Ecuación

» Definición

» *Texto:*

Definición de ecuación:
Una ecuación es la **igualdad** de dos *expresiones matemáticas* que contienen al menos una **incognita**.
Resolver una ecuación significa *encontrar todos los números reales que hacen la ecuación verdadera*. Estos números son llamados **soluciones** o **raices** de la ecuación y todas las soluciones de la ecuación forman el **conjunto solución**.

Cabe notar que el **conjunto solución** puede ⇒

Conjunto solución vacío

El conjunto solución es vacío cuando la ecuación no tiene solución: quiere decir que ningún número real satisface la igualdad. Un ejemplo muy sencillo es intentar encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 = -1$, esta ecuación no tiene solución por que no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo.
Una ecuación no tiene solución cuando, de alguna manera, ocurre algún tipo de inconsistencia (una expresión que es falsa) como:
- Cuando se está despejando la variable, ésta se cancela creando la inconsistencia como $0 = -5$, que siempre será falsa sin importar el valor de la variable.

$$2x + 3 = 2x - 2$$
$$2x - 2x = -2 - 3$$
$$0 = -5$$

- Al aplicar fórmulas (como la fórmula cuadrática) se llega a una raíz negativa (otra incosistencia) como $\sqrt{-10}$, número que no existe en el conjunto de los número reales.

$$2x^2 + 1 = -19$$
$$2x^2 = -20$$
$$x^2 = -10$$
$$x = \pm\sqrt{-10}$$

- Al simplificar una expresión se debe tener cuidado de las restricciones de la varible por que *no se puede dividir por cero*.

$$\frac{2x-4}{x-2} = 5$$
$$\frac{2(x-2)}{x-2} = 5$$
$$2 = 5$$

- Otra manera de que el conjunto solución sea vacío es cuando se aplican las soluciones a un contexto específico; si la solución *matemática* no tiene sentido en el momento de trabajarla en el contexto entonces esta no puede ser una solución, por ejemplo si se pide calcular el tiempo de vuelo de un proyectil y la solución de la ecuación es $t = -2$, no tiene sentido que el tiempo de vuelo sea *menos dos* segundos ¿verdad?.

Conjunto solución con única solución

Siempre que el conjunto solución tenga un único elemento se dice que la solución es única, los siguientes ejemplos muestran este tipo de solución:
- Resolver la ecuación $(x-1)^2 = 0$:

$$(x-1)^2 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

El conjunto solución es $\{1\}$.

- Resolver la ecuación $\sqrt{x+4} = 2$:

$$\sqrt{x+4} = 2$$
$$x+4 = 4$$
$$x = 0$$

El conjunto solución es $\{0\}$.

- Resolver la ecuación $\frac{2x-3}{5} = \frac{4x-5}{3}$:

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{4x-5}{3}$$
$$3(2x-3) = 5(4x-5)$$
$$6x-9 = 20x-25$$
$$-14x = -16$$
$$x = \frac{16}{14}$$
$$x = \frac{8}{7}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{8}{7}\right\}$.

- Al aplicar las soluciones de una ecuación en un contexto específico puede darse el caso que solo una tenga sentido, por ejemplo si el conjunto solución de cierta ecuación es $\left\{-1, -\frac{1}{2}, 3\right\}$ y se quiere calcular el tiempo de vuelo de un proyectil, la única solución al problema debería ser $x = 3$, pues las dos primeras al ser negativas no tienen sentido en el contexto.

Conjunto solución con dos o más soluciones

Algunas ecuaciones tienen más de una solución, lo que significa que existen varios valores que hacen de la igualdad verdadera, los siguientes ejemplos muestran este tipo de solución:

- Resolver la ecuación $x^2 - 1 = 0$:

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0 \quad \text{Factorizando}$$
$$x-1 = 0, \quad x+1 = 0$$
$$x = 1, \quad x = -1$$

El conjunto solución es $\{1, -2\}$.

- La ecuación $x^2 = 4$ es verdadera cunado $x = 2$ ya que $2^2 = 4$, y cuando $x = -2$, ya que $(-2)^2 = 4$. En este caso el conjunto solución es $\{-2, 2\}$.

-Resolver la ecuación $\frac{x(x+2)^2(x-3)}{x+2} = 0$

$$\frac{x(x+2)^2(x-3)}{x+2} = 0$$
$$x(x+2)(x-3) = 0 \quad \text{Simplificando}$$
$$x = 0, \quad x+2 = 0, \quad x-3 = 0$$
$$x = 0, \quad x = -2, \quad x = 3$$

El conjunto solución es $\{0, 3\}$, recuerde que no se puede dividir por cero, por lo que $x = -2$ no puede ser solución.

Conjunto solución con infinitas soluciones

Algunas ecuaciones tienen infinitas soluciones, lo que significa que
hay un conjunto infinito de valores que hacen de la igualdad verdadera.
Por ejemplo en la ecuación $\frac{0}{x} = 0$, el valor de x puede ser cualquier número real excepto 0, x puede ser infinitos valores y la igualdad se cumple.
En este caso el conjunto solución se puede escribir como $\{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}$.

»

¿Cómo resolver ecuaciones?

Dependiendo el tipo de ecuación y el número de variables la manera de resolverla puede variar; generalmente, para resolver cualquier ecuación se debe despejar la(s) variable(s), la forma de resolverla no siempre es única y con práctica se crean métodos propios cada vez más eficaces.

» Lineal

Definición de una ecuación lineal:

Toda ecuación de la forma $a\,x + b = 0$, donde a y b son números reales y a es distinto de cero, es llamada **ecuación lineal** en x o **ecuación de primer grado** en x.

¿Cómo resolver ecuaciones?

Para resolver ecuaciones lineales se utilizan las propiedades de la

adición y sustracción

Una de las propiedades que se usa para despejar la variable en una ecuación lineal es la *propiedad de la adición o susracción* (recuerde: la sustracción es una adición escrita de manera diferente):
Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualquier número real $a,\ b$ y c.
Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$ para cualquier número real $a,\ b$ y c.
Esta propiedad indica que en una **igualdad** se puede *sumar* la misma cantidad en ambos lados y la igualdad no será afectada.
A continuación algunos ejemplos de cómo utilizar esta propiedad.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2 - x = 11$

$$2 - x = 11$$
$$2 - x + 2 = 11 + 2$$
$$-x = 13$$
$$x = -13$$

En este ejemplo en ambos lados de la igualdad se sumó 2
El conjunto solución es $\{-13\}$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $x + \frac{2}{3} = \frac{5}{2}$

$$x + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{2} - \frac{2}{3}$$
$$x = \frac{15}{6} - \frac{4}{6}$$
$$x = \frac{11}{6}$$

En este ejemplo en ambos lados de la igualdad se restó $\frac{2}{3}$ (o se sumó $-\frac{2}{3}$).

El conjunto solución es $\left\{\frac{11}{6}\right\}$

Como pudo observar, el fin de utilizar esta propiedad es cancelar el término está sumando (o restando) a la variable.

multiplicación y división

La otra propiedad usada despejar la variable en una ecuación lineal es la *propiedad de la multiplicación y división*, (recuerde: la división es una multiplicación escrita de manera diferente):
Si $a = b$, entonces $a\,c = b\,c$ para cualquier número real a, b y c, $c \neq 0$.
Esta propiedad indica que en una **igualdad** se puede *multiplicar* la misma cantidad en ambos lados y la igualdad no será afectada, la unica condición es que la cantidad a multiplicar sea diferente de cero.
En el caso de la división, en lugar de multiplicar por c, se puede multiplicar por $\frac{1}{c}$ donde $c \neq 0$.

A continuación algunos ejemplos de cómo utilizar esta propiedad.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2\,x = 11$

$$2\,x = 11$$
$$\frac{2\,x}{2} = \frac{11}{2}$$
$$x = \frac{11}{2}$$

En este ejemplo ambos lados de la igualdad se divide por 2 (o ambos lados se multiplican por $\frac{1}{2}$).

El conjunto solución es $\left\{\frac{11}{2}\right\}$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $-\frac{x}{3} = -7$

$$-\frac{x}{3} = -7$$
$$-3\left(-\frac{x}{3}\right) = -3\,(-7)$$
$$x = 21$$

En este ejemplo ambos lados de la igualdad se multiplicaron por -3.
El conjunto solución es $\{21\}$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $-\frac{4\,x}{5} = \frac{2}{3}$

$$-\frac{4\,x}{5} = \frac{2}{3}$$
$$-\frac{5}{4}\left(-\frac{4\,x}{5}\right) = -\frac{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$x = -\frac{5}{6}$$

En este ejemplo ambos lados de la igualdad se multiplicaron por $-\frac{5}{4}$.

El conjunto solución es $\left\{-\frac{5}{6}\right\}$

Como pudo observar, el fin de utilizar esta propiedad es simplificar la expresión que está multiplicando (o dividiendo) la variable.

Ejemplos

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $2\,x + 3 = -11$

$$2\,x + 3 = -11$$
$$2\,x + 3 - 3 = -11 - 3$$
$$2\,x = -14$$
$$\frac{2\,x}{2} = -\frac{14}{2}$$
$$x = -7$$

El conjunto solución es $\{-7\}$.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $6\,x + 5 - 7\,x = 10 - 4\,x + 3$

$$
\begin{aligned}
6x+5-7x &= 10-4x+3\\
-x+5 &= 13-4x\\
-x+5+4x &= 13-4x+4x\\
3x+5 &= 13\\
3x+5-5 &= 13-5\\
3x &= 8\\
\frac{3x}{3} &= \frac{8}{3}\\
x &= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{8}{3}\right\}$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $\frac{20}{3}t-\frac{11}{2}+t=-10$

$$
\begin{aligned}
\frac{20}{3}t-\frac{11}{2}+t &= -10\\
\frac{20}{3}t+t &= -10+\frac{11}{2}\\
\frac{23}{3}t &= -\frac{9}{2}\\
t &= \left(-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{3}{23}\right)\\
t &= -\frac{27}{46}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{27}{46}\right\}$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $10x-6=3\left(-\frac{14}{3}x+2\right)-10$

$$
\begin{aligned}
10x-6 &= 3\left(-\frac{14}{3}x+2\right)-10\\
10x-6 &= -14x+6-10\\
10x-6 &= -14x-4\\
10x+14x &= -4+6\\
24x &= 2\\
x &= (2)\left(\frac{1}{24}\right)\\
x &= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{12}\right\}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $2x-1=2x+4$

$$
\begin{aligned}
2x-1 &= 2x+4\\
2x-1-2x &= 2x+4-2x\\
-1 &= 4
\end{aligned}
$$

Como se llegó a una inconsistencia, la ecuación no tiene solución, el conjunto solución es vacío.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2}x+5=\frac{3}{4}$$
$$4\left(\frac{1}{2}x+5\right)=4\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$4\left(\frac{1}{2}x\right)+4(5)=4\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$2x+20=3$$
$$2x+20-20=3-20$$
$$2x=-17$$
$$\frac{2x}{2}=-\frac{17}{2}$$
$$x=-\frac{17}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{17}{2}\right\}$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $x-9+\frac{5}{3}x=-11$

$$x-9+\frac{5}{3}x=-11$$
$$x+\frac{5}{3}x=-11+9$$
$$\frac{8}{3}x=-2$$
$$x=\frac{3}{8}(-2)$$
$$x=-\frac{3}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación $\frac{3x+5}{2}=\frac{6x+10}{4}$

$$4\left(\frac{3x+5}{2}\right)=4\left(\frac{6x+10}{4}\right)$$
$$2(3x+5)=6x+10$$
$$6x+10=6x+10$$
$$6x-6x=10-10$$
$$0=0$$

El conjunto solución es $\{x\in\mathbb{R}\}$ (todos los números reales)

» Cuadrática

» *Definición de una ecuación cuadrática:*

Toda ecuación de la forma $a x^2+b x+c=0$, donde $a,\ b$ y c son números reales y a es distinto de cero, es llamada **ecuación cuadrática** en x o **ecuación de segundo grado** en x.

¿Cómo resolver ecuaciones?

Para resolver ecuaciones cuadrática es necesario que uno de los lados de la igualdad sea cero (se conoce como *igualar a cero*), luego se puede aplicar el método de la *factorización* o de la *fórmula cuadrática*.

factorización

Recuerde que el primer paso es tener la ecuación igualada a cero, es decir de la forma

$$a x^2+b x+c=0$$

donde la expresión de la derecha es un trinomio de grado dos, $a,\ b$ y c son números reales y $a\neq 0$.

Como vimos en la unidad de factorización, los trinomios no siempre se pueden factorizar, esto quiere decir que este método no es 100% efectivo. Supongamos entonces que el trinomio se puede factorizar, esto quiere decir que se encontraron dos factores lineales $p(x)$ y $q(x)$ tal que

$$a\,x^2 + b\,x + c = p(x)\,q(x)$$

es decir que

$$p(x)\,q(x) = 0$$

Se tienen ahora dos factores cuyo producto es cero y la única forma que esto ocurre es que uno de ellos, o ambos, sean iguales a cero, es decir

$$\text{Si } \; p(x)\,q(x) = 0, \; \text{ entonces } \; p(x) = 0, \; \text{o}, \; q(x) = 0$$

Como $p(x)$ y $q(x)$ son factores lineales se sigue que $p(x) = 0$ y $q(x) = 0$ son ecuaciones lineales, las cuales ya sabemos resolver.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2\,(72\,x) + 2\,(10\,x) + 4\,x^2 = 720$

Primero expresar la ecuación como $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,

$$2\,(72\,x) + 2\,(10\,x) + 4\,x^2 = 720$$

$$144\,x + 20\,x + 4\,x^2 = 720$$

$$4\,x^2 + 164\,x - 720 = 0$$

El término de la derecha se puede factorizar y luego se puede aplicar la posibilidad de multiplicar por $\frac{1}{4}$,

$$4\,x^2 + 164\,x - 720 = 0$$

$$4\,(x^2 + 41\,x - 180) = 0$$

$$\frac{4\,(x^2+41\,x-180)}{4} = \frac{0}{4}$$

$$x^2 + 41\,x - 180 = 0$$

Ahora se puede factorizar el término de la derecha

$$x^2 + 41\,x - 180 = 0$$

$$(x + 45)\,(x - 4) = 0$$

y quedaron dos factores lineales: $x + 45$ y $x - 4$, cada factor se iguala a cero y se despeja el valor de x

$$(x + 45)\,(x - 4) = 0$$

$$x + 45 = 0, \; \text{o}, \; x - 4 = 0$$

$$x = -45, \; \text{o}, \; x = 4$$

El conjunto solución es $\{-45, \; 4\}$

Ejemplo 2 (resumido): Resolver la ecuación $-z^2 - 2 = -2 + 2\,z$

$$-z^2 - 2\,z = 0$$

$$-z(z + 2) = 0$$

$$-z = 0, \; \text{o}, \; z + 2 = 0$$

$$z = 0, \; \text{o}, \; z = -2$$

El conjunto solución es $\{-2, \; 0\}$

Ejemplo 3 (resumido): Resolver la ecuación $4\,u^2 + 12\,u = -9$

$$4\,u^2 + 12\,u + 9 = 0$$

$$(2\,u + 3)\,(2\,u + 3) = 0$$

$$(2\,u + 3)^2 = 0$$

$$2\,u + 3 = 0$$

$$u = -\frac{3}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$

fórmula cuadrática

Recuerde que el primer paso es tener la ecuación igualada a cero, es decir de la forma

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

donde la expresión de la derecha es un trinomio de grado dos, a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Una vez identificados, los coeficientes a, b y c se reemplazan en la ***fórmula cuadrática***:

Si $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

son soluciones de la ecuación

La expresión $b^2 - 4\,a\,c$ es de especial cuidado porque de acuerdo a su valor la ecuación tiene o no solución:

Cuando $b^2 - 4\,a\,c < 0$ se tiene el término de la raíz $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ es negativo, por tanto, no hay solución real.

Cuando $b^2 - 4\,a\,c = 0$ se tiene el término de la raíz $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ es cero, por tanto, solo hay una solución real, y es $x = -\frac{b}{2\,a}$.

Cuando $b^2 - 4\,a\,c > 0$ se tiene el término de la raíz $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ es positivo, por tanto, hay dos soluciones, y son $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$, y, $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $\frac{9}{2}\,u^2 - u + 1 = -3$

Primero expresar la ecuación como $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,

$$\frac{9}{2}\,u^2 - u + 4 = 0$$

para facilitar el desarrollo de la ecuación se puede multiplicar ambos términos de la igualdad por dos,

$$2\left(\frac{9}{2}\,u^2 - u + 4\right) = 2 \times 0$$

$$9\,u^2 - 2\,u + 8 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática se tiene

$$u = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 9 \times 8}}{2 \times 9}$$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{-284}}{18}$$

Como el término de la raiz es negativo, la ecuación no tiene solución real y el conjunto solución es vacío.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $-2\,z^2 + 4\,z + 1 = 0$

Aplicando la fórmula cuadrática se tiene

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\,(-2)\,1}}{2\,(-2)}$$

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{-4}$$

$$z = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ y, } z = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{1 - \frac{\sqrt{6}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $y^2 - 2\,y = -1$

Primero expresar la ecuación como $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,

$$y^2 - 2\,y + 1 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática se tiene

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$y = 1$$

El conjunto solución es $\{1\}$.

Ejemplo 4: Resolver la ecuación $-9\,u^2 + 12\,u - 3 = 0$

Aplicando la fórmula cuadrática se tiene

$$u = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4(-9)(-3)}}{2(-9)}$$
$$u = \frac{-12 \pm \sqrt{36}}{-18}$$
$$u = -\frac{1}{18}(-12 \pm 6)$$
$$u = -\frac{1}{18}(-6), \text{ y, } u = -\frac{1}{18}(-18)$$
$$u = \frac{1}{3}, \text{ y, } u = 1$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$.

» *Tipos de solución de una ecuación cuadrática*

Tipos de solución de una ecuación cuadrática:
En el conjunto de los números reales, las ecuaciones cuadráticas pueden no tener solución, tener única solución o tener dos soluciones.

no tener solución

No tener solución
No todas las ecuaciones cuadráticas tienen solución, cuando $b^2 - 4\,a\,c < 0$ se tiene el término de la raíz $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ es negativo, por lo tanto no hay solución real.

única solución

Única solución
Las ecuaciones cuadráticas pueden tener solamente una solución, esto ocurre cuando al factorizar la expresión cuadrática $a\,x^2 + b\,x + c$ se llega a factores lineales repetidos, es decir $a\,x^2 + b\,x + c = p(x)^2$. De la misma manera, la solución es única cuando $b^2 - 4\,a\,c = 0$ pues el término de la raíz $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ es cero.

dos solucuones

Dos soluciones
Las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos soluciones, esto ocurre cuando al factorizar la expresión cuadrática $a\,x^2 + b\,x + c$ se llega a dos factores lineales diferentes es decir $a\,x^2 + b\,x + c = p(x)\,q(x)$. De la misma manera, la solución es única cuando $b^2 - 4\,a\,c > 0$ pues el término de la raíz $\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$ es positivo y da lugar a dos soluciones: $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$, y, $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$.

» *Ejemplos*

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 2 = -1$

$$\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 2 = -1$$
$$\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 3 = 0$$
$$6\left(\frac{5\,t^2}{3} - \frac{13\,t}{6} + 3\right) = 0 \times 6$$
$$10\,t^2 - 13\,t + 18 = 0$$
$$t = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \times 10 \times 18}}{2 \times 10}$$
$$t = \frac{13 \pm \sqrt{-551}}{20}$$

No tiene solución, el conjunto solución es vacío.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x - 2\,x^2 = 0$

$$x - 2\,x^2 = 0$$
$$-x(2\,x - 1) = 0$$
$$-x = 0,\ \ o,\ \ 2\,x - 1 = 0$$
$$x = 0,\ \ o,\ \ x = \frac{1}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{0,\ \frac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $\sqrt{y+1} = 3\,y + 3$

$$\sqrt{y+1} = 3\,y + 3$$
$$y + 1 = (3\,y + 3)^2$$
$$y + 1 = 9\,y^2 + 18\,y + 9$$
$$-9\,y^2 - 17\,y - 8 = 0$$
$$y = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 4 \times 9 \times 8}}{2 \times 9}$$
$$y = \frac{-17 \pm \sqrt{1}}{18}$$
$$y = -1,\ o,\ y = -\frac{8}{9}$$

Se deben probar ambas soluciones, pues se puede dar el caso que la raíz cuadrada no exista (si $y + 1 < 0$, raiz cuadrada de una expresión negativa no existe)
El conjunto solución es $\left\{-1,\ -\frac{8}{9}\right\}$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $-2\,z^2 + 7\,z - 6 = 0$

$$-2\,z^2 + 7\,z - 6 = 0$$
$$-2\,z^2 + 3\,z + 4\,z - 6 = 0$$
$$-z(2\,z - 3) + 2\,(2\,z - 3) = 0$$
$$(2\,z - 3)\,(2 - z) = 0$$
$$2\,z - 3 = 0,\ o,\ 2 - z = 0$$
$$z = \frac{3}{2},\ o,\ z = 2$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{3}{2},\ 2\right\}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $-3\,z^2 - z - 1 = -1$

$$-3z^2 - z - 1 = -1$$
$$-3z^2 - z = 0$$
$$z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(-3)(0)}}{2(-3)}$$
$$z = -\frac{1}{6}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{6}\right\}$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $-\frac{4}{3}t^2 - 3t + 3 = -1$

$$-\frac{4}{3}t^2 - 3t + 4 = 0$$
$$\frac{1}{3}(-4t^2 - 9t + 12) = 0$$
$$-4t^2 - 9t + 12 = 0$$
$$t = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 12}}{2(-4)}$$
$$t = -\frac{1}{8}\left(9 \pm \sqrt{273}\right)$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{1}{8}\left(9 - \sqrt{273}\right), -\frac{1}{8}\left(9 + \sqrt{273}\right)\right\}$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $6z^2 + 11z + 3 = 0$

$$6z^2 + 11z + 3 = 0$$
$$6z^2 + 2z + 9z + 3 = 0$$
$$2z(3z + 1) + 3(3z + 1) = 0$$
$$(3z + 1)(2z + 3) = 0$$
$$3z + 1 = 0, \quad \text{o}, \quad 2z + 3 = 0$$
$$z = -\frac{1}{3}, \quad \text{o}, \quad z = -\frac{3}{2}$$

El conjunto solución es $\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación $y^2 - 4 = 0$

$$y^2 - 4 = 0$$
$$(y - 2)(y + 2) = 0$$
$$y = 2, \quad o \quad y = -2$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$

» No lineal No cuadrática

» *Definición:*

Este tipo de ecuaciones son las que no se pueden expresar de forma líneal $(a\,x + b = 0)$ o de forma cuadrática $(a\,x^2 + b\,x + c = 0)$.

¿Cómo resolver ecuaciones?

No hay un proceso general. Una de las estrategias para resolver este tipo de ecuaciones es “convertirlas” en lineales o cuadráticas, encontrar las soluciones y probar dicho tipo de soluciones en la ecuación original (o en el contexto).

» *Ejemplos*

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $-1-\frac{-z+2}{-3\,z-1}=0$

$$\frac{-1\,(-3\,z-1)}{-3\,z-1}-\frac{-z+2}{-3\,z-1}=-1$$
$$\frac{3\,z+1-(-z+2)}{-3\,z-1}=0$$
$$\frac{4\,z-1}{-3\,z-1}=0$$
$$4\,z-1=0$$
$$z=\frac{1}{4}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{1}{4}\right\}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $t^3=16\,t$

$$t^3-16\,t=0$$
$$t(t^2-16)=0$$
$$t(t-4)\,(t+4)=0$$
$$t=0,\;\; t=-4,\;\; t=4$$

El conjunto solución es $\{-4,\ 0,\ 4\}$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $-3+\frac{3\,m+1}{m-3}=0$

$$-3+\frac{3\,m+1}{m-3}=0$$
$$\frac{-3\,(m-3)}{m-3}+\frac{3\,m+1}{m-3}=0$$
$$\frac{-3\,m+9+(3\,m+2)}{m-3}=0$$
$$\frac{11}{m-3}=0$$
$$11=0$$

La ecuación no tiene solución.

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $\frac{3\,u-3}{3\,u-1}=\frac{2\,u-3}{9\,u^2-1}$

$$\frac{3\,u-3}{3\,u-1}-\frac{2\,u-3}{9\,u^2-1}=0$$
$$\frac{(3\,u-3)\,(3\,u+1)}{(3\,u-1)\,(3\,u+1)}-\frac{2\,u-3}{(3\,u-1)\,(3\,u+1)}=0$$
$$\frac{(3\,u-3)\,(3\,u+1)-(2\,u-3)}{(3\,u-1)\,(3\,u+1)}=0$$
$$\frac{9\,u^2-8\,u}{(3\,u-1)\,(3\,u+1)}=0$$
$$9\,u^2-8\,u=0$$
$$u(9\,u-8)=0$$

El conjunto solución es $\left\{0,\ \frac{8}{9}\right\}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $\frac{-3y-1}{3y+3} + \frac{2y-1}{6y^2+15y+9} = 0$

$$\frac{(-3y-1)(2y+3)}{3(y+1)(2y+3)} + \frac{2y-1}{3(y+1)(2y+3)} = 0$$
$$\frac{(-3y-1)(2y+3)+2y-1}{3(y+1)(2y+3)} = 0$$
$$\frac{-6y^2-9y-4}{3(y+1)(2y+3)} = 0$$
$$-6y^2-9y-4 = 0$$

La ecuación no tiene solución.

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = 4$

$$\frac{3}{3x} + \frac{2}{3x} = 4$$
$$\frac{5}{3x} = 4$$
$$5 = 4(3x), \quad x \neq 0$$
$$5 = 12x$$
$$x = \frac{5}{12}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{5}{12}\right\}$.

Razon y proporciones

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
    style1, style2, style3,
    color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
    tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
    page1, page2, page3, page4, page5,
    titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 700},
   (*Inicializar page´s*)
   page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 1;
   (*estilos de los textos/recuadros*)
   framePane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "Cuadro/Titulo",
      LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
       {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
   textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
      LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
       {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
   style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
   style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
   style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
   (*Estilos de las ventanas emergentes*)
   titlePopUp[s_String] :=
```

```
  Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
    "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
    "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
     {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
TextCell[Row[{"Números racionales como razón y proporción ⇒", "    ",
   MouseAppearance[Button[TextCell["  enlace  ", "Text"],
     CreateDialog[{
       Pane[Column[{
          titlePopUp["Números racionales como razón y proporción"],
          textPopUp[
           "Una razón es el cociente de dos cantidades, la razón entre la
             cantidad a y la cantidad b se expresa con la
             notación de fracción a/b o con la notación a : b.
             La fracción a/b como razón evidencia la
             comparación bidireccional entre los valores
             a y b, siendo esencial el orden en el que
             se citan las magnitudes comparadas."],
          textPopUp["Por ejemplo, en la clase de matemáticas hay
             12 mujeres por cada 28 hombres, eso
             significa que la razón entre mujeres y
             hombres es de 12/28 que al simplificarse,
             es lo mismo que 3/7, lo que quiere decir
             que hay 3 mujeres por cada 7 hombres."],
          textPopUp["Cuando dos pares de números, como 5, 4 y
             20, 16 tienen la misma razón, se dice que
             ellas son proporcionales. La expresión
                                 5/4 = 20/16
 establece que las parejas 5, 4 y 20, 16 son proporcionales.
             5 es a 4 como 20 es a 16 "],
```

```
textPopUp["En los problemas que involucran proporciones
   usualmente se desconoce algún término,
   para resolver expesiones como x/a = c/d,
   donde x se desconoce, se multiplica
   en cruz las cantidades y luego se
   divide a ambos lados para dejar x sola:
```

$$d\,x = a\,c$$

$$x = \frac{a\,c}{d}$$

```
de esta manera se puede encontrar el valor desconocido en la proporción."],
   textPopUp["Ejemplos:"],
   textPopUp["1. Luis tiene 24 años y la razón entre la
   edad de él y la de su hermano es de
   6 a 5, ¿cuál es la edad del hermano?
```

$$\frac{(\text{Edad de Luis})}{(\text{Edad del hermano})} = \frac{6}{5} = \frac{24}{x}\ ,$$

```
para saber a cuánto
   equivale x, se multiplica en cruz
```

$$6\,x = 24\,5$$

luego se divide entre 6, por lo tanto $x = \frac{24\,5}{6} = 4\,5 = 20$, luego

```
   la edad del hermano es 20 años."],
   textPopUp["2. Para elaborar un pastel se usan 3 libras de
   harina de trigo por 2 libras de mantequilla,
   si se quieren usar 8 libras de harina de
   trigo, ¿cuánta mantequilla se debe utilizar?
```

$$\frac{(\text{Libras de harina})}{(\text{Libras de mantequilla})} = \frac{3}{2} = \frac{8}{x},$$

Otra manera de encontrar la cantidad
   desconocida es utilizar la *regla de tres*, por lo tanto $x = \frac{(8\cdot 2)}{3} = \frac{16}{3}$,

entonces, se necesitan $\frac{16}{3}$ libras de mantequilla."]

```
   }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},
```

```
            Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],
          ImageSize → All], "LinkHand"]
      }], "Multimedia"]]
```

Números racionales como razón y proporción ⇒ enlace

» *Texto: razón y proporción*

Una ***razón*** es el cociente de dos cantidades, la razón entre la cantidad a y la cantidad b se expresa con la notación de fracción $\frac{a}{b}$ o con la notación $a:b$. La fracción $\frac{a}{b}$ como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores a y b, siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas.

Por ejemplo, en la clase de matemáticas hay 12 mujeres por cada 28 hombres, eso significa que la razón entre mujeres y hombres es de $\frac{12}{28}$ que al simplificarse, es lo mismo que $\frac{3}{7}$, lo que quiere decir que hay 3 mujeres por cada 7 hombres.

Cuando dos pares de números, como 5, 4 y 20, 16 tienen la misma razón, se dice que ellas son ***proporcionales***, La expresión

$$\frac{5}{4} = \frac{20}{16}$$

establece que las parejas 5, 4 y 20, 16 son proporcionales. *"5 es a 4 como 20 es a 16"*

En los problemas que involucran proporciones usualmente se desconoce algún término, para resolver expresiones como $\frac{x}{a} = \frac{c}{d}$, donde x se desconoce, se multiplica en cruz las cantidades y luego se divide a ambos lados para dejar x sola:

$$d\,x = a\,c$$
$$x = \frac{a\,c}{d}$$

de esta manera se puede encontrar el valor desconocido en la proporción.

Ejemplos:

1. Luis tiene 24 años y la razón entre la edad de él y la de su hermano es de 6 a 5, ¿cuál es la edad del hermano?

$\frac{\text{(Edad de Luis)}}{\text{(Edad del hermano)}} = \frac{6}{5} = \frac{24}{x}$,

para saber a cuánto equivale x, se multiplica en cruz

$$6\,x = 24 \times 5$$

luego se divide entre 6, por lo tanto $x = \frac{24 \times 5}{6} = 4 \times 5 = 20$, luego la edad del hermano es 20 años.

2. Para elaborar un pastel se usan 3 libras de harina de trigo por 2 libras de mantequilla, si se quieren usar 8 libras de harina de trigo, ¿cuánta mantequilla se debe utilizar?

$\frac{\text{(Libras de harina)}}{\text{(Libras de mantequilla)}} = \frac{3}{2} = \frac{8}{x}$,

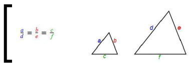
Otra manera de encontrar la cantidad desconocida es utilizar la *regla de tres*, por lo tanto $x = \frac{(8 \cdot 2)}{3} = \frac{16}{3}$, entonces, se necesitan $\frac{16}{3}$ libras de mantequilla.

Semejanza

```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
```

```
 style1, style2, style3,
 color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
 tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
 page1, page2, page3, page4, page5,
 titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 600},
(*Inicializar page´s*)
page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 1;
(*estilos de los textos/recuadros*)
framePane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "Cuadro/Titulo",
   LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
   LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
(*Estilos de las ventanas emergentes*)
titlePopUp[s_String] :=
 Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1, FontFamily → font1],
   "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
    {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
TextCell[
 Row[{"Proporción en la geometría: Triángulos semejantes ⇒", "   ",
   MouseAppearance[Button[TextCell["  enlace  ", "Text"],
     CreateDialog[{
       Pane[Column[{
          titlePopUp["Triángulos semejantes"],
          textPopUp[
           "Los triángulos de abajo parecen tener la misma forma, pero
             como uno es más grande que el otro, la medidas
             de sus lados es diferente. Estos son ejemplos
             de triángulos semejantes; si el triángulo
```

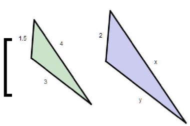
pequeño creciera (con la misma forma)
llegaría a ser igual al triángulo grande."],

Image[, ImageSize → 450],

textPopUp[
"Los *triángulos semejantes* tienen la *misma forma* y las medidas de los lados correspondientes tienen la *misma razón*, es decir, son *proporcionales*. La razón entre las medidas del lado a *a* al lado *d* es la misma que la razón entre las medidas del lado *b* al lado *e*, y también es la misma que la razón entre las medidas del lado *c* al lado *f*."],

textPopUp["*Ejemplo*:"],

textPopUp["Los siguientes triángulos son semejantes. Encuentre la medida de los lados *x* y *y*."],

Image[, ImageSize → 250] ×

textPopUp["Para encontrar la medida de *x*, se escoge una proporción que involucre la cantidad desconocida, por ejemplo

$$\frac{1.5}{2} = \frac{4}{x}$$

Ahora se puede despejar la cantidad desconocida:

$$\frac{1.5}{2} = \frac{4}{x}$$
$$1.5\,x = 4\;2$$
$$x = \frac{8}{1.5}$$
$$x = \frac{16}{3}$$

Por lo tanto la medida del lado *x* es $\frac{16}{3} \approx 5.33$.

De la misma manera, para encontrar la medida de *y*, se escoge una proporción que involucre la cantidad desconocida y se despeja:

$$\frac{1.5}{2} = \frac{3}{y}$$
$$1.5\,y = 3\;2$$
$$y = \frac{6}{1.5}$$
$$y = 4$$

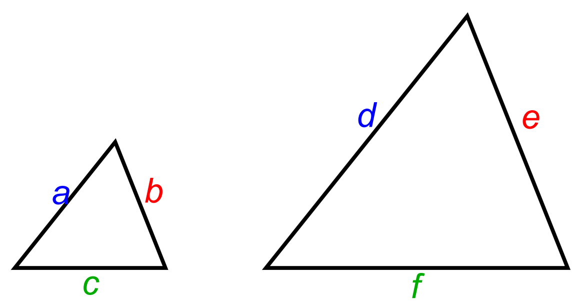
```
Por lo tanto la medida del lado y es 4."]
            }], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth}, Scrollbars → {False,
             True}], DefaultButton[]}, Background → White, Deployed → True],
         ImageSize → All], "LinkHand"]
     }], "Multimedia"]]
```

Proporción en la geometría: Triángulos semejantes ⇒ enlace

» Semejanza de triángulos

Los triángulos de abajo parecen tener la misma forma, pero como uno es más grande que el otro, la medidas de sus lados es diferente. Estos son ejemplos de ***triángulos semejantes***; si el triángulo pequeño creciera (con la misma forma) llegaría a ser igual al triángulo grande.

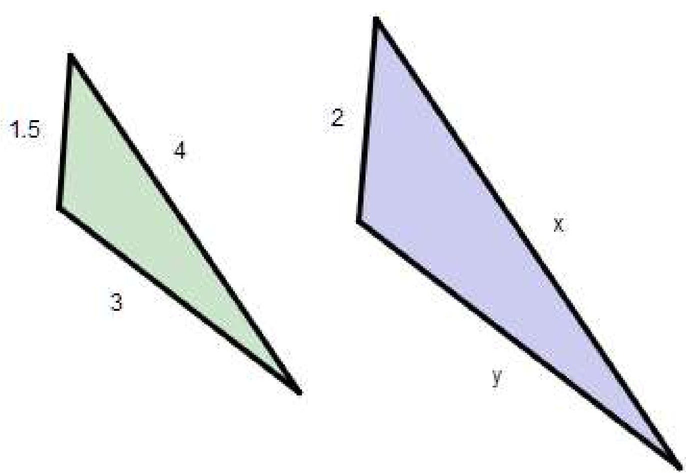
$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$$



Los ***triángulos semejantes*** tienen la *misma forma* y las medidas de los lados correspondientes tienen la *misma razón*, es decir, son ***proporcionales***. La razón entre las medidas del lado a a al lado d es la misma que la razón entre las medidas del lado b al lado e, y también es la misma que la razón entre las medidas del lado c al lado f.

Ejemplo

Los siguientes triángulos son semejantes. Encuentre la medida de los lados x y y.



Para encontrar la medida de x, se escoge una proporción que involucre la cantidad desconocida, por ejemplo

$$\frac{1.5}{2} = \frac{4}{x}$$

Ahora se puede despejar la cantidad desconocida:

$$\begin{aligned} \frac{1.5}{2} &= \frac{4}{x} \\ 1.5\,x &= 4 \times 2 \\ x &= \frac{8}{1.5} \\ x &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto la medida del lado x es $\frac{16}{3} \approx 5.33$.

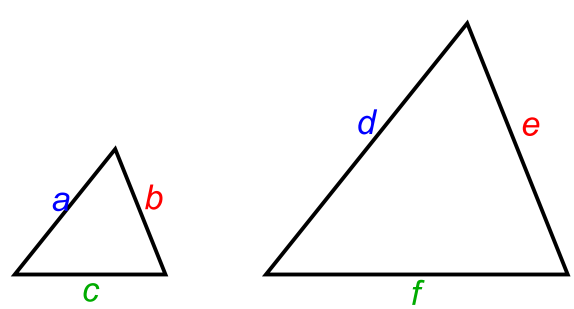
De la misma manera, para encontrar la medida de y, se escoge una proporción que involucre la cantidad desconocida y se despeja:

$$\begin{aligned} \frac{1.5}{2} &= \frac{3}{y} \\ 1.5\,y &= 3 \times 2 \\ y &= \frac{6}{1.5} \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto la medida del lado y es 4.

```
Deploy@Pane[Row[{
    Style[Text["a/d = b/e = c/f"], 25], "                    ",
    Show[Graphics[{FaceForm[None],
       EdgeForm[{Black, Thick}], Triangle[{{0, 0}, {6, 0}, {4, 5}}],
       Triangle[{{10, 0}, {22, 0}, {18, 10}}],
       Text[Style["a", 18], {1.8, 3}],
       Text[Style["b", 18], {5.5, 3}],
       Text[Style["c", 18], {3, -0.6}],
       Text[Style["d", 18], {14, 6}],
       Text[Style["e", 18], {20.5, 6}],
       Text[Style["f", 18], {16, -0.8}]
      }],
     ImageSize → {300, 200}]}, Alignment → Center]]
```

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Fórmulas de área y perímetro

» *Área*

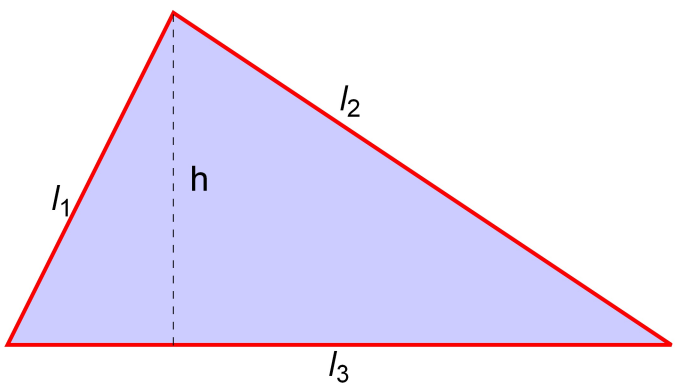
Nombre
Figura
Fórmula perímetro
Fórmula área

Triángulo

P : perímetro,
$P = l_1 + l_2 + l_3$

A : área,
h : altura,
$A = \frac{l_3 \times h}{2}$

```
Graphics[{Black, Opacity@0.2, Blue,
  EdgeForm@{Thick, Red}, Triangle@{{0, 0}, {4, 0}, {1, 2}},
  Opacity@1, Black, Dashed, Line@{{1, 0}, {1, 2}},
  Text[Style["h", 18], {1.1, 1}, {-1, 0}],
  Text[Style["l1", 18], {0.4, 1}, {1, 1}],
  Text[Style["l2", 18], {2, 1.6}, {-1, 1}],
  Text[Style["l3", 18], {2, 0}, {0, 1}]}]
```

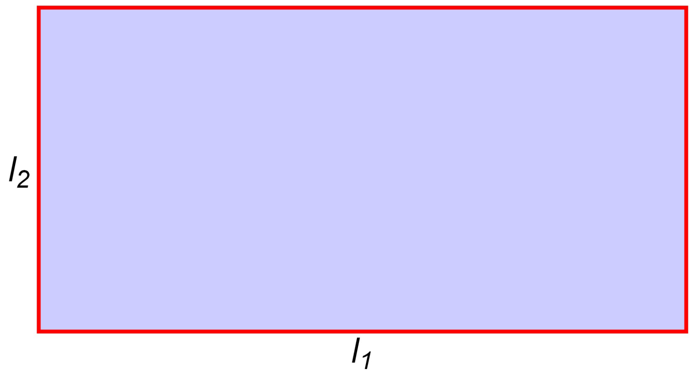


Cuadrado

P : perímetro,
$P = 2\, l_1 + 2\, l_2$

A : área,
$A = l_1 \times l_2$

```
Graphics[
 {Black, Opacity@0.2, Blue, EdgeForm@{Thick, Red}, Rectangle[{0, 0}, {4, 2}],
  Opacity@1, Black,
  Text[Style["l1", Italic, 18], {2, 0}, {0, 1}],
  Text[Style["l2", Italic, 18], {-0.05, 1}, {1, 0}]}]
```

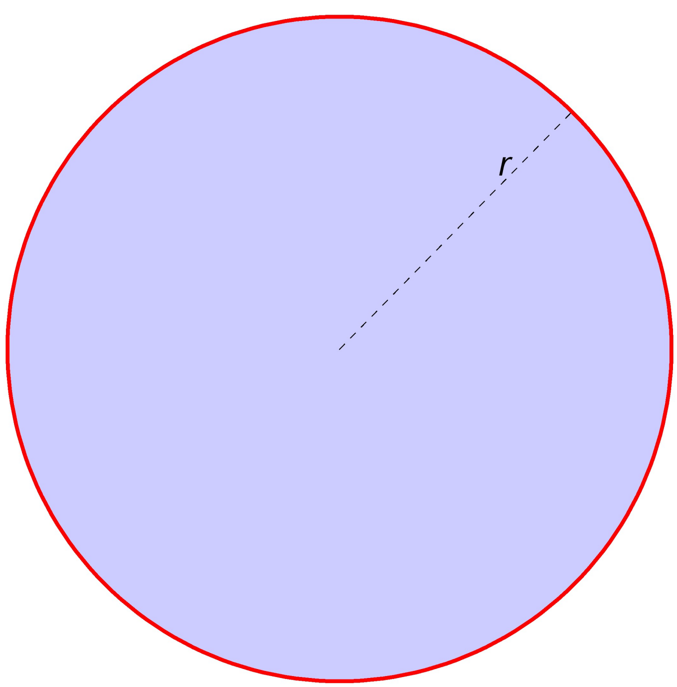


Círculo

P : perímetro,
$P = 2\pi r$

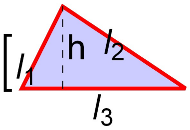
A: área
r: radio
$A = \pi r^2$

```
Graphics[{Black, Opacity@0.2, Blue, EdgeForm@{Thick, Red}, Disk[{0, 0}, 1],
  Opacity@1, Black, Dashed, Line[{{0, 0}, {0.7, Sqrt[1 - 0.7^2]}}],
  Text[Style["r", Italic, 18], {0.5, 0.5}, {0, -1}]}]
```



```
Deploy@DynamicModule[{framePane, textPane, tabImage, tabText,
   style1, style2, style3,
   color1 = ■, color2 = ■, color3 = ■,
   tama1 = 15, tama2 = 18, tama3 = 25, font1 = "Georgia",
   page1, page2, page3, page4, page5,
   titlePopUp, textPopUp, panelWidth = 750, bodyWidth = 610},
  (*Inicializar page´s*)
  page1 = page2 = page3 = page4 = page5 = 1;
  (*estilos de los textos/recuadros*)
  framePane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "Cuadro/Titulo",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  textPane[s_String] := Pane[TextCell[Style[s, tama1], "EmphasisText",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  style1[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style2[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  style3[txt_] := Style[txt, {FontFamily → font1, FontSize → 15}];
  (*Estilos de las ventanas emergentes*)
  titlePopUp[s_String] :=
   Pane[TextCell[Style[s, tama2, FontFamily → font1, color3, Italic],
     "Text", LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  textPopUp[s_String] := Pane[TextCell[style1[s], "Text",
     LineIndent → 0, TextJustification → 0, LinebreakAdjustments →
      {0.9, 100, 0, 0, 0}]];
  TextCell[
   Row[{"Fórmulas de área y perímetro de algunas figuras planas ⇒", "    ",
     MouseAppearance[Button[TextCell["Área y perímetro", "Text"],
       CreateDialog[{
         Pane[Column[{
             titlePopUp[
              "Fórmulas de área yu perímetro de algunas figuras plantas"],
             Style[Grid[{
                 {textPopUp@"Nombre", textPopUp@"Figura",
```

textPopUp["*Fórmula perímetro*"], textPopUp["*Fórmula área*"]},

{textPopUp@"*Triángulo*", Image[

,

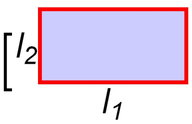
ImageSize → {220, 120}],

textPopUp[" P : perímetro,

$P = l_1 + l_2 + l_3$"], textPopUp[" A : área,

$A = l_1 \times l_2$"]},

{textPopUp@"*Cuadrado*",

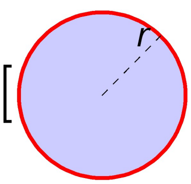
Image[

, ImageSize → {220, 120}],

textPopUp[" P : perímetro,

$P = 2\, l_1 + 2\, l_2$"], textPopUp[" A : área,

$A = l_1 \times l_2$"]},

{textPopUp@"*Círculo*", Image[

,

ImageSize → {220, 120}], textPopUp[" P : perímetro,

$P = 2\, \pi\, r$"], textPopUp[" A: área

r: radio

$A = \pi\, r^2$"]]}}, Alignment -> Left,

Frame → All]]}], ImageSize → {panelWidth, bodyWidth},

Scrollbars → {False, True}]}, Background → White, Deployed → True],

ImageSize → All], "LinkHand"]

}], "Multimedia"]]

Fórmulas de área y perímetro de algunas figuras planas ⇒	Área y perímetro

Inecuaciones

» Definición

» *Texto:*

Definición de inecuación:
Una inecuación es una **desigualdad** que tiene expresiones matemáticas con al menos una cantidad desconocida (*variable).*
Se ven muy semejante a una ecuación, excepto que en una inecuación en lugar del símbolo de *igualdad* (=), se tienen los símbolos de *desigualdad (* $<$, $>$, $\leq$, $\geq$), que se leen *menor que, mayor que, menor o igual que, mayor o igual que*.

¿Cómo resolver inecuaciones?
Dependiendo el tipo de inecuación y el número de variables la manera de resolverla puede variar; generalmente, resolver una inecuación significa encontrar todos los números reales que hacen de la inecuación verdadera, a diferencia de las ecuaciones, las inecuaciones tienen por lo general un conjunto infinitos de soluciones que forman el **intervalo solución**. La forma de resolver inecuaciones no siempre es única y con práctica se crean métodos propios cada vez más eficaces.

Para resolver inecuaciones es necesario comprender los conceptos de $\Rightarrow$

desigualdades

Expresiones como $a < b$, $a > b$, $a \leqslant b$, $a \geqslant b$ se denominan *desigualdades*, en particular, $a < b$ y $a > b$, son *desigualdades estrictas*. Al escribir $a \leqslant b$, se quiere expresar que $a < b$ o bien $a = b$, es decir, que a *es menor o igual que* b.
Las desigualdades cumplen con ciertas propiedades que permiten reducirlas y simplificarlas.

Propiedades:

1. Para a, b números reales, se tiene una y solo una de las tres relaciones:

$$a < b, \qquad a > b, \quad \text{o}, \quad a = b$$

2. Si $a < b$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $a + c < b + c$. (*esta permitido sumar a ambos lados de la desigualdad*).

3. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a\,c < b\,c$. (*se puede multiplicar una cantidad positiva a ambos lados de la desigualdad*).

4. Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

5. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a\,c > b\,c$. (*si se multiplica por una cantidad negatica el símbolo de la desigualdad cambia,* aquí se requiere especial atención!).

intervalos

Un intervalo es una de las maneras de escribir la solución de una inecuación pues estas son, generalmente, un conjunto infinito de valores. En la siguiente tabla se muestran los tipos de intervalos y las diferentes soluciones que representan:

Notación de intervalo	Tipo de intervalo	Notación de la inecuación	Representación gráfica
$[a,\ \infty)$	Cerrado	$x \geq a$	
$(a,\ \infty)$	Abierto	$x > a$	
$(-\infty,\ b]$	Cerrado	$x \leq b$	
$(-\infty,\ b)$	Abierto	$x < b$	
$[a,\ b]$	Cerrado	$a \leq x \leq b$	
$(a,\ b)$	Abierto	$a < x < b$	
$[a,\ b)$	Mixto	$a \leq x < b$	
$(a,\ b]$	Mixto	$a < x \leq b$	

» Lineal

Definición de una inecuación lineal:

Las inecuaciones lineales son desigualdades donde cada término es constante, o múltiplo de una variable, por ejemplo $15 \leq \frac{5}{2}x$ o $-10 < 3t - 8 \leq 15$.

Ejemplos

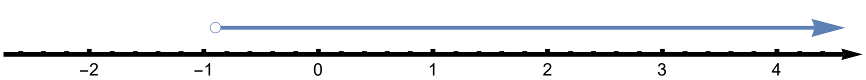
Ejemplo 1

Resolver la inecuación $-6 - 2(5 - 2x) < 7(2x - 1)$.

$$-6 - 2(5 - 2x) < 7(2x - 1)$$
$$-6 - 10 + 4x < 14x - 7$$
$$4x - 14x < -7 + 16$$
$$-10x < 9^{**}$$
$$x > -\frac{9}{10}$$

** *multiplicando por -1, cambia el símbolo de la desigualdad*.

El intervalo solución de es $\left(-\frac{9}{10},\ \infty\right)$ y su representación gráfica es:

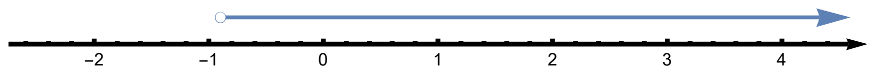


Ejemplo 2

El mismo ejemplo anterior, esta vez sin emplear la propiedad de cambio de símbolo, resolver la inecuación $-6 - 2(5 - 2x) < 7(2x - 1)$.

$$-6-2(5-2x)<7(2x-1)$$
$$-6-10+4x<14x-7$$
$$4x-14x<-7+16$$
$$-10x<9^{**}$$
$$-9<10x$$
$$-\frac{9}{10}<x$$

El intervalo solución de es $\left(-\frac{9}{10},\ \infty\right)$ y su representación gráfica es:

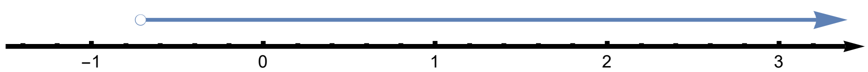


Ejemplo 3

La solución de la inecuación $4x+4>\frac{x+3}{2}$ es:

$$8x+8>x+3$$
$$8x-x>3-8$$
$$7x>-5$$
$$x>-\frac{5}{7}$$

El intervalo solución es $\left(-\frac{5}{7},\ \infty\right)$.



Ejemplo 4

La solución de la inecuación $-\frac{9}{2}t-\frac{19}{5}\leq -4$ es:

$$-\frac{9}{2}t\leq -4+\frac{19}{5}$$
$$-\frac{9}{2}t\leq -\frac{1}{5}$$
$$t\geq\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)$$
$$t\geq\frac{2}{45}$$

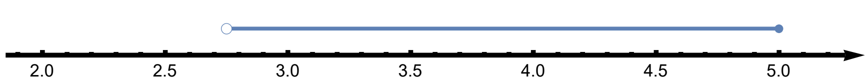
El intervalo solución es $\left[\frac{2}{45},\ \infty\right)$.

Ejemplo 5

La solución de la inecuación $3<\frac{4m-2}{3}\leq 6$ es:

$$9<4m-2\leq 18$$
$$9+2<4m\leq 18+2$$
$$11<4m\leq 20$$
$$11\left(\frac{1}{4}\right)<m\leq 20\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\frac{11}{4}<m\leq 5$$

El intervalo solución es $\left(\frac{11}{4},\ 5\right]$.



Ejemplo 6

La solución de la inecuación $-\frac{7}{3}\,x+2>\frac{2\,x+2}{2}$ es:

$$-\frac{7}{3}\,x+2>\frac{2\,x+2}{2}$$
$$-\frac{14}{3}\,x+4>2\,x+2$$
$$-\frac{20}{3}\,x>-2$$
$$x<(-2)\left(-\frac{3}{20}\right)$$
$$x<\frac{3}{10}$$

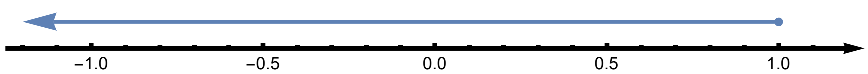
El intervalo solución es $\left(-\infty,\ \frac{3}{10}\right)$.

Ejemplo 7

La solución de la inecuación $3\,w+4\leq 1$ es:

$$3\,w\leq 1-4$$
$$3\,w\leq -3$$
$$w\leq -3\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$w\leq -1$$

El intervalo solución es $(-\infty,\ 1]$.

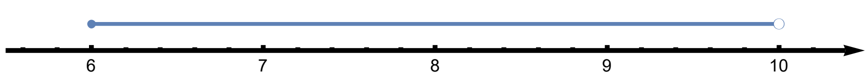


Ejemplo 8

La solución de la inecuación $\frac{7}{2}\leq\frac{3\,t-4}{4}<\frac{13}{2}$ es:

$$\frac{7}{2}(4)\leq 3\,t-4<\frac{13}{2}(4)$$
$$14\leq 3\,t-4<26$$
$$14+4\leq 3\,t<26+4$$
$$18<3\,t\leq 30$$
$$18\left(\frac{1}{3}\right)<t\leq 30\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$6<m\leq 10$$

El intervalo solución es $[6,\ 10)$.



» No lineal No cuadrática

» *Definición:*

Definición de una inecuación no lineal:
Como su nombre lo indica, este tipo de inecuaciones no están escrita de forma lineal y esto influye en los procedimientos de solución. Algunos ejemplos de inecuaciones no lineales son:

Inecuación lineal	Inecuación no lineal
$x - \frac{2-x}{3} \leq -5\,x + 6$	$x - \frac{2-x}{3} \leq 5\,x^2 + 6$
$\frac{-9+4\,x-2\,(x-1)}{6} > -1$	$\frac{-9+4\,x-2\,(x-1)}{6\,x} > -1$
$-3 \leq x - \frac{2+x}{5} < 5$	$-3 \leq x \cdot \left(\frac{2+x}{5}\right) < 5$

» *Texto: Método*

Para resolver inecuaciones no lineales se puede seguir una serie de pasos que garantizan encontrar el conjunto solución de la inecuación, tenga en cuenta que este no es el único método y quizá no sea siempre el más efectivo, con práctica se podrán identificar atajos o alternativas que faciliten el desarrollo de la solución.

La inecuación $30 \geq 10\,x^2 - 5\,x$ es no lineal porque la variable x está elevada al cuadrado en en uno de los términos, para encontrar el conjunto solución se proponen los siguientes pasos:

1. Organizar y comparar la inecuación con cero, es decir, $-10\,x^2 + 5\,x + 30 \geq 0$.

2. Efectuar operaciones y simplificar: $2\,x^2 - x - 6 \leqslant 0$.

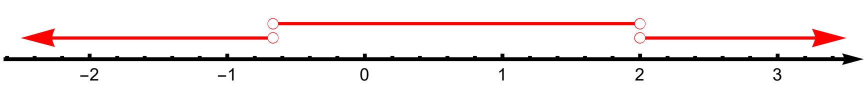
Para obtener el resultado anterior se multiplicó a ambos lados de la inecuación por $-\frac{1}{5}$, lo que permite hacer cálculos con cifras más pequeñas, además de *ajustar* el signo de término cuadrático.

*De ser factorizable, como en este caso, se puede considerar el resultado equivalente:
$(x-2)\,(2\,x+3) \leqslant 0$.

3. Asociar y resolver ecuación, es decir, resolver $2\,x^2 - x - 6 = 0$, las soluciones son $x = 2$, $x = -\frac{2}{3}$.

4. Considerar las restricciones sobre la variable, de existir. En este caso no hay pero en otros caso se debe tener cuidado con las restricciones en los denominadores.

5. Representar los números encontrados en los numerales **3.** y **4.** sobre una recta real e identificar los intervalos *generados* por estos: $\left\{-\frac{2}{3},\ 2\right\}$ dividen la recta en tres intervalos, estos son: $\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3},\ 2\right)$ y $(2,\ \infty)$.

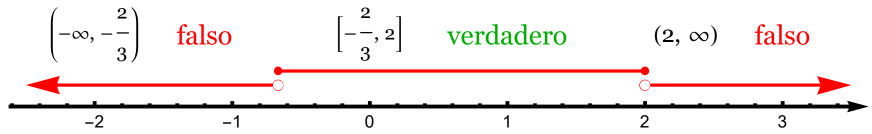


6. Escoger un valor en cada intervalo (valor de prueba) y sustituirlo en alguna de las inecuaciones anteriores al punto **3.**

- Del intervalo $\left(-\infty,\ -\frac{2}{3}\right)$ se toma, por ejemplo, $x = -2$ y se sustituye en la inecuación $2\,x^2 - x - 6 \leqslant 0$. Esto deja como resultado $2\,(-2)^2 - (-2) - 6 \leqslant 0$, es decir, $4 \leqslant 0$.
  Lo anterior es falso, lo que implica que el intervalo al que pertenece $x = -2$ no hace parte del conjunto solución de la inecuación.
- Del intervalo $\left(-\frac{2}{3},\ 2\right)$ se toma, por ejemplo, $x = 0$ y se sustituye en la inecuación $2\,x^2 - x - 6 \leqslant 0$. Esto deja como resultado $2\,(0)^2 - (0) - 6 \leqslant 0$, es decir, $-6 \leqslant 0$.
  Lo anterior es verdadero, lo que implica que el intervalo al que pertenece $x = 0$ ***hace parte del conjunto solución de la inecuación***.
- Del intervalo $(2,\ \infty)$ se toma, por ejemplo, $x = 3$ y se sustituye en la inecuación $2\,x^2 - x - 6 \leqslant 0$. Esto deja como resultado $2\,(3)^2 - (3) - 6 \leqslant 0$, es decir, $9 \leqslant 0$.
  Lo anterior es falso, lo que implica que el intervalo al que pertenece $x = 3$ no hace parte del conjunto solución de la inecuación.

7. **El intervalo solución consiste en los intervalos en los que se llegó a una afirmación verdadera.** El simbolo de la desigualdad “≤” indica que los extremos del intervalo son cerrados.

Por tanto, el conjunto solución de la inecuación $30 \geq 10\,x^2 - 5\,x$, o equivalentemente de la inecuación $2\,x^2 - x\, - 6 \leqslant\, 0$ es el intervalo $\left[-\frac{2}{3},\ 2\right]$.



» *Ejemplos*

Ejemplo 1

Resolver la inecuación $\frac{-2\,x^2 - 9\,x - 4}{1 - x} > -4$

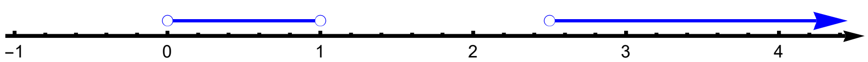
$$\frac{-2\,x^2 - 9\,x - 4}{1 - x} + 4 > 0$$

$$\frac{-x(2\,x - 5)}{1 - x} > 0$$

La solución de la ecuación $-x(2\,x - 5) = 0$ es: $\left\{0,\ \frac{5}{2}\right\}$, y la restricción en la variable es: $\{1\}$.

Ahora se escoge un valor de prueba en cada los intervalos generados por los números $\left\{0,\ 1,\ \frac{5}{2}\right\}$ y se sustituye en $\frac{-x(2\,x-5)}{1-x} > 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Los intervalos solución son: $(0,\ 1)$ y $\left(\frac{5}{2},\ \infty\right)$.



Ejemplo 2

Resolver la inecuación $16\,m - 16\,m^2 \geq 4$

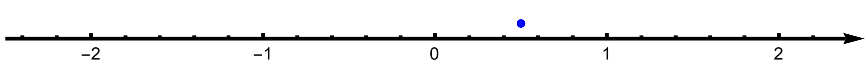
$$-16\,m^2 + 16\,m - 4 \geq 0$$

$$-4\,(2\,m - 1)^2 \geq 0$$

La solución de la ecuación $-4\,(2\,m - 1)^2 = 0$ es: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, y no hay restricción en la variable.

Ahora se escoge un valor de prueba en cada los intervalos generados por $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ y se sustituye en $-4\,(2\,m - 1)^2 \geq 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

En ambos intervalos la desigualdad no se cumple, por lo tanto el único valor en donde la desigualdad es verdaddera es $m = \frac{1}{2}$.



Ejemplo 3

Resolver la inecuación $\frac{-3\,y^2 + 16\,y - 16}{-y - 1} \leq 0$

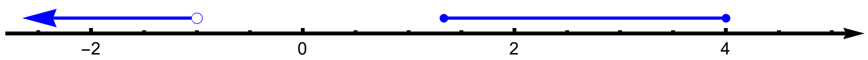
$$\frac{-(y-4)\,(3\,y-4)}{-(y+1)} \leq\ 0$$

$$\frac{(y-4)\,(3\,y-4)}{(y+1)} \leq\ 0$$

La solución de la ecuación $(y - 4)\,(3\,y - 4) = 0$ es: $\left\{\frac{4}{3},\ 4\right\}$, y la restricción en la variable es: $\{-1\}$.

Ahora se escoge un valor de prueba en cada los intervalos generados por los números $\left\{-1,\ \frac{4}{3},\ 4\right\}$ y se sustituye en $\frac{(y-4)\,(3\,y-4)}{(y+1)} \leq\ 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.

Los intervalos solución son: $(-\infty,\ -1)$ y $\left[\frac{4}{3},\ 4\right]$.



Ejemplo 4

Resolver la inecuación $m^2 - 2\,m \le 8$

$$m^2 - 2\,m - 8 \le 0$$

$$(m-4)\,(m+2) \le 0$$

La solución de la ecuación $(m-4)\,(m+2) = 0$ es: $\{-2,\ 4\}$, y no hay restricción en la variable.
Ahora se escoge un valor de prueba en cada los intervalos generados por $\{-2,\ 4\}$ y se sustituye en $(m-4)\,(m+2) \le 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.
El intervalo solución es: $[-2,\ 4]$.

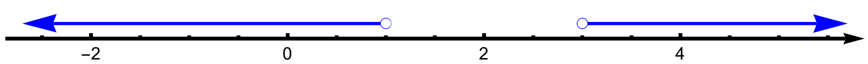
Ejemplo 5

Resolver la inecuación $3\,y^2 - 6\,y > 9$

$$3\,y^2 - 6\,y - 9 > 0$$

$$3\,(y-3)\,(y+1) > 0$$

La solución de la ecuación $3\,(y-3)\,(y+1) = 0$ es: $\{-1,\ 3\}$, y no hay restricción en la variable.
Ahora se escoge un valor de prueba en cada los intervalos generados por $\{-1,\ 3\}$ y se sustituye en $3\,(y-3)\,(y+1) > 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.
Los intervalos solución son: $(-\infty,\ -1)$ y $(3,\ \infty)$.



Ejemplo 6

Resolver la inecuación $\frac{2\,u^2-8}{4-u} \le -2$

$$\frac{2\,u^2-8}{4-u} + 2 \le 0$$

$$\frac{2\,u(u-1)}{4-u} \le 0$$

La solución de la ecuación $2\,u(u-1) = 0$ es: $\{0,\ 1\}$, y la restricción en la variable es: $\{4\}$.
Ahora se escoge un valor de prueba en cada los intervalos generados por los números $\{0,\ 1,\ 4\}$ y se sustituye en $\frac{2\,u(u-1)}{4-u} \le 0$ para identificar si se cumple o no la desigualdad.
Los intervalos solución son: $[0,\ 1]$ y $(4,\ \infty)$.