```
Clear["Global`*"]
```

Funciones y parámetros

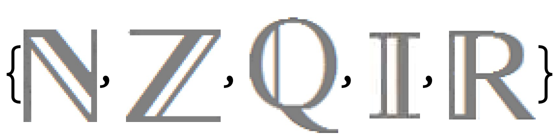
```
(*variables utilizadas en el módulo dinámico*)
{framePane, textPane, tabImage, tabText,
  style1, style2, style3,
  color1 = , color2 = , color3 = ,
  tama1 = 15, tama2 = 18, tama2 = 22, font1 = "Georgia",
  page1, page2, page3, page4, page5,
  titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600};
panelWidth = 750;
bodyWidth = 600;
```

```
(*Inicializar page´s*)
page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 1;
(*estilos de los textos/recuadros*)
framePane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "Cuadro/Titulo",
    LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
    LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
(*Estilos de las ventanas emergentes*)
titlePopUp[s_String] :=
  Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
    "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPopUp[s_String] :=
  Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1], "Text",
    LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
```

```
(*Funciones para hacer la grilla*)
tabImage[img_] := Deploy[(* Icon *)
   Pane[Image[img, ImageSize → {Automatic, Automatic}],
    {Automatic, Automatic}]];
tabText[txt_] := Deploy[
   Pane[
    Grid[
     {{(* Text *)
        Style[Column[txt, Alignment → {Left, Center}], {FontFamily → "Arial",
          FontSize → 15, FontWeight → Bold, FontColor → GrayLevel[.5]}]
       }},
      Alignment → {Center, Center}, Spacings → {.5, 0}], FrameMargins → 6]];
tabImage1[txt_, img_] := Deploy[
  Pane[
   Grid[
    {{(* Icon *)
       Pane[Image[img, ImageSize → {27, 27}], {27, 27}],
       (* Text *)
       Style[Column[txt, Alignment → {Left, Center}], {FontFamily → "Arial",
         FontSize → 15, FontWeight → Bold, FontColor → GrayLevel[.5]}]
      }},
    Alignment → {Center, Center}, Spacings → {.5, 0}], FrameMargins → 6]]
```

Imágenes y textos

» Imágenes



» Grillas

```
MapThread[MouseAppearance[EventHandler[
    tabImage1[#1, #2], {"MouseClicked" :→ (page1 = #3)}], "LinkHand"] &,
  {{{"Números", "Naturales"}, {"Números", "Enteros"}, {"Números", "Racionales"},
   {"Números", "Irracionales"}, {"Números", "Reales"}},
  {ℕ, ℤ, ℚ, 𝕀, ℝ}, Range[5]}]
```

```
{ℕ Números Naturales , ℤ Números Enteros , ℚ Números Racionales , 𝕀 Números Irracionales , ℝ Números Reales }
```

Resumen:

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
   style1, style2, style3,
   color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
   tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
   page1, page2, page3, page4, page5,
   titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600, rati, int},
  (*Inicializar page´s*)
  page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 1;
  (*estilos de los textos/recuadros*)
  style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  framePane[s_String] := Pane[TextCell[style1[s], "Cuadro/Titulo",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  (*Estilos de las ventanas emergentes*)
  titlePopUp[s_String] :=
   Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
     "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
```

```
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
    "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
rati[x_] := Rationalize[x, 0.1];
int[x_, y_] := IntegerPart[x / y];
Pane[Grid[{

    {Grid[{{ ℕ Números Naturales , ℤ Números Enteros ,

          ℚ Números Racionales , 𝕀 Números Irracionales , ℝ Números Reales }},

      Spacings → {.7, .7}, Dividers → {All, All}, FrameStyle → GrayLevel[.7],
      Background → {None, None, Dynamic[{1, page1}] → Lighter@LightBlue}]},
    {Framed[PaneSelector[{
        1 → Pane[
          Grid[{{Manipulate[
              Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
                Point[{{Max[1, Round[pos[[1]]]], 0}}]},
               Axes → {True, False},
               AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
               AxesLabel → {ℕ, {}},
               LabelStyle → Directive[15],
               AspectRatio → Automatic,
               PlotRange → {{-0.05 * scale, scale}, {-.5, .5}},
               Ticks → {Delete[Range[0, scale, scale / 20], 1], {}},
               TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
               PlotLabel → Pane[Style[ToString[Max[1, Round[pos[[1]]]],
                   TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
                 Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
               ImageSize → {720, 80}],
              {{scale, 20, "máximo"}, {20, 60, 100, 200, 1000}},
              {{pos, {1, 0}},
```

```
            ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
           SaveDefinitions → True]},
         {framePane["Los números naturales son aquellos que se utilizan
             para contar, el conjunto de todos los
             números naturales se denota por ℕ y son:
             \n ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}"]},
         {Item[
           TextCell[
            Row[{"Operaciones con los números naturales ⇒", "   ",
              Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                    " ( ℕ , + )", "Text"],
                   CreateDialog[{
                     Pane[Column[{
                        titlePopUp["Los números naturales y la adición"],
                        textPopUp["En los números naturales se cumplen
                           ciertas propiedades aritméticas
                           que permiten realizar operaciones
                           como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números naturales es
                           un número natural
                  Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = c,  c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                           el resultado es el mismo
                   Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = b + a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                           el resultado es el mismo
           Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b           "]
                          }], ImageSize →
                        {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                         True}]}, Background → White, Deployed → True],
                   ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                  Button[TextCell[" ( ℕ , · )", "Text"],
                   CreateDialog[{
                     Pane[Column[{
```

```
titlePopUp[
 "Los números naturales y la multiplicación"],
textPopUp["En los números naturales se
   cumplen ciertas propiedades aritméticas
   que permiten realizar operaciones
   como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números naturales
   es un número natural
Si a y b ∈ ℕ entonces a b = c, c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números naturales,
   el resultado es el mismo
Si a y b ∈ ℕ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales el
   número uno (1) es neutro: uno
   multiplicado por cualquier número
   natural da el mismo número.
Si a ∈ ℕ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
   el resultado es el mismo
Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
   una nueva propiedad llamada propiedad
   distributiva de la multiplicación
   con respecto a la adición: en
   una multiplicación en la cual
   un factor es la suma (o resta)
   de dos o más términos se pueden
   distribuir las multiplicaciones
Si a, b y c ∈ ℕ entonces a (b + c) = a b + a c                "]
 }], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
 True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"]},
{MouseAppearance[
 Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
```

```
CreateDialog[{
  Pane[Column[{
     titlePopUp[
      "Los números naturales y la sustracción"],
     textPopUp["La sustracción es el proceso
        inverso a la adición y no se considera
        una operación porque no es cerrada,
        lo que quiere decir que no siempre
        se puede realizar la sustracción
        entre dos números naturales.
En la sustracción a - b = c el término a se llama minuendo, b es el
        sustraendo y c la diferencia.
La sustracción se puede realizar dentro del conjunto de los números
        naturales solo cuando el minuendo
        es mayor que el sustraendo, por
        ejemplo: 505 - 124 = 381 , en el
        caso contrario, la operación no da
        como resultado un número
        natural: 124 - 505 = -381 ∉ ℕ."]}],
   ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
   Scrollbars → {False, True}]},
  Background → White, Deployed → True],
 ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell["División", "Text"],
 CreateDialog[{
  Pane[Column[{
     titlePopUp[
      "Los números naturales y la división"],
     textPopUp["La división es el proceso
        inverso de la multiplicación y no se
        considera como una operación porque
        no es cerrada, lo que quiere decir
        que no siempre se puede realizar una
```

```
                                      división con dos números naturales.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
                                      divisor y c el cociente. Cuando la
                                      división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                      naturales solo cuando la división
                                      es exacta, por ejemplo: 6 ÷ 2 = 3 ,
                                      en el caso contrario, la operación
                                      no da como resultado un número
                                      natural: 2 ÷ 6 = 2/6 = 1/3 ∉ ℕ. "]}],
                                ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                                Scrollbars → {False, True}]},
                              Background → White, Deployed → True],
                             ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
                      }], "Multimedia"], Alignment → Right]}}],
                ImageSize → {790, Automatic}],
              2 → Pane[Grid[{{Manipulate[
                    Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
                      Point[{{Round[pos[[1]]], 0}}]},
                     Axes → {True, False},
                     AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
                     AxesLabel → {ℤ, {}},
                     LabelStyle → Directive[15],
                     AspectRatio → Automatic,
                     PlotRange → {{-scale, scale}, {-0.5, 0.5}},
                     Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 10], {}},
                     TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
                     PlotLabel → Pane[Style[ToString[Round[pos[[1]]],
                         TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
                       Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
                     ImageSize → {720, 80}],
                    {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
```

```
          {{pos, {0, 0}},
           ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
          SaveDefinitions → True]},
        {framePane[
          "El conjunto de los números enteros es una extensión del
            conjunto de los números naturales. Este
            conjunto está conformado por el conjunto de
            los números naturales, el cero (considerado
            como un punto de referencia o punto de
            origen) y los opuestos de los naturales
            (enteros negativos). Los números enteros
            se representan con la letra ℤ: \n ℤ={...,
            -4, -3 , -2 , -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}"]},
        {Item[
          TextCell[
           Row[{"Operaciones con los números enteros ⇒", "   ",
             Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                   " ( ℤ , + )", "Text"],
                  CreateDialog[{
                    Pane[Column[{
                       titlePopUp["Los números enteros y la adición"],
                       textPopUp["En los números enteros se cumplen
                          ciertas propiedades aritméticas
                          que permiten realizar operaciones
                          como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números enteros es
                          un número entero
                Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = c,  c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                          el resultado es el mismo
                 Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números enteros el
                          número cero (0) es neutro:
                          cero sumado a cualquier número
```

entero da el mismo número.

Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a + 0 = 0 + a = a$

Existencia de elemento opuesto: para todo número entero existe un opuesto tal que su suma es cero:

Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces existe $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

Si a, b y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$

Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de manera diferente"]}], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell[" (ℤ , ·)", "Text"],
CreateDialog[{
Pane[Column[{
titlePopUp[
"*Los números enteros y la multiplicación*"],
textPopUp["En los números enteros se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la multiplicación. Estas son:

Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números enteros es un número entero

Si a y $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a\,b = c$, $c \in \mathbb{Z}$

Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números enteros, el resultado es el mismo

Si a y $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a\,b = b\,a$

Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números enteros el número uno (1) es *neutro*: uno multiplicado por cualquier número entero da el mismo número.

Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a\,1 = 1\,a = a$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

Si a, b y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $(a\,b)\,c = a\,(b\,c) = (a\,c)\,b$

Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta una nueva propiedad llamada propiedad *distributiva de la multiplicación con respecto a la adición*: en una multiplicación en la cual un factor es la suma (o resta) de dos o más términos se puede distribuir las multiplicaciones

Si a, b y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ "]

```
}], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"]},
{MouseAppearance[
Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
CreateDialog[{
Pane[Column[{
titlePopUp[
"Los números enteros y la sustracción"],
textPopUp["Ya se mencionó que la sustracción
```

es una adición de un número con el opuesto de otro número, sin embargo, es necesario recalcar que la sustracción no es conmutativa ni asociativa. Observe los siguientes ejemplos:

$$2 - 5 \neq 5 - 2$$
$$-3 \neq 3$$

como puede observar, la sustracción no es conmutable.

$$(2 - 3) - (-5) \neq 2 - (3 - (-5))$$
$$-1 - (-5) \neq 2 - 8$$
$$4 \neq -6$$

como puede observar, la sustracción no es asociativa.

```
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por
                                 ejemplo 2 - 5 se puede escribir como
                                 2 + (-5)  y 2 + (-5) = (-5) + 2 = -3."]}],
                            ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                            Scrollbars → {False, True}]},
                          Background → White, Deployed → True],
                         ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                        Button[TextCell["División", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp["Los números enteros y la división"],
                              textPopUp["La división es el proceso inverso de
                                 la multiplicación y no se considera
                                 como una operación porque no es
                                 cerrada, lo que quiere decir que
                                 no siempre se puede realizar una
                                 división con dos número enteros.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
                                 divisor y c el cociente. Cuando la
                                 división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                 enteros solo cuando la división es
                                 exacta, por ejemplo: (-6) ÷ 2 = -3 ,
                                 en el caso contrario, la operación
                                 no da como resultado un número
                                 entero: 2 ÷ (-6) = -2/6 = -1/3 ∉ ℤ. "]}],
                            ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                            Scrollbars → {False, True}]},
                          Background → White, Deployed → True],
                         ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
```

```
        }], "Multimedia"]
      , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}],
3 → Pane[Grid[{{Manipulate[
      Graphics[
       {Red, AbsolutePointSize[13], Point[{{rati[pos[[1]]], 0}}]},
       Axes → {True, False},
       AxesStyle → Directive[Thickness[0.0022], Arrowheads[0.02]],
       AxesLabel → {ℚ, {}},
       LabelStyle → Directive[15],
       AspectRatio → Automatic,
       PlotRange → {{-scale, scale * 1.1}, {-0.01, 0.01}},
       Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 5], {}},
       TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
       PlotLabel → Pane[Style[ToString[rati[pos[[1]]],
            TraditionalForm], Red, 18], ImageSize → {350, 50},
         Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
       ImageSize → {720, 80}],
      {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
      {{pos, {0, 0}},
       ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
      SaveDefinitions → True]},
    {framePane[
      "Los números que se utilizan para expresar una parte de un
        todo son llamados números racionales y
        son todos los números de la forma a/b,
        donde b ≠ 0, a y b son números enteros.
        Se representan con la letra ℚ:
                ℚ = {a/b, a, b ∈ ℤ, b ≠ 0}                    "]
      },
    {Item[
      TextCell[
```

```
Row[{"Operaciones con los números racionales ⇒", "   ",
  Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
       " ( ℚ , + )", "Text"],
      CreateDialog[{
        Pane[Column[{
           titlePopUp[
            "Los números racionales y la adición"],
           textPopUp["En los números racionales
              se cumplen ciertas propiedades
              aritméticas que permiten realizar
              operaciones como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números racionales es
              un número racional
         Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = c, c ∈ ℚ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números racionales,
              el resultado es el mismo
          Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números racionales el número
              cero (0) es neutro: cero sumado a
              cualquier número da el mismo número.
          Si a ∈ ℚ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número racional existe un
              opuesto tal que su suma es cero:
     Si a ∈ ℚ entonces existe -a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
              el resultado es el mismo
     Si a, b y c ∈ ℚ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
              manera diferente"]}], ImageSize →
          {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
           True}]}, Background → White, Deployed → True],
      ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
     Button[TextCell[" ( ℚ , · )", "Text"],
      CreateDialog[{
```

```
Pane[Column[{
    titlePopUp[
     "Los números racionales y la multiplicación"],
    textPopUp["En los números racionales se
       cumplen ciertas propiedades aritméticas
       que permiten realizar operaciones
       como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números racionales
       es un número racional
```

Si a y $b \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,b = c$, $c \in \mathbb{Q}$

```
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números racionales,
       el resultado es el mismo
```

Si a y $b \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,b = b\,a$

```
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números racionales
       el número uno (1) es neutro:
       uno multiplicado por cualquier
       número da el mismo número.
```

Si $a \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,1 = 1\,a = a$

```
Existencia de elemento inverso multiplicativo o recíproco (opuesto
       multiplicativo): para todo número
       racional a≠0 existe un recíproco
       tal que la su multiplicación es uno:
```

Si $a \in \mathbb{Q}$ entonces existe $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) a = 1$

```
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
       el resultado es el mismo
```

Si a, b y $c \in \mathbb{Q}$ entonces $(a\,b)\,c = a\,(b\,c) = (a\,c)\,b$

```
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
       una nueva propiedad llamada propiedad
       distributiva de la multiplicación
       con respecto a la adición: en
       una multiplicación en la cual
       un factor es la suma (o resta)
       de dos o más términos se pueden
       distribuir las multiplicaciones
```

Si a, b y $c \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ "]

```
}], ImageSize →
    {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
     True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]},
{MouseAppearance[
  Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
   CreateDialog[{
     Pane[Column[{
        titlePopUp[
         "Los números racionales y la sustracción"],
        textPopUp["Ya se mencionó con anticipación
          que la sustracción es una adición de un
          número con el opuesto de otro número,
          sin embargo, es necesario recalcar que
          la sustracción no es conmutativa ni
          asociativa en ningún conjunto numérico.
          Observe los siguientes ejemplos:
```

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{4} \neq \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$$
$$-\frac{7}{12} \neq \frac{7}{12}$$

```
como puede observar, la sustracción no es conmutable.
```

$$\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) \neq \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{11}{10} - \left(-\frac{5}{2}\right) \neq \frac{2}{5} - 4$$
$$\frac{7}{5} \neq -\frac{18}{5}$$

```
como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma,
          por ejemplo 2/3 - 5/4 se puede
          escribir como 2/3 + (-5/4) y
          2/3 + (-5/4) = (-5/4) + 2/3 = -7/12."]}],
```

```
ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
Scrollbars → {False, True}]]},
Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell["División", "Text"],
CreateDialog[{
Pane[Column[{
titlePopUp[
"Los números racionales y la división"],
textPopUp["En los números racionales,
la división es una manera diferente
de escribir una multiplicación. En
general, cuando se van a dividir dos
números racionales, se tiene que:
a/b ÷ c/d = a/b · d/c = (a d)/(b c)
es decir, en lugar de dividir se multiplica por el recíproco del divisor.
Es así como todas las divisiones se pueden expresar como multiplicación
de racionales, por ejemplo
7 ÷ 3 = 7 · 1/3 = 7/3                                    "]
}], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
}], "Multimedia"]
, Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}],
4 → Pane[Grid[{{Manipulate[
Graphics[{AbsolutePointSize[6],
Orange, Point[Table[{Pi * i, 0.2}, {i, -3, 3, 1}]],
Green, Point[Table[{√2 * i, 0.2}, {i, -6, 6, 1}]],
Purple, Point[Table[{ⅇ * i, 0.2}, {i, -3, 3, 1}]],
```

```
      Blue, Point[Table[{√3 * i, 0.2}, {i, -5, 5, 1}]],
      AbsolutePointSize[7], White, Point[{{0, 0.2}}],
      Red, AbsolutePointSize[10], Point[{{rati[pos[[1]]], 0}}]},
     Axes → {True, False},
     AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
     AxesLabel → {𝕀, {}},
     LabelStyle → Directive[15],
     AspectRatio → Automatic,
     PlotRange → {{-10, 11}, {-0.01, 0.01}},
     Ticks → {Range[-10, 10, 10 / 5], {}},
     TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
     PlotLabel → Pane[Style[ToString[
         Row[{"Algunos irracionales:                  ",
           If[Abs[pos[[1]]] <= 0.2, "",
            If[Abs[int[pos[[1]], Pi] - pos[[1]] / Pi] ≤ 0.05,
             int[pos[[1]], Pi] * Pi, If[Abs[int[pos[[1]], √2] -
                 pos[[1]] / √2] ≤ 0.05, int[pos[[1]], √2] * √2,
              If[Abs[int[pos[[1]], √3] - pos[[1]] / √3] ≤
                0.05, int[pos[[1]], √3] * √3,
               If[Abs[int[pos[[1]], ⅇ] - pos[[1]] / ⅇ] ≤
                 0.05, int[pos[[1]], ⅇ] * ⅇ, ""]]]]] }],
         TraditionalForm], Red, 18], ImageSize → {350, 50},
       Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
     ImageSize → {720, 80}],
    {{pos, {0, 0}},
     ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
    SaveDefinitions → True]},
  {framePane["Números que no se pueden expresarr mediante la
      razón de números enteros, como por ejemplo
```

```
                    π (relación entre una circunferencia
                    y su diámetro) o ⅇ (número de Euler
                    utilizado frecuentemente en problemas
                    de crecimiento y financieros).
Se caracterizan por tener cola decimal infinita y no periódica y su
                    conjunto se representa con la letra 𝕀."]},
               {Item[
                 TextCell[
                  Row[{"Operaciones con los números irracionales ⇒", "   ",
                    Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                          " ( 𝕀 , + )", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp[
                               "Los números irracionales y la adición"],
                              textPopUp["La operación de la adición
                                 en los números irracionales no es
                                 cerrada, ya que no siempre dan como
                                 resultado un número irracional.
                                 Por ejemplo, al sumar 3 √2 con
                                 -3 √2 da como resultado 0 y 0 ∉ 𝕀.
Para sumar números irracionales se tienen en cuenta los términos
                                 semejantes, es decir, solo se
                                 operan los términos que tengan el
                                 mismo irracional, por ejemplo, al
                                 simplificar la siguiente expresión:
                                 3 √5 - π + 4 √5 - 7 π + 2, se obtiene
                                 como resultado, 7 √5 - 8 π + 2."]}],
                             ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                             Scrollbars → {False, True}]},
```

```
Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell[" ( 𝕀 , · )", "Text"],
CreateDialog[{
  Pane[Column[{
     titlePopUp["Los números irracionales
        y la multiplicación"],
     textPopUp["La operación de la
        multiplicación en los números
        irracionales no es cerrada, ya que no
        siempre dan como resultado un número
        irracional. Por ejemplo, al multiplicar
        3 √2 con -3 √2 da como resultado
        -9 √4 = -9 (2) = -18 y -18 ∉ 𝕀.
Al multiplicar números irracionales, se realizan las multiplicaciones
        posibles, las otras se quedan
        indicadas, por ejemplo,
        al realizar la operación
        (π - 3 √2) (√2 - 4 + 2 π) se tiene:
```

$$\left(\pi-3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-4+2\pi\right)=\sqrt{2}\,\pi-4\pi+2\pi^2-3\left(\sqrt{2}\right)^2+12\sqrt{2}-6\pi\sqrt{2}$$
$$=-5\pi\sqrt{2}-4\pi+2\pi^2-3\,(2)+12\sqrt{2}$$
$$=-5\pi\sqrt{2}-4\pi+2\pi^2-6+12\sqrt{2}$$

```
"]
      }], ImageSize →
     {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
      True}]}, Background → White, Deployed → True],
   ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
  }], "Multimedia"]
 , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}],
```

```
5 → Pane[Grid[{{Manipulate[
      Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13], Point[{{pos[[1]], 0}}]},
       Axes → {True, False},
       AxesStyle → Directive[Thickness[0.0022], Arrowheads[0.02]],
       AxesLabel → {ℝ, {}},
       LabelStyle → Directive[15],
       AspectRatio → Automatic,
       PlotRange → {{-scale, scale * 1.1}, {-0.01, 0.01}},
       Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 5], {}},
       TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
       PlotLabel → Pane[Style[ToString[pos[[1]], TraditionalForm],
          Red, 18], ImageSize → {350, 50}, Alignment →
          Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
       ImageSize → {720, 80}],
      {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
      {{pos, {0, 0}},
       ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
      SaveDefinitions → True]},
    {framePane[
      "El conjunto de los números reales es la unión del conjunto
        de los números racionales (ℚ) y del
        conjunto de números irracionales (𝕀), en
        este conjunto se definen las operaciones de
        la adición y multiplicación junto
        con sus propiedades. Se
        representa con la letra ℝ. "]},
    {Item[
      TextCell[Row[{"Operaciones con los números reales ⇒", "   ",
         Grid[
          {{MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℝ , + )", "Text"],
              CreateDialog[{
                Pane[Column[{
                   titlePopUp["Los números reales y la adición"],
```

```
textPopUp["En los números reales se cumplen
   ciertas propiedades aritméticas
   que permiten realizar operaciones
   como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números reales es un número real.
Si a y b ∈ ℝ entonces a + b = c, c ∈ ℝ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números reales,
   el resultado es el mismo.
Si a y b ∈ ℝ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números reales el número cero
   (0) es neutro: cero sumado a
   cualquier número da el mismo número.
Si a ∈ ℝ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número real existe un opuesto
   tal que su suma es cero.
Si a ∈ ℝ entonces existe - a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
   el resultado es el mismo.
Si a, b y c ∈ ℝ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
   manera diferente"]}], ImageSize →
  {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
   True}]}, Background → White, Deployed → True],
 ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell[" ( ℝ , · )", "Text"],
 CreateDialog[{
  Pane[Column[{
   titlePopUp[
    "Los números reales y la multiplicación"],
   textPopUp["En los números reales se
      cumplen ciertas propiedades aritméticas
      que permiten realizar operaciones
      como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números reales
      es un número real.
```

```
                         Si a y b ∈ ℝ entonces a b = c,  c ∈ ℝ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números reales,
                                  el resultado es el mismo.
                            Si a y b ∈ ℝ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números reales el
                                  número uno (1) es neutro: uno
                                  multiplicado por cualquier
                                  número da el mismo número.
                            Si a ∈ ℝ entonces a 1 = 1 a = a
Existencia de elemento inverso: para todo número real existe un opuesto tal
                                  que la su multiplicación es uno.
                   Si a ∈ ℝ entonces existe 1/a tal que a (1/a) = (1/a) a = 1
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                  el resultado es el mismo
                   Si a, b y c ∈ ℝ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                                  una nueva propiedad llamada propiedad
                                  distributiva de la multiplicación
                                  con respecto a la adición: en
                                  una multiplicación en la cual
                                  un factor es la suma (o resta)
                                  de dos o más términos se puede
                                  distribuir las multiplicaciones
                      Si a, b y c ∈ ℝ entonces a (b + c) = a b + a c                  "]
                                 }], ImageSize →
                               {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                                True}]}, Background → White, Deployed → True],
                           ImageSize → All], "LinkHand"]},
                        {MouseAppearance[
                          Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                           CreateDialog[{
                             Pane[Column[{
                                titlePopUp[
```

```
"Los números reales y la sustracción"],
textPopUp["Ya se mencionó con anticipación
   que la sustracción es una adición de un
   número con el opuesto de otro número,
   sin embargo, es necesario recalcar que
   la sustracción no es conmutativa ni
   asociativa en ningún conjunto numérico.
   Observe los siguientes ejemplos:
```

$$5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \neq 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2} \neq -2\sqrt{2}$$

```
como puede observar, la sustracción no es conmutable.
```

$$(2\pi - 3) - (-3\pi) \neq 2\pi - (3 - (-3\pi))$$
$$2\pi - 3 + 3\pi \neq 2\pi - 3 - 3\pi$$
$$5\pi - 3 \neq -\pi - 3$$

```
como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por
   ejemplo 5 √2 - 3 √2 se puede escribir
   como 5 √2 + (-3 √2) y 5 √2 + (-3 √2)
    = -3 √2 + 5 √2 = 2 √2."]}],
  ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
  Scrollbars → {False, True}]},
 Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell["División", "Text"],
 CreateDialog[{
   Pane[Column[{
      titlePopUp["Los números reales y la división"],
      textPopUp["En los números reales (al igual que
         en los racionales), la división es
         una manera diferente de escribir
```

una multiplicación. En general,
cuando se van a dividir dos números
reales se sigue la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

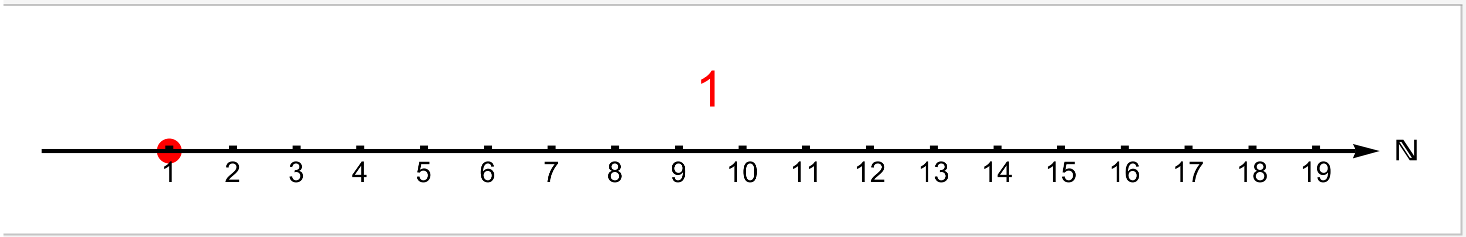
es decir, en lugar de dividir se multiplica por el recíproco del divisor.
Es así como todas las divisiones se pueden expresar como multiplicación
de reales, por ejemplo

$$7 \div \sqrt{3} = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$ "]

}], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
}], "Multimedia"]
, Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}]},
Dynamic[page1]], FrameMargins → 1,
FrameStyle → GrayLevel[.7], ImageMargins → {{1, 1}, {0, 0}}]}},
Alignment → {Center, Top}], ImageSize → {800, Automatic}]]

ℕ Números Naturales | ℤ Números Enteros | ℚ Números Racionales | 𝕀 Números Irracionales | ℝ Números Reales

máximo 20 60 100 200 1000



Los *números naturales* son aquellos que se utilizan para *contar*, el conjunto de todos los números naturales se denota por ℕ y son:
ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}

Operaciones con los números naturales ⇒ (ℕ , +) (ℕ , ·) Sustracción División

Números Naturales

» *Los números naturales y la adición*

En los números enteros se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la adición. Estas son:

Clausurativa: la adición de cualquier par de números naturales es un número natural

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a + b = c, \;\; c \in \mathbb{N}$$

Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a + b = b + a$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a, \; b \text{ y } c \in \mathbb{N} \text{ entonces } (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

» *Los números naturales y la multiplicación*

En los números naturales se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la multiplicación. Estas son:

Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números naturales es un número natural

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a\, b = c, \;\; c \in \mathbb{N}$$

Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números naturales, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{N} \text{ entonces } a\,b = b\,a$$

Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales el número uno (1) es *neutro*: uno multiplicado por cualquier número entero da el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{N} \text{ entonces } a\,1 = 1\,a = a$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{N} \text{ entonces } (a\,b)\,c = a\,(b\,c) = (a\,c)\,b$$

Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta una nueva propiedad llamada propiedad ***distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: en*** una multiplicación en la cual un factor es la suma (o resta) de dos o más términos se puede distribuir las multiplicaciones

$$\text{Si } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{N} \text{ entonces } a(b + c) = a\,b + a\,c$$

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℕ , · )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números naturales y la multiplicación"],
       textPopUp["En los números naturales se cumplen ciertas
          propiedades aritméticas que permiten realizar
          operaciones como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números
          naturales es un número natural
                      Si a y b ∈ ℕ entonces a b = c, c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen
          dos números naturales, el resultado es el mismo
                         Si a y b ∈ ℕ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales
          el número uno (1) es neutro: uno multiplicado
          por cualquier número entero da el mismo número.
                         Si a ∈ ℕ entonces a 1 = 1 a = a

Asociativa: no importa el orden como se
          agrupen los elementos, el resultado es el mismo
               Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación
          resulta una nueva propiedad llamada propiedad
          distributiva de la multiplicación con respecto
          a la adición: en una multiplicación en la cual
          un factor es la suma (o resta) de dos o más
          términos se puede distribuir las multiplicaciones
                  Si a, b y c ∈ ℕ entonces a(b + c) = a b + a c                    "]
      }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
     Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(ℕ , ·)

» *Operaciones con los números naturales*

El conjunto de los números naturales (ℕ), son un conjunto cerrado para las operaciones de *adición* y *multiplicación*, esto significa que el resultado de esas operaciones es un elemento del conjunto de los números naturales. La *sustracción* y la *división* no son operaciones cerradas para $\mathbb{N}$, ya que el resultado no es siempre un número natural.

⇒ Adición

Se realiza entre dos números naturales llamados *sumandos* (por eso se llama operación binaria), y cuyo resultado es un número natural llamado *suma*, en otras palabras:
Sean $a,\ b \in \mathbb{N}$, entonces $a + b = c$ donde $c \in \mathbb{N}$.
Por ejemplo, 2 y 5 son números naturales y su suma $2 + 5 = 7$ es un número natural

⟹ Propiedades de la adición

La adición en los números naturales cumple las propiedades ***conmutativa*** y ***asociativa***.
Propiedad conmutativa: El orden de los sumandos no altera la suma. Si $a,\ b \in \mathbb{N}$, entonces $a + b = b + a$.
Por ejemplo $2 + 5 = 5 + 2 = 7$.
Propiedad asociativa: Como la suma es una operación binaria, para sumar tres o más números naturales, se deben agrupar o asociar de a dos de tal forma que puedan sumar. La forma como se asocien los sumandos no altera la suma. Si $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$, entonces $a + (b + c) = b + (a + c) = (a + b) + c$.
Por ejemplo $2 + (5 + 3) = 5 + (2 + 3) = (2 + 5) + 3 = 10$.

⇒ Sustracción

La sustracción es el proceso inverso a la adición y no se considera una operación porque no es cerrada, lo que quiere decir que no siempre se puede realizar la sustracción entre dos números naturales.
En la sustracción $a - b = c$ el término a se llama *minuendo*, b es el *sustraendo* y c la *diferencia*.
La sustracción se puede realizar dentro del conjunto de los números naturales solo cuando el *minuendo* es mayor que el *sustraendo*, por ejemplo: $505 - 124 = 381$, en el caso contrario, la operación no da como resultado un número natural: $124 - 505 = -381 \notin \mathbb{N}$.

⇒ Multiplicación

Es una suma abreviada de sumandos iguales, por ejemplo, $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ se puede escribir abreviadamente como $6 \times 4 = 24$; el sumando 6 se repite 4 veces. La multiplicación se realiza entre dos números naturales llamados *factores* (también es una operación binaria), y cuyo resultado es un número natural llamado *producto*, en otras palabras:
Sean $a,\ b \in \mathbb{N}$, entonces $a \times b = c$, donde $c \in \mathbb{N}$.
Por ejemplo, 2 y 5 son números naturales y su producto $2 \times 5 = 10$ es un número natural.

⟹ Propiedades de la multiplicación

La multiplicación en los números naturales cumple las propiedades ***conmutativa***, ***asociativa***, ***existencia del elemento neutro*** y al combinar la adición y la multiplicación se cumple la propiedad ***distributiva de la multiplicación con respecto a la suma***.
Propiedad conmutativa: El orden de los factores no altera la nultiplicación. Si $a,\ b \in \mathbb{N}$, entonces $a \times b = b \times a$.
Por ejemplo $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10$.
Propiedad asociativa: Como la suma es una operación binaria, para sumar tres o más números naturales, se deben agrupar o asociar de a dos de tal forma que puedan sumar. La forma como se asocien los sumandos no altera la suma. Si $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$, entonces $a(b \times c) = b(a \times c) = (a \times b)\,c$.
Por ejemplo $2\,(5 \cdot 3) = 5\,(2 \cdot 3) = (2 \cdot 5)\,3 = 30$.
Propiedad del elemento neutro: Todo número natural multiplicado con uno (1) da como resultado el mismo número natural. El uno se llama elemento neutro o elemento identidad o módulo de la multiplicación. Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Por ejemplo $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$.
Propiedad distributiva *de la multiplicación con respecto a la suma:* La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de la multiplicación del número por cada sumando. Si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $a(b+c) = a\,b + a\,c$.
Por ejemplo $2\,(3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 16$.

⇒ División
La división es el proceso inverso de la multiplicación y no se considera como una operación porque no es cerrada, lo que quiere decir que no siempre se puede realizar una división con dos números naturales.
En la división $a \div b = c$ el término a se llama *dividendo*, b es el *divisor* y c el *cociente*. Cuando la división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números naturales solo cuando la división es exacta, por ejemplo: $6 \div 2 = 3$, en el caso contrario, la operación no da como resultado un número natural: $2 \div 6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

» Resumen

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
   style1, style2, style3,
   color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
   tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
   page1, page2, page3, page4, page5,
   titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600, rati, int},
  (*Inicializar page´s*)
  page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 1;
  (*estilos de los textos/recuadros*)
  style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  framePane[s_String] := Pane[TextCell[style1[s], "Cuadro/Titulo",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  (*Estilos de las ventanas emergentes*)
  titlePopUp[s_String] :=
   Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
     "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
```

```
textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
rati[x_] := Rationalize[x, 0.1];
int[x_, y_] := IntegerPart[x / y];
Pane[Grid[{
   {Grid[{{ ℕ Números Naturales }},
      Spacings → {.7, .7}, Dividers → {All, All}, FrameStyle → GrayLevel[.7],
      Background → {None, None, Dynamic[{1, page1}] → Lighter@LightBlue}]},
   {Framed[PaneSelector[{
        1 → Pane[
          Grid[{{Manipulate[
                Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
                  Point[{{Max[1, Round[pos[[1]]]], 0}}]},
                 Axes → {True, False},
                 AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
                 AxesLabel → {ℕ, {}},
                 LabelStyle → Directive[15],
                 AspectRatio → Automatic,
                 PlotRange → {{-0.05 * scale, scale}, {-.5, .5}},
                 Ticks → {Delete[Range[0, scale, scale / 20], 1], {}},
                 TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
                 PlotLabel → Pane[Style[ToString[Max[1, Round[pos[[1]]]],
                      TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
                   Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
                 ImageSize → {720, 80}],
                {{scale, 20, "máximo"}, {20, 60, 100, 200, 1000}},
                {{pos, {1, 0}},
                 ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
                SaveDefinitions → True]},
              {framePane["Los números naturales son aquellos que se utilizan
                  para contar, el conjunto de todos los
```

```
                    números naturales se denota por ℕ y son:
                    \n ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}"]},
               {Item[
                 TextCell[
                  Row[{"Operaciones con los números naturales ⇒", "   ",
                    Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                          " ( ℕ , + )", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp["Los números naturales y la adición"],
                              textPopUp["En los números naturales se cumplen
                                 ciertas propiedades aritméticas
                                 que permiten realizar operaciones
                                 como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números naturales es
                                 un número natural
                     Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = c, c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                                 el resultado es el mismo
                       Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = b + a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                 el resultado es el mismo
            Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b          "]
                               }], ImageSize →
                              {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                              True}]}, Background → White, Deployed → True],
                         ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                        Button[TextCell[" ( ℕ , · )", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp[
                               "Los números naturales y la multiplicación"],
                              textPopUp["En los números naturales se
                                 cumplen ciertas propiedades aritméticas
```

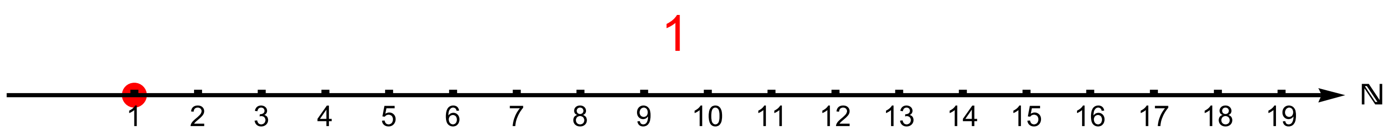
```
                                que permiten realizar operaciones
                                como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números naturales
                                es un número natural
                      Si a y b ∈ ℕ entonces a b = c,  c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números naturales,
                                el resultado es el mismo
                        Si a y b ∈ ℕ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales el
                                número uno (1) es neutro: uno
                                multiplicado por cualquier número
                                natural da el mismo número.
                        Si a ∈ ℕ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                el resultado es el mismo
                 Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                                una nueva propiedad llamada propiedad
                                distributiva de la multiplicación
                                con respecto a la adición: en
                                una multiplicación en la cual
                                un factor es la suma (o resta)
                                de dos o más términos se pueden
                                distribuir las multiplicaciones
                    Si a, b y c ∈ ℕ entonces a (b + c) = a b + a c                "]
                              }], ImageSize →
                            {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                             True}]}, Background → White, Deployed → True],
                        ImageSize → All], "LinkHand"]},
                     {MouseAppearance[
                       Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                        CreateDialog[{
                          Pane[Column[{
                             titlePopUp[
                              "Los números naturales y la sustracción"],
```

```
textPopUp["La sustracción es el proceso
   inverso a la adición y no se considera
   una operación porque no es cerrada,
   lo que quiere decir que no siempre
   se puede realizar la sustracción
   entre dos números naturales.
En la sustracción a - b = c el término a se llama minuendo, b es el
   sustraendo y c la diferencia.
La sustracción se puede realizar dentro del conjunto de los números
   naturales solo cuando el minuendo
   es mayor que el sustraendo, por
   ejemplo: 505 - 124 = 381 , en el
   caso contrario, la operación no da
   como resultado un número
   natural: 124 - 505 = -381 ∉ ℕ."]}],
  ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
  Scrollbars → {False, True}]},
 Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell["División", "Text"],
CreateDialog[{
 Pane[Column[{
  titlePopUp[
   "Los números naturales y la división"],
  textPopUp["La división es el proceso
   inverso de la multiplicación y no se
   considera como una operación porque
   no es cerrada, lo que quiere decir
   que no siempre se puede realizar una
   división con dos números naturales.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
   divisor y c el cociente. Cuando la
   división es exacta no hay residuo.
```

```
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                naturales solo cuando la división
                                es exacta, por ejemplo: 6 ÷ 2 = 3 ,
                                en el caso contrario, la operación
                                no da como resultado un número
                                natural: 2 ÷ 6 = 2/6 = 1/3 ∉ ℕ. "]}],
                           ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                           Scrollbars → {False, True}]},
                         Background → White, Deployed → True],
                        ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
                  }], "Multimedia"], Alignment → Right]}}],
             ImageSize → {790, Automatic}]}, Dynamic[page1]], FrameMargins → 1,
         FrameStyle → GrayLevel[.7], ImageMargins → {{1, 1}, {0, 0}}]}},
      Alignment → {Center, Top}], ImageSize → {800, Automatic}]]
```

ℕ Números Naturales

máximo 20 60 100 200 1000



Los *números naturales* son aquellos que se utilizan para *contar*, el conjunto de todos los números naturales se denota por ℕ y son:
ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}

Operaciones con los números naturales ⇒ $(\mathbb{N}, +)$ $(\mathbb{N}, \cdot)$ Sustracción División

Números Enteros

» *Los números enteros y la adición*

En los números enteros se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la adición. Estas son:

Clausurativa: la adición de cualquier par de números enteros es un número entero

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a + b = c, \;\; c \in \mathbb{Z}$$

Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a + b = b + a$$

Existencia de elemento neutro: en la adición de números enteros el número cero (0) es *neutro*: cero sumado a cualquier número entero da el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a + 0 = 0 + a = a$$

Existencia de elemento opuesto: para todo número entero existe un opuesto tal que la su suma es cero:

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \text{ entonces existe } -a \text{ tal que } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a,\; b \text{ y } c \in \mathbb{Z} \text{ entonces } (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de manera diferente

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℤ , + )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números enteros y la adición"],
       textPopUp["En los números enteros se cumplen
          ciertas propiedades aritméticas que permiten
          realizar operaciones como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números enteros
          es un número entero
                    Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = c,  c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen
          dos números enteros, el resultado es el mismo
                     Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números
          enteros el número cero (0) es neutro: cero sumado
          a cualquier número entero da el mismo número.
                     Si a ∈ ℤ entonces a + 0 = 0 + a = a
Asociativa: no importa el orden como se
          agrupen los elementos, el resultado es el mismo
           Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es
          una adición escrita de manera diferente"]}],
      ImageSize → {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False, True}]},
    Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(ℤ , +)

» *Los números enteros y la sustracción*

Ya se mencionó con anticipación que la sustracción es una adición de un número con el opuesto de otro número, sin embargo, es necesario recalcar que la sustracción no es conmutativa ni asociativa. Observe los siguientes ejemplos:

$$2-5 \neq 5-2$$
$$-3 \neq 3$$

como puede observar, la sustracción no es conmutable.

$$(2-3)-(-5) \neq 2-(3-(-5))$$
$$-1-(-5) \neq 2-8$$
$$4 \neq -6$$

como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por ejemplo $2 - 5$ se puede escribir como $2 + (-5)$ y $2 + (-5) = (-5) + 2 = -3$.

» *Los números enteros y la multiplicación*

Los números enteros y la multiplicación

En los números enteros se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la multiplicación. Estas son:

Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números enteros es un número entero

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a\,b = c,\ \ c \in \mathbb{Z}$$

Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números enteros, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a\,b = b\,a$$

Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números enteros el número uno (1) es *neutro*: uno multiplicado por cualquier número entero da el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a\,1 = 1\,a = a$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{Z} \text{ entonces } (a\,b)\,c = a\,(b\,c) = (a\,c)\,b$$

Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta una nueva propiedad llamada propiedad ***distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: en*** una multiplicación en la cual un factor es la suma (o resta) de dos o más términos se puede distribuir las multiplicaciones

$$\text{Si } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a(b + c) = a\,b + a\,c$$

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℤ , · )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números enteros y la multiplicación"],
       textPopUp["En los números enteros se cumplen ciertas
          propiedades aritméticas que permiten realizar
          operaciones como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números
          enteros es un número entero
                    Si a y b ∈ ℤ entonces a b = c, c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen
          dos números enteros, el resultado es el mismo
                      Si a y b ∈ ℤ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números enteros
          el número uno (1) es neutro: uno multiplicado
          por cualquier número entero da el mismo número.
                      Si a ∈ ℤ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se
          agrupen los elementos, el resultado es el mismo
               Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación
          resulta una nueva propiedad llamada propiedad
          distributiva de la multiplicación con respecto
          a la adición: en una multiplicación en la cual
          un factor es la suma (o resta) de dos o más
          términos se puede distribuir las multiplicaciones
                 Si a, b y c ∈ ℤ entonces a (b + c) = a b + a c                 "]
      }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
     Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(ℤ , ·)

» Resumen

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
```

```
 style1, style2, style3,
 color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
 tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
 page1, page2, page3, page4, page5,
 titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600, rati, int},
(*Inicializar page´s*)
page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 2;
(*estilos de los textos/recuadros*)
style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
framePane[s_String] := Pane[TextCell[style1[s], "Cuadro/Titulo",
   LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
   LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
(*Estilos de las ventanas emergentes*)
titlePopUp[s_String] :=
 Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
rati[x_] := Rationalize[x, 0.1];
int[x_, y_] := IntegerPart[x / y];
Pane[Grid[{

   {Grid[{{ ℕ Números Naturales , ℤ Números Enteros }},

     Spacings → {.7, .7}, Dividers → {All, All}, FrameStyle → GrayLevel[.7],
     Background → {None, None, Dynamic[{1, page1}] → Lighter@LightBlue}]},
   {Framed[PaneSelector[{
```

```
1 → Pane[
  Grid[{{Manipulate[
      Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
        Point[{{Max[1, Round[pos[[1]]]], 0}}]},
       Axes → {True, False},
       AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
       AxesLabel → {ℕ, {}},
       LabelStyle → Directive[15],
       AspectRatio → Automatic,
       PlotRange → {{-0.05 * scale, scale}, {-.5, .5}},
       Ticks → {Delete[Range[0, scale, scale / 20], 1], {}},
       TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
       PlotLabel → Pane[Style[ToString[Max[1, Round[pos[[1]]]],
           TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
         Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
       ImageSize → {720, 80}],
      {{scale, 20, "máximo"}, {20, 60, 100, 200, 1000}},
      {{pos, {1, 0}},
       ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
      SaveDefinitions → True]},
    {framePane["Los números naturales son aquellos que se utilizan
        para contar, el conjunto de todos los
        números naturales se denota por ℕ y son:
        \n ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}"]},
    {Item[
      TextCell[
       Row[{"Operaciones con los números naturales ⇒", "    ",
         Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                " ( ℕ , + )", "Text"],
               CreateDialog[{
                 Pane[Column[{
                    titlePopUp["Los números naturales y la adición"],
                    textPopUp["En los números naturales se cumplen
```

```
                                ciertas propiedades aritméticas
                                que permiten realizar operaciones
                                como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números naturales es
                                un número natural
                      Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = c,  c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                                el resultado es el mismo
                        Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = b + a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                el resultado es el mismo
             Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b          "]
                              }], ImageSize →
                            {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                             True}]}, Background → White, Deployed → True],
                         ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                        Button[TextCell[" ( ℕ , · )", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp[
                               "Los números naturales y la multiplicación"],
                              textPopUp["En los números naturales se
                                cumplen ciertas propiedades aritméticas
                                que permiten realizar operaciones
                                como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números naturales
                                es un número natural
                       Si a y b ∈ ℕ entonces a b = c,  c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números naturales,
                                el resultado es el mismo
                         Si a y b ∈ ℕ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales el
                                número uno (1) es neutro: uno
                                multiplicado por cualquier número
                                natural da el mismo número.
```

```
                    Si a ∈ ℕ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                 el resultado es el mismo
              Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                                 una nueva propiedad llamada propiedad
                                 distributiva de la multiplicación
                                 con respecto a la adición: en
                                 una multiplicación en la cual
                                 un factor es la suma (o resta)
                                 de dos o más términos se pueden
                                 distribuir las multiplicaciones
                 Si a, b y c ∈ ℕ entonces a (b + c) = a b + a c                   "]
                              }], ImageSize →
                           {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                            True}]}, Background → White, Deployed → True],
                     ImageSize → All], "LinkHand"]},
                  {MouseAppearance[
                    Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                     CreateDialog[{
                       Pane[Column[{
                          titlePopUp[
                           "Los números naturales y la sustracción"],
                          textPopUp["La sustracción es el proceso
                                 inverso a la adición y no se considera
                                 una operación porque no es cerrada,
                                 lo que quiere decir que no siempre
                                 se puede realizar la sustracción
                                 entre dos números naturales.
En la sustracción a - b = c el término a se llama minuendo, b es el
                                 sustraendo y c la diferencia.
La sustracción se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                 naturales solo cuando el minuendo
                                 es mayor que el sustraendo, por
                                 ejemplo: 505 - 124 = 381 , en el
```

```
                                        caso contrario, la operación no da
                                        como resultado un número
                                        natural: 124 - 505 = -381 ∉ ℕ."]}],
                                  ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                                  Scrollbars → {False, True}]},
                                Background → White, Deployed → True],
                              ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                            Button[TextCell["División", "Text"],
                              CreateDialog[{
                                Pane[Column[{
                                    titlePopUp[
                                     "Los números naturales y la división"],
                                    textPopUp["La división es el proceso
                                        inverso de la multiplicación y no se
                                        considera como una operación porque
                                        no es cerrada, lo que quiere decir
                                        que no siempre se puede realizar una
                                        división con dos números naturales.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
                                        divisor y c el cociente. Cuando la
                                        división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                        naturales solo cuando la división
                                        es exacta, por ejemplo: 6 ÷ 2 = 3 ,
                                        en el caso contrario, la operación
                                        no da como resultado un número
                                        natural: 2 ÷ 6 = 2/6 = 1/3 ∉ ℕ. "]}],
                                  ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                                  Scrollbars → {False, True}]},
                                Background → White, Deployed → True],
                              ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
```

```
          }], "Multimedia"], Alignment → Right]}}],
     ImageSize → {790, Automatic}],
   2 → Pane[Grid[{{Manipulate[
         Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
           Point[{{Round[pos[[1]]], 0}}]},
          Axes → {True, False},
          AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
          AxesLabel → {ℤ, {}},
          LabelStyle → Directive[15],
          AspectRatio → Automatic,
          PlotRange → {{-scale, scale}, {-0.5, 0.5}},
          Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 10], {}},
          TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
          PlotLabel → Pane[Style[ToString[Round[pos[[1]]],
              TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
            Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
          ImageSize → {720, 80}],
         {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
         {{pos, {0, 0}},
          ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
         SaveDefinitions → True]},
       {framePane[
         "El conjunto de los números enteros es una extensión del
           conjunto de los números naturales. Este
           conjunto está conformado por el conjunto de
           los números naturales, el cero (considerado
           como un punto de referencia o punto de
           origen) y los opuestos de los naturales
           (enteros negativos). Los números enteros
           se representan con la letra ℤ: \n ℤ={...,
           -4, -3 , -2 , -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}"]},
       {Item[
         TextCell[
```

```
Row[{"Operaciones con los números enteros ⇒", "   ",
  Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
        " ( ℤ , + )", "Text"],
       CreateDialog[{
         Pane[Column[{
            titlePopUp["Los números enteros y la adición"],
            textPopUp["En los números enteros se cumplen
               ciertas propiedades aritméticas
               que permiten realizar operaciones
               como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números enteros es
               un número entero
        Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = c, c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
               el resultado es el mismo
         Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números enteros el
               número cero (0) es neutro:
               cero sumado a cualquier número
               entero da el mismo número.
         Si a ∈ ℤ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número entero existe un
               opuesto tal que su suma es cero:
   Si a ∈ ℤ entonces existe - a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
               el resultado es el mismo
   Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
               manera diferente"]}], ImageSize →
           {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
            True}]}, Background → White, Deployed → True],
       ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
      Button[TextCell[" ( ℤ , · )", "Text"],
       CreateDialog[{
```

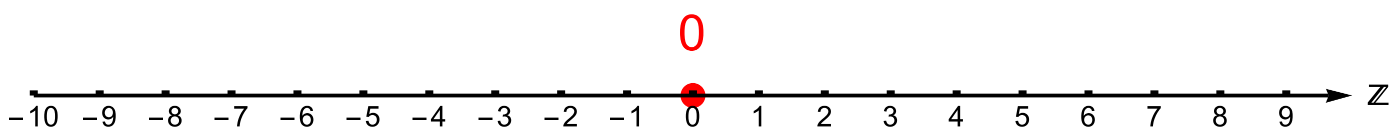
```
Pane[Column[{
    titlePopUp[
     "Los números enteros y la multiplicación"],
    textPopUp["En los números enteros se
        cumplen ciertas propiedades aritméticas
        que permiten realizar operaciones
        como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números enteros
        es un número entero
      Si a y b ∈ ℤ entonces a b = c, c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números enteros,
        el resultado es el mismo
      Si a y b ∈ ℤ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números enteros
        el número uno (1) es neutro:
        uno multiplicado por cualquier
        número entero da el mismo número.
      Si a ∈ ℤ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
        el resultado es el mismo
    Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
        una nueva propiedad llamada propiedad
        distributiva de la multiplicación
        con respecto a la adición: en
        una multiplicación en la cual
        un factor es la suma (o resta)
        de dos o más términos se puede
        distribuir las multiplicaciones
     Si a, b y c ∈ ℤ entonces a(b + c) = a b + a c                "]
     }], ImageSize →
    {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
     True}]}, Background → White, Deployed → True],
   ImageSize → All], "LinkHand"]},
  {MouseAppearance[
```

```
Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
 CreateDialog[{
   Pane[Column[{
      titlePopUp[
       "Los números enteros y la sustracción"],
      textPopUp["Ya se mencionó que la sustracción
         es una adición de un número con el
         opuesto de otro número, sin embargo, es
         necesario recalcar que la sustracción
         no es conmutativa ni asociativa.
         Observe los siguientes ejemplos:
        2 - 5 ≠ 5 - 2
          -3 ≠ 3
como puede observar, la sustracción no es conmutable.
                    (2 - 3) - (-5) ≠ 2 - (3 - (-5))
                        -1 - (-5) ≠ 2 - 8
                              4 ≠ -6
como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por
         ejemplo 2 - 5 se puede escribir como
         2 + (-5) y 2 + (-5) = (-5) + 2 = -3."]}],
     ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
     Scrollbars → {False, True}]},
   Background → White, Deployed → True],
 ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell["División", "Text"],
 CreateDialog[{
   Pane[Column[{
      titlePopUp["Los números enteros y la división"],
      textPopUp["La división es el proceso inverso de
```

```
                                    la multiplicación y no se considera
                                    como una operación porque no es
                                    cerrada, lo que quiere decir que
                                    no siempre se puede realizar una
                                    división con dos número enteros.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
                                    divisor y c el cociente. Cuando la
                                    división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                    enteros solo cuando la división es
                                    exacta, por ejemplo: (-6) ÷ 2 = -3 ,
                                    en el caso contrario, la operación
                                    no da como resultado un número
                                    entero: 2 ÷ (-6) = -2/6 = -1/3 ∉ ℤ. "]}],
                               ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                               Scrollbars → {False, True}]},
                             Background → White, Deployed → True],
                            ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
                      }], "Multimedia"]
                    , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}]},
            Dynamic[page1]], FrameMargins → 1,
           FrameStyle → GrayLevel[.7], ImageMargins → {{1, 1}, {0, 0}}]}},
       Alignment → {Center, Top}], ImageSize → {800, Automatic}]]
```

ℕ Números Naturales | ℤ Números Enteros

máximo 10 20 50 100



El conjunto de los números enteros es una extensión del conjunto de los números naturales. Este conjunto está conformado por el conjunto de los números naturales, el cero (considerado como un punto de referencia o punto de origen) y los opuestos de los naturales (enteros negativos). Los números enteros se representan con la letra $\mathbb{Z}$:
$\mathbb{Z}$={..., −4, −3 , −2 , −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

Operaciones con los números enteros ⇒ ($\mathbb{Z}$, +) ($\mathbb{Z}$, ·) Sustracción División

Números Racionales

» *Los números racionales*

Los números que se utilizan para expresar una parte de un todo son llamados **números racionales** y son todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, a y b son números enteros. Se representan con la letra $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

» *Los números racionales y la adición*

En los números racionales se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la adición. Estas son:

Clausurativa: la adición de cualquier par de números racionales es un número racional

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{Q} \text{ entonces } a + b = c,\quad c \in \mathbb{Q}$$

Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números racionales, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{Q} \text{ entonces } a + b = b + a$$

Existencia de elemento neutro: en la adición de números racionales el número cero (0) es *neutro*: cero sumado a cualquier número da el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Q} \text{ entonces } a + 0 = 0 + a = a$$

Existencia de elemento opuesto: para todo número racional existe un opuesto tal que su suma es cero:

Si $a \in \mathbb{Q}$ entonces existe $-a$ tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

Si $a,\ b$ y $c\ \in \mathbb{Q}$ entonces $(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b$

Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de manera diferente

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℚ , + )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números racionales y la adición"],
       textPopUp["En los números racionales se cumplen
          ciertas propiedades aritméticas que permiten
          realizar operaciones como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números racionales
          es un número racional
                    Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = c, c ∈ ℚ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos
          números racionales, el resultado es el mismo
                      Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números
          racionales el número cero (0) es neutro: cero
          sumado a cualquier número da el mismo número.
                      Si a ∈ ℚ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número racional
          existe un opuesto tal que la su suma es cero:
           Si a ∈ ℚ entonces existe -a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se
          agrupen los elementos, el resultado es el mismo
           Si a, b y c ∈ ℚ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es
          una adición escrita de manera diferente"]}],
     ImageSize → {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False, True}]},
   Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(ℚ , +)

» *Los números racionales y la sustracción*

Ya se mencionó con anticipación que la sustracción es una adición de un número con el opuesto de otro número, sin embargo, es necesario recalcar que la sustracción no es conmutativa ni asociativa en ningún conjunto numérico. Observe los siguientes ejemplos:

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\neq\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{7}{12}\neq\frac{7}{12}$$

como puede observar, la sustracción no es conmutable.

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)\neq\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{11}{10}-\left(-\frac{5}{2}\right)\neq\frac{2}{5}-4$$

$$\frac{7}{5}\neq-\frac{18}{5}$$

como puede observar, la sustracción no es asociativa.

Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por ejemplo $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}$ se puede escribir como $\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right)$ y $\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}$.

» *Los números racionales y la multiplicación*

En los números racionales se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la multiplicación. Estas son:

Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números racionales es un número entero

$$\text{Si } a \text{ y } b\in\mathbb{Q} \text{ entonces } a\,b=c,\;\; c\in\mathbb{Q}$$

Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números racionales, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a \text{ y } b\in\mathbb{Q} \text{ entonces } a\,b=b\,a$$

Existencia de elemento neutro: *en* la multiplicación de números racionales el número uno (1) es *neutro*: uno multiplicado por cualquier número da el mismo número.

$$\text{Si } a\in\mathbb{Q} \text{ entonces } a\,1=1\,a=a$$

Existencia de elemento inverso: *para* todo número racional existe un opuesto tal que la su multiplicación es uno:

$$\text{Si } a\in\mathbb{Q} \text{ entonces existe } \frac{1}{a} \text{ tal que } a\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)a=1$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a,\; b \text{ y } c\in\mathbb{Q} \text{ entonces } (a\,b)\,c=a\,(b\,c)=(a\,c)\,b$$

Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta una nueva propiedad llamada propiedad ***distributiva de la multiplicación con respecto a la adición:*** *en* una multiplicación en la cual un factor es la suma (o resta) de dos o más términos se puede distribuir las multiplicaciones

$$\text{Si } a,\; b \text{ y } c\in\mathbb{Q} \text{ entonces } a(b+c)=a\,b+a\,c$$

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℚ , · )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números racionales y la multiplicación"],
       textPopUp["En los números racionales se cumplen ciertas
          propiedades aritméticas que permiten realizar
          operaciones como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números
          racionales es un número racional
                      Si a y b ∈ ℚ entonces a b = c, c ∈ ℚ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos
          números racionales, el resultado es el mismo
                        Si a y b ∈ ℚ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números
          racionales el número uno (1) es neutro: uno
          multiplicado por cualquier número da el mismo número.
                        Si a ∈ ℚ entonces a 1 = 1 a = a
Existencia de elemento inverso multiplicativo o recíproco (opuesto
          multiplicativo): para todo número racional existe
          un recíproco tal que la su multiplicación es uno:
                Si a ∈ ℚ entonces existe 1/a tal que a(1/a) = (1/a) a = 1
Asociativa: no importa el orden como se
          agrupen los elementos, el resultado es el mismo
                 Si a, b y c ∈ ℚ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación
          resulta una nueva propiedad llamada propiedad
          distributiva de la multiplicación con respecto
          a la adición: en una multiplicación en la cual
          un factor es la suma (o resta) de dos o más
          términos se pueden distribuir las multiplicaciones
                    Si a, b y c ∈ ℚ entonces a (b + c) = a b + a c                "]
        }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
     Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

$(\mathbb{Q}, \cdot)$

» *Los números racionales y la división*

En los números racionales, la división es una manera diferente de escribir una multiplicación. En general, cuando se van a dividir dos números racionales, se tiene que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

es decir, en lugar de dividir se multiplica por el recíproco del divisor.

Es así como todas las divisiones se pueden expresar como multiplicación de racionales, por ejemplo

$$7 \div 3 = 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

» Resumen

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
   style1, style2, style3,
   color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
   tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
   page1, page2, page3, page4, page5,
   titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600, rati, int},
  (*Inicializar page´s*)
  page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 3;
  (*estilos de los textos/recuadros*)
  style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  framePane[s_String] := Pane[TextCell[style1[s], "Cuadro/Titulo",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  (*Estilos de las ventanas emergentes*)
  titlePopUp[s_String] :=
   Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
     "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
     "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
```

```
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
rati[x_] := Rationalize[x, 0.1];
int[x_, y_] := IntegerPart[x / y];
Pane[Grid[{
   {Grid[{{ℕ Números Naturales , ℤ Números Enteros , ℚ Números Racionales }},
     Spacings → {.7, .7}, Dividers → {All, All}, FrameStyle → GrayLevel[.7],
     Background → {None, None, Dynamic[{1, page1}] → Lighter@LightBlue}]},
   {Framed[PaneSelector[{
       1 → Pane[
         Grid[{{Manipulate[
               Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
                 Point[{{Max[1, Round[pos[[1]]]], 0}}]},
                Axes → {True, False},
                AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
                AxesLabel → {ℕ, {}},
                LabelStyle → Directive[15],
                AspectRatio → Automatic,
                PlotRange → {{-0.05 * scale, scale}, {-.5, .5}},
                Ticks → {Delete[Range[0, scale, scale / 20], 1], {}},
                TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
                PlotLabel → Pane[Style[ToString[Max[1, Round[pos[[1]]]],
                    TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
                  Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
                ImageSize → {720, 80}],
               {{scale, 20, "máximo"}, {20, 60, 100, 200, 1000}},
               {{pos, {1, 0}},
                ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
               SaveDefinitions → True]},
             {framePane["Los números naturales son aquellos que se utilizan
                para contar, el conjunto de todos los
                números naturales se denota por ℕ y son:
                \n ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}"]},
```

```
{Item[
  TextCell[
   Row[{"Operaciones con los números naturales ⇒", "   ",
     Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
          " ( ℕ , + )", "Text"],
         CreateDialog[{
           Pane[Column[{
              titlePopUp["Los números naturales y la adición"],
              textPopUp["En los números naturales se cumplen
                 ciertas propiedades aritméticas
                 que permiten realizar operaciones
                 como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números naturales es
                 un número natural
          Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = c,  c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                 el resultado es el mismo
           Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = b + a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                 el resultado es el mismo
     Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b          "]
              }], ImageSize →
             {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
              True}]}, Background → White, Deployed → True],
         ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
        Button[TextCell[" ( ℕ , · )", "Text"],
         CreateDialog[{
           Pane[Column[{
              titlePopUp[
               "Los números naturales y la multiplicación"],
              textPopUp["En los números naturales se
                 cumplen ciertas propiedades aritméticas
                 que permiten realizar operaciones
                 como la multiplicación. Estas son:
```

```
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números naturales
                                es un número natural
                       Si a y b ∈ ℕ entonces a b = c, c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números naturales,
                                el resultado es el mismo
                          Si a y b ∈ ℕ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales el
                                número uno (1) es neutro: uno
                                multiplicado por cualquier número
                                natural da el mismo número.
                          Si a ∈ ℕ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                el resultado es el mismo
                 Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                                una nueva propiedad llamada propiedad
                                distributiva de la multiplicación
                                con respecto a la adición: en
                                una multiplicación en la cual
                                un factor es la suma (o resta)
                                de dos o más términos se pueden
                                distribuir las multiplicaciones
                    Si a, b y c ∈ ℕ entonces a(b + c) = a b + a c                 "]
                              }], ImageSize →
                           {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                            True}]}, Background → White, Deployed → True],
                       ImageSize → All], "LinkHand"]},
                      {MouseAppearance[
                        Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp[
                               "Los números naturales y la sustracción"],
                              textPopUp["La sustracción es el proceso
                                 inverso a la adición y no se considera
```

```
                                        una operación porque no es cerrada,
                                        lo que quiere decir que no siempre
                                        se puede realizar la sustracción
                                        entre dos números naturales.
En la sustracción a - b = c el término a se llama minuendo, b es el
                                        sustraendo y c la diferencia.
La sustracción se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                        naturales solo cuando el minuendo
                                        es mayor que el sustraendo, por
                                        ejemplo: 505 - 124 = 381 , en el
                                        caso contrario, la operación no da
                                        como resultado un número
                                        natural: 124 - 505 = -381 ∉ ℕ."]}],
                                  ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                                  Scrollbars → {False, True}]},
                                Background → White, Deployed → True],
                              ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                             Button[TextCell["División", "Text"],
                              CreateDialog[{
                                Pane[Column[{
                                   titlePopUp[
                                    "Los números naturales y la división"],
                                   textPopUp["La división es el proceso
                                        inverso de la multiplicación y no se
                                        considera como una operación porque
                                        no es cerrada, lo que quiere decir
                                        que no siempre se puede realizar una
                                        división con dos números naturales.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
                                        divisor y c el cociente. Cuando la
                                        división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                        naturales solo cuando la división
```

```
                    es exacta, por ejemplo: 6 ÷ 2 = 3 ,
                    en el caso contrario, la operación
                    no da como resultado un número
                    natural: 2 ÷ 6 = 2/6 = 1/3 ∉ ℕ. "]}],
                ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                Scrollbars → {False, True}]},
              Background → White, Deployed → True],
            ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
      }], "Multimedia"], Alignment → Right]}}],
  ImageSize → {790, Automatic}],
 2 → Pane[Grid[{{Manipulate[
      Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
        Point[{{Round[pos[[1]]], 0}}]},
       Axes → {True, False},
       AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
       AxesLabel → {ℤ, {}},
       LabelStyle → Directive[15],
       AspectRatio → Automatic,
       PlotRange → {{-scale, scale}, {-0.5, 0.5}},
       Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 10], {}},
       TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
       PlotLabel → Pane[Style[ToString[Round[pos[[1]]],
            TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
         Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
       ImageSize → {720, 80}],
      {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
      {{pos, {0, 0}},
       ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
      SaveDefinitions → True]},
    {framePane[
      "El conjunto de los números enteros es una extensión del
        conjunto de los números naturales. Este
```

```
                    conjunto está conformado por el conjunto de
                    los números naturales, el cero (considerado
                    como un punto de referencia o punto de
                    origen) y los opuestos de los naturales
                    (enteros negativos). Los números enteros
                    se representan con la letra ℤ: \n ℤ={...,
                    -4, -3 , -2 , -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}"]},
               {Item[
                 TextCell[
                  Row[{"Operaciones con los números enteros ⇒", "   ",
                    Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                          " ( ℤ  , + )", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp["Los números enteros y la adición"],
                              textPopUp["En los números enteros se cumplen
                                 ciertas propiedades aritméticas
                                 que permiten realizar operaciones
                                 como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números enteros es
                                 un número entero
                      Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = c,  c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                                 el resultado es el mismo
                       Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números enteros el
                                 número cero (0) es neutro:
                                 cero sumado a cualquier número
                                 entero da el mismo número.
                       Si a ∈ ℤ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número entero existe un
                                 opuesto tal que su suma es cero:
             Si a ∈ ℤ entonces existe - a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
```

```
el resultado es el mismo
Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
        manera diferente"]}], ImageSize →
      {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
       True}]}, Background → White, Deployed → True],
    ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
   Button[TextCell[" ( ℤ , · )", "Text"],
    CreateDialog[{
      Pane[Column[{
         titlePopUp[
          "Los números enteros y la multiplicación"],
         textPopUp["En los números enteros se
            cumplen ciertas propiedades aritméticas
            que permiten realizar operaciones
            como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números enteros
            es un número entero
Si a y b ∈ ℤ entonces a b = c, c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números enteros,
            el resultado es el mismo
Si a y b ∈ ℤ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números enteros
            el número uno (1) es neutro:
            uno multiplicado por cualquier
            número entero da el mismo número.
Si a ∈ ℤ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
            el resultado es el mismo
Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
            una nueva propiedad llamada propiedad
            distributiva de la multiplicación
            con respecto a la adición: en
            una multiplicación en la cual
```

```
                              un factor es la suma (o resta)
                              de dos o más términos se puede
                              distribuir las multiplicaciones
                   Si a, b y c ∈ ℤ entonces a (b + c) = a b + a c                "]
                            }], ImageSize →
                          {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                           True}]}, Background → White, Deployed → True],
                       ImageSize → All], "LinkHand"]},
                     {MouseAppearance[
                      Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                       CreateDialog[{
                         Pane[Column[{
                            titlePopUp[
                             "Los números enteros y la sustracción"],
                            textPopUp["Ya se mencionó que la sustracción
                              es una adición de un número con el
                              opuesto de otro número, sin embargo, es
                              necesario recalcar que la sustracción
                              no es conmutativa ni asociativa.
                              Observe los siguientes ejemplos:
                             2 - 5 ≠ 5 - 2
                               -3 ≠ 3
como puede observar, la sustracción no es conmutable.
                      (2 - 3) - (-5) ≠ 2 - (3 - (-5))
                         -1 - (-5) ≠ 2 - 8
                                4 ≠ -6
como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por
                              ejemplo 2 - 5 se puede escribir como
                              2 + (-5) y 2 + (-5) = (-5) + 2 = -3."]}],
                          ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                          Scrollbars → {False, True}]},
```

```
                              Background → White, Deployed → True],
                             ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                            Button[TextCell["División", "Text"],
                             CreateDialog[{
                               Pane[Column[{
                                  titlePopUp["Los números enteros y la división"],
                                  textPopUp["La división es el proceso inverso de
                                     la multiplicación y no se considera
                                     como una operación porque no es
                                     cerrada, lo que quiere decir que
                                     no siempre se puede realizar una
                                     división con dos número enteros.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
                                     divisor y c el cociente. Cuando la
                                     división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                     enteros solo cuando la división es
                                     exacta, por ejemplo: (-6) ÷ 2 = -3 ,
                                     en el caso contrario, la operación
                                     no da como resultado un número
                                     entero: 2 ÷ (-6) = -2/6 = -1/3 ∉ ℤ. "]}],
                                ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                                Scrollbars → {False, True}]},
                              Background → White, Deployed → True],
                             ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
                      }], "Multimedia"]
                     , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}],
         3 → Pane[Grid[{{Manipulate[
                Graphics[
```

```
      {Red, AbsolutePointSize[13], Point[{{rati[pos[[1]]], 0}}]},
      Axes → {True, False},
      AxesStyle → Directive[Thickness[0.0022], Arrowheads[0.02]],
      AxesLabel → {ℚ, {}},
      LabelStyle → Directive[15],
      AspectRatio → Automatic,
      PlotRange → {{-scale, scale * 1.1}, {-0.01, 0.01}},
      Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 5], {}},
      TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
      PlotLabel → Pane[Style[ToString[rati[pos[[1]]],
          TraditionalForm], Red, 18], ImageSize → {350, 50},
        Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
      ImageSize → {720, 80}],
     {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
     {{pos, {0, 0}},
      ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
     SaveDefinitions → True]},
   {framePane[
     "Los números que se utilizan para expresar una parte de un
       todo son llamados números racionales y
       son todos los números de la forma a/b,
       donde b ≠ 0, a y b son números enteros.
       Se representan con la letra ℚ:
              ℚ = {a/b, a, b ∈ ℤ, b ≠ 0}                         "]
     },
   {Item[
     TextCell[
      Row[{"Operaciones con los números racionales ⇒", "    ",
        Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
              " ( ℚ , + )", "Text"],
             CreateDialog[{
```

```
Pane[Column[{
    titlePopUp[
     "Los números racionales y la adición"],
    textPopUp["En los números racionales
      se cumplen ciertas propiedades
      aritméticas que permiten realizar
      operaciones como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números racionales es
      un número racional
        Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = c,  c ∈ ℚ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números racionales,
      el resultado es el mismo
        Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números racionales el número
      cero (0) es neutro: cero sumado a
      cualquier número da el mismo número.
        Si a ∈ ℚ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número racional existe un
      opuesto tal que su suma es cero:
        Si a ∈ ℚ entonces existe -a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
      el resultado es el mismo
        Si a, b y c ∈ ℚ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
      manera diferente"]}], ImageSize →
   {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
    True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
 Button[TextCell[" ( ℚ , · )", "Text"],
  CreateDialog[{
   Pane[Column[{
      titlePopUp[
       "Los números racionales y la multiplicación"],
      textPopUp["En los números racionales se
        cumplen ciertas propiedades aritméticas
```

```
                                  que permiten realizar operaciones
                                  como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números racionales
                                  es un número racional
                        Si a y b ∈ ℚ entonces a b = c, c ∈ ℚ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números racionales,
                                  el resultado es el mismo
                          Si a y b ∈ ℚ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números racionales
                                  el número uno (1) es neutro:
                                  uno multiplicado por cualquier
                                  número da el mismo número.
                          Si a ∈ ℚ entonces a 1 = 1 a = a
Existencia de elemento inverso multiplicativo o recíproco (opuesto
                                  multiplicativo): para todo número
                                  racional a≠0 existe un recíproco
                                  tal que la su multiplicación es uno:
                 Si a ∈ ℚ entonces existe 1/a tal que a (1/a) = (1/a) a = 1
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                  el resultado es el mismo
                  Si a, b y c ∈ ℚ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                                  una nueva propiedad llamada propiedad
                                  distributiva de la multiplicación
                                  con respecto a la adición: en
                                  una multiplicación en la cual
                                  un factor es la suma (o resta)
                                  de dos o más términos se pueden
                                  distribuir las multiplicaciones
                     Si a, b y c ∈ ℚ entonces a (b + c) = a b + a c              "]
                               }],
                           ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                           Scrollbars → {False, True}]
                         }, Background → White, Deployed → True],
```

```
ImageSize → All], "LinkHand"]},
{MouseAppearance[
  Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
   CreateDialog[{
     Pane[Column[{
        titlePopUp[
         "Los números racionales y la sustracción"],
        textPopUp["Ya se mencionó con anticipación
           que la sustracción es una adición de un
           número con el opuesto de otro número,
           sin embargo, es necesario recalcar que
           la sustracción no es conmutativa ni
           asociativa en ningún conjunto numérico.
           Observe los siguientes ejemplos:
```

$$\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\neq\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{7}{12}\neq\frac{7}{12}$$

```
como puede observar, la sustracción no es conmutable.
```

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)\neq\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{11}{10}-\left(-\frac{5}{2}\right)\neq\frac{2}{5}-4$$

$$\frac{7}{5}\neq-\frac{18}{5}$$

```
como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma,
           por ejemplo
```

$\frac{2}{3}-\frac{5}{4}$ se puede escribir como $\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right)$ y

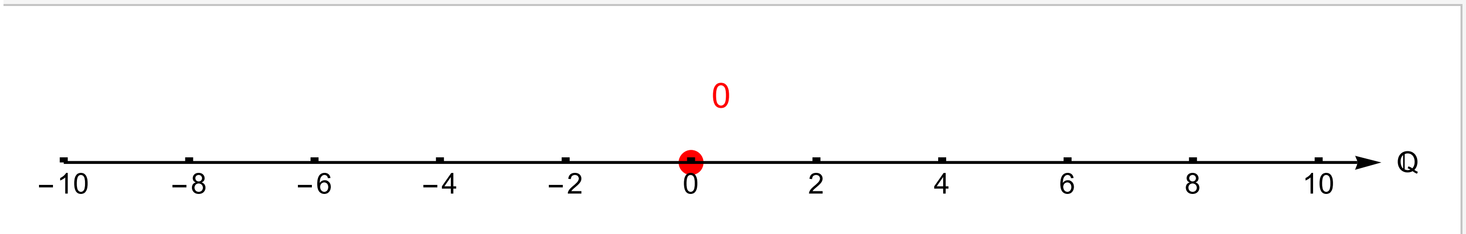
$\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}$."]}],

```
      ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
      Scrollbars → {False, True}]},
```

```
                    Background → White, Deployed → True],
                   ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                  Button[TextCell["División", "Text"],
                   CreateDialog[{
                     Pane[Column[{
                        titlePopUp[
                         "Los números racionales y la división"],
                        textPopUp["En los números racionales,
                           la división es una manera diferente
                           de escribir una multiplicación. En
                           general, cuando se van a dividir dos
                           números racionales, se tiene que:
                        a/b ÷ c/d = a/b · d/c = a d/(b c)
es decir, en lugar de dividir se multiplica por el recíproco del divisor.
Es así como todas las divisiones se pueden expresar como multiplicación
                           de racionales, por ejemplo
                         7 ÷ 3 = 7 · 1/3 = 7/3                              "]
                         }], ImageSize →
                       {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                        True}]}, Background → White, Deployed → True],
                   ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
              }], "Multimedia"]
             , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}]},
        Dynamic[page1]], FrameMargins → 1,
       FrameStyle → GrayLevel[.7], ImageMargins → {{1, 1}, {0, 0}}]}},
     Alignment → {Center, Top}], ImageSize → {800, Automatic}]]
```

Números Naturales | Números Enteros | Números Racionales

máximo 10 20 50 100



Los números que se utilizan para expresar una parte de un todo son llamados **números racionales** y son todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, a y b son números enteros. Se representan con la letra $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

Operaciones con los números racionales ⇒ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}, \cdot)$ Sustracción División

Números Irracionales

» *Los números irracionales*

Números que no se pueden expresarr mediante la razón de números enteros, como por ejemplo π (relación entre una circunferencia y su diámetro) o e (número de Euler utilizado frecuentemente en problemas de crecimiento y financieros). Se representa con la letra $\mathbb{I}$.

» *Los números irracionales y la adición*

La operación de la adición en los números iracionales no es cerrada, ya que no siempre dan como resultado un número irracional. Por ejemplo, al sumar $3\sqrt{2}$ con $-3\sqrt{2}$ da como resultado 0 y $0 \notin \mathbb{I}$.
Para sumar números irracionales se tienen en cuenta los términos semejantes, es decir, solo se operan los términos que tengan el mismo irracional, por ejemplo, al simplificar la siguiente expresión:
$3\sqrt{5} - \pi + 4\sqrt{5} - 7\pi + 2$, se obtiene como resultado, $7\sqrt{5} - 8\pi + 2$.

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( 𝕀 , + )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números irracionales y la adición"],
       textPopUp["La operación de la adición en los números irracionales no
          es cerrada, ya que no siempre dan como resultado
          un número irracional. Por ejemplo, al sumar
          3 √2 con -3 √2 da como resultado 0 y 0 ∉ 𝕀.
Para sumar números irracionales se tienen en cuenta los términos
          semejantes, es decir, solo se operan los términos que
          tengan el mismo irracional, por ejemplo, al simplificar
          la siguiente expresión: 3 √5 - π + 4 √5 - 7 π + 2,
          se obtiene como resultado, 7 √5 - 8 π + 2."]}],
      ImageSize → {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars →
       {False,
        True}]},
    Background → White, Deployed →
     True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(𝕀 , +)

» *Los números irracionales y la multiplicación*

La operación de la multiplicación en los números irracionales no es cerrada, ya que no siempre dan como resultado un número irracional. Por ejemplo, al multiplicar $3\sqrt{2}$ con $-3\sqrt{2}$ da como resultado $-9\sqrt{4} = -9\,(2) = -18$ y $-18 \notin \mathbb{I}$.

Al multiplicar números irracionales, se realizan las multiplicaciones posibles, las otras se quedan indicadas, por ejemplo, al realizar la operación $\left(\pi - 3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 4 + 2\pi\right)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\left(\pi - 3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 4 + 2\pi\right) &= \sqrt{2}\,\pi - 4\pi + 2\pi^2 - 3\left(\sqrt{2}\right)^2 + 12\sqrt{2} - 6\pi\sqrt{2}\\ &= -5\pi\sqrt{2} - 4\pi + 2\pi^2 - 3\,(2) + 12\sqrt{2}\\ &= -5\pi\sqrt{2} - 4\pi + 2\pi^2 - 6 + 12\sqrt{2}\end{aligned}$$

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( 𝕀 , · )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números irracionales y la multiplicación"],
       textPopUp[
        "La operación de la multiplicación en los números irracionales no
          es cerrada, ya que no siempre dan como resultado un
          número irracional. Por ejemplo, al multiplicar 3 √2 con
          -3 √2 da como resultado -9 √4 = -9 (2) = -18 y -18 ∉ 𝕀.
Al multiplicar números irracionales, se realizan las multiplicaciones
          posibles, las otras se quedan indicadas, por ejemplo, al
          realizar la operación (π - 3 √2) (√2 - 4 + 2 π) se tiene:
     (π - 3 √2) (√2 - 4 + 2 π) = √2 π - 4 π + 2 π² - 3 (√2)² + 12 √2 - 6 π √2
                                = -5 π √2 - 4 π + 2 π² - 3 (2) + 12 √2              "]
                                = -5 π √2 - 4 π + 2 π² - 6 + 12 √2
       }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
     Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(𝕀 , ·)

» Resumen

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
   style1, style2, style3,
   color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
   tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
   page1, page2, page3, page4, page5,
   titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600, rati, int},
  (*Inicializar page´s*)
  page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 4;
```

```
(*estilos de los textos/recuadros*)
style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
framePane[s_String] := Pane[TextCell[style1[s], "Cuadro/Titulo",
   LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
   LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
(*Estilos de las ventanas emergentes*)
titlePopUp[s_String] :=
 Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
rati[x_] := Rationalize[x, 0.1];
int[x_, y_] := IntegerPart[x / y];
Pane[Grid[{
   {Grid[{{ ℕ Números Naturales , ℤ Números Enteros , ℚ Números Racionales , 𝕀 Números Irracionales }},
     Spacings → {.7, .7}, Dividers → {All, All}, FrameStyle → GrayLevel[.7],
     Background → {None, None, Dynamic[{1, page1}] → Lighter@LightBlue}]},
   {Framed[PaneSelector[{
       1 → Pane[
         Grid[{{Manipulate[
              Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
                Point[{{Max[1, Round[pos[[1]]]], 0}}]},
               Axes → {True, False},
               AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
               AxesLabel → {ℕ, {}},
```

```
        LabelStyle → Directive[15],
        AspectRatio → Automatic,
        PlotRange → {{-0.05 * scale, scale}, {-.5, .5}},
        Ticks → {Delete[Range[0, scale, scale / 20], 1], {}},
        TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
        PlotLabel → Pane[Style[ToString[Max[1, Round[pos[[1]]]],
            TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
          Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
        ImageSize → {720, 80}],
       {{scale, 20, "máximo"}, {20, 60, 100, 200, 1000}},
       {{pos, {1, 0}},
        ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
       SaveDefinitions → True]},
     {framePane["Los números naturales son aquellos que se utilizan
         para contar, el conjunto de todos los
         números naturales se denota por ℕ y son:
         \n ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}"]},
     {Item[
       TextCell[
        Row[{"Operaciones con los números naturales ⇒", "    ",
          Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
                 " ( ℕ , + )", "Text"],
                CreateDialog[{
                  Pane[Column[{
                     titlePopUp["Los números naturales y la adición"],
                     textPopUp["En los números naturales se cumplen
                        ciertas propiedades aritméticas
                        que permiten realizar operaciones
                        como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números naturales es
                        un número natural
                  Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = c,  c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                        el resultado es el mismo
```

```
                    Si a y b ∈ ℕ entonces a + b = b + a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                    el resultado es el mismo
     Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b          "]
                    }], ImageSize →
                   {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                    True}]}, Background → White, Deployed → True],
              ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
             Button[TextCell[" ( ℕ , · )", "Text"],
              CreateDialog[{
                Pane[Column[{
                   titlePopUp[
                    "Los números naturales y la multiplicación"],
                   textPopUp["En los números naturales se
                     cumplen ciertas propiedades aritméticas
                     que permiten realizar operaciones
                     como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números naturales
                     es un número natural
             Si a y b ∈ ℕ entonces a b = c, c ∈ ℕ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números naturales,
                     el resultado es el mismo
               Si a y b ∈ ℕ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números naturales el
                     número uno (1) es neutro: uno
                     multiplicado por cualquier número
                     natural da el mismo número.
               Si a ∈ ℕ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                     el resultado es el mismo
          Si a, b y c ∈ ℕ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                     una nueva propiedad llamada propiedad
                     distributiva de la multiplicación
                     con respecto a la adición: en
```

```
                          una multiplicación en la cual
                          un factor es la suma (o resta)
                          de dos o más términos se pueden
                          distribuir las multiplicaciones
Si a, b y c ∈ ℕ entonces a (b + c) = a b + a c                  "]
                        }], ImageSize →
                      {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                       True}]}, Background → White, Deployed → True],
                   ImageSize → All], "LinkHand"]},
                 {MouseAppearance[
                  Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                   CreateDialog[{
                     Pane[Column[{
                        titlePopUp[
                         "Los números naturales y la sustracción"],
                        textPopUp["La sustracción es el proceso
                          inverso a la adición y no se considera
                          una operación porque no es cerrada,
                          lo que quiere decir que no siempre
                          se puede realizar la sustracción
                          entre dos números naturales.
En la sustracción a - b = c el término a se llama minuendo, b es el
                          sustraendo y c la diferencia.
La sustracción se puede realizar dentro del conjunto de los números
                          naturales solo cuando el minuendo
                          es mayor que el sustraendo, por
                          ejemplo: 505 - 124 = 381 , en el
                          caso contrario, la operación no da
                          como resultado un número
                          natural: 124 - 505 = -381 ∉ ℕ."]}],
                      ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                      Scrollbars → {False, True}]},
                    Background → White, Deployed → True],
                   ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
```

```
Button[TextCell["División", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
        titlePopUp[
         "Los números naturales y la división"],
        textPopUp["La división es el proceso
           inverso de la multiplicación y no se
           considera como una operación porque
           no es cerrada, lo que quiere decir
           que no siempre se puede realizar una
           división con dos números naturales.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
           divisor y c el cociente. Cuando la
           división es exacta no hay residuo.
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
           naturales solo cuando la división
           es exacta, por ejemplo: 6 ÷ 2 = 3 ,
           en el caso contrario, la operación
           no da como resultado un número
           natural: 2 ÷ 6 = 2/6 = 1/3 ∉ ℕ. "]}],
      ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
      Scrollbars → {False, True}]},
    Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
}], "Multimedia"], Alignment → Right]}}],
ImageSize → {790, Automatic}],
2 → Pane[Grid[{{Manipulate[
      Graphics[{Red, AbsolutePointSize[13],
        Point[{{Round[pos[[1]]], 0}}]},
       Axes → {True, False},
```

```
    AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
    AxesLabel → {ℤ, {}},
    LabelStyle → Directive[15],
    AspectRatio → Automatic,
    PlotRange → {{-scale, scale}, {-0.5, 0.5}},
    Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 10], {}},
    TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
    PlotLabel → Pane[Style[ToString[Round[pos[[1]]],
        TraditionalForm], Red, 30], ImageSize → {350, 30},
      Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
    ImageSize → {720, 80}],
   {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
   {{pos, {0, 0}},
    ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
   SaveDefinitions → True]},
 {framePane[
   "El conjunto de los números enteros es una extensión del
     conjunto de los números naturales. Este
     conjunto está conformado por el conjunto de
     los números naturales, el cero (considerado
     como un punto de referencia o punto de
     origen) y los opuestos de los naturales
     (enteros negativos). Los números enteros
     se representan con la letra ℤ: \n ℤ={...,
     -4, -3 , -2 , -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}"]},
 {Item[
   TextCell[
    Row[{"Operaciones con los números enteros ⇒", "    ",
      Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
            " ( ℤ , + )", "Text"],
           CreateDialog[{
             Pane[Column[{
                titlePopUp["Los números enteros y la adición"],
                textPopUp["En los números enteros se cumplen
```

```
                                       ciertas propiedades aritméticas
                                       que permiten realizar operaciones
                                       como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números enteros es
                                       un número entero
                           Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = c, c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números enteros,
                                       el resultado es el mismo
                             Si a y b ∈ ℤ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números enteros el
                                       número cero (0) es neutro:
                                       cero sumado a cualquier número
                                       entero da el mismo número.
                             Si a ∈ ℤ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número entero existe un
                                       opuesto tal que su suma es cero:
                Si a ∈ ℤ entonces existe -a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                       el resultado es el mismo
                Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
                                       manera diferente"]}], ImageSize →
                                   {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                                    True}]}, Background → White, Deployed → True],
                              ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                             Button[TextCell[" ( ℤ , · )", "Text"],
                              CreateDialog[{
                                Pane[Column[{
                                   titlePopUp[
                                    "Los números enteros y la multiplicación"],
                                   textPopUp["En los números enteros se
                                       cumplen ciertas propiedades aritméticas
                                       que permiten realizar operaciones
                                       como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números enteros
```

```
                                 es un número entero
                       Si a y b ∈ ℤ entonces a b = c, c ∈ ℤ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números enteros,
                                 el resultado es el mismo
                         Si a y b ∈ ℤ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números enteros
                                 el número uno (1) es neutro:
                                 uno multiplicado por cualquier
                                 número entero da el mismo número.
                         Si a ∈ ℤ entonces a 1 = 1 a = a
Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
                                 el resultado es el mismo
                 Si a, b y c ∈ ℤ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta
                                 una nueva propiedad llamada propiedad
                                 distributiva de la multiplicación
                                 con respecto a la adición: en
                                 una multiplicación en la cual
                                 un factor es la suma (o resta)
                                 de dos o más términos se puede
                                 distribuir las multiplicaciones
                    Si a, b y c ∈ ℤ entonces a (b + c) = a b + a c                  "]
                               }], ImageSize →
                            {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                             True}]}, Background → White, Deployed → True],
                        ImageSize → All], "LinkHand"]},
                      {MouseAppearance[
                        Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
                         CreateDialog[{
                           Pane[Column[{
                              titlePopUp[
                               "Los números enteros y la sustracción"],
                              textPopUp["Ya se mencionó que la sustracción
```

```
es una adición de un número con el
opuesto de otro número, sin embargo, es
necesario recalcar que la sustracción
no es conmutativa ni asociativa.
Observe los siguientes ejemplos:
2 - 5 ≠ 5 - 2
  -3 ≠ 3
como puede observar, la sustracción no es conmutable.
(2 - 3) - (-5) ≠ 2 - (3 - (-5))
    -1 - (-5) ≠ 2 - 8
            4 ≠ -6
como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por
ejemplo 2 - 5 se puede escribir como
2 + (-5) y 2 + (-5) = (-5) + 2 = -3."]}],
      ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
      Scrollbars → {False, True}]},
    Background → White, Deployed → True],
   ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
  Button[TextCell["División", "Text"],
   CreateDialog[{
     Pane[Column[{
        titlePopUp["Los números enteros y la división"],
        textPopUp["La división es el proceso inverso de
la multiplicación y no se considera
como una operación porque no es
cerrada, lo que quiere decir que
no siempre se puede realizar una
división con dos número enteros.
En la división a ÷ b = c el término a se llama dividendo, b es el
divisor y c el cociente. Cuando la
división es exacta no hay residuo.
```

```
La división se puede realizar dentro del conjunto de los números
                                enteros solo cuando la división es
                                exacta, por ejemplo: (-6) ÷ 2 = -3 ,
                                en el caso contrario, la operación
                                no da como resultado un número
                                entero: 2 ÷ (-6) = -2/6 = -1/3 ∉ ℤ. "]}],
                          ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                          Scrollbars → {False, True}]},
                        Background → White, Deployed → True],
                       ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
                 }], "Multimedia"]
               , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}],
          3 → Pane[Grid[{{Manipulate[
               Graphics[
                {Red, AbsolutePointSize[13], Point[{{rati[pos[[1]]], 0}}]},
                Axes → {True, False},
                AxesStyle → Directive[Thickness[0.0022], Arrowheads[0.02]],
                AxesLabel → {ℚ, {}},
                LabelStyle → Directive[15],
                AspectRatio → Automatic,
                PlotRange → {{-scale, scale * 1.1}, {-0.01, 0.01}},
                Ticks → {Range[-scale, scale, scale / 5], {}},
                TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
                PlotLabel → Pane[Style[ToString[rati[pos[[1]]],
                    TraditionalForm], Red, 18], ImageSize → {350, 50},
                  Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
                ImageSize → {720, 80}],
               {{scale, 10, "máximo"}, {10, 20, 50, 100}},
               {{pos, {0, 0}},
                ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
               SaveDefinitions → True]},
```

```
{framePane[
  "Los números que se utilizan para expresar una parte de un
    todo son llamados números racionales y
    son todos los números de la forma a/b,
    donde b ≠ 0, a y b son números enteros.
    Se representan con la letra ℚ:
            ℚ = {a/b, a, b ∈ ℤ, b ≠ 0}                      "]
  },
{Item[
  TextCell[
   Row[{"Operaciones con los números racionales ⇒", "   ",
     Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
           " ( ℚ , + )", "Text"],
          CreateDialog[{
            Pane[Column[{
               titlePopUp[
                "Los números racionales y la adición"],
               textPopUp["En los números racionales
                  se cumplen ciertas propiedades
                  aritméticas que permiten realizar
                  operaciones como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números racionales es
                  un número racional
           Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = c, c ∈ ℚ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números racionales,
                  el resultado es el mismo
            Si a y b ∈ ℚ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números racionales el número
                  cero (0) es neutro: cero sumado a
                  cualquier número da el mismo número.
            Si a ∈ ℚ entonces a + 0 = 0 + a = a
```

Existencia de elemento opuesto: para todo número racional existe un
opuesto tal que su suma es cero:

Si $a \in \mathbb{Q}$ entonces existe $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos,
el resultado es el mismo

Si a, b y $c \in \mathbb{Q}$ entonces $(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$

Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de
manera diferente"]}], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell[" (ℚ , ·)", "Text"],
CreateDialog[{
Pane[Column[{
titlePopUp[
"*Los números racionales y la multiplicación*"],
textPopUp["En los números racionales se
cumplen ciertas propiedades aritméticas
que permiten realizar operaciones
como la multiplicación. Estas son:

Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números racionales
es un número racional

Si a y $b \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,b = c$, $c \in \mathbb{Q}$

Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números racionales,
el resultado es el mismo

Si a y $b \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,b = b\,a$

Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números racionales
el número uno (1) es *neutro*:
uno multiplicado por cualquier
número da el mismo número.

Si $a \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,1 = 1\,a = a$

Existencia de elemento inverso multiplicativo o recíproco (*opuesto
multiplicativo*): para todo número
racional a≠0 existe un recíproco
tal que la su multiplicación es uno:

Si $a \in \mathbb{Q}$ entonces existe $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) a = 1$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

Si a, b y $c \in \mathbb{Q}$ entonces $(a\,b)\,c = a\,(b\,c) = (a\,c)\,b$

Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta una nueva propiedad llamada propiedad *distributiva de la multiplicación con respecto a la adición*: en una multiplicación en la cual un factor es la suma (o resta) de dos o más términos se pueden distribuir las multiplicaciones

Si a, b y $c \in \mathbb{Q}$ entonces $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ "]

```
}], ImageSize →
  {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
   True}]}, Background → White, Deployed → True],
 ImageSize → All], "LinkHand"]},
{MouseAppearance[
 Button[TextCell["Sustracción", "Text"],
  CreateDialog[{
   Pane[Column[{
      titlePopUp[
       "Los números racionales y la sustracción"],
      textPopUp["Ya se mencionó con anticipación
         que la sustracción es una adición de un
         número con el opuesto de otro número,
         sin embargo, es necesario recalcar que
         la sustracción no es conmutativa ni
         asociativa en ningún conjunto numérico.
         Observe los siguientes ejemplos:
```

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{4} \neq \frac{5}{4} - \frac{2}{3}$$

$$-\frac{7}{12} \neq \frac{7}{12}$$

como puede observar, la sustracción no es conmutable.

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right) \neq \frac{2}{5}-\left(\frac{3}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$$
$$-\frac{11}{10}-\left(-\frac{5}{2}\right) \neq \frac{2}{5}-4$$
$$\frac{7}{5} \neq -\frac{18}{5}$$

como puede observar, la sustracción no es asociativa.
Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma,

por ejemplo $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}$ se puede escribir como $\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right)$ y $\frac{2}{3}+\left(-\frac{5}{4}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{7}{12}$."]}],

```
ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
Scrollbars → {False, True}]}],
Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
Button[TextCell["División", "Text"],
CreateDialog[{
Pane[Column[{
titlePopUp[
"Los números racionales y la división"],
textPopUp["En los números racionales,
la división es una manera diferente
de escribir una multiplicación. En
general, cuando se van a dividir dos
números racionales, se tiene que:
```

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\,d}{b\,c}$$

es decir, en lugar de dividir se multiplica por el recíproco del divisor.
Es así como todas las divisiones se pueden expresar como multiplicación de racionales, por ejemplo

$$7\div 3=7\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$ "]

```
}], ImageSize →
```

```
                    {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
                     True}]}, Background → White, Deployed → True],
                ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
           }], "Multimedia"]
          , Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}],
    4 → Pane[Grid[{{Manipulate[
          Graphics[{AbsolutePointSize[6],
            Orange, Point[Table[{Pi * i, 0.2}, {i, -3, 3, 1}]],
            Green, Point[Table[{√2 * i, 0.2}, {i, -6, 6, 1}]],
            Purple, Point[Table[{e * i, 0.2}, {i, -3, 3, 1}]],
            Blue, Point[Table[{√3 * i, 0.2}, {i, -5, 5, 1}]],
            AbsolutePointSize[7], White, Point[{{0, 0.2}}],
            Red, AbsolutePointSize[10], Point[{{rati[pos[[1]]], 0}}]},
           Axes → {True, False},
           AxesStyle → Directive[Thickness[0.003], Arrowheads[0.02]],
           AxesLabel → {I, {}},
           LabelStyle → Directive[15],
           AspectRatio → Automatic,
           PlotRange → {{-10, 11}, {-0.01, 0.01}},
           Ticks → {Range[-10, 10, 10 / 5], {}},
           TicksStyle → Directive[Thickness[0.006]],
           PlotLabel → Pane[Style[ToString[
               Row[{"Algunos irracionales:                    ",
                 If[Abs[pos[[1]]] <= 0.2, "",
                  If[Abs[int[pos[[1]], Pi] - pos[[1]] / Pi] ≤ 0.05,
                   int[pos[[1]], Pi] * Pi, If[Abs[int[pos[[1]], √2] -
                        pos[[1]] / √2] ≤ 0.05, int[pos[[1]], √2] * √2,
                    If[Abs[int[pos[[1]], √3] - pos[[1]] / √3] ≤
```

```
0.05, int[pos[[1]], √3] * √3,
If[Abs[int[pos[[1]], ⅇ] - pos[[1]] / ⅇ] ≤
  0.05, int[pos[[1]], ⅇ] * ⅇ, ""]]]]] }],
TraditionalForm], Red, 18], ImageSize → {350, 50},
Alignment → Center, ImageSizeAction → "ShrinkToFit"],
ImageSize → {720, 80}],
{{pos, {0, 0}},
 ControlType → Locator, Appearance → Graphics[]},
SaveDefinitions → True]},
{framePane["Números que no se pueden expresarr mediante la
    razón de números enteros, como por ejemplo
    π (relación entre una circunferencia
    y su diámetro) o ⅇ (número de Euler
    utilizado frecuentemente en problemas
    de crecimiento y financieros).
Se caracterizan por tener cola decimal infinita y no periódica y su
    conjunto se representa con la letra 𝕀."]},
{Item[
  TextCell[
   Row[{"Operaciones con los números irracionales ⇒", "   ",
     Grid[{{MouseAppearance[Button[TextCell[
          " ( 𝕀 , + )", "Text"],
         CreateDialog[{
           Pane[Column[{
              titlePopUp[
               "Los números irracionales y la adición"],
              textPopUp["La operación de la adición
                 en los números irracionales no es
                 cerrada, ya que no siempre dan como
                 resultado un número irracional.
```

```
                                Por ejemplo, al sumar 3 √2 con
                                -3 √2 da como resultado 0 y 0 ∉ 𝕀.
Para sumar números irracionales se tienen en cuenta los términos
                                semejantes, es decir, solo se
                                operan los términos que tengan el
                                mismo irracional, por ejemplo, al
                                simplificar la siguiente expresión:
                                3 √5 - π + 4 √5 - 7 π + 2, se obtiene
                                como resultado, 7 √5 - 8 π + 2."]}],
                           ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
                           Scrollbars → {False, True}]},
                         Background → White, Deployed → True],
                        ImageSize → All], "LinkHand"], MouseAppearance[
                       Button[TextCell[" ( 𝕀 , · )", "Text"],
                        CreateDialog[{
                          Pane[Column[{
                             titlePopUp["Los números irracionales
                                y la multiplicación"],
                             textPopUp["La operación de la
                                multiplicación en los números
                                irracionales no es cerrada, ya que no
                                siempre dan como resultado un número
                                irracional. Por ejemplo, al multiplicar
                                3 √2 con -3 √2 da como resultado
                                -9 √4 = -9 (2) = -18 y -18 ∉ 𝕀.
Al multiplicar números irracionales, se realizan las multiplicaciones
                                posibles, las otras se quedan
                                indicadas, por ejemplo,
                                al realizar la operación
                                (π - 3 √2) (√2 - 4 + 2 π) se tiene:
```

$$\left(\pi - 3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 4 + 2\pi\right) = \sqrt{2}\,\pi - 4\pi + 2\pi^2 - 3\left(\sqrt{2}\right)^2 + 12\sqrt{2} - 6\pi\sqrt{2}$$
$$= -5\pi\sqrt{2} - 4\pi + 2\pi^2 - 3\,(2) + 12\sqrt{2}$$
$$= -5\pi\sqrt{2} - 4\pi + 2\pi^2 - 6 + 12\sqrt{2}$$

```
"]
}], ImageSize →
{panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
True}]}, Background → White, Deployed → True],
ImageSize → All], "LinkHand"]}}]
}], "Multimedia"]
, Alignment → Right]}}], ImageSize → {790, Automatic}]},
Dynamic[page1]], FrameMargins → 1,
FrameStyle → GrayLevel[.7], ImageMargins → {{1, 1}, {0, 0}}]}},
Alignment → {Center, Top}], ImageSize → {800, Automatic}]]
```

ℕ Números Naturales	ℤ Números Enteros	ℚ Números Racionales	𝕀 Números Irracionales

Números que no se pueden expresarr mediante la razón de números enteros, como por ejemplo π (relación entre una circunferencia y su diámetro) o e (número de Euler utilizado frecuentemente en problemas de crecimiento y financieros).
Se caracterizan por tener cola decimal infinita y no periódica y su conjunto se representa con la letra $\mathbb{I}$.

Operaciones con los números irracionales ⇒ $(\mathbb{I}, +)$ $(\mathbb{I}, \cdot)$

Números Reales

» *Los números reales*

El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y del conjunto de números irracionales ($\mathbb{I}$), en este conjunto se definen las operaciones de la adición y multiplicación junto con sus propiedades. Se representa con la letra $\mathbb{R}$.

» *Los números reales y la adición*

En los números reales se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la adición. Estas son:

Clausurativa: la adición de cualquier par de números reales es un número real.

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \text{ entonces } a + b = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Conmutativa: no importa el orden como se adicionen dos números reales, el resultado es el mismo.

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \text{ entonces } a + b = b + a$$

Existencia de elemento neutro: en la adición de números reales el número cero (0) es *neutro*: cero sumado a cualquier número da el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ entonces } a + 0 = 0 + a = a$$

Existencia de elemento opuesto: *para* todo número real existe un opuesto tal que su suma es cero.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } -a \text{ tal que } a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo.

Si a, b y c $\in \mathbb{R}$ entonces $(a+b)+c = a+(b+c) = (a+c)+b$

Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es una adición escrita de manera diferente

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℝ , + )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
       titlePopUp["Los números reales y la adición"],
       textPopUp[
        "En los números reales se cumplen ciertas propiedades aritméticas que
          permiten realizar operaciones como la adición. Estas son:
Clausurativa: la adición de cualquier par de números reales es un número real.
                        Si a y b ∈ ℝ entonces a + b = c, c ∈ ℝ
Conmutativa: no importa el orden como se adicionen
          dos números reales, el resultado es el mismo.
                          Si a y b ∈ ℝ entonces a + b = b + a
Existencia de elemento neutro: en la adición de números
          reales el número cero (0) es neutro: cero
          sumado a cualquier número da el mismo número.
                          Si a ∈ ℝ entonces a + 0 = 0 + a = a
Existencia de elemento opuesto: para todo número real
          existe un opuesto tal que su suma es cero.
           Si a ∈ ℝ entonces existe -a tal que a + (-a) = (-a) + a = 0
Asociativa: no importa el orden como se agrupen
          los elementos, el resultado es el mismo.
           Si a, b y c ∈ ℝ entonces (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b
Recuerde: la sustracción no es una operación, solo es
          una adición escrita de manera diferente"]}],
     ImageSize → {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False, True}]},
   Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

(ℝ , +)

» *Los números reales y la sustracción*

Ya se mencionó con anticipación que la sustracción es una adición de un número con el opuesto de otro número, sin embargo, es necesario recalcar que la sustracción no es conmutativa ni asociativa en ningún conjunto numérico. Observe los siguientes ejemplos:

$$5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \neq 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2} \neq -2\sqrt{2}$$

como puede observar, la sustracción no es conmutable.

$$(2\pi - 3) - (-3\pi) \neq 2\pi - (3 - (-3\pi))$$
$$2\pi - 3 + 3\pi \neq 2\pi - 3 - 3\pi$$
$$5\pi - 3 \neq -\pi - 3$$

como puede observar, la sustracción no es asociativa.

Si se desea aplicar estas propiedades se debe escribir como una suma, por ejemplo $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ se puede escribir como $5\sqrt{2} + \left(-3\sqrt{2}\right)$ y $5\sqrt{2} + \left(-3\sqrt{2}\right) = -3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

» *Los números reales y la multiplicación*

En los números reales se cumplen ciertas propiedades aritméticas que permiten realizar operaciones como la multiplicación. Estas son:

Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números reales es un número real.

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \text{ entonces } a\,b = c,\ \ c \in \mathbb{R}$$

Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen dos números reales, el resultado es el mismo.

$$\text{Si } a \text{ y } b \in \mathbb{R} \text{ entonces } a\,b = b\,a$$

Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números reales el número uno (1) es *neutro*: uno multiplicado por cualquier número da el mismo número.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ entonces } a\,1 = 1\,a = a$$

Existencia de elemento inverso: *para* todo número real existe un *opuesto* tal que la su multiplicación es uno.

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \text{ entonces existe } \tfrac{1}{a} \text{ tal que } a\left(\tfrac{1}{a}\right) = \left(\tfrac{1}{a}\right)a = 1$$

Asociativa: no importa el orden como se agrupen los elementos, el resultado es el mismo

$$\text{Si } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ entonces } (a\,b)\,c = a\,(b\,c) = (a\,c)\,b$$

Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación resulta una nueva propiedad llamada propiedad ***distributiva de la multiplicación con respecto a la adición: en*** una multiplicación en la cual un factor es la suma (o resta) de dos o más términos se puede distribuir las multiplicaciones

$$\text{Si } a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ entonces } a(b + c) = a\,b + a\,c$$

```
MouseAppearance[Button[TextCell[" ( ℝ , · )", "Text"],
  CreateDialog[{
    Pane[Column[{
        titlePopUp["Los números reales y la multiplicación"],
        textPopUp["En los números reales se cumplen ciertas
           propiedades aritméticas que permiten realizar
           operaciones como la multiplicación. Estas son:
Clausurativa: la multiplicación de cualquier par de números
           reales es un número real.
                       Si a y b ∈ ℝ entonces a b = c, c ∈ ℝ
Conmutativa: no importa el orden como se multipliquen
           dos números reales, el resultado es el mismo.
                         Si a y b ∈ ℝ entonces a b = b a
Existencia de elemento neutro: en la multiplicación de números reales
           el número uno (1) es neutro: uno multiplicado
           por cualquier número da el mismo número.
                         Si a ∈ ℝ entonces a 1 = 1 a = a
Existencia de elemento inverso: para todo número real existe
           un opuesto tal que la su multiplicación es uno.
                  Si a ∈ ℝ entonces existe 1/a tal que a (1/a) = (1/a) a = 1
Asociativa: no importa el orden como se
           agrupen los elementos, el resultado es el mismo
                   Si a, b y c ∈ ℝ entonces (a b) c = a (b c) = (a c) b
Distributiva: al combinar las operaciones adición y multiplicación
           resulta una nueva propiedad llamada propiedad
           distributiva de la multiplicación con respecto
           a la adición: en una multiplicación en la cual
           un factor es la suma (o resta) de dos o más
           términos se puede distribuir las multiplicaciones
                      Si a, b y c ∈ ℝ entonces a (b + c) = a b + a c                 "]
          }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
     Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],
  ImageSize → All], "LinkHand"]
```

$(\mathbb{R}, \cdot)$

» *Los números reales y la división*

En los números reales (al igual que en los racionales), la división es una manera diferente de escribir una multiplicación. En general, cuando se van a dividir dos números reales se sigue la siguiente regla: que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

es decir, en lugar de dividir se multiplica por el recíproco del divisor.

Es así como todas las divisiones se pueden expresar como multiplicación de racionales, por ejemplo

$$7 \div \sqrt{3} = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$