \approx 28.295$, por tanto: $v_2 = v_1 - 10 \approx 28.295 - 10 \approx 18.295$ km / h.

Las velocidades promedio son aproximadamente: 28.295 km / h de ida y 18.295 km / h de regreso.

Prueba: reemplazando v_1 y v_2 en la ecuación (5) se tiene que $t_1 + t_2 \approx \frac{100}{28.295} + \frac{100}{18.295} \approx 9$ horas de recorrido total.

3. La resistencia total R de un circuito eléctrico con dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo está dada por $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Si la resistencia total del circuito es 6.8 ohmios y la diferencia entre las dos resistencias conectadas es de 10 ohmios, ¿cuánto mide cada una?

Como la diferencia entre R_1 y R_2 es 10 Ω, se puede escribir la expresión: $R_1 - R_2 = 10$, de donde:

$$R_1 = 10 + R_2 \tag{1}$$

Reemplazando el valor de la resistencia total: $R = 6.8$ y la expresión (1) en $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ se tiene la ecuación:

$$6.8 = \frac{(10+R_2)\,R_2}{(10+R_2) + R_2}$$

la cual es una ecuación no lineal ni cuadrática. A continuación se propone una de las maneras para despejar la variable R_2; convirtiéndola en una ecuación cuadrática:

$$6.8 = \frac{(10+R_2)\,R_2}{(10+R_2) + R_2}$$

$$6.8 = \frac{10\,R_2 + R_2^2}{10+2\,R_2}$$

$$6.8\,(10 + 2\,R_2) = 10\,R_2 + R_2^2, \qquad (R_2 \neq -5)$$

$$68 + 13.6\,R_2 = 10\,R_2 + R_2^2$$

$$0 = R_2^2 + 10\,R_2 - 13.6\,R_2 - 68$$

$$R_2^2 - 3.6\,R_2 - 68 = 0$$

Por tanto, con la restricción $R_2 \neq -5$, las ecuaciones $6.8 = \frac{(10+R_2)\,R_2}{(10+R_2) + R_2}$ y $R_2^2 - 3.6\,R_2 - 68 = 0$ tienen las mismas soluciones, las cuales son aproximadamente: $\{R_2 \approx -6.64,\ R_2 \approx 10.24\}$.

Como el valor de las resistencias no puede ser negativo, la solución $R_2 \approx -6.64$ no tiene sentido en el problema.

La solución del problema es $R_2 \approx 10.24$, por tanto, $R_1 = 10 + R_2 \approx 10 + 10.24 \approx 20.24$ Ω

Las resistencias miden aproximadamente: 10.24 Ω y 20.24 Ω

Prueba: reemplazando R_1 y R_2 en la ecuación $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ se tiene que $R \approx \frac{10.24 \times 20.24}{10.24+20.24} \approx 6.799$ Ω.

4. El tiempo (en segundos) total transcurrido entre dejar caer una piedra a un pozo y escuchar el ruido cuando cae está dado por la ecuación:

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{4.9}} + \frac{d}{332.2}$$

donde t_1 es el tiempo que demora en caer y t_2 es el tiempo que tarda el sonido en regresar. La variable d representa la distancia (en metros) que la roca cayó hasta tocar el suelo.

¿Cuál es la profundidad del pozo si el tiempo total transcurrido es de 3.6 segundos?

Como el tiempo total transcurrido es de 3.6 s, entonces la ecuación queda:

$$3.6 = \sqrt{\frac{d}{4.9}} + \frac{d}{332.2}$$

la cual es una ecuación no lineal ni cuadrática. A continuación se propone una de las maneras para despejar la variable d; convirtiéndola en una ecuación cuadrática:

$$3.6 = \sqrt{\frac{d}{4.9}} + \frac{d}{332.2}$$

$$3.6 - \frac{d}{332.2} = \sqrt{\frac{d}{4.9}}$$

$$\left(3.6 - \frac{d}{332.2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{d}{4.9}}\right)^2$$

$$12.96 - 0.0213737\,d + 9.06151 \times 10^{-6}\,d^2 = 0.204082\,d$$

$$9.06151 \times 10^{-6}\,d^2 - 0.0213737\,d - 0.204082\,d + 12.96 = 0$$

$$9.06151 \times 10^{-6}\,d^2 - 0.225755\,d + 12.96 = 0$$

Por tanto, las ecuaciones:

$3.6 = \sqrt{\frac{d}{4.9}} + \frac{d}{332.2}$ y $9.06151 \times 10^{-6}\,d^2 - 0.225755\,d + 12.96 = 0$ tienen las mismas soluciones, las cuales son aproximadamente $\{d \approx 57.54,\ \ d \approx 24\,856.1\}$.

La solución $d \approx 24\,856.1$ m no tiene sentido en el problema; un objeto no demora 3.6 s en caer una distancia aproximada de 25 km.
La solución del problema es $d \approx 57.54$, por tanto, la profundidad del pozo es de 57.54 m.

2. Inecuaciones

Introducción

Al plantear un problema de una situación real, no siempre será necesario el llegar a una *ecuación*, algunas veces se considera necesario comparar dos cantidades (es decir, no tienen que ser iguales). El resultado de la comparación puede ser, por ejemplo, que una de ellas sea *menor* que la otra, o que una sea *mayor o igual* que la otra.

Estas comparaciones se plantean mediante *inecuaciones*, en donde se desconoce alguna cantidad y se pretende resolverla para encontrar los valores que puede tomar la cantidad desconocida; plantear problemas con ecuaciones o inecuaciones es un proceso que poco a poco se irá mejorando. A continuación, veremos algunas situaciones que muestran ese proceso y una de las muchas maneras de resolverlo.

Inecuaciones lineales

Situación: Mezclas

Problemas de regímenes alimenticios, preparación de medicamentos, aleaciones y organización de portafolios, entre otros, consisten en combinar *ingredientes* básicos para producir *nuevos* productos que satisfagan ciertas condiciones nutricionales, estructurales o financieras. Por excelencia, la combinación de soluciones que contengan diferentes porcentajes de una sustancia para obtener una nueva que cumpla ciertos requerimientos, encabeza la lista de estas situaciones que son conocidas como ***problemas de mezclas***.

El problema de elaborar un alimento mezclado a partir de un conjunto básico de alimentos se puede considerar también como un problema de *mezclas*, este es el tipo de situación que se abordará a continuación.

Una empresa familiar inicia actividades comerciales poniendo a la venta maní y nueces a \$8,000 y \$18,000 la libra, respectivamente, y posteriormente sacará al mercado la venta de arándanos a $15,000 la libra. La empresa ha decidido vender paquetes de libras o medias libras.

Problema 1. Mezcla: *maní-nueces*.

Un balance al final del primer mes deja ver que el maní no se vende bien y se preparará entonces una mezcla *maní-nueces*. Se van a producir 15 libras de la mezcla, que contenga mínimo 6 libras de maní y se esperan ingresos mensuales de al menos $180,000.

⇒ *¿Cuánto de cada fruto seco se debe mezclar para satisfacer la condición que el ingreso mensual sea de al menos $180,000?*

Solución

A partir de los interrogantes planteados se identifican dos datos desconocidos; las libras de maní y de nueces en la mezcla

Los datos dados son:

- Precio de venta de cada libra de maní: $8,000.
- Precio de venta de cada libra de nueces: $18,000.
- Cantidad de libras en la mezcla maní-nueces: 15 libras.
- Cantidad mínima de maní: 6 libras.
- Ingreso mínimo esperado al final del segundo mes: $180,000.

Para determinar las libras necesarias de cada fruto se asignan las variables: x: libras de maní, y y: libras de nueces en la mezcla.

Se tienen 15 libras de mezcla, lo que se puede plantear mediante la ecuación:

$$x + y = 15 \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que el ingreso es la cantidad de libras vendidas por el precio de cada libra, y como el ingreso debe ser al menos $180,000 se puede formular la ***inecuación***:

$$8000\,x + 18\,000\,y \geqslant 180\,000$$

Que luego de simplificarla, para efectuar operaciones con cifras más pequeñas (se divide todo por 2000), se tiene la siguiente inecuación equivalente a la anterior:

$$4\,x + 9\,y \geqslant 90 \tag{2}$$

Con la ecuación (1) y la inecuación (2) se pueden determinar los valores de las variables, para esto se despeja una, por ejemplo y, de la ecuación (1) y se obtiene:

$$y = 15 - x$$

este resultado se puede reemplazar en la inecuación (2), quedando:

$$4x + 9(15 - x) \geqslant 90$$

El proceso de despejar x lleva a:

$$\begin{aligned} &4x + 135 - 9x \geqslant 90 \\ &-5x \geqslant 90 - 135 \\ &-5x \geqslant -45 \\ &5x \leqslant 45 \\ &x \leqslant \tfrac{45}{5} \\ &x \leqslant 9 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que se debe mezclar mínimo 6 libras de maní, se llega a la siguiente inecuación:

$$6 \leq x \leq 9$$

Este resultado permite concluir que el máximo de libras de maní (x) que puede tener la mezcla es nueve y el máximo de libras de nueces (y) es seis (*¿por qué*?).

≪ Respuesta

⇒ *¿Cuántas opciones hay?*

Solución

Se debe tener en cuenta que de cada fruto se toman medias libras o libras completas. En la siguiente tabla se presentan todas las posibilidades de mezcla entre x e y, además del ingreso que proporciona cada combinación:

Libras maní: x	Libras nueces: y	Ingreso $8000\,x + 18\,000\,y$
9	6	\$ 180 000
8.5	6.5	\$ 185 000
8	7	\$ 190 000
7.5	7.5	\$ 195 000
7	8	\$ 200 000
6.5	8.5	\$ 205 000
6	9	\$ 210 000

Validación: Si hay 8 libras de maní en la mezcla, entonces hay $y = 15 - 8 = 7$ libras de nueces que generan ingresos por $8000\,(8) + 18\,000\,(7) = 190.000$

Libras de maní (x) y de nueces (y) en la mezcla: entre 6 y 9, inclusive, tomando de a medias libras. Cada combinación debe ser tal que $x + y = 15$, lo que genera siete posibilidades (ver tabla).

≪ Respuesta

Expresiones como $-40\,000 + 180\,000 < 200\,000$ o $4\left(-3 + \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{5} \geqslant -11$ son un ejemplo de ***desigualdades.*** *Las inecuaciones son desigualdades que tienen expresiones matemáticas con al menos una variable, se ven muy semejantes a una ecuación, excepto que en una inecuación en lugar del símbolo "=", se tienen los símbolos " $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ ", que se leen "menor que, mayor que, menor o igual que, mayor o igual que".*

Problema 2. Mezcla: *maní-nueces-arándanos*

La experiencia de la mezcla resultó rentable para la empresa, lo cual sugirió realizar otros experimentos y buscar el más rentable; se decidió mezclar igual cantidad de maní que de nueces, es decir, 7.5 libras de cada fruto y obtener ingresos de $195,000. Esta opción deja la libra de mezcla *maní-nueces* en $13,000 (*¿por qué?*).

Para continuar con los experimentos, ahora se incluyen arándanos y la nueva mezcla se venderá al menos a $13,000 la libra, valor que no debe superar el precio por libra de los ingredientes "sueltos". Hay entre 15 y 20 libras de la mezcla *maní-nueces-arándanos* en la que se mantiene igual cantidad de maní que de nueces y la relación *maní:arándanos* es 2 : 1.

En esta ocasión se esperan unos ingresos de mínimo $195,000 y máximo $268,000.

⇒ *¿Cuánto de cada fruto puede haber en la mezcla maní-nueces-arándanos?*

Solución

Aparece un nuevo dato desconocido: Libras de arándanos en la mezcla.

Los datos conocidos son:

- Restricción sobre el precio de venta de cada libra de la mezcla: al menos $13,000.
- La relación entre la cantidad de maní y nueces es 1 : 1
- La relación entre la cantidad de maní y arándanos es 2 : 1
- Rango de libras de la mezcla: entre 15 y 20.
- Ingresos esperados: mínimo $195,000 y máximo $268,000.

Para hallar las libras necesarias de cada fruto se asignan las variables: x: libras de maní en la mezcla, y: libras de nueces en la mezcla, y z: libras de arándanos en la mezcla.

La restricción sobre las libras de mezcla disponibles permiten proponer la inecuación:

$$15 \leq x + y + z \leq 20$$

Puesto que hay igual cantidad de maní que de nueces ($x = y$), el problema queda solo con las variables x y z:

$$15 \leq 2x + z \leq 20 \qquad (1)$$

A partir de la relación 2 : 1 entre maní y arándanos se tiene la ecuación $x = 2z$, que al sustituirse en (1) deja como resultado:

$$15 \leq 2x + \frac{x}{2} \leq 20$$

Que equivale a:

$$15 \leq \frac{5}{2}x \leq 20 \qquad (2)$$

La inecuación (2) se puede separar en dos inecuaciones: $15 \leq \frac{5}{2}x$, y $\frac{5}{2}x \leq 20$ que al resolverse arrojan:

$$15 \leq \frac{5}{2}x \quad \text{y} \quad \frac{5}{2}x \leq 20$$
$$\frac{15 \times 2}{5} \leq x \quad \text{y} \quad x \leq \frac{20 \times 2}{5}$$
$$6 \leq x \quad \text{y} \quad x \leq 8$$

Así, en la mezcla de *maní-nueces-arándanos* puede haber entre 6 y 8 libras de maní (igual que de nueces) y para el caso de los arándanos, entre 3 y 4 libras (*¿por qué?*). Se debe tener en cuenta que la combinación de libras o medias libras de los tres frutos debe estar entre 15 y 20. En este caso, la mezcla se puede considerar dentro de las opciones:

Libras maní: x	Libras nueces: y	Libras arándanos: z	Libras necesarias: $x+y+z$
6	6	3	15
6.5	6.5	no se puede	
7	7	3.5	17.5
7.5	7.5	no se puede	
8	8	4	20

La cantidad de libras de cada fruto en la mezcla *maní-nueces-arándanos* (x, y, z) responde a las tres opciones $(6, 6, 3)$, $(7, 7, 3.5)$ y $(8, 8, 4)$. *¿Por qué no se consideran los casos* $(6.5, 6.5, 3.25)$ o $(7.5, 7.5, 3.75)$?

≪ Respuesta

⇒ *¿En qué rango se puede fijar el precio por libra de esta mezcla si el ingreso total debe estar entre $195,000 y $268,000?*

Solución

Para cumplir con la condición del ingreso (I) entre $195,000 y $268,000 se considera la expresión general:

$$I = (\text{cantidad de libras})\,(\text{precio por libra}) = (x+y+z)\,p$$

teniendo en cuenta las restricciones de maní, nueces y arándanos: $x+y+z = \frac{5}{2}x$. Entonces:

$$195\,000 \le I \le 268\,000$$

$$195\,000 \le \frac{5}{2}\,x\,p \le 268\,000 \qquad (3)$$

En (3) se pueden tomar los distintos valores de x para obtener los posibles valores de p:

Libras de maní: x	**Intervalo para** I	**Intervalo para** p
6	$195000 \le \frac{5}{2}(6)\,p \le 268000$	$13000 \le p \le 17866.66$
7	$195000 \le \frac{5}{2}(7)\,p \le 268000$	$11142.56 \le p \le 15314.26$
8	$195000 \le \frac{5}{2}(8)\,p \le 268000$	$9750 \le p \le 13400$

Aunque el rango para p parece amplio, hay condiciones que lo limitan dejando el precio de la mezcla 2 entre $13,000 y $13,400. *¿Por qué se descartan las demás opciones para el precio*?

El precio por libra de la mezcla 2 estará entre $13,000 y $13,400.

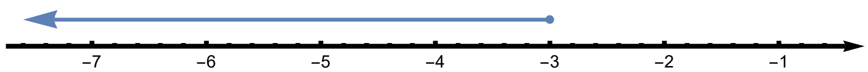
≪ Respuesta

Expresiones como $15 \le \frac{5}{2}x \le 20$, $15 \le \frac{5}{2}x$ *o* $\frac{5}{2}x \le 20$ *son ejemplos de* ***inecuaciónes lineales*** *donde cada término es constante o múltiplo de la variable.*

Ejemplos inecuaciones lineales

1. El conjunto solución de la inecuación $8x + 15 \le -9$ es $(-\infty, -3]$

$$
\begin{aligned}
8x + 15 &\le -9 \\
8x &\le -9 - 15 \\
8x &\le -24 \\
x &\le -24/8 \\
x &\le -3
\end{aligned}
$$



2. El conjunto solución de la inecuación $-9 \le 8 - 3x < 14$ es $\left(-2, \frac{17}{3}\right]$

$$
\begin{aligned}
-9 \le 8 - 3x &< 14 \\
-17 \le -3x &< 6 \\
17 \ge 3x &> -6 \\
\tfrac{17}{3} \ge x &> -2 \\
-2 < x &\le \tfrac{17}{3}
\end{aligned}
$$

Problema 3. Mezcla triturada: *maní-nueces-arándanos*

Continuando con la diversificación, la empresa produce dos tipos de triturado para vender también por libras o medias libras. Uno de ellos, *el especial*, está hecho completamente de maní y nueces trituradas, y el otro, *el premium*, contiene además arándanos (también triturados). La información general de los dos nuevos productos se muestra en la siguiente tabla:

	Libras	% nueces	Precio por libra
Especial	12	30 %	$ 15000
Premium	10	20 %	$ 16000

⇒ *¿Cuántas libras de nueces trituradas debe añadirse al tipo de triturado especial para obtener una mezcla con 45 × % de nueces como máximo?*

Solución

El dato desconocido es las libras de nueces que deben añadirse al triturado especial.

Los datos dados de cada tipo de triturado son:

- Libras disponibles: 12 en el tipo *especial* y 10 en el tipo *premium*.
- Porcentaje de nueces: 30% en el tipo *especial* y 20% en el tipo *premium*.
- Precio por libra: $15,000 tipo *especial* y $16,000 tipo *premium*.

Si x representa la cantidad de nueces que se añadirán al triturado *especial*, entonces el triturado resultante tendrá $12 + x$ libras.

La situación se resume en la siguiente tabla:

	Libras de triturado	Concentración de nueces	Libras de nueces
Nueces trituradas puras	x	1.00	$1\ x$
Triturado especial	12	0.30	12(0.3)
Triturado resultante	$12+x$	0.45	$(12+x)0.45$

Con la información de la última columna se puede plantear la inecuación:

$$12\,(0.3)+1\,x \le 0.45\,(12+x)$$

Resolviendo la inecuación se tiene:

$$\begin{aligned}12\,(0.3)+x &\le 0.45\,(12+x)\\ 3.6+x &\le 5.4+0.45\,x\\ x-0.45\,x &\le 5.4-3.6\\ 0.55\,x &\le 1.8\\ x &\le \tfrac{1.8}{0.55}\\ x &\le \tfrac{36}{11}\\ x &\le 3.27\,(aprox.)\end{aligned}$$

Para incrementar la concentración de nueces en la mezcla a 45% máximo, se deben añadir, aproximadamente, 3.27 libras de nueces trituradas o menos.

≪ Respuesta

Validación: Al agregar $\frac{36}{11}$ libras de nueces trituradas se tiene $12+\frac{36}{11}=\frac{168}{11}\approx 15.27$ libras del nuevo triturado *maní-nueces*, que contiene $12\,(0.30)+\frac{36}{11}=\frac{378}{55}\approx 6.87$ libras de nueces. Así, la concentración de nueces en la nueva mezcla es $\frac{378}{55}\div\frac{168}{11}=0.45$, lo cual coincide con lo pedido.

⇒ *¿Y con mínimo 40 % de nueces?*

Solución

La nueva situación se resume en la siguiente tabla:

	Libras de triturado	Concentración de nueces	Libras de nueces
Nueces trituradas puras	x	1.00	$1\ x$
Triturado especial	12	0.30	12(0.3)
Triturado resultante	$12+x$	0.40	$(12+x)0.4$

Con la información de la última columna se puede plantear la inecuación:

$$12\,(0.3)+x \ge 0.4\,(12+x)$$

Resolviendo la inecuación se tiene:

$$\begin{aligned}12\,(0.3)+x &\ge 0.4\,(12+x)\\ 3.6+x &\ge 4.8+0.4\,x\\ x-0.4\,x &\ge 4.8-3.6\\ 0.6\,x &\ge 1.2\\ x &\ge \tfrac{1.2}{0.6}\\ x &\ge \tfrac{12}{6}\\ x &\ge 2\end{aligned}$$

Para incrementar la concentración de nueces en la mezcla a 40% mínimo, se deben añadir 2 libras de nueces trituradas o más.

≪ Respuesta

Validación: Al agregar 2 libras de nueces trituradas se tiene $12 + 2 = 14$ libras del nuevo triturado *maní-nueces*, que contiene $12\,(0.30) + 2 = \frac{25}{5} = 5.6$ libras de nueces. Así, la concentración de nueces en la nueva mezcla es $5.6 \div 14 = 0.4$, lo cual coincide con lo pedido.

Resolver una inecuación significa encontrar todos los números reales que hacen de la inecuación verdadera, a diferencia de las ecuaciones, las inecuaciones tienen por lo general un conjunto infinito de soluciones que forman el ***intervalo solución****.*

Resumen

Para resolver los problemas anteriores se consideraron dos conceptos ya estudiados: *ecuaciones* y *sustitución*, y el concepto nuevo de ***inecuaciones***.

Inicialmente se plantean ecuaciones e inecuaciones de acuerdo con las condiciones del problema habiendo definido previamente el significado de cada incógnita. Por ejemplo, "*15 libras de mezcla maní-nueces*" se representaron con la ecuación $x + y = 15$, y con la inecuación $8000\,x + 18\,000 \geqslant 180\,000$ se plantea la condición "*ingresos mínimos de \$180,000*". El objetivo fue encontrar el *intervalo* de valores que toma la incógnita x, que corresponde a las posibles cantidades de libras de maní en la mezcla maní-nueces y, con estos resultados, hallar los posibles valores y, es decir, las libras de nueces presentes en la mezcla.

Inecuaciones

Definición ***Lineal***

Definición de una inecuación lineal:
Las inecuaciones lineales son desigualdades donde cada término es constante, o múltiplo de una variable, por ejemplo, $15 \leq \frac{5}{2}\,x$ o $-10 < 3\,t - 8 \leq 15$.

Ejemplos de solución de inecuaciones lineales

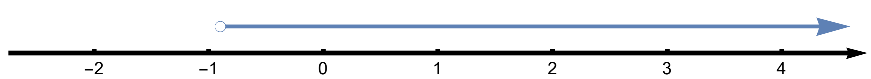
Ejemplo 1 | Ejemplo 2 | Ejemplo 3 | Ejemplo 4 | Ejemplo 5 | Ejemplo 6 | Ejemplo 7 | Ejemplo 8

Resolver la inecuación $-6 - 2\,(5 - 2\,x) < 7\,(2\,x - 1)$

$$-6 - 2\,(5 - 2\,x) < 7\,(2\,x - 1)$$
$$-6 - 10 + 4\,x < 14\,x - 7$$
$$4\,x - 14\,x < -7 + 16$$
$$-10\,x < 9^{**}$$
$$x > -\frac{9}{10}$$

***multiplicando por -1, cambia el símbolo de la desigualdad.*

El intervalo solución de es $\left(-\frac{9}{10},\, \infty\right)$ y su representación gráfica es:



Ejercicios de refuerzo*

» Ejercicios procedimentales

Resuelva las siguientes inecuaciones expresando el conjunto solución como intervalos y sus representaciones gráficas:

1. El intervalo solución de la inecuación $\frac{9}{2}u-5\geq-4u+1$ es:
2. El intervalo soluición de la inecuación $3x-2>\frac{2x-1}{3}$ es:
3. El intervalo soluición de la inecuación $4<\frac{3u-1}{2}<5$ es:
4. El intervalo soluición de la inecuación $2m+\frac{5}{4}<\frac{4m+3}{2}$ es:
5. El intervalo soluición de la inecuación $-\frac{14}{3}\leq\frac{3x+4}{3}<-\frac{1}{3}$ es:
6. El intervalo soluición de la inecuación $-2t-5\geq\frac{4t-1}{3}$ es:

» *Soluciones a los ejercicios*

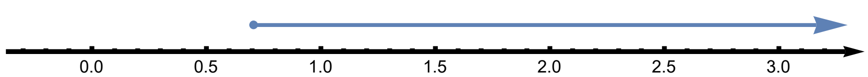
Resuelva las siguientes inecuaciones expresando el conjunto solución como intervalos y sus representaciones gráficas:

1. $\frac{9}{2}u-5\geq-4u+1$

La solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}u-5&\geq-4u+1\\ \frac{9}{2}u+4u&\geq1+5\\ \frac{17}{2}u&\geq6\\ u&\geq6\left(\frac{2}{17}\right)\\ u&\geq\frac{12}{17}\end{aligned}$$

El intervalo solución es $\left[\frac{12}{17},\,\infty\right)$.

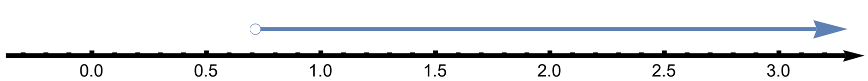


2. $3x-2>\frac{2x-1}{3}$

La solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned}3x-2&>\frac{2x-1}{3}\\ 3(3x-2)&>2x-1\\ 9x-6&>2x-1\\ 9x-2x&>-1+6\\ 7x&>5\\ x&>\frac{5}{7}\end{aligned}$$

El intervalo solución es $\left[\frac{5}{7},\,\infty\right)$.



3. $4 < \frac{3u-1}{2} < 5$

La solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned} 4 < \tfrac{3u-1}{2} &< 5 \\ 8 < 3u - 1 &< 10 \\ 8 + 1 < 3u &< 10 + 1 \\ 9 < 3u &< 11 \\ \tfrac{9}{3} < u &< \tfrac{11}{3} \\ 3 < u &< \tfrac{11}{3} \end{aligned}$$

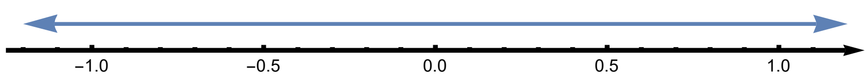
El intervalo solución es $\left(3,\ \frac{11}{3}\right)$.

4. $2m + \frac{5}{4} < \frac{4m+3}{2}$

La solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned} 2m + \tfrac{5}{4} &< \tfrac{4m+3}{2} \\ 2\left(2m + \tfrac{5}{4}\right) &< 4m + 3 \\ 4m + \tfrac{5}{2} &< 4m + 3 \\ 4m - 4m &< 3 - \tfrac{5}{2} \\ 0 &< \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Como $0 < \frac{1}{2}$, entonces la inecuación *siempre* se cumple, el conjunto solución es el conjunto de los números reales: $(-\infty,\ \infty)$.

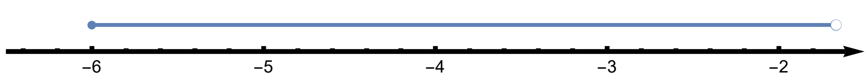


5. $-\frac{14}{3} \leq \frac{3x+4}{3} < -\frac{1}{3}$

La solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned} -\tfrac{14}{3} \leq \tfrac{3x+4}{3} &< -\tfrac{1}{3} \\ -14 \leq 3x + 4 &< -1 \\ -14 + (-4) \leq 3x &< -1 + (-4) \\ -18 \leq 3x &< -5 \\ -\tfrac{18}{3} \leq\ x &\leq\ -\tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

El intervalo solución es $\left[-6,\ -\frac{5}{3}\right)$.

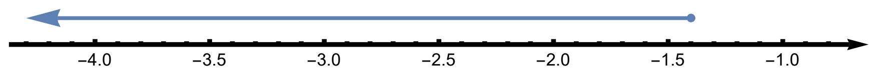


6. $-2t - 5 \geq \frac{4t-1}{3}$

La solución de la inecuación es:

$$-2\,t-5 \geq \frac{4\,t-1}{3}$$
$$3\,(-2\,t-5) \geq 4\,t-1$$
$$-6\,t-15 \geq 4\,t-1$$
$$-6\,t-4\,t \geq -1+15$$
$$-10\,t \geq 14$$
$$t \leq -\frac{14}{10}$$
$$t \leq -\frac{7}{5}$$

(cuidado con el cambio de símbolo). El intervalo solución es $\left(-\infty,\, -\frac{7}{5}\right]$.



» Problemas de aplicación

1. El Club Pep está vendiendo manzanas acarameladas a fin de recaudar fondos. El precio de cada manzana es \$800, excepto el viernes, día en el que se venderá cada una en \$650. Si el Club vende 200 manzanas, ¿cuál es el mínimo número de manzanas de \$800 que se pueden vender a fin de obtener por lo menos \$148,000?
2. En el mes de diciembre de cierto año en la ciudad de Caracas, la temperatura obtuvo una mínima de 12 °C y una máxima de 26°C, es decir, la temperatura varía en el intervalo cerrado [12, 26]. Si se mide la temperatura en grados Fahrenheit, ¿cuál hubiese sido el intervalo de variación?
3. En cierto año, el operador de telefonía celular *Pacific Bell*, cobraba 0.15 dólares por el primer minuto, más 0.14 dólares por cada minuto adicional (o fracción). Si un cliente se suscribe a este plan, ¿cuántos minutos, máximo y mínimo, puede hablar en una misma llamada, una persona que cuenta con más de 2 dólares pero con menos de 4.50?
4. Un estudiante de física obtuvo 85, 98 y 93 en tres exámenes (valor máximo de 100 puntos), y le falta la nota del examen final, cuyo peso es dos veces un examen. Si la nota definitiva debe ser 90 o más para alcanzar una *A* y ser admitido en un curso avanzado, ¿cuál es la menor nota en su examen que le dará la admisión a dicho curso?
5. Irene Martínez asistirá a una conferencia fuera de su país durante una semana. Antes del viaje, evalúa los costos de rentar un auto por ese periodo de tiempo en dos empresas; *Avery*, una de ellas, pide 51 dólares semanales sin cuota de kilometraje, mientras que *Hart*, cobra 20.7 dólares por semana más 0.28 dólares por kilómetro (o fracción). ¿Cuántos kilómetros debe manejar Irene para que un auto de *Hart* sea la mejor opción?

** Algunos ejercicios propuestos son tomados de la cartilla: "Introducción a las matemáticas", desarrollada por docentes del Departamento de Matemáticas. Segundo semestre 2012.*

» *Soluciones a los problemas*

1. El Club Pep está vendiendo manzanas acarameladas a fin de recaudar fondos. El precio de cada manzana es \$800, excepto el viernes, día en el que se venderá cada una en \$650. Si el Club tiene para la venta 200 manzanas, ¿cuál es el mínimo número de manzanas de \$800 que se pueden vender a fin de obtener por lo menos \$148,000?

   Sea n el número de manzanas a vender, el problema indica que se necesita que el ingreso (I) sea de por lo menos \$148,000, como:

   $$I = (\text{numero de manzanas})\,(\text{precio de cada manzana})$$
   $$I = 800\,n$$

   Entonces la inecuación a resolver es $I \geq 148\,000$, $800\,n \geq 148\,000$, cuya solución es:

$$800\,n \geq 148\,000$$
$$n \geq \frac{148\,000}{800}$$
$$n \geq 185$$

Entonces n debe ser mayor o igual que 185 y menor o igual que 200, esto es $185 \leq n \leq 200$.

Para obtener por lo menos $148,000, el club debe vender entre 185 y 200 manzanas, incluyéndolas.

2. En el mes de diciembre de cierto año en la ciudad de Caracas, la temperatura obtuvo una mínima de 12 °C y una máxima de 26°C, es decir, la temperatura varía en el intervalo cerrado [12, 26]. Si se mide la temperatura en grados Fahrenheit, ¿cuál hubiese sido el intervalo de variación?

La relación entre los grados Centígrados y Fahrenheit es:

$$F = \frac{9}{5}\,C + 32$$

Al despejar C se obtiene:

$$C = \frac{5}{9}\,(F - 32) \qquad (1)$$

Por tanto, si el intervalo cerrado [12, 26] corresponde a la inecuación $12 \leq C \leq 26$, reemplazando el valor de C de (1) en la inecuación se tiene:

$$12 \leq \frac{5}{9}\,(F - 32) \leq 26$$

La solución de esta inecuación es:

$$12\left(\frac{9}{5}\right) \leq F - 32 \leq 26\left(\frac{9}{5}\right)$$
$$\frac{108}{5} \leq F - 32 \leq \frac{234}{5}$$
$$\frac{108}{5} + 32 \leq F \leq \frac{234}{5} + 32$$
$$\frac{268}{5} \leq F \leq \frac{394}{5}$$
$$53.6 \leq F \leq 78.8$$

Por tanto, al medir la temperatura en grados Fahrenheit el intervalo de variación es de [53.6, 78.8].

3. En cierto año, el operador de telefonía celular *Pacific Bell*, cobraba 0.15 dólares por el primer minuto, más 0.14 dólares por cada minuto adicional (o fracción). Si un cliente se suscribe a este plan, ¿cuántos minutos, máximo y mínimo, puede hablar en una misma llamada, una persona que cuenta con más de 2 dólares pero con menos de 4.50?

Sea m la duración de una llamada (en minutos), la expresión que relaciona el precio p de la llamada con los minutos consumidos es:

$$p = 0.15 + 0.14\,(m - 1), \quad m \geq 1 \qquad (1)$$

El problema indica que el precio de la llamada (p) puede ser más de 2 dólares pero menos de 4.50, por tanto, se tiene la inecuación $2 < p < 4.5$, al reemplazar el valor de p de (1) se tiene

$$2 < 0.15 + 0.14\,(m - 1) < 4.5$$

La solución de esta inecuación es:

$$2 < 0.15 + 0.14\,(m - 1) < 4.5$$
$$2 - 0.15 < 0.14\,(m - 1) < 4.5 - 0.15$$
$$1.85 < 0.14\,(m - 1) < 4.35$$
$$\frac{1.85}{0.14} < m - 1 < \frac{4.35}{0.14}$$
$$13.21 < m - 1 < 31.07$$
$$13.21 + 1 < m < 31.07 + 1$$
$$14.21 < m < 32.07$$

Entonces puede hablar entre 14 y 33 minutos, incluyéndolos, el intervalo solución es $[14,\ 33]$.

4. Un estudiante de física obtuvo 85, 98 y 93 en tres exámenes (valor máximo de 100 puntos), y le falta la nota del examen final, cuyo peso es dos veces un examen. Si la nota definitiva debe ser 90 o más para alcanzar una *A* y ser admitido en un curso avanzado, ¿cuál es la menor nota en su examen que le dará la admisión a dicho curso?

Sea N la nota del examen final (que vale el doble), como el promedio de los exámenes debe ser 90 o más, se puede plantear la inecuación:

$$\frac{85+98+93+2\,N}{5} \geq 90$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned}
\frac{85+98+93+2\,N}{5} &\geq 90 \\
\frac{276+2\,N}{5} &\geq 90 \\
276+2\,N &\geq 90\,(5) \\
2\,N &\geq 450-276 \\
N &\geq \frac{174}{2} \\
N &\geq 87
\end{aligned}$$

Para que la nota definitiva sea de 90 o más, es necesario tener una nota en el examen final de 87 puntos o más.

5. Irene Martínez asistirá a una conferencia fuera de su país durante una semana. Antes del viaje, evalúa los costos de rentar un auto por ese periodo de tiempo en dos empresas; *Avery*, una de ellas, pide 51 dólares semanales sin cuota de kilometraje, mientras que *Hart*, cobra 20.7 dólares por semana más 0.28 dólares por kilómetro (o fracción). ¿Cuántos kilómetros debe manejar Irene para que un auto de *Hart* sea la mejor opción?

Sea k los kilometros recorridos, el costo de rentar un auto en la empresa *Avery* es 51 dólares, mientras que el costo de renta de la empresa *Hart* es $20.7+0.28\,k$, se desea que el costo de renta de la empresa *Hart* sea menor o igual que el costo de renta de la otra empresa, esto es:

$$20.7+0.28\,k \leq 51$$

la solución de la inecuación es:

$$\begin{aligned}
20.7+0.28\,k &\leq 51 \\
0.28\,k &\leq 51-20.7 \\
0.28\,k &\leq 30.3 \\
k &\leq 108.21
\end{aligned}$$

Si en el viaje Irene maneja 108 kilómetros o menos, es más rentable alquilar un auto de la empresa *Hart*, en caso contrario, la empresa *Avery* ofrece una mejor opción.

Inecuaciones no lineales

Otro tipo de inecuaciones que surgen en la solución de problemas son las llamadas *inecuaciones no lineales* que, como su nombre lo indica, no están escritas de forma lineal y esto influye en los procedimientos de solución. Algunos ejemplos de inecuaciones lineales y no lineales son:

Inecuación lineal	Inecuación no lineal
$x-\frac{2-x}{3} \leq -5\,x+6$	$x-\frac{2-x}{3} \leq 5\,x^2+6$
$\frac{-9+4\,x-2\,(x-1)}{6} > -1$	$\frac{-9+4\,x-2\,(x-1)}{6\,x} > -1$
$-3 \leq x-\frac{2+x}{5} < 5$	$-3 \leq x\cdot\left(\frac{2+x}{5}\right) < 5$

En la columna derecha, en color rojo, se resalta lo que determina que cada inecuación sea no lineal.

A continuación, se proponen dos situaciones que ejemplifican este tipo de desigualdades y para esto se retomarán los ejercicios de mezclas estudiados a inicio de esta sección.

Problema 1. Mezcla *maní-nueces:* ecuación de demanda

Un repentino aumento en el costo del maní obligó a la empresa a incrementar el precio de las mezclas. Para el caso de la mezcla *maní-nueces,* el precio por libra se incrementó en 15% y como resultado de esto las ventas cayeron y, de vender 15 libras mensuales pasaron a 12. Un efecto como este también lo sufrieron las demás mezclas cada una en distinta proporción.

Dado el incremento en el precio y considerando un comportamiento lineal entre las libras vendidas (llámense x) y el precio por libra (llámese p), con la ecuación:

$$p + 650\,x = 22\,750 \tag{1}$$

se puede representar la relación entre estas dos variables. Este modelo lineal es llamado *ecuación de demanda*.

¿Qué es la ecuación de demanda? ⇒ enlace

Inicialmente se puede verificar que la relación anterior responde a lo ocurrido con las ventas y los precios de la mezcla *maní-nueces*.

- **Antes del incremento**. Se vendían 15 libras a $13,000 la libra, así $x = 15$, $p = 13\,000$. Reemplazando en la ecuación de demanda $13\,000 + 650\,(15) = 1300 + 9750 = 22\,750$.
- **Con el incremento**. El precio por libra queda en $14,950, con el cual se venden 12 libras, así $x = 12$ y $p = 14\,950$.
  Reemplazando en la ecuación de demanda $14\,950 + 650\,(12) = 14\,950 + 7800 = 22\,750$.

⇒ *Para tener ingresos de al menos $195,000, ¿cuántas libras se deben vender?, y, ¿a qué precios?*

Solución

Para cumplir con la condición del ingreso (I) de al menos $195,000 se considera la expresión general:

$$I = (\text{cantidad de libras})\,(\text{precio por libra})$$

De la ecuación de demanda (1) se despeja el precio (p) obteniendo $p = -650\,x + 22\,750$, luego el ingreso es igual a: $(-650\,x + 22\,750)\,x$, por tanto:

$$I = (-650\,x + 22\,750)\,x$$

A partir de la restricción impuesta sobre el ingreso se plantea la inecuación:

$$(-650\,x + 22\,750)\,x \geq 195\,000 \tag{1}$$

La *inecuación* anterior es *no lineal, ¿por qué? (* Considere la forma general de las inecuaciones lineales estudiadas anteriormente).

Antes de seguir con este problema, revise el ejemplo del enlace "*¿cómo resolver una inecuación no lineal?*" e identifique el método utilizado. Seguido a esto, se utilizará este método para resolver la inecuación de interés (1).

¿cómo resolver una inecuación no lineal? ⇒ enlace

Una vez conocido el método, se resolverá la inecuación:

$$(-650\,x + 22\,750)\,x \;\geq\; 195\,000$$

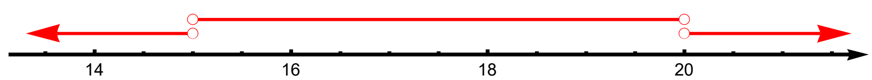
1. Expandir y comparar la inecuación con cero, es decir, $-650\,x^2 + 22\,750\,x - 195\,000 \geq 0$.

2. Efectuar operaciones y simplificar: $x^2 - 35\,x + 300 \leqslant 0$.

3. Asociar y resolver ecuación, es decir, $x^2 - 35\,x + 300 = 0$, que factorizada es similar a $(x-15)\,(x-20) = 0$, el conjunto solución es $\{15,\ 20\}$.

4. Considerar las restricciones sobre la variable, de existir. En este caso no hay.

5. Representar los números encontrados en los numerales **3.** y **4.** sobre una recta real e identificar los intervalos *generados* por estos: $\{15,\ 20\}$ dividen la recta en tres intervalos, estos son: $(-\infty,\ 15)$, $(15,\ 20)$ y $(20,\ \infty)$.



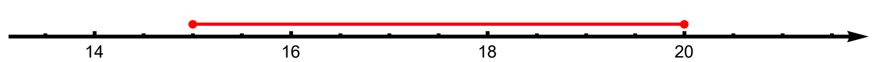
6. Escoger un valor en cada intervalo (valor de prueba) y sustituirlo en alguna de las inecuaciones anteriores al punto **3.**

- Del intervalo $(-\infty,\ 15)$ se toma, por ejemplo, $x = 13$ y se sustituye en la inecuación $x^2 - 35\,x + 300 \leqslant 0$. Esto deja como resultado $(13)^2 - 35 \cdot (13) + 300 \leqslant 0$, es decir, $14 \leqslant 0$.
  Lo anterior es falso, lo que implica que el intervalo al que pertenece $x = 13$ no hace parte del conjunto solución de la inecuación.
- Análogamente se toman valores de x en cada intervalo y se evalúan. Esto se observa en el siguiente cuadro:

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(-\infty,\ 15)$	13	$14 \leqslant 0$: falso
$(15, 20)$	18	$-6 \leqslant 0$: verdadero
$(20, \infty)$	21	$6 \leqslant 0$: falso

7. **El intervalo solución consiste en los intervalos en los que se llegó a una afirmación verdadera.** El símbolo de la desigualdad "≤" indica que los extremos del intervalo son cerrados.

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $(-650\,x + 22\,750)\,x \geq 195\,000$ o equivalentemente de la inecuación $x^2 - 35\,x + 300 \leqslant 0$ es el intervalo $[15,\ 20]$.



Así, la empresa debe vender mensualmente entre 15 y 20 libras, inclusive, para obtener ingresos mínimos de $195,000.

« *Respuesta*

Ejemplos de solución de inecuaciones

» Ejemplo 1:

Encontrar el intervalo solución de la inecuación: $15\,t - 6\,t^2 < 9$

Solución:

Primero se organiza la inecuación, quedando: $-6\,t^2+15\,t-9<0$, en este caso se puede multiplicar cada término por $-\frac{1}{3}$, lo que la simplifica a: $2\,t^2-5\,t+3>0$ (recuerde: multiplicar por un número negativo cambia el símbolo de la desigualdad).

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$2\,t^2-5\,t+3=0$$
.

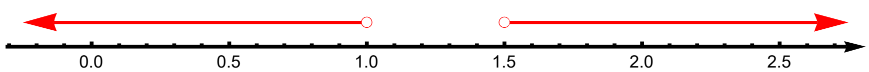
cuyas soluciones son $\left\{1,\ \frac{3}{2}\right\}$. La variable no tiene restricción.

Los números $\left\{1,\ \frac{3}{2}\right\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 1)$, $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\ \infty\right)$.

Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $2\,t^2-5\,t+3>0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	**Valor de prueba**	**Evaluado en la inecuación**
$(-\infty,\ 1)$	0	$3>\ 0$: verdadero
$\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$	1.2	$-0.12>\ 0$: falso
$\left(\frac{3}{2},\ \infty\right)$	2	$1>\ 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "<" indica que los extremos del intervalo son abiertos, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $-6\,t^2+15\,t-9<0$, son los intervalos $(-\infty,\ 1)$ y $\left(\frac{3}{2},\ \infty\right)$.



» Ejemplo 2:

Encontrar el intervalo solución de la inecuación: $6\,z^2-12\,z\geq-6$

Solución:

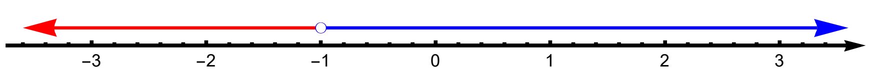
Primero se organiza la inecuación, quedando: $6\,z^2-12\,z+6\geq 0$, en este caso se puede multiplicar cada término por $\frac{1}{6}$, lo que la simplifica a: $z^2-2\,z+1\geq 0$.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$z^2-2\,z+1=0$$

cuyas soluciones son $\{-1\}$. La variable no tiene restricción.

El número $\{-1\}$ divide la recta real en 2 intervalos, estos son: $(-\infty,\ -1)$ y $(-1,\ \infty)$.

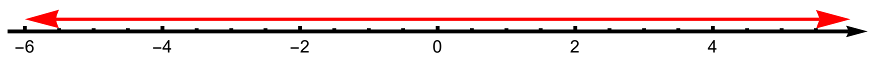


Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $z^2-2\,z+1\geq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(-\infty, -1)$	-2	$54 \geq 0$: verdadero
$(-1, \infty)$	0	$6 \geq 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "≥" indica que los extremos del intervalo son cerrados, como el primer intervalo termina donde el segundo comienza (incluyendo el extremo $z = -1$), se dice que la inecuación se cumple en todos los reales.

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $6\,z^2 - 12\,z + 6 \geq 0$, es $(-\infty,\ \infty)$.



» Ejemplo 3:

Encontrar el intervalo solución de la inecuación: $\frac{-2\,m^2 - 9\,m - 4}{4 - m} \leq 0$

Solución:

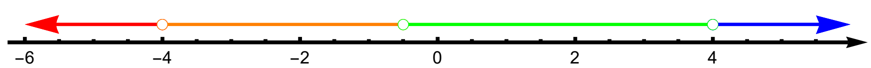
La inecuación ya está organizada y comparada con cero, por tanto, se debe resolver la ecuación:

$$\frac{-2\,m^2 - 9\,m - 4}{4 - m} = 0$$

cuyas soluciones son $\left\{-4,\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, esto es: $4 - m = 0$, por tanto, $m \neq 4$ es la única restricción.

Los números $\left\{-4,\ -\frac{1}{2},\ 4\right\}$ dividen la recta real en 4 intervalos, estos son: $(-\infty,\ -4)$, $\left(-4,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$ y $(4,\ \infty)$.

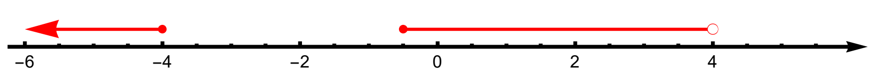


Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{-2\,m^2 - 9\,m - 4}{4 - m} \leq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(-\infty, -4)$	-5	$-1 \leqslant 0$: verdadero
$\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$	-3	$\frac{5}{7} \leqslant 0$: falso
$\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$	0	$-1 \leqslant 0$: verdadero
$(4, \infty)$	5	$99 \leqslant 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que los extremos del intervalo son cerrados, pero como $m \neq 4$ es una restricción, el extremo del intervalo que contiene a este valor debe ser abierto.

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $\frac{-2\,m^2 - 9\,m - 4}{4 - m} \leq 0$ son los intervalos $(-\infty,\ -4]$ y $\left[-\frac{1}{2},\ 4\right)$.



» Ejemplo 4:

Encontrar el intervalo solución de la inecuación: $\frac{60\,000}{x-2} - \frac{60\,000}{x} \leq 2500$, con restricción $x \geq 0$.

Solución:

Primero se organiza la inecuación, quedando: $\frac{60\,000}{x-2} - \frac{60\,000}{x} - 2500 \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar la resta de las fracciones:

$$\frac{60\,000\,x - 60\,000\,x + 120\,000 - 2500\,x^2 + 5000\,x}{x\,(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{120\,000 - 2500\,x^2 + 5000\,x}{x\,(x-2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2\,x - 48}{x\,(x-2)} \geq 0$$

Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $-\frac{1}{2500}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas, además de "ajustar" el signo de término cuadrático.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{x^2 - 2\,x - 48}{x\,(x-2)} = 0$$

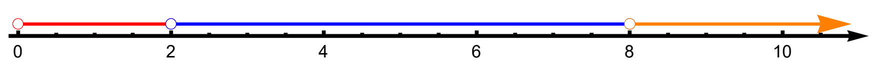
cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$x^2 - 2\,x - 48 = 0$$

y el conjunto solución es $\{-6,\ 8\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, esto es: $x(x-2) = 0$, por tanto, $x \neq 0$ y $x \neq 2$ son dos restricciones de la inecuación.

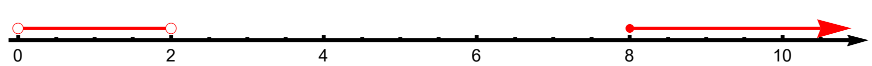
Los números $\{-6,\ 0,\ 2,\ 8\}$ dividen la recta real en 5 intervalos, estos son: $(-\infty,\ -6)$, $(-6,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 8)$ y $(8,\ \infty)$, la restricción del ejercicio $x \geq 0$ descarta los intervalos: $(-\infty,\ -6)$, $(-6,\ 0)$, lo cual indica que se debe probar y validar la solución en los intervalos: $(0,\ 2)$, $(2,\ 8)$ y $(8,\ \infty)$.



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{x^2 - 2\,x - 48}{x\,(x-2)} \geq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(0, 2)$	1	$14 \geqslant 0$: verdadero
$(2, 8)$	5	$-\frac{11}{5} \geqslant 0$: falso
$(8, \infty)$	12	$\frac{3}{5} \geqslant 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "$\geq$" indica que los extremos del intervalo son cerrados, como $x \neq 0$ y $x \neq 2$ son las restricciones, los extremos de los intervalos que contienen a estos valores deben ser abiertos. El conjunto solución de la inecuación: $\frac{60\,000}{x-2} - \frac{60\,000}{x} \leq 2500$, son los intervalos $(0,\ 2)$ y $[8,\ \infty)$.



Problema 2. Mezcla *maní-nueces:* nuevas presentaciones.

Una vez estudiado el informe de venta del segundo trimestre de la mezcla *maní-nueces*, se ha decidido producir paquetes en presentaciones de cuarto de libra, media libra, libra y de dos libras; el precio de venta se relaciona en la siguiente tabla.

Mezcla	Valor			
	Cuarto de libra	Media libra	Una libra	Dos libras
Maní –nueces	$ 4500 a $ 5000	$ 9000 a $ 10000	$ 15000 a $ 18500	$ 29000 a $ 36000

Para el tercer trimestre se ha establecido como meta obtener unos ingresos de $850,000 por la venta de la presentación de cuarto de libra. Si cada paquete se vende entre $4,500 y $5,000.

⇒ *¿Cuál es el máximo y mínimo número de paquetes en la presentación cuarto de libra que se deben vender para lograr la meta?*

Solución

A partir de los interrogantes planteados se identifican dos datos desconocidos; el número mínimo y máximo a vender en la presentación de cuarto de libra.

Los datos conocidos son los ingresos por la venta de cierta cantidad de libras de mezcla *maní-nueces*: $850,000.

Para determinar el número de paquetes se asigna la variable y a la cantidad vendida, y de la ecuación de ingreso se sabe que:

$$I = (\text{cantidad de paquetes})\,(\text{precio por paquete}) = y\,p = 850\,000$$

$$p = \frac{850\,000}{y}$$

Si el cuarto se vende entre $4,500 y $5,000, la *inecuación no lineal:*

$$4500 \leq \frac{850\,000}{y} \leq 5000$$

modela la situación. Las dos inecuaciones por resolver son:

$$4500 \leq \frac{850\,000}{y}$$

$$\frac{850\,000}{y} \leq 5000$$

- Se considera inicialmente resolver la inecuación:

$$4500 \leq \frac{850\,000}{y}$$

Primero se organiza, quedando: $4500 - \frac{850\,000}{y} \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar la resta de las fracciones:

$$\frac{4500\,y - 850\,000}{y} \leq 0$$

$$\frac{500\,(9\,y - 1700)}{y} \leq 0$$

$$\frac{9\,y - 1700}{y} \leq 0$$

Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $\frac{1}{500}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{9\,y - 1700}{y} = 0$$

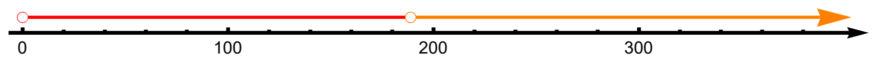
cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$9\,y - 1700 = 0$$

y el conjunto solución es $\left\{\frac{1700}{9}\right\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, por tanto, $y \neq 0$ es la restricción de la inecuación.

Los números $\left\{0,\ \frac{1700}{9}\right\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{1700}{9}\right)$ y $\left(\frac{1700}{9},\ \infty\right)$, la restricción del problema indica que $y > 0$; la idea es vender paquetes y no tiene sentido un resultado negativo. Por tanto, solo se debe probar y validar la solución en los intervalos: $\left(0,\ \frac{1700}{9}\right)$ y $\left(\frac{1700}{9},\ \infty\right)$.

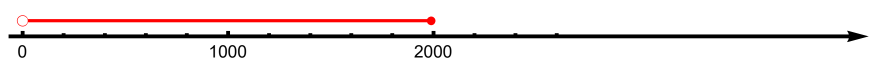


Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{9\,y-1700}{y} \leqslant 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$\left(0,\ \frac{1700}{9}\right)$	1000	$-\frac{89}{10} \leq 0$: verdadero
$\left(\frac{1700}{9},\ \infty\right)$	300	$\frac{10}{3} \leq 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que el extremo derecho del intervalo es cerrado y la restricción $y \neq 0$ indica que el extremo izquierdo es abierto.

Así, el conjunto solución de la inecuación $4500 \leq \frac{850\,000}{y}$, o equivalentemente de $\frac{9\,y-1700}{y} \leq 0$ es el intervalo $\left(0,\ \frac{1700}{9}\right]$.



- Ahora se considera resolver la inecuación:

$$\frac{850\,000}{y} \leq 5000$$

Primero se organiza, quedando: $\frac{850\,000}{y} - 5000 \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar la resta de las fracciones:

$$\frac{850\,000 - 5000\,y}{y} \leq 0$$

$$\frac{-5000\,(y-170)}{y} \leq 0$$

$$\frac{y-170}{y} \geq 0$$

Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $-\frac{1}{5000}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas. Recuerde que multiplicar en una desigualdad por una cantidad negativa cambia el símbolo de la desigualdad.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{y-170}{y} = 0$$

cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$y - 170 = 0$$

y el conjunto solución es $\{170\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, por tanto, $y \neq 0$ es la restricción de la inecuación.

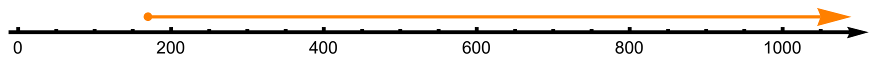
Los números $\{0,\ 170\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 170)$ y $(170,\ \infty)$, la restricción del problema indica que $y > 0$; la idea es vender paquetes y no tiene sentido un resultado negativo. Por tanto, solo se debe probar y validar la solución en los intervalos: $(0,\ 170)$ y $(170,\ \infty)$

Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{y-170}{y} \geq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

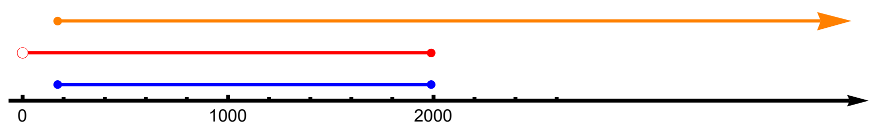
Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(0,\ 170)$	100	$-\frac{7}{10} \geq 0$: falso
$(170,\ \infty)$	1000	$\frac{83}{100} \geq 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "≥" indica que el extremo izquierdo del intervalo es cerrado.

Así, el conjunto solución de la inecuación $\frac{850\,000}{y} \leq 5000$, o equivalentemente de $\frac{y-170}{y} \geq 0$ es el intervalo $[170,\ \infty)$.



La solución de la inecuación original $4500 \leq \frac{60\,000}{y} \leq 5000$ es *lo que tienen en común* ambas respuestas, al mirar las representaciones gráficas



Se observa que la solución es el intervalo $\left[170,\ \frac{1700}{9}\right]$, y esto indica la cantidad de cuartos de libra que se pueden vender con la restricción del precio por cuarto y los ingresos recibidos.

Si el cuarto de libra de la mezcla *maní-nueces* se vende entre \$4,500 y \$5,000 con la meta establecida de \$850,000, se venden a lo sumo $\frac{1700}{9} \approx 188$ y como mínimo 170 paquetes de cuartos de libras.

« Respuesta

Resumen

Inecuaciones del tipo $4500 \leq \frac{850\,000}{y} \leq 5000$, $15\,t - 6\,t^2 < 9$ o $\frac{-2\,m^2-9\,m-4}{4-m} \leq 0$ se denominan *inecuaciones no lineales*, la forma de encontrar la solución es diferente a la de la inecuación lineal, tenga en cuenta las siguientes observacíones:

1. No hay una forma única de resolver inecuaciones, ponga en práctica diferentes estrategias.
2. Emplee el procedimiento ilustrado en los ejemplos y busque alternativas de solución.
3. Siempre que pueda, simplifique y factorice las expresiones.

Inecuaciones

Definición de una inecuación no lineal:
Como su nombre lo indica, este tipo de inecuaciones no se pueden escribir de forma lineal y esto influye en los procedimientos de solución, en general se puede seguir una serie de procedimientos para resolver una inecuación no lineal.

¿cómo resolver una inecuación no lineal? ⇒ enlace

Ejemplos de solución

Ejemplo 1
Ejemplo 2
Ejemplo 3
Ejemplo 4
Ejemplo 5
Ejemplo 6

Resolver la inecuación $\frac{-2x^2-9x-4}{1-x} > -4$

$$\frac{-2x^2-9x-4}{1-x}+4>0$$
$$\frac{-x(2x-5)}{1-x}>0$$

La solución de la ecuación $-x(2x-5)=0$ es: $\left\{0,\ \frac{5}{2}\right\}$, y la restricción en la variable es: $\{1\}$.
Ahora se escoge un valor de prueba en cada uno de los intervalos generados por los números $\left\{0,\ 1,\ \frac{5}{2}\right\}$ y se sustituye en $\frac{-x(2x-5)}{1-x}>0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.
Los intervalos solución son: $(0,\ 1)$ y $\left(\frac{5}{2},\ \infty\right)$.

Ejercicios de refuerzo*

» Ejercicios procedimientales

Resuelva las siguientes inecuaciones expresando el conjunto solución como intervalos y su representación gráfica:

1. $3z^2+6z>9$
2. $-t^3+6t^2-8t<0$
3. $\frac{2u^2-5u+3}{-u-3} \leq -1$
4. $9x^2 \leq 16$

» *Solución a los ejercicios*

1. El intervalo solución de la desigualdad $3z^2+6z>9$, es:
   Primero se organiza la inecuación, quedando: $3z^2+6z-9>0$, en este caso se puede multiplicar cada término por $\frac{1}{3}$, lo que la simplifica a: $z^2+2z-3>0$.

   Ahora se debe resolver la ecuación:

$$z^2+2z-3=0$$

cuyas soluciones son $\{-3,\ 1\}$. La variable no tiene restricción.

Los números $\{-3,\ 1\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ 1)$ y $(1,\ \infty)$.

Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $z^2 + 2\,z - 3 > 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(-\infty, -3)$	-4	$5 > 0$: verdadero
$(-3, 1)$	0	$-3 > 0$: falso
$(1, \infty)$	2	$5 > 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad ">" indica que los extremos del intervalo son abiertos, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $3\,z^2 + 6\,z > 9$, son los intervalos $(-\infty,\ -3)$ y $(1,\ \infty)$.

2. El intervalo solución de la desigualdad $-t^3 + 6\,t^2 - 8\,t < 0$, es:

Se debe resolver la ecuación:

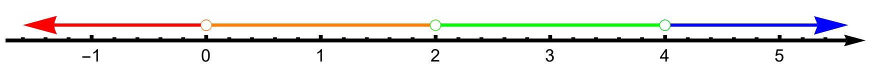
$$-t^3 + 6\,t^2 - 8\,t = 0$$

Lo cual se puede hacer primero factorizando y luego encontrando las diferentes soluciones:

$$-t^3 + 6\,t^2 - 8\,t = 0$$
$$-t(t-4)\,(t-2) = 0$$
$$t = 0, \qquad t = 4, \qquad t = 3$$

por tanto, las soluciones son $\{0,\ 2,\ 4\}$. La variable no tiene restricción.

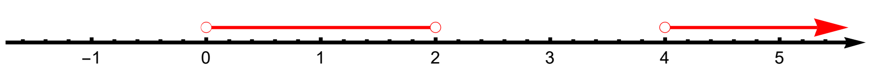
Los números $\{0,\ 2,\ 4\}$ dividen la recta real en 4 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ 4)$ y $(4,\ \infty)$.



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $-t^3 + 6\,t^2 - 8\,t < 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(-\infty, 0)$	-1	$15 < 0$: falso
$(0, 2)$	1	$-3 < 0$: verdadero
$(2, 4)$	3	$3 < 0$: falso
$(4, \infty)$	5	$15 < 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "<" indica que los extremos del intervalo son abiertos, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $-t^3 + 6\,t^2 - 8\,t < 0$, son los intervalos $(0,\ 2)$ y $(4,\ \infty)$.



3. El intervalo solución de la desigualdad $\frac{2\,u^2 - 5\,u + 3}{-u-3} \leq -1$, es:

Primero se organiza la inecuación, quedando: $\frac{2\,u^2 - 5\,u + 3}{-u-3} + 1 \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar la resta de las fracciones:

$$\frac{2u^2-5u+3}{-u-3}+\frac{-u-3}{-u-3}\le 0$$
$$\frac{2u^2-5u+3+(-u-3)}{-u-3}\le 0$$
$$\frac{2u^2-5u+3-u-3}{-u-3}\le 0$$
$$\frac{2u^2-6u}{-u-3}\le 0$$
$$\frac{2u(u-3)}{-(u+3)}\le 0$$

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{2u(u-3)}{-(u+3)}=0$$

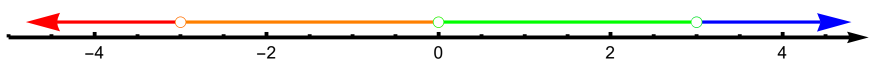
cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$2u(u-3)=0$$

y el conjunto solución es $\{0,\ 3\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, esto es: $-(u+3)=0$, por tanto, $x\neq -3$ es la restricción de la inecuación.

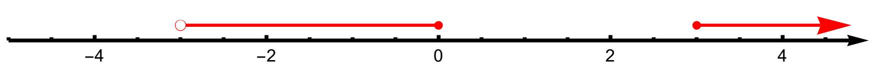
Los números $\{-3,\ 0,\ 3\}$ dividen la recta real en 4 intervalos, estos son: $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ 0)$, $(0,\ 3)$ y $(3,\ \infty)$



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{2u(u-3)}{-(u+3)}\le 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$(-\infty,-3)$	-4	$56\le 0$: falso
$(-3,\ 0)$	-1	$-4\le 0$: verdadero
$(0,\ 3)$	2	$\frac{4}{5}\le 0$: falso
$(3,\ \infty)$	5	$-\frac{5}{2}\le 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que los extremos del intervalo son cerrados, como $x\neq -3$ es la restricción, entonces el extremo del intervalo que lo contiene debe ser abierto. El conjunto solución de la inecuación: $\frac{2u^2-5u+3}{-u-3}+1\le 0$, son los intervalos $(-3,\ 0]$ y $[3,\ \infty)$.



4. El intervalo solución de la desigualdad $9x^2<16$, es:

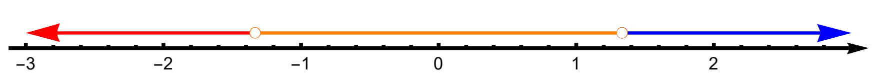
Primero se organiza la inecuación, quedando: $9x^2-16<0$.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$9x^2-16=0$$

cuyas soluciones son $\left\{-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right\}$. La variable no tiene restricción.

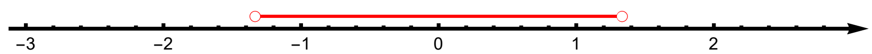
Los números $\left\{-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $\left(-\infty,\ -\frac{4}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{4}{3},\ \infty\right)$.



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $9x^2-16>0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$	-2	$20 < 0$: falso
$\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$	1	$-7 < 0$: verdadero
$\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$	3	$65 < 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "<" indica que los extremos del intervalo son abiertos, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $9x^2 - 16 < 0$, es el intervalo $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



» Problemas de aplicación

1. Retome el problema "Mezcla *maní-nueces:* ecuación de demanda", exprese la cantidad de unidades (x) en términos del precio (p) y obtenga los posibles precios de venta de la mezcla que garanticen ingresos de al menos $195,000.
2. Retome el problema "Mezcla *maní-nueces:* nuevas presentaciones", suponga que la meta de ventas para la presentación de media libra es de $2,400,000 y que cada paquete se vende entre $9,000 y $10,000. ¿Cuál es el máximo y mínimo número de paquetes en esta presentación que se deben vender para lograr la meta?
3. Una decoradora diseña y vende lámparas para muros. Si la utilidad semanal (en dólares) por la fabricación y venta de x lámparas se puede describir a través de la expresión $-x^2 + 80x - 300$, ¿cuántas lámparas se deben vender cada semana a fin de garantizar al menos 400 dólares de utilidad?
4. Si la utilidad (en dólares) de un gran complejo turístico de apartamentos está dada por $-x^2 + 250x - 15\,000$, donde x es el número de apartamentos alquilados, ¿qué ocupación producirá ganancias al complejo?
5. El mercado de productos básicos es muy inestable; puede ganarse o perderse dinero muy rápidamente en inversiones en fríjol de soya, trigo, etc. Suponga que un empresario lleva un control de sus ganancias totales en el tiempo t, en meses, y después de que comienza a invertir encuentra que la expresión $4t^2 - 29t + 39$ describe dichas ganancias, ¿cuáles meses, después de haber empezado a invertir, el empresario está perdiendo?
6. Se requiere cercar un terreno rectangular para después dividirlo a la mitad con otra cerca. La cerca del contorno cuesta 3 dólares por pie lineal, y la otra, 6 dólares por pie lineal. El área del terreno debe ser 1800 pies ^{2} y el costo de la cerca no debe sobrepasar los 2310 dólares, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

** Algunos ejercicios propuestos son tomados de la cartilla: "Introducción a las matemáticas", desarrollada por docentes del Departamento de Matemáticas. Segundo semestre 2012.*

» *Solución a los problemas*

1. Retome el problema "Mezcla *maní-nueces:* ecuación de demanda", exprese la cantidad de unidades (x) en términos del precio (p) y obtenga los posibles precios de venta de la mezcla que garanticen ingresos de al menos $195,000.

En el problema "Mezcla *maní-nueces:* ecuación de demanda" se pedía encontrar la cantidad de libras a vender para tener ingresos de al menos $195,000, la respuesta fue que se deben vender entre 15 y 20 libras, inclusive.

La respuesta del problema se puede representar con la inecuación:

$$15 \le x \le 20 \tag{1}$$

Y se tiene que la relación entre las libras vendidas (x) y el precio por libra (p), satisface la ecuación de demanda:

$$p + 650\,x = 22\,750 \qquad (2)$$

Despejando x se llega que:

$$x = \frac{22\,750 - p}{650}$$

y reemplazando este valor en (1):

$$15 \leq \frac{22\,750 - p}{650} \leq 20$$

se formula una inecuación en la cual se puede despejar p:

$$15 \leq \frac{22\,750 - p}{650} \leq 20$$

$$15 \times 650 \leq 22\,750 - p \leq 20 \times 650$$

$$9750 \leq 22\,750 - p \leq 13\,000$$

$$-13\,000 \leq -p \leq -9750$$

$$13\,000 \geq p \geq 9750$$

$$9750 \leq p \leq 13\,000$$

Por tanto, los posibles precios que garantizan ingresos de al menos $195,000 están entre $ 9,750 y $ 13,000, inclusive.

2. Retome el problema “Mezcla *maní-nueces:* nuevas presentaciones”, suponga que la meta de ventas para la presentación de media libra es de $2,400,000 y que cada paquete se vende entre $9,000 y $10,000. ¿Cuál es el máximo y mínimo número de paquetes en esta presentación que se deben vender para lograr la meta?

Para plantear la inecuación se procede de manera similar al problema, sea n el número de paquetes a vender en la presentación de media libra y se sabe que la meta a alcanzar es de $2,400,000.

De la ecuación de ingreso se sabe que:

$$I = \text{(cantidad de paquetes) (precio por paquete)} = n\,p = 2\,400\,000$$

$$p = \frac{2\,400\,000}{n}$$

Si el cuarto se vende entre $9,000 y $10,000, la *inecuación no lineal:*

$$9000 \leq \frac{2\,400\,000}{n} \leq 10\,000$$

modela la situación. Las dos inecuaciones a resolver son:

$$9000 \leq \frac{2\,400\,000}{n}$$

$$\frac{2\,400\,000}{n} \leq 10\,000$$

⟩⟩ Se considera inicialmente resolver la inecuación:

$$9000 \leq \frac{2\,400\,000}{n}$$

Primero se organiza la desigualdad, quedando: $9000 - \frac{2\,400\,000}{n} \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar la resta de las fracciones:

$$\frac{9000\,n - 2\,400\,000}{n} \leq 0$$

$$\frac{3000\,(3\,n - 800)}{n} \leq 0$$

$$\frac{3\,n - 800}{n} \leq 0$$

Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $\frac{1}{3000}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{3\,n - 800}{n} = 0$$

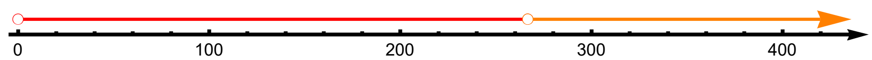
cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$3n - 800 = 0$$

y el conjunto solución es $\left\{\frac{800}{3}\right\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, por tanto, $n \neq 0$ es la restricción de la inecuación.

Los números $\left\{0,\ \frac{800}{3}\right\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{800}{3}\right)$ y $\left(\frac{800}{3},\ \infty\right)$. Debido a las restricciones del problema, solo se debe probar y validar la solución en los intervalos: $\left(0,\ \frac{800}{3}\right)$ y $\left(\frac{800}{3},\ \infty\right)$.

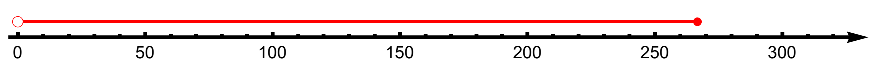


Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{3n-800}{n} \leq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	**Valor de prueba**	**Evaluado en la inecuación**
$\left(0,\ \frac{800}{3}\right)$	200	$-1 \leq 0$: verdadero
$\left(\frac{800}{3},\ \infty\right)$	600	$\frac{5}{3} \leq 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que el extremo derecho del intervalo es cerrado y la restricción $n \neq 0$ indica que el extremo izquierdo es abierto.

Así, el conjunto solución de la inecuación $9000 \leq \frac{2\,400\,000}{n}$, o equivalentemente de $\frac{3n-800}{n} \leq 0$ es el intervalo $\left(0,\ \frac{800}{3}\right]$.



⟩⟩ Ahora se considera resolver la inecuación:

$$\frac{2\,400\,000}{n} \leq 10\,000$$

Primero se organiza la desigualdad, quedando: $\frac{2\,400\,000}{n} - 10\,000 \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar la resta de las fracciones:

$$\frac{2\,400\,000 - 10\,000\,n}{n} \leq 0$$

$$\frac{-10\,000\,(n-240)}{n} \leq 0$$

$$\frac{n-240}{n} \geq 0$$

Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $-\frac{1}{10\,000}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas. Recuerde que multiplicar en una desigualdad por una cantidad negativa cambia el símbolo de la desigualdad.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{n-240}{n} = 0$$

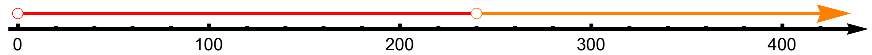
cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$n - 240 = 0$$

y el conjunto solución es $\{240\}$.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, por tanto, $n \neq 0$ es la restricción de la inecuación.

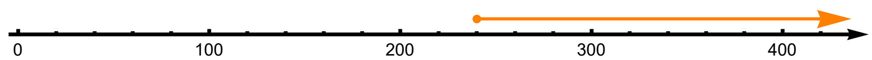
Los números $\{0,\ 240\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 240)$ y $(240,\ \infty)$. Debido a las restricciones del problema, solo se debe probar y validar la solución en los intervalos: $(0,\ 240)$ y $(240,\ \infty)$



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{n-240}{n} \geq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

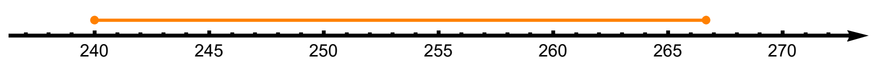
Intervalo	**Valor de prueba**	**Evaluado en la inecuación**
(0, 240)	100	$-\frac{7}{5} \geq 0$: falso
(240, ∞)	300	$\frac{1}{5} \geq 0$: verdadero

El símbolo de la desigualdad "≥" indica que el extremo izquierdo del intervalo es cerrado.



Así, el conjunto solución de la inecuación $\frac{2\,400\,000}{n} \leq 10\,000$, o equivalentemente de $\frac{n-240}{n} \geq 0$ es el intervalo $[240,\ \infty)$.

La solución de la inecuación original $9000 \leq \frac{2\,400\,000}{n} \leq 10\,000$ es el intervalo: $\left[240,\ \frac{800}{3}\right]$. Esto indica que si la media libra de la mezcla *maní-nueces* se vende entre $9,000 y $10,000, y la meta establecida es de $2,400,000, se venden a lo sumo 240 y como mínimo $\frac{800}{3}$ medias libras.



3. Una decoradora diseña y vende lámparas para muros. Si la utilidad semanal (en dólares) por la fabricación y venta de x lámparas se puede describir a través de la expresión $-x^2+80\,x-300$, ¿cuántas lámparas se deben vender cada semana a fin de garantizar al menos 400 dólares de utilidad?

La pregunta del problema se puede plantear como:

$$-x^2+80\,x-300 \geq 400$$

Al organizar la inecuación queda $-x^2+80\,x-700 \geq 0$, en este caso se puede multiplicar cada término por -1, lo que la simplifica a $x^2-80\,x+700 \leq 0$ (Recuerde cambiar el signo al multiplicar por una cantidad negativa).

Ahora se debe resolver la ecuación:

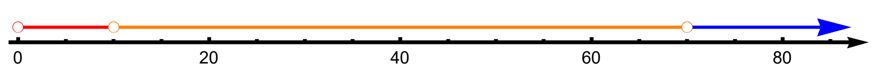
$$x^2-80\,x+700=0$$

que factorizando es lo mismo que:

$$(x-10)\,(x-70)=0$$

cuyas soluciones son $\{10,\ 70\}$. La variable no tiene restricción.

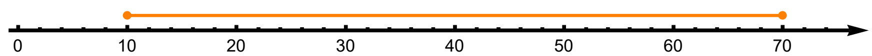
Los números $\{10,\ 70\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 10)$, $(10,\ 70)$ y $(70,\ \infty)$. Como no tiene sentido la parte negativa del primer intervalo (*¿por qué?*), se escogen los intervalos: $(0,\ 10)$, $(10,\ 70)$ y $(70,\ \infty)$



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $x^2-80\,x+700 \leq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
(0, 10)	5	$325 \leq 0$: falso
(10, 70)	30	$-800 \leq 0$: verdadero
$(70, \infty)$	80	$700 \leq 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que los extremos del intervalo son cerrados, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $-x^2 + 80\,x - 300 \geq 400$, es [10, 70]. A fin de garantizar al menos 400 dólares de utilidad, cada semana se deben vender entre 10 y 70 lámparas, inclusive ($10 \leq x \leq 70$).



4. Si la utilidad (en dólares) de un gran complejo turístico de apartamentos está dada por $-x^2 + 250\,x - 15\,000$, donde x es el número de apartamentos alquilados, ¿qué ocupación producirá ganancias al complejo?

La pregunta del problema se puede plantear como:

$$-x^2 + 80\,x - 300 \geq 400$$

es conveniente multiplicar cada término por -1, lo que simplifica la inecuación a $x^2 - 250\,x + 15\,000 \leq 0$ (Recuerde cambiar el signo al multiplicar por una cantidad negativa).

Ahora se debe resolver la ecuación:

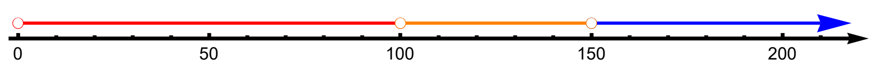
$$x^2 - 250\,x + 15\,000 = 0$$

que factorizando es lo mismo que:

$$(x - 150)\,(x - 100) = 0$$

cuyas soluciones son $\{100,\ 150\}$. La variable no tiene restricción.

Los números $\{100,\ 150\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 100)$, $(100,\ 150)$ y $(150,\ \infty)$. Como no tiene sentido la parte negativa del primer intervalo, se escogen los intervalos: $(0,\ 100)$, $(100,\ 150)$ y $(150,\ \infty)$



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $x^2 - 250\,x + 15\,000 \leq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
(0, 101)	70	$2400 \leq 0$: falso
(100, 150)	110	$-400 \leq 0$: verdadero
$(150, \infty)$	200	$5000 \leq 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que los extremos del intervalo son cerrados, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $-x^2 + 250\,x - 15\,000 \geq 0$, es $[100,\ 150]$. Si se alquilan entre 100 y 150 apartamentos, inclusive ($100 \leq x \leq 150$), se producen ganancias en el complejo.

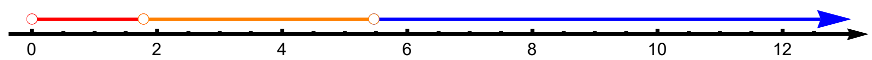
5. El mercado de productos básicos es muy inestable; puede ganarse o perderse dinero muy rápidamente en inversiones en fríjol de soya, trigo, etc. Suponga que un empresario lleva un control de sus ganancias totales en el tiempo t, en meses, y después de que comienza a invertir encuentra que la expresión $4\,t^2 - 29\,t + 39$ describe dichas ganancias, ¿cuáles meses, después de haber empezado a invertir, el empresario está perdiendo?

Sea t el número de meses que han pasado desde que se comienza a invertir, como se quiere conocer el intervalo de tiempo en que se tiene pérdidas en el negocio, la pregunta del problema se puede plantear como:

$$4\,t^2 - 29\,t + 39 \leq 0$$

cuyas soluciones son aproximadamente $\{1.783,\ 5.466\}$. La variable no tiene restricción.

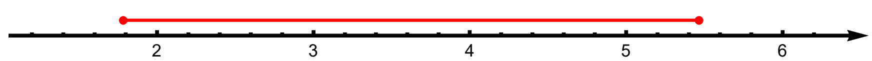
Los números $\{1.783,\ 5.466\}$ dividen la recta real en 3 intervalos, estos son: $(-\infty,\ 1.783)$, $(1.783,\ 5.466)$ y $(5.466,\ \infty)$. Como no tiene sentido la parte negativa del primer intervalo, se escogen los intervalos: $(0,\ 1.783)$, $(1.783,\ 5.466)$ y $(5.466,\ \infty)$



Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $4\,t^2 - 29\,t + 39 \leq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

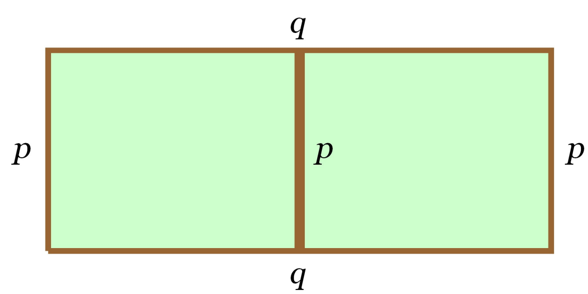
Intervalo	Valor de prueba	Evaluado en la inecuación
(0, 1.783)	1	$14 \leq 0$: falso
(1.783, 5.466)	3	$-12 \leq 0$: verdadero
(5.466, ∞)	11	$204 \leq 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "$\leq$" indica que los extremos del intervalo son cerraods, por tanto, el conjunto solución de la inecuación: $4\,t^2 - 29\,t + 39 \leq 0$, es aproximadamente el intervalo $[1.783,\ 5.466]$. El empresario está perdiendo aproximadamente desde que finaliza el segundo mes ($t \approx 1.783$) hasta la mitad del quinto mes ($t \approx 5.466$).



6. Se requiere cercar un terreno rectangular para después dividirlo a la mitad con otra cerca. La cerca del contorno cuesta 3 dólares por pie lineal, y la que divide a la mitad cuesta 6 dólares por pie lineal. El área del terreno debe ser 1800 pies ^{2} y el costo de la cerca no debe sobrepasar los 2310 dólares, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?

Una representación gráfica del problema puede ser:



siendo p el largo y q el ancho del terreno (ambos medidos en pies). Con las condiciones del problema se pueden plantear las siguientes expresiones:

- "La cerca del contorno cuesta 3 dólares por pie lineal, y la otra, 6 dólares por pie lineal", se simboliza con la expresión: $3\,(2\,p) + 3\,(2\,q) + 6\,(p)$, que simplificada es $12\,p + 6\,q$
- "El área es de 1800 pies^2" se simboliza con la expresión: $p\,q = 1800$
- "el costo de la cerca no debe sobrepasar los 2310 dólares" se simboliza con la expresión: $12\,p + 6\,q \leq 2310$

La inecuación $12\,p + 6\,q \leq 2310$ tiene dos variables, para poder resolverla es necesario expresarla en función de solo una, para esto se puede despejar alguna de las variables de la ecuación: $p\,q = 1800$, de donde: $p = \frac{1800}{q}$, y reemplazar en la inecuación, quedando:

$$12\left(\frac{1800}{q}\right) + 6\,q \leq 2310$$

La cual es una inecuación no lineal, para encontrar la solución primero se organiza la inecuación, quedando: $2\left(\frac{1800}{q}\right)+6\,q-2310 \leq 0$.

Para simplificar la expresión de la izquierda se debe realizar las operaciones entre las fracciones:

$$2\left(\frac{1800}{q}\right)+6\,q-2310 \leq 0$$

$$\frac{3600}{q}+\frac{6\,q^2}{q}-\frac{2310\,q}{q} \leq 0$$

$$\frac{3600+6\,q^2-2310\,q}{q} \leq 0$$

$$\frac{6\,q^2-2310\,q+3600}{q} \leq 0$$

$$\frac{6\,(q^2-385\,q+600)}{q} \leq 0$$

$$\frac{q^2-385\,q+600}{q} \leq 0$$

Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $\frac{1}{6}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas.

Ahora se debe resolver la ecuación:

$$\frac{q^2-385\,q+600}{q} = 0$$

cuyas soluciones son las mismas que la ecuación:

$$q^2-385\,q+600=0$$

y el conjunto solución es $\{1.565,\ 383.435\}$ aproximadamente.

Las restricciones en la variable ocurren cuando el denominador es cero, por tanto, $q \neq 0$ es la restricción de la inecuación.

Los números $\{0,\ 1.565,\ 383.435\}$ dividen la recta real en 4 intervalos. El contexto del problema determina que $q>0$, por tanto, los intervalos donde se debe probar y validar la solución son: $(0,\ 1.565)$, $(1.565,\ 383.435)$ y $(383.435,\ \infty)$.

Ahora se escoge un valor de prueba en cada intervalo y se sustituye en $\frac{q^2-385\,q+600}{q} \leq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Intervalo	**Valor de prueba**	**Evaluado en la inecuación**
(0, 1.565)	1	$216 \leq 0$: falso
(1.565, 383.435)	300	$-83 \leq 0$: verdadero
(383.435, ∞)	500	$\frac{581}{5} \leq 0$: falso

El símbolo de la desigualdad "≤" indica que los extremos del intervalo son cerrados, por tanto, el valor del ancho de la cerca está dado por: $1.565 \leq q \leq 383.435$ pies.

Cuando $q=1.565$ toma su mínimo valor, $p=\frac{1800}{q}=\frac{1800}{1.565}\approx 1150.16$ pies. Cuando $q=383.435$ toma su máximo valor, $p=\frac{1800}{q}=\frac{1800}{383.435}\approx 4.694$ pies, por tanto, el valor del largo de la cerca está dado por: $4.694 \leq q \leq 1150.16$ pies.

3. Conclusiones del capítulo

La verdadera y notable magia del Álgebra consiste en poder convertir la descripción verbal de una situación en una *ecuación* o *inecuación*; una vez se tiene la expresión, existen diferentes técnicas para despejar la incógnita. El objetivo de este capítulo no es que el lector memorice las técnicas, pues al fin y al cabo estas están disponibles en *software* matemático que podrá encontrar en calculadoras, programas para *tablets* o computador e incluso en páginas *web*.

El objetivo del capítulo es que el lector se familiarice con los procesos necesarios para plantear ecuaciones o inecuaciones, hay herramientas que puede utilizar para su solución, pero el planteamiento depende de cada uno. En adelante, usted estará en la capacidad de enfrentarse a situaciones en donde pueda formular y resolver ecuaciones e inecuaciones, esta es una habilidad que podrá utilizar para el resto de su vida.

A continuación encontrará un aplicativo que resume lo visto en cada sección del capítulo, lo invitamos a navegar por él y visualizar los ejemplos presentados.

Resumen de capítulo

Ecuaciones | **Inecuaciones**

Definición | **Lineal** | **Cuadrática** | **No lineal No cuadrática**

Definición de ecuación:

Una ecuación es la **igualdad** de dos *expresiones matemáticas* que contienen al menos una **incógnita**.

Resolver una ecuación significa *encontrar todos los números reales que hacen la ecuación verdadera*. Estos números son llamados **soluciones** o **raíces** de la ecuación y todas las soluciones de la ecuación forman el **conjunto solución.**

Cabe notar que el **conjunto solución** puede *ser vacío* o tener ⇒ *única solución* | *dos o más soluciones* | *infinitas soluciones*

¿Cómo resolver ecuaciones?

Dependiendo del tipo de ecuación y el número de variables la manera de resolverla puede variar; generalmente, para resolver cualquier ecuación se deben despejar la(s) variable(s), la forma de resolverla no siempre es única y con práctica se crean métodos propios cada vez más eficaces.

Puede descargar los siguientes aplicativos para practicar la resolución de ecuaciones

Ecuaciones lineales | Ecuaciones cuadráticas | Ecuaciones no lineales no cuadráticas