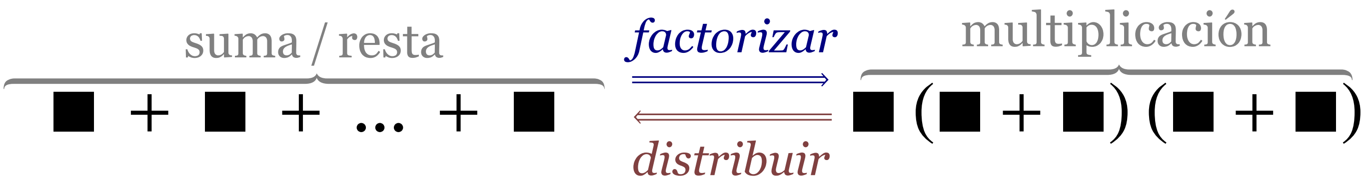
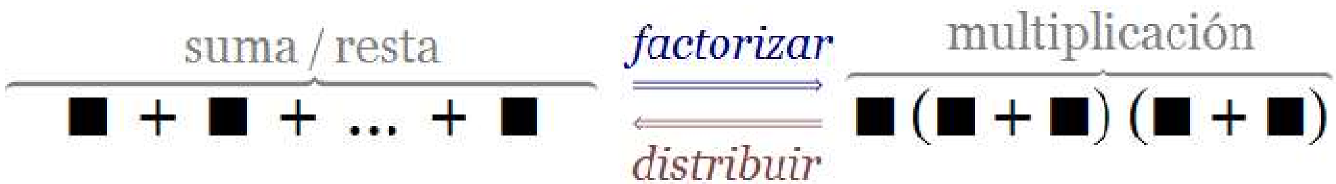
Factorización

» Definición

Factorizar es el proceso de **reescribir una adición o sustracción** de dos o más términos **a través de multiplicaciónes** lo mas reducidas posibles, es el **proceso inverso** de la distribución en expresiones algebraicas.

» *Imagen*





» Ejemplos

Ejemplo 1

La expresión $5+5+5+5+5+5+5+5$ se puede escribir de forma reducida como 5×8

Ejemplo 2

La expresión $2+3+2+3+2+3+2+3$ se puede escribir de forma reducida como $2\times 4+3\times 4$ o como $4\,(2+3)=4\times 5$

Ejemplo 3

La expresión $\overbrace{\bullet+\bullet+\bullet+\ldots+\bullet}^{\text{7 veces}}$ se puede escribir como $\bullet\times 7=7\,\bullet$

Factor común

» Definición

Las estructuras $a\,b+a\,c=a(b+c)$ y $a\,b-a\,c=a(b-c)$ se les conoce con el nombre de **factor común** y se factoriza como se muestra a continuación:

» Imagen

Deploy@

```
Deploy@
 Mouseover[Pane[Image[ ], ImageSize → 550], ImageSize → {Automatic, 70}],
  Pane[Style["a b + a c  =  a (b + c)", 60], ImageSize → {Automatic, 70}]]
```

» ¿Cómo aplicar el factor común?

¿Cómo aplicar el factor común?

El proceso de factor común establece una estructura para reducir expresiones compuestas por adiciones y/o sustracciones, y para aplicarlo se sugieren estos pasos:

1. Reconozca el factor común; para ello, observe cada uno de los términos de la expesión dada y en ellos identifique los factores y busque el mayor común posible.

2. Extraiga el factor común. Puede encerrarlo en un paréntesis o en un corchete según la complejidad del mismo, si es un solo término no lo encierre en paréntesis, pero si son dos o más emplee estos elementos para encerrarlos. Como es un factor, después de él no debe haber signo alguno diferente al de una multiplicación, que usualmente se representa abriendo un segundo paréntesis o un corchete.

3. Ubique, en el segundo paréntesis o corchete, según corresponda, la misma cantidad de términos que había en la expresión original o inicial, con la diferencia que cada término estará conformado por los factores que no son comunes. En caso que el término extraido no tenga otro factor se debe ubicar el número 1.

4. Verifique que la expresión resultante sea una multiplicación y simplifique las expresiones extensas, en caso de haberlas. En este punto habrá finalizado el proceso de factorización.

5. Para constatar que el proceso quedó bien, puede multiplicar y debe obtener la misma expresión que daba el ejercicio. Este paso es opcional y no hace parte de la factorización, es solo para verificar que se haya factorizado adecuadamente.

Ejemplo: Factorizar la expresión $x - 2x$:

1. *Reconozca el factor común*. Como los términos en la expresión son x^2 y $2x$. El mayor factor común es x, pues en el primer término está dos veces la x y en el segundo solo una, lo máximo que se puede extraer es una x en cada término.
Factores que quedan al extraer el factor común: de x^2, como se extrae una x queda otra x y de $2x$, al extraer la x queda el factor 2. Así los factores no comunes son x y 2.

2. *Extraiga el factor común*. No se necesario encerrarlo entre paréntesis por ser un solo término. Ubique un paréntesis después del factor para comenzar a escribir el siguiente factor: $x^2 - 2x = x(\quad)$.

3. *Complete* el segundo factor con la misma cantidad de términos que la expresión original pero con los factores que no son comunes: $x^2 - 2x = x(\_\_\_ - \_\_\_)$; $x^2 - 2x = x(x - 2)$.

4. *Verifique* que la expresión obtenida sea una multiplicación y que cada factor esté lo más reducido posible. La expresión es la multiplicación x por x-2 y está lo más reducida posible. Aquí termina el proceso de factorización.

5. *Pruebe*, si desea, el resultado obtenido, para ello multiplique la expresión de la factorización:

$x\,(x-2) = x^2 - 2\,x$.

Ejemplo: Factorizar la expresión $3\,a\,b\,x^2 - 2\,y^2 - 2\,x^2 + 3\,a\,b\,y^2$:

1. *Reconozca el factor común*. Los términos en la expresión son: $3\,a\,b\,x^2$, $2\,y^2$, $2\,x^2$ y $3\,a\,b\,y^2$.
Al observar cada término *no hay un factor que se encuentre en todos a la vez;* sin embargo, si se agrupan convenientemente los términos, de a dos, es posible usar la estructura e incluso se requerirá más de una vez. Observe:
$3\,a\,b\,x^2 - 2\,y^2 - 2\,x^2 + 3\,a\,b\,y^2 = 3\,a\,b\,x^2 - 2\,x^2 + 3\,a\,b\,y^2 - 2\,y^2 = (3\,a\,b\,x^2 - 2\,x^2) + (3\,a\,b\,y^2 - 2\,y^2)$.
En esta última expresión, los términos $3\,a\,b\,x^2$ y $2\,x^2$ tienen como factor común a x^2 mientras los términos $2\,y^2$ y $3\,a\,b\,y^2$ tienen a y^2.

2. *Extraiga el factor común*. Para cada agrupación no se necesario encerrar el factor común entre paréntesis porque es un solo término. Ubique un paréntesis después del factor para comenzar a escribir el siguiente factor: $x^2(\_\_\_\_ - \_\_\_\_) + y^2(\_\_\_\_ - \_\_\_\_)$.

3. *Complete* el segundo factor, en cada término, con la misma cantidad de términos que había en la agrupación pero con los factores que no son comunes: $x^2(3\,a\,b - 2) + y^2(3\,a\,b - 2)$.

4. Como la expresión resultante aún no es una multiplicación, hay que revisar si hay otro factor común que se pueda establecer para reducir más la expresión. Debido a que los términos $x^2(3\,a\,b - 2)$ y $y^2(3\,a\,b - 2)$ tienen como factor común a $(3\,a\,b - 2)$, se puede volver a aplicar la técnica:
$(3\,a\,b - 2)\,(\_\_\_\_ + \_\_\_\_) = (3\,a\,b - 2)\,(x^2 + y^2)$.

5. *Verifique* que la expresión obtenida sea una multiplicación y que cada factor esté lo más reducido posible. La expresión es la multiplicación $(3\,a\,b - 2)$ por $(x^2 + y^2)$ y está lo más reducida posible. Aquí termina el proceso de factorización.

6. *Pruebe*, si desea, el resultado obtenido. Para ello multiplique la expresión de la factorización:
$(3\,a\,b - 2)\,(x^2 + y^2) = 3\,a\,b\,x^2 - 2\,x^2 + 3\,a\,b\,y^2 - 2\,y^2$.

» Ejemplos

Ejemplo 1

De ser posible, factorizar la expresión: $8\,t^2 + 4\,t$

$$8\,t^2 + 4\,t = 4\,t(2\,t + 1)$$

Ejemplo 2

De ser posible, factorizar la expresión: $x^2\,y + x\,y^2$

$$x^2\,y + x\,y^2 = x\,y(x + y)$$

Ejemplo 3

De ser posible, factorizar la expresión: $3\,x^3 + 6\,x^2 - 12\,x$

$$3\,x^3 + 6\,x^2 - x = 3\,x(x^2 + 2\,x - 4)$$

Ejemplo 4

De ser posible, factorizar la expresión: $6\,t\,w^2 - 12\,t^3\,w^4 + 8\,t^2\,w^3$

$$6\,t\,w^2 - 12\,t^3\,w^4 + 8\,t^2\,w^3 = 2\,t\,w^2(3\,w - 6\,t^2\,w^2 + 4\,t)$$

Ejemplo 5

De ser posible, factorizar la expresión: $9\,x^3\,y - 27\,x^2$

$$9\,x^3\,y - 27\,x^2 = 9\,x^2(x\,y - 3)$$

Ejemplo 6

De ser posible, factorizar la expresión: $\frac{x^2}{3} + \frac{x}{6}$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Ejemplo 7

De ser posible, factorizar la expresión: $a^2\,b^3 - n^4 + a^2\,b^3\,x^2 - n^4\,x^2 - 3\,a^2\,b^3\,x + 3\,n^4\,x$

$$a^2\,b^3 - n^4 + a^2\,b^3\,x^2 - n^4\,x^2 - 3\,a^2\,b^3\,x + 3\,n^4\,x =$$

$$a^2\,b^3 + a^2\,b^3\,x^2 - 3\,a^2\,b^3\,x - n^4 - n^4\,x^2 + 3\,n^4\,x =$$

$$(a^2\,b^3 + a^2\,b^3\,x^2 - 3\,a^2\,b^3\,x) - (n^4 + n^4\,x^2 - 3\,n^4\,x) =$$

$$a^2\,b^3\,(1 + x^2 - 3\,x) - n^4\,(1 + x^2 - 3\,x) =$$

$$= (1 + x^2 - 3\,x)\,(a^2\,b^3 - n^4)$$

note que en el paso 3 se agruparon las expresines anteponiendo un signo negativo, lo cual hace que cambien de signos en el interior de la factorización.

Ejemplo 8

De ser posible, factorizar la expresión: $b(x - 3) + c(x - 3)^2 - 2\,(x - 3)$

$$b\,(x - 3) + c\,(x - 3)^2 - 2\,(x - 3) = (x - 3)\,(b + c - 2)$$

Diferencia de cuadrados

» Definición

A la estructura $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$ se le conoce con el nombre de **diferencia de cuadrados.**

» Imagen

$$\overbrace{\blacksquare^2 - \bullet^2}^{\text{resta}} \xrightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{(\blacksquare - \bullet)\,(\blacksquare + \bullet)}^{\text{multiplicación}}$$

```
Deploy@
 Mouseover[Pane[Image[ resta ■² - ●² factorizar⟹ multiplicación (■ - ●)(■ + ●) , ImageSize → 450], ImageSize → {Automatic, 70}],
  Pane[Style[" a² - b² = (a + b) (a - b)", 60], ImageSize → {Automatic, 70}]]
```

» ¿Cómo aplicar la diferencia de cuadrados?

¿Cómo aplicar la diferencia de cuadrados?

El proceso de diferencia de cuadrados establece una estructura para reducir expresiones compuestas por una diferencia de dos términos a los cuales se les puede sacar raíz cuadrada (que puede ser exacta o no) y para aplicarlo se sugieren estos pasos:

1. Identifique si la expresión dada es una diferencia de dos términos.

2. Saque la raíz cuadrada de cada término. Recuerde que pueden ser o no exactas.

3. Escriba un producto de dos factores tal que uno de ellos sea la adición de las raíces de los términos y el otro sea la sustracción de las mismas.

4. Verifique que la expresión resultante sea una multiplicación y simplifique los factores que sean extensos, en caso de haberlos. En este punto habrá terminado la factorización.

5. Puede constatar si el proceso quedó bien. Para ello, multiplique y revise que al reducir las expresiones se obtenga la expresión original.

Ejemplo: Factorizar la expresión $x^2 - y^2$:

1. Identifique si la expresión dada es una diferencia de dos términos: Los términos de la expresión son: x^2 y y^2. Entre los términos está el signo menos que representa la sustracción. Por ende la expresión si es una diferencia de dos términos.

2. Saque la raíz cuadrada de cada término. Recuerde que pueden no ser exactas.
$\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{y^2} = y$ (en este caso fueron exactas).

3. Escriba un producto de dos factores tal que uno de ellos sea la adición de las raíces de los términos y el otro la sustracción de las mismas.
⟩⟩ Primer factor: $(x + y)$.
⟩⟩ Segundo factor: $(x - y)$.
⟩⟩ Producto de los factores: $(x + y)\,(x - y)$.

4. Verifique que la expresión resultande sea una multiplicación y simplifique los factores extensos, en caso de haberlos. En este punto habrá terminado la factorización.
Para esto se leerá la expresión obtenida: la suma de x mas y por la resta de x menos y; con esto se identifica que quedó una multiplicación y cómo cada factor está lo más reducido posible.

5. *Pruebe*, si desea, el resultado obtenido, para ello multiplique la expresión de la factorización:
$(x + y)\,(x - y) = x^2 - y^2$.

Ejemplo: Factorizar la expresión $\frac{1}{4} - 6\,z^2$:

1. Identifique si la expresión dada es una diferencia de dos términos: Los términos de la expresión son: $\frac{1}{4}$ y $6\,z^2$. Entre los términos está el signo menos que representa la sustracción. Por ende la expresión si es una diferencia de dos términos.

2. Saque la raíz cuadrada de cada término. Recuerde que pueden no ser exactas.
$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{6\,z^2} = \sqrt{6}\,z$. En este caso la raíz del segundo término no resultó exacta porque $\sqrt{6}$ es un número decimal infinito sin periodo, por ello se deja indicada y no se calcula.

3. Escriba un producto de dos factores tal que uno de ellos sea la adición de las raíces de los términos y el otro la sustracción de las mismas.
⟩⟩ Primer factor: $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{6}\,z\right)$.

⟩⟩ Segundo factor: $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{6}\ z\right)$.

⟩⟩ Producto de los factores: $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{6}\ z\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{6}\ z\right)$.

4. Verifique que la expresión resultande sea una multiplicación y simplifique los factores extensos, en caso de haberlos. En este punto habrá terminado la factorización.

Para esto se leerá la expresión obtenida: la suma de $\frac{1}{2}$ mas $\sqrt{6}\ z$ por la resta de $\frac{1}{2}$ menos $\sqrt{6}\ z$; con esto se identifica que quedó una multiplicación y cómo cada factor está lo más reducido posible.

5. *Pruebe*, si desea, el resultado obtenido, para ello multiplique la expresión de la factorización:
$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{6}\ z\right)\left(\frac{1}{2}-\sqrt{6}\ z\right)=\frac{1}{4}-6\,z^2$.

» Ejemplos

Ejemplo 1

De ser posible, factorizar la expresión $8\,t^2+4\,t$:

$$\begin{aligned} 8\,t^2+4\,t &= 4\,t(2\,t+1) && \text{Factor común}\\ &= 4\,t\left(\sqrt{2}\ t+1\right)\left(\sqrt{2}\ t-1\right) && \text{Diferencia de cuadrados}\end{aligned}$$

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"8 t^3 - 4 t =", "4 t (2 t^2 - 1)", "Factor común"},
    {"=", "4 t (√2 t + 1) (√2 t - 1) ", "Diferencia de cuadrados"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$$\begin{aligned} 8\,t^3-4\,t &= 4\,t(2\,t^2-1) && \text{Factor común}\\ &= 4\,t\left(\sqrt{2}\ t+1\right)\left(\sqrt{2}\ t-1\right) && \text{Diferencia de cuadrados}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

De ser posible, factorizar la expresión $4\,x^4-\frac{n^2}{100}$:

$$4\,x^4-\frac{n^2}{100}=\left(2\,x^2+\frac{n}{\sqrt{100}}\right)\left(2\,x^2-\frac{n}{\sqrt{100}}\right)\ \text{Diferencia de cuadrados}$$

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"4 x^4 - n^2/100 =", "(2 x^2 + n/√100) (2 x^2 - n/√100)", "Diferencia de cuadrados"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$$4\,x^4-\frac{n^2}{100}=\left(2\,x^2+\frac{n}{\sqrt{100}}\right)\left(2\,x^2-\frac{n}{\sqrt{100}}\right)\ \text{Diferencia de cuadrados}$$

Ejemplo 3

De ser posible, factorizar la expresión $m^6 - (m^2-1)^2$:

$$\begin{aligned} m^6 - (m^2-1)^2 &= (m^3 + (m^2-1))\,(m^3 - (m^2-1)) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (m^3 + m^2 - 1)\,(m^3 - m^2 - 1) && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"m^6 - (m^2 - 1)^2 =", "(m^3 + (m^2 - 1)) (m^3 - (m^2 - 1))", "Diferencia de cuadrados"},
    {"=", "(m^3 + m^2 - 1) (m^3 - m^2 - 1)", "Simplificación"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$$\begin{aligned} m^6 - (m^2-1)^2 &= (m^3 + (m^2-1))\,(m^3 - (m^2-1)) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (m^3 + m^2 - 1)\,(m^3 - m^2 - 1) && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

De ser posible, factorizar la expresión $25\,(x-y)^2 - 4\,(x+y)^2$:

$$\begin{aligned} &25\,(x-y)^2 - 4\,(x+y)^2 \\ &= (5\,(x-y) - 2\,(x+y))\,(5\,(x-y) + 2\,(x+y)) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (3\,x - 7\,y)\,(7\,x - 3\,y) && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

```
Deploy@Style[Grid[{
    {Item["25 (x - y)^2 - 4 (x + y)^2", Alignment → Left],},
    {" = (5 (x - y) - 2 (x + y)) (5 (x - y) + 2 (x + y))",
     "Diferencia de cuadrados"},
    {" = (3 x - 7 y) (7 x - 3 y)", "Simplificación"}},
  Alignment → {{Right, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$$\begin{aligned} &25\,(x-y)^2 - 4\,(x+y)^2 \\ &= (5\,(x-y) - 2\,(x+y))\,(5\,(x-y) + 2\,(x+y)) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (3\,x - 7\,y)\,(7\,x - 3\,y) && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

De ser posible, factorizar la expresión $4\,x^4 - \frac{n^2}{100}$:

$$4\,x^4 - \frac{n^2}{100} = \left(2\,x^2 + \frac{n}{\sqrt{100}}\right)\left(2\,x^2 - \frac{n}{\sqrt{100}}\right) \quad \text{Diferencia de cuadrados}$$

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"4 x^4 - n^2/100 =", "(2 x^2 + n/√100) (2 x^2 - n/√100)", "Diferencia de cuadrados"}},
   Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$$4\,x^4 - \frac{n^2}{100} = \left(2\,x^2 + \frac{n}{\sqrt{100}}\right)\left(2\,x^2 - \frac{n}{\sqrt{100}}\right) \quad \text{Diferencia de cuadrados}$$

Ejemplo 6

De ser posible, factorizar la expresión $x^{14} - 5$:

$x^{14} - 5 =$	$(x^7)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$	Expresando los términos como potencias
$=$	$\left(x^7 - \sqrt{5}\right)\left(x^7 + \sqrt{5}\right)$	Diferencia de cuadrados

$$(x^7)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$\left(x^7 - \sqrt{5}\right)\left(x^7 + \sqrt{5}\right)$$

Expresando los términos como potencias
Se realiza diferencia de cuadrados

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"x^14 - 5 =", "(x^7)^2 - (√5)^2", "Expresando los términos como potencias"},
    {"=", "(x^7 - √5) (x^7 + √5)", "Diferencia de cuadrados"}},
   Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$x^{14} - 5 =$	$(x^7)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$	Expresando los términos como potencias
$=$	$\left(x^7 - \sqrt{5}\right)\left(x^7 + \sqrt{5}\right)$	Diferencia de cuadrados

Ejemplo 7

De ser posible, factorizar la expresión $x^4 - 36$:

$x^4 - 36 =$	$(x^2 - 6)\,(x^2 + 6)$	Diferencia de cuadrados
$=$	$\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)(x^2 + 6)$	Diferencia de cuadrados

$$(x^2 - 6)\,(x^2 + 6)$$
$$\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)(x^2 + 6)$$

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"x^4 - 36 =", "(x^2 - 6) (x^2 + 6)", "Diferencia de cuadrados"},
    {"=", "(x - √6) (x + √6) (x^2 + 6)", "Diferencia de cuadrados"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$x^4 - 36 =$	$(x^2 - 6)\,(x^2 + 6)$	Diferencia de cuadrados
$=$	$\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right)(x^2 + 6)$	Diferencia de cuadrados

Ejemplo 8

De ser posible, factorizar la expresión $4\,x^2 - y^2 + 4\,x - 2\,y$:

$4\,x^2 - y^2 + 4\,x - 2\,y=$	$(4\,x^2 - y^2) + (4\,x - 2\,y)$	Agrupando los términos
$=$	$2\,x - y)\,(2\,x + y) + 2\,(2\,x - y)$	Diferencia de cuadrados y factor común
$=$	$(2\,x - y)\,((2\,x - y) + 2)$	Factor común
$=$	$(2\,x - y)\,(2\,x - y + 2)$	Simplificando

$$(4\,x^2 - y^2) + (4\,x - 2\,y)$$
$$(2\,x - y)\,(2\,x + y) + 2\,(2\,x - y)$$
$$(2\,x - y)\,((2\,x - y) + 2)$$
$$(2\,x - y)\,(2\,x - y + 2)$$

Agrupando los términos
Diferencia de cuadrados y factor común
Factor común
Simplificando

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"4 x^2 - y^2 + 4 x - 2 y=", "(4 x^2 - y^2) + (4 x - 2 y)", "Agrupando los términos"},
    {"=", "2 x - y) (2 x + y) + 2 (2 x - y)",
     "Diferencia de cuadrados y factor común"},
    {"=", "(2 x - y) ((2 x - y) + 2)", "Factor común"},
    {"=", "(2 x - y) (2 x - y + 2)", "Simplificando"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$4\,x^2 - y^2 + 4\,x - 2\,y=$	$(4\,x^2 - y^2) + (4\,x - 2\,y)$	Agrupando los términos
$=$	$2\,x - y)\,(2\,x + y) + 2\,(2\,x - y)$	Diferencia de cuadrados y factor común
$=$	$(2\,x - y)\,((2\,x - y) + 2)$	Factor común
$=$	$(2\,x - y)\,(2\,x - y + 2)$	Simplificando

Trinomio cuadrado

» Definición

A la estructura $a\,x^2 + b\,x + c = (p\,x\ \pm \square)\,(q\,x\ \pm \lozenge)$ se le conoce con el nombre de **trinomio cuadrado**, no siempre es facorizable. A continuación se exponen tres métodos de factorización, con sus procesos y ejemplos.

» *Imagen*

$$\overbrace{a \cdot \blacksquare^2 + b\,\blacksquare + c}^{\text{suma / resta}} \xrightarrow[\text{(no siempre se puede)}]{\textit{factorizar}}$$

$$\overbrace{(p\,\blacksquare \pm \square)\,(q\,\blacksquare \pm \lozenge)}^{\text{multiplicación}}$$

```
Deploy@
 Mouseover[Pane[Image[, ImageSize → 550], ImageSize → {Automatic, 70}],
  Pane[Style[" a x^2 + b x + c = (p x ± □) (q x ± ◊)", 40],
   ImageSize → {Automatic, 70}, Alignment → Center]]
```

$$\overbrace{a \cdot \blacksquare^2 + b\,\blacksquare + c}^{\text{suma / resta}} \xrightarrow[\text{(no siempre se puede)}]{\textit{factorizar}} \overbrace{(p\,\blacksquare \pm \blacktriangle)\,(q\,\blacksquare \pm \blacktriangledown)}^{\text{multiplicación}}$$

» *M1*

Este método es una técnica para factorizar trinomios cuadrados haciendo uso del método de factor común por agrupación.

1. Ordenar el trinomio para se observe con la siguiente estructura: $a\,x^2 + b\,x + c$. En caso de que haya más de una letra cuadrática, elegir una de ellas para ordenar el trinomio.

2. Identificar los coeficientes del trinomio y asociarlos con las letras que se observan en la estructura $a\,x^2 + b\,x + c$, sin el signo que precede a cada uno.

3. Hallar el producto de $a \cdot c$ y descomponerlo en factores primos.

4. Reescribir el trinomio dado descomponiendo el término con el factor x en una adición o sustracción, de dos términos, según las siguientes pautas:
- El signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término con el factor x.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del segundo término por el del término constante en el trinomio.

5. Hallar los coeficientes de x en los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente de x en el trinomio.

6. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposición.

7. Verificar que cada factor en la factorización esté lo más reducido posible.

8. Escribir la igualdad obtenida de la factorización.

» *Ejemplo 1*

Establecer una igualdad a través de una factorización, para la expresión $7x^2 - 44x - 35$.

1. La expresión ya está organizada.

2. Identificar los coeficientes del trinomio y asociarlos con las letras que se observan en la estructura $ax^2 + bx + c$, sin el signo que precede a cada uno: $a = 7$; $b = 44$ y $c = 35$.

3. Hallar el producto de $a \cdot c$ y descomponerlo en factores primos: $a \cdot c = 7 \cdot 35 = 245$; $245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$.

4. Reescribir el trinomio dado descomponiendo el término con el factor x en una adición o sustracción, de dos términos, según las siguientes pautas:
- El signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término con el factor x. En este caso el término del factor con x es $44x$ y el signo que le precede es $-$, luego el signo que antecederá al primer factor de la descomposición será el menos.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del término con el factor x por el del término constante. En este caso el término del factor con x es $44x$ y el signo que le precede es -, que es el mismo signo que antecede al término constante 35, luego el signo que antecederá al segundo término de la descomposición será el más, por ser el producto de $(-) \cdot (-)$.
De acuerdo con lo anterior, el trinomio se reescribe así:

$$7x^2 - 44x - 35 = 7x^2 - \_\_\_\_\, x + \_\_\_\_\, x - 35$$

5. Hallar los coeficientes de x en los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente de x en el trinomio.
En este caso los términos son $-\_\_\_\_\, x$ y $+\_\_\_\_\, x$ por lo que los coeficientes se deben restar. Para hallar estos coeficientes se deben encontrar dos números, que resultan de multiplicar los números de la descomposición en factores primos del numeral 2, usándolos todos, como se muestra a continuación: 5·7·7 arroja las opciones 5 y 49, 35 y 7 o 245 y 1. De esas opciones hay que buscar la que cumple que su resta es -44: $-5 + 49 = 44$; $-49 + 5 = -44$; $-35 + 7 = -28$; $-7 + 35 = 28$; $-245 + 1 = -244$ y $-1 + 245 = 244$. Dado que la única alternativa que satisface lo solicitado es $-49 + 5 = -44$, los números son 49 y 5.

6. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposición:

$$7x^2 - 49x + 5x - 35 = 7x(x - 7) + 5(x - 7) = (x - 7)(7x + 5)$$

7. Verificar que cada factor en la factorización esté lo más reducido posible: tanto $(x - 7)$ como $(7x + 5)$ están lo más reducido posible.

8. Se escribe la igualdad obtenida de la factorización: $7x^2 - 44x - 35 = (x - 7)(7x + 5)$.

» *M2*

Este método es una técnica para factorizar trinomios cuadrados haciendo uso de las propiedades del elemento neutro de la multiplicación ($a \cdot 1 = a$) y del cociente de términos iguales $\left(\frac{b}{b} = 1\right)$.

1. Ordenar el trinomio para se observe con la siguiente estructura: $a\,x^2 + b\,x + c$. En caso de que haya más de una letra cuadrática, elegir una de ellas para ordenar el trinomio.

2. Identificar los coeficientes del trinomio y asociarlos con las letras que se observan en la estructura $a\,x^2 + b\,x + c$, sin el signo que precede a cada uno.

3. Determinar si es conveniente aplicar el método, para ello, verifique si a y c tienen raíces exactas y si b se puede reescribir como $2 \cdot a \cdot c$. En caso de no cumplirlas prosiga.

4. Usar las propiedades del elemento neutro de la multiplicación y del cociente de términos iguales, con el valor del coeficiente del término con mayor exponente, para reescribir el trinomio así:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 1 \cdot (a\,x^2 + b\,x + c) = \frac{a}{a}\,(a\,x^2 + b\,x + c)$$

5. Multiplicar el faccionario por el trinomio así:

$$a\,x^2 + b\,x + c = \frac{a}{a}\,(a\,x^2 + b\,x + c) = \frac{(a\,x)^2 - b(a\,x) - a \cdot c}{a}$$

El único término que no se multiplica es el que tiene como factor a x. Allí se deja indicada la operación y es importante que se escriba de ese modo: primero el coeficiente del término con x y luego el número que se multiplicó.

6. Reescribir el trinomio obtenido de la multiplicación, descomponiendo el término con el factor x en una adición o sustracción, de dos términos, según las siguientes pautas:
- el signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término con el factor x.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del segundo término por el del término constante en el trinomio.

7. Hallar los coeficientes de x en los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente de x en el trinomio.

8. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposición.

9. Reescribir la igualdad obtenida con la factorización.

» *Ejemplo 2*

Establecer una igualdad a través de una factorización, para la expresión $7\,x^2 - 44\,x - 35$.

1. La expresión ya está organizada.

2. Determinar si es conveniente aplicar el método, para ello, verifique si a y c tienen raíces exactas y si b se puede reescribir como $2 \cdot a \cdot c$. Para este caso, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{35}$ no son exactas y $44 \neq 70 = 2 \cdot 7 \cdot 5$, luego el método es aplicable por no cumplir las condiciones.

3. Usar las propiedades del elemento neutro de la multiplicación y del cociente de términos iguales, con el valor del coeficiente del término con mayor exponente, para reescribir el trinomio así:

$$7x^2 - 44x - 35 = 7x^2 - \_\_\_\_x + \_\_\_\_x - 35$$

4. Usar las propiedades del elemento neutro de la multiplicación y del cociente de términos iguales, con el valor del coeficiente del término con mayor exponente, para reescribir el trinomio así:

$$7x^2 - 44x - 35 = 1 \cdot (7x^2 - 44x - 35) = \frac{7}{7}(7x^2 - 44x - 35)$$

Note que el coeficiente del término con mayor exponente es 7, por esto se usó dicho número en la propiedad del cociente de términos iguales.

5. Multiplicar el faccionario por el trinomio así:

$$7x^2 - 44x - 35 = \frac{7}{7}(7x^2 - 44x - 35) = \frac{(7x)^2 - 44(7x) - 245}{7}$$

El único término que no se multiplica es el que tiene como factor a x. Allí se deja indicada la operación y es importante que se escriba de ese modo: primero el coeficiente del término con x y luego el número que se multiplicó.

6. Reescribir el trinomio obtenido de la multiplicación, descomponiendo el término con el factor x en una adición o sustracción, de dos términos, según las siguientes pautas:
- El signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término con el factor x. En este caso el término del factor con x es $44x$ y el signo que le precede es $-$, luego el signo que antecederá al primer factor de la descomposición será el menos.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del término con el factor x por el del término constante. En este caso el término del factor con x es $44x$ y el signo que le precede es $-$, que es el mismo signo que antecede al término constante 35, luego el signo que antecederá al segundo término de la descomposición será el más, por ser el producto de $(-)\cdot(-)$.

De acuerdo con lo anterior, el trinomio se reescribe así:

$$7x^2 - 44x - 35 = 7x^2 - \_\_\_\_x + \_\_\_\_x - 35$$

7. Hallar los coeficientes de x en los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente de x en el trinomio.

En este caso los términos son $-\_\_\_\_(7x)$ y $+\_\_\_\_(7x)$ por lo que los coeficientes se deben restar. Para hallar estos coeficientes se deben encontrar dos números, que resultan de multiplicar los números de la descomposición en factores primos del número 245, usándolos todos, como se muestra a continuación:

$245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$ arroja las opciones 5 y 49, 35 y 7 o 245 y 1. De esas opciones hay que buscar la que cumple que su resta es -44: $-5 + 49 = 44$; $-49 + 5 = -44$; $-35 + 7 = -28$; $-7 + 35 = 28$; $-245 + 1 = -244$ y $-1 + 245 = 244$. Dado que la única alternativa que satisface lo solicitado es $-49 + 5 = -44$, los números son 49 y 5.

8. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposición:

$$\begin{aligned}7\,x^2 - 44\,x - 35 &= \tfrac{(7\,x)^2 - 49\,(7\,x) + 5\,(7\,x) - 245}{7}\\ &= \tfrac{7\,x(7\,x - 49) + 5\,(7\,x - 49)}{7}\\ &= \tfrac{7\,x \cdot 7\,(x-7) + 5\cdot 7\,(x-7)}{7}\\ &= \tfrac{7\,x \cdot 7\,(x-7) + 5\cdot 7\,(x-7)}{7}\\ &= 7\,x\,(x-7) + 5\,(x-7)\\ &= (x-7)\,(7\,x+5)\end{aligned}$$

9. Se escribe la igualdad obtenida de la factorización: $7\,x^2\; -\; 44\,x\; -\; 35\; = (x-7)\,(7\,x+5)$.

» *M3*

Este método es una técnica para factorizar trinomios cuadrados que satisfagan que a y c tienen raíces exactas y b se puede reescribir como $2 \cdot a \cdot c$.

1. Ordenar el trinomio para se observe con la siguiente estructura: $a\,x^2 + b\,x + c$. En caso de que haya más de una letra cuadrática, elegir una de ellas para ordenar el trinomio.

2. Identificar los coeficientes del trinomio y asociarlos con las letras que se observan en la estructura $a\,x^2 + b\,x + c$, sin el signo que precede a cada uno.

3. Determinar si es conveniente aplicar el método, para ello, verifique si a y c tienen raíces exactas y si b se puede reescribir como $2 \cdot a \cdot c$. Si se cumple esto se puede continuar.

4. Reescribir el trinomio obtenido de la multiplicación, descomponiendo el término del medio en el trinomio, en una adición o sustracción, de dos términos, según las pautas expuestas a continuación:
- El signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término del medio en el trinomio.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del segundo término por el del término constante en el trinomio, respecto a la letra elegida para la factorización.

5. Hallar los coeficientes de los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o la resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente del término del medio en el trinomio.

6. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposición.

7. Verificar que cada factor en la factorización esté lo más reducido posible.

8. Escribir la igualdad obtenida de la factorización.

Este método se puede abreviar y generalizar de la siguiente manera.
Cuando se cumpla el numeral 3 en cualquier trinomio cuadrado, se puede escribir la igualdad directamente así:
>>> Calcular las raíces del primer y último términos del trinomio cuadrado dado.
>>> Escribir dentro de un paréntesis la adición de las raíces si los signos del segundo término y tercer del

trinomio son positivos, en caso contrario se hace una sustracción.
 >>> Escribir la igualdad con la factorización elevando al cuadrado la anterior expresión.

» *Ejemplo 3*

Establecer una igualdad a través de una factorización, para la expresión $16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2$.

1. La expresión ya está organizada.

2. Identificar los coeficientes del trinomio y asociarlos con las letras que se observan en la estructura $a\,x^2 + b\,x + c$, sin el signo que precede a cada uno. Para este caso, como hay dos letras se elegirá una de ellas (y pero podría ser z si se gusta, solo hay que seguir el mismo proceso): $a = 16$; $b = 104$ y $c = 169$.

3. Determinar si es conveniente aplicar el método, para ello, verifique si a y c tienen raíces exactas y si b se puede reescribir como $2 \cdot a \cdot c$. Para este caso, $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{169} = 13$ son exactas y $104 = 2 \cdot 4 \cdot 13$, luego el método es aplicable por cumplir las condiciones.

4. Reescribir el trinomio obtenido de la multiplicación, descomponiendo el término con los factores $z\,y$, en una adición o sustracción, de dos términos, según las pautas expuestas a continuación:
- El signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término con el factor $z\,y$. En este caso el término del factor con z y es $104\,z\,y$ y el signo que le precede es $-$, luego el signo que antecederá al primer factor de la descomposición será el menos.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del término con el factor $z\,y$ por el del término constante respecto a la letra elegida para la factorización, que en este caso es $169\,z^2$. Como el término del factor con z y es $104\,z\,y$ y el signo que le precede es $-$ y el que antecede al término constante es $+$, el signo que antecederá al segundo término de la descomposición será el menos, por ser el producto de $(-)\cdot(+)$.

De acuerdo con lo anterior, el trinomio se reescribe así:

$$16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 = 16\,y^2 - \_\_\_\_\ z\,y - \_\_\_\_\ z\,y + 169\,z^2$$

5. Hallar los coeficientes de $z\,y$ en los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente de $z\,y$ en el trinomio.

En este caso los términos son $-\_\_\_\_\ z\,y$ y $-\_\_\_\_\ z\,y$ por lo que los coeficientes se deben adicionar. Para hallar estos coeficientes se deben encontrar dos números, que resultan de multiplicar los números de la descomposición en factores primos del producto $a \cdot c$, usándolos todos, como se muestra a continuación: $16 \cdot 169 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 13$ arroja las opciones 2 y 1352, 4 y 676, 8 y 338, 16 y 169, 208 y 13, 2704 y 1, 26 y 104 o 52 y 52. De esas opciones hay que buscar la que cumple que su suma es -104: $-2 - 1352 = -1354$, $-4 - 676 = -680$, $-8 - 338 = -346$, $-16 - 169 = -185$, $-208 - 13 = -221$, $-2704 - 1 = -2705$, $-26 - 104 = 130$ o $-52 - 52 = 104$. Dado que la única alternativa que satisface lo solicitado es $-52 - 52 = 104$, los números son 52 y 52.

6. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposi-
ción:

$$
\begin{aligned}
16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 &= 16\,y^2 - 52\,z\,y - 52\,z\,y + 169\,z^2 \\
&= 4\,y\,(4\,y - 13\,z) - 13\,z\,(4\,y - 13\,z) \\
&= (4\,y - 13\,z)\,(4\,y - 13\,z) \\
&= \frac{7\,x\cdot 7\,(x-7)+5\cdot 7\,(x-7)}{7} \\
&= (4\,y - 13\,z)^2
\end{aligned}
$$

7. Verificar que cada factor en la factorización esté lo más reducido posible.

8. Se escribe la igualdad obtenida al factorizar: $16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 = (4\,y - 13\,z)^2$Establecer una igualdad a través de una factorización, para la expresión $16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2$.

1. La expresión ya está organizada.

2. Identificar los coeficientes del trinomio y asociarlos con las letras que se observan en la estructura $a\,x^2 + b\,x + c$, sin el signo que precede a cada uno. Para este caso, como hay dos letras se elegirá una de ellas (y pero podría ser z si se gusta, solo hay que seguir el mismo proceso): $a = 16$; $b = 104$ y $c = 169$.

3. Determinar si es conveniente aplicar el método, para ello, verifique si a y c tienen raíces exactas y si b se puede reescribir como $2\cdot a\cdot c$. Para este caso, $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{169} = 13$ son exactas y $104 = 2\cdot 4\cdot 13$, luego el método es aplicable por cumplir las condiciones.

4. Reescribir el trinomio obtenido de la multiplicación, descomponiendo el término con los factores $z\,y$, en una adición o sustracción, de dos términos, según las pautas expuestas a continuación:
- El signo que antecede el primer término es el mismo que precede al término con el factor $z\,y$. En este caso el término del factor con z y es $104\,z\,y$ y el signo que le precede es $-$, luego el signo que antecederá al primer factor de la descomposición será el menos.
- El signo que antecede el segundo término es el signo del producto del signo del término con el factor $z\,y$ por el del término constante respecto a la letra elegida para la factorización, que en este caso es $169\,z^2$. Como el término del factor con z y es $104\,z\,y$ y el signo que le precede es $-$ y el que antecede al término constante es $+$, el signo que antecederá al segundo término de la descomposición será el menos, por ser el producto de $(-)\cdot(+)$.

De acuerdo con lo anterior, el trinomio se reescribe así:

$$16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 = 16\,y^2 - \_\_\_\_\,z\,y - \_\_\_\_\,z\,y + 169\,z^2$$

5. Hallar los coeficientes de $z\,y$ en los términos de la descomposición anterior de modo que la suma, si los signos de los términos son iguales, o resta, si los signos son diferentes, dé como resultado el coeficiente de $z\,y$ en el trinomio.
En este caso los términos son $-\_\_\_\_\,z\,y$ y $-\_\_\_\_\,z\,y$ por lo que los coeficientes se deben adicionar. Para hallar estos coeficientes se deben encontrar dos números, que resultan de multiplicar los números de la descomposición en factores primos del producto $a\cdot c$, usándolos todos, como se muestra a continuación: $16\cdot 169 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 13\cdot 13$ arroja las opciones 2 y 1352, 4 y 676, 8 y 338, 16 y 169, 208 y 13, 2704 y 1, 26 y 104 o 52 y 52. De esas opciones hay que buscar la que cumple que su suma es -104: $-2-1352=-1354$, $-4-676=-680$, $-8-338=-346$, $-16-169=-185$, $-208-13=-221$, $-2704-1=-2705$, $-26-104=130$ o $-52-52=104$. Dado que la única alternativa que satisface lo solicitado es $-52-52=104$, los números son 52 y 52.

6. Emplear el método de factor común por agrupación para factorizar la expresión obtenida con la anterior descomposi-
ción:

$$\begin{aligned} 16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 &= 16\,y^2 - 52\,z\,y - 52\,z\,y + 169\,z^2 \\ &= 4\,y\,(4\,y - 13\,z) - 13\,z\,(4\,y - 13\,z) \\ &= (4\,y - 13\,z)\,(4\,y - 13\,z) \\ &= \frac{7\,x{\cdot}7\,(x-7)+5\cdot 7\,(x-7)}{7} \\ &= (4\,y - 13\,z)^2 \end{aligned}$$

7. Verificar que cada factor en la factorización esté lo más reducido posible.

8. Se escribe la igualdad obtenida al factorizar: $16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 = (4\,y - 13\,z)^2$

Este se puede abreviar y generalizar de la siguiente manera.
Cuando se cumpla el numeral 3 en cualquier trinomio cuadrado, se puede escribir la igualdad directamente así:

>>> Calcular las raíces del primer y último términos del trinomio cuadrado dado: $\sqrt{16\,y^2} = 4\,y$; $\sqrt{169\,z^2} = 13\,z$.

>>> Escribir dentro de un paréntesis la adición de las raíces si los signos del segundo término y tercer del trinomio son positivos, en caso contrario se hace una sustracción. En este caso es una sustracción: $(4\,y - 13\,z)$.

>>> Escribir la igualdad con la factorización elevando al cuadrado la anterior expresión:
$16\,y^2 - 104\,z\,y + 169\,z^2 = (4\,y - 13\,z)^2$.

» Ejemplos

Ejemplo 1

De ser posible, factorizar la expresión $m^2 - 5\,m - 14$:

$m^2 - 5\,m - 14 =$	$m^2 + \_\_\_\,m - \_\_\_\,m - 14$	Se descompone el término del medio
$=$	$m^2 + 2\,m - 7\,m - 14$	
$=$	$m(m+2) - 7\,(m+2)$	Factor común por agrupación
$=$	$(m+2)\,(m-7)$	Factor común

$m^2 + 5\,m - 14 = m^2 + \_\_\_\,m - \_\_\_\,m - 14$

$=$

$m^2 + 2\,m - 7\,m - 14$ Se descompone el término del medio en el trinomio según como indican los métodos.

$= m(m+2) - 7\,(m+2)$ Se hace factor común por agrupación.

$= (m+2)\,(m-7)$ Se aplica factor común.

```
Deploy@Style[Grid[{
   {"m^2 - 5 m - 14 =", "m^2 + ___ m - ___ m - 14",
    "Se descompone el término del medio"},
   {"=", "m^2 + 2 m - 7 m - 14 "},
   {"=", "m (m + 2) - 7 (m + 2) ", "Factor común por agrupación"},
   {"=", " (m + 2) (m - 7) ", "Factor común"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$m^2 - 5\,m - 14 =$	$m^2 + \_\_\_\, m - \_\_\_\, m - 14$	Se descompone el término del medio
$=$	$m^2 + 2\,m - 7\,m - 14$	
$=$	$m(m + 2) - 7\,(m + 2)$	Factor común por agrupación
$=$	$(m + 2)\,(m - 7)$	Factor común

Ejemplo 2

De ser posible, factorizar la expresión $x^4 - 5\,x^2 - 50$:

$x^4 - 5\,x^2 - 50 =$	$x^4 - \_\_\_\, x^2 - \_\_\_\, x^2 - 50$	Se descompone el término del medio
$=$	$= x^4 - 10\,x^2 + 5\,x^2 - 50$	
$=$	$x^2(x^2 - 10) + 5\,(x^2 - 10)$	Factor común por agrupación
$=$	$(x^2 - 10)\,(x^2 + 5)$	Factor común
$=$	$\left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right)(x^2 + 5)$	Diferencia de cuadrados

$x^4 - 5\,x^2 - 50 = x^4 - \_\_\_\, x^2 - \_\_\_\, x^2 - 50$

$=$

$x^4 - 10\,x^2 + 5\,x^2 - 50$ Se descompone el término del medio en el trinomio según como indican los métodos.

$= x^2(x^2 - 10) + 5\,(x^2 - 10)$ Se hace factor común por agrupación.

$= (x^2 - 10)\,(x^2 + 5)$ Se aplica factor común.

$= \left(x - \sqrt{10}\right)\left(x + \sqrt{10}\right)(x^2 + 5)$ Se aplica diferencia de cuadrados.

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"x^4 - 5 x^2 - 50 =", "x^4 - ___ x^2 - ___ x^2 - 50",
     "Se descompone el término del medio"},
    {"=", " = x^4 - 10 x^2 + 5 x^2 - 50"},
    {"=", "x^2 (x^2 - 10) + 5 (x^2 - 10) ", "Factor común por agrupación"},
    {"=", " (x^2 - 10) (x^2 + 5) ", "Factor común"},
    {"=", " (x - √10) (x + √10) (x^2 + 5) ", "Diferencia de cuadrados"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$x^4-5\,x^2-50=$	$x^4-\_\_\_\,x^2-\_\_\_\,x^2-50$	Se descompone el término del medio
$=$	$=x^4-10\,x^2+5\,x^2-50$	
$=$	$x^2(x^2-10)+5\,(x^2-10)$	Factor común por agrupación
$=$	$(x^2-10)\,(x^2+5)$	Factor común
$=$	$\left(x-\sqrt{10}\right)\left(x+\sqrt{10}\right)(x^2+5)$	Diferencia de cuadrados

Ejemplo 3

De ser posible, factorizar la expresión $4\,n^2+n-33$:

$4\,n^2+n-33=$	$\frac{4}{4}(4n^2+\mathrm{n}-33)$	Propiedad elem. neutro multiplicación
$=$	$\frac{(4\,n)^2+1\,(4\,n)-132}{4}$	Se opera como indica el método
$=$	$\frac{(4\,n)^2+\_\_\_\_\,(4\,n)-\_\_\_\_\,(4\,n)-132}{4}$	Se descompone el término del medio
$=$	$\frac{4\,n\,(4\,n+12)-11\,(4\,n+12)}{4}$	Factor común por agrupación
$=$	$\frac{4\,n\cdot 4\,(n+3)-11\cdot 4\,(n+3)}{4}$	Factor común
$=$	$4\,n(n+3)-11\,(n+3)$	Simplificación
$=$	$(n+3)\,(4\,n-11)$	Factor común

$4\,n^2 + n - 33 = \frac{4}{4}\,(4\,n^2 + n - 33)$ Se aplica la propiedad del elemento neutro de la multiplicación *y* la cancelación que indica uno de los métodos.

$= \frac{(4\,n)^2 + 1\,(4\,n) - 132}{4}$ Se opera según como indica uno de los métodos.

$= \frac{(4\,n)^2 + \_\_\_\_\,(4\,n) - \_\_\_\_\,(4\,n) - 132}{4}$ Se descompone el término del medio en el trinomio según como indican los métodos.

$= \frac{(4\,n)^2 + 12\,(4\,n) - 11\,(4\,n) - 132}{4}$ Se hallan los números de la descomposición.

$= \frac{4\,n(4\,n + 12) - 11\,(4\,n + 12)}{4}$ Se hace factor común por agrupación.

$= \frac{4\,n \cdot 4\,(n+3) - 11 \cdot 4\,(n+3)}{4}$ Se aplica factor común dentro de los paréntesis *y* se simplifica.

$= 4\,n(n+3) - 11\,(n+3)$ Se aplica de nuevo factor común.

$= (n+3)\,(4\,n - 11)$

```
Deploy@Style[Grid[{
   {"4 n^2 + n - 33 =", "4/4 (4n^2+n-33) ", "Propiedad elem. neutro multiplicación"},
   {"=", "((4 n)^2 + 1 (4 n) - 132)/4", "Se opera como indica el método"},
   {"=", "((4 n)^2 + ____ (4 n) - ____ (4 n) - 132)/4",
    "Se descompone el término del medio"},
   {"=", "(4 n (4 n + 12) - 11 (4 n + 12))/4 ", "Factor común por agrupación"},
   {"=", " (4 n · 4 (n + 3) - 11 · 4 (n + 3))/4", "Factor común"},
   {"=", "4 n (n + 3) - 11 (n + 3)", "Simplificación"},
   {"=", "(n + 3) (4 n - 11)", "Factor común"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$4\,n^2+n-33=$	$\frac{4}{4}(4n^2+\text{n}-33)$	Propiedad elem. neutro multiplicación
$=$	$\frac{(4\,n)^2+1\,(4\,n)-132}{4}$	Se opera como indica el método
$=$	$\frac{(4\,n)^2+\_\_\_\_\,(4\,n)-\_\_\_\_\,(4\,n)-132}{4}$	Se descompone el término del medio
$=$	$\frac{4\,n\,(4\,n+12)-11\,(4\,n+12)}{4}$	Factor común por agrupación
$=$	$\frac{4\,n\cdot 4\,(n+3)-11\cdot 4\,(n+3)}{4}$	Factor común
$=$	$4\,n(n+3)-11\,(n+3)$	Simplificación
$=$	$(n+3)\,(4\,n-11)$	Factor común

Ejemplo 4

De ser posible, factorizar la expresión $3+11\,a+10\,a^2$:

$3+11\,a+10\,a^2=$	$10\,a^2+11\,a+3$	Se ordena el trinomio
$=$	$10\,a^2+\_\_\_\,a+\_\_\_\,a\,+3$	Se descompone el término del medio
$=$	$10\,a^2+6\,a+5\,a\,+3$	
$=$	$2\,a(5\,a+3)+1\,(5\,a\,+3)$	Factor común por agrupación
$=$	$(5\,a+3)\,(2\,a+1)$	Factor común

$3+11\,a+10\,a^2=10\,a^2+11\,a+3$ Se ordena el trinomio.
$=10\,a^2+\_\_\_\,a+\_\_\_\,a\,+$
3 Se descompone el término del medio en el trinomio según como indican los métodos.
$=10\,a^2+6\,a+5\,a\,+3$ Se determinan los coeficientes de la descomposición.
$=2\,a(5\,a+3)+1\,(5\,a\,+3)$ Se aplica factor común por agrupación.
$=(5\,a+3)\,(2\,a+1)$ Se aplica factor común.

```
Deploy@Style[Grid[{
   {"3 + 11 a + 10 a^2 =", "10 a^2 + 11 a + 3", "Se ordena el trinomio"},
   {"=", "10 a^2 + ___ a + ___ a + 3", "Se descompone el término del medio"},
   {"=", "10 a^2 + 6 a + 5 a + 3 "},
   {"=", "2 a(5 a + 3) + 1 (5 a + 3)", "Factor común por agrupación"},
   {"=", "(5 a + 3) (2 a + 1) ", "Factor común"}},
  Alignment → {{Right, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$3+11\,a+10\,a^2=$	$10\,a^2+11\,a+3$	Se ordena el trinomio
$=$	$10\,a^2+\_\_\_\,a+\_\_\_\,a\,+3$	Se descompone el término del medio
$=$	$10\,a^2+6\,a+5\,a\,+3$	
$=$	$2\,a(5\,a+3)+1\,(5\,a\,+3)$	Factor común por agrupación
$=$	$(5\,a+3)\,(2\,a+1)$	Factor común

Ejemplo 5

De ser posible, factorizar la expresión $(a-1)^2+3\,(a-1)-108$:

$6\,(a-1)^2+3\,(a-1)-108=$

$=(a-1)^2+\_\_\,(a-1)-\_\_\,(a-1)-108$	Se descompone el término del medio
$=(a-1)^2+12\,(a-1)-9\,(a-1)-108$	
$=(a-1)\,((a-1)+12)-9\,((a-1)+12)$	Factor común por agrupación
$=((a-1)+12)\,((a-1)-9)$	Factor común
$=\ (a+11)\,(a-10)$	Factor común

$6\,(a-1)^2+3\,(a-1)-108=(a-1)^2+\_\_\,(a-1)-\_\_\,(a-1)-108$

Se descompone el término del medio en el trinomio según como indican los métodos.

$=$

$(a-1)^2+12\,(a-1)-9\,(a-1)-108$ Se determinan los coeficientes de la descomposición.

$=(a-1)\,((a-1)+12)-9\,((a-1)+12)$ Se aplica factor común por agrupación.

$=((a-1)+12)\,((a-1)-9)$ Se simplifica la expresión donde sea posible.

$=$

$(a+11)\,(a-10)$ Se descompone el término del medio en el trinomio según como indican los métodos.

```
Deploy@Style[Grid[{
    {"6 (a - 1)^2 + 3 (a - 1) - 108="},
    {"=(a - 1)^2 + __ (a - 1) - __ (a - 1) - 108",
     "Se descompone el término del medio"},
    {" = (a - 1)^2 + 12 (a - 1) - 9 (a - 1) - 108"},
    {" = (a - 1) ((a - 1) + 12) - 9 ((a - 1) + 12)", "Factor común por agrupación"},
    {" = ((a - 1) + 12) ((a - 1) - 9)", "Factor común"},
    {" =  (a + 11) (a - 10)", "Factor común"}},
   Alignment → {{Left, Left, Left}}, Frame → None], "Text"]
```

$6\,(a-1)^2+3\,(a-1)-108=$

$=(a-1)^2+\_\_\,(a-1)-\_\_\,(a-1)-108$	Se descompone el término del medio
$=(a-1)^2+12\,(a-1)-9\,(a-1)-108$	
$=(a-1)\,((a-1)+12)-9\,((a-1)+12)$	Factor común por agrupación
$=((a-1)+12)\,((a-1)-9)$	Factor común
$=\ (a+11)\,(a-10)$	Factor común

Diferencia y suma de cubos

» Definición

A la estructura $a^3-b^3=(a-b)\,(a^2+a\,b+b^2)$ se le conoce con el nombre de **diferencia de cubos**.
A la estructura $a^3+b^3=(a+b)\,(a^2-a\,b+b^2)$ se le conoce con el nombre de **suma de cubos.**

» *Imagen*

$$\overbrace{\blacksquare^3 - \bullet^3}^{\text{resta}} \xRightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{(\blacksquare - \bullet)\,(\blacksquare^2 + \blacksquare\,\bullet + \bullet^2)}^{\text{multiplicación}}$$

$$\overbrace{\blacksquare^3 + \bullet^3}^{\text{suma}} \xRightarrow{\textit{factorizar}}$$

$$\overbrace{(\blacksquare + \bullet)\,(\blacksquare^2 - \blacksquare\,\bullet + \bullet^2)}^{\text{multiplicación}}$$

```
Deploy@
 Mouseover[Pane[Image[ , ImageSize → 750], ImageSize → {Automatic, 70}],
  Pane[Style["a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + a b + b^2),  a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - a b + b^2)", 30],
   ImageSize → {Automatic, 70}, Alignment → Center]]
```

$$\overbrace{\blacksquare^3 - \bullet^3}^{\text{resta}} \xRightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{(\blacksquare - \bullet)\,(\blacksquare^2 + \blacksquare\,\bullet + \bullet^2)}^{\text{multiplicación}} \quad \overbrace{\blacksquare^3 + \bullet^3}^{\text{suma}} \xRightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{(\blacksquare + \bullet)\,(\blacksquare^2 - \blacksquare\,\bullet + \bullet^2)}^{\text{multiplicación}}$$

$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + a\,b + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - a\,b + b^2)$

» ¿Cómo aplicar la diferencia de cubos?

Las palabras diferencia y suma en los nombres de los procesos, indican que las expresiones deben tener dos términos sustraídos o adicionados, respectivamente, mientras la palabra cubos, hace referencia a que el mayor exponente de la parte literal debe ser 3 o un múltiplo de 3 (figura 4). Observe las estructuras.
El proceso consiste en expresar una diferencia o una suma de términos al cubo como multiplicaciones lo más reducidas posible. En ellos, un factor es la sustracción de las raíces cúbicas de los términos de la expresión original o la suma según sea el caso, mientras el otro factor es un trinomio cuadrado irreducible, es decir, que no es factorizable. Estas estructuras se aplican así:

1. Identifique si la expresión dada es una diferencia o suma de dos términos al cubo.

2. Saque la raíz cúbica de cada término (recuerde que pueden ser o no exactas).

3. Escriba un producto de dos factores tal que:
- Para el caso de diferencia de cubos: uno de ellos sea la sustracción de las raíces cúbicas de los términos y el otro sea la suma de los cuadrados de los términos con el producto de las raíces cúbicas, esto es:

$$(a^3 - b^3) = (a - b)\,(a^2 + 2\,a\,b + b^3)$$

- Para el caso de suma de cubos: uno de ellos sea la suma de las raíces cúbicas de los términos y el otro sea la sustracción del producto de las raíces cúbicas con la suma de los cuadrados de los términos, esto es:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)\,(a^2 - 2\,a\,b + b^3)$$

4. Puede constatar si el proceso quedó bien. Para ello, multiplique y revise que al reducir las expresiones se obtenga la expresión original.

Ejemplo: Factorizar la expresión $1 - 216\,m^3$:

1. Identifique si la expresión dada es una diferencia de dos términos:
Como hay dos términos (1 y $216\,m^3$) y entre ellos está el signo menos, es una diferencia.

2. Saque la raíz cuadrada de cada término. Recuerde que pueden no ser exactas.
$\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[3]{216\,m^3} = 6\,m$ (en este caso fueron exactas).

3. Escriba un producto de dos factores tal que uno de ellos sea la sustracción de las raíces cúbicas de los términos y el otro sea la suma de los cuadrados de los términos con el producto de las raíces cúbicas:
⟩⟩ Primer factor: $(1 - 6\,m)$.
⟩⟩ Segundo factor: $(1^2 + 1 \cdot 6\,m + (6\,m)^2)$
⟩⟩ Producto de los factores: $(1 - 6\,m)\,(1^2 + 1 \cdot 6\,m + (6\,m)^2)$.

4. Verifique que la expresión resultande sea una multiplicación y simplifique los factores extensos, en caso de haberlos. En este punto habrá terminado la factor-
ización.

$$(1 - 6\,m)\,(1 + 6\,m + 36\,m^2)$$

5. *Pruebe*, si desea, el resultado obtenido, para ello multiplique la expresión de la factorización:
$(1\ -\ 6\,m)\,(1 + 6\,m + 36\,m^2) = 1 + 6\,m + 36\,m^2 - 6\,m - 36\,m^2 - 216\,m^3 = 1 - 236\,m^3$.

Ejemplo: Factorizar la expresión $27\,m^6 + 343\,n^9$:

1. Identifique si la expresión dada es una suma de dos términos:
Como hay dos términos ($27\,m^6$ y $343\,n^9$) y entre ellos está el signo más, es una suma.

2. Saque la raíz cuadrada de cada término. Recuerde que pueden no ser exactas.
$\sqrt[3]{27\,m^6} = 3\,m^2$; $\sqrt[3]{343\,n^9} = 7\,n^3$ (en este caso fueron exactas).

3. Escriba un producto de dos factores tal que uno de ellos sea la sustracción de las raíces cúbicas de los términos y el otro sea la sustracción del producto de las raíces cúbicas con la suma de los cuadrados de los términos:
⟩⟩ Primer factor: $((3\,m^2\ +\ 7\,n^3)$.
⟩⟩ Segundo factor: $((3\,m^2)^2 - 3\,m^2 \cdot 7\,n^3 + (7\,n^3)^2)$
⟩⟩ Producto de los factores: $(3\,m^2\ +\ 7\,n^3)\,((3\,m^2)^2 - 3\,m^2 \cdot 7\,n^3 + (7\,n^3)^2)$.

4. Verifique que la expresión resultande sea una multiplicación y simplifique los factores extensos, en caso de haberlos. En este punto habrá terminado la factor-
ización.

$$(3\,m^2\ +\ 7\,n^3)\left(9\,m^4 - 21\,m^2\,n^3 + 49\,n^6\right)$$

5. *Pruebe*, si desea, el resultado obtenido, para ello multiplique la expresión de la factorización:
$(3\,m^2\ +\ 7\,n^3)\left(9\,m^4 - 21\,m^2\,n^3 + 49\,n^6\right) =$
$27\,m^6 - 63\,m^4\,n^3 + 147\,m^2\,n^6 + 63\,m^4\,n^3 - 147\,m^2\,n^6 + 343\,n^9 = 27\,m^6 + 343\,n^9$

» Ejemplos

Ejemplo 1

De ser posible, factorizar la expresión $a^3 - 125$:

$$a^3 - 125 = (a\ -\ 5)\,(a^2 + 5\,a + 25)$$

Ejemplo 2

De ser posible, factorizar la expresión $216 - x^{12}$:

$$\begin{aligned}216 - x^{12} &= (6 - x^4)\left(36 + 6x^4 + x^8\right)\\ &= \left(\sqrt{6} - x^2\right)\left(\sqrt{6} + x^2\right)\left(36 + 6x^4 + x^8\right)\\ &= \left(\sqrt{\sqrt{6}} - x\right)\left(\sqrt{\sqrt{6}} + x\right)\left(\sqrt{6} + x^2\right)\left(36 + 6x^4 + x^8\right)\\ &= \left(\sqrt[4]{6} - x\right)\left(\sqrt[4]{6} + x\right)\left(\sqrt{6} + x^2\right)\left(36 + 6x^4 + x^8\right)\end{aligned}$$

$$216 - x^{12} = \left(\sqrt[4]{6} - x\right)\left(\sqrt[4]{6} + x\right)\left(\sqrt{6} + x^2\right)\left(36 + 6x^4 + x^8\right)$$

Ejemplo 3

De ser posible, factorizar la expresión $a^3 x^3 y^3 + 1$:

$$a^3 x^3 y^3 + 1 = (a\,x\,y + 1)\,(a^2 x^2 y^2 - a\,x\,y + 1)$$

Ejemplo 4

De ser posible, factorizar la expresión $(x+1)^3 + (x-1)^3$:

$$\begin{aligned}(x+1)^3 + (x-1)^3 &= ((x+1) + (x-1))\,((x+1)^2 - (x+1)(x-1) + (x-1)^2)\\ &= (2x)\,((x+1)^2 - (x+1)(x-1) + (x-1)^2)\end{aligned}$$

$$(x+1)^3 + (x-1)^3 = (2x)\,((x+1)^2 - (x+1)(x-1) + (x-1)^2)$$

(*si se desea, se puede seguir simplificando*)

Ejemplo 5

De ser posible, factorizar la expresión $(2a - b)^3 - 27$:

$$\begin{aligned}(2a - b)^3 - 27 &= ((2a - b) - 3)\,((2a - b)^2 + 3(2a - b) + 9)\\ &= (2a - b - 3)\,((2a - b)^2 + 3(2a - b) + 9)\end{aligned}$$

$$(2a - b)^3 - 27 = (2a - b - 3)\,((2a - b)^2 + 3(2a - b) + 9)$$

(*si se desea, se puede seguir simplificando*)