Unidad 1

Conjuntos numéricos

1. Números naturales

Un poco de historia...

En la antigüedad, la necesidad del hombre de responder a la pregunta *¿cuántos hay*?, lo lleva a los orígenes de la matemática, tanto de la aritmética como de la geometría. Si bien la respuesta es un número, el que da solución a esta inquietud se llama un número natural, ya que permite contar y así responder a la pregunta "¿cuántos hay?".
Históricamente, la población establecida hace unos 20.000 años a orillas del lago Ishango pudo haber sido una de las primeras sociedades en hacer conteos, según las marcas que se encontraron en un hueso hallado hacia el año 1960. Otra civilización que escribía en forma cuneiforme, usando una aguja laminada, dejando huellas sobre una tabla de arcilla suave, eran los babilonios, quienes empleaban un sistema sexagesimal posicional adaptado de los sumerios, los hallazgos de esta cultura se remontan alrededor de 1900 a.C. Si se continúa revisando, los egipcios, los griegos, los chinos, los mayas, los incas, cada uno adoptaron una forma de contar, con diferentes tipos de representación pero que significaban el mismo número.

Fueron necesarios miles de años antes de que el hombre hiciera una abstracción del concepto de número y lo tradujera en la creación de los símbolos matemáticos que hoy se utilizan y que sirven para contar. A continuación, aparecen algunas actividades que permitirán dar uso a este conjunto numérico.

Situación: Sistema de transporte

El sistema de transporte integrado de cierta ciudad ofrece una tarjeta recargable con la cual se puede pagar; esta tarjeta está personalizada con el nombre e identificación del usuario y cuenta con los beneficios de descuentos por *transbordo*, *viaje a crédito* y *recuperación del saldo* en caso de pérdida. Los costos del servicio se describen en la siguiente imagen:

La tarifa por *transbordo* maneja una ventana de tiempo de un rango de 75 minutos y se mide a partir del momento en que se ingresa al sistema (solo por un pasaje). El costo del transbordo varía de acuerdo con la hora y el día, así:

El *viaje a crédito* consiste en que si no tiene carga en la tarjeta al momento de validar el pasaje dentro del bus, el sistema fiará el valor necesario hasta por un viaje. En la próxima recarga el sistema descontará el valor del viaje utilizado. En el siguiente simulador se describen los beneficios de la tarjeta; pruebe pagando algunos pasajes en diferentes horarios:

Problema 1

Juanito tiene una recarga en su tarjeta por un valor de $27,300 para viajar de lunes a domingo.

- De lunes a viernes, Juanito toma un bus a las 6:30 a.m. para la universidad y toma el bus de regreso a las 4:00 de la tarde.
- El sábado sale de compras, usando este sistema de transporte, a las 9:00 a.m. y regresando a las 5:00 de la tarde.
- El domingo, Juanito invita a su amiga Sandra a cine. Él paga ambos pasajes, tanto de ida como de regreso a casa.

⇒ *Al finalizar ese domingo, ¿con qué saldo termina la tarjeta "Tullave Plus"?*

Solución

La solución se verá en la siguiente tabla:

Horario	Pico/valle	Precio trayecto	Número de trayectos	Costo total
lunes a viernes (6:30 a.m)	pico	\$ 1800	5	\$ 9000
lunes a viernes (4:00 p.m)	valle	\$ 1500	5	\$ 7500
sábado *ida* (9:00 a.m)	valle	\$ 1500	1	\$ 1500
sábado *regreso* (5:00 p.m)	pico	\$ 1800	1	\$ 1800
domingo	valle	\$ 1500	4	\$ 6000
			TOTAL	\$ 25800

Para encontrar la recarga con la que finaliza el domingo la tarjeta, se encuentra la diferencia entre la recarga y el costo total de los pasajes, es decir
$27\,300 - 25\,800 = 1500$

La tarjeta “Tullave Plus” de Juanito queda con un saldo de $1,500. « Respuesta

Problema 2

El domingo, después de ir a cine, Juanito recarga la tarjeta, quedando un saldo de $31,500.

- Suponga que el recorrido de lunes a viernes, entre la universidad y la casa, continúa a la misma hora.
- El lunes olvidó llevar un material que debía entregar, así que a las 7:00 a.m. tomó el transporte para regresar a su casa (teniendo en cuenta que estaba en el rango de los 75 minutos del transbordo). Al intentar salir de casa, una fuerte lluvia lo impidió, por lo cual tuvo que tomar nuevamente el transporte a la universidad a las 9:45 de la mañana.
- El jueves, el concierto de Katy Perry, la nueva princesa del pop, lo hizo tomar el transporte hacia el parque deportivo a las 5:00 p.m, de tal manera que llegó a la casa y enseguida salió para el concierto. El regreso fue en taxi.
- El sábado no salió de casa, dedicó el día para organizarla.
- El domingo invitó a Sandra al parque El Salitre, por lo que era necesario movilizarse por el sistema de transporte. Salieron de la casa a las 10:20 a.m. y llegaron al parque a las 10:50 a.m., con tan mala suerte que el parque se encontraba ese día en mantenimiento y no había servicio. Decidieron regresar a casa y ver películas. Juanito pagó todos los pasajes con su tarjeta y Sandra le dio su parte en efectivo.

⇒ *El día que cargó la tarjeta, ¿de cuánto fue dicha recarga?*

Solución

Si la tarjeta tenía un saldo de $1,500 y al realizar la recarga quedó con $31,500 la recarga realizada se puede encontrar mediante la operación
$31\,500 - 1500 = 30\,000$

Por tanto, la recarga del domingo fue de $30,000. « Respuesta

⇒ *Al llegar a casa después de ir al parque el Salitre, ¿con qué saldo termina la tarjeta de Juanito?*

Solución

La solución se verá en la siguiente tabla:

Horario	Pico/valle	Precio trayecto	Número de trayectos	Costo total
lunes a viernes (6:30 a.m)	pico	$ 1800	5	$ 9000
lunes a viernes (4:00 p.m)	valle	$ 1500	5	$ 7500
lunes (7:00 a.m)	pico	$ 300	1	$ 300
lunes (9:45 a.m)	pico	$ 1800	1	$ 1800
jueves (5:00 p.m)	pico	$ 300	1	$ 300
domingo *ida* (10:20 a.m)	pico	$ 1500	2	$ 3000
domingo *regreso* (11:00 a.m)	valle	$ 1500	1	$ 1500
			TOTAL	$ 23400

Para encontrar la recarga con la que finaliza el domingo la tarjeta se encuentra la diferencia entre la recarga y el costo total de los pasajes, es decir
$31\,500 - 23\,400 = 8100$

La tarjeta de Juanito queda con un saldo de $8,100. « Respuesta

Resumen

Desde pequeños, cada uno de nosotros se ha encontrado inmerso dentro de un mundo en donde se habla de precios, cantidades, orden... en otras palabras, de números; razón por la cual su estudio se hace imprescindible dentro del área de la matemática.

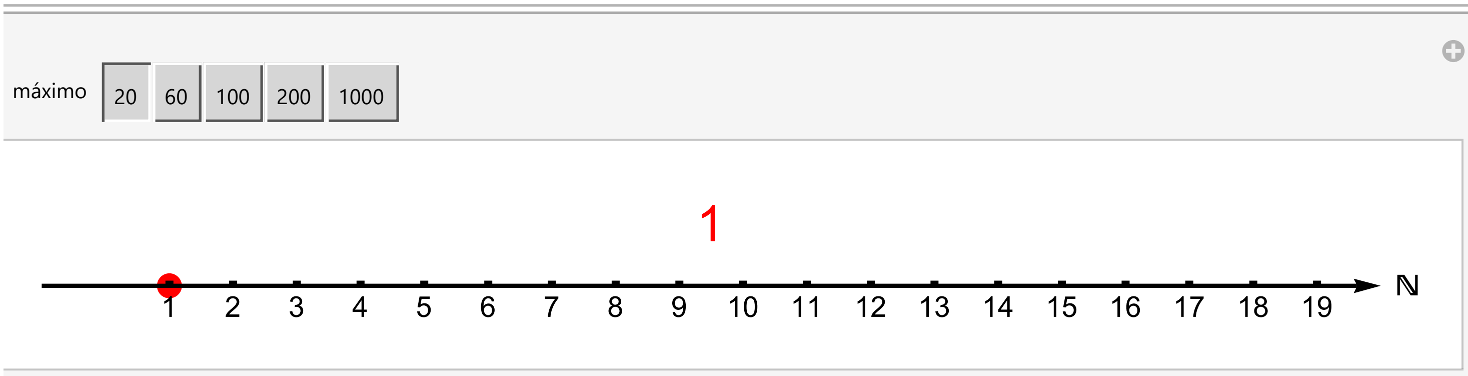
Aunque no hay seguridad de la forma como el hombre genera y utiliza el número natural, se hace necesario realizar las siguientes precisiones al respecto:

- Se establece una distinción entre uno y muchos.
- Al hablar de muchos, se crea la necesidad de establecer una correspondencia uno a uno entre esos muchos y un conjunto de igual cantidad de elementos, que se representa por medio de un número natural, en este caso, el número natural es un número cardinal. Por ejemplo, a una oveja le puede asignar el número 1, a dos ovejas el número 2 y así sucesivamente.
- Aparece la necesidad de registrar, ya sea por medio de rótulos o etiquetas, los elementos que tiene un conjunto, dando lugar al número natural, pero esta vez estableciendo un orden, es decir como número ordinal. Por ejemplo, primero, segundo, tercero, etc.
- Aparecen así los diferentes sistemas de numeración, según cada civilización; su representación permitía organizar aquellos números naturales y darles otros usos. En nuestro caso, se usa el sistema decimal de numeración, un sistema posicional y polinómico. Cuando se habla de posicional, se habla de unidades, decenas, centenas, etc., por ejemplo, el número 547 representa 7 unidades, 4 decenas y 5 centenas, en tanto que, cuando se habla de polinómico, quiere decir que cualquier número se puede escribir como una suma de cada una de sus cifras multiplicada por un múltiplo de 10, por ejemplo, 547 es igual a $5 \times 100 + 4 \times 10 + 7$.
- Finalmente, aparece la acción de conteo, como una secuencia ordenada de la correspondencia uno a uno que se establece entre los elementos de dos conjuntos, donde el último elemento es el que nombra la cantidad de elementos del conjunto, por ejemplo, si en un conjunto hay 14 ovejas, el número que representa ese conjunto es el natural 14.

Con lo escrito anteriormente, los números que se utilizan para contar o representar una cantidad se denominan números naturales. En los problemas anteriores, se utilizaron para representar cantidades que aumentaban o disminuían de acuerdo con diferentes circunstancias (como pagar un pasaje o recargar una tarjeta).

A diario, cada uno de nosotros está expuesto a una gran cantidad de problemas y algunos de ellos se pueden resolver mediante operaciones o algoritmos matemáticos. El conjunto de los números naturales constituye un conjunto cerrado para las operaciones de adición y multiplicación: esto significa que al operar cualquiera de sus elementos, el resultado es un número natural (la sustracción y la división no son operaciones en este conjunto por que no siempre se pueden realizar). Ambas operaciones, la adición y la multiplicación, cumplen las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

ℕ Números Naturales



Los *números naturales* son aquellos que se utilizan para *contar*, el conjunto de todos los números naturales se denota por ℕ y son:
ℕ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...}

Operaciones con los números naturales ⇒ (ℕ , +) (ℕ , ·) Sustracción División

Resumen de operaciones en números naturales (Video)

Multimedia

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios numéricos

1. Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones

1.1. $2 + 3\{8 - 2(4 - 3)2 - 2\}2 - 1$

1.2. $12 - 3\{8 - 2(4 - 2)2 - 1\}2 - 3$

1.3. $13 \div 4 + 2 - 1 \cdot 3$

1.4. $6 + 24 \div 2 - 3 \cdot 2$

1.5. $24 - 2\{6 - 4 \div 2\}2 - 1$

1.6. $3 + 5\{30 - 6(4 - 2)2\}2 + 1$

1.7. $15 + 5 \div 5 - 4 \times 2$

1.8. $18 \div 6 + 3 \cdot 4$

1.9. $18 \div (6 + 3) \cdot 4$

1.10. $18 \div (6 + 3 \cdot 4)$

1.11. $(18 \div 6 + 3) \cdot 4$

1.12. $8 \cdot 3 + 5 - 32 \div (8 + 8)$

1.13. $8 \cdot (3 + 5) - 32 \div (8 + 8)$

1.14. $8 \cdot 3 + 5 - 32 \div 8 + 8$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones

1.1. $2 + 3\{8 - 2(4 - 3)2 - 2\}2 - 1$

$$\begin{aligned} 2 + 3\{8 - 2(4 - 3)2 - 2\}2 - 1 &= 2 + 3\{8 - 2(1)2 - 2\}2 - 1 \\ &= 2 + 3\{8 - 4 - 2\}2 - 1 \\ &= 2 + 3\{2\}2 - 1 \\ &= 2 + 12 - 1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

1.2. $12 - 3\{8 - 2(4 - 2)2 + 1\}2 - 3$

$$\begin{aligned} 12 - 3\{8 - 2(4 - 2)2 + 1\}2 - 3 &= 12 - 3\{8 - 2(2)2 + 1\}2 - 3 \\ &= 12 - 3\{8 - 8 + 1\}2 - 3 \\ &= 12 - 3\{1\}2 - 3 \\ &= 12 - 6 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

1.3. $12 \div 4 + 2 - 1 \cdot 3$

$$\begin{aligned} 12 \div 4 + 2 - 1 \cdot 3 &= 3 + 2 - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

1.4. $6 + 24 \div 2 - 3 \cdot 2$

$$\begin{aligned} 6 + 24 \div 2 - 3 \cdot 2 &= 6 + 12 - 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

1.5. $24 - 2\{6 - 4 \div 2\}2 - 1$

$$\begin{aligned} 24 - 2\{6 - 4 \div 2\}2 - 1 &= 24 - 2\{6 - 2\}2 - 1 \\ &= 24 - 2\{4\}2 - 1 \\ &= 24 - 16 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

1.6. $3 + 5\{30 - 6(4 - 2)2\}2 + 1$

$$\begin{aligned} 3 + 5\{30 - 6(4 - 2)2\}2 + 1 &= 3 + 5\{30 - 6(2)2\}2 + 1 \\ &= 3 + 5\{30 - 24\}2 + 1 \\ &= 3 + 5\{6\}2 + 1 \\ &= 3 + 60 + 1 \\ &= 64 \end{aligned}$$

1.7. $15 + 5 \div 5 - 4 \times 2$

$$\begin{aligned} 15 + 5 \div 5 - 4 \times 2 &= 15 + 5 \div 5 - 4 \times 2 \\ &= 15 + 1 - 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

1.8. $18 \div 6 + 3 \cdot 4$

$$\begin{aligned} 18 \div 6 + 3 \cdot 4 &= 3 + 12 \\ &= 15 \end{aligned}$$

1.9. $18 \div (6 + 3) \cdot 4$

$$\begin{aligned} 18 \div (6 + 3) \cdot 4 &= 18 \div 9 \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

1.10. $18 \div (6 + 3 \cdot 4)$

$$\begin{aligned} 18 \div (6 + 3 \cdot 4) &= 18 \div (6 + 12) \\ &= 18 \div 18 \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.11. $(18 \div 6 + 3) \cdot 4$

$$\begin{aligned} (18 \div 6 + 3) \cdot 4 &= (3 + 3) \cdot 4 \\ &= 6 \cdot 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

1.12. $8 \cdot 3 + 5 - 32 \div (8 + 8)$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3 + 5 - 32 \div (8 + 8) &= 24 + 5 - 32 \div 16 \\ &= 29 - 2 \\ &= 27 \end{aligned}$$

1.13. $8 \cdot (3 + 5) - 32 \div (8 + 8)$

$$\begin{aligned} 8 \cdot (3 + 5) - 32 \div (8 + 8) &= 8 \cdot 8 - 32 \div 16 \\ &= 64 - 2 \\ &= 62 \end{aligned}$$

1.14. $8 \cdot 3 + 5 - 32 \div 8 + 8$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3 + 5 - 32 \div 8 + 8 &= 24 + 5 - 4 + 8 \\ &= 33 \end{aligned}$$

» Problemas de aplicación

1. Carla hizo 4 bandejas de galletas (cada bandeja tiene 31 galletas). Mientras que se enfriaban, Carla salió al jardín a regar las flores. Ella ve a su hijo Tomás y sus amigos entrar corriendo a la casa y salir de nuevo al jardín con galletas en sus manos. Cuando ella vuelve a la cocina encuentra solo 7 galletas en una bandeja; ella se dispone a llevar leche para acompañar las galletas pero no sabe cuántos niños son. Si cada niño tomó el mismo número de galletas y ella sabe que hay entre 10 y 30 niños, ¿cuántos vasos de leche debe llevar?
2. Pedro destina $150,000 de su salario para hacer mercado. Cuando llega al almacén encuentra la siguiente lista de precios, de los artículos que va a comprar:

Artículo	Precio por unidad
Chocolate	\$3400
Arroz	\$1700
Azúcar	\$1600
Panela	\$1000
Jabón líquido para lavadora	\$12500
Crema dental	\$10800
Pan tajado	\$3450

Pedro quiere invertir lo que lleva de dinero en su totalidad. Él siempre lleva más de un artículo de los que quiere comprar. Puedes ayudarle a Pedro a decidir, ¿cuántos artículos de la lista puede comprar y que no le sobre dinero?

3. En la finca de Paco hay 750 animales entre gallinas, conejos y cabras. El número de conejos es 305 y el de gallinas es 105 más que los conejos.

3.1. ¿Cuántas cabras hay en la finca?

3.2. Si se venden 185 conejos, 207 gallinas y 10 cabras, ¿cuántos animales quedan en la finca?

4. Se quieren elaborar sándwiches de jamón y queso. Se compran 4 bolsas de pan tajado a \$4,350 cada una. Cada bolsa tiene 16 tajadas de pan. El jamón necesario para elaborar los sándwiches cuesta \$11,450 y el queso \$7,300. Si al vender todos los sándwiches se quiere obtener una ganancia de \$27,850, ¿cuál debe ser el precio de venta de cada sándwich?

5. En la población "PACHIA" hay 12144 habitantes. Allí se han sembrado 2 árboles por cada 46 habitantes.

5.1. ¿Cuántos árboles hay sembrados en la población "PACHIA"?

5.2. Si se quiere que haya 3 árboles sembrados por cada habitante, ¿cuántos árboles más se deben sembrar?

6. El centro comercial "TAPIAO" consta de 4 niveles de estacionamiento. En el primer nivel se pueden estacionar 84 vehículos. En cada uno de los siguientes niveles, se pueden estacionar el doble del anterior. ¿Qué capacidad de estacionamiento tiene este centro comercial?

7. Gladys vende cajas de chicles y las ordena dentro de una vitrina, formando una torre que tiene de base 6 x 6 cajas y de altura 7 cajas. ¿Cuántas cajas de chicles tiene Gladys para la venta?

8. La pastelería "JULITA" vende tortas de chocolate a \$2350 cada porción. Si de cada torta salen 8 porciones y vende 4 tortas durante el día, ¿cuánto recauda la pastelería por este concepto durante 3 días?

» *Solución a los problemas de aplicación*

1. Carla hizo 4 bandejas de galletas (cada bandeja tiene 31 galletas). Mientras que se enfriaban, Carla salió al jardín a regar las flores. Ella ve a su hijo Tomás y sus amigos entrar corriendo a la casa y salir de nuevo al jardín con galletas en sus manos. Cuando ella vuelve a la cocina encuentra solo 7 galletas en una bandeja; ella se dispone a llevar leche para acompañar las galletas pero no sabe cuántos niños son. Si cada niño tomó el mismo número de galletas y ella sabe que hay entre 10 y 30 niños, ¿cuántos vasos de leche debe llevar?

Carla hizo en total $31 \times 4 = 124$ galletas, como sobraron solamente 7, significa que los niños llevaron $124 - 7 = 117$ galletas.

Como se repartieron las galletas en partes iguales, es necesario encontrar los divisores de 117, los cuales son: 3, 9, 13 y 39.

Como se sabe que hay entre 10 y 30 niños, la respuesta es que hay 13 niños y cada uno tomó 9 galletas.

2. Pedro destina $150,000 de su salario para hacer mercado. Cuando llega al almacén encuentra la siguiente lista de precios, de los artículos que va a comprar:

Artículo	Precio por unidad
Chocolate	$3400
Arroz	$1700
Azúcar	$1600
Panela	$1000
Jabón líquido para lavadora	$12500
Crema dental	$10800
Pan tajado	$3450

Pedro quiere invertir lo que lleva de dinero en su totalidad. Él siempre lleva más de un artículo de los que quiere comprar. Puedes ayudarle a Pedro a decidir, ¿cuántos artículos de la lista puede comprar y que no le sobre dinero?

Una forma de solución sería encontrar el costo al comprar un solo artículo:
3400 + 1700 + 1600 + 1000 + 12 500 + 10 800 + 3450 = 34 450 pesos.

Dividiría el total entre este valor para saber cuántas veces puedo llevar un artículo: 150 000 / 34 450 = 4 veces exactas y sobra 12 200 pesos. Con estos $12,200 puede comprar 2 libras más de azúcar y 9 panelas más, por tanto:

Artículo	Precio por unidad		
Chocolate	$3400	4	$13600
Arroz	$1700	4	$6800
Azúcar	$1600	6	$9600
Panela	$1000	13	$13000
Jabón líquido para lavadora	$12500	4	$50000
Crema dental	$10800	4	$43200
Pan tajado	$3450	4	$13800
TOTAL A CANCELAR			$150000

Note que quizás esta no sea la mejor manera de comprar los productos (13 panelas y 6 libras de azucar quizás sea innecesario), pero es una respuesta válida a lo pedido en el problema.

3. En la finca de Paco hay 750 animales entre gallinas, conejos y cabras. El número de conejos es 305 y el de gallinas es 105 más que los conejos.

3.1. ¿Cuántas cabras hay en la finca?

Hay 305 conejos y 305 + 105 = 410 gallinas. Entre conejos y gallinas tiene 305 + 410 = 715. Como en total hay 750 animales, el resto, que son 35, son cabras.

3.2. Si se venden 185 conejos, 207 gallinas y 10 cabras, ¿cuántos animales quedan en la finca?

Conejos: 305 – 185 = 120,
Gallinas: 410 – 207 = 203,
Cabras: 35 – 10 = 25.

En total quedan 120 + 203 + 25 = 348 animales en la granaja.

4. Se quieren elaborar sándwiches de jamón y queso. Se compran 4 bolsas de pan tajado a $4,350 cada una. Cada bolsa tiene 16 tajadas de pan. El jamón necesario para elaborar los sándwiches cuesta $11,450 y el queso $7,300. Si al vender todos los sándwiches se quiere obtener una ganancia de $27,850, ¿cuál debe ser el precio de venta de cada sándwich?

Primero, se realizarán los cálculos de la cantidad de dinero gastada en la compra:
pan tajado: $4 \cdot 4350 = 17\,400$,
jamón: 11 450
queso: 7300,
total de la compra: 36 150.
Segundo, se realizará el cálculo de la cantidad de sándwiches que se elaborarán:
Cada bolsa tiene 16 tajadas de pan, es decir, de cada bolsa salen 8 sándwiches. Como son 4 bolsas, en total salen $4 \cdot 8 = 32$ sándwiches.
Finalmente, para saber el precio de venta de cada sándwiches, al total de la compra se le adiciona lo que quiere ganar y se divide por el número de sándwich que se prepararán, es decir, $36\,150 + 27\,850 = 64\,000$ cantidad de dinero que debe ingresar.
$64\,000 \div 32 = 2000$ precio de cada sándwich.

5. En la población "PACHIA" hay 12144 habitantes. Allí se han sembrado 2 árboles por cada 46 habitantes.

5.1. ¿Cuántos árboles hay sembrados en la población "PACHIA"?

Si se siembran dos árboles por cada 46 habitantes, significa que siembra un árbol por cada 23 habitantes. Para conocer el número de árboles que hay se debe dividir el número de habitantes entre 23, es decir:
$12\,144 \div 23 = 528$ árboles hay sembrados en la población "PACHIA".

5.2. Si se quiere que haya 3 árboles sembrados por cada habitante, ¿cuántos árboles más se deben sembrar?

Para que cada habitante tenga 3 árboles, se debe multiplicar el total de la población por 3, es decir:
$12\,144 \cdot 3 = 36432$ árboles.
Como ya se han sembrado 528 árboles, la cantidad de árboles que faltan por sembrar son:
$36\,432 - 528 = 35\,904$ árboles.

6. El centro comercial "TAPIAO" consta de 4 niveles de estacionamiento. En el primer nivel se pueden estacionar 84 vehículos. En cada uno de los siguientes niveles, se pueden estacionar el doble del anterior. ¿Qué capacidad de estacionamiento tiene este centro comercial?

Nivel 1: 84 vehículos,
nivel 2: 168 vehículos,
nivel 3: 336 vehículos,
nivel 4: 672 vehículos,

total estacionamientos: $84 + 168 + 336 + 672 = 1260$ vehículos

7. Gladys vende cajas de chicles y las ordena dentro de una vitrina, formando una torre que tiene de base 6 x 6 cajas y de altura 7 cajas. ¿Cuántas cajas de chicles tiene Gladys para la venta?

En la base hay $6 \cdot 6 = 36$ cajas. Como se repite 7 veces la base para formar la altura, hay $36 \cdot 7 = 252$ cajas de chicles para la venta.

8. La pastelería "JULITA" vende tortas de chocolate a $2,350 cada porción. Si de cada torta salen 8 porciones y vende 4 tortas durante el día, ¿cuánto recauda la pastelería por este concepto durante 3 días?

El número de porciones que vende cada día son $8 \cdot 4 = 32$ porciones.
En tres días vende $32 \cdot 3 = 96$ porciones.
El recaudo de esas 96 porciones es $96 \cdot 2350 = 225\,600$ pesos

2. Números enteros

Un poco de historia…

El conjunto de los números enteros está constituido por el conjunto de los números naturales, el cero y sus *opuestos*. Ese opuesto de cada natural es llamado un *número negativo*.

Históricamente, los hindúes introdujeron los números negativos para representar deudas, así los positivos representaban los haberes. Brahmagupta, hacia el año 628, es el primero en usar este tipo de números, estableciendo reglas para las operaciones entre ellos, sin embargo, a pesar de haber llegado a Europa a través de los textos árabes, la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII no los aceptaban como números; solo hacia 1860, el matemático Weierstrass definió y aceptó los negativos como números.

A continuación aparecen algunas actividades en las que se necesita el uso de números enteros.

Para el desarrollo de los siguientes problemas, se deben tener en cuenta los costos del servicio del sistema integrado de transporte y los diferentes beneficios explicados en la actividad anterior.

Problema 1

Recuerde que en el último problema de la unidad anterior, Juanito llegó el domingo del parque el Salitre.

Para la siguiente semana, Juanito olvidó recargar la tarjeta. El lunes en la mañana, cuando se subió al bus, al marcar el pasaje se dio cuenta que el saldo que le quedaba era de $6,300. Al sentarse se puso a pensar hasta cuando podría viajar sin recargar la tarjeta.

⇒ *¿Hasta qué día en la semana podrá viajar Juanito antes de hacer otra recarga, suponiendo que de lunes a viernes solo realiza los dos trayectos cotidianos (a las 6:30 a.m. casa - universidad y a las 4:00 p.m. universidad - casa)?*

Solución

La solución se verá en la siguiente tabla:

Horario	Pico/valle	Precio trayecto	Costo acumulado
lunes (6:30 a.m)	pico	$ 1800	$ 1800
lunes (4:00 p.m)	valle	$ 1500	$ 3300
martes (6:30 a.m)	pico	$ 1800	$ 5100
martes (4:00 p.m)	valle	$ 1500	$ 6600
miércoles (6:30 a.m)	pico	$ 1800	$ 8400
		TOTAL	$ 8400

Hasta el miércoles en la mañana, el costo de los pasajes es de $8,400. Lo que implica un saldo en la tarjeta de ***-$300***. El sistema le fiará el valor necesario hasta por un viaje, por lo que si no recarga la tarjeta, no podrá viajar el miércoles en la tarde de regreso a casa.

« Respuesta

Problema 2

⇒ *¿Cuál es el saldo final de la tarjeta antes de tener que recargarla?*

Solución

En el problema anterior se llegó a la conclusión que el saldo es de ***-$300***.

≪ Respuesta

Problema 3

Juanito decide no recargar la tarjeta por el resto de la semana y por tanto, viajará en bus los días siguientes y pagará en efectivo.

El domingo en la noche, Juanito sale a recargar la tarjeta, pero esta vez quiere realizar una recarga de tal manera que la pueda utilizar hasta el ***viernes*** en el trayecto de regreso (universidad - casa) y que la tarjeta quede con un saldo de ***-$1,000***.

¿de cuánto debe ser la recarga?

Solución

Cada día Juanito gasta $3300 en el viaje de ida y regreso. De lunes a viernes, como son 5 días, gasta 3300 x5 = 16 500.

Como la tarjeta tiene un saldo de ***-$300***, para quedar en cero, debe recargar $16 800. Como se quiere que quede un saldo de ***-$1,000***, entonces solo debe cargar con $15,800.

Juanito debe recargar la tarjeta con $15,800.

≪ Respuesta

Resumen

Las matemáticas, consideradas como una ciencia natural hasta antes del siglo XVIII, deja de serlo y se convierte en una creación intelectual del hombre y en una disciplina que necesita empezar a teorizar ciertos conceptos como el de *número negativo,* el cual se considera como el opuesto del número positivo.

El conjunto de números enteros se construye a partir de la unión del conjunto de los números naturales, el cero, considerado un punto de origen o punto neutro y los números opuestos a los naturales, llamados enteros negativos. Este conjunto se representa con la letra $\mathbb{Z}$.

Los enteros negativos aparecen en la vida cotidiana sin que se, noten porque no siempre se expresan con el signo negativo, como las respuestas dadas en los anteriores problemas; algunas veces, el simple hecho de utilizar frases como "el elevador está en el sótano 2", "hoy se pronostica una temperatura de doce grados bajo cero" o "el saldo de mi tarjeta de crédito es de un millón de pesos", representan cantidades negativas en diferentes contextos, ya que al representar las cantidades involucradas en cada frase, en lenguaje matemático, se tienen que escribir como, "-2", "-12" o "$-1\,000\,000$", respectivamente.

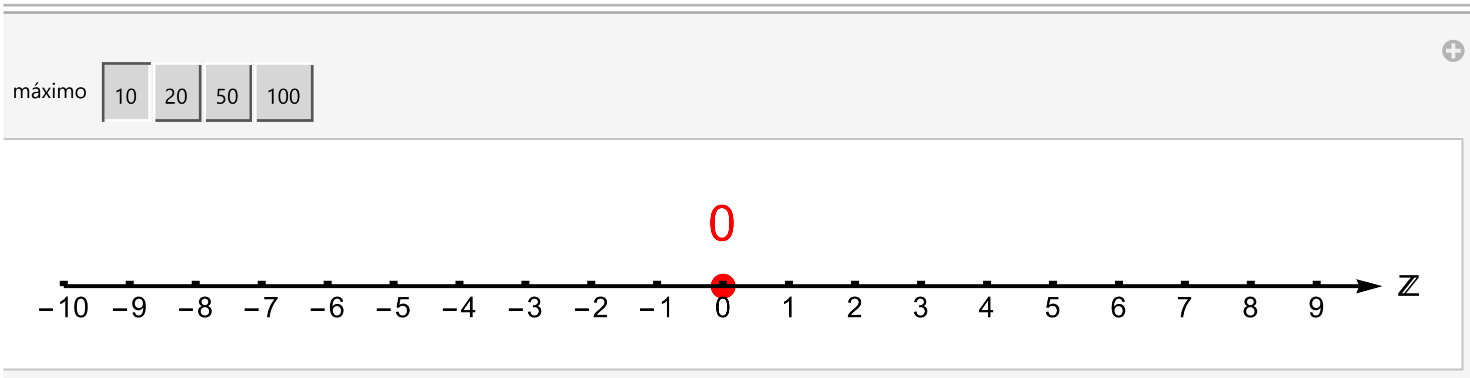
En el conjunto de los números naturales, tal y como se vio anteriormente, la sustracción solo se podía realizar si el minuendo era mayor que el sustraendo. Dentro del conjunto de los enteros, el caso contrario tiene solución; por ejemplo, la operación $8-16$ tiene como resultado un número entero. Tal y como se ve a continuación, la sustracción es solo una adición escrita de manera diferente, observe:

$$\begin{aligned} 8-16 &= 8+(-16) \\ &= -8 \end{aligned}$$

En otras palabras, la sustracción es considerada una adición de un número con un entero negativo, luego ya no se habla de sustracción sino solo de la operación de adición.

El conjunto de los números enteros cumple las mismas propiedades de los números naturales, con respecto a la adición y a la multiplicación.

ℕ Números Naturales | ℤ Números Enteros



El conjunto de los números enteros es una extensión del conjunto de los números naturales. Este conjunto está conformado por el conjunto de los números naturales, el cero (considerado como un punto de referencia o punto de origen) y los opuestos de los naturales (enteros negativos). Los números enteros se representan con la letra $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}=\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Operaciones con los números enteros ⇒ $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ Sustracción División

Resumen de operaciones en números enteros

Multimedia

Es infortunado que usemos el símbolo "-" para indicar dos situaciones totalmente diferentes: el *signo negativo u opuesto de un número* (por ejemplo -3) y *la sustracción de un par de números* (por ejemplo $51-45$), esto naturalmente debe resultar confuso, y más aún cuando se tienen operaciones con ambas situaciones, como $51-(-34)$.

Afortunadamente es nuestra naturaleza aprender a superar cualquier tipo de situaciones, y aseguramos que con algo de práctica, la lectura y escritura de números enteros se dará de manera natural; eso sí, es necesario practicar y resolver situaciones que involucren operaciones de este tipo, escribir pausadamente el desarrollo y la respuesta. Es por eso que se tienen ejercicios numéricos, pues el desarrollo de estos permitirá más adelante resolver problemas de mayor nivel.

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios numéricos

1. Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones

1.1. $-6+3\{-5-4\div(-2)\}\,2-3$

1.2. $(-6+3)\{-5-4\div(-2)\}\,2-3$

1.3. $(-6+3)-5\{-4\div(-2)\}\,2-3$

1.4. $-6+3\{(-5-4)\div(-3)\}\,2-3$

1.5. $-6+3\{-5-4\div(-2)\}\,(2-3)$

1.6. $-3-8\{2-5\,(3-4)\,2\}\,2-2$

1.7. $-2+3\div(-1)+4\times(-2)$

1.8. $2-3\{5-6\,(2-4)\,3+6\div(-3)\}$

1.9. $(4\;-\;5\div(-1))\,3-2$

1.10. $(3-4)\,(-2\div 2+3)\,4-1$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones

1.1. $-6+3\{-5-4\div(-2)\}\,2-3$

$$\begin{aligned}-6+3\{-5-4\div(-2)\}\,2-3 &= -6+3\{-5+2\}\,2-3\\ &= -6+3\{-3\}\,2-3\\ &= -6-18-3\\ &= -27\end{aligned}$$

1.2. $(-6+3)\{-5-4\div(-2)\}\,2-3$

$$\begin{aligned}(-6+3)\{-5-4\div(-2)\}\,2-3 &= (-3)\{-5+2\}\,2-3\\ &= (-3)\{-3\}\,2-3\\ &= 18-3\\ &= 15\end{aligned}$$

1.3. $(-6+3)-5\{-4\div(-2)\}\,2-3$

$$\begin{aligned}(-6+3)-5\{-4\div(-2)\}\,2-3 &= -3-5\{2\}\,2-3\\ &= -3-20-3\\ &= -26\end{aligned}$$

1.4. $-6+3\{(-5-4)\div(-3)\}\,2-3$

$$\begin{aligned}-6+3\{(-5-4)\div(-3)\}\,2-3 &= -6+3\{(-9)\div(-3)\}\,2-3\\ &= -6+3\{3\}\,2-3\\ &= -6+18-3\\ &= 9\end{aligned}$$

1.5. $-6+3\{-5-4\div(-2)\}\,(2-3)$

$$\begin{aligned}-6+3\{-5-4\div(-2)\}\,(2-3) &= -6+3\{-5+2\}\,(-1)\\ &= -6+3\{-3\}\,(-1)\\ &= -6+9\\ &= 3\end{aligned}$$

1.6. $-3-8\{2-5\,(3-4)\,2\}\,2-2$

$$
\begin{aligned}
-3-8\{2-5(3-4)2\}2-2 &= -3-8\{2-5(-1)2\}2-2\\
&= -3-8\{2+10\}2-2\\
&= -3-8\{12\}2-2\\
&= -3-192-2\\
&= -197
\end{aligned}
$$

1.7. $-2+3\div(-1)+4\times(-2)$

$$
\begin{aligned}
-2+3\div(-1)+4\times(-2) &= -2-3-8\\
&= -13
\end{aligned}
$$

1.8. $2-3\{5-6(2-4)3+6\div(-3)\}$

$$
\begin{aligned}
2-3\{5-6(2-4)3+6\div(-3)\} &= 2-3\{5-6(-2)3-2\}\\
&= 2-3\{5+36-2\}\\
&= 2-3\{39\}\\
&= 2-117\\
&= -115
\end{aligned}
$$

1.9. $(4-5\div(-1))3-2$

$$
\begin{aligned}
(4-5\div(-1))3-2 &= (4+5)3-2\\
&= (9)3-2\\
&= 27-2\\
&= 25
\end{aligned}
$$

1.10. $(3-4)(-2\div 2+3)4-1$

$$
\begin{aligned}
(3-4)(-2\div 2+3)4-1 &= (-1)(-1+3)4-1\\
&= (-1)(2)4-1\\
&= -8-1\\
&= -9
\end{aligned}
$$

» Problemas de aplicación

1. En un tanque hay 728 litros de agua. Por la parte superior, una llave vierte agua 33 litros por minuto al tanque, en tanto que por la parte inferior, por un tubo salen 47 litros por minuto.

1.1. ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque, después de una hora?

1.2. ¿Cuánto tardará en desocuparse el tanque?

1.3. Si se quiere que el tanque nunca se desocupe, ¿cómo modificaría el problema?

2. Pedro tiene \$30,000, Lucía tiene \$28,000 más que el doble de lo que tiene Pedro; José tiene la mitad de lo que tienen Pedro y Lucía juntos. Entre los tres quieren comprar un regalo a sus padres que tiene un costo de \$200,000, ¿les alcanza? En caso afirmativo, ¿cuánto les sobra?, en caso negativo, ¿cuánto les falta?.

3. María compró a crédito un vestido que le costó \$427,000. Realizó un primer abono de \$140,000 a los quince días. En la siguiente quincena abonó \$53,000 y a los otros quince días, abonó \$78,500. Cuando fue a cancelar el saldo pendiente, María llevaba \$200,000 y, al llegar al almacén, le gustó una sofisticada blusa blanca, que no dudó en comprar. Si al salir del almacén, María quedó debiendo \$63,000 y solo le quedaron \$15,200, ¿cuánto costó la blusa?

4. Ana abre una cuenta de ahorros con \$1,250,000. El lunes retira \$435,000, el martes consigna \$285,000, el miércoles consigna \$145,000 y el jueves intenta retirar \$1,850,000. ¿Puede hacer ese retiro? ¿Por qué?

5. El domingo, hacia las 8 de la mañana, la temperatura ambiente era de 14 °C. A las 10 a.m. había subido 6 °C la temperatura. A las 4 p.m. la temperatura descendió 22 °C

5.1. ¿Cuál era la temperatura a las 4 p.m.?

5.2. Si a las 6 p.m. la temperatura es de 4 °C, ¿cuál fue el movimiento de la temperatura entre las 4 p.m. y las 6 p.m.?

6. Salí de mi apartamento y bajé 4 pisos para encontrarme con mi hija. Subimos 7 pisos y llegamos al apartamento de mi hermana que vive en el piso 13. ¿En qué piso queda mi apartamento?

7. Un accionista compra 250 acciones a $150,000 cada una. Al pasar el primer mes, las acciones se encuentran a un valor de $119,000 cada una. En ese momento, ¿a cuánto asciende la pérdida del accionista?

» *Soluciones a los ejercicios*

1. En un tanque hay 728 litros de agua. Por la parte superior, una llave vierte agua 33 litros por minuto al tanque, en tanto que por la parte inferior, por un tubo salen 47 litros por minuto.

1.1. ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque, después de una hora?

Por minuto, lo que entra menos lo que sale es $33 - 47 = -14$ litros. Es decir, salen 14 litros por minuto del tanque, en los 60 minutos, salen $-14 \times 60 = -840$. Como solo tiene 728 litros de agua en el tanque, $728 - 840 = -112$, es decir que no hay agua en el tanque (faltan 112 litros) y hace mucho se desocupó.

1.2. ¿Cuánto tardará en desocuparse el tanque?

Como salen 14 litros por minuto, se divide el total, 728 litros entre los 14, quedando como resultado 52 minutos.

1.3. Si se quiere que el tanque nunca se desocupe, ¿cómo modificaría el problema?

Es necesario que la cantidad de agua que sale del tanque por el tubo inferior sea menor que la que ingresa por la parte superior (33 litros).

2. Pedro tiene $30,000, Lucía tiene $28,000 más que el doble de lo que tiene Pedro; José tiene la mitad de lo que tienen Pedro y Lucía juntos. Entre los tres quieren comprar un regalo a sus padres que tiene un costo de $200,000, ¿les alcanza? En caso afirmativo, ¿cuánto les sobra?, en caso negativo, ¿cuánto les falta?.

Pedro aporta 30 000,
Lucía aporta $2\,(30\,000) + 28\,000 = 88\,000$,
José aporta $(30\,000 + 88\,000) \div 2 = 59\,000$,
En total reúnen $30\,000 + 88\,000 + 59\,000 = 177\,000$, por tanto, no les alcanza para el regalo.
$177\,000 - 200\,000 = -23\,000$, faltaría $23 000.

3. María compró a crédito un vestido que le costó $427,000. Realizó un primer abono de $140,000 a los quince días. En la siguiente quincena abonó $53,000 y a los otros quince días, abonó $78,500. Cuando fue a cancelar el saldo pendiente, María llevaba $200,000 y, al llegar al almacén, le gustó una sofisticada blusa blanca, que no dudó en comprar. Si al salir del almacén, María quedó debiendo $63,000 y solo le quedaron $15,200, ¿cuánto costó la blusa?

Deuda por el costo del vestido: $-427\,000$
Deuda a los quince días: $-427\,000 + 140\,000 = -287\,000$
Deuda al mes: $-287\,000 + 53\,000 = -234\,000$
Deuda al mes y medio: $-234\,000 + 78\,500 = -155\,500$
Saldo pendiente: $-155\,500$
Dinero que llevaba María: 200 000
Dinero que le queda después de cancelar el vestido: $-155\,500 + 200\,000 = 44\,500$
Dinero que le queda al salir de la tienda: 15 200
Dinero que abona a la blusa: $44\,500 - 15\,200 = 29\,300$.

Costo de la blusa: $29\,300 + 63\,000 = 92\,300$
La blusa costó $92,300.

4. **Ana abre una cuenta de ahorros con $1,250,000. El lunes retira $435,000, el martes consigna $285,000, el miércoles consigna $145,000 y el jueves intenta retirar $1,850,000. ¿Puede hacer ese retiro? ¿Por qué?**

Abre la cuenta, tiene un saldo de $+1\,250\,000$,
lunes retira: -435.000, nuevo saldo: $1\,250\,000 - 435\,000 = 815\,000$,
martes consigna: $+285\,000$, nuevo saldo: $815\,000 + 285\,000 = 1\,100\,000$,
miércoles consigna: $+145\,000$, nuevo saldo: $1\,100\,000 + 145\,000 = 1\,245\,000$,
jueves intenta retirar: $-1\,850\,000$, no puede pues: $1\,245\,000 - 1\,850\,000 = -605\,000$
No puede retirar ya que le harían falta $605,000.

5. **El domingo, hacia las 8 de la mañana, la temperatura ambiente era de 14 °C. A las 10 a.m. había subido 6 °C la temperatura. A las 4 p.m. la temperatura descendió 22 °C**

5.1. ¿Cuál era la temperatura a las 4 p.m.?

Temperatura a las 8 a.m: 14 °C.
Temperatura a las 10 a.m: $14 + 6 = 20$.
Temperatura a las 4 p.m: $20 - 22 = -2$.
A las 4 de la tarde, la temperatura es de 2 °C bajo cero.

5.2. Si a las 6 p.m. la temperatura es de 4 °C, ¿cuál fue el movimiento de la temperatura entre las 4 p.m. y las 6 p.m.?

A las 4 p.m la temperatura es de -2 °C, para llegar a la temperatura de las 6 p.m. que es de 4 °C, se debe encontrar la "distancia" que hay desde -2 hasta 4, es decir los valores absolutos: $4 + 2 = 6$, el movimiento de temperatura en ese rango de tiempo es de 6 °C

6. **Salí de mi apartamento y bajé 4 pisos para encontrarme con mi hija. Subimos 7 pisos y llegamos al apartamento de mi hermana que vive en el piso 13. ¿En qué piso queda mi apartamento?**

Salí del apartamento, bajé 4 pisos, es decir estoy a -4 de mi apartamento,
subimos 7 pisos, es decir, estoy a $-4 + 7 = 3$ pisos de mi apartamento,
mi hermana vive a 3 pisos de mi apartamento, luego $13 - 3 = 10$, mi apartamento queda en el piso décimo.

7. **Un accionista compra 250 acciones a $150,000 cada una. Al pasar el primer mes, las acciones se encuentran a un valor de $119,000 cada una. En ese momento, ¿a cuánto asciende la pérdida del accionista?**

Precio de compra de acción: $150\,000$,
Precio de acción después de un mes: $119\,000$,
Pérdida por cada acción: $150\,000 - 119\,000 = 31\,000$.
Total de pérdida: $31\,000\,(250) = 7\,750\,000$.

3. Números racionales

Un poco de historia...

Indudablemente, los babilónicos dejaron su legado mediante el uso del sistema de numeración sexagesimal, base que permitía un gran número de divisores y así mismo de fracciones que daban como resultado un número entero. Aún se conservan algunas fracciones utilizadas por ellos, como por ejemplo, 1/2 día (medio día), así como también se mantiene el sistema horario y las medidas angulares asociadas (por ejemplo son las dos y cuarto $2\frac{1}{4}$).

Para los Pitagóricos, a toda relación entre magnitudes debía corresponder un número o una relación entre ellos, así se originaron los racionales positivos y aunque nunca le dieron el estatus de número en sus reflexiones teóricas, si los usaban como números en sus aplicaciones en el comercio.

Entre los griegos se encuentran dos personajes que marcan la historia por sus grandes aportes a la noción de fracción. Euclides y Pitágoras. Euclides en sus libros V, VII y VIII define la fracción como una razón entre magnitudes homogéneas y establece algunas propiedades de ésta, en tanto que Pitágoras relaciona la fracción con la música. No se puede olvidar que fue la escuela pitagórica quién trabajó con razones conmensurables y con razones inconmensurables, dando origen a los números irracionales. Así, la teoría de las proporciones se centró en mostrar la armonía cósmica mediante el establecimiento de razones numéricas entre cantidades discretas que les permitían establecer proporciones.

El primero en trabajar sobre la definición de números racionales y la deducción de todas sus propiedades fue Martin Ohm hacia el año 1822.

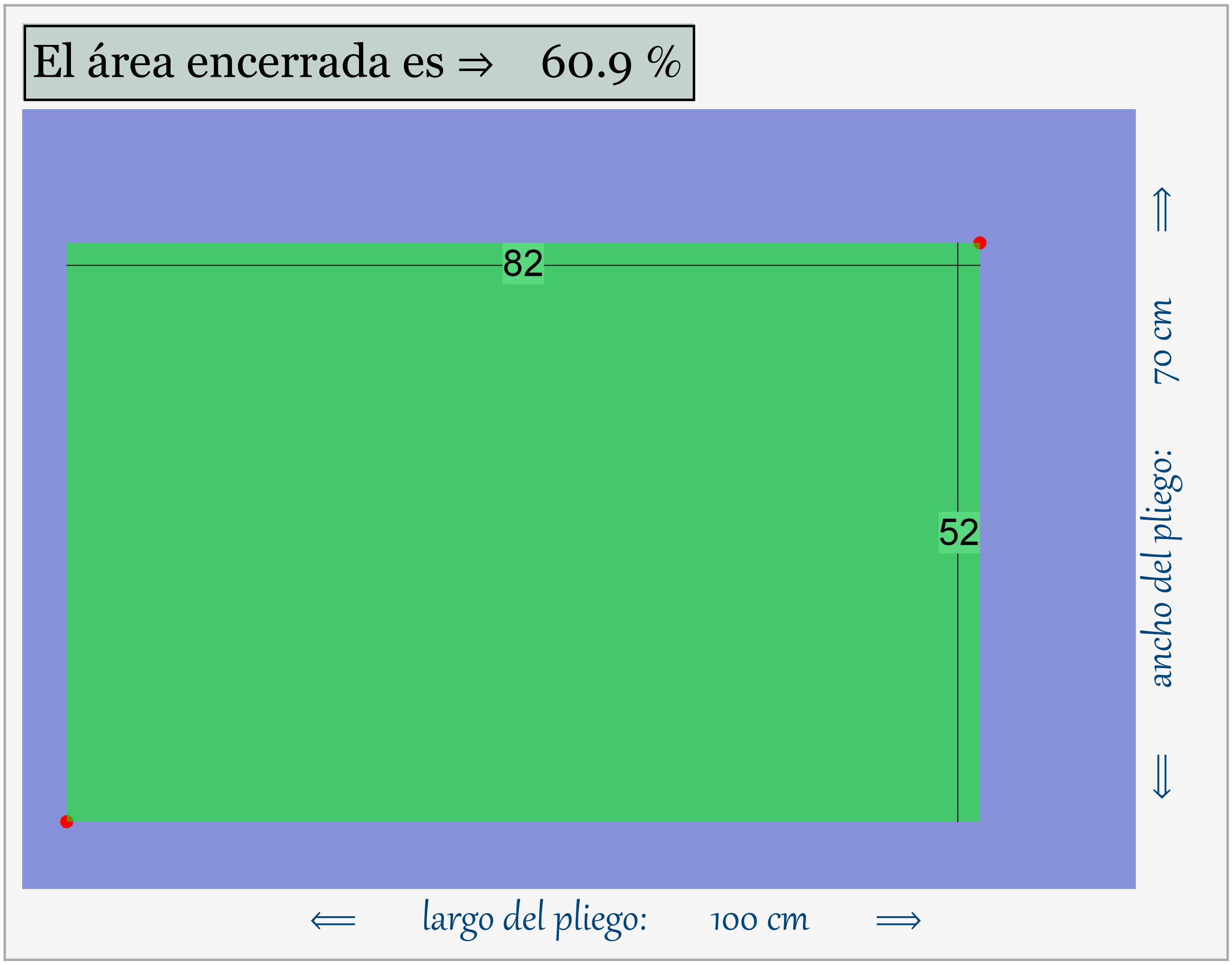
Situación: elaboración de un cartel

Para la clase de matemáticas, Sandra debe presentar un cartel, el cual se debe dividir en **tres partes de igual área** y en cada una de ellas debe realizar actividades puntuales que se irán asignando más adelante.

Problema 1

La primera tarea que se propone es trazar un margen que encierre un área correspondiente al 72 × % del pliego de cartulina y dividir el área encerrada en tres áreas iguales.

Para trazar el margen, Sandra sabe que una de las formas más sencillas es dibujar un rectángulo cuya área encerrada sea el 72 × % del pliego. Interactúe con el siguiente recurso para identificar una posible margen rectangular, note cómo la respuesta **no es única**



⇒ *¿Cómo puede Sandra trazar este margen ?*

Recuerde: el área de una figura plana depende de su forma, si desea identificarlas hacer clic en el enlace ⇒ Área

Si desea profundizar un poco sobre el concepto de porcentaje, hacer clic en el siguiente enlace ⇒ Porcentaje

Solución

Lo primero que se debe saber es el área total del pliego (A_c). Ella encuentra que las dimensiones son 100 centímetros de largo por 70 centímetros de ancho, como el área de un rectángulo es el producto del largo y el ancho se tiene que

$$A_c = l \times a$$
$$A_c = 100 \times 70$$
$$A_c = 7000\ \text{cm}^2$$

(Recuerde que la magnitud del área es *centímetros cuadrados*)
Ahora, el área encerrada (A_e) es el **72 × % de 7000 cm²**. Para poder entender la expresión es necesario investigar qué es el porcentaje

Si desea profundizar un poco sobre el concepto de porcentaje, hacer clic en el siguiente enlace ⇒ Porcentaje

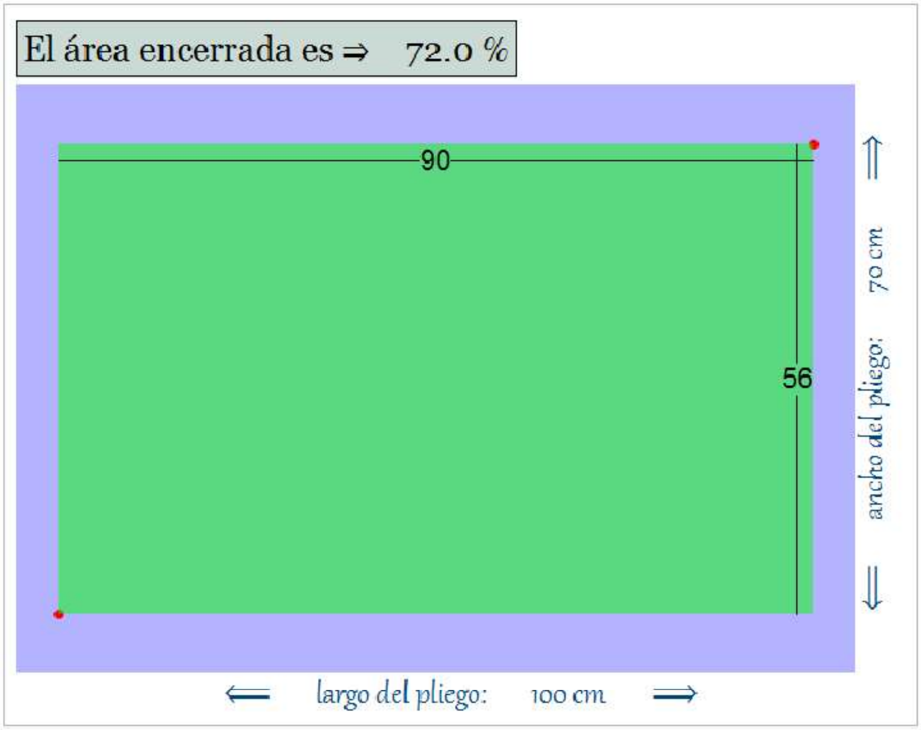
Por tanto, ella entiende que 72 × % es equivalente a 0.72 y que este valor se debe multiplicar al todo (7000), es decir:

$$A_e = 7000 \times 0.72$$
$$A_e = 5040 \text{ cm}^2$$

El área encerrada corresponde a 5040 cm², el objetivo es encontrar un rectángulo que tenga esta área para poder trazar dicha margen y que sus dimensiones sean menores a las del pliego de cartulina.

Existen muchas soluciones (*¿por qué?*), por ejemplo un rectángulo de dimensiones 90 centímetros de largo por 56 centímetros de ancho (90 × 56 = 5040). *Otra solución puede ser 84 cm por 63 cm*.

No hay única solución a este problema; una de las soluciones es trazar una margen que encierre un cuadrado de dimensiones 90 centímetros de largo por 56 centímetros de ancho.



≪ Respuesta

Problema 2

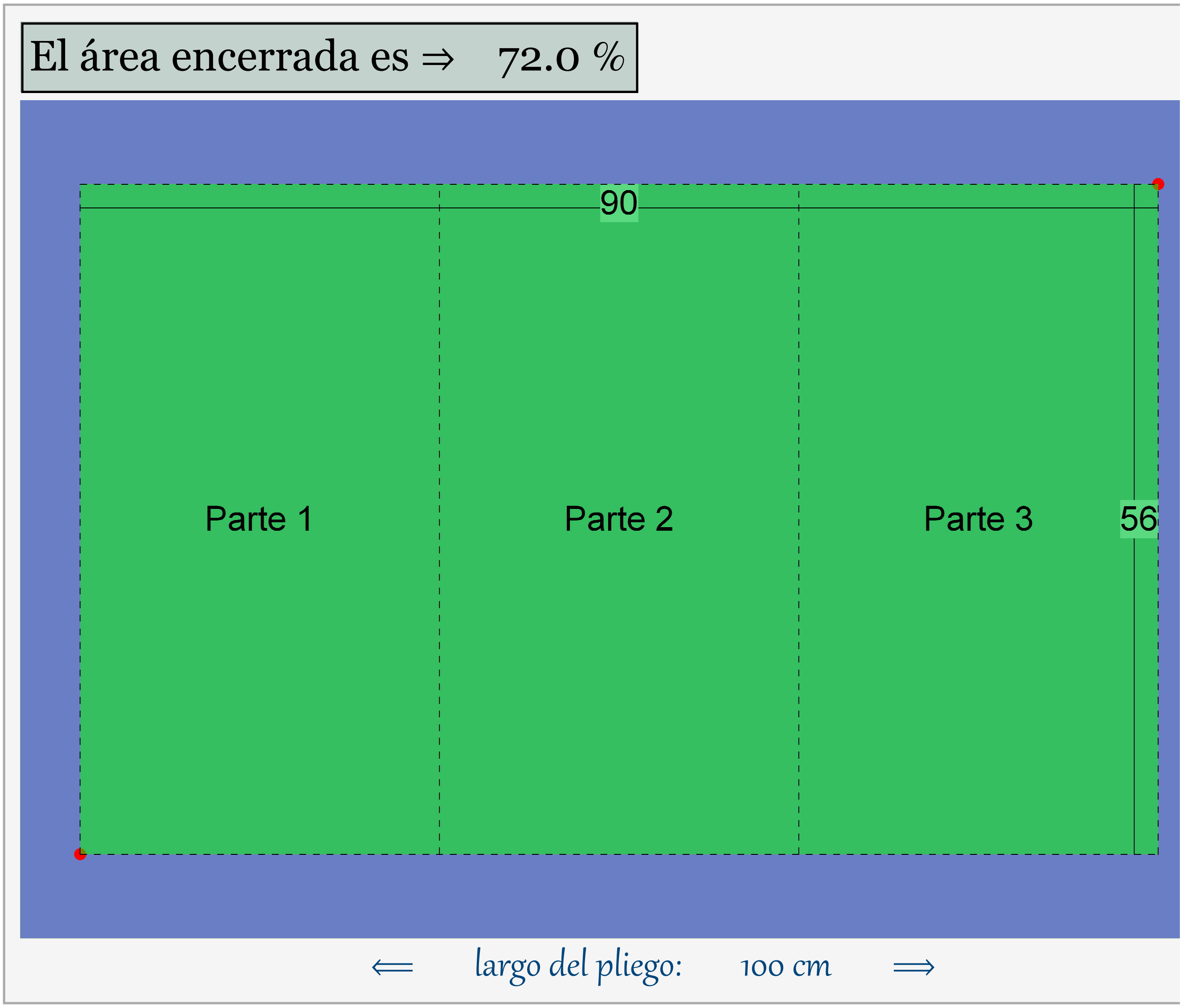
Una vez trazado el margen y encerrado la parte donde se trabajará, es necesario dividir este espacio en tres partes que tengan la misma área.

⇒ *¿Cómo puede hacer la división de esta área en tres partes iguales?*

Solución

Suponiendo que Sandra trazó el margen como un rectángulo de 90 cm $\times$ 56 cm, entonces se puede dividir en tres el largo y trazar las divisiones. Así se obtiene tres rectángulos adyacentes, cada uno de dimensiones 30 cm $\times$ 56 cm, por lo cual cada uno tiene un área de 1680 cm^2.

Manipulando el siguiente interactivo puede encontrar diferentes soluciones al problema, recuerde que el área encerrada debe ser el 72 × % del área total.



« Respuesta

Problema 3 (para realizar en la parte izquierda)

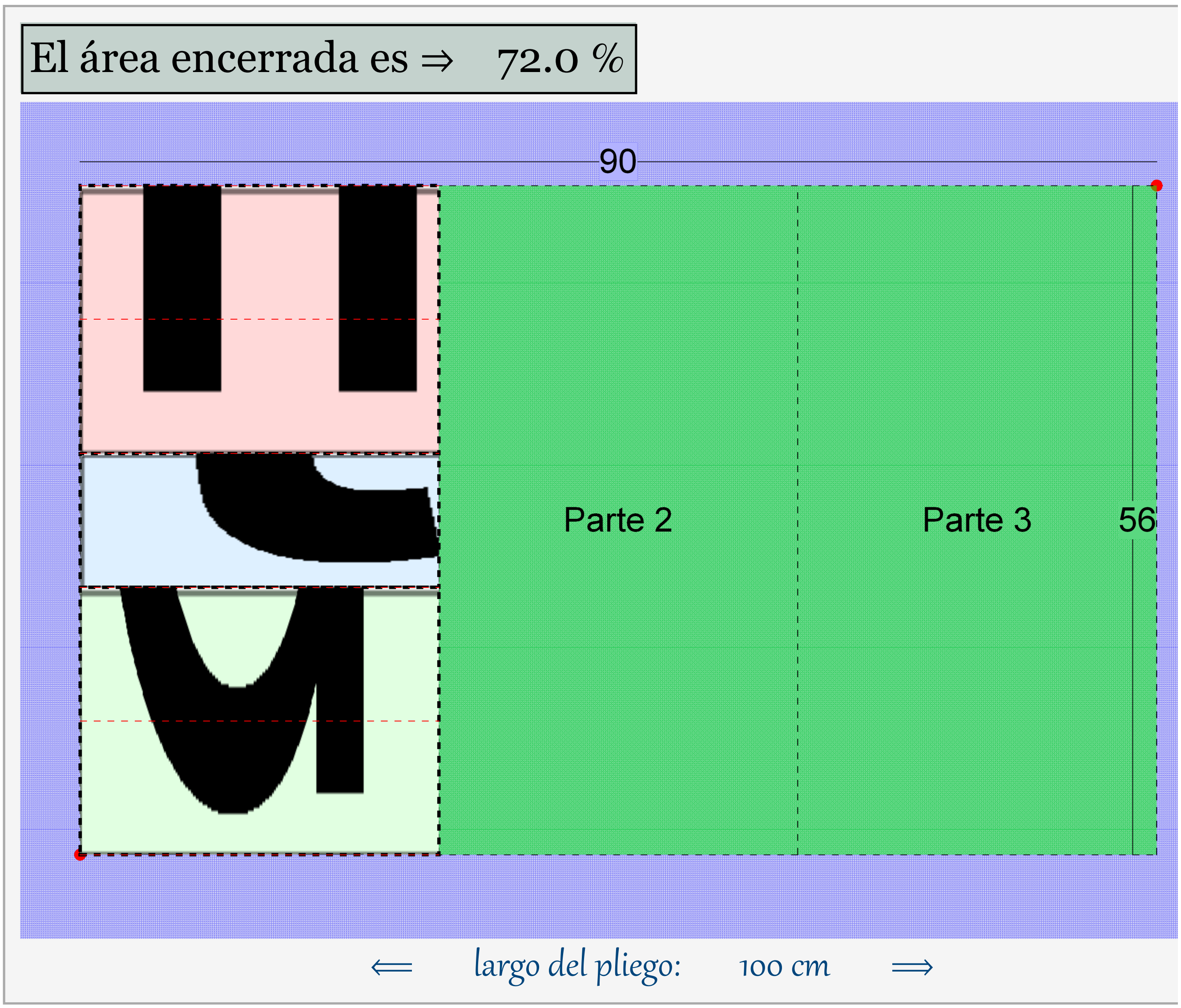
En una de las tres partes, Sandra debe colocar una imagen que ocupará las dos quintas partes de esa área. Debe colocar información sobre la imagen que ocupe otras dos quintas partes de esa área y en el espacio restante debe colocar un título relacionado con lo escrito allí y que permita dejar espacio entre la imagen y el escrito.

⇒ *¿Cómo puede realizar el trabajo encargado?*

Número racional como operador ⇒	Enlace
Fracciones equivalentes ⇒	Enlace
Operaciones con números racionales ⇒	Adición

Solución

Si la imagen y la descripción deben ocupar $\frac{2}{5}$ partes cada una, entonces entre las dos ocuparán $\frac{4}{5}$ partes del área, por tanto, el título debe ocupar $\frac{1}{5}$ parte del área. Una de las soluciones puede ser dividir esta parte en cinco y acomodar los objetos de tal manera que cumplan las condiciones descritas.



« Respuesta

Problema 4 (para realizar en la parte del centro)

Sandra tiene una receta de una torta de chocolate para 9 personas. Esa receta debe ir impresa dentro de un rectángulo que ocupe una tercera parte del área. En la mitad del resto de área debe escribir los ingredientes para hacer la misma torta, pero adaptándola para solo 4 personas. Por último, en el espacio que sobra puede pegar una imagen de la torta de chocolate.

La receta es la siguiente:

Torta de chocolate para nueve personas	
Ingrediente	**Cantidad y medida**
Mantequilla	100 gramos
Azúcar	1 taza
Huevos	4 unidades
Cocoa	6 cucharadas
Harina de trigo	1 taza y media
Bicarbonato	13 gramos
Polvo de hornear	20 gramos
Jugo de naranja	$\frac{1}{4}$ de taza
Leche	$\frac{1}{2}$ de taza

⇒ *¿Cómo puede realizar el trabajo encargado?*

Números racionales como razón y proporción ⇒ enlace

Solución

Como se tiene una receta para nueve personas, es necesario "*disminuirla proporcionalmente*" a una receta para cuatro personas, esto significa encontrar el **operador** que ajustará los ingredientes.

Como las medidas de los ingredientes están para nueve personas, cada ingrediente se debe dividir por 9 para así saber cuál es la cantidad para una persona. Luego, como la torta es para 4 personas, es necesario multiplicar por 4. Por tanto, el operador que va a actuar sobre cada ingrediente como un achicador de cada medida es $\frac{4}{9}$.

Con esta información se procede a aplicar el operador a cada medida de los ingredientes, los resultados se aproximan a cantidades "adecuadas" en el contexto que se está trabajando (por ejemplo, no tiene sentido decir 1.7 huevos ¿o sí?):

Torta de chocolate para cuatro personas			
Ingrediente	**Cantidad y medida (original)**	**Cantidad y medida (ajustada)**	**Cantidad y medida (adecuada)**
Mantequilla	100 gramos	$100\times\frac{4}{9}=\frac{400}{9}\approx 44.43$	44.5 gramos
Azúcar	1 taza	$1\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\approx 0.43$	media taza
Huevos	4 unidades	$4\times\frac{4}{9}=\frac{16}{9}\approx 1.78$	2 unidades
Cocoa	6 cucharadas	$6\times\frac{4}{9}=\frac{8}{3}\approx 2.67$	2 cucharadas y media
Harina de trigo	1 taza y media	$\frac{3}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{3}\approx 0.67$	media taza y una cucharada
Bicarbonato	13 gramos	$13\times\frac{4}{9}=\frac{52}{9}\approx 5.78$	6 gramos
Polvo de hornear	20 gramos	$20\times\frac{4}{9}=\frac{80}{9}\approx 8.89$	9 gramos
Jugo de naranja	$\frac{1}{4}$ de taza	$\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}\approx 0.11$	una cucharada
Leche	$\frac{1}{2}$ de taza	$\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}\approx 0.22$	$\frac{1}{4}$ de taza

resumiendo, la nueva receta sería

Torta de chocolate para cuatro personas	
Ingrediente	**Cantidad y medida**
Mantequilla	44.5 gramos
Azúcar	media taza
Huevos	2 unidades
Cocoa	2 cucharadas y media
Harina de trigo	media taza y una cucharada
Bicarbonato	6 gramos
Polvo de hornear	9 gramos
Jugo de naranja	una cucharada
Leche	$\frac{1}{4}$ de taza

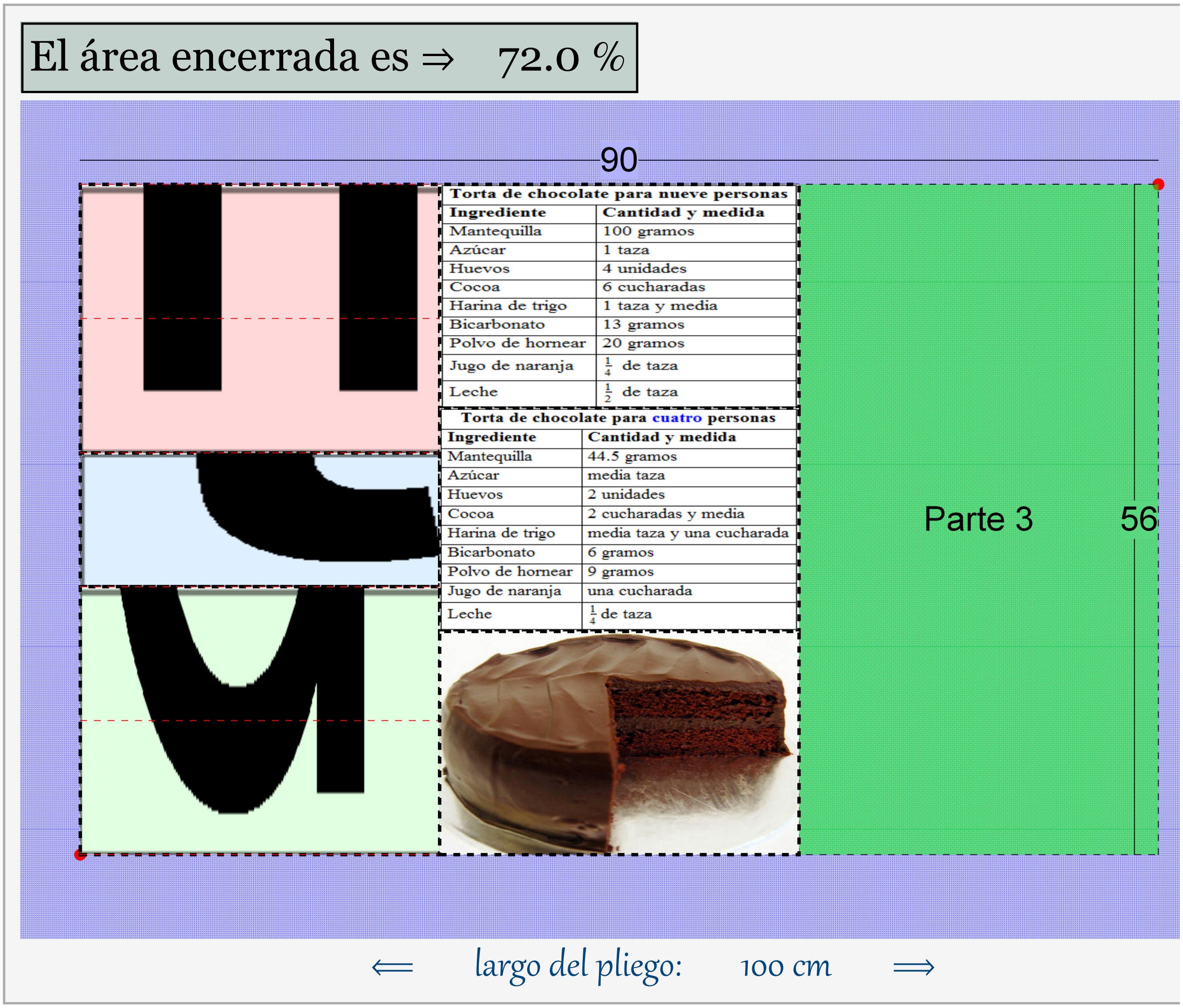
Ahora se deben colocar en el cartel. Según el problema se tienen las siguientes condiciones

- Receta original: tercera parte
- Receta nueva: en la mitad del resto
- Imagen: en el resto

Entonces, la receta original ocupa $\frac{1}{3}$ del área, por tanto, sobran $\frac{2}{3}$ pues: $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

La receta nueva ocupa la mitad del resto, es decir $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$, o sea, la tercera parte (igual que la receta original).

Como ya se utilizaron $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ dos tercios del área lo que falta por utilizar es $\frac{1}{3}$, por tanto, la imagen ocupa $\frac{1}{3}$ del área.



Torta de chocolate para nueve personas	
Ingrediente	**Cantidad y medida**
Mantequilla	100 gramos
Azúcar	1 taza
Huevos	4 unidades
Cocoa	6 cucharadas
Harina de trigo	1 taza y media
Bicarbonato	13 gramos
Polvo de hornear	20 gramos
Jugo de naranja	$\frac{1}{4}$ de taza
Leche	$\frac{1}{2}$ de taza

Torta de chocolate para cuatro personas	
Ingrediente	**Cantidad y medida**
Mantequilla	44.5 gramos
Azúcar	media taza
Huevos	2 unidades
Cocoa	2 cucharadas y media
Harina de trigo	media taza y una cucharada
Bicarbonato	6 gramos
Polvo de hornear	9 gramos
Jugo de naranja	una cucharada
Leche	$\frac{1}{4}$ de taza

Problema 5 (para realizar en la parte derecha)

Sandra en el último espacio debe realizar las siguientes operaciones racionales, escribiendo el proceso paso a paso:

⇒

Resolver los siguientes ejercicios en la tercera parte de la cartelera:

a. $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(2\div\frac{3}{2}\right)4-2\right\}\frac{3}{2}$

b. $3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)4-2\left(\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}$

Fracciones equivalentes ⇒ Enlace

Operaciones con números racionales ⇒ Adición | Multiplicación | División

Solución

Primero se realizará el desarrollo de cada ejercicio (para luego colocarlos en la cartelera)

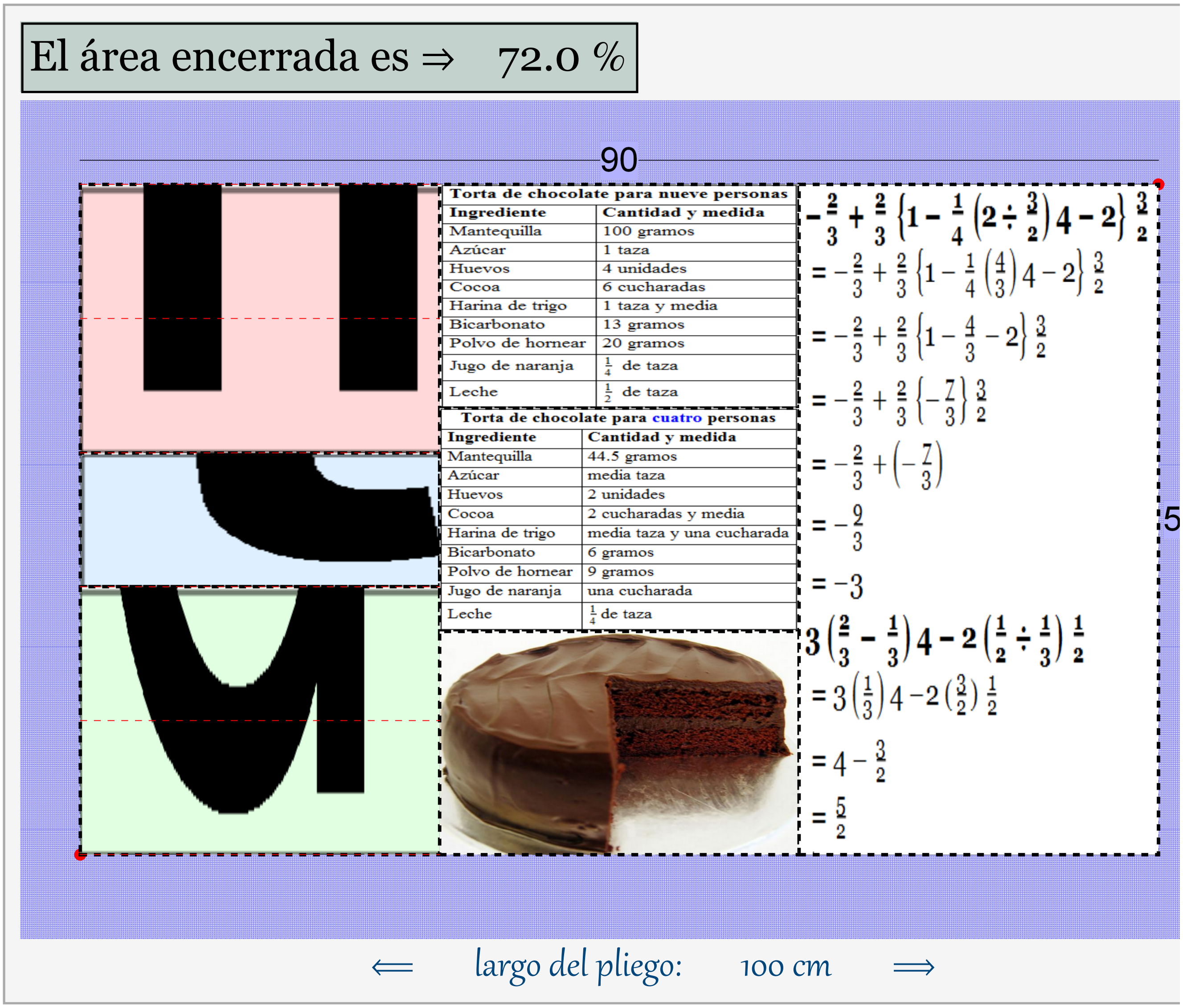
1. $-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(2\div\frac{3}{2}\right)4-2\right\}\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(2\div\frac{3}{2}\right)4-2\right\}\frac{3}{2} &= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)4-2\right\}\frac{3}{2}\\
&= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{4}{3}-2\right\}\frac{3}{2}\\
&= -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{-\frac{7}{3}\right\}\frac{3}{2}\\
&= -\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)\\
&= -\frac{9}{3}\\
&= -3
\end{aligned}$$

2. $3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)4-2\left(\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)4-2\left(\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} &= 3\left(\frac{1}{3}\right)4-2\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}\\
&= 4-\frac{3}{2}\\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Ahora se coloca en la cartelera



Torta de chocolate para nueve personas	
Ingrediente	**Cantidad y medida**
Mantequilla	100 gramos
Azúcar	1 taza
Huevos	4 unidades
Cocoa	6 cucharadas
Harina de trigo	1 taza y media
Bicarbonato	13 gramos
Polvo de hornear	20 gramos
Jugo de naranja	$\frac{1}{4}$ de taza
Leche	$\frac{1}{2}$ de taza

Torta de chocolate para cuatro personas	
Ingrediente	**Cantidad y medida**
Mantequilla	44.5 gramos
Azúcar	media taza
Huevos	2 unidades
Cocoa	2 cucharadas y media
Harina de trigo	media taza y una cucharada
Bicarbonato	6 gramos
Polvo de hornear	9 gramos
Jugo de naranja	una cucharada
Leche	$\frac{1}{4}$ de taza

$$-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(2\div\frac{3}{2}\right)4-2\right\}\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)4-2\right\}\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{1-\frac{4}{3}-2\right\}\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left\{-\frac{7}{3}\right\}\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{2}{3}+\left(-\frac{7}{3}\right)$$
$$=-\frac{9}{3}$$
$$=-3$$

$$3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)4-2\left(\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}$$
$$=3\left(\frac{1}{3}\right)4-2\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}$$
$$=4-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

Resumen

Los números inventados para expresar una parte de un todo son llamados **números racionales** y son todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, a y b son números enteros. Este conjunto se denomina $\mathbb{Q}$, y es necesario hacer algunas precisiones con relación a este conjunto:

- Este conjunto surge de la necesidad de expresar situaciones “cotidianas”, por ejemplo, medio pan, tres porciones de una pizza, la relación entre número de hombres y mujeres de un salón de clase, el candidato que tiene mayor opción para ganar un cargo, entre otros.
- Es importante destacar que la definición anterior implica que todo número entero es un número racional, por ejemplo, 12 se puede expresar como $\frac{12}{1}$, o -5 se puede expresar como $-\frac{5}{1}$. Sin embargo, no todo número racional es un número entero, ¿verdad?.
- La definición indica que los racionales se expresan por medio de fracciones, pero, no todo número expresado como una fracción es un número racional, por ejemplo el número $\frac{1}{\sqrt{2}}$ no es racional, ya que $\sqrt{2}$ no es un número entero. Estos números se conocen simplemente como fracciones.

- Recuerden que ***fracciones equivalentes*** son aquellas que representan la misma cantidad y que se obtienen mediante dos procesos, el de amplificación y el de simplificación. Por ejemplo, los números $\frac{5}{2}$, $\frac{10}{4}$, $\frac{15}{6}$, $\frac{-50}{-20}$, son equivalentes ya que al simplificarlos todos dan $\frac{5}{2}$. En este caso, se dice que el representante es la fracción más simplificada o fracción irreductible.
- Al igual que los números enteros, la operación *adición* en los números racionales abarca también la sustracción (una sustracción es una adición escrita de manera diferente). En este conjunto la multiplicación también es una operación y la división es una forma diferente de multiplicar por lo cual la división no es una operación.

> Supongamos que se quiere dividir 50 entre 3, esto se puede escribir con la expresión $50 \div 3$ que es lo mismo a $\frac{50}{3}$(parte de un todo), por tanto, se puede decir que
> $50 \div 3 = 50 \times \frac{1}{3} = \frac{50}{3}$
> esto se puede generalizar para cualquier división.

Píldora

- A través de todos los problemas realizados, se observan distintos usos de los números racionales, según la aplicación; entre ellos están:

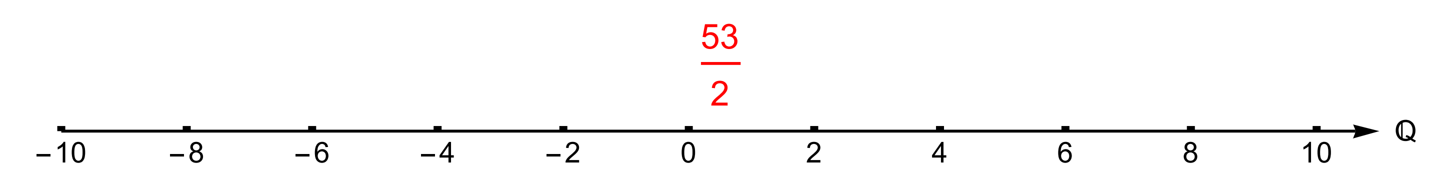
1. Racional como *porcentaje*.
2. Racional como *número* (números decimales).
3. Racional como *razón y proporción* entre dos magnitudes.
4. Racional como un *operador*.
5. Racional como *parte - todo* o una división de un todo en partes.

> Finalmente una inquietud: ¿Por qué no se puede dividir por cero?

Multimedia

ℕ Números Naturales | ℤ Números Enteros | ℚ Números Racionales

máximo 10 20 50 100



Los números que se utilizan para expresar una parte de un todo son llamados **números racionales** y son todos los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$, a y b son números enteros. Se representan con la letra $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a,\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$$

Operaciones con los números racionales ⇒ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}, \cdot)$ Sustracción División

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios numéricos

1. Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones

1.1. $\left[2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right] \div \frac{1}{3}$

1.2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left\{2 - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right\}\frac{4}{3} - \frac{4}{3}$

1.3. $2 - \frac{1}{3} \div \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{9}$

1.4. $-3 - 2 \cdot \frac{5}{6} \div 4 + 3$

1.5. Si $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{2}\,a$, $c = \frac{3\,b}{4}$, encuentre el valor de $3\,a + 5\,b - 2\,c$.

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Simplifique completamente cada una de las siguientes expresiones

1.1. $\left[2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right] \div \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\left[2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{2}\right]\div\tfrac{1}{3} &= \left[2\left(\tfrac{3}{6}-\tfrac{2}{6}\right)+\tfrac{1}{2}\right]\div\tfrac{1}{3}\\ &= \left[2\left(\tfrac{1}{6}\right)+\tfrac{1}{2}\right]\div\tfrac{1}{3}\\ &= \left[\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\right]\div\tfrac{1}{3}\\ &= \left[\tfrac{2}{6}+\tfrac{3}{6}\right]\div\tfrac{1}{3}\\ &= \left[\tfrac{5}{6}\right]\cdot\tfrac{3}{1}\\ &= \tfrac{5}{2}\end{aligned}$$

1.2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left\{2-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right\}\frac{4}{3}-\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\left\{2-\tfrac{3}{4}\left(1-\tfrac{1}{3}\right)\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3}\right\}\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3} &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\left\{2-\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{2}{3}\right)\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3}\right\}\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3}\\ &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\left\{2-\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\right\}\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3}\\ &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\left\{0\right\}\tfrac{4}{3}-\tfrac{4}{3}\\ &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{4}{3}\\ &= -\tfrac{5}{6}\end{aligned}$$

1.3. $2-\frac{1}{3}\div\frac{2}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{9}$

$$\begin{aligned}2-\tfrac{1}{3}\div\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{20}{9} &= 2-\tfrac{3}{2}+\tfrac{10}{9}\\ &= \tfrac{36}{18}-\tfrac{27}{18}+\tfrac{20}{18}\\ &= \tfrac{29}{18}\end{aligned}$$

1.4. $-3-2\cdot\frac{5}{6}\div 4+3$

$$\begin{aligned}-3-2\cdot\tfrac{5}{6}\div 4+3 &= -3-\tfrac{5}{3}\cdot\tfrac{1}{4}+3\\ &= -3-\tfrac{5}{12}+3\\ &= -\tfrac{5}{12}\end{aligned}$$

1.5. Si $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}a$, $c=\frac{3b}{4}$, encuentre el valor de $3a+5b-2c$.

Con $a=\frac{2}{3}$, queda que $b=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Con $b=\frac{1}{3}$, queda que $c=\frac{3\left(\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{1}{4}$.
Entonces
$3\left(\frac{2}{3}\right)+5\left(\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{1}{4}\right)=2+\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{12}{6}+\frac{10}{6}-\frac{3}{6}=\frac{19}{6}$.

» Problemas de aplicación

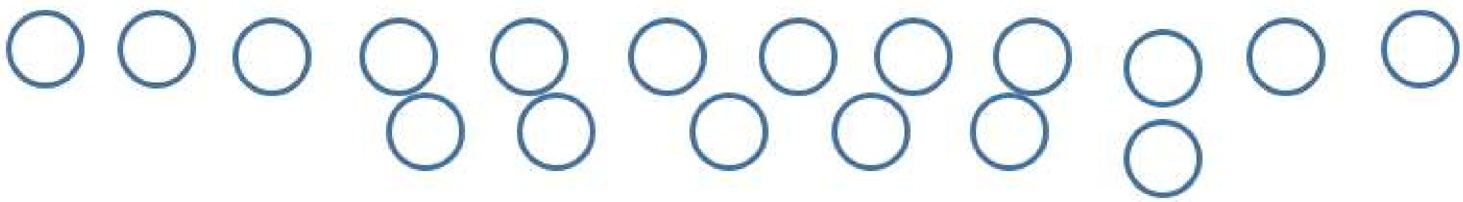
1. En la Empresa Tico necesitan un cajero. Para ocupar este puesto se presentan 5 hombres y 7 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida para ocupar ese puesto sea una mujer?, ¿qué porcentaje, de las personas que se presentaron a este trabajo, son hombres?
2. Luis vende las dos terceras partes de su finca a Juan. Pasados unos años, Juan vende a su hermano Andrés la mitad de su propiedad a la mitad del precio que la compró.
   Andrés, con la parte de propiedad que tiene, le vende a su hijo Pedro la mitad de esta a la mitad del precio que la compró.
   ¿Cuánto le pagó Pedro a su papá si se sabe que la finca de Luis originalmente tenía un valor de

$1,200,000,000?

3. Carlos y Juan deciden realizar una competencia ciclística en una pista. Cada uno pedaleará por un minuto y el que haya recorrido la mayor distancia será el ganador. Carlos recorrió $\frac{7}{6}$ de la pista y Juan $\frac{6}{5}$. ¿Puede decir quien ganó la carrera?

4. La razón entre la venta diaria de jabón del almacén M al almacén K es de 7 a 5. En el almacén M, la razón entre la venta diaria del jabón tipo A con el de tipo B es 4 a 3, en tanto que en el almacén K, la razón entre la venta diaria del jabón tipo A con el de tipo B es 7 a 3. ¿Es posible establecer la razón entre la venta diaria del jabón tipo A del almacén M y el jabón tipo B del almacén K?

5. Cristian tiene una colección de 20 canicas entre negras y blancas. Si la relación entre las canicas negras con respecto al total es $\frac{3}{4}$, ¿puedes ayudarle a colorearlas en el dibujo que se encuentra abajo?



6. Juan decide donar la mitad de la tercera parte de su salario mensual. Si el salario mensual de Juan asciende a $4,200,000, ¿a cuánto equivale la donación de Juan?

» *Soluciones a los ejercicios*

1. En la Empresa Tico necesitan un cajero. Para ocupar este puesto se presentan 5 hombres y 7 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona escogida para ocupar ese puesto sea una mujer?, ¿qué porcentaje, de las personas que se presentaron a este trabajo, son hombres?

Observe que la probabilidad se puede establecer como una razón, así:

$$P = \frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posible}}$$

Para saber cuál es la probabilidad de que ese cargo sea ocupado por una mujer, establecemos la razón:

$$P = \frac{\textit{Número de casos favorables}}{\textit{Número de casos posible}} = \frac{7}{12}$$

Para saber qué porcentaje de los candidatos al puesto son hombres, establecemos la razón:

$$P = \frac{\textit{Número de hombres}}{\textit{Total de candidatos}} = \frac{5}{12} = 0.4157 = 41.67\,\%$$

2. Luis vende las dos terceras partes de su finca a Juan. Pasados unos años, Juan vende a su hermano Andrés la mitad de su propiedad a la mitad del precio que la compró.
Andrés, con la parte de propiedad que tiene, le vende a su hijo Pedro la mitad de esta a la mitad del precio que la compró.
¿Cuánto le pagó Pedro a su papá si se sabe que la finca de Luis originalmente tenía un valor de $1,200,000,000?

Existen diferentes formas de abordar este problema, todas trabajando con operadores racionales, veamos una de ellas:

- Juan compra las 2/3 partes de la finca de Luis.
- Andrés compra la mitad de la propiedad de Juan, es decir $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)$ partes de la finca de Luis.
- Pedro compra la mitad de la propiedad de Andrés, es decir $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ partes de la finca de Luis.

- Si la finca tiene un valor de 1 200 000 000, Pedro pagó $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right) 1\,200\,000\,000 = \frac{1}{6}(1\,200\,000\,000) = 200\,000\,000.$

  Pedro pagó \$200,000,000 y tiene $\frac{1}{6}$ de la finca.

  Escribe otra forma de abordar este problema y verás que puedes llegar a la misma respuesta.

3. Carlos y Juan deciden realizar una competencia ciclística en una pista. Cada uno pedaleará por un minuto y el que haya recorrido la mayor distancia será el ganador. Carlos recorrió $\frac{7}{6}$ de la pista y Juan $\frac{6}{5}$. ¿Puede decir quien ganó la carrera?

   La estrategia para comparar fracciones y establecer cuál es mayor o menor que otra, es buscar fracciones equivalentes de tal manera que tengan el mismo denominador.

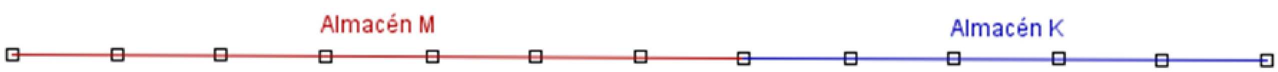
   Lo primero es encontrar el mínimo común multiplo de los denominadores para saber cómo amplificarlas:
   $m.c.m(6,\ 5) = 30$

   Luego: $\frac{7}{6} = \frac{7\times 5}{6\times 5} = \frac{35}{30}$ y $\frac{6}{5} = \frac{6\times 6}{5\times 6} = \frac{36}{30}$, por tanto, $\frac{6}{5}$ es mayor que $\frac{7}{6}$.

   Juan ganó la competencia al recorrer mayor distancia que Carlos.

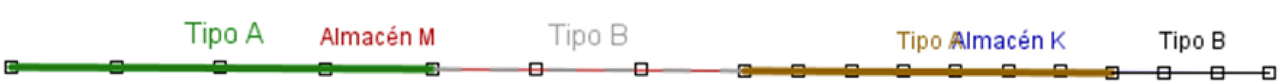
4. La razón entre la venta diaria de jabón del almacén M al almacén K es de 7 a 5. En el almacén M, la razón entre la venta diaria del jabón tipo A con el de tipo B es 4 a 3, en tanto que en el almacén K, la razón entre la venta diaria del jabón tipo A con el de tipo B es 7 a 3. ¿Es posible establecer la razón entre la venta diaria del jabón tipo A del almacén M y el jabón tipo B del almacén K?

   Como el problema hace referencia a la venta de jabón en los dos almacenes M y K, vamos a escribir, por acortar, que la razón entre M y K es 7 : 5, lo que significa que por cada 7 jabones que vende el almacén M, el almacén K vende 5. Gráficamente se puede representar así:



   Por otra parte, en el almacén M, la razón entre la venta de los jabones tipo A y B es 4 : 3. Gráficamente y con la información anterior, se tiene:

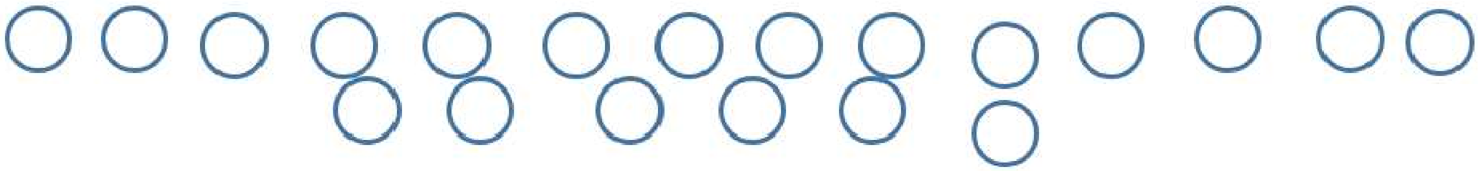
   Finalmente, en el almacén K, la razón entre la venta de los jabones tipo A y B es 7 : 3. Observe que solo tenemos en el almacén K una división de 5 pedazos, y se quieren tomar 10, ya que la relación es de 7 a 3, la única forma es dividir cada segmento en dos pedazos, observe:



   Como se quiere establecer la razón entre el jabón del tipo A del almacén M con el de tipo B del almacén K, es necesario que la magnitud de medida sea la misma, por tanto, se debe dividir en dos cada segmento, quedando finalmente:

   Lo que significa que la razón entre la venta diaria del jabón tipo A del almacén M y el jabón tipo B del almacén K es 8 : 3. ¿Cuál es la razón entre la venta diaria del jabón tipo B del almacén K y el jabón tipo A del almacén M? Establezca otras razones.

5. Cristian tiene una colección de 20 canicas entre negras y blancas. Si la relación entre las canicas negras con respecto al total es $\frac{3}{4}$, ¿puedes identificar cuantas canicas son negras y cuantas blancas?



La relación es $\frac{\textit{canicas negras}}{\textit{total canicas}} = \frac{3}{4}$, como la colección es de 20 canicas, se tiene que

$\frac{\textit{canicas negras}}{20} = \frac{3}{4}$, para encontrar la cantidad de canicas negras se puede amplificar la segunda fracción hasta que el denominador sea el mismo, por tanto:

$\frac{\textit{canicas negras}}{20} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$

La colección tiene 15 canicas negras y 5 blancas.

6. Juan decide donar la mitad de la tercera parte de su salario mensual. Si el salario mensual de Juan asciende a $4,200,000, ¿a cuánto equivale la donación de Juan?

La frase "la mitad de la tercera parte de su salario mensual" se expresa como:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(4\,200\,000)\right)$, al simplificar la expresión se obtiene:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(4\,200\,000)\right) = \frac{1}{6}(4\,200\,000) = 700\,000$. Por tanto, Juan decide donar $700,000 pesos.

4. Números irracionales

Un poco de historia…

Como vimos en el capítulo anterior, los pitagóricos consideraban que todos los fenómenos de la naturaleza podían reducirse a números (naturales) o a razones entre ellos, de esta manera se originaron los racionales positivos. Por desgracia esto no es verdad y, para la escuela pitagórica fue un duro golpe a sus creencias; cuenta la leyenda (con base dudosa) que Hippassus de Metapontun de la escuela pitagórica demostró que la diagonal de un cuadrado es una longitud que no se podía expresar como una razón entre dos números (naturales); la interpretación moderna es que la longitud de la diagonal de un cuadrado con lado de longitud 1 es $\sqrt{2}$ y este es irracional, él dedujo logicamente que hay números que no se pueden expresar mediante razones y abrió el camino a los números irracionales. Según la leyenda, este descubrimiento hizo que fuera tirado al mar por sus compañeros y causó todo un rompimiento dentro de la escuela pitagórica, que los asumió posteriormente.

Hindúes, árabes, trataron los números irracionales por medio de aproximaciones y para el año 1500 en Europa se usaban libremente por matemáticos como Pacioli, Stifel, Stevin y Cardano. En 1684, John Wallis en su libro ***Álgebra*** los reconocía como números en su pleno sentido.

Algunos números irracionales tienen su propia historia, entre ellos se destacan $\sqrt{2}$, π, e y ϕ (el número áureo).

$\sqrt{2}$ aparece al relacionar la diagonal con el lado de un cuadrado unitario. Su historia consiste en hallar métodos para hacer cálculos cada vez más aproximados a su valor.

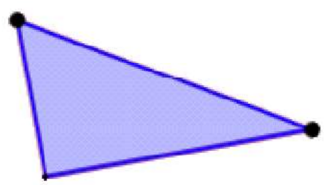
π es el número que establece la relación entre una circunferencia y su diámetro; es el número que más ha inquietado a los seres humanos. Matemáticos y aficionados a la matemática dedicaron muchos esfuerzos a tratar de calcularlo exactamente. Apenas en 1766 Lambert probó que era irracional y Lindemann en 1882 que era trascendente, lo que lo hace aún más particular, es que el 14 de marzo se celebra el día de π.

El escocés John Napier publicó en 1614 el libro titulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* en el cual introduce el método de cálculo mediante logaritmos para facilitar las operaciones aritméticas con números grandes. La base de los logaritmos que utilizó Napier es un número muy cercano al número e cuyo valor es aproximadamente 2.718281828. Pero se adjudica a Jacob Bernouilli el descubrimiento de la constante cuando estudiaba un problema particular del llamado *interés compuesto*, e es un número trascendente.

El número áureo ϕ (Phi), llamado así en honor al escultor griego Fidias, fue descubierto en la antigüedad no como una unidad sino como una proporción que se encuentra presente en la naturaleza, por ejemplo en las caracolas, en las nervaduras de las hojas de algunos árboles, en el grosor de las ramas, entre otras. Observando esa proporción, a este número se le atribuye un carácter estético especial, aplicado en la antigüedad en la arquitectura. Por ejemplo, en el Partenón las ventanas y toda la construcción mantienen entre sí que la relación entre el lado mayor y el lado menor es el número áureo; esta proporción también se observa en cuadros, en esculturas e incluso en el cuerpo humano, por ejemplo, Leonardo Da Vinci, en su dibujo el "Homo Vitruvio", plasma dicha proporción. Por tantas aplicaciones y la belleza de la proporción, es conocido como número de oro o divina proporción. Actualmente, esta proporción está presente en las tarjetas de crédito y documentos de identificación entre otros.

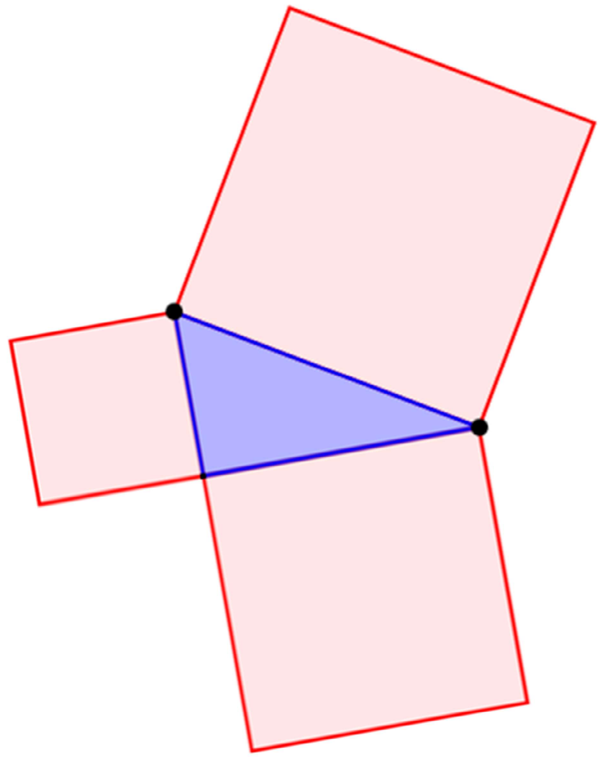
Actividad: verificar el Teorema de Pitágoras.

En esta actividad usted va a profundizar sobre un teorema de gran importancia en la evolución de la historia matemática y en particular de los números irracionales: "el Teorema de Pitágoras". Para ello es necesario que construya en el centro de un octavo de cartulina un triángulo rectángulo (uno de los ángulos es de 90 grados).



Una vez dibujado el triángulo atienda las siguientes instrucciones:

- Sobre cada cateto (los lados adyacentes al ángulo recto, cuya medida es menor que la de la hipotenusa) construya un cuadrado, de tal manera que uno de los lados del cuadrado sea un cateto.
- Sobre la hipotenusa (el lado que esta opuesto al ángulo de 90 grados) construya un cuadrado, de tal manera que uno de los lados del cuadrado sea la hipotenusa.



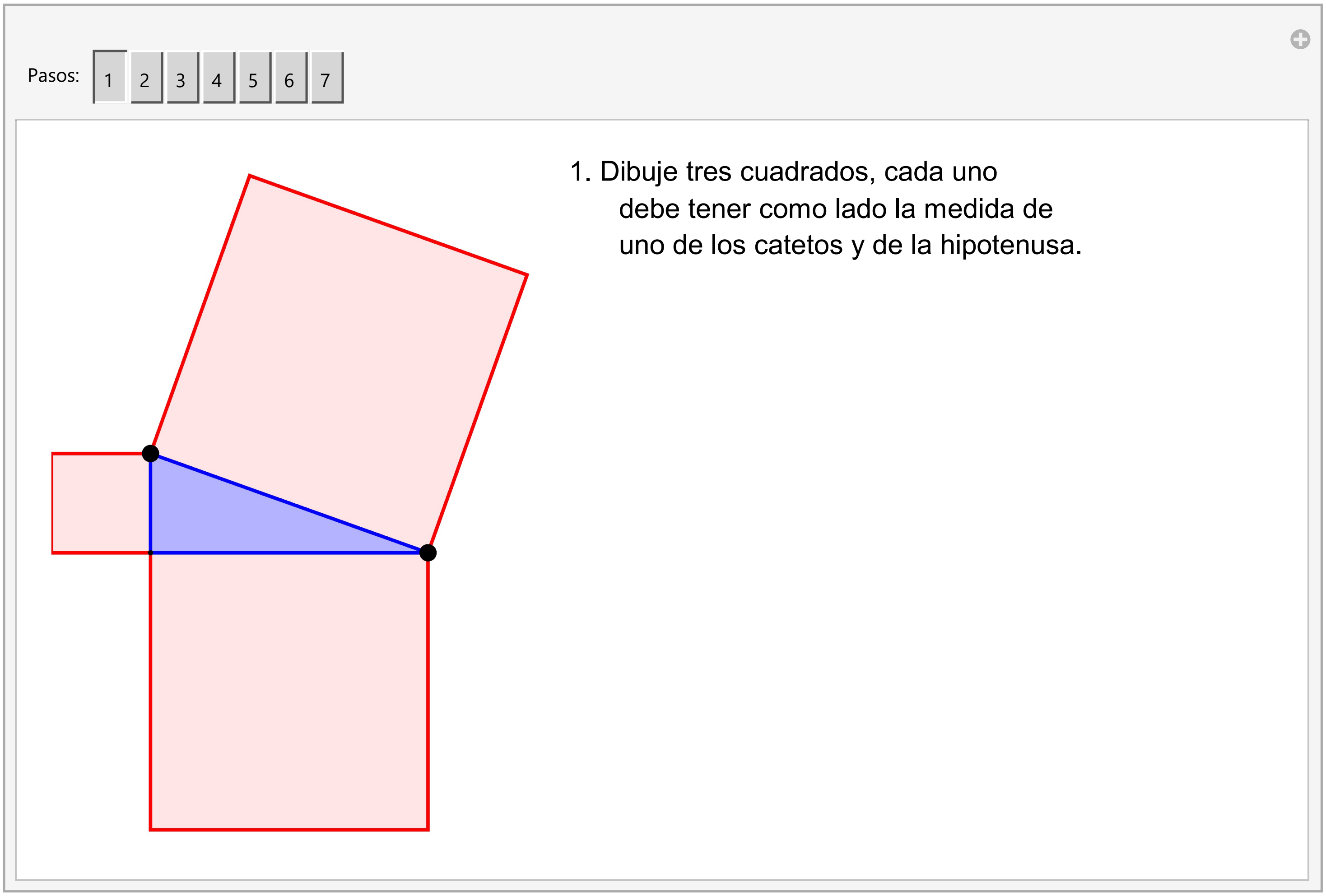
- Recorte los cuadrados que tienen como lado los catetos.
- Con las regiones de estos dos cuadrados cubra la región del cuadrado mayor (el que tiene como lado la hipotenusa).

Problema 1

⇒ *¿Qué relación encuentra entre las dos áreas de los cuadrados de los catetos con el área del cuadrado de la hipotenusa?*

Solución

La siguiente animación muestra una de las formas de cubrir el área del cuadrado mayor con las áreas de los otros dos cuadrados. Puede dar clic en los pasos 1 a 7 y manipular dos vértices del triángulo.



Se puede verificar que los dos cuadrados **del lado los catetos** cubren completamente el cuadrado **del lado de la hipotenusa**. Por tanto, la suma de las regiones de los cuadrados **de los catetos** es igual al cuadrado **de la hipotenusa**; si a y b son las medidas de los catetos y c es la medida de la hipotenusa se tiene la siguiente relación:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

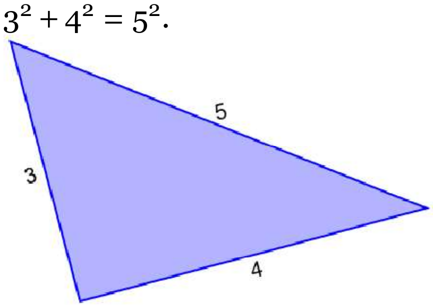
« Respuesta

El Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

Los pitagóricos descubrieron que números como 3, 4 y 5 no solo eran la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, sino que además tenían la propiedad de que la suma de de los *cuadrados* de los lados más pequeños (llamados catetos) igualaba el *cuadrado* del lado mayor (llamado hipotenusa). Es decir:

$3^2 + 4^2 = 5^2$.



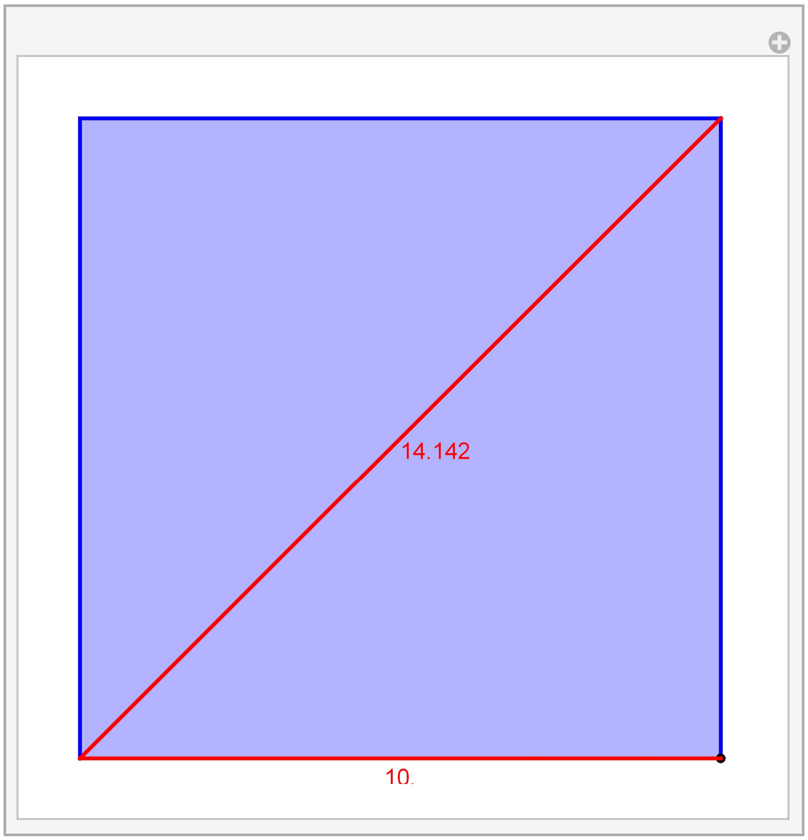
Generalizando, el Teorema de Pitágoras enuncia que en un triángulo rectánguo:
"***La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa***"
En otras palabras, si a y b son los catetos y c es la hipotenusa, el Teorema de Pitágoras resulta en la expresión:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Problema 2

⇒ *¿Qué relación existe entre la diagonal de un cuadrado y un lado?*

Como sugerencia puede dibujar varios cuadrados, calcular la medida del lado y de la diagonal (aproxime con dos o más cifras decimales), finalmente encontrar la relación de estas medidas.

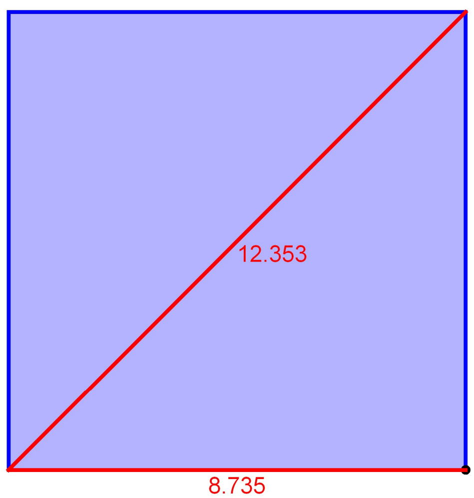


Consigne los resultados en la siguiente tabla:

	Longitud del lado	**Longitud de la diagonal (*aproximado*)**	**Relación entre la longitud de la diagonal y el lado (*aproximado*)**
Cuadrado 1	10	14.142	$\frac{14.142}{10} \approx 1.414$
Cuadrado 2	8.5		
Cuadrado 3	6		
Cuadrado 4	5.5		
Cuadrado 5	4		
Cuadrado 6	2.8		

» *Parte 1: tabla*

Puede completar la tabla con el siguiente aplicativo



Longitud del lado	8.735
Longitud de la diagonal (*aproximado*)	12.353
Relación entre la longitud de la diagonal y el lado (*aproximado*)	$\frac{12.353}{8.735}$
$\approx$	1.4142

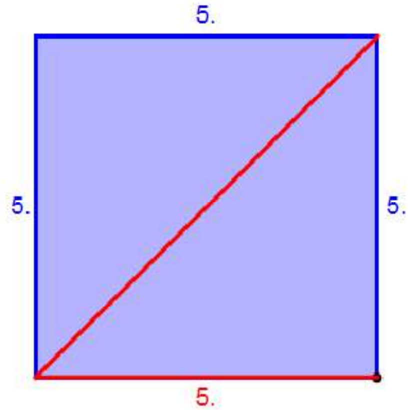
Dando algunos valores al lado del cuadrado, la tabla queda:

	Longitud del lado	**Longitud de la diagonal (*aproximado*)**	**Relación entre la longitud de la diagonal y el lado (*aproximado*)**
Cuadrado 1	10	14.142	$\frac{14.142}{10} \approx 1.4142$
Cuadrado 2	8.5	12.021	$\frac{12.021}{8.5} \approx 1.41424$
Cuadrado 3	6	8.485	$\frac{8.485}{6} \approx 1.41417$
Cuadrado 4	5.5	7.778	$\frac{7.778}{5.5} \approx 1.41418$
Cuadrado 5	4	5.657	$\frac{5.657}{4} \approx 1.41425$
Cuadrado 6	2.8	3.96	$\frac{3.96}{2.8} \approx 1.41429$

Note que la aproximación es similar en todos los cuadrados; al parecer, la relación entre la longitud de la diagonal y el lado es la misma sin depender de las medidas del cuadrado. La demostración sigue a continuación.

» *Parte 2: caso específico*

Suponga que la longitud del cuadrado es de 5 unidades,



Si se quiere encontrar la medida de la hipotenusa se puede utilizar el enunciado del *Teorema de* Pitágoras*:*

$$c^2 = 5^2 + 5^2$$
$$c^2 = 25 + 25$$
$$c^2 = 50$$

Esto quiere decir que el cuadrado de la hipotenusa es 50, por tanto, la hipotenusa es la raíz cuadrada positiva de 50

$$c^2 = 50$$
$$c = \sqrt{50}$$

Este es un **número irracional** y su representación decimal es infinita no periódica, por tanto, se suele utilizar una aproximación tomando algunas cifras decimales:

$$c = \sqrt{50}$$
$$c \approx 7.07107$$

La relación entre la longitud de la hipotenusa y el lado es:

$$\frac{\sqrt{50}}{5}$$

Este número también es un número irracional, cuya aproximación es:

$$\frac{\sqrt{50}}{5} \approx 1.41421$$

Por otro lado, si se tiene cuenta que $\sqrt{50} = \sqrt{5 \times 5 \times 2} = 5\sqrt{2}$, entonces la relación entre la longitud de la hipotenusa y el lado queda:

$$\frac{\sqrt{50}}{5} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$$

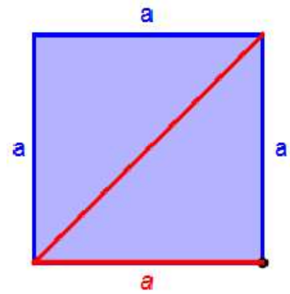
Note que las dos respuestas son equivalentes, pues $\sqrt{2}$ es un **número irracional** cuya aproximación es:

$$\sqrt{2} \approx 1.41421$$

Lo invitamos a ensayar otros cuadrados (por ejemplo de longitud 1, 4, 7 o 20 unidades) para que verifique que la relación entre la longitud de la hipotenusa y el lado de **cualquier** cuadrado es $\sqrt{2}$.

» *Parte 3: caso general*

Suponga ahora que la longitud del cuadrado es de *a* unidades,



Si se quiere encontrar la medida de la hipotenusa se puede utilizar el enunciado del *Teorema de* Pitágoras*:*

$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2\,a^2$$

por tanto, la hipotenusa es la raíz cuadrada de 2 a^2

$$c^2 = 2\,a^2$$
$$c = \sqrt{2}\;a$$

entonces la relación entre la longitud de la hipotenusa y el lado queda:

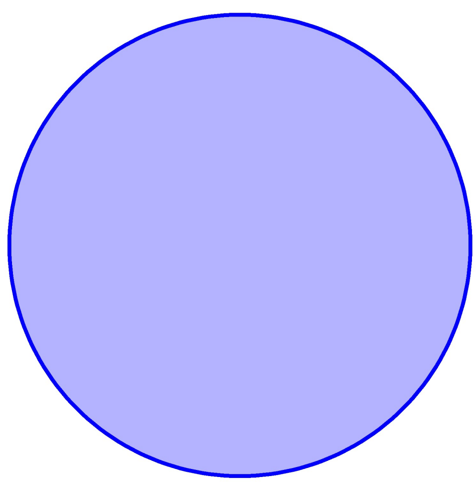
$$\frac{\sqrt{2}\;a}{a} = \sqrt{2}$$

La relación entre la longitud de la **hipotenusa** y el **lado** de un cuadrado (sin importar su medida) es $\sqrt{2}$.

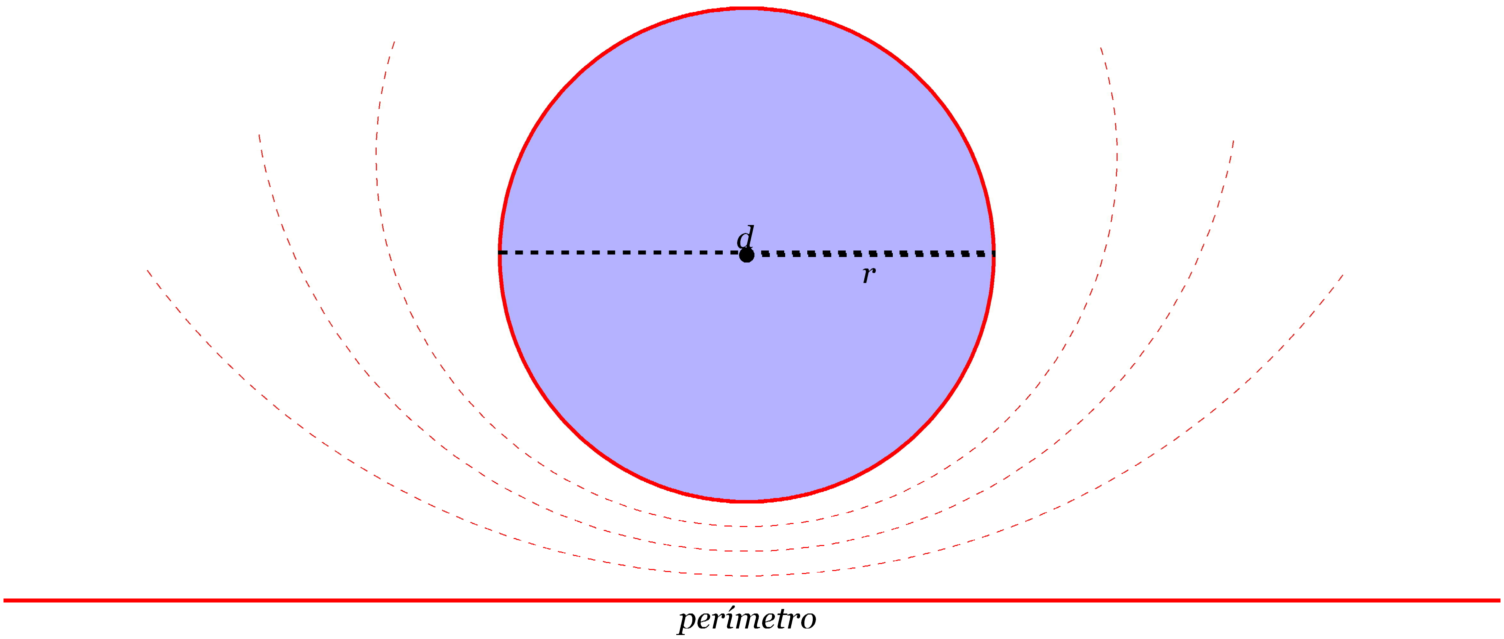
≪ Respuesta

Actividad: significado del número Pi (π).

En esta actividad usted va a desarrollar problemas que involucran al número irracional π . Para ello es necesario que consiga como mínimo 5 objetos que tengan forma circular, lo más perfectos posibles, ya que no funciona con elementos de forma ovalada o elíptica. Los elementos puedes ser platos, botellas, etc.



Se llama **radio de la circunferencia** al segmento que va desde el centro de la circunferencia hasta el extremo de esta, el **diámetro de la circunferencia** es dos veces el radio: es el segmento que va desde un extremo a otro y pasa por el centro. Se llama **perímetro de la circunferencia** a la medida del contorno del círculo; como es difícil medirlo, con la ayuda de la cuerda se bordea el círculo lo más firme posible y luego se mide esta longitud sobre el metro, lo más preciso posible.



Problema 1

Tome la medida del diámetro y radio de la circunferencia, mida el perímetro de cada uno de los objetos circulares y escriba los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

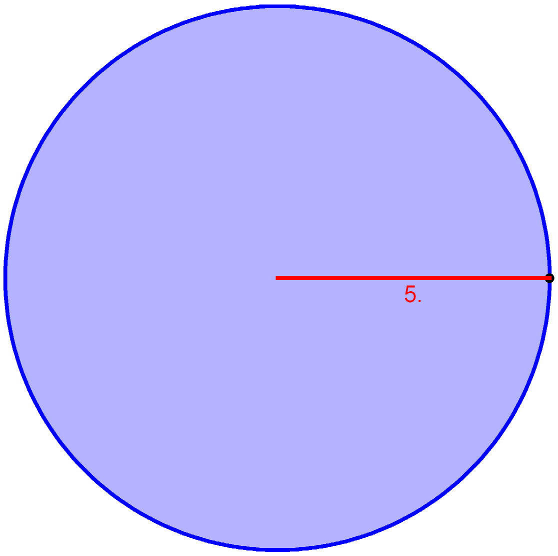
	diámetro	**radio**	**perímetro**	$\frac{\textbf{perímetro}}{\textbf{diámetro}}$	$\frac{\textbf{perímetro}}{\textbf{radio}}$
Objeto 1					
Objeto 2					
Objeto 3					
Objeto 4					
Objeto 5					

⇒ *¿Qué relación existe entre el diámetro y el perímetro de la circunferencia?*
¿Qué relación existe entre el radio y el perímetro de la circunferencia?

Solución

» *Tabla*

Puede completar la tabla con el siguiente simulador.



Longitud del diámetro	10.
Longitud del radio	5.
Longitud del perímetro (*aproximado*)	31.416
$\frac{\textbf{perímetro}}{\textbf{diámetro}}$ (***aproximado***)	3.1416
$\frac{\textbf{perímetro}}{\textbf{radio}}$ (***aproximado***)	6.2832

La tabla queda:

	diámetro	**radio**	**perímetro**	$\frac{\textbf{perímetro}}{\textbf{diámetro}}$	$\frac{\textbf{perímetro}}{\textbf{radio}}$
Objeto 1	2	1	6.283	3.1415	6.283
Objeto 2	3.5	1.75	10.97	3.14147	6.28293
Objeto 3	4.2	2.1	13.195	3.14167	6.28333
Objeto 4	6.7	3.35	21.086	3.13154	6.28308
Objeto 5	9	4.5	28.488	3.1416	6.28319

» *Solución*

Note que las aproximaciones de las últimas columnas son similares en todos los objetos; al parecer, la relación entre la longitud del perímetro y el diámetro es la misma sin depender de las medidas del circunferencia, lo mismo sucede con la relación del perímetro y el radio.

La relación entre la longitud de la **circunferencia** y su diámetro (sin importar su medida) es aproximadamente 3.1416.
La relación entre la longitud de la **circunferencia** y su **radio** (sin importar su medida) es aproximadamente 6.283, el doble de la anterior relación.

« Respuesta

El número π

Hacia el siglo III antes de Cristo, los griegos observaron que, sin importar la circunferencia, al establecer la relación entre su longitud y diámetro, el resultado siempre era el mismo. Ellos llamaron a ese valor π, que significa periferia.

Inicialmente se creía que el valor de π era el resultado de una división entre enteros, por ejemplo, Arquímedes, en el siglo III a. C. encontró que $\pi = \frac{22}{7} = 3.1428\ldots$. Sin embargo, a pesar de aplicar todas las operaciones posibles entre enteros, no fue posible obtener el valor exacto π, es decir, no era un número algebraico. Euler, en el siglo XVII, denominó a estos números que no eran algebraicos como números trascendentes, ya que trascienden más allá de las operaciones que se realizan comúnmente, pero solo hasta 1882, Lindemann demostró que π es trascendente.

Hasta la fecha, el valor de π, con algunos decimales, es:

$$\pi \approx 3.14159265358979323846264338328\ldots$$

Actividad: operando números irracionales.

Para terminar esta sección se proponen tres ejercicios de operaciones con números irracionales, estos servirán como introducción para el desarrollo del capítulo de expresiones algebraicas.

Ejercicio 1

Operar y simplificar la expresión $2+\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}$

Solución

$$2+\sqrt{3}+3-4\sqrt{3} = 5-3\sqrt{3}$$

Ejercicio 2

Operar y simplificar la expresión $\left(\frac{3}{3-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-3}{3+\sqrt{2}}\right)$

Solución

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{3-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-3}{3+\sqrt{2}}\right) &= \frac{(3)(-3)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{-9}{9+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2}\\ &= -\frac{9}{7}\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Operar y simplificar la expresión $(3+\pi)(2-\pi)$

Solución

$$\begin{aligned}(3+\pi)(2-\pi) &= 6-3\pi+2\pi-\pi^2\\ &= 6-\pi-\pi^2\end{aligned}$$

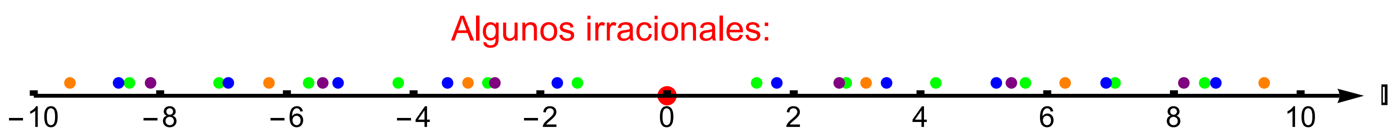
Resumen

A los números que no pueden ser expresados como fracción de dos números enteros se les llamó **números irracionales**. Este conjunto se denomina con la letra $\mathbb{I}$.

- Los números irracionales son aquellos que tienen notación decimal infinita no periódica, por ejemplo, $0.101001000100001\ldots$ donde cada vez se va agregando un cero antes de cada uno.
- Los números irracionales más conocidos utilizan letras especiales como notación, por ejemplo: *Pi*, cuya notación es $\pi \approx 3.14159\ldots$ que es la razón entre una circunferencia y su diámetro.

Número de Euler, cuya notación es $e \approx 2.7182\ldots$ que es la base de los logaritmos naturales.
Número áureo, cuya notación es $\phi \approx 1.6180\ldots$ también llamado número de oro o la divina proporción. Es el valor numérico de la proporción que guardan entre sí dos segmentos de recta a y b (a más largo que b), donde: $\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b}$.

$\mathbb{N}$ Números Naturales	$\mathbb{Z}$ Números Enteros	$\mathbb{Q}$ Números Racionales	$\mathbb{I}$ Números Irracionales



Números que no se pueden expresarr mediante la razón de números enteros, como por ejemplo π (relación entre una circunferencia y su diámetro) o e (número de Euler utilizado frecuentemente en problemas de crecimiento y financieros).
Se caracterizan por tener cola decimal infinita y no periódica y su conjunto se representa con la letra $\mathbb{I}$.

Operaciones con los números irracionales ⇒ $(\mathbb{I}, +)$ $(\mathbb{I}, \cdot)$

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios numéricos

Simplifique las siguientes expresiones

1. $\left(2\sqrt[3]{3} + 5 - 2\pi\right) - \left(4 - \sqrt[3]{3}\right) + (5\pi - 2)$
2. $(4 - 3\pi)(\pi - 3)$
3. $(e^3 - e^2) \div e$
4. $(\pi - 2)^2$
5. $3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 1$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. $\left(2\sqrt[3]{3} + 5 - 2\pi\right) - \left(4 - \sqrt[3]{3}\right) + (5\pi - 2)$

$$\left(2\sqrt[3]{3}+5-2\pi\right)-\left(4-\sqrt[3]{3}\right)+(5\pi-2) = 2\sqrt[3]{3}+5-2\pi-4+\sqrt[3]{3}+5\pi-2$$
$$= 3\sqrt[3]{3}+3\pi-1$$
$$\approx 12.751$$

2. $(4-3\pi)(\pi-3)$

$$(4-3\pi)(\pi-3) = 4\pi-12-3\pi^2+9\pi$$
$$= 13\pi-12-3\pi^2$$
$$\approx -0.768$$

3. $(e^3-e^2)\div e$

$$(e^3-e^2)\div e = \frac{e^3-e^2}{e}$$
$$= \frac{e^3}{e}-\frac{e^2}{e}$$
$$= e^2-e$$
$$\approx 4.671$$

4. $(\pi-2)^2$

$$(\pi-2)^2 = \pi^2-4\pi+4$$
$$\approx 1.303$$

5. $3\sqrt{2}-4\sqrt{8}+5\sqrt{32}-1$

$$(e^3-e^2)\div e = 3\sqrt{2}-4\sqrt{(4)(2)}+5\sqrt{(16)(2)}-1$$
$$= 3\sqrt{2}-4\left(2\sqrt{2}\right)+5\left(4\sqrt{2}\right)-1$$
$$= 3\sqrt{2}-8\sqrt{2}+20\sqrt{2}-1$$
$$= 15\sqrt{2}-1$$
$$\approx 20.213$$

» Problemas de aplicación

1. Verifique que se cumple el teorema de Pitágoras, cuando se construye un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cms.
2. Encuentre el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.
3. Encuentre el valor del lado de un cuadrado si la diagonal mide 5 cms.
4. Encuentre el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 4 cms.
5. Encuentre la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 6 cms.

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Verifique que se cumple el teorema de Pitágoras, cuando se construye un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cms.

   Al realizar la construcción se puede medir la longitud de la hipotenusa, la cual es de 5 cms, al hallar los cuadrados se prueba que $3^2+4^2=5^2$, ya que $9+16=25$. Intente realizar esta prueba de forma geométrica.
2. Encuentre el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.

   Si se llama d el valor de la diagonal, se tiene por Teorema de Pitágoras que $1^2+1^2=d^2$, por lo que $1+1=d^2$, es decir, $2=d^2$, en otras palabras $d=\sqrt{2}$, aproximando queda: $d\approx 1.414$.

3. Encuentre el valor del lado de un cuadrado si la diagonal mide 5 cms.

   Si se llama l el valor del lado del cuadrado, se tiene por Teorema de Pitágoras que $l^2 + l^2 = 5^2$, por lo que $2\,l^2 = 25$, es decir $l^2 = \frac{25}{2}$, en otras palabras $l = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, aproximando queda: $l \approx 3.535$.

4. Encuentre el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 4 cms.

   Si se llaman d el valor de la diagonal, se tiene por Teorema de Pitágoras que $4^2 + 4^2 = d^2$, por lo que $16 + 16 = d^2$, es decir, $32 = d^2$, en otras palabras $d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, aproximando queda: $d \approx 5.657$.

5. Encuentre la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 6 cms.

   Si se llama h el valor de la hipotenusa, a el cateto de lado 3 cms y b el cateto de lado 6 cms, se tiene por Teorema de Pitágoras que $a^2 + b^2 = h^2$, por lo que $3^2 + 6^2 = h^2$, es decir $9 + 36 = h^2$, $h^2 = 45$, en otras palabras $h = \sqrt{45}$, aproximando queda: $h \approx 6.708$.

5. Números reales

Un poco de historia...

La unión entre los números racionales y los números irracionales construyen el gran conjunto de los números reales. Anteriormente, se escribió acerca de cada uno de los subconjuntos que forman este conjunto, sin embargo, no se puede hacer un cierre a este capítulo sin mencionar un número que parece muy familiar pero que no fue aceptado tan fácilmente como parece, el cero.

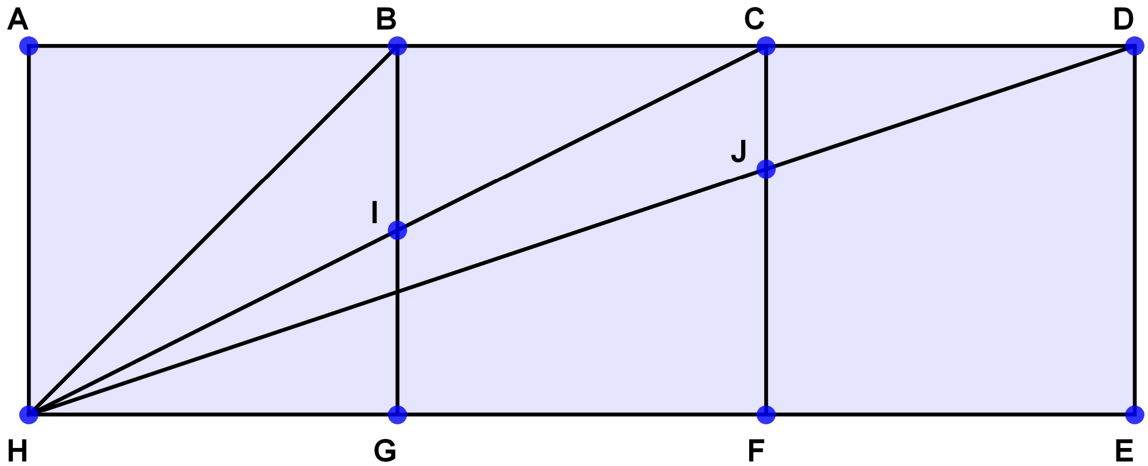
Aparece inicialmente como un espacio vacío en el sistema de numeración de los babilonios. Ptolomeo en el Almagesto usó el símbolo "0" para indicar que había un vacío entre las cifras. El cero fue introducido en Europa por los árabes quienes los conocían de los Hindúes. Los mayas lo conocieron y usaron el símbolo  en su sistema de numeración. Fibonacci, en el siglo XII, fue quien lo utilizó por primera vez en su libro Liber Abaci. Sin embargo, fue Peano en su sistema axiomático para los números naturales, quien postula al cero (0) como número en el año 1889.

Los reales cumplen todas las propiedades mencionadas dentro de los números racionales e irracionales, por lo que a continuación aparecen algunos ejercicios numéricos que se pueden solucionar.

Actividad

Dado el siguiente gráfico, en donde el lado de cada cuadrado mide 2 unidades, halle las longitudes de los segmentos $\overline{HB}$, $\overline{HC}$, $\overline{HD}$, $\overline{GI}$, $\overline{FJ}$ y clasifique sus resultados como números racionales o irracionales, escriba sus resultados en la tabla.

*Pista: Tenga en cuenta que el segmento $\overline{BG}$ divide a $\overline{HC}$ en **dos partes iguales** y los segmentos $\overline{BG}$ y $\overline{CF}$ dividen a $\overline{HD}$ en **tres partes iguales***



segmento	medida	racional	irracional
$\overline{HB}$			
$\overline{HC}$			
$\overline{HD}$			
$\overline{GI}$			
$\overline{FJ}$			

Solución

» *Longitud del segmento $\overline{HB}$*

En el triángulo HBG, la medida de los catetos $\overline{HG}$ y $\overline{GB}$ es 2, por lo que el valor de la hipotenusa $\overline{HB}$, según el teorema de Pitágoras es:

$$\begin{aligned} \overline{HB} &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4+4} \\ &= \sqrt{8} \\ &= \sqrt{4\,(2)} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

además, $2\sqrt{2}$ es un número irracional.

» *Longitud del segmento $\overline{HC}$*

En el trángulo HFC, la medida del cateto $\overline{HF}$ es 4 y la de $\overline{FC}$ es 2, por lo que el valor de la hipotenusa $\overline{HC}$, según el teorema de Pitágoras es:

$$\begin{aligned}\overline{HC} &= \sqrt{4^2 + 2^2}\\ &= \sqrt{16+4}\\ &= \sqrt{20}\\ &= \sqrt{4\,(5)}\\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

además, $2\sqrt{5}$ es un número irracional.

» *Longitud del segmento $\overline{HD}$*

En el triángulo HED, la medida del cateto $\overline{HE}$ es 6 y la de $\overline{ED}$ es 2, por lo que el valor de la hipotenusa $\overline{HD}$, según el teorema de Pitágoras es:

$$\begin{aligned}\overline{HD} &= \sqrt{6^2 + 2^2}\\ &= \sqrt{36+4}\\ &= \sqrt{40}\\ &= \sqrt{4\,(10)}\\ &= 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

además, $2\sqrt{10}$ es un número irracional.

» *Longitud del segmento $\overline{GI}$*

Para encontrar la longitud del segmento $\overline{GI}$, se sabe que la hipotenusa $\overline{HI}$ es la mitad del segmento $\overline{HC}$, como $\overline{HC}$ mide $2\sqrt{5}$, entonces $\overline{HI}$ mide $\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$. Además, en el triángulo HGI, la medida del cateto $\overline{HG}$ es 2, por lo que, aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\begin{aligned}\overline{GI} &= \sqrt{\sqrt{5}^2 - 2^2}\\ &= \sqrt{5-4}\\ &= \sqrt{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

además, 1 es un número racional.

» *Longitud del segmento $\overline{FJ}$*

Para encontrar la longitud del segmento $\overline{FJ}$, se sabe que la hipotenusa $\overline{HJ}$ es las dos terceras partes del segmento $\overline{HD}$, como $\overline{HD}$ mide $2\sqrt{10}$, entonces $\overline{HJ}$ mide $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{10}\right) = \frac{4\sqrt{10}}{3}$. Además, en el triángulo HFJ, la medida del cateto $\overline{HF}$ es 4, por lo que, aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\overline{FJ} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{10}}{3}\right)^2 - 4^2}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{9}(10) - 16}$$
$$= \sqrt{\frac{160}{9} - \frac{144}{9}}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{9}}$$
$$= \frac{4}{3}$$

además, $\frac{4}{3}$ es un número racional.

» *Tabla*

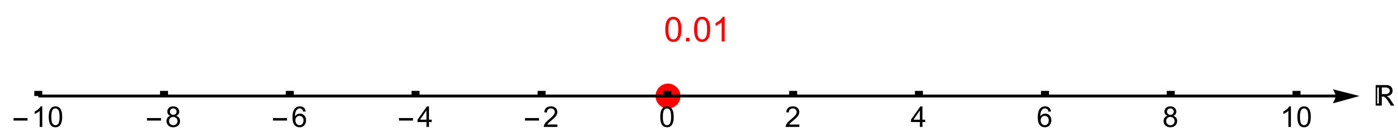
segmento	longitud	racional	irracional
$\overline{HB}$	$2\sqrt{2}$		$\times$
$\overline{HC}$	$2\sqrt{5}$		$\times$
$\overline{HD}$	$2\sqrt{10}$		$\times$
$\overline{GI}$	1	$\times$	
$\overline{FJ}$	$\frac{4}{3}$	$\times$	

Resumen

La unión de los conjuntos numéricos **Racionales** e **Irracionales** se llamó conjunto de los **números reales**. Este conjunto se denomina con la letra $\mathbb{R}$.

$\mathbb{N}$ Números Naturales	$\mathbb{Z}$ Números Enteros	$\mathbb{Q}$ Números Racionales	$\mathbb{I}$ Números Irracionales	$\mathbb{R}$ Números Reales

máximo 10 20 50 100



El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y del conjunto de números irracionales ($\mathbb{I}$), en este conjunto se definen las operaciones de la adición y multiplicación junto con sus propiedades. Se representa con la letra $\mathbb{R}$.

Operaciones con los números reales ⇒ $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{R}, \cdot)$ Sustracción División

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios numéricos

1. $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}$

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\sqrt{5}\left\{3-4\left(\sqrt{5}-1\right)\frac{1}{2}\right\}$

4. $\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}$

$$\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-\pi}{2}=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{4}+\frac{2\left(\sqrt{3}-\pi\right)}{4}$$
$$=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{4}+\frac{2\sqrt{3}-2\pi}{4}$$
$$=\frac{2\pi-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\pi}{4}$$
$$=\frac{0}{4}$$
$$=0$$

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2^3}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2^3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{9}$$
$$\approx 0.314$$

3. $\sqrt{5}\left\{3-4\left(\sqrt{5}-1\right)\frac{1}{2}\right\}$

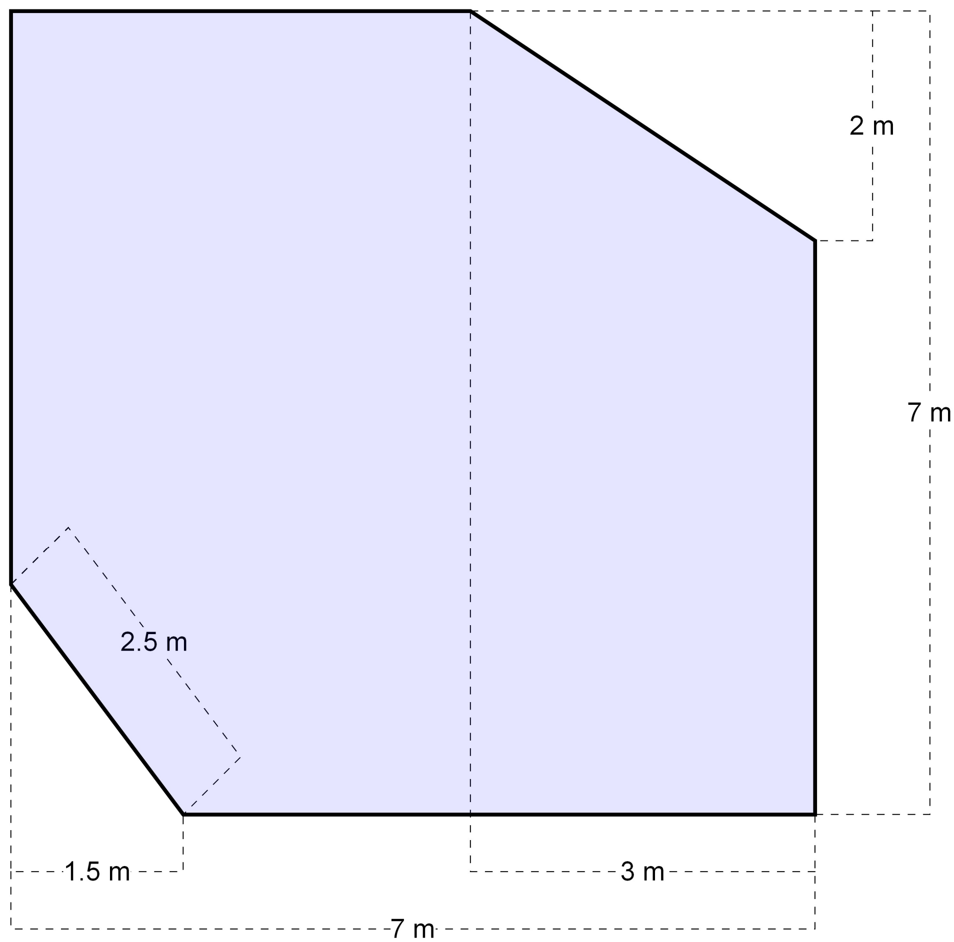
$$\sqrt{5}\left\{3-4\left(\sqrt{5}-1\right)\frac{1}{2}\right\}=\sqrt{5}\left\{3-(4)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\right\}$$
$$=\sqrt{5}\left\{3-2\left(\sqrt{5}-1\right)\right\}$$
$$=\sqrt{5}\left\{3-2\sqrt{5}+2\right\}$$
$$=\sqrt{5}\left\{5-2\sqrt{5}\right\}$$
$$=5\sqrt{5}-2(5)$$
$$=5\sqrt{5}-10$$
$$\approx 1.180$$

4. $\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\left(4-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}-3}{2+\sqrt{6}-\sqrt{6}-3}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}-3}{-1}$$
$$=3+\sqrt{6}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$$
$$\approx -7.136$$

» Problemas de aplicación

1. Luis va a embaldosar el piso de su local. Al hacer un plano del piso, él realiza el siguiente dibujo:



1.1. ¿Cuántos metros cuadrados de baldosa debe comprar? (*redondee a la siguiente undidad*)

1.2. Si cada baldosa tiene una medida de 60 cm $\times$ 60 cm y tiene un costo de \$98,000 por metro cuadrado, ¿cuántas baldosa se necesitan?

1.3. ¿Cuál es el costo de las baldosas compradas?

2. A Juana le dejaron la siguiente tarea en su clase de matemáticas: dibujar un cuadrado de lado un centímetro y con base en este, dibujar otro cuadrado que tenga tres veces su área. ¿Qué relación existe entre el lado del segundo cuadrado respecto al primer cuadrado?

3. Simplifique lo más posible la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{\frac{81}{16}}} + \frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Luis va a embaldosar el piso de su local.

1.1. ¿Cuántos metros cuadrados de baldosa debe comprar?
Esta pregunta se puede solucionar encontrando el área del polígono dibujado, para esto se halla el área un cuadrado de 7 metros y se quita el área de las esquinas:
Área del cuadrado: $7 \times 7 = 49\ m^2$.
El área a remover de la esquina superior derecha es la de un triángulo cuya base mide 3 m y altura 2 m, por tanto, el área es: $\frac{2\times 3}{2} = 3\ m$.

El área a remover de la esquina inferior izquierda es la de un triángulo cuya base mide 1.5 m. Se debe encontrar la altura, ya que se conoce la medida de la base e hipotenusa del triángulo se puede hallar la medida de la
altura:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2.5^2 - 1.5^2} \\ &= \sqrt{6.25 - 2.25} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área es: $\frac{1.5 \times 2}{2} = 1.5\ m^2$.
Así, el área del polígono es $49\ m^2 - 3\ m^2 - 1.5\ m^2 = 44.5\ m^2$.
Redondeando, Luis debe comprar $45\ m^2$ de baldosa.

1.2. Si cada baldosa tiene una medida de 60 cm × 60 cm y tiene un costo de \$ 98,000 por metro cuadrado, ¿cuántas baldosa se necesitan?
El área que cubre cada baldosa (en metros cuadrados) es $0.6 \times 0.6 = 0.36\ m^2$, el número de baldosas necesarias resulta de dividir el área en donde se van a poner las baldosas entre el área de cada baldosa:

$$\frac{45}{0.36} \approx 125$$

es decir, son necesarias 125 baldosas.

1.3. ¿Cuál es el costo de las baldosas compradas?
Si se necesitan $45\ m^2$, y cada una metro cuadrado \$ 98,000, entonces se debe multiplicar los metros cuadrados por su valor:

$$45 \times 98\,000 = 4\,410\,000$$

El costo es de \$ 4,410,000 para embaldosar el local.

2. A Juana le dejaron la siguiente tarea en su clase de matemáticas: dibujar un cuadrado de lado un centímetro y con base en este, dibujar otro cuadrado que tenga tres veces su área. ¿Qué relación existe entre el lado del segundo cuadrado respecto al primer cuadrado?

Al construirlo y hallar sus áreas se tiene que el área del cuadrado de lado 1 es 1 cm². Como el segundo cuadrado debe tener tres veces el área del primero, el área del segundo cuadrado es 3 cm². Si se llama x a la longitud del lado del segundo cuadrado, se tiene que:

$$A = x^2 = 3\ \text{cm}^2$$

Por lo que $x = \sqrt{3}$ cm.
La medida del lado del segundo cuadrado es $\sqrt{3}$ veces la medida del lado del primero.

3. Simplifique lo más posible la siguiente expresión algebraica:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt{\frac{81}{16}}} + \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} &= \frac{-3}{\frac{9}{4}} + \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{2}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\,(4)}} \\ &= \frac{-12}{9} + \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{4}{3} + 4 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{8}{6} + \frac{24}{6} + \frac{3}{6} \\ &= \frac{-8+24+3}{6} \\ &= \frac{19}{6} \end{aligned}$$