Unidad 4

Funciones

1. Generalidades de funciones

En esta unidad se comenzará con el recorrido de funciones y sus propiedades. Como se verá en el futuro, las funciones son un mecanismo matemático muy general que sirve para representar muchas situaciones de la vida real como es el caso de resultados de la física (espacio recorrido en términos de la velocidad y tiempo transcurrido), medicina (cantidad de medicamento a aplicar como una respuesta a la gravedad de los síntomas), economía (precio de un artículo en función de su demanda), transporte (cantidad de buses en la malla vial dependiendo de la hora del día), etc., por solamente mencionar algunos ejemplos. Las funciones se encuentran en prácticamente todos los campos de acción del emprendimiento humano y serán de gran utilidad en el quehacer de cualquier profesional.

¿Qué es una función?

Situación: Una tarde de ocio

En un parque de diversiones, el primer dmi
mes la entrada es gratis y las atracciones "A
"Carrusel", "Mini rueda", "Paseo a caballo",
ground", "Sillas voladoras", "Soft play", "Ta
té", "Tobogán", "Tortugas" y "Vía panameri
tienen un costo de $ 3300 pesos.

Alicia desea ir al parque con sus amigos a pa
tarde y para ello debe planear cuánto dinero
llevar y en que desea gastarlo. Suponga que
porte de ida y regreso al parque vale $ 1000

Suponga que Alicia piensa entrar a solo dos atracciones ella sabe que la cantidad de dinero a gastar se puede encontrar mediante la expresión:

$$10\,000 + 3300\,(\mathbf{2}) = 16\,600$$

por otro lado, si Alicia piensa entrar a cuatro atracciones, la cantidad de dinero a gastar esta dada por la expresión:

$$10\,000 + 3300\,(\mathbf{4}) = 23\,200$$

Y si Alicia piensa entrar a todas las atracciones que tienen un costo de $3300 pesos, el gasto total se puede hallar mediante la expresión:

$$10\,000 + 3300\,\mathbf{(11)} = 46\,300.$$

Notar entonces que existe cierto tipo de relación entre *el número de atracciones* y el *dinero total gastado* en la tarde de ocio (entre más atracciones, mayor será la cantidad de dinero).

Este tipo de relación ocurre muy seguido en todo tipo de situaciones cotidianas, como es el caso del *ingreso de una venta* con la *cantidad de artículos vendidos*, el *área de un terreno rectangular* con las *dimensiones de este*, etc. Relaciones de este tipo se conocen como ***funciones*** y se estudiarán en este capítulo.

Problema

⇒ *Encuentre una relación algebraica que represente el valor a pagar* (G) *dependiente del número de atracciones* (a).

0 V

⇑

atracciones

OPERACIONES (*relación algebraica*)

valor a pagar

⇓

$10 000

Alicia va al parque pero no entra a ninguna atracción, solo paga el transporte ($10000)

Solución

En el caso de Alicia, se podría representar el dinero gastado G mediante una ***función*** f que *depende del número de atracciones*. Se puede usar la notación $G = f\,(a)$. ¿Pero cuál sería entonces la forma explícita o concreta de f?

Según las cuentas que se hicieron con anterioridad, para dos atracciones se tiene un dinero gastado de $10\,000 + 3300\,\mathbf{(2)} = 16\,600$, mientras que en caso de cuatro, se tiene $10\,000 + 3300\,\mathbf{(4)} = 23\,200$. De lo anterior se desprende que en el caso de a atracciones se tendría un gasto de $10\,000 + 3300\,(\boldsymbol{a})$ (a es el número de atracciones) y por tanto, se obtiene que

$$G = f(a) = 10\,000 + 3300\,a$$

≪ Respuesta

0

⇑

atracciones

OPERACIONES (*relación algebraica*)

valor a pagar

⇓

$10 000

$f(a)=10000+3300a \Longrightarrow f(0)=10\,000$

Esta función es un caso particular de un tipo de funciones llamadas **funciones lineales**.

En el anterior problema se dice que G es ejemplo de una **variable dependiente** (*imagen)*, mientras que la variable a se conoce como **variable independiente** (*argumento)*.

Definición de una función

Definición de función:
Una **función** f de un conjunto D (**dominio**) a un conjunto R (**rango**) es una *regla de transformación o asignación* que a cada elemento x de D le asigna un **único** elemento $f(x)$ de R.

Argumentos e imágenes de funciones ⇒ $\boxed{(x, f(x))}$

El uso de la palabra **único** es un aspecto importante en la definición de una función. Piense en la edad de un ser humano. *¿Tendría sentido decir que Alicia tiene 15 años y 20 años al mismo tiempo?*, claro que no. La edad es una función, pues a cada ser humano se asigna un único entero positivo que resulta ser la edad en años cumplidos.

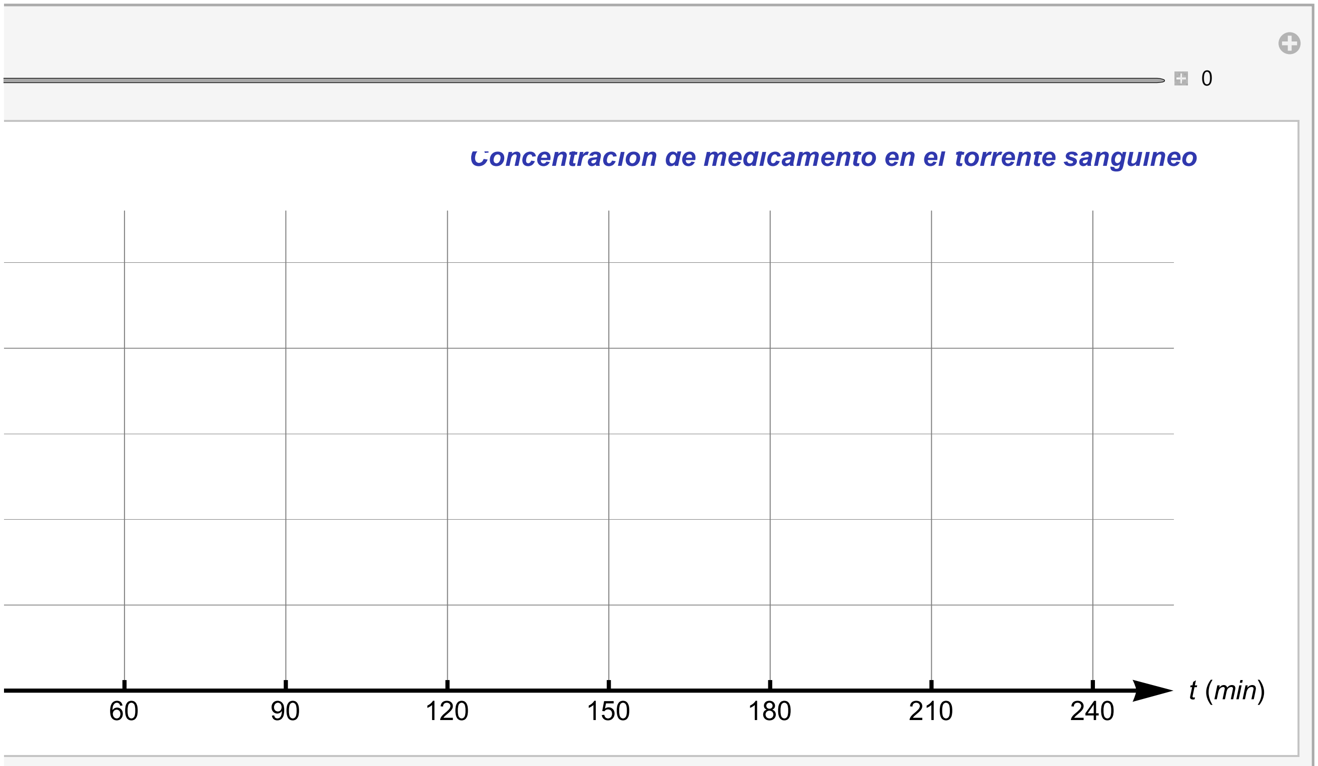
Para seguir con el estudio de las funciones, es conveniente introducir la notación de función de Euler $y = f(x)$ que se lee en español como "y es igual a f de x", x representa la **variable independiente** (argumento), mientras que y representa la **variable dependiente** (imagen de x).

¿Cómo representar una función?

Situación: Toma de un medicamento

Una compañía farmacéutica está investigando un nuevo medicameto, inyectable: para evaluar la efectividad se debe inyectar la droga en pacientes de prueba, y tomar muestras de sangre cada cierto tiempo para poder medir la concentración en el torrente sanguíneo (mg / cm^3).

El siguiente **interactivo** muestra la concentración del medicamento en la sangre de un paciente cada 10 minutos en el lapso de dos horas.



Note cómo aquí la variable $C(t)$ (concentración del medicamento) es la **variable dependiente**, mientras que la variable t (tiempo después de inyectar el medicamento) es la **variable independiente**. Como es de esperarse, una vez inyectado el medicamento la concentración de este en la sangre varía a medida que pasa el tiempo.

Aspectos relevantes de la función:
→ C: *nombre de la función* .
→ t: *variable independiente* o *argumento*.
→ y o $C(t)$: *variable dependiente* o *la imagen* de t.

Píldora

Problema 1

Suponga que usted es el encargado de tomar y analizar los datos, lo primero que quiere hacer es una tabla en donde pueda organizarlos.

⇒ *Elabore una tabla de dos renglones (o columnas) en donde el primer renglón corresponda al* ***tiempo*** *y el segundo renglón corresponda a la* ***concentración del medicamento*** *en el torrente sanguíneo (aproximadamente), los datos los obtiene de la gráfica interactiva.*

Solución

Como las muestras se toman cada diez minutos durante dos horas, t puede tomar los valores:
$t = 0, 10, 20, 30, 40, \ldots, 240$

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
C(t)																						

Para hallar las imágenes de cada valor se puede utilizar el interactivo y aproximar los resultados

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$C(t)$	0	0.24	0.4-0	0.4-8	0.5-0	0.4-9	0.4-6	0.43	0.4-0	0.37	0.34	0.32	0.3-0

t	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
$C(t)$	0.28	0.26	0.25	0.24	0.22	0.21	0.20	0.19	0.18	0.18	0.17	0.16

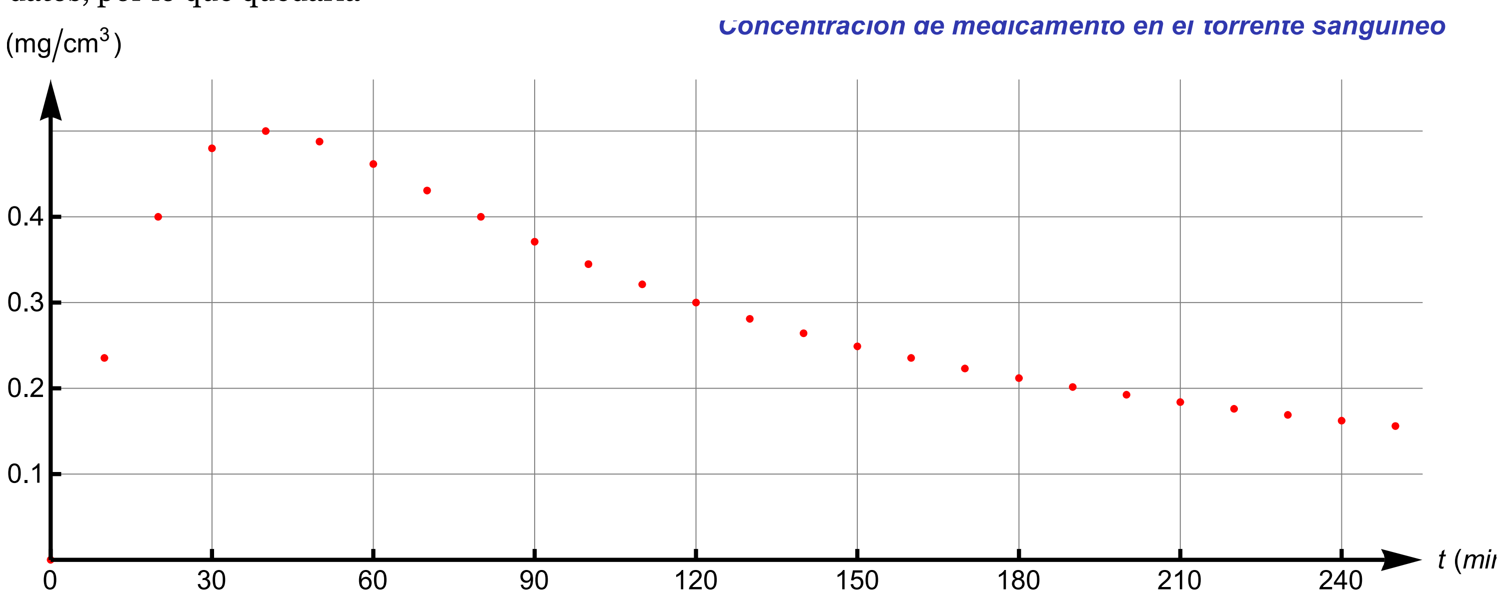
Problema 2

Ahora que ya tiene los datos organizados, quiere colocarlos todos en una gráfica

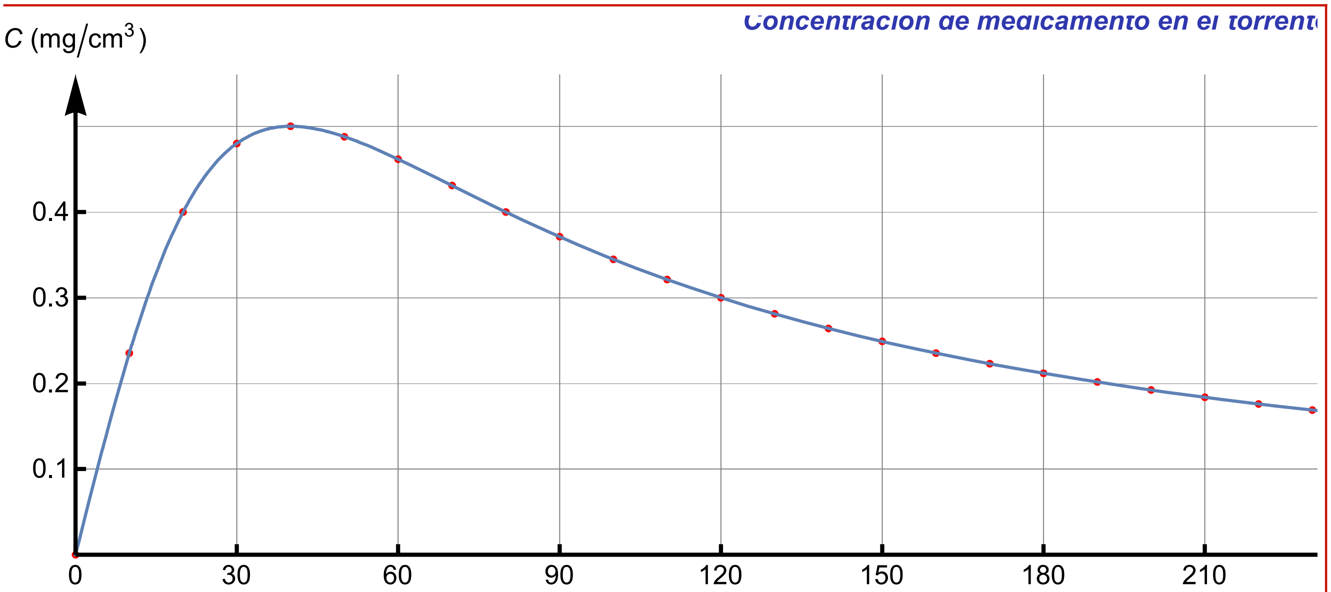
⇒ *En un plano similar al mostrado en la actividad coloque todos los datos (como puntos), y bosqueje una gráfica de la función uniéndolos con una curva suave que pase por todos.*

Solución

En un plano cartesiano se colocan las parejas ordenadas $(t,\ C(t))$, según el ejercicio anterior, se tienen 24 datos, por lo que quedaría

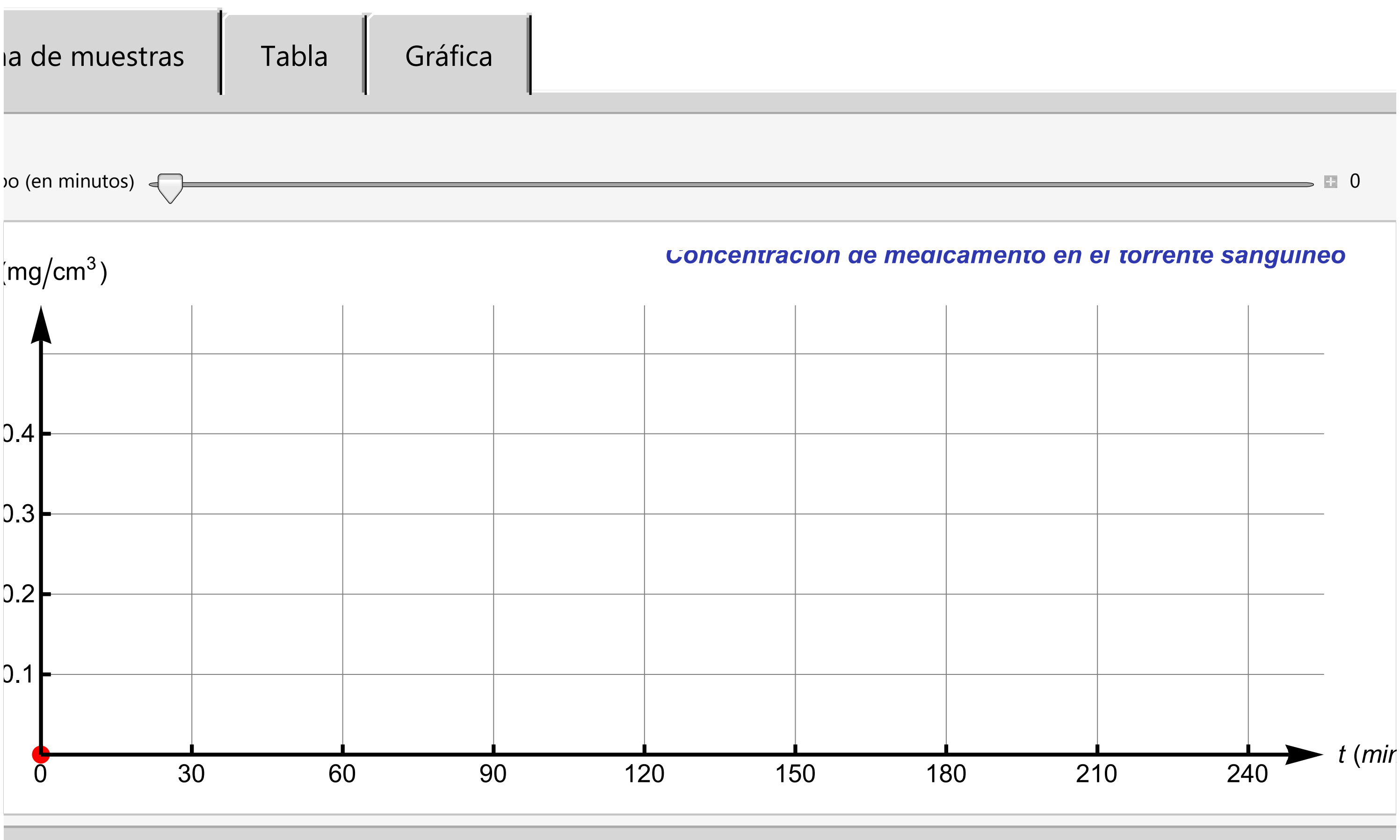


Luego, se puede trazar la gráfica uniendo estos puntos con una curva suave



Problema 3

Con los datos del experimento organizados en una tabla y en una gráfica se pueden sacar varias conclusiones, puede utilizar el siguiente interactivo.



⇒ *Use su gráfica para estimar la concentración de medicamento en el torrente sanguíneo después de dos horas y cuarenta y cinco minutos de inyectado.*

En notación matemática, este ejercicio pide *encontrar la imagen de 165* (dos horas y cuarenta y cinco minutos), esto es, hallar $C(165)$

Píldora

Solución

$C(165)$ es aproximadamente 0.2285, este dato no está en la tabla, pero se peude aproximar tomando los valores cercanos.

$C(165) \approx 0.2285$

≪ Respuesta

⇒ *¿En qué momento la concentración del medicamento es exactamente 0.4 mg / cm³?, ¿la respuesta es única? Explique su razonamiento*

Este ejercicio pide *encontrar el o los elementos del dominio tales que su imagen es 0.4*, esto es, hallar los t tal que $C(t) = 0.4$.

Píldora

Solución

Se pide hallar t tal que $C(t) = 0.4$, los resultados de la tabla muestran que hay dos tiempos en donde se cumple esta condición, $t = 20$ y $t = 80$, es decir, a los veinte minutos y a la hora y veinte minutos.

$t = 20$ y $t = 80$

≪ Respuesta

⇒ *Suponiendo que el medicamento tendrá el efecto deseado solo cuando su concentración es superior o igual a 0.2 mg / cm³, ¿en qué intervalo de tiempo se puede garantizar que el medicamento tiene efecto en el paciente?*

Solución

Según la información de la gráfica, es posible observar que el primer instante en que la concentración del medicamento supera los 0.2 mg / cm³ ocurre alrededor de los 8.5 minutos después de ser inyectado, mientras que dicha concentración vuelve a cruzar dicho umbral alrededor de los 190 minutos después de ser aplicado. Se concluye que el intervalo de tiempo donde es efectivo el medicamento es $[8.5,\ 190]$

El medicamento tendrá efecto en el intervalo $[8.5,\ 190]$.

≪ Respuesta

Diferentes representaciones de funciones

En el problema anterior se evidencia que una función se puede representar de varias maneras. En general, se puede escribir una función de alguna de las siguientes formas:

- **Verbal**, por medio de descripción de palabras. Generalmente representa la descripción de la función.
- **Algebraica**, por medio de una expresión matemática. La expresión matemática evidencia la regla de tranformación de los elementos x (variable independiente) a los elementos $f(x)$ (variable dependiente).
- **Numérica**, por medio de una tabla de datos. La tabla tiene dos filas o columnas; en la primera van algunos elementos correspondientes a la variable independiente, en la segúnda van relacionadas las imágenes de cada uno de los elementos.
- **Gráfica**, por medio de una gráfica. Se recurre al plano cartesiano donde se dibujan los puntos $(x,\ y)$ tales que $y = f(x)$, siendo x la variable independiente y y la variable dependiente.

A continuación puede ver algunos ejemplos, note que no siempre resulta fácil utilizar todas las representaciones de las funciones:

funciones

Definición de función:
Una **función** f de un conjunto D (**dominio**) a un conjunto R (**rango**) es una *regla de transformación o asignación* que a cada elemento x de D le asigna un **único** elemento $f(x)$ de R.

Argumentos e imágenes de funciones ⇒ $(x, f(x))$

Diferentes representaciones de las funciones

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8

Polinomios: Objetos y fenómenos se pueden modelar por medio de polinomios, por ejemplo, el arco de Corferias (Bogotá, Colombia) se puede modelar por medio de un polinomio de grado 2.

$$y = -0.006\,x^2 + 2.916\,x - 32.74$$

x	$f(x)$
50	98.2269
100	199.542
150	271.196
200	313.188
250	325.519
300	308.189
350	261.197
400	184.544
450	78.2299

Propiedades de una función

Situación: cercado de un terreno

Bernardo recibe a manera de herencia un terreno y desea usarlo para criar ganado. Para que no se escapen los animales, es necesario cercar el terreno.

Problema 1

Suponiendo que el terreno tiene forma de cuadrado y tiene una extensión de 25 km^2

⇒

¿Cuál es la cantidad de alambre que tiene que comprar Bernardo para cercar completamente el terreno?

Solución

Si x representa la longitud del lado del terreno, se tiene que $x^2 = 25$, por tanto, $x = \sqrt{25} = 5$. Como el terreno tiene cuatro lados,

Bernardo debe comprar $4 * 5 = 20$ km o 20 000 metros de alambre para cercar el terreno.

≪ Respuesta

⇒ Suponga ahora que el terreno es cuadrado, pero no se conoce explícitamente el área. En este caso, si se asigna A como una variable independiente que represente la extensión del terreno.

¿Cuál sería entonces una función $L = f(A)$ que relacione la cantidad de alambre L a comprar en términos de A?

Solución

Siguiendo el mismo razonamiento que el problema anterior, si x representa la longitud del lado del terreno, se tiene que $x^2 = A$, por tanto $x = \sqrt{A}$. Como el terreno tiene cuatro lados, se debe comprar $4\sqrt{A}$ km de alambre para cercar el terreno, por tanto:

La función que relaciona la cantidad de alambre a comprar es:

$$L = f(A) = 4\sqrt{A}$$

≪ Respuesta

⇒ *¿Qué sucede si $A = 169$, $A = 36$?*

Solución

Cuando $A = 169$ se tiene

$L = A(169) = 4\sqrt{196} = 52$

Cuando $A = 36$ se tiene

$L = A(36) = 4\sqrt{36} = 24$

≪ Respuesta

Problema 2

⇒ *¿Tiene sentido ingresar un número negativo en esta función?*

Solución

¿Ha escuchado hablar de un área negativa? ¿Tiene sentido decir que la extensión de cierto país es de $-1\,000\,000$ km^2? Claro que no. De otro lado, ¿existe un número (real) tal que su cuadrado sea negativo? ¿Qué nos dice en el anterior caso las leyes de signos? No es posible.

Ya que no tiene sentido ingresar un número negativo, se dice entonces que los números negativos no se encuentran el el **dominio de la función**. Por tanto, el dominio de la función f son los números reales positivos incluyendo el cero; esta situación se denotará de la siguiente manera:

$$\text{Dom } f = [0, \infty)$$

No tiene sentido hablar de áreas negativas.

≪ Respuesta

⇒ *Ahora, ¿puede esta función devolver valores negativos de L?*

Solución

De la misma manera, como no tiene sentido que la función devuelva números negativos, se dice entonces que los números negativos no se encuentran en el **rango de la función**. Por tanto, el rango de la función f son los números reales positivos incluyendo el cero y esta situación se denotará de la siguiente manera:

$$\text{Ran } f = [0, \infty)$$

Por las consideraciones anteriores de mediciones de longitudes y áreas no tendría sentido en este caso.

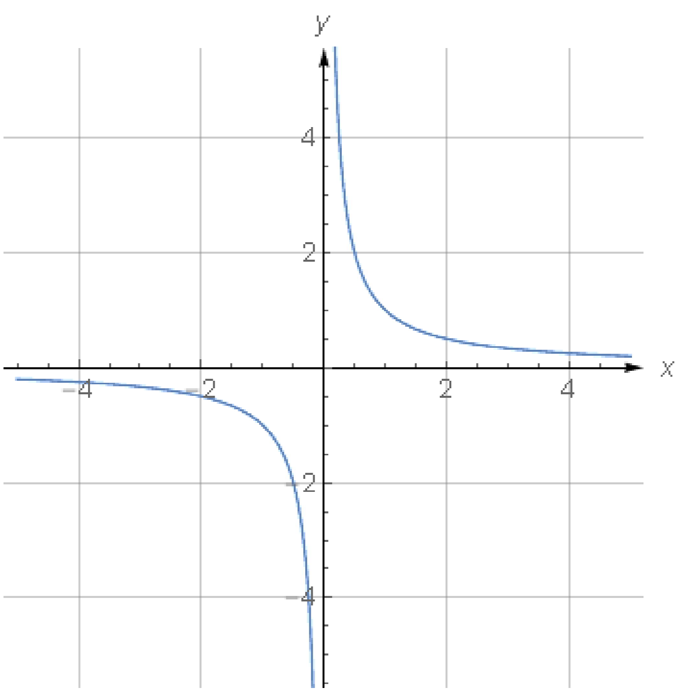
≪ Respuesta

Dominio y Rango

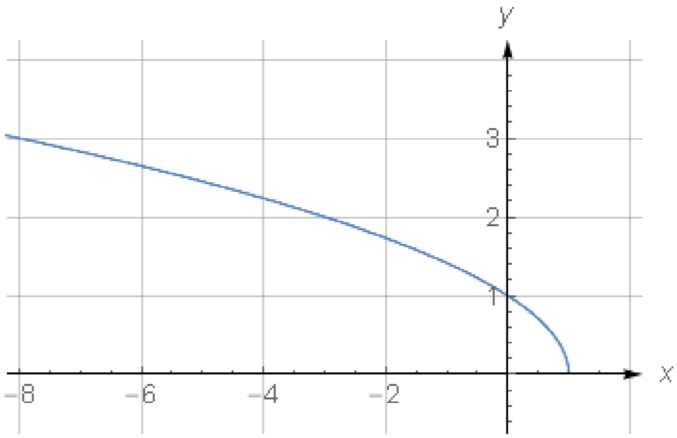
Como ha visto, una función permite modelar problemas y adaptarlos a situaciones matemáticas, esta es una de las razones por las cuales este concepto es muy importante y por tanto, se debe estudiar elementos que permitan una descripción detallada, los cuales son útiles en el análisis de modelos particulares, tales como la función lineal y cuadrática.

*El **Dominio de una función** es el conjunto de posibles valores de la variable independiente en dicha función.*

En funciones como $f(x) = 15\,x + 12$, $h(x) = -\frac{2\,x+2}{5}$ o $v(t) = 9.8\,t^2 - 12\,t + 2$ no hay restricciones en los valores de la variable independiente y esta puede ser cualquier número. Para estos casos el dominio de las funciones es todos los reales: Dom $f = \mathbb{R}$, Dom $h = \mathbb{R}$, Dom $v = \mathbb{R}$.



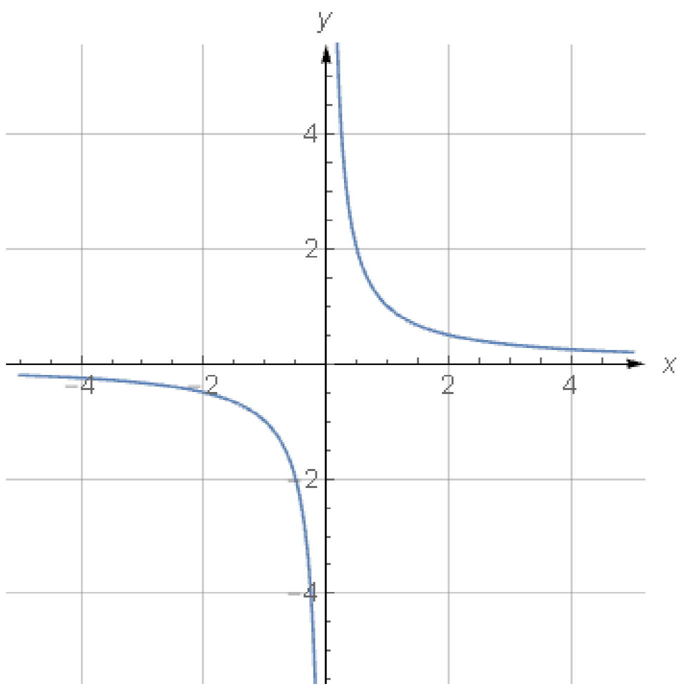
Por otro lado, en la función $f(x) = \frac{1}{x}$, la variable x puede tomar cualquier valor **excepto** cero, pues no se puede dividir por cero. Por tanto, el dominio se puede denotar como: Dom $f = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$ o en notación de intervalo como Dom $f = (-\infty,\ 0) \bigcup (0,\ \infty)$..



En la función $g(x) = \sqrt{1 - x}$, los elementos en el interior de la raíz **no pueden ser negativos**, por tanto, la expresión $1 - x$ debe ser mayor o igual a cero ($1 - x \geq 0$), ya se ha estudiado desigualdades así que $x \leq 1$ son los posibles valores de x. El dominio de la función se puede denotar como $\text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 1\}$ o en notación de intervalo como $\text{Dom } g = (-\infty,\ 1]$.

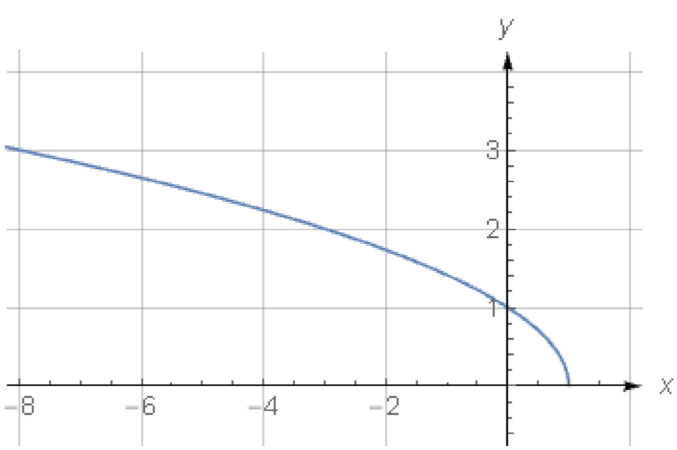
Cuando la función proviene del modelamiento de una situación, es importante entender el contexto de esta y determinar el dominio correspondiente.

*El **Rango de una función** es el conjunto de todos los posibles valores que puede alcanzar la **variable dependiente**. Aunque en cursos futuros se verán técnicas más avanzadas para encontrar el rango de una función, en este momento es útil utilizar la representación gráfica de una función para calcular su rango. A continuación se tienen tres ejemplos relevantes.*



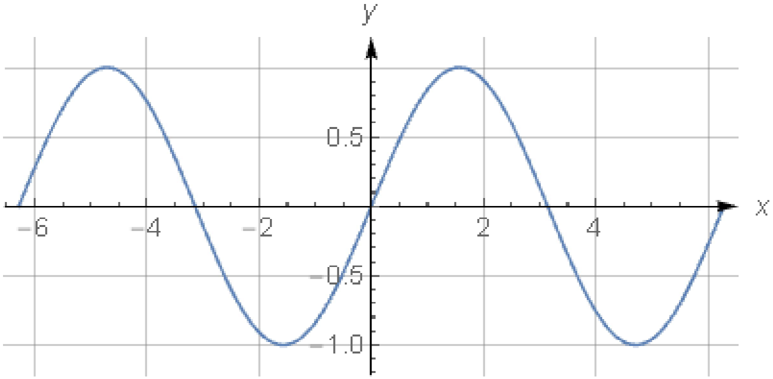
Ejemplo 1: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Para la función f, notar que el único valor que no puede tomar la variable dependiente es precisamente cero, en este caso se dice que $\text{Ran } f = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$.

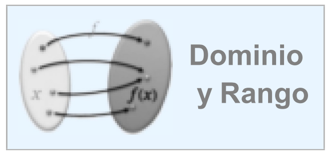


Ejemplo 2: $g(x) = \sqrt{1 - x}$.

En este caso se observa que para la función g, los números negativos no se encuentran en el rango de la función. Se concluye que $\text{Ran } g = [0,\ \infty)$.



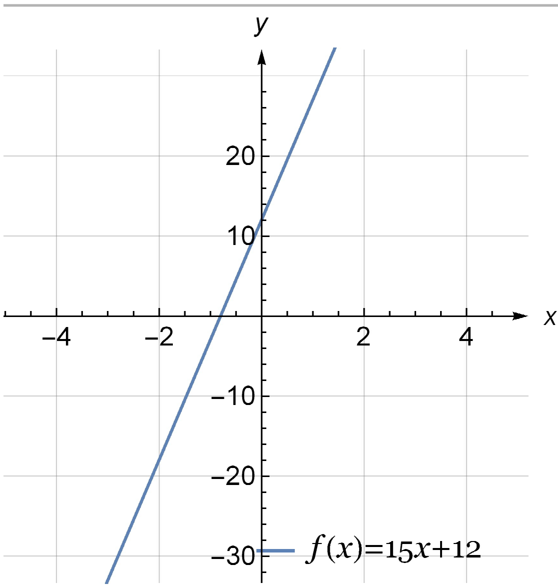
Ejemplo 3: $h(x) = \sin x$
Se tiene en esta situación la gráfica de la función trigonométrica seno. Aunque este tipo de funciones se estudiarán en el futuro con profundidad, lo anterior no impide apreciar de su representación gráfica que Ran $h = [-1, 1]$.



Definición:
El ***Dominio de una función*** es el conjunto de posibles valores de la variable independiente en dicha función.
El ***Rango de una función*** es el conjunto de todos los posibles valores que puede alcanzar la variable dependiente. Aunque en cursos futuros se verán técnicas más avanzadas para encontrar el rango de una función, en este momento es útil utilizar la representación gráfica de una función para calcular su rango. A continuación se tienen tres ejemplos relevantes.

Dominio y rango de algunas funciones

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8



$f(x) = 15\,x + 12$
Dominio: como no hay restricciones en los valores de la variable independiente, esta puede ser cualquier número, por lo tanto:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

Rango: al ser una función lineal se evidencia que las imágenes de esta pueden ser cualquier número real, por lo tanto:

$$\text{Ran } f = \mathbb{R}$$

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios procedimentales

1. En las siguientes funciones determine el dominio:

1.1. $f(x) = \frac{3\,x-5}{2}$

1.2. $f(x) = \frac{3-x}{x-2} + \frac{1}{x}$

1.3. $f(x) = \sqrt[4]{4-2\,x-3\,x^2}$

1.4. $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

1.5. $g(x) = \sqrt[3]{3-\frac{1}{x}}$

2. Determinar si las siguientes situaciones se pueden modelar con una función

2.1. A cada entero positivo se le asigna su cubo.

2.2. A cada entero no negativo se le asignan las personas del planeta que tienen dicha edad en años.

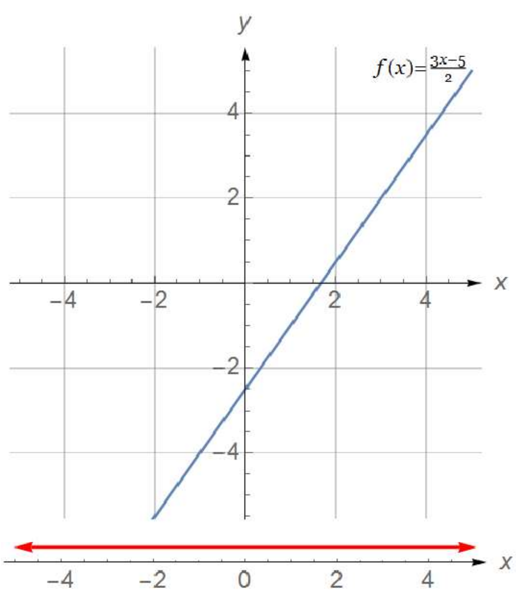
2.3. A cada palabra del idioma español se le asigna el número de letras necesarias para escribirla.

2.4. A cada tipo de automóvil se le asignan los concesionarios donde se vende dicho modelo.

» *Soluciones a los ejercicios*

1. En las siguientes funciones determine el dominio:

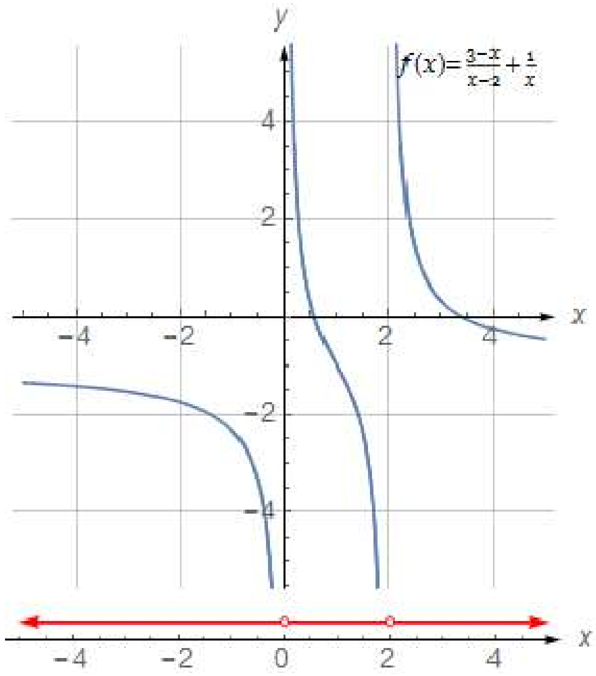
1.1. $f(x) = \frac{3\,x-5}{2}$



En la función no hay alguna restricción para los elementos de entrada, el valor de x puede ser cualquier número real, por tanto, el dominio es todos los número reales,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

1.2. $f(x) = \frac{3-x}{x-2} + \frac{1}{x}$



Se sabe que el denominador no puede ser cero, la función f tiene dos fracciones, por tanto, se debe encontrar los valores en los que el denominador de cada fracción es cero y eliminarlos del dominio,

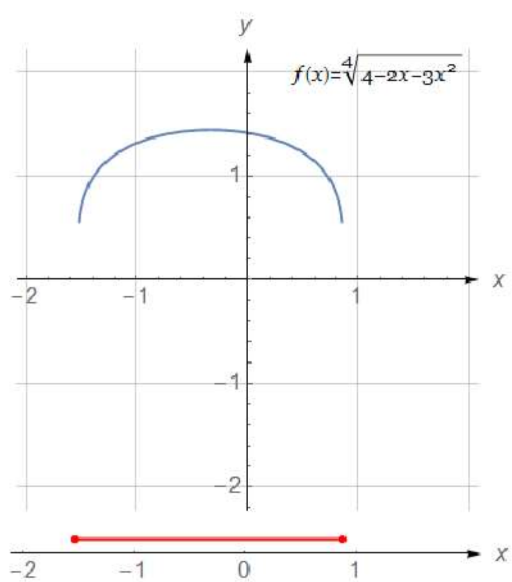
En la primer fracción $\frac{3-x}{x-2}$e el denominador es cero cuando $x-2=0$, es decir cuando $x=2$.

En la segunda fracción $\frac{1}{x}$, el denominador es cero cuando $x=0$.

Por tanto, el dominio de la función f no puede tener los valores $x=2$ y $x=0$.

$$\text{Dom } f=\{x\in\mathbb{R},\ x\neq 0,\ 2\}$$

1.3. $f(x)=\sqrt[4]{4-2x-3x^2}$



En la función hay una raíz par (la raíz cuarta) $\sqrt[4]{4-2x-3x^2}$, por tanto, el radicando determinado por la expresión $4-2x-3x^2$ debe ser mayor que cero, para encontrar los valores correspondientes se debe resolver la inecuación

$$4-2x-3x^2\geq 0$$

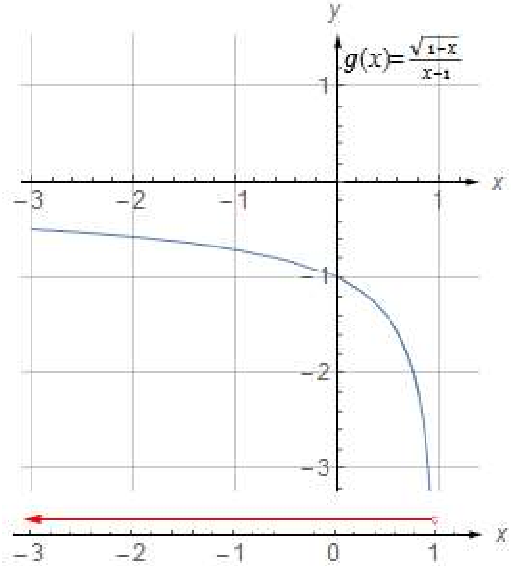
y encontrando los intervalos solución (*los detalles de cómo solucionar estas desigualdades están en el capítulo 3, inecuaciones*).

La solución es $\frac{-\sqrt{13}-1}{3}\leq x\leq\frac{\sqrt{13}-1}{3}$ y el intervalo solución es $\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{3},\ \frac{\sqrt{13}-1}{3}\right]$.

Por tanto, el dominio de la función f es

$$\text{Dom } f=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{3},\ \frac{\sqrt{13}-1}{3}\right]$$

1.4. $g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$



En esta función hay dos restricciones a tener en cuenta; primero, el radicando de la raíz debe ser mayor que cero, y segundo, el denominador de la fracción no puede ser cero.

En la raíz $\sqrt{1-x}$, el radicando determinado por la expresión $1-x$ debe ser mayor que cero; para encontrar los valores correspondientes se debe resolver la inecuación:

$$1-x \geq 0$$

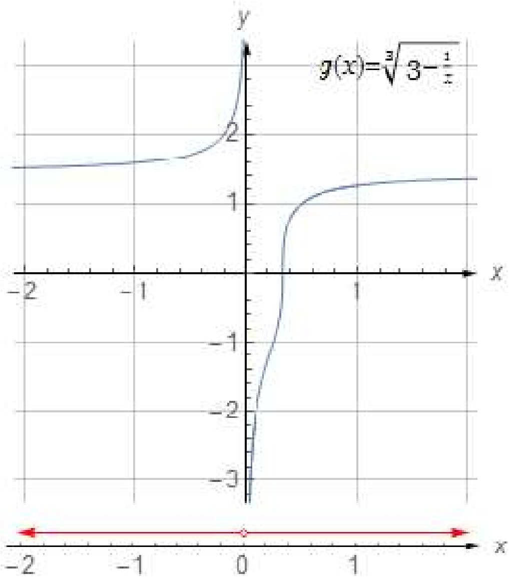
cuya solución es $x \leq 1$ y el intervalo solución es $(-\infty,\ 1]$.

En la fracción $\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$, el denominador es cero cuando $x-1=0$, es decir cuando $x=1$, este valor se debe quitar del intervalo solución.

Por tanto, el dominio de la función g es

$$\text{Dom } g = (-\infty,\ 1)$$

1.5. $g(x) = \sqrt[3]{3-\frac{1}{x}}$



Una raíz impar no tiene restricciones, pero el radicando $3-\frac{1}{x}$ tiene una fracción en la cual el denominador no puede ser cero.

En la fracción $\frac{1}{x}$, el denominador es cero cuando $x=0$.

Por tanto, el dominio de la función g es

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$$

2. Determinar si las siguientes situaciones se pueden modelar con una función.

2.1. A cada entero positivo se le asigna su cubo.

Es una función perfectamente definida.

2.2. A cada entero no negativo se le asignan las personas del planeta que tienen dicha edad en años.

No es una función. Hay múltiples asignaciones, pues con toda seguridad, en este instante hay varias personas con, por ejemplo, 20 años de edad.

2.3. A cada palabra del idioma español se le asigna el número de letras necesarias para escribirla.

Es una función bien definida, que dada una palabra, regresa su longitud.

2.4. A cada tipo de automóvil se le asignan los concesionarios donde se vende dicho modelo.

Potencialmente no es una función, pues en situaciones reales, es poco factible encontrar exclusividad para la venta de ciertos automotores.

» Problemas de aplicación

1. Utilizar una representación gráfica y numérica para representar las siguientes situaciones modeladas por una función.

1.1. En una panadería se venden almojábanas a $1,200.

1.2. Un plan de datos para teléfonos celulares incluye un consumo de hasta 1GB por $30,000, y por cada MB adicional de consumo, un costo extra de $ 25.

1.3. Suponga que usted es el gerente del área de ventas de una compañía. Su salario consta de una comisión mensual fija de $3,800,000 más el 2 × % del total de la venta del mes.

2. Encontrar los dominios y rangos naturales en las situaciones anteriores.

» *Soluciones a los problemas*

1. Utilizar una representación gráfica y numérica para representar las siguientes situaciones modeladas por una función.

1.1. En una panadería se venden almojábanas a $1,200.

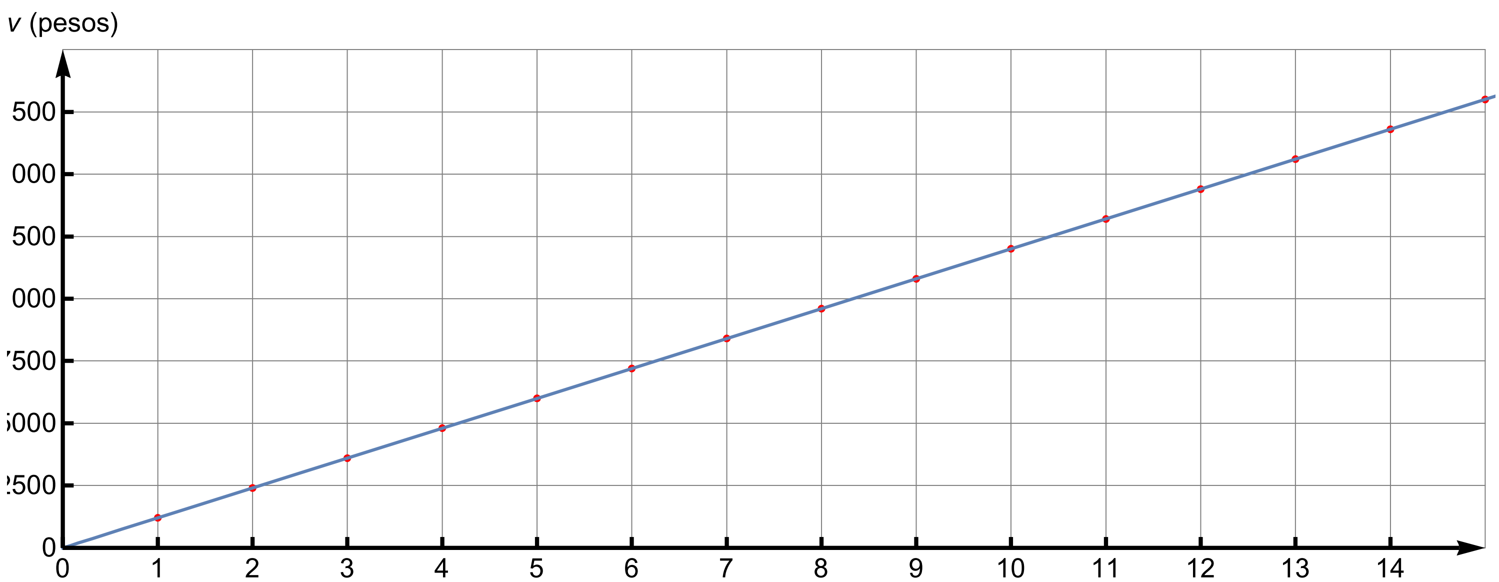
La variable independiente (x) es el número de almojábanas vendidas, mientras que la variable dependiente (v) es el valor total de la venta, la representación algebraica es:

$$v(x) = 1200\,x$$

Al realizar una tabla de valores se tiene (hasta 10 almojábanas vendidas):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v(x)$	0.	1200.	2400.	3600.	4800.	6000.	7200.	8400.	9600.	10 800.	12 000.

Y la representación gráfica es:



1.2. Un plan de datos para teléfonos celulares incluye un consumo de hasta 1GB por $ 30 000, y por cada MB adicional de consumo, un costo extra de $25.

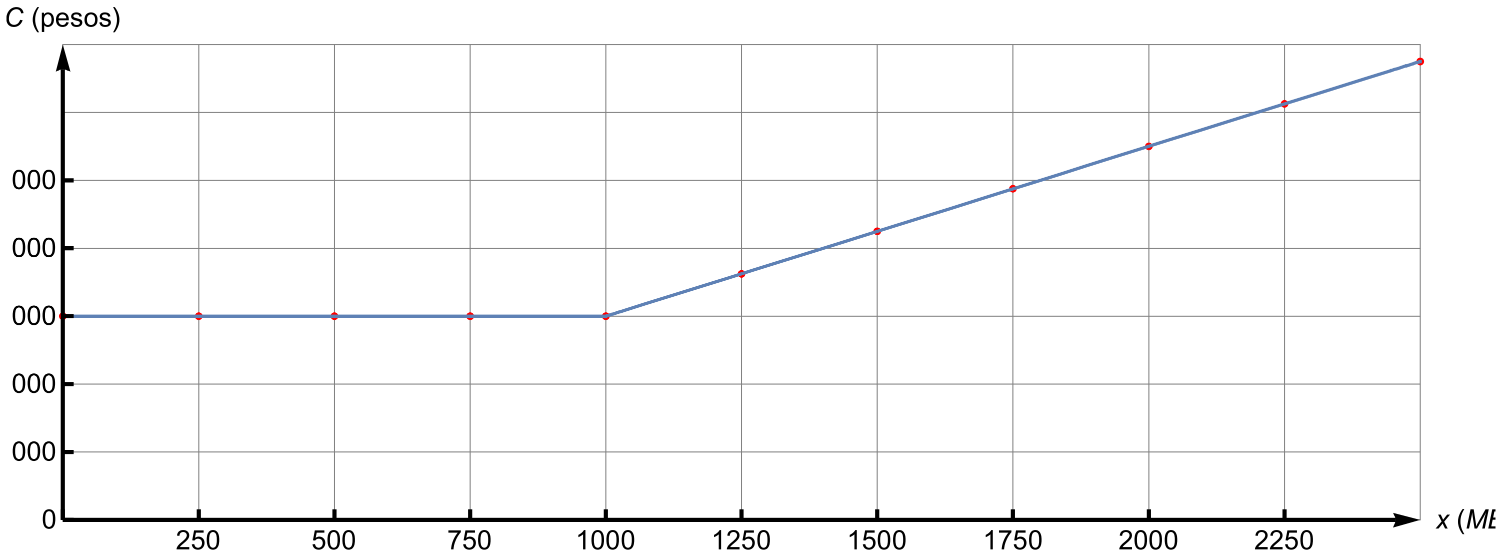
La variable independiente (x) es el consumo de megabites (MB), mientras que la variable dependiente (C) es costo del plan de datos, teniendo en cuenta un consumo de 0 a 1GB que tiene un valor de $30,000, el precio del plan se incrementa después de consumir 1 GB de datos, por tanto, la representación algebraica está dividida en dos funciones, una para el consumo de hasta 1 GB y la otra para el consumo después de este:

$$C(x) = \begin{cases} 30\,000 & \text{si } 0 \le x \le 1000 \\ 30\,000 + 25\,(1000 - x) & \text{si } x > 1000, \end{cases} \qquad 1\text{ GB} = 1000\text{ MB}$$

Al realizar una tabla de valores se tiene:

x	0	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500
$C(x)$	30 000.	30 000.	30 000.	30 000.	30 000.	36 250.	42 500.	48 750.	55 000.	61 250.	67 500.

Y la representación gráfica es:



1.3. Suponga que usted es el gerente del área de ventas de una compañía. Su salario consta de una comisión mensual fija de $3,800,000 más el 2 × % del total de la venta del mes.

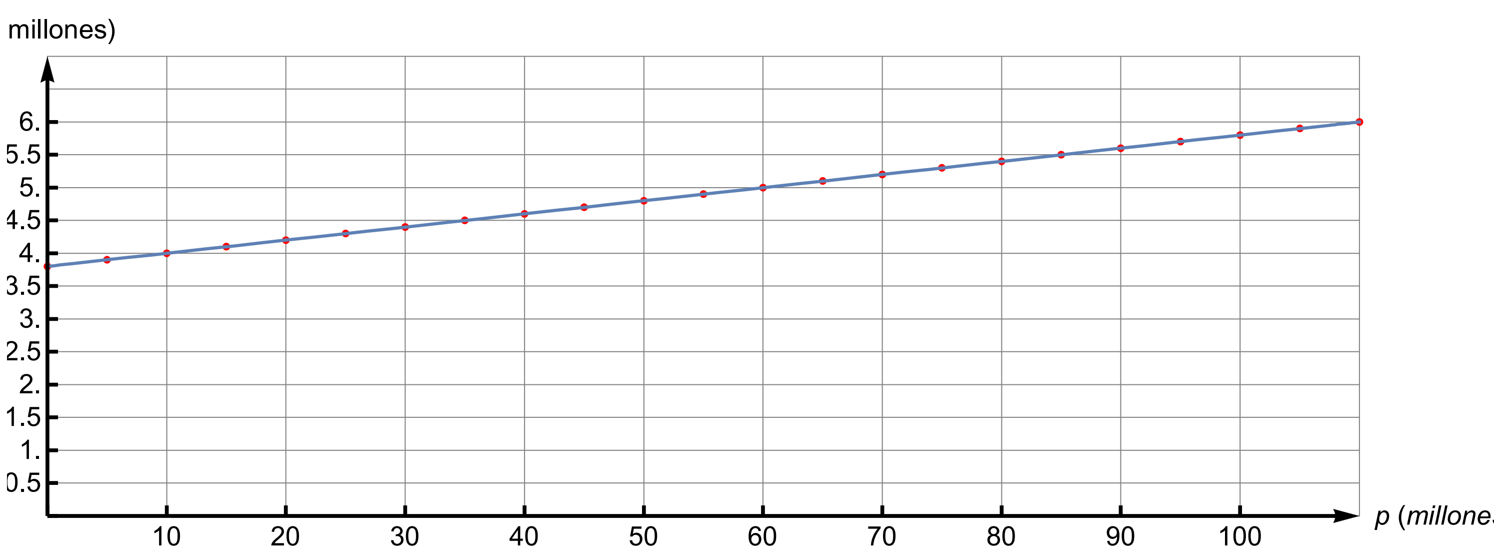
Llame p a la variable independiente, la cual representa el total de la venta del mes, y llame s a la variable dependiente, la cual representa el salario mensual. Suponiendo que no tiene alguna venta en el mes ($p = 0$), solo ganará la comisión fija ($s = 3\,800\,000$) y su salario aumentará entre mayor sea la venta del mes. La representación algebraica es:

$$s(p) = 3\,800\,000 + 0.02\,p$$

Al realizar una tabla de valores se tiene (los valores de p y s están en millones de pesos):

p	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
$s(p)$	3.8	3.9	4.	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8

Y la representación gráfica es:



2. Encontrar los dominios y rangos naturales en las situaciones anteriores.

2.1. En una panadería se venden almojábanas a $ 1200.

El número de almojábanas puede ser ilimitado pero debe ser positivo, incluso cero, por tanto, el dominio es:

$$\text{Dominio}: \ [0,\ \infty)$$

2.2. Un plan de datos para teléfonos celulares incluye un consumo de hasta 1GB por $ 30 000, y por cada MB adicional de consumo, un costo extra de $ 25.

Los Megabytes consumidos pueden ser ilimitados pero deben ser positivos, incluso cero, por tanto, el dominio es:

$$\text{Dominio}: \ [0,\ \infty)$$

2.3. Suponga que usted es el gerente del área de ventas de una compañía. Su salario consta de una comisión mensual fija de $3,800,000 más el 2 × % del total de la venta del mes.

Ya que la comisión depende de las ventas, estas tienen que ser positivas o puede ser cero, por tanto, el dominio es:

$$\text{Dominio}: \ [0,\ \infty)$$

2. Función lineal

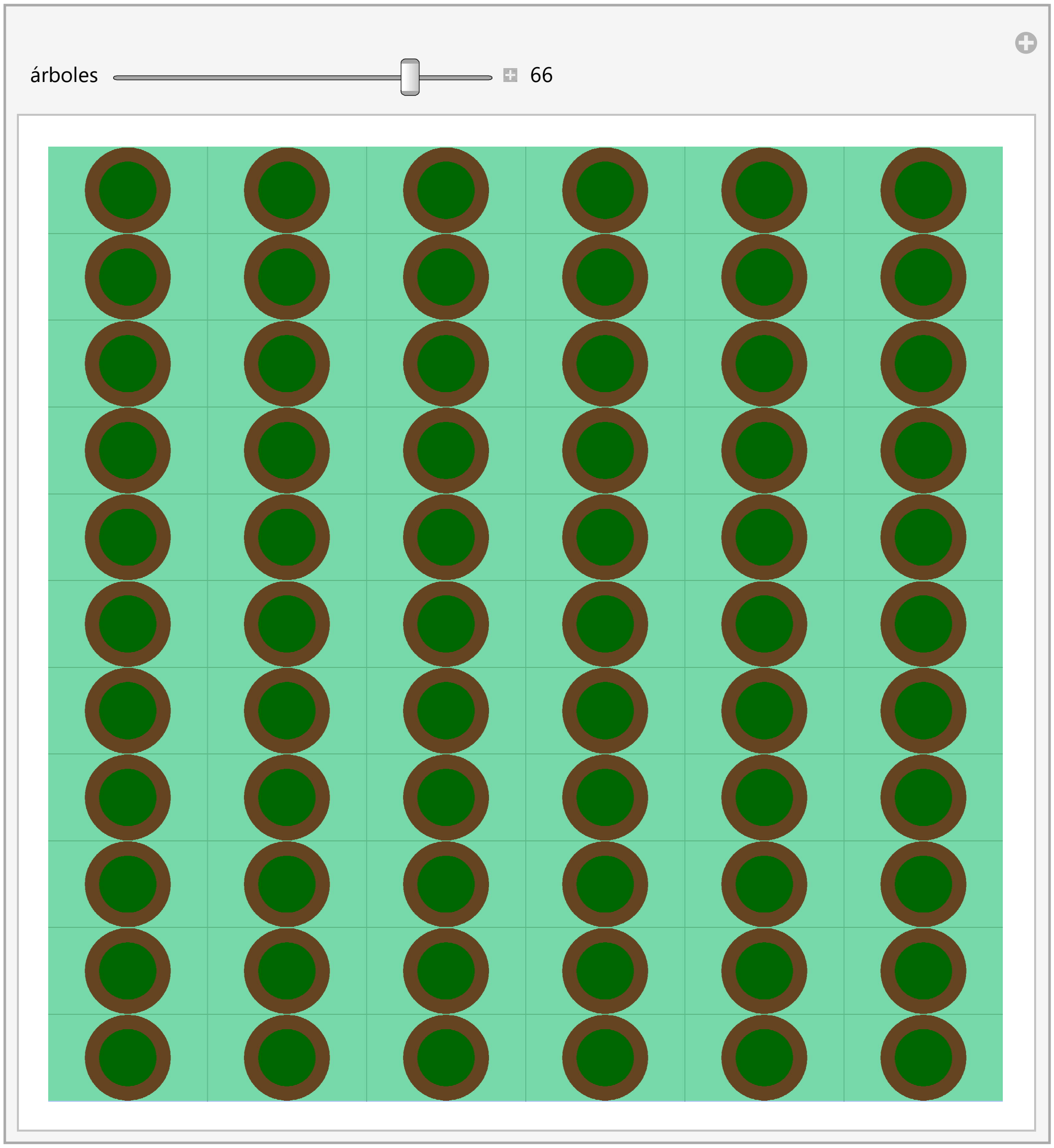
Situación: producción de manzanas (parte 1)

Roberto es un granjero y disponde de un terreno en el cual puede sembrar hasta 81 árboles de manzanas. Él sabe que como los árboles necesitan nutrientes para crecer y dar frutos, entre más árboles se siembre, menos será la cantidad de nutrientes para cada árbol y esto hará que sea menos la producción de cada árbol; se conoce que:

- Si siembra entre uno y cincuenta árboles, la producción de cada árbol será de 600 manzanas promedio al año.
- Por cada árbol adicional que siembre (después de cincuenta), la producción de cada árbol disminuye en 10 manzanas en promedio al año.

  Ejemplo: si siembra 32 árboles la producción de cada árbol será de 600 manzanas anuales, pero si siembra 51 árboles la producción de cada árbol será de 590 manzanas anulaes.

La siguiente animación muestra algunas de las maneras de colocar los árboles



Problema 1

Roberto quiere saber cuál será la producción anual de cada árbol dependiendo de la cantidad de árboles que siembre; para esto, él cree que puede relacionar las dos cantidades (n: cantidad de árboles y C: producción anual de cada árbol), mediante una tabla en donde el primer renglón corresponde a la cantidad de árboles plantados y el segundo relaciona la producción anual de manzanas de cada árbol.

⇒ *Complete la siguiente tabla:*

n: Árboles plantados	1 a 50	51	53	57	62		65		80		100	110
C: Producción de cada árbol		590		530		470	450	350		200		

Solución

n: Árboles plantados	1 a 50	51	53	57	62	63	65	75	80	90	100	110
C: Producción de cada árbol	600	590	570	530	480	470	450	350	300	200	100	0

Problema 2

Roberto se da cuenta que la primera columna sobra, pues si siembra desde uno hasta cincuenta árboles la producción de cada uno será la misma, por lo que modifica la tabla de la siguiente manera: el primer renglón corresponde a la cantidad de árboles adicionales plantados (después de los cincuenta, por ejemplo $x = 6$ corresponde a plantar un total de 56 árboles) y el segundo relaciona la producción anual de manzanas de cada árbol.

⇒ *Complete la siguiente tabla:*

n: Árboles adicionales plantados	0	1	3	7	12		15		30		50	60
C: Producción de cada árbol		590		530		470	450	350		200		

Solución

n: Árboles adicionales plantados	0	1	3	7	12	13	15	25	30	40	50	60
C: Producción de cada árbol	600	590	570	530	480	470	450	350	300	200	100	0

⇒ *Desde el punto de vista del granjero, ¿qué podría interpretar de la última columna de la tabla?*

Solución

La última columna se puede interpretar como una situación no factible, pues sus árboles están marchitos y no producen ninguna manzana, no tienen los suficientes nutrientes.

≪ Respuesta

Problema 3

Si x denota el número de árboles adicionales plantados,

⇒ *¿cuáles serían entonces los posibles valores naturales, con sentido o permitidos en la situación?,*
recuerde que dichos valores se conocen como el dominio de la función.

Solución

Es natural pensar que los posibles valores se encuentran entre 0 y 60 árboles.

Dominio: [0, 60]

≪ Respuesta

⇒ *Escribir una expresión que, dado un valor de x, permita calcular la producción C de manzanas de cada árbol.*
Notar en este caso que x depende de C.

Solución

Acorde con la última tabla del problema anterior, cuando $x = 0$, $C(0) = 600$, luego, por cada árbol que aumenta la producción, este disminuye en 10, una manera de expresar dicho comportamiento es mediante la función:

$C(x) = 600 - 10\,x$.

« Respuesta

Una ***función lineal*** *tiene la forma algebraica*

$$f(x) = m\,x + b$$

con m y b números reales.

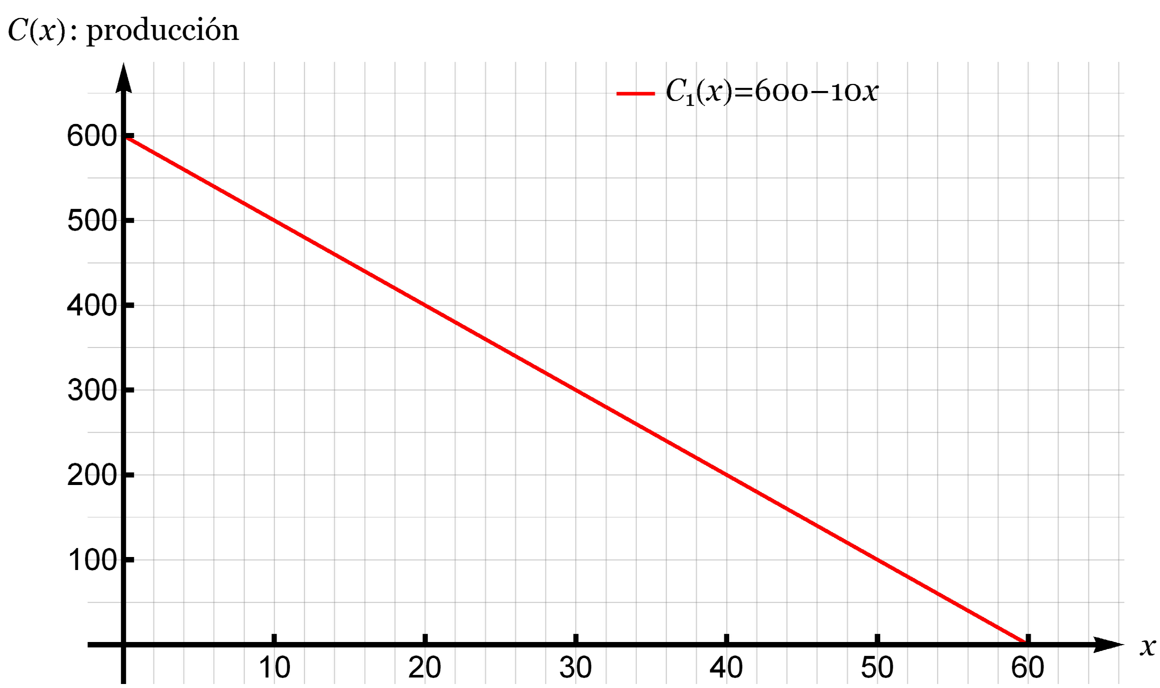
Problema 4

En una hoja de papel cuadriculado construir un plano cartesiano y gráficar los puntos.

⇒ *¿Qué tendencia siguen?, ¿se encuentran sobre algún objeto geométrico conocido? Note que los puntos gráficados se pueden encontrar usando la tabla o la expresión algebraica.*

Solución

La expresión es $C(x) = 600 - 10\,x$ y la gráfica de la función queda así:



Este es un ejemplo de una ***función lineal***.

Como se observa en la gráfica de C, los valores tienen una tendencia lineal, todos están sobre la misma recta, cuya expresión es $C(x) = 600 - 10\,x$.

« Respuesta

Una ***función lineal*** *es aquella cuya gráfica es una recta no vertical, pues dicha situación no se puede modelar con una función.*
La forma algebraica de una función lineal es:

$$f(x) = m\,x + b$$

con m y b números reales.
La cantidad m se conoce como ***pendiente*** *y es la cantidad que mide el "grado de inclinación" de la recta.*

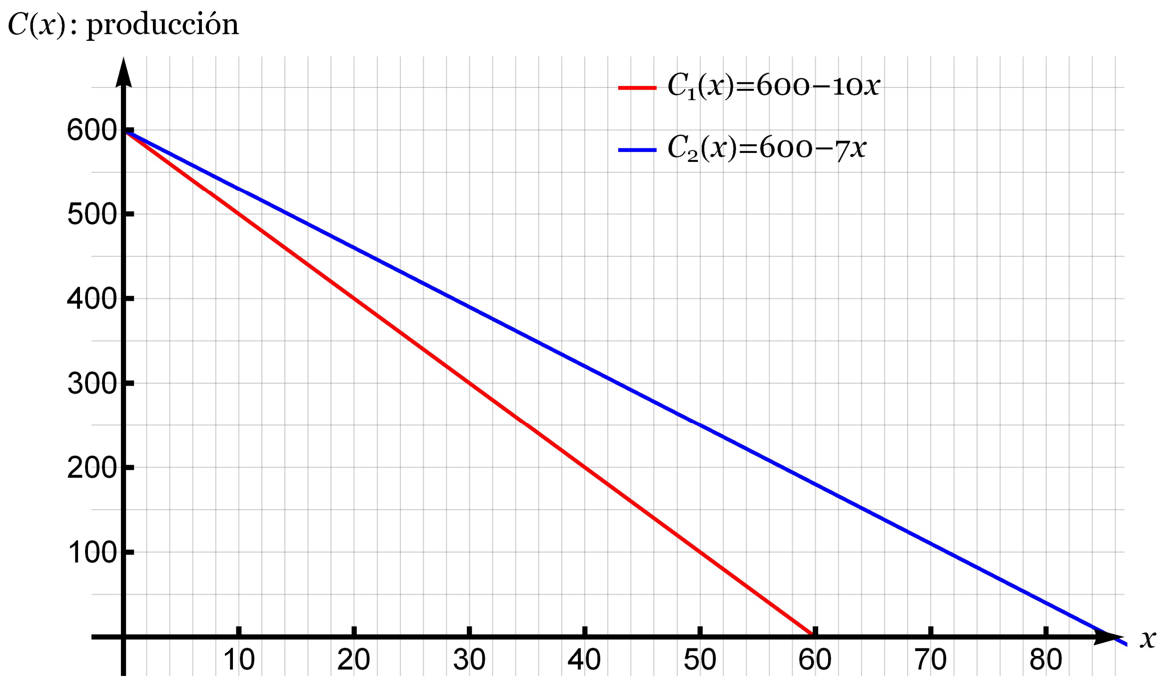
Problema 5

Si ahora la producción de cada árbol no disminuye en 10 sino en 7 manzanas, encontrar la expresión que modela la cantidad de manzanas producidas por cada árbol y gráficar esta nueva situación sobre la misma hoja de papel milimetrado.

⇒ *¿Qué diferencias hay entre estas funciones lineales?*

Solución

La fórmula o expresión de la nueva situación es $C(x) = 600 - 7\,x$, la gráfica de las dos funciones en el mismo plano es:



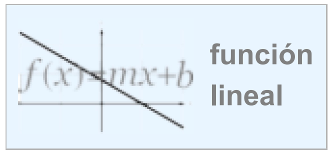
La diferencia entre las dos rectas se refiere a su "grado de inclinación", la recta $y = 600 - 7\,x$ decrece mas lentamente que la recta $y = 600 - 10\,x$.

≪ Respuesta

Resumen función lineal

Como se había visto con anterioridad, una función lineal es de la forma $f(x) = m\,x + b$ donde m y b son constantes; tanto el dominio y el rango de este tipo de funciones son los números reales.

Estas funciones aparecen en innumerables situaciones del quehacer humano, como por ejemplo, funciones de costo de producción, modelos de crecimiento, funciones de oferta y demanda y aplicaciones en física, biología, economía, entre otros.



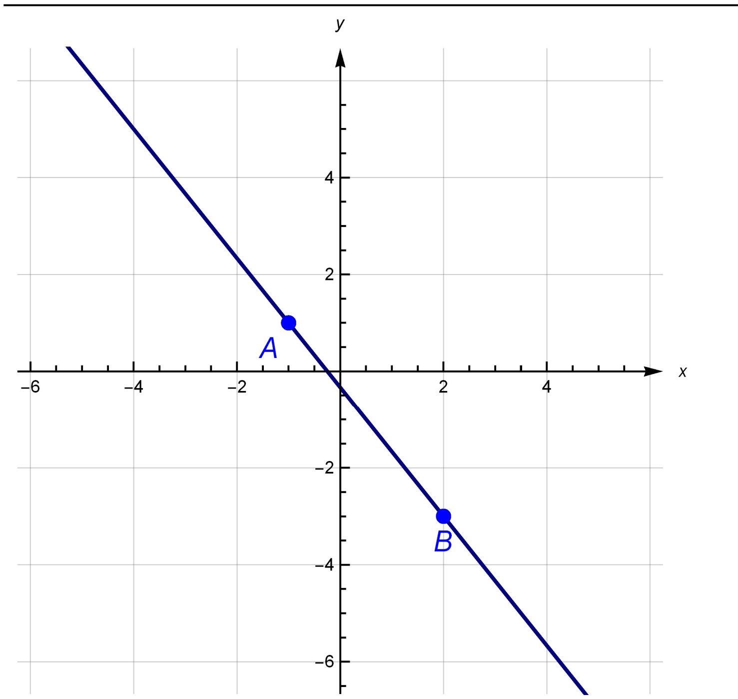
Definición:
Una ***función lineal*** tiene la forma:

$$f(x) = m\,x + b$$

con m y b números reales.
La gráfica de una función lineal es una recta no vertical, la cantidad m se conoce como ***pendiente*** y es la cantidad que mide el *grado de inclinación* de la recta.
Al evaluar $x = 0$, se obtiene $f(0) = b$, lo cual quiere decir que b representa el ***corte con el eje y***.

La pendiente en una función lineal $\Rightarrow$ $\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$

Interactua con los puntos A y B en el plano



Los puntos son: $A(-1.,1.)$ y $B(2.,-3.)$

Reemplazando los puntos en m:

$$m = \frac{(-3.)-1.}{2.-(-1.)} = -\frac{4}{3}$$

Con un punto (y_1,x_1) y la pendiente m
se encuentra la ecuación de la recta con la fórmula:
$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$$y - (-3.) = -\frac{4}{3}(x - 1.)$$

$$y + 3 = -\frac{4}{3}\,(x - 2)$$

$$y = -\frac{4\,x}{3} - \frac{1}{3}$$

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios procedimentales

1. Encuentre la función lineal de la recta que pasa por los puntos $(-1,\ 3)$ y $(2,\ 1)$. ¿Cuál es su pendiente?
2. Encuentre la función lineal de la recta que pasa por los puntos $(1,\ 2)$ y $(-5,\ 2)$. ¿Cuál es su pendiente?
3. ¿Cual es la función de una recta que corta el eje y en -2 y el eje x en 4?, dibuje la gráfica de esta función.
4. Encontrar el valor de x, de forma tal que el punto $(x,\ 3)$ se encuentre sobre la recta $y = 2\,x - \frac{1}{2}$.
5. Construir y gráficar una función lineal que contenga el punto $(2,\ -5)$ y su pendiente sea $\frac{1}{3}$.
6. Construir y gráficar una función lineal que contenga el punto $(-1,\ 3)$ y su pendiente sea $-\frac{3}{2}$.

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Encuentre la función lineal de la recta que pasa por los puntos $(-1,\ 3)$ y $(2,\ 1)$. ¿Cuál es su pendiente?

La pendiente m se calcula mediante:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

Utilizando la fórmula punto pendiente se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - (-1))$$
$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 3$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

2. Encuentre la función lineal de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-5, 2)$. ¿Cuál es su pendiente?

La pendiente m se calcula mediante:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{1-(-5)} = \frac{0}{6} = 0$$

Como es una recta horizontal, entonces su ecuación es $y = 2$.

3. ¿Cual es la función de una recta que corta el eje y en -2 y el eje x en 4?, dibuje la gráfica de esta función.

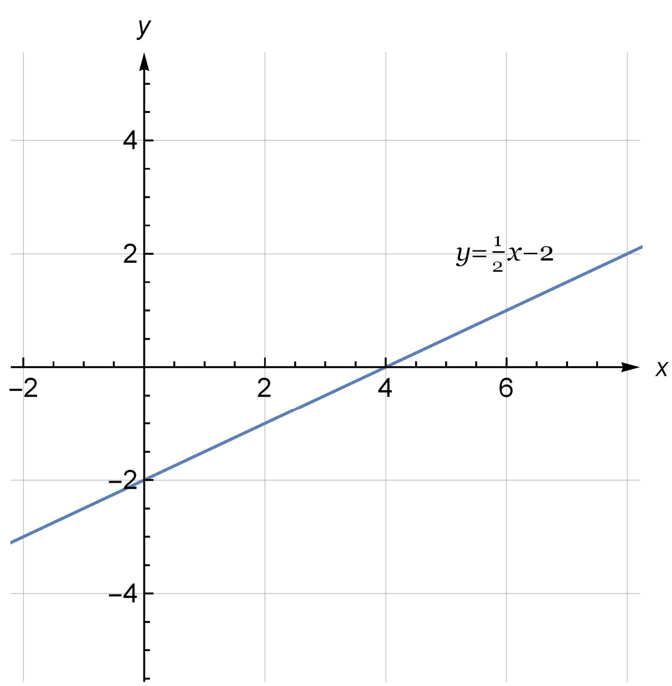
Para calcular la pendiente usaremos los puntos $(4, 0)$ y $(0, -2)$. Se obtiene que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-2)}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Utilizando la fórmula punto pendiente se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4)$$
$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

La gráfica de la función es:



4. Encontrar el valor de x, de forma tal que el punto $(x, 3)$ se encuentre sobre la recta $y = 2x - \frac{1}{2}$.

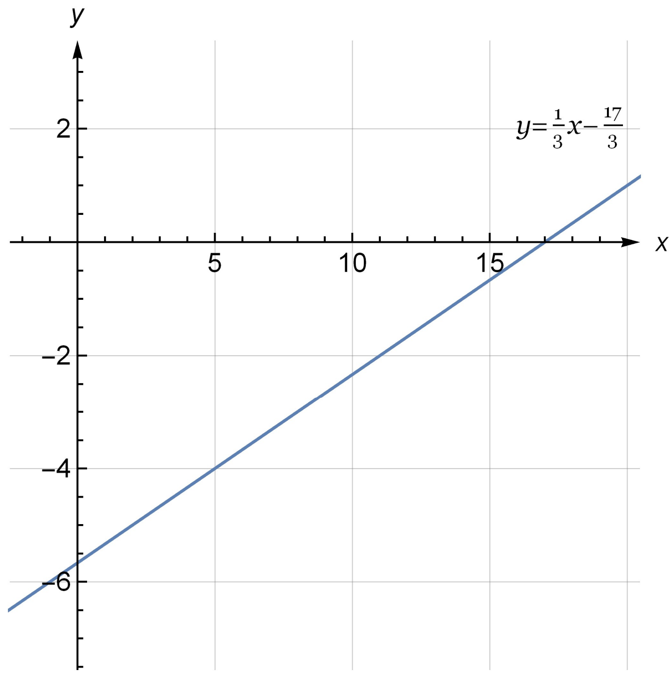
Basta hacer $y = 3$ y despejar x de la ecuación lineal $3 = 2x - \frac{1}{2}$. Se obtiene entonces $x = \frac{7}{4}$ como solución.

5. Construir y gráficar una función lineal que contenga el punto $(2, -5)$ y su pendiente sea $\frac{1}{3}$.

Dado que se tiene la pendiente $m = \frac{1}{3}$, para obtener b, se reemplaza el punto $(2, -5)$ en la forma $y = m\,x + b$

$$y = m\,x + b$$
$$-5 = \frac{1}{3}(2) + b$$
$$b = -\frac{17}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = \frac{1}{3}x - \frac{17}{3}$, a continuación la gráfica:

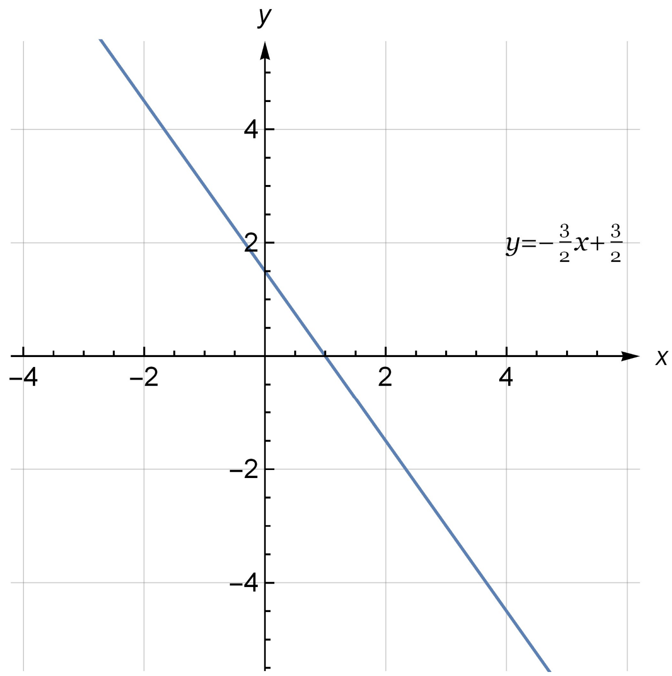


6. Construir y gráficar una función lineal que contenga el punto $(-1, 3)$ y su pendiente sea $-\frac{3}{2}$.

Dado que se tiene la pendiente $m = -\frac{3}{2}$, para obtener b, se reemplaza el punto $(-1, 3)$ en la forma $y = m\,x + b$

$$y = m\,x + b$$
$$3 = -\frac{3}{2}(-1) + b$$
$$b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, a continuación la gráfica:



» Problemas de aplicación

1. Un apartamento comprado inicialmente por \$200,000,000 sufre una depreciación de \$10,000,000 por cada año extra de uso.

1.1. Construir un modelo lineal que modele la situación.

1.2. ¿Cúal es la razón de cambio (pendiente)?

1.3. ¿Al cabo de cuánto tiempo el apartamento deja de tener algún valor comercial?

2. A medida que el aire seco se eleva en la atmósfera, se expande y se enfría. Si en determinado momento del día, a nivel del mar (0 metros) la temperatura es de 38 °C y la temperatura a una altura de 2500 metros es de 20 °C, exprese la temperatura T (medida en grados centígrados) como una función de la altura x (medida en kilometros). Asuma que este problema se puede modelar con una función lineal.

2.1. Dibuje la gráfica de la función.

2.2. Encuentre la temperatura a una altura de 1.3 km.

2.3. Determine cuál es la altura que da una temperatura de 12 °C.

3. Desde inicio del año, el precio de la gasolina ha venido aumentando a razón de \$112 pesos al mes, si se sabe que el 1 de abril el precio de la gasolina fue \$7,948 pesos.

3.1. Modele el problema encontrando una función lineal que exprese el precio de la gasolina como función del mes transcurrido ($x = 0$ corresponde al 1 de enero).

3.2. ¿Cuál fue el precio de la gasolina al iniciar el año?

3.3. ¿Cuál será el precio de la gasolina al inciar el siguiente año?

3.4. Dibuje la gráfica de la función.

4. Cierta compañía determina que producir cada unidad del artículo A cuesta \$1,200 y el costo fijo de producción es de \$750,000.

4.1. Encuentre una función que modele el *costo total* de producción.

4.2. ¿Cuál es el costo de fabricar 500 unidades del producto A?

4.3. Si el precio de venta del producto A es de \$3,100, encuentre una función que modele el *ingreso total*.

4.4. ¿Cuántos productos debe producir y vender para no tener pérdidas? (esto se llama el punto de equilibrio)

4.5. Grafique las funciones *costo* e *ingreso*.

4.6. ¿Cuántos productos debe producir y vender para obtener una ganancia de al menos $2,000,000?

5. La agencia ABC de renta de automóviles ofrece dos planes:
El plan "*econo1*" consiste en alquilar un coche por $120,000 pesos por día más $180 pesos por kilómetro recorrido.
El plan "*econo2*" consiste en alquilar un coche por $280,000 pesos por día.

5.1. Modele la situación encontrando las funciones de cada plan y graficándolas en el mismo plano.

5.2. Suponga que usted va a alquilar un coche solo por un día, ¿hasta cuántos kilometros debe recorrer para que el plan "*econo1*" cueste menos que el plan "*econo2*"?

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Un apartamento comprado inicialmente por $200,000,000 sufre una depreciación de $10,000,000 por cada año extra de uso.

1.1. Construir un modelo lineal que modele la situación.

Si se piensa que el eje x medirá el tiempo transcurrido en años, mientras que el eje y representa el precio del apartamento, vemos que por cada año transcurrido, el apartamento pierde $ 10 000 000 en su valor comercial. Luego, $m = \frac{(\text{cambio en } y)}{(\text{cambio en } x)} = \frac{-10\,000\,000}{1} = -10\,000\,000$.

De otro lado, inicialmente (tiempo cero) el apartamento tiene un valor de $200,000,000, por tanto, este valor representa el corte con el eje y, e igualmente, el valor de b en la forma $y = \mathrm{mx} + b$. Juntando lo anterior, se obtiene el modelo lineal:

$$y = -10\,000\,000\,x + 200\,000\,000$$

1.2. ¿Cúal es la razón de cambio (pendiente)?

La pendiente es $m = -10\,000\,000$

1.3. ¿Al cabo de cuánto tiempo el apartamento deja de tener algún valor comercial?

El apartamento pierde valor cuando $y = 0$ en el anterior modelo lineal. Esto ocurre después de 20 años.

$$y = -10\,000\,000\,x + 200\,000\,000$$
$$0 = -10\,000\,000\,x + 200\,000\,000$$
$$x = \frac{200\,000\,000}{10\,000\,000}$$
$$x = 20$$

2. A medida que el aire seco se eleva en la atmósfera, se expande y se enfría. Si en determinado momento del día, a nivel del mar (0 metros) la temperatura es de 38 °C y la temperatura a una altura de 2500 metros es de 20 °C, exprese la temperatura T (medida en grados centígrados) como una función de la altura x (medida en kilometros). Asuma que este problema se puede modelar con una función lineal.

2.1. Dibuje la gráfica de la función.

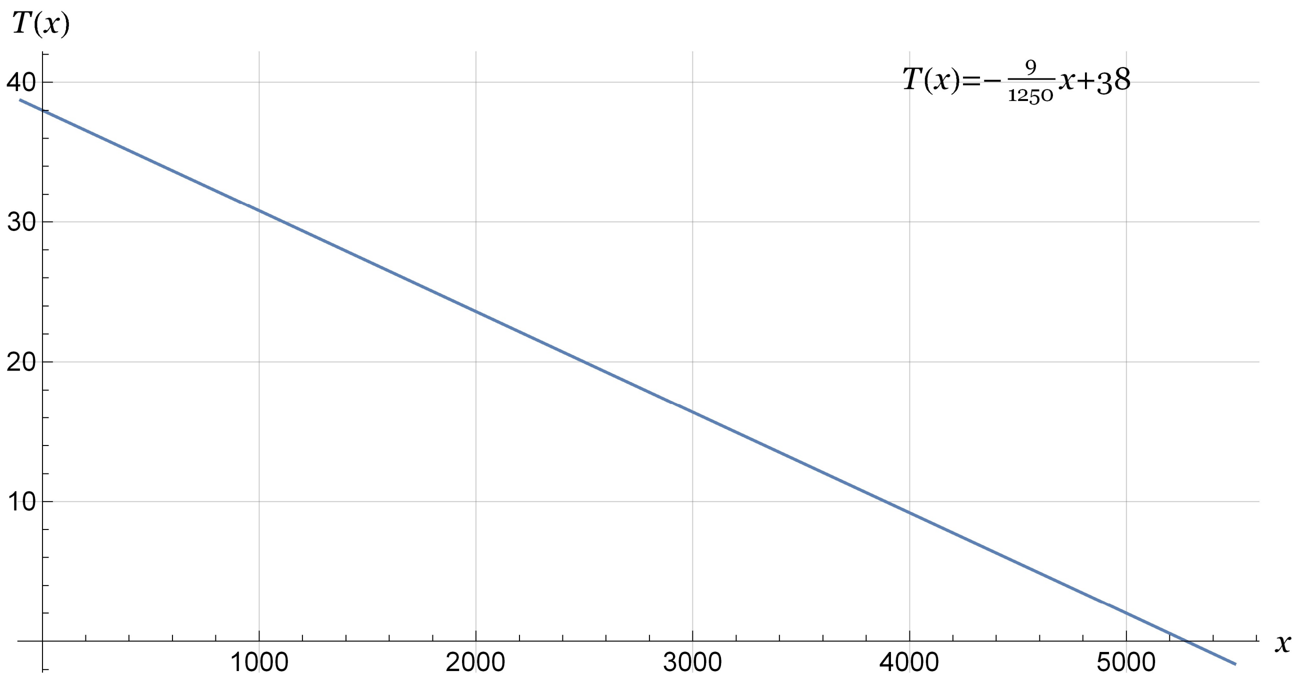
Conociendo los puntos $(0,\ 38)$ y $(2500,\ \ 20)$ se puede calcular la pendiente y el modelo lineal. En este caso se obtiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{38-20}{0-2500} = -\frac{9}{1250}$$

y como modelo lineal:

$$y - y_1 = -\frac{9}{1250}(x - x_1)$$
$$y - 38 = -\frac{9}{1250}(x - 0)$$
$$y = -\frac{9}{1250}x + 38$$
$$T(x) = -\frac{9}{1250}x + 38$$

A continuación la gráfica:



2.2. Encuentre la temperatura a una altura de 1.3 km.

Al reemplazar $x = 1300$ en la función $T(x)$ se tiene que $T(1300) = -\frac{9}{1250}(1300) + 38 = 28.64$

La temperatura a una altura de 1.3 km es de 28.64 °C

2.3. Determine cuál es la altura que da una temperatura de 12 °C.

Basta solucionar la ecuación $12 = -\frac{9}{1250}x + 38$ para obtener $x = \frac{32\,500}{9}$, lo cual corresponde a aproximadamente 3611 metros sobre el nivel del mar.

3. Desde inicio del año, el precio de la gasolina ha venido aumentando a razón de \$112 pesos al mes, si se sabe que el 1 de abril el precio de la gasolina fue \$7,948 pesos.

3.1. Modele el problema encontrando una función lineal que exprese el precio de la gasolina como función del mes transcurrido ($t = 0$ corresponde al 1 de enero).

Para modelar el problema se escogerá t como el tiempo que ha pasado desde el inicio del año (variable independiente) y C el costo de la gasolina en determinada fecha.

Se cuenta con la pendiente de la función lineal: $m = 112$, y un punto: $(3, 7948)$. Para encontrar el modelo lineal se puede utilizar la fórmula punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7948 = 112(x - 3)$$
$$y = 112x + 7612$$
$$C(t) = 112t + 7612$$

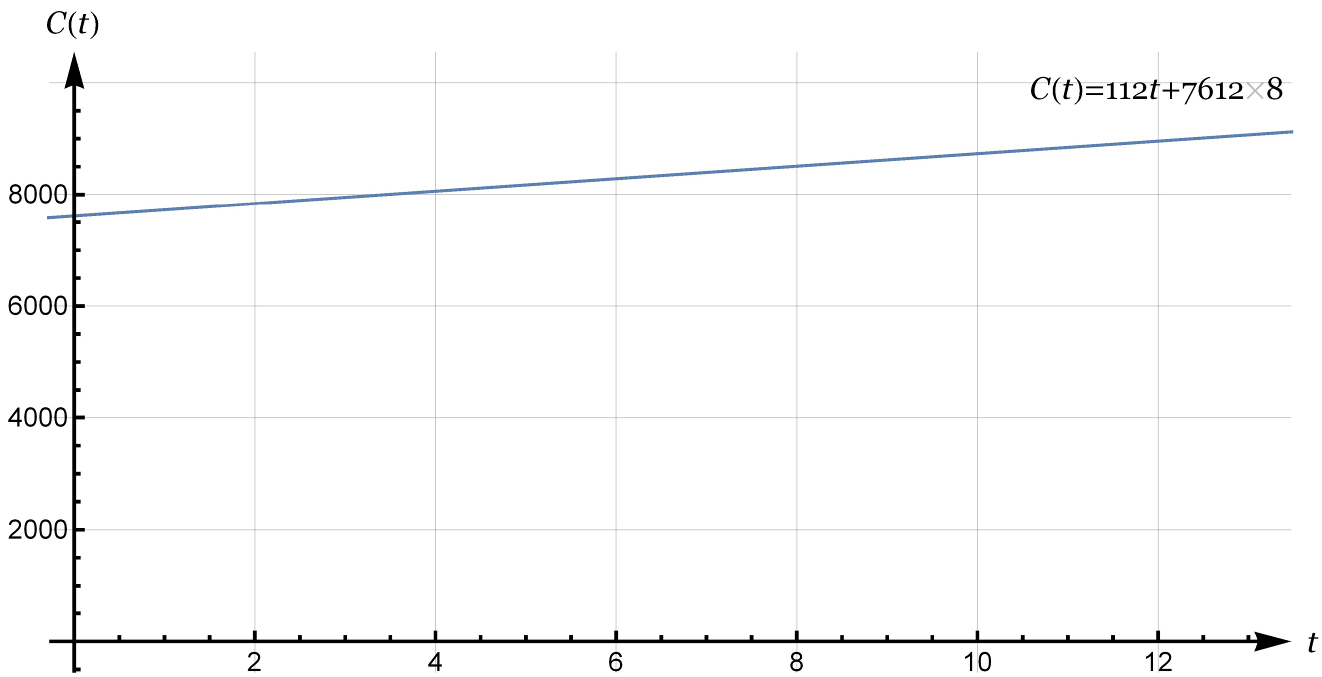
3.2. ¿Cuál fue el precio de la gasolina al iniciar el año?

Notar que lo anterior corresponde al corte con el eje y (cuando $t = 0$), y por tanto, se obtiene 7612 como el precio el primero de enero.

3.3. ¿Cuál será el precio de la gasolina al inciar el siguiente año?

Dado que el primero de enero del año en curso corresponde al mes cero ($t = 0$), el primero de enero del próximo año corresponde a $t = 12$ en nuestro modelo lineal. Al reemplazar se obtiene que $C(12) = 8956$ pesos como precio de la gasolina.

3.4. Dibuje la gráfica de la función.



4. Cierta compañía determina que producir cada unidad del artículo A cuesta \$1,200 y el costo fijo de producción es de \$750,000.

4.1. Encuentre una función que modele el *costo total* de producción.

Si x denota el *número de artículos* producidos, y representa el *costo de producción*, entonces se tiene las siguientes consideraciones.

Cada artículo extra producido incrementa los costos en \$1200. Luego:

$$m = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{1200}{1} = 1200$$

De otro lado, producir cero artículos tiene un costo de \$ 750 000, y por tanto, como corte con el eje y se obtiene $b = 750\,000$. Resumiendo lo anterior, se obtiene el modelo para los costos $C\,(x)$.

$$C(x) = 1200\,x + 750\,000$$

4.2. ¿Cuál es el costo de fabricar 500 unidades del producto A?

El costo es $C(500) = 1200\,(500) + 750\,000 = 1\,350\,000$

4.3. Si el precio de venta del producto A es de \$3,100, encuentre una función que modele el *ingreso total*.

El ingreso corresponde al número de artículos vendidos por su precio unitario, en este caso:

$$I(x) = (\text{número de artículos})\,(\text{precio de venta})$$

$$I(x) = 3100\,x$$

4.4. ¿Cuántos productos debe producir y vender para no tener pérdidas? (esto se llama el punto de equilibrio)

En general, la *utilidad* $U\,(x)$ de un negocio corresponde al *ingreso* menos los costos.

$$U(x) = I(x) - C(x)$$

$$U(x) = 3100\,x - (1200\,x + 750\,000)$$

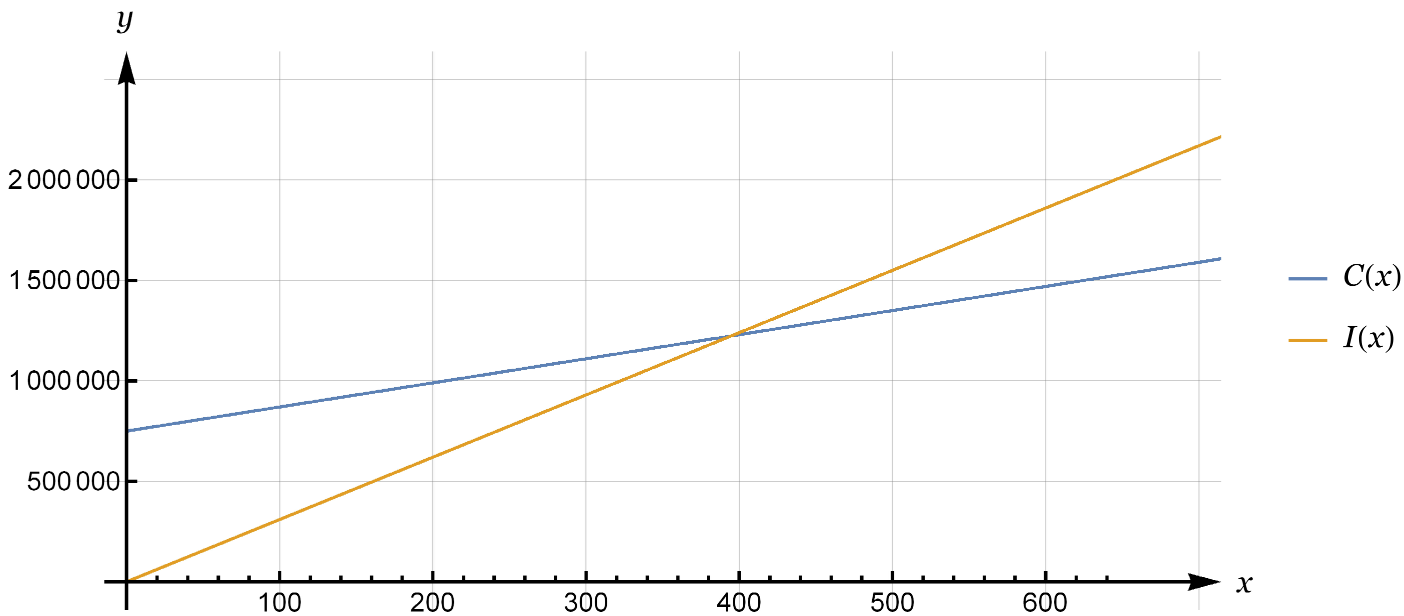
$$U(x) = 1900\,x - 750\,000$$

En este caso, para que la empresa no tenga pérdidas, la utilidad no puede ser negativa, y por tanto, se debe resolver la ecuación lineal $U(x) = 0$.

$$U(x) = 0$$
$$1900\,x - 750\,000 = 0$$
$$1900\,x = 750\,000$$
$$x = \frac{750\,000}{1900}$$
$$x = \frac{750}{19}$$

Para que la empresa no presente pérdidas es necesario producir y vender aproximadamente 395 artículos.

4.5. Grafique las funciones *costo* e *ingreso*.



4.6. ¿Cuántos productos debe producir y vender para obtener una ganancia de al menos $2,000,000?

Para que la empresa obtenga ganancias de al menos $2,000,000 se debe pensar en la inecuación $U(x) \geq 2\,000\,000$.

$$U(x) \geq 2\,000\,000$$
$$1900\,x - 750\,000 \geq 2\,000\,000$$
$$1900\,x \geq 2\,750\,000$$
$$x \geq \frac{2\,750\,000}{1900}$$

Para que la empresa obtenga ganancias de al menos $2,000,000 es necesario producir y vender aproximadamente 1448 artículos.

5. La agencia ABC de renta de automóviles ofrece dos planes:
El plan "*econo1*" consiste en alquilar un coche por $120,000 pesos por día más $180 pesos por kilómetro recorrido.
El plan "*econo2*" consiste en alquilar un coche por $280,000 pesos por día.

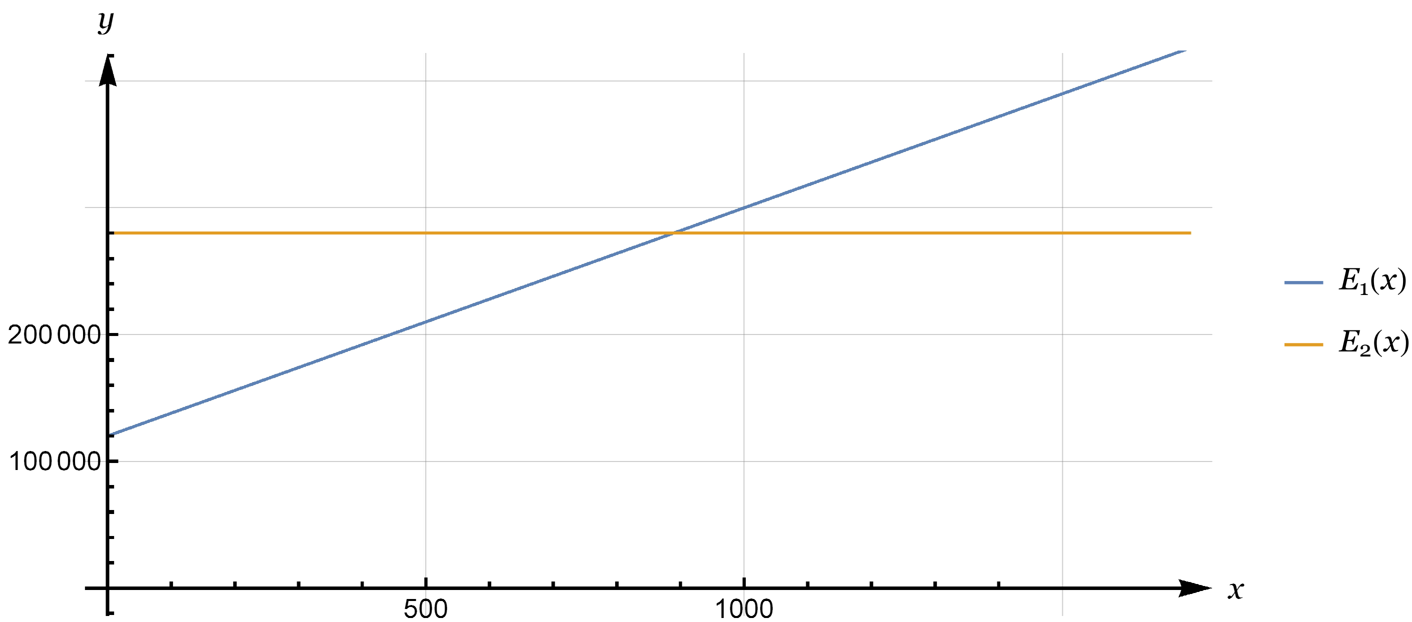
5.1. Modele la situación encontrando las funciones de cada plan y graficándolas en el mismo plano.

- Plan "*econo1*": La pendiente es $m = 180$ y el costo inicial $120,000 corresponde al corte con el eje y, por tanto, $b = 120\,000$.

$$E_1(x) = 180\,x + 120\,000$$

- Plan "*econo1*": La pendiente es $m = 0$ (no aumenta ni disminuye el costo por kilómetro) y el costo inicial $280,000 corresponde al corte con el eje y, por tanto, $b = 280\,000$ (es una recta horizontal).

$$E_2(x) = 280\,000$$



5.2. Suponga que usted va a alquilar un coche solo por un día, ¿hasta cuántos kilometros debe recorrer para que el plan "*econo1*" cueste menos que el plan "*econo2*"?

Se evidencia que después del punto de corte, el primer plan (E_1) resulta más costoso que el segundo (E_2). Para encontrar el punto de corte se resuelve la ecuación lineal:

$$E_1(x) = E_2(x)$$
$$180\,x + 120\,000 = 280\,000$$
$$180\,x = 160\,000$$
$$x = \frac{160\,000}{180}$$
$$x = \frac{8000}{9}$$

Se obtiene como solución $x = \frac{8000}{9}$ o aproximadamente 888 kilómetros.

3. Función cuadrática

Situación: producción de manzanas (parte 2)

En esta situación se sigue trabajando con el mismo contexto del granjero de las actividades anteriores.

Roberto quiere conocer la cantidad de árboles que debe cultivar para obtener la mayor cantidad de manzanas en el año, para eso decide mejorar la tabla ya construida agregando más información.

Problema 1

⇒ *Complete la siguiente tabla:*

n: Árboles adicionales plantados	0	1	3	7	12		15		30		50	60
C: Producción de cada árbol		590		530		470	450	350		200		
Total de árboles	50	51	53		62							
P: Producción total de manzanas					29 760							

Solución

n: Árboles adicionales plantados	0	1	3	7	12	13	15	25	30	40	50	60
C: Producción de cada árbol	600	590	570	530	480	470	450	350	300	200	100	0
Total de árboles	50	51	53	57	62	63	65	75	80	90	100	111
P: Producción total de manzanas	30 000	30 090	30 210	30 210	29 760	29 670	29 250	26 250	24 000	18 000	10 000	0

Problema 2

Suponga que la variable x representa la cantidad adicional de árboles plantados y P representa la producción total de manzanas

⇒ *Escriba P como una función que depende de la cantidad x.*

Solución

Al completar la tabla se evidencia que la producción total resulta de la multiplicación entre el *número total de árboles* y la *producción de cada árbol*.

- El número total de árboles se expresa como $50 + x$
- La producción total de cada árbol se expresa como $600 - 10\,x$

Por tanto:

$$P(x) = (50 + x)\,(600 - 10\,x)$$

Si se expande esta expresión, se llega a:

$$P(x) = 30\,000 - 500\,x - 600\,x - 10\,x^2$$
$$P(x) = -10\,x^2 + 100\,x + 30\,000$$

La función que representa la producción total de manzanas es: $P(x) = -10\,x^2 + 100\,x + 30\,000$ ≪ Respuesta

⇒ *¿Cuál es la más alta potencia que se obtiene al expandir y simplificar la anterior expresión?*

Solución

En la función $P(x) = -10\,x^2 + 100\,x + 30\,000$ la más alta potencia es dos.

≪ Respuesta

*La función P es un ejemplo de una **función cuadrática** (o de grado dos). La forma general de las funciones cuadráticas es:*

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c\,, \qquad \text{con } a \neq 0$$

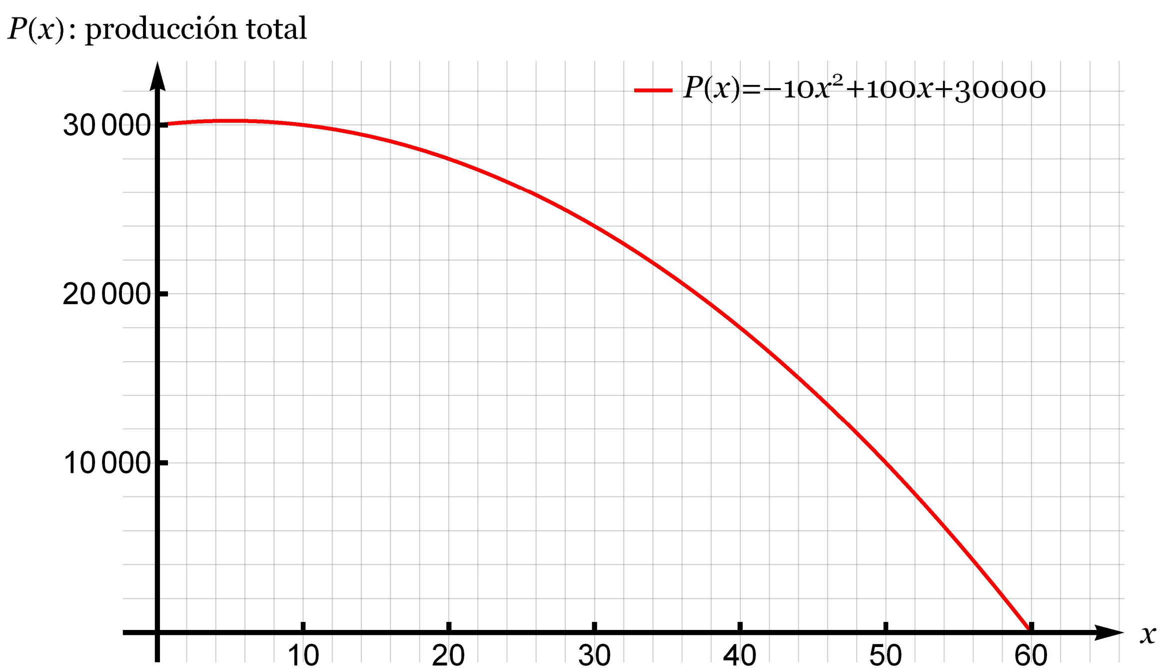
y a, b, c son números reales (constantes).

Problema 3

gráficar la función P en papel milimetrado

⇒ *¿Qué tendencia siguen los puntos? ¿Se ha encontrado antes con este tipo de curva? El nombre oficial del anterior tipo de curva es **parábola**.*

Solución



*Una **parábola** es la gráfica de una función cuadrática.*

Problema 4

Notar que la anterior parábola tiene un máximo. Usando la gráfica encontrar dicho valor y también en qué valor de x ocurre. El punto cuyas coordenadas son estos valores se conoce como **vértice**

⇒ *Investigue la fórmula del **vértice** de una parábola. Encuentre el vértice de la función P. ¿Qué significan esos valores?*

Solución

Una función cuadrática de la forma $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ tiene como vértice el punto con las coordenadas

$$v(h,\ k)$$

donde

$$h = -\tfrac{b}{2\,a} \qquad \text{y,} \qquad k = f\left(-\tfrac{b}{2\,a}\right)$$

El vértice es el punto máximo o mínmo de la parábola.

≪ Respuesta

Utilizando la fórmula anterior se tiene que en la función $P(x) = -10\,x^2 + 100\,x + 30\,000$ los valores de las cnstantes $a,\ b,\ c$ son:

$$a = -10,\ b = 100,\ c = 30\,000$$

por tanto:

$$h = -\tfrac{b}{2\,a}$$
$$h = -\tfrac{100}{2\,(-10)}$$
$$h = 5$$

y

$$k = f\left(-\tfrac{b}{2\,a}\right)$$
$$h = f(5)$$
$$h = -10\,(5^2) + 100\,(5) + 30\,000$$
$$h = 30\,250$$

El vértice de la función P es $(5,\ 30\,250)$. Lo cual quiere decir que la mayor producción se da cuando se siembran 5 árboles adicionales. La producción total es de 30250 manzanas.

≪ Respuesta

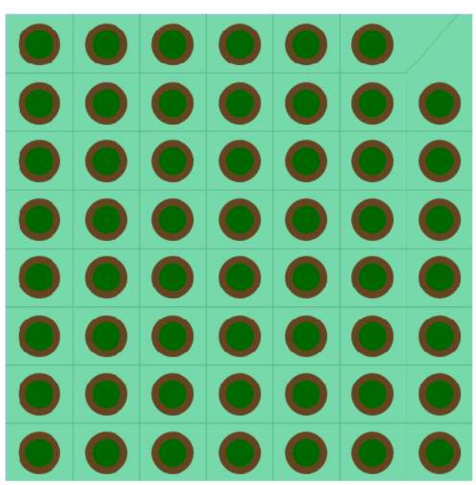
*El **vértice** de una parábola es el punto máximo o mínimo.*

Problema 5

Ahora es el momento de brindarle ayuda al granjero

⇒ *¿Cúal sería su recomendación?*

Solución



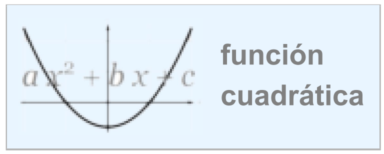
La recomendación sería sembrar 55 árboles (5 adicionales) para obtener una producción total de 30250 manzanas al año, la cual se ha demostrado que es la máxima producción que pueden dar los árboles con las condiciones dadas.

≪ Respuesta

Resumen función cuadrática

Como se había visto con anterioridad, una función cuadrática es de la forma $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, donde a es un número distinto de cero. El dominio son todos los reales y el rango depende de si la función abre hacia arriba o hacia abajo.

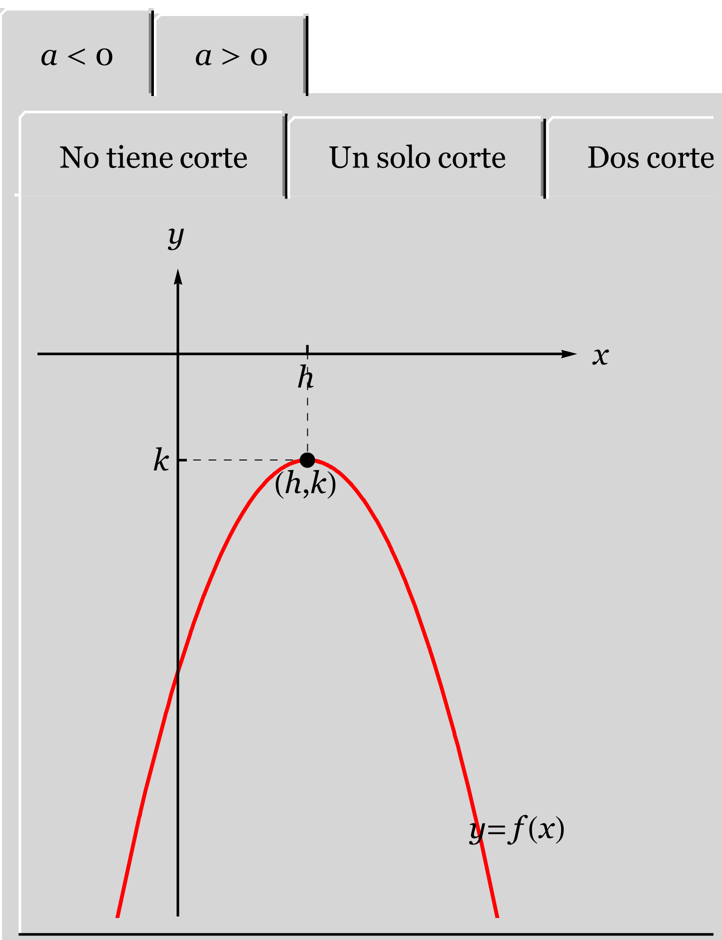
Estas funciones aparecen en innumerables situaciones del quehacer humano, donde quizá una aplicación por resaltar pertenece a una rama de la física conocida como cinemática, que estudia (entre otros), fenómenos naturales como es el caso de *caída libre* y *tiro parabólico*.



Definición:
una ***función cuadrática*** es de la forma

$$f\,(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donde a es un número distinto de cero. El dominio son todos los reales y el rango depende de si la función abre hacia arriba o hacia abajo.



Las gráficas de las funciones cuadráticas se conocen como parábolas, frecuentemente es necesario calcular el ***vértice***, el **corte con el eje** y y los **cortes con el eje** x.

Una función cuadrática tiene como vértice el punto con las coordenadas:

$$\mathbf{v}\,(h,\ k)$$

donde

$$h = \frac{-b}{2\,a} \quad \text{y} \quad k = f\left(\frac{-b}{2\,a}\right)$$

El **corte con el eje** y se obtiene al ingresar $x = 0$ en la función $f(x)$:

$$f(0) = c$$

Para calcular los **puntos de cortes con el eje** $\boldsymbol{x}$ (si los tiene) es necesario igualar a cero la función y solucionar ecuación cuadrática:

$$a\,x^2 + b\,x + c\ = 0$$

dependiendo de sus soluciones, la función cuadrática puede tener *máximo dos puntos de corte con el eje* x.

Por último, es importante enfatizar que la gráfica de $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ se abre hacia arriba (*tiene mínimo*) si $a > 0$, y se abre hacia abajo (*tiene máximo*) si $a < 0$.

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios procedimentales

1. Hallar, para cada función, los cortes con el eje x y y.

1.1. $f(x) = -5\,x^2 - x + 6$

1.2. $g(t) = t^2 - 16\,t$

1.3. $h(s) = 5\,s^2 - \frac{2}{3}\,s - 3$

2. Dada la función $f\,(x) = -3\,x^2 + 6\,x - 5$

2.1. Encontrar el vértice de f, determinar si es un punto máximo o mínimo

2.2. Determinar el dominio y el rango de la función.

2.3. Dibujar la gráfica de la función f.

3. Dada la función $f\,(x) = -x^2 + x + 2$

3.1. Dibujar la gráfica de la función f.

3.2. Encuentre el valor mínimo o máximo de f.

4. Determine el dominio y el rango de la función $f(x) = -(x+1)^2$

5. Encuentre los puntos de intersección, si los tiene, de las parábolas $y = (x+2)^2$ y $y = -(x-1)^2 + 1$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. Hallar, para cada función, los cortes con el eje x y y.

1.1. $f(x) = -5\,x^2 - x + 6$

- Corte con el eje y: $f\,(0) = 6$
- Cortes con el eje x: se soluciona la ecuación cuadrática $-5\,x^2 - x + 6 = 0$.
  Se obtienen como soluciones $x = -\frac{6}{5}$, y $x = 1$.

1.2. $g(t) = t^2 - 16\,t$

- Corte con el eje y: $g\,(0) = 0$
- Cortes con el eje x: se soluciona la ecuación cuadrática $t^2 - 16\,t = 0$.
  Se obtienen como soluciones $t = 0$, y $t = 16$.

1.3. $h(s) = 5\,s^2 - \frac{2}{3}\,s - 3$

- Corte con el eje y: $h(0) = -3$
- Cortes con el eje x: se soluciona la ecuación cuadrática $5\,s^2 - \frac{2}{3}\,s - 3 = 0$.

  Se obtienen como soluciones $s = \frac{1}{15}\left(1 - 2\sqrt{34}\right)$, y $s = \frac{1}{15}\left(1 + 2\sqrt{34}\right)$.

2. Dada la función $f\,(x) = -3\,x^2 + 6\,x - 5$

2.1. Encontrar el vértice de f, determinar si es un punto máximo o mínimo

En este caso, $a = -3$ y $b = 6$. Luego la coordenada x del vértice es $x = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{6}{2\,(-3)} = 1$.

La coordenada y del vértice se calcula como $y = f(1) = -3\,(1)^2 + 6\,(1) - 5 = -2$.

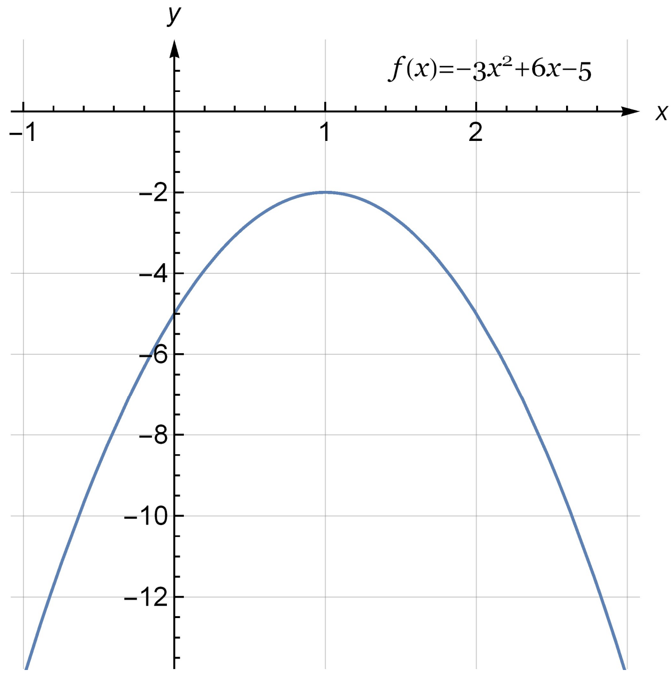
El vércice es $v(1,\ -2)$. Dado que $a < 0$, el vértice es un *punto máximo*.

2.2. Determinar el dominio y el rango de la función.

Dominio todos los reales, mientras que para el rango, se tiene desde menos infinito hasta la coordenada y máxima, es decir, el intervalo $(-\infty, -2]$.

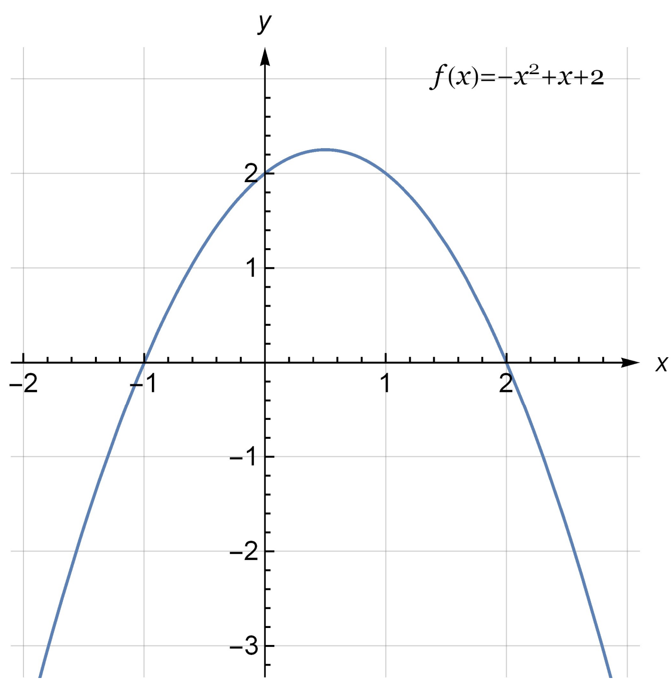
Dom $f = \mathbb{R}$, Ran $f = (-\infty, -2]$

2.3. Dibujar la gráfica de la función f.



3. Dada la función $f(x) = -x^2 + x + 2$

3.1. Dibujar la gráfica de la función f.



3.2. Encuentre el valor mínimo o máximo de f.

En este caso, $a = -1$ y $b = 1$. Luego la coordenada x del vértice es $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$.

La coordenada y del vértice se calcula como $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4}$.

El vértice es $v\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Dado que $a < 0$, el vértice es un *punto máximo*.

El valor máximo de f es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

4. Determine el dominio y el rango de la función $f(x) = -(x+1)^2$

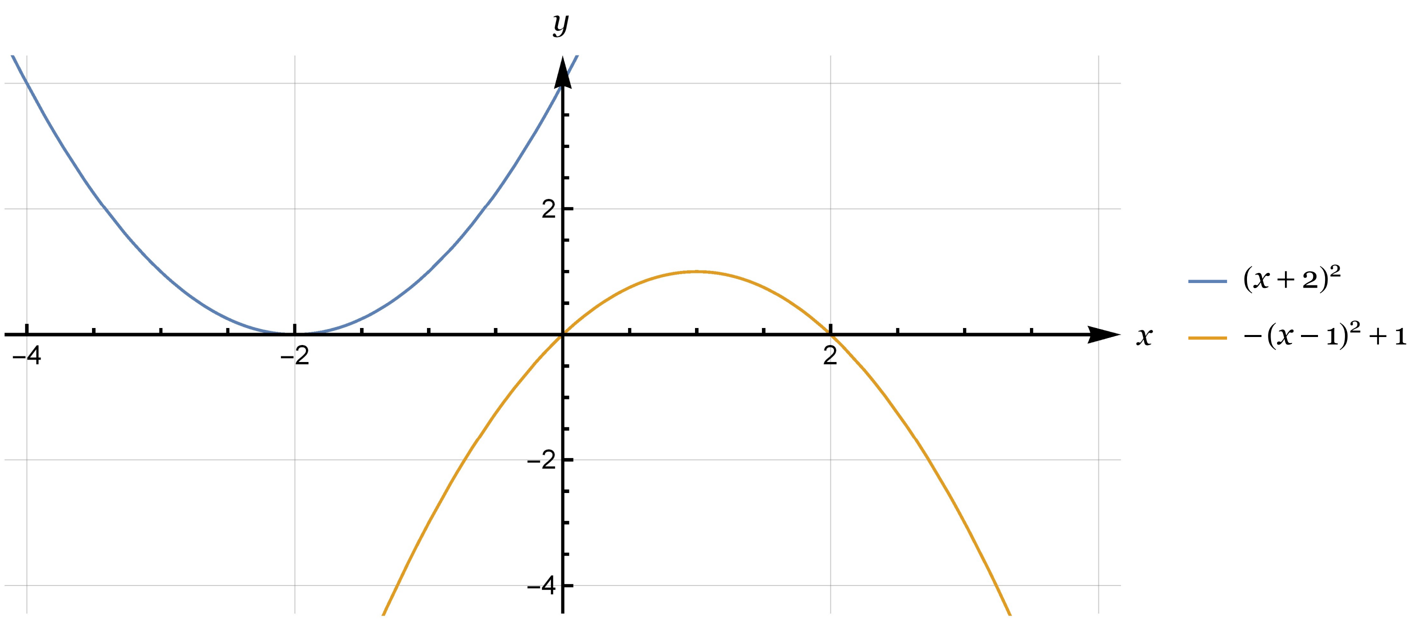
Al expandir la función se tiene que $f(x) = -(x+1)^2 = -x^2 - 2x - 1$.

El vértice de la función se encuentra en el punto $(-1, 0)$ y como $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo. Luego el dominio son todos los reales y el rango el intervalo $(\infty, 0]$.

Dom $f = \mathbb{R}$, Ran $f = (-\infty, 0]$

5. Encuentre los puntos de intersección, si los tiene, de las parábolas $y = (x+2)^2$ y $y = -(x-1)^2 + 1$

Para la solución de este problema se recurre a un análisis gráfico:



Vemos que las parábolas no tienen puntos de corte. De otro lado, a manera de alternativa, si se igualan las funciones y se trata de solucionar la ecuación cuadrática:

$$(x+2)^2 = -(x-1)^2 + 1$$

no se obtendrán soluciones reales.

» Problemas de aplicación

1. Al lanzar un objeto hacia arriba con una velocidad de 10 metros/seg, su altura (en metros) después de t segundos se puede modelar mediante la función $h(t) = 10\,t - 4.9\,t^2$.

1.1. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

1.2. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que el objeto cae al suelo?

2. Un tendero vende unidades de cierto producto a x pesos cada una, y estima vender $300 - 2\,x$ unidades del mismo.

2.1. Modelar la situación con una función que determine el *ingreso* del tendero.
(El ingreso es el producto entre el número de unidades vendidas y el precio de cada unidad).

2.2. Hallar el ingreso por la venta de 25 unidades del producto.

2.3. Si el ingreso fue de $8,800 pesos, ¿cuántas unidades del producto se vendieron?

3. Un objeto es lanzado en movimiento parabólico desde una altura de 10 metros sobre el suelo, a un ángulo de 45° respecto a la horizontal, a una velocidad de 8 metros/seg. Este movimiento puede modelarse mediante principios físicos donde la trayectoria del objeto está modelada por la función:

$$y = -\frac{9.8}{8^2}x^2 + x + 10$$

donde y es la altura alcanzada por el objeto y x es la distancia que ha recorrido horizontalmente.

3.1. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

3.2. ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida cuando el objeto cae al suelo?

3.3. Dibuje la gráfica de la función y verifique las respuestas de los literales anteriores.

4. Cierta compañía determina que producir cada unidad del artículo A cuesta $540 y el costo fijo de producción es de $1,800,000.

4.1. Encuentre una función que modele el *costo total* de producción $C(x)$.

4.2. El ingreso obtenido por vender x unidades está dado por la función $I(x) = 2500x - \frac{x^2}{5}$. Determine el número de unidades que debe venderse para que se maximice el ingreso, ¿cuál es el ingreso máximo?

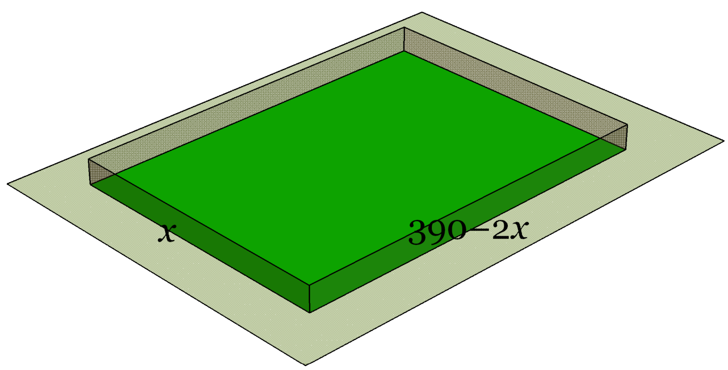
4.3. Determine el número de unidades que debe producir y vender al mes, de modo que no se tengan pérdidas.

4.4. Grafique las funciones costo $C(x)$ e ingreso $I(x)$.

4.5. Si la *utilidad* se define como la diferencia entre el *ingreso* y el *costo* mensual, ¿Cuántas unidades se debe producir y vender al mes de modo que la utilidad sea máxima?, ¿cuál es la utilidad máxima?

5. Se tiene 780 metros de cerca para cercar un terreno rectangular que será utilizado como siembra de hortalizas. Hay muchas maneras de cercar el terreno, por ejemplo de dimensiones 300 por 90 metros o 250 por 140 metros. Determine las dimensiones del cercado que permite encerrar la mayor área del terreno.

Sugerencia: encuentre una función que modele el ***área*** *del terreno y que dependa de uno de los lados (x), esta es una función cuadrática.*

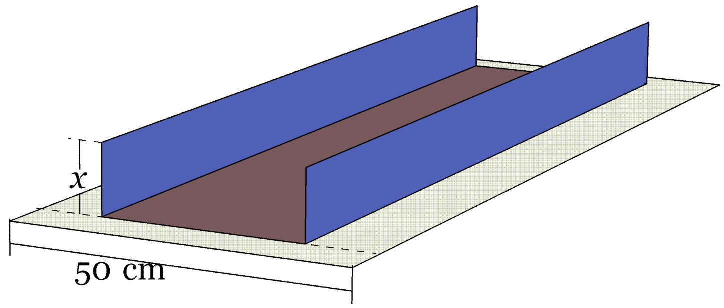


6. Un canal para el paso del agua se fabrica doblando hacia arriba los lados de una lámina rectangular de 50 centímetros de ancho.

6.1. Encuentre una función que modele el área de la sección transversal y que dependa de su altura.

6.2. Encuentre la altura del canal que tenga la mayor área de la sección transversal. ¿Cuál es la máxima área de la sección transversal?

De esta manera se encontró el canal óptimo para el paso de agua con las condiciones dadas.



» Soluciones a los problemas

1. Al lanzar un objeto hacia arriba con una velocidad de 10 metros/seg, su altura (en metros) después de t segundos se puede modelar mediante la función $h(t) = 10\,t - 4.9\,t^2$.

1.1. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

Se debe encontrar el vértice de $h(t) = 10\,t - 4.9\,t^2$. Para lo anterior, al tener que $a = -4.9$ y $b = 10$, se tiene que el vértice se encuentra en el punto $\left(\frac{50}{49}, \frac{250}{49}\right)$.

Dado que $a < 0$, el punto es máximo y la mayor altura es $\frac{250}{49}$ metros.

1.2. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que el objeto cae al suelo?

Se deben encontrar los punto de corte de $h(t) = 10\,t - 4.9\,t^2$ con el eje x. Esto es, resolver la ecuación $10\,t - 4.9\,t^2 = 0$

$$\begin{aligned} 10\,t - 4.9\,t^2 &= 0 \\ t(10 - 4.9\,t) &= 0 \\ t = 0, &\quad 10 - 4.9\,t = 0 \\ t = 0, &\quad t = \frac{10}{4.9} = \frac{100}{4.9} \end{aligned}$$

Se obtiene $t = 0$ (cuando se lanza el objeto) y $t = \frac{100}{4.9}$ cuando el objeto vuelve a tierra.

2. Un tendero vende unidades de cierto producto a x pesos cada una, y estima vender $300 - 2\,x$ unidades del mismo.

2.1. Modelar la situación con una función que determine el *ingreso* del tendero.
(El ingreso es el producto entre el número de unidades vendidas y el precio de cada unidad).

El ingreso corresponde al número de artículos vendidos por su precio unitario. En este caso, el ingreso I(x) se encuentra dado por:

$$I(x) = x\,(300 - 2\,x)$$

2.2. Hallar el ingreso por la venta de 25 unidades del producto.

Al reemplazar $x = 24$ en la funcion $I(x)$ se tiene que $I(25) = 25\,(300 - 2\,(25)) = 6250$

2.3. Si el ingreso fue de \$8,800 pesos, ¿cuántas unidades del producto se vendieron?

Ya que $I(x) = 8800$, se quiere solucionar la ecuación cuadrática

$$I(x) = x\,(300 - 2\,x) = 8800$$

Mediante factorización, se obtienen las soluciones $x = 40$ o $x = 110$. Por tanto, se vendieron 40 o 110 unidades.

3. Un objeto es lanzado en movimiento parabólico desde una altura de 10 metros sobre el suelo, a un ángulo de 45° con la horizontal, a una velocidad de 8 metros/seg. Puede modelarse mediante principios físicos que la trayectoria del objeto está modelada por la función:

$$y = -\frac{9.8}{8^2}\,x^2 + x + 10$$

donde y es la altura alcanzada por el objeto y x es la distancia que ha recorrido horizontalmente.

3.1. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

De nuevo, se usa la fórmula del vértice para concluir que en el caso de $y = -\frac{9.8}{8^2}\,x^2 + x + 10$, el vértice se encuentra en el punto $\left(\frac{160}{49},\ \frac{570}{49}\right)$, es decir, aproximadamente en $(3.26,\ 11.63)$.

En este caso, la altura máxima es $\frac{570}{49}$ metros, o en forma aproximada, 11.63 metros

3.2. ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida cuando el objeto cae al suelo?

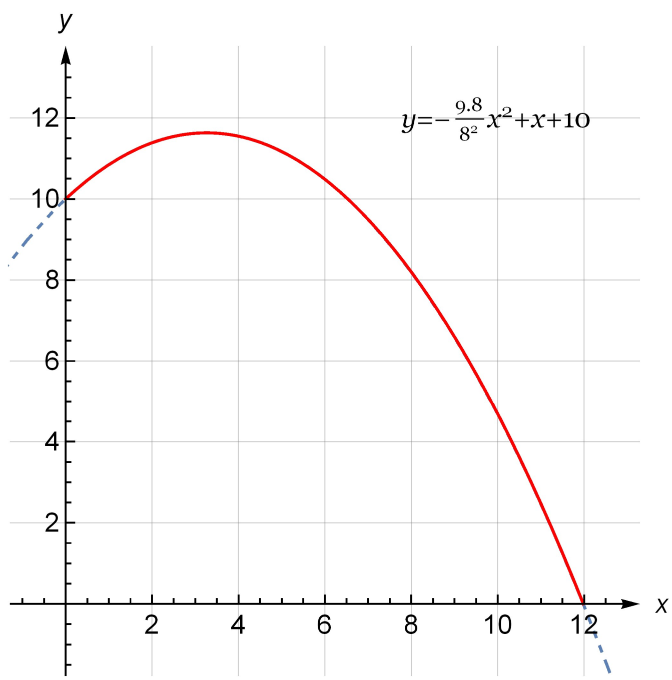
Se deben encontrar los punto de corte de la función $y = -\frac{9.8}{8^2}\,x^2 + x + 10$ con el eje x (así se encuentra la distancia cuando toca el suelo), es decir, se debe resolver la ecuación $-\frac{9.8}{8^2}\,x^2 + x + 10 = 0$.

Al recurrir a la fórmula cuadrática, se obtienen las soluciones:

$$x = \frac{40}{49}\left(4 - \sqrt{114}\right) \approx -5.45, \qquad x = \frac{40}{49}\left(4 + \sqrt{114}\right) \approx 11.98$$

Al descartar la solución negativa y aproximar, se tiene que la distancia horizontal recorrida corresponde aproximadamente a 11.98 metros.

3.3. Dibuje la gráfica de la función y verifique las respuestas de los literales anteriores.



4. Cierta compañía determina que producir cada unidad del artículo A cuesta \$540 y el costo fijo de producción es de \$1,800,000.

4.1. Encuentre una función que modele el *costo total* de producción $C(x)$.

Si x representa el número de artículos, con las herramientas de funciones lineales, se tiene que el costo $C\,(x)$ se encuentra dado por:

$$C\,(x) = 1\,800\,000 + 540\,x$$

4.2. El ingreso obtenido por vender x unidades está dado por la función $I(x) = 2500\,x - \frac{x^2}{5}$. Determine el número de unidades que debe venderse para que se maximice el ingreso, ¿cuál es el ingreso máximo?

Ahora se requiere encontrar el vértice de $I(x) = 2500\,x - \frac{x^2}{5}$. Usando las fórmulas trabajadas en el capítulo, se obtiene el punto $(6250,\ 7\,812\,500)$.

Dado que $a = -\frac{1}{5} < 0$, se tiene un máximo y el máximo ingreso sería \$7,812,500.

4.3. Determine el número de unidades que debe producir y vender al mes, de modo que no se tengan pérdidas.

Para que no se tengan pérdidas, los ingresos deben ser mayores o iguales a los costos, esto quiere decir que se debe resolver la desigualdad:

$$I(x) \geq C(x)$$

Al reemplazar por sus respectivas expresiones y simplificar, se obtiene la inecuación no lineal:

$$2500\,x - \frac{x^2}{5} \geq 800\,000 + 540\,x$$

$$-\frac{x^2}{5} + 1960\,x - 800\,000 \geq 0$$

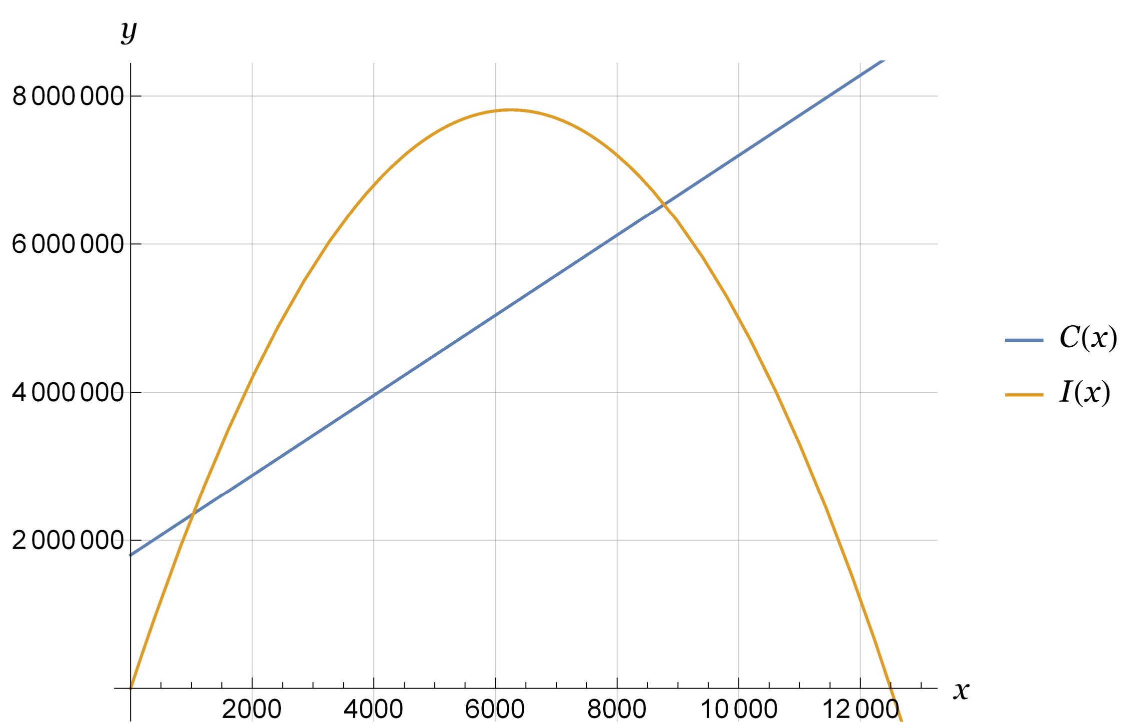
Que da el intervalo solución:

$$100\left(49 - \sqrt{1501}\right) \leq x \leq 100\left(49 + \sqrt{1501}\right)$$

$$1025 \leq x \leq 8774 \text{ (aprox.)}$$

De donde se concluye que para que no se tengan pérdidas se deben producir y vender aproximadamente entre 1025 y 8774 unidades, inclusive.

4.4. Grafique las funciones costo $C(x)$ e ingreso $I(x)$.



Un análisis gráfico permite verificar el resultado del numeral **4.3**, pues se evidencia el intervalo en donde la función de ingresos es mayor a la función de costos.

4.5. Si la *utilidad* se define como la diferencia entre el *ingreso* y el *costo* mensual, ¿Cuántas unidades se debe producir y vender al mes de modo que la utilidad sea máxima?, ¿cuál es la utilidad máxima?

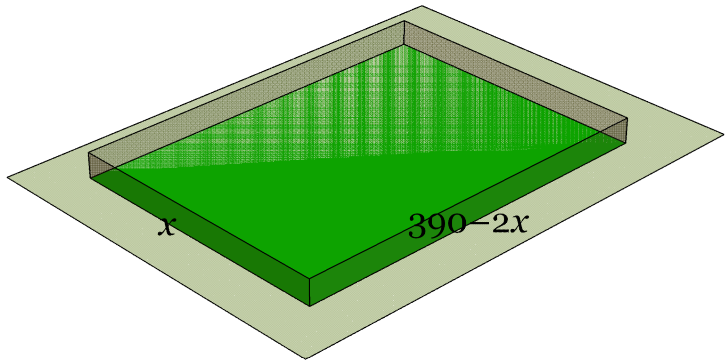
En este caso, la utilidad $U(x)$ se encuentra dada por:

$$U(x) = I(x) - C(x) = 2500\,x - \frac{1}{5}\,x^2 - 1\,800\,000 - 540\,x = -\frac{1}{5}\left(x^2 - 9800\,x + 9\,000\,000\right)$$

Lo que indica que la función utilidad es una función cuadrática que abre hacia abajo ($a = -\frac{1}{5} < 0$). Por tanto, es necesario encontrar la coordenada del vértice, la cual es $(4900,\ 3\,002\,000)$.

Por tanto, se obtiene una utilidad máxima de $3,002,000 cuando se venden 4900 artículos.

5. Se tiene 780 metros de cerca para cercar un terreno rectangular que será utilizado como siembra de hortalizas. Hay muchas maneras de cercar el terreno, por ejemplo de dimensiones 300 por 90 metros o 250 por 140 metros. Determine las dimensiones del cercado que permite encerrar la mayor área del terreno.
*Sugerencia: encuentre una función que modele el **área** del terreno y que dependa de uno de los lados (x), esta es una función cuadrática.*



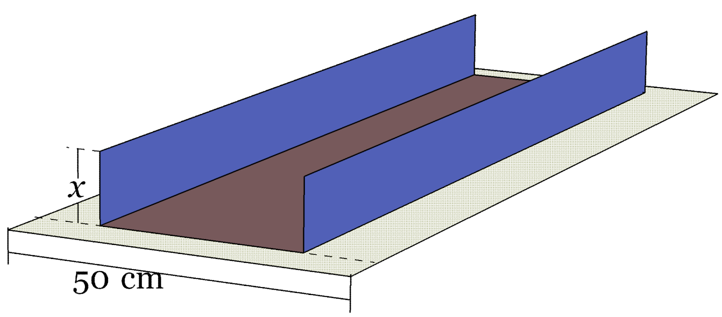
Dado un lado x del terreno rectangular, su otro lado debe ser $390 - x$ para que el perímetro del mismo sea 780 metros.

Por tanto, el área a maximizar estaría dada por la función $A(x) = x(390 - x)$, que representa una parábola que se abre hacia abajo y por tanto, con un máximo.

Al recurrir a las expresiones del vértice, se obtiene que el área máxima posible se da cuando $x = 195$ metros, por tanto, su otro lado es $390 - 195 = 195$ metros también. (Note que el área máxima se da cuando se cerca un terreno con forma de cuadrado).

Por último, al reemplazar x en la función del área se tiene que $A(195) = 195\,(390 - 195) = 195^2 = 38\,025$ metros cuadrados

6. Un canal para el paso del agua se fabrica doblando hacia arriba los lados de una lámina rectangular de 50 centímetros de ancho.



6.1. Encuentre una función que modele el área de la sección transversal y que dependa de su altura.

La longitud de la base del canal debe ser $50 - 2x$, pues al sumar a dicha base las longitudes de los lados del canal, se obtienen los 50 cm de longitud de la lámina que se dobla para producir el canal.

Dado lo anterior, el área transversal se encuentra dada por $A(x) = x(50 - 2x)$.

6.2. Encuentre la altura del canal que tenga la mayor área de la sección transversal. ¿Cuál es la máxima área de la sección transversal?

De esta manera se encontró el canal óptimo para el paso de agua con las condiciones dadas.

El máximo de la función cuadrática $A(x) = x(50 - 2x) = 50x - 2x^2$ se encuentra recurriendo a la búsqueda del vértice. En este caso, se obtiene un máximo de 312.5 metros cuadrados de sección transversal.

Conclusiones del capítulo

Como se vio en este capítulo, en muchas situaciones se da que el valor de una cantidad depende del valor de otra, esta es la esencia del concepto de función. Se presentaron algunas características de las funciones, como el dominio, rango, interceptos y tipo de gráfica.

Se hizo énfasis en las gráficas de funciones polinomiales de grado uno (función lineal) y grado dos (función cuadrática), las cuales son apropiadas para situaciones prácticas, como crecimiento constante, lanzamiento de objetos o producción y venta de productos.

A continuación encontrará un aplicativo que resume lo visto en cada sección del capítulo, lo invitamos a navegar por él y visualizar los ejemplos presentados.

Resumen de capítulo

funciones	Dominio y Rango	función lineal	función cuadrática

Definición de función:
Una **función** f de un conjunto D (**dominio**) a un conjunto R (**rango**) es una *regla de transformación o asignación* que a cada elemento x de D le asigna un **único** elemento $f(x)$ de R.

Argumentos e imágenes de funciones ⇒ $\boxed{(x, f(x))}$

Diferentes representaciones de las funciones

Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3	Ejemplo 4
Ejemplo 5	Ejemplo 6	Ejemplo 7	Ejemplo 8

Polinomios: Objetos y fenómenos se pueden modelar por medio de polinomios, por ejemplo, el arco de Corferias (Bogotá, Colombia) se puede modelar por medio de un polinomio de grado 2.

$y = -0.006\,x^2 + 2.916\,x - 32.74$

x	$f(x)$
50	98.2269
100	199.542
150	271.196
200	313.188
250	325.519
300	308.189
350	261.197
400	184.544
450	78.2299