Unidad 2

Introducción al álgebra

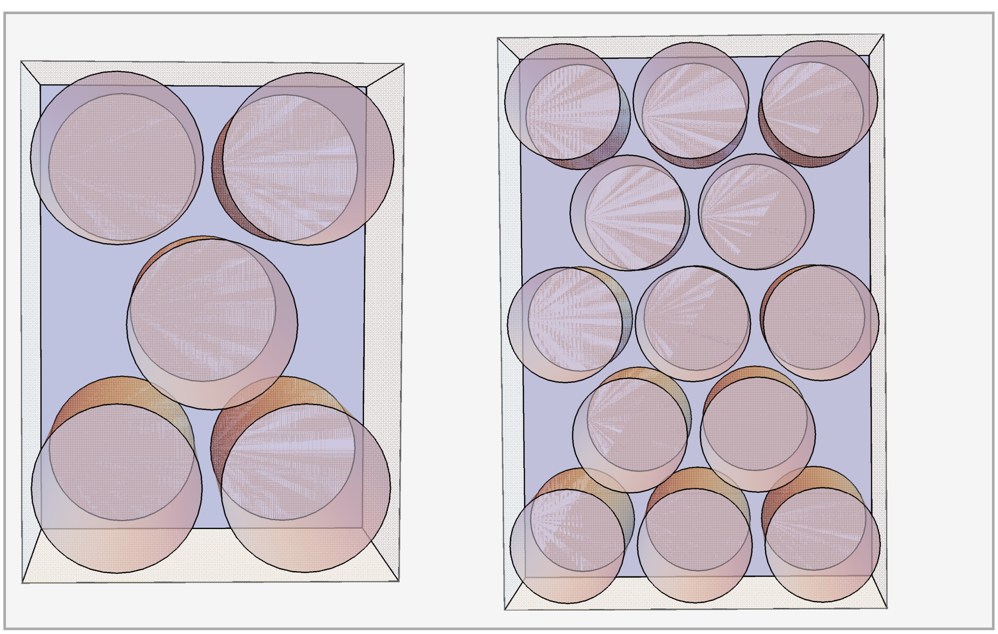
1. Expresiones algebraicas

Actualmente, estudiar matemáticas no tiene como propósito capacitar a las personas en la ejecución de cálculos complejos pues hoy en día existen aplicaciones que realizan estos procesos de manera efectiva y rápida; lo que se pretende a través de su estudio es desarrollar capacidades para organizar, interpretar, discutir, evaluar críticamente y comunicar información matemática presente en diversas situaciones de la vida cotidiana y profesional. En este sentido, iniciarse en el estudio del álgebra lo conllevará a desarrollar la habilidad para interpretar información dada en forma de expresiones algebraicas, así como en la construcción de expresiones que generalicen situaciones presentadas en diversos contextos.
El capítulo inicia con una situación que involucra a la identificación de patrones de repetición, su representación y análisis, procesos necesarios para la construcción de una expresión algebraica que la generalice, haciendo uso de variables.

1.1 Trabajando con expresiones

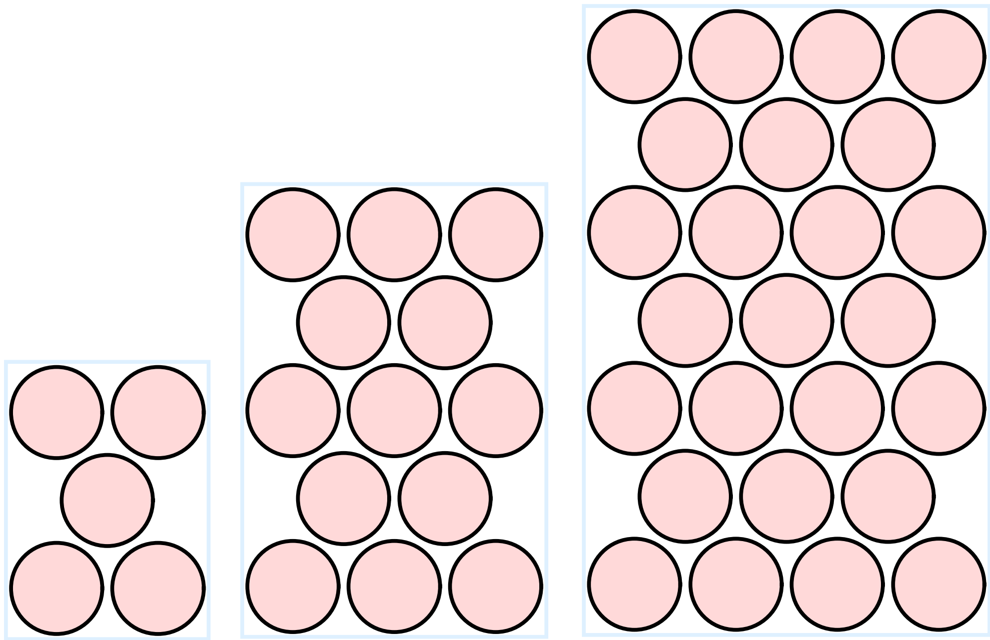
Situación: Fábrica de pinturas

El área de almacenamiento de una fábrica de pinturas ha seccionado el espacio por colores y en cada uno de ellos ha determinado que la forma más adecuada para almacenar las canecas de pintura es hacer arreglos rectangulares como los que se muestran a continuación:



Problema 1

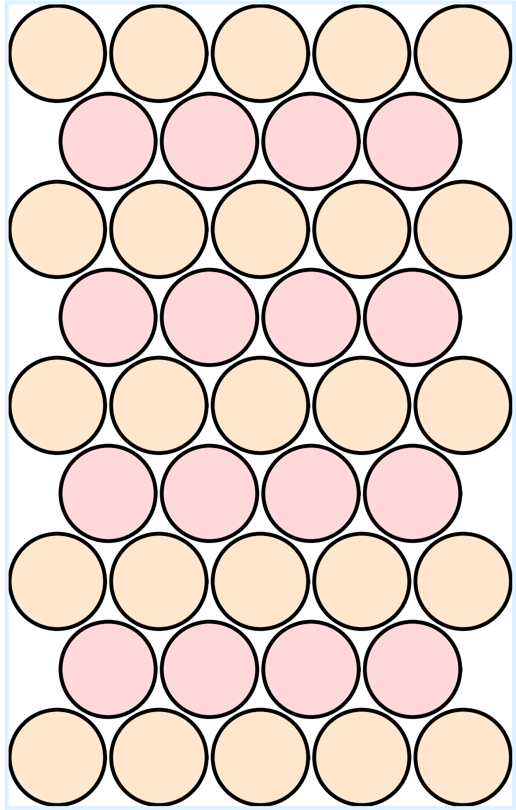
El jefe de almacenamiento entrega a dos operarios la siguiente imagen para que identifiquen la manera en que deben almacenar las canecas de pintura, dependiendo de la cantidad de pintura que produce la máquina semanalmente.



⇒ *Teniendo en cuenta la guía de almacenamiento, ¿cómo sería el siguiente arreglo y cuántas canecas de pintura tendría?*

Solución

Las canecas se organizan en forma intercalada formando un arreglo rectangular. En el siguiente arreglo la base tendrá cinco canecas alineadas, la siguiente fila tendrá cuatro canecas alineadas, la siguiente cinco y así sucesivamente hasta que se completen cinco filas de cinco canecas.



En este arreglo hay cuatro filas con cuatro canecas, es decir $4 \times 4 = 4^2 = 16$ y cinco filas con cinco canecas cada una, $5 \times 5 = 5^2 = 25$. En total hay 41 canecas.

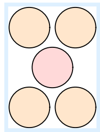
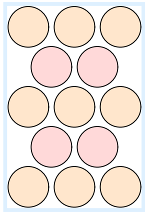
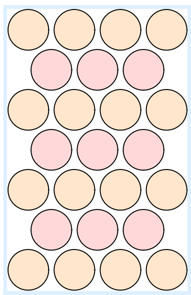
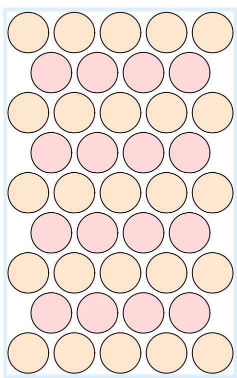
El siguiente arreglo en total tendría 41 canecas.

≪ Respuesta

⇒ *¿Qué haría usted para determinar la cantidad total de canecas de pintura sin tener que hacer un conteo de todas las canecas?*

Solución

Hacer un conteo de las canecas en cada uno de los arreglos puede resultar sencillo cuando hay pocas, el inconveniente está cuando se tienen bastantes y en la empresa necesitan saber de manera rápida el total de canecas almacenadas. La manera en que se realizó el conteo del arreglo anterior puede ser de ayuda para deducir una manera más práctica. Observe en la siguiente tabla la manera en que está organizado cada arreglo:

Arreglo	Número de canecas en cada fila	Número total de canecas
	2 filas con 2 canecas cada una 1 filas con 1 canecas cada una	$2\ 2 + 1\ 1 = 2^2 + 1^2 = 5$
	3 filas con 3 canecas cada una 2 filas con 2 canecas cada una	$3\ 3 + 2\ 2 = 3^2 + 2^2 = 13$
	4 filas con 4 canecas cada una 3 filas con 3 canecas cada una	$4\ 4 + 3\ 3 = 4^2 + 3^2 = 25$
	5 filas con 5 canecas cada una 4 filas con 4 canecas cada una	$5\ 5 + 4\ 4 = 5^2 + 4^2 = 41$

A partir de la tabla anterior, se puede concluir que, si en la primera fila hay 10 canecas, hay el mismo número de filas con esta cantidad y 9 filas con 9 canecas cada una; es decir, en total habrá $10 \text{ x} 10 + 9 \text{ x} 9 = 10^2 + 9^2 = 181$. Si se representa con n la cantidad de canecas que hay en la primera fila, para hallar la cantidad de canecas que hay en total se debe realizar el siguiente cálculo:

$$n^2 + (n-1)^2$$

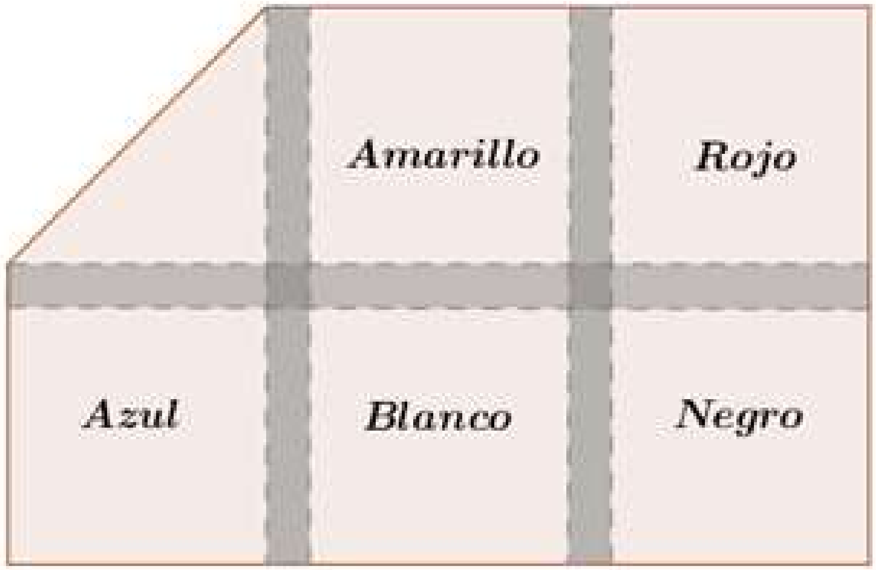
Para determinar el número total de canecas de cualquier arreglo se puede utilizar la expresión algebraica: $n^2 + (n-1)^2$

≪ Respuesta

*La expresión que se acaba de hallar es un ejemplo de una **expresión algebraica** compuesta por dos términos. Debe tener en cuenta que esta no es la única expresión algebraica que representa la situación, tal vez usted tenga otra propuesta que también es válida, solo depende de su habilidad de observación, organización de la información y el establecer relaciones.*

Problema 2

La bodega de almacenamiento está dividida en secciones por cada color básico que se produce semanalmente y una sección en forma triangular para almacenar los otros colores que son preparados según encargo.



La empresa realiza la siguiente producción semanal:

- Se produce la misma cantidad de pintura de color azul y amarillo.
- La cantidad de color rojo es el doble de la cantidad de azul.
- La cantidad producida entre color blanco y negro es el triple de la cantidad de color azul.

⇒ *Suponiendo que la bodega está desocupada, una vez almacenada la producción semanal, ¿qué expresión algebraica permite determinar la producción total semanal de canecas de pintura?*

¿Qué son las expresiones algebraicas y cómo operarlas?

Expresión algebraica | Término algebraico | Términos semejantes | Adición | Multiplicación

Solución

Recuerde que la cantidad de pintura de cada sección está dada por la expresión $n^2 + (n-1)^2$, donde n es el *número de canecas en la primera fila*; por tanto, la cantidad de pintura de cada color se escribe en términos de esta expresión teniendo en cuenta la información dada sobre la producción de cada color.

Se identifica que la producción de cada color está relacionada con la producción del color azul. Por tanto:

- Se produce la misma cantidad de pintura de color azul y amarillo.
  Color azul: $n^2 + (n-1)^2$
  Color amarillo: $n^2 + (n-1)^2$
- La cantidad de color rojo es el doble de la cantidad de azul.
  Color rojo: $2\,(n^2 + (n-1)^2)$
- La cantidad producida entre color blanco y negro es el triple de la cantidad de color azul.
  Colores blanco y negro: $3\,(n^2 + (n-1)^2)$

Para determinar la cantidad total de producción se deben sumar las anteriores expresiones algebraicas, tenga en cuenta que esta producción depende de n (*número de canecas en la primera fila*) de la producción de color azul:

$$\overbrace{n^2+(n-1)^2}^{\text{Color azul}} + \overbrace{n^2+(n-1)^2}^{\text{Color amarillo}} + \overbrace{2\,(n^2+(n-1)^2)}^{\text{Color rojo}} + \overbrace{3\,(n^2+(n-1)^2)}^{\text{Colores blanco } y \text{ negro:}}$$

$$n^2+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+2\,(n^2+(n-1)^2)+3\,(n^2+(n-1)^2)$$

Esta expresión es muy extensa, por lo cual se hace necesario simplificarla lo más posible; para ello, se debe emplear la adición y multiplicación de expresiones algebraicas.

La expresión inicial es:

$$n^2+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+2\,(n^2+(n-1)^2)+3\,(n^2+(n-1)^2)$$

En primer lugar, se pueden resolver los productos $2\,(n^2+(n-1)^2)$ y $3\,(n^2+(n-1)^2)$; aplicando la propiedad distributiva:

$$n^2+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+2\,n^2+2\,(n-1)^2+3\,n^2+3\,(n-1)^2$$

Ahora, se identifican los términos semejantes y se suman:

$$\begin{aligned} & n^2+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+2\,n^2+2\,(n-1)^2+3\,n^2+3\,(n-1)^2 \\ &= n^2+n^2+2\,n^2+3\,n^2+(n-1)^2+(n-1)^2+2\,(n-1)^2+3\,(n-1)^2 \\ &= 7\,n^2+7\,(n-1)^2 \\ &= 7\,n^2+7\,(n-1)^2 \end{aligned}$$

En el segundo término: $7\,(n-1)^2$, se tiene que $(n-1)^2=(n-1)\,(n-1)$, al multiplicar y simplificar queda:

$$\begin{aligned} 7\,n^2+7\,(n-1)^2 &= 7\,n^2+7\,(n-1)\,(n-1) \\ &= 7\,n^2+7\,(n^2-n-n-1) \\ &= 7\,n^2+7\,(n^2-2\,n+1) \\ &= 7\,n^2+7\,n^2-14\,n+7 \\ &= 14\,n^2-14\,n+7 \end{aligned}$$

La expresión que representa la producción total semanal de pintura es:

$$14\,n^2-14\,n+7$$

donde n corresponde al número de canecas de la primera fila del color azul.

« Respuesta

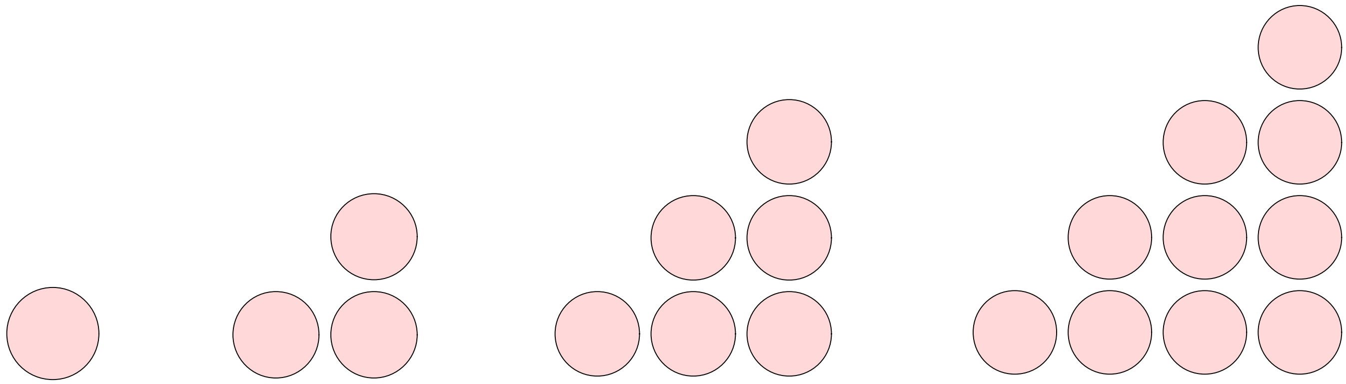
*Aplicar las operaciones de adición y multiplicación de expresiones algebraicas sirve en algunos casos para **simplificar** una expresión muy extensa. Se hace referencia a que es útil en algunos casos, pues en otros el desarrollar los productos conlleva a una expresión más extensa.*

Problema 3

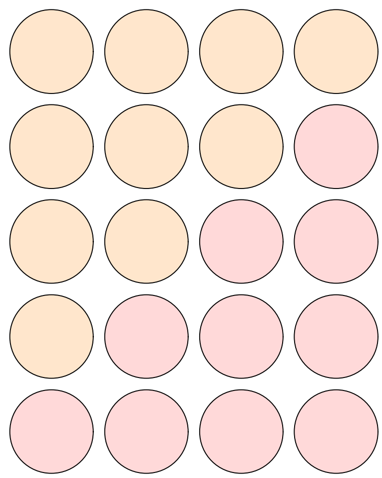
⇒ *Plantee una propuesta de organización de las canecas de pintura para la sección triangular y formule una expresión algebraica para determinar el número de canecas para esa sección de acuerdo con la organización planteada.*

Solución

Una posible organización de las canecas es en forma triangular de la siguiente manera:



Una forma para hallar una expresión algebraica que determine la cantidad de canecas que hay en cada arreglo es completar un rectángulo con cada triángulo, por ejemplo, en el cuarto arreglo se puede colocar la misma cantidad de canecas de la siguiente manera:



De esta forma se crea un arreglo rectangular en el que la cantidad de columnas (4) es una unidad menos que la cantidad de filas (5); por tanto, en el arreglo rectangular hay $4 \times 5 = 20$ canecas, pero se debe tomar solo la mitad dado que el arreglo triangular se repitió dos veces para formar el rectángulo; es decir $\frac{4 \times 5}{2}$. Una expresión general que permite hallar la cantidad de canecas para cualquier valor n (número de canecas en la primera fila), sería:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Recuerde que esta no es la única manera de hallar la expresión algebraica, tal vez usted identificó otro tipo de organización y por tanto otra expresión algebraica a la dada aquí.

La expresión para determinar el número de canecas para la sección triangular es:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

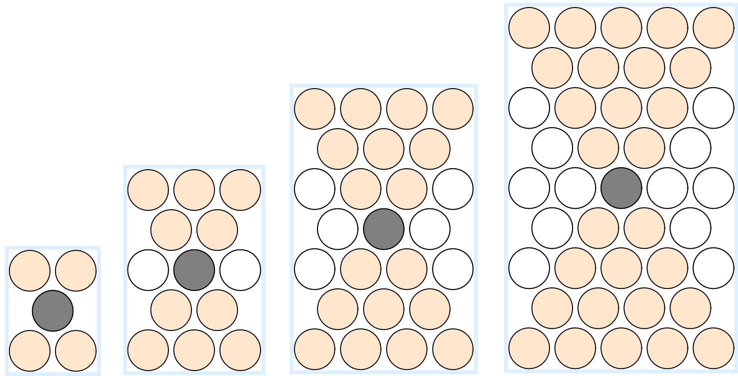
donde n corresponde al número de canecas de la primera fila.

« Respuesta

Problema 4

Utilizando el resultado anterior de la organización triangular de las canecas, un operario revisa de nuevo la organización propuesta para las secciones rectangulares y encuentra que estas también se pueden representar empleando la expresión algebraica del arreglo triangular.

Sobre la guía dada por el jefe hace las siguientes marcaciones:



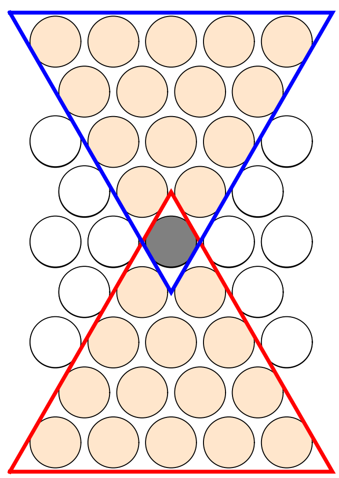
y deduce la siguiente expresión:

$$2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+2\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)\ -1=n(n+1)+(n-2)(n-1)\ -1$$

⇒ *Observe el dibujo realizado por el operario y explique cómo halló la primera expresión.*

Solución

En la figura se observan dos arreglos triangulares (sombreados con naranja claro), pero comparten la caneca del centro.



Por tanto, la expresión que representa la cantidad de canecas que conforman los arreglos triangulares es $2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$, pero como comparten la caneca del centro, se le debe quitar una unidad; es decir:

$$2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-1$$

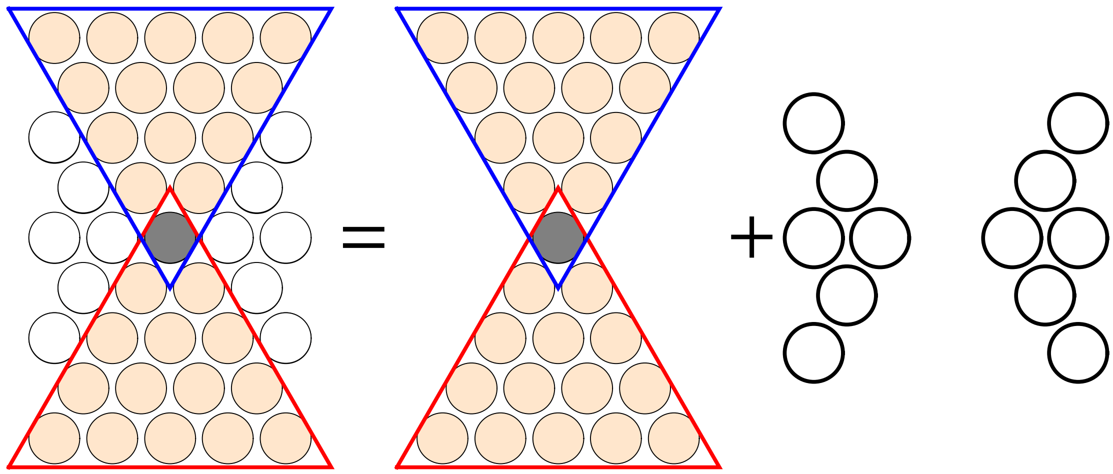
Ahora, al lado izquierdo y derecho (las canecas de color blanco) quedan otros dos arreglos triangulares pero la base de estos triángulos tiene **dos canecas menos** que la base de los triángulos sombreados en naranja, es decir que, en lugar de n, se puede reemplazar por $\boldsymbol{n-2}$, cada arreglo rectangular se puede expresar con:

$$\frac{(\boldsymbol{n-2})((\boldsymbol{n-2})+1)}{2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

como son dos arreglos triangulares (uno a cada lado), esta expresión se multiplica por 2:

$$2\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)$$

Con los resultados anteriores se obtiene:



$$\left(2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-1\right)+2\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right)$$

Que al simplificar queda:

$$2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)-1+2\left(\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right) = n(n+1)+(n-2)(n-1)-1$$

⇒ *¿Es posible simplificar aún más la expresión obtenida?*

Solución

La expresión algebraica $n(n+1)+(n-2)(n-1)-1$ se puede simplificar aún más resolviendo las multiplicaciones y sumando términos semejantes:

$$\begin{aligned} n(n+1)+(n-2)(n-1)-1 &= n^2+n+n^2-n-2\,n+2-1 \\ &= 2\,n^2-2\,n+1 \end{aligned}$$

La expresión $n\,(n+1)-1+(n-2)\,(n-1)$ se puede simplificar completamente en la expresión: $2\,n^2-2\,n+1$

≪ Respuesta

⇒ *La expresión: $n(n+1)+(n-2)(n-1)-1$, tiene alguna relación con la expresión: $n^2+(n-1)^2$ encontrada en el Problema 1?*

Solución

Una relación que existe entre las dos expresiones $n(n+1)-1+(n-2)(n-1)$ y $n^2+(n-1)^2$ es que son una representación algebraica de la misma situación. Esto implica que es posible obtener una expresión a partir de la otra aplicando operaciones en una de ellas. Por ejemplo, si la expresión $n^2+(n-1)^2$ se expande y se simplifica, se obtiene la expresión $2\,n^2-2\,n+1$, observe:

$$\begin{aligned} n^2+(n-1)^2 &= n^2+(n-1)\,(n-1) \\ &= n^2+n^2-n-n+1 \\ &= 2\,n^2-2\,n+1 \end{aligned}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en una expresión se obtuvo la otra expresión, estas se denominan expresiones equivalentes.

Las expresiones $n(n+1)+(n-2)(n-1)-1$ y $n^2+(n-1)^2$ son equivalentes, pues la manera simplificada de ambas es la misma.

≪ Respuesta

⇒ *Si las expresiones $n(n+1)+(n-2)(n-1)-1$, $n^2+(n-1)^2$ y $2n^2-2n+1$ son válidas para representar la cantidad de canecas de pintura por sección, ¿cuál expresión prefiere?, ¿por qué?*

Solución

Por lo general, la expresión que esté más reducida es la más viable manipular, pues implica realizar menos operaciones.

En general, es mejor trabajar con las expresiones simplificadas, por ejemplo con $2n^2-2n+1$

≪ Respuesta

*Dos expresiones algebraicas son **equivalentes** si y solo si es posible establecer una igualdad entre ellas por medio de manipulaciones algebraicas.*

Resumen

A través de la situación y los problemas expuestos se ha identificado que el álgebra, con la manipulación de expresiones algebraicas, permite generalizar, representar y analizar situaciones verbales, gráficas y numéricas. Adquirir la habilidad de asociar una expresión algebraica a una situación implica la práctica de los siguientes procesos:

- Identificar patrones y relaciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras empleando símbolos algebraicos.
- Uso de modelos matemáticos ya establecidos para representar y analizar relaciones cuantitativas.

Las situaciones analizadas solo son un acercamiento al razonamiento algebraico a través del proceso de generalización y el uso de símbolos matemáticos. La práctica en la realización tanto de ejercicios procedimentales como el análisis de situaciones en diversos contextos le facilitará adquirir habilidad en la construcción y en el manejo de expresiones algebraicas; en los capítulos siguientes tendrá que seguir aplicando lo abordado en este capítulo.

Puede descargar el siguiente aplicativo para practicar el uso de expresiones algebraicas

Expresiones algebraicas

Ejercicios de refuerzo

» Ejercicios procedimentales

Identifique los términos de cada expresión algebraica, luego opere y simplifique.

1. $2-3(5x+5)+3x-1$.
2. $2x^3y^2-\frac{3}{5}xy^2-\frac{2}{5}-\left(3x^3+\frac{1}{5}xy^2-5y^2-\frac{7}{5}\right)$.
3. $2-\left(2ab\left(\frac{1}{2}bc-b\right)-1\right)+(2a-3c)\left(\frac{5}{2}b^2-\frac{1}{3}ab^2+2ac\right)$
4. $(-5x+y)3x+7x(-(x-y)(x+y)+(x+y)^2)$

» *Soluciones a los ejercicios*

1. $2-3(5x+5)+3x-1$

   Recuerde que en una expresión algebraica los términos son un producto entre un elemento de un conjunto numérico y símbolos de constante o variable. Por tanto, los términos de $2-3\,(5\,x+5)+\;3\,x-1$ son cuatro: $\overbrace{2}-\overbrace{3\,(5\,x+5)}+\;\overbrace{3\,x}-\overbrace{1}$.

Para simplificar la expresión, se deben resolver en primer lugar las multiplicaciones; luego realizar las sumas o restas entre términos semejantes:

$$\begin{aligned}2-3\,(5\,x+5)+\;3\,x-1 &= 2-3\times 5\,x-3\times 5+\;3\,x-1\\ &= 2-15\,x-15+\;3\,x-1\\ &= -15\,x+\;3\,x+2-15-1\\ &= -12\,x-14\end{aligned}$$

Por tanto $2-3\,(5\,x+5)+\;3\,x-1=-12\,x-14$

2. $2\,x^3\,y^2-\frac{3}{5}\,\text{xy}^2-\frac{2}{5}-\left(3\,x^3+\frac{1}{5}\,\text{xy}^2-5\,y^2-\frac{7}{5}\right)$

Los términos de la expresión dada son cuatro: $\underline{2\,x^3\,y^2}-\underline{\frac{3}{5}\,\text{xy}^2}-\underline{\frac{2}{5}}-\underline{\left(3\,x^3+\frac{1}{5}\,\text{xy}^2-5\,y^2-\frac{7}{5}\right)}$

Al simplificar:

$$\begin{aligned}&2\,x^3\,y^2-\frac{3}{5}\,\text{xy}^2-\frac{2}{5}-\left(3\,x^3+\frac{1}{5}\,\text{xy}^2-5\,y^2-\frac{7}{5}\right)=\\ &2\,x^3\,y^2-\frac{3}{5}\,\text{xy}^2-\frac{2}{5}-\;3\,x^3-\frac{1}{5}\,\text{xy}^2+5\,y^2+\frac{7}{5}=\\ &2\,x^3\,y^2\times-\frac{3}{5}\,\text{xy}^2-\frac{2}{5}\times-\;3\,x^3\times-\frac{1}{5}\,\text{xy}^2+5\,y^2+\frac{7}{5}=\\ &2\,x^3\,y^2\times-\frac{3}{5}\,\text{xy}^2\times-\frac{1}{5}\,\text{xy}^2\times-\;3\,x^3\times+5\,y^2+\frac{7}{5}-\frac{2}{5}=\\ &2\,x^3\,y^2-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)\text{xy}^2-\;3\,x^3\times+5\,y^2+\frac{7-2}{5}=\\ &2\,x^3\,y^2-\left(\frac{3+1}{5}\right)\text{xy}^2-\;3\,x^3+5\,y^2+\frac{5}{5}=\\ &2\,x^3\,y^2-\frac{4}{5}\,\text{xy}^2-\;3\,x^3+5\,y^2+1\end{aligned}$$

Por tanto, $2\,x^3\,y^2-\frac{3}{5}\,\text{xy}^2-\frac{2}{5}-\left(3\,x^3+\frac{1}{5}\,\text{xy}^2-5\,y^2-\frac{7}{5}\right)=2\,x^3\,y^2-\;3\,x^3-\frac{4}{5}\,\text{xy}^2+5\,y^2+1.$

3. $2-\left(2\,a\,b\left(\frac{1}{2}\,b\,c-b\right)-1\right)+(2\,a-3\,c)\left(\frac{5}{2}\,b^2-\frac{1}{3}\,a\,b^2+2\,a\,c\right)$

Los términos de la expresión dada son tres: $\underline{2}-\underline{\left(2\,a\,b\left(\frac{1}{2}\,b\,c-b\right)-1\right)}+\underline{(2\,a-3\,c)\left(\frac{5}{2}\,b^2-\frac{1}{3}\,a\,b^2+2\,a\,c\right)}$

$$2-\left(2\,a\,b\left(\frac{1}{2}\,b\,c-b\right)-1\right)+(2\,a-3\,c)\left(\frac{5}{2}\,b^2-\frac{1}{3}\,a\,b^2+2\,a\,c\right)$$

$$2-\left(2\,a\,b\left(\frac{1}{2}\,b\,c-b\right)-1\right)+(2\,a-3\,c)\left(\frac{5}{2}\,b^2-\frac{1}{3}\,a\,b^2+2\,a\,c\right)$$

$$2-\left(2\,a\,b\times\frac{1}{2}\,\text{bc}-2\,a\,b\times b-1\right)+\left(2\,a\times\frac{5}{2}\,b^2-2\,a\times\frac{1}{3}\,a\,b^2+2\,a\times 2\,a\,c-3\,c\times\frac{5}{2}\,b^2-3\,c\times\left(-\frac{1}{3}\,a\,b^2\right)-3\,c\times 2\,a\,c\right)$$

$$2-(1\,a\,b^2\,c-2\,a\,b^2-1)+\left(5\,a\,b^2-\frac{2}{3}\,a^2\,b^2+4\,a^2\,c-\frac{15}{2}\,b^2\,c+a\,b^2\,c-6\,a^2\,c\right)$$

$$2-a\,b^2\,c+2\,a\,b^2+1+5\,a\,b^2-\frac{2}{3}\,a^2\,b^2+4\,a^2\,c-\frac{15}{2}\,b^2\,c+1\,a\,b^2\,c-6\,\text{ac}^2$$

$$-\frac{2}{3}\,a^2\,b^2+4\,a^2\,c+2\,a\,b^2+5\,a\,b^2-6\,\text{ac}^2-a\,b^2\,c+a\,b^2\,c+\left(-\frac{15}{2}\,b^2\,c\right)+2+1$$

$$-\frac{2}{3}\,a^2\,b^2+4\,a^2\,c+7\,a\,b^2-6\,a\,c^2-\frac{15}{2}\,b^2\,c+3$$

$2-\left(2\,a\,b\left(\frac{1}{2}\,b\,c-b\right)-1\right)+(2\,a-3\,c)\left(\frac{5}{2}\,b^2-\frac{1}{3}\,a\,b^2+2\,a\,c\right)=$

$\frac{2}{3}\,a^2\,b^2+4\,a^2\,c+7\,a\,b^2-6\,a\,c^2-\frac{15}{2}\,b^2\,c+3$

4. $(-5\,x+y)\,3\,x+7\,x(-(x-y)\,(x+y)+(x+y)^2)$

Los términos de la expresión son dos: $\underline{(-5\,x+y)\,3\,x}+\underline{7\,x(-(x-y)\,(x+y)+(x+y)^2)}$

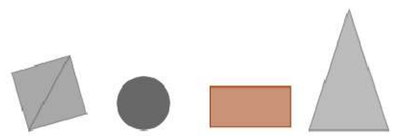
Al simplificar se obtiene:

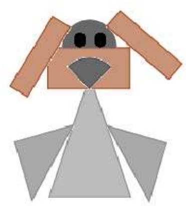
$$\begin{aligned}
&(-5\,x+y)\,3\,x+7\,x(-(x-y)\,(x+y)+(x+y)^2)\\
&=-5\,x\times 3\,x+y\times 3\,x+7\,x(-(x^2-y^2)+x^2+\text{xy}+\text{xy}+y^2)\\
&=-15\,x^2+3\,\text{xy}+7\,x(-x^2+y^2+x^2+\text{xy}+\text{xy}+y^2)\\
&=-15\,x^2+3\,\text{xy}-7\,x^3+7\,\text{xy}^2+7\,x^3+7\,x^2\,y+7\,x^2\,y+7\,x\,y^2\\
&=-15\,x^2+14\,x^2\,y+3\,x\,y+14\,x\,y^2
\end{aligned}$$

Por tanto, $(-5\,x+y)\,3\,x+7\,x(-(x-y)\,(x+y)+(x+y)^2)=-15\,x^2+14\,x^2\,y+3\,x\,y+14\,x\,y^2$

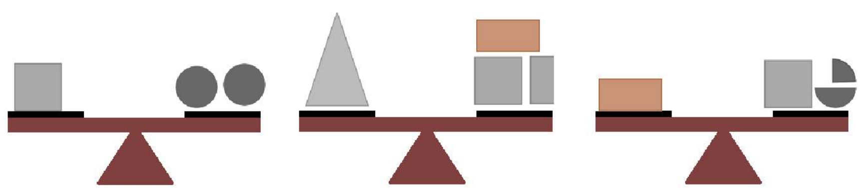
» Problemas de aplicación

Para cada una de las siguientes situaciones determine una expresión algebraica que la represente:

1. La suma entre las dos quintas partes de un número y el triple de su cubo.
2. Una adivinanza: piense un número natural, súmele el número que le sigue, duplique la suma obtenida, luego reste 6, divida a la mitad el resultado. Al resultado anterior reste el número pensado.
3. La siguiente figura se ha creado con las siguientes fichas: 



Determinar una expresión algebraica que represente el peso total de la figura, teniendo en cuenta las siguientes equivalencias:



4. Para determinar el precio de un galón de gasolina se tiene en cuenta los porcentajes que se deben destinar a proveedor, distribuidor, transporte, biocombustible e impuestos nacionales. Teniendo en cuenta que el valor destinado a impuestos nacionales es del 25% y que el porcentaje para transporte es de 6% y el de distribución es del 10%, determine una expresión algebraica que represente el valor destinado a impuestos, distribución y transporte en términos del precio de venta de un galón de gasolina.

» *Soluciones a los problemas de aplicación*

Para cada una de las siguientes situaciones determine una expresión algebraica que la represente:

1. La suma entre las dos quintas partes de un número y el triple de su cubo.

Teniendo en cuenta que no se da un número en particular, se representará con la variable k el número al que se hace referencia. En el enunciado se establece que hay una suma, es decir es la operación principal, ahora se debe identificar qué es lo que se está sumando:

- "*dos quintas partes de un número*": $\frac{2}{5}\,k$
- "*triple de su cubo*": $3\,k^3$

Por tanto, la expresión algebraica es $\frac{2}{5}\,k+3\,k^3$

2. Una adivinanza: piense un número natural, súmele el número que le sigue, duplique la suma obtenida, luego reste 6, divida a la mitad el resultado. Al resultado anterior reste el número pensado.

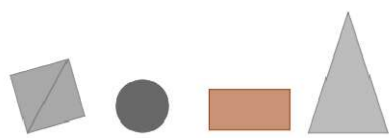
Para hallar la expresión algebraica, el número que se piensa se va a representar con x. Ahora se hara la secuencia indicada:

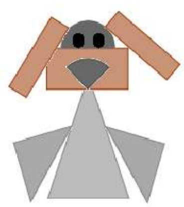
- "*piense un número natural*": x
- "*súmele el número que le sigue*": teniendo en cuenta que x es un número natural, el siguiente se obtiene sumándole 1, por tanto, la expresión de este paso es $x + (x + 1)$.
- "*duplique la suma obtenida*": duplicar hace referencia a multiplicar por 2, por tanto la suma anterior: $x + 1$, debe ser multiplicada por 2, esto es: $2\,(x + (x + 1))$.
- *"luego reste 6"*: $2\,(x + (x + 1)) - 6$.
- "*divida a la mitad el resultado*": la mitad hace referencia a dividir entre dos: $\frac{2\,(x+(x+1))-6}{2}$.
- "*Al resultado anterior reste el número pensado*": $\frac{2\,(x+(x+1))-6}{2} - x$.

La expresión algebraica que representa el proceso de la adivinanza es $\frac{2\,(x+(x+1))-6}{2} - x$. Que simplificada queda:

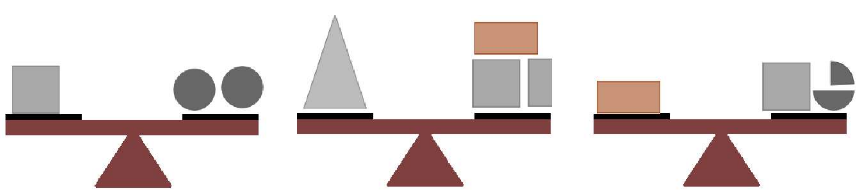
$$\begin{aligned}\frac{2\,(x+(x+1))-6}{2} - x &= \frac{2\,(x+(x+1))}{2} - \frac{6}{2} - x \\ &= \frac{2\,(2\,x+1)}{2} - \frac{6}{2} - x \\ &= 2\,x + 1 - 3 - x \\ &= x - 2\end{aligned}$$

Este proceso permite hallar el resultado total el cual debe saber el adivinador para saber cuál fue el número pensado. Por ejemplo, si el resultado final es 3, el número pensado fue 5.

3. La siguiente figura se ha creado con las siguientes fichas 



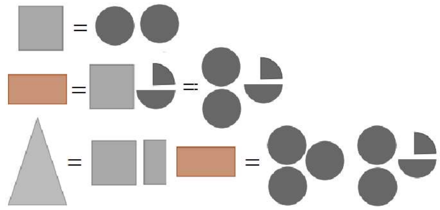
Determinar una expresión algebraica que represente el peso total de la figura, teniendo en cuenta las siguientes equivalencias:



Solución:

Para determinar una expresión algebraica del peso total de la figura, es necesario definir, en lo posible, una variable y así representar los pesos de las figuras en términos de ella.

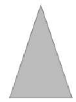
Si se observan las tres balanzas, se reconoce que los pesos del cuadrado, rectángulo, triángulo se pueden expresar en términos del peso del círculo. Esto es:



Ahora, si se representa con la variable$p$ el peso de una ficha , el peso de las demás fichas se puede representar a partir de las siguientes expresiones:

 $= 2\,p$

 $= 2\,p + \frac{3}{4}\,p$

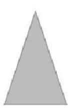
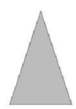
 $= 5\,p + \frac{3}{4}\,p$

Teniendo estas equivalencias, es posible determinar el peso de total de la figura, para ello, se identifica la cantidad de fichas de cada tipo que fueron empleadas:

: $\frac{1}{2}$ en la cabeza y $\frac{1}{4}$ en la nariz, por tanto: $\frac{3}{4}$  $\longrightarrow \frac{3}{4}\,p$.

: Los dos triángulos que represenan los brazos forman 1 cuadrado, por tanto:  $\longrightarrow 2\,p$

: Las dos orejas forman un rectángulo, junto con el rectángulo de la cara se tienen 2 rectángulos, por tanto: 2  $\longrightarrow 2\left(2\,p + \frac{3}{4}\,p\right)$

 : Un triángulo para el cuerpo, por tanto:  $\longrightarrow \left(5\,p + \frac{3}{4}\,p\right)$

Identificadas las cantidades, se determina la expresión final que representa el peso total de la figura:

$$\frac{3}{4}\,p + 2\,p + 2\left(2\,p + \frac{3}{4}\,p\right) + \left(5\,p + \frac{3}{4}\,p\right)$$

Que al simplificar queda:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\,p + 2\,p + 2\left(2\,p + \frac{3}{4}\,p\right) + \left(5\,p + \frac{3}{4}\,p\right) &= \frac{3}{4}\,p + 2\,p + 4\,p + \frac{3}{2}\,p + 5\,p + \frac{3}{4}\,p \\ &= 14\,p\end{aligned}$$

4. Para determinar el precio de un galón de gasolina se tiene en cuenta los porcentajes que se deben destinar a proveedor, distribuidor, transporte, biocombustible e impuestos nacionales. Teniendo en cuenta que el valor destinado a impuestos nacionales es del 25% y que el porcentaje para transporte es de 6% y el de distribución es del 10%, determine una expresión algebraica que represente el valor destinado a impuestos, distribución y transporte en términos del precio de venta de un galón de gasolina.

El costo de un galón de gasolina se va a representar por g.

El porcentaje destinado a impuestos es del 25%, lo cual se puede expresar $\frac{25}{100}\,g$, al simplificar queda $\frac{1}{4}\,g$.

El porcentaje destinado a transporte es del 5%, lo que equivale a $\frac{5}{100}\,g$, al simplificar queda $\frac{1}{20}\,g$.

El porcentaje destinado a distribución es del 10%, lo que equivale a $\frac{10}{100}\,g$, al simplificar queda $\frac{1}{10}\,g$.

Por tanto, la expresión que representa el valor total destinado a impuestos, transporte y distribución de acuerdo con el precio de un galón de gasolina es:

$$\frac{1}{4}\,g + \frac{1}{20}\,g + \frac{1}{10}\,g$$

Al simplificarla se obtiene: $\frac{2}{5}\,g$

2. Factorización

Uno de los elementos fundamentales del álgebra en el desarrollo del pensamiento humano corresponde a la posibilidad que brinda de construir estructuras que generalicen las ideas de este. Esas estructuras permiten crear modelos matemáticos que facilitan la labor de los ingenieros, administradores, economistas, científicos y contadores, entre otros, porque con ellos se pueden hacer proyecciones y predicciones que apoyan la toma de decisiones en diversas situaciones y problemas del mundo real. En esta sección se tratará la factorización con miras al desarrollo de habilidades para el modelamiento matemático, el cual es un método de aprendizaje que parte de una situación alrededor de la cual se pueden generar interrogantes de interés que respondan a la mejora y el aprovechamiento de recursos y procesos, que son factores fundamentales en el día a día tanto del ámbito personal y social como del profesional. Posterior a los interrogantes, se analizarán algunos de ellos y se mostrará cómo la matemática conduce a la creación de modelos.

Contexto: Fabricación de baldosas

Una fábrica especializada en la elaboración de baldosas tiene una sección encargada de recibir diseños de baldosa de acuerdo con las necesidades y gustos de los clientes. Cuando uno de ellos solicita una cotización, debe enviar la **forma de la región a recubrir** y las **dimensiones de esta** para que la sección de diseño junto con producción analice la información y envíe respuesta a la solicitud.

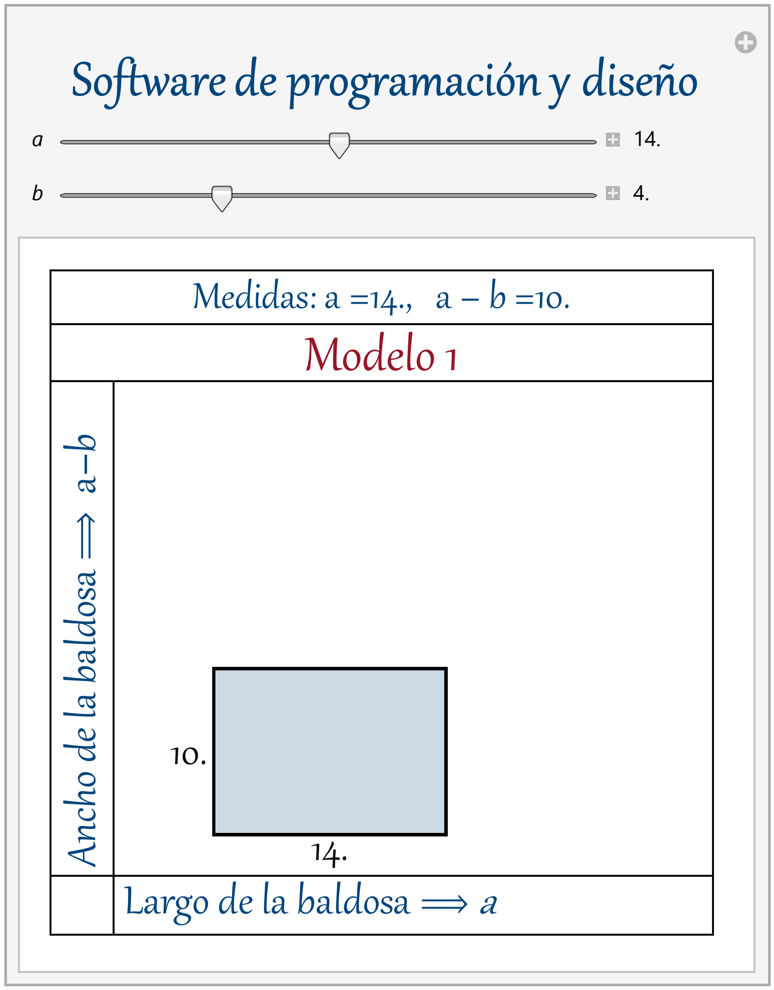
Dado que la fábrica tiene máquinas encargadas de cortar las piezas de baldosa, se tienen unos modelos preestablecidos.

Modelos de Baldosas

» Modelo de baldosa 1:

Una máquina está programada para cortar **baldosas rectangulares** cuyas dimensiones se identifican en el *software de diagramación y diseño* con las letras a y b, con $a \geq b$, tales que **el largo es a** y **el ancho es $a - b$**.

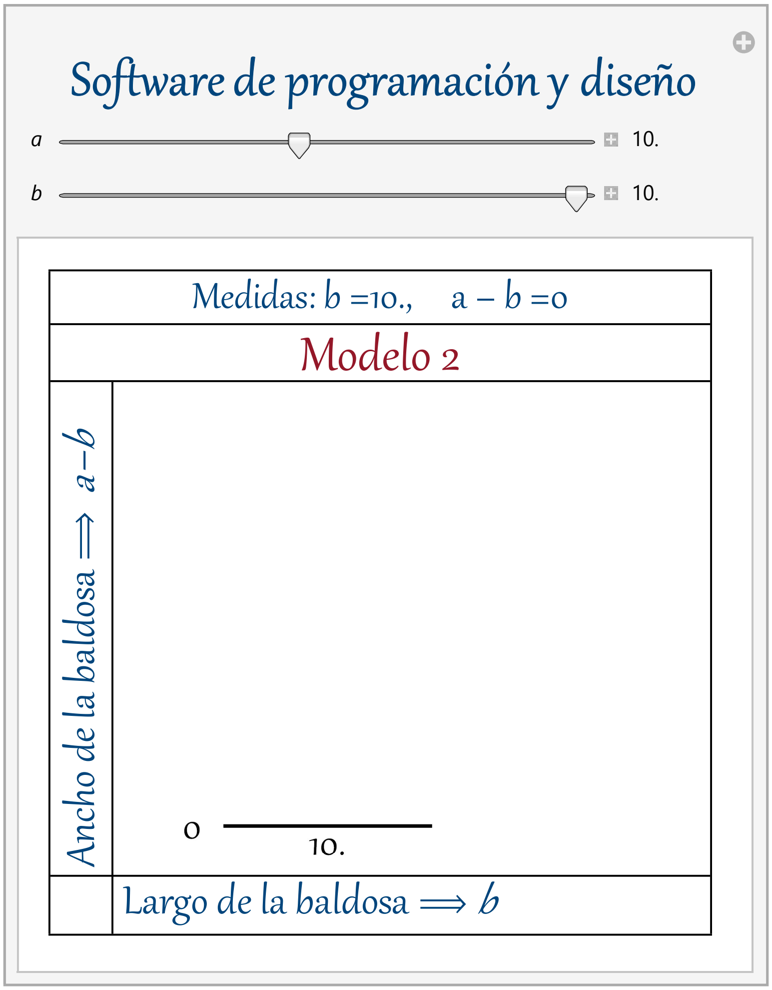
Mueva los deslizadores a y b que aparecen en la parte superior del siguiente interactivo para que observe diferentes tipos de baldosas de este modelo.



» Modelo de baldosa 2:

Otra máquina está programada para cortar **baldosas rectangulares** cuyas dimensiones se identifican en el *software de diagramación y diseño* con las letras a y b, con $a \geq b$, tales que **el largo es *b*** y **el ancho es *a* − *b***.

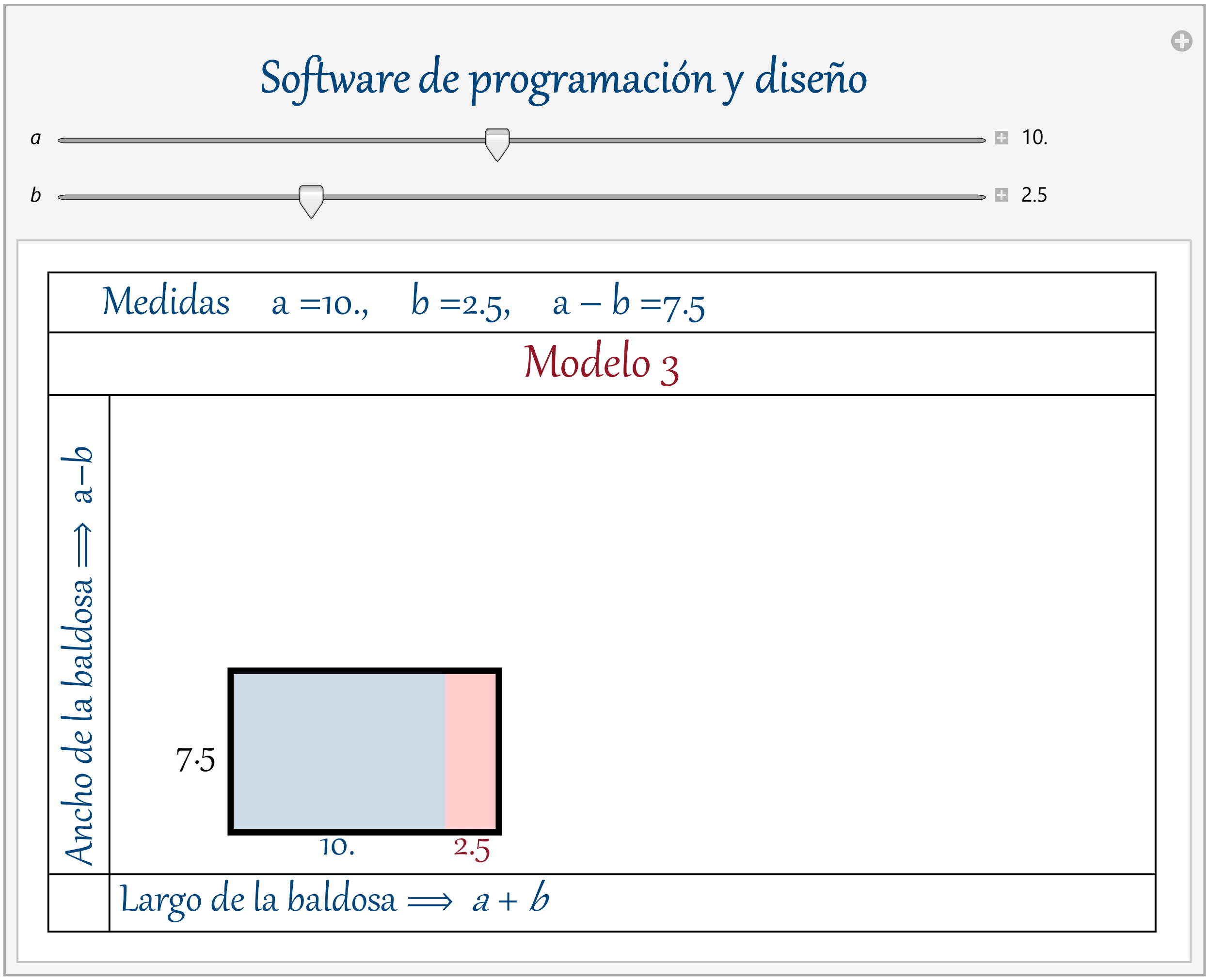
Mueva los deslizadores a y b que aparecen en la parte superior del siguiente interactivo para que observe diferentes tipos de baldosas de este modelo:



» Modelo de baldosa 3:

Otra máquina está programada para cortar **baldosas rectangulares** cuyas dimensiones se identifican en el *software de diagramación y diseño* con las letras a y b, con $a \geq b$, tales que **el largo es $a + b$** y **el ancho es $a - b$**.

Mueva los deslizadores a y b que aparecen en la parte superior del siguiente interactivo para que observe diferentes tipos de baldosas de este modelo.



Con esta situación y cada uno de sus modelos se desarrollará el contenido de este capítulo, cuyo objetivo es identificar el uso y la necesidad de emplear el proceso de factorizar, así como la utilidad de definir estructuras generales para realizarlo.

2.1 Significado de factorizar

¿Qué es factorizar?

La factorización es el proceso mediante el cual se puede abreviar la escritura del cálculo de adiciones y/o sustracciones de términos repetidos; con este y el uso del álgebra, se pueden generalizar expresiones que facilitan la determinación de valores en diversas situaciones del mundo real.

En esta sección se abordará este proceso buscando el reconocimiento de este y su aplicabilidad. Para esto, considere los modelos de baldosas expuestos en el contexto, analice las situaciones, realice las actividades, haga los análisis correspondientes y responda a las preguntas propuestas; con ellas identificará el significado y la utilidad de la factorización.

Tenga en cuenta que en muchas de las situaciones que se expondrán no se indicarán las unidades de medida (centímetros, metros, kilómetros u otras) porque el álgebra permite generalizar sin depender de ellas, de modo que luego el interesado en el modelo pueda analizarlas con las unidades que desee.

Resuelva el problema y responda las preguntas de la sección analizar; con ellas logrará identificar el significado y la necesidad de factorizar.

Situación

Una cotizanción indica que el área a recubrir tiene forma rectangular de dimensiones 35 unidades de largo y 10 de ancho.

⇒ *¿Qué preguntas se podrían plantear en torno a esta situación?*

Solución

Algunas de las preguntas que podrían plantearse en torno a la situación se enuncian a continuación, pero de ellas, unas son significativas y otras, aunque puedan ser poco relevantes, permiten plantear nuevos interrogantes que sí aportan a la situación. Observe.

i. ¿Qué modelos de baldosas se pueden usar para recubrir el área indicada?
ii. ¿Cómo quedaría el recubrimiento del piso con dichos modelos de baldosa?
iii. ¿Cómo se puede determinar si el piso queda o no recubierto con alguno de los modelos elegidos?
iv. ¿Cuál de dichos modelos es la mejor opción y por qué?
v. ¿Con algún modelo se aprovechan mejor los recursos y procesos de recubrimiento?
vi. ¿Cómo podría determinarse?
vii. ¿Existe alguna forma de calcular la cantidad de material empleado en el recubrimiento?

≪ Respuesta

De las anteriores, la pregunta ***i.*** es muy simple de responder, porque se puede usar cualquier modelo de baldosa; la cuestión en realidad gira alrededor de la pregunta: *¿con cuál o cuáles de ellos se aprovecharía al máximo el material, de modo que en términos estéticos el recubrimiento se vea armonioso y agradable?* Para averiguar esto, lo mejor es inspeccionar las alternativas de baldosas que hay y, con ellas, establecer un criterio de decisión respecto a qué usar y cómo recubrir el piso de manera eficiente, eficaz y estética. Esto se puede establecer haciendo uso del álgebra y la factorización; a continuación, se muestra cómo.

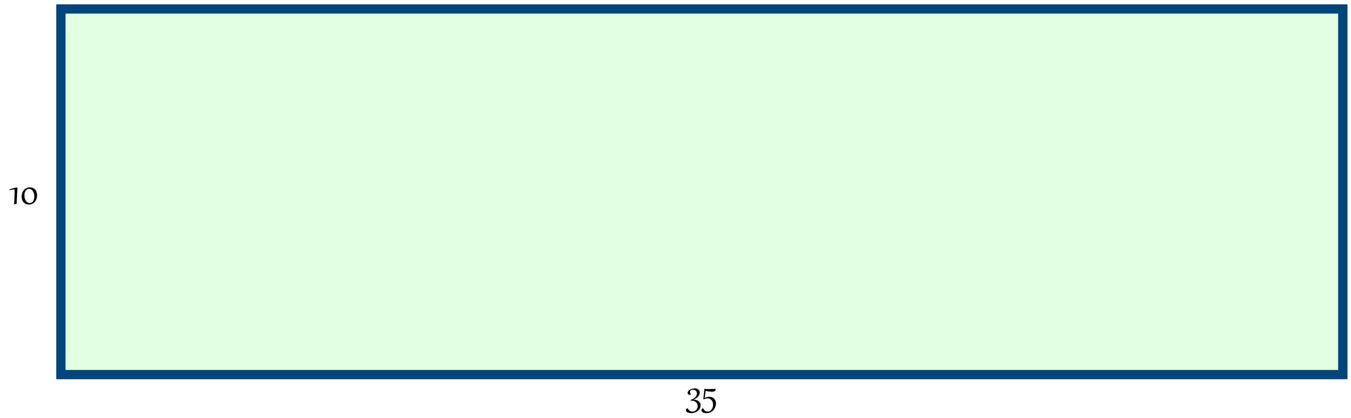
Actividad

Recuerde: el área de una figura plana depende de su forma,
si desea identificarlas hacer clic en el enlace ⇒ Área

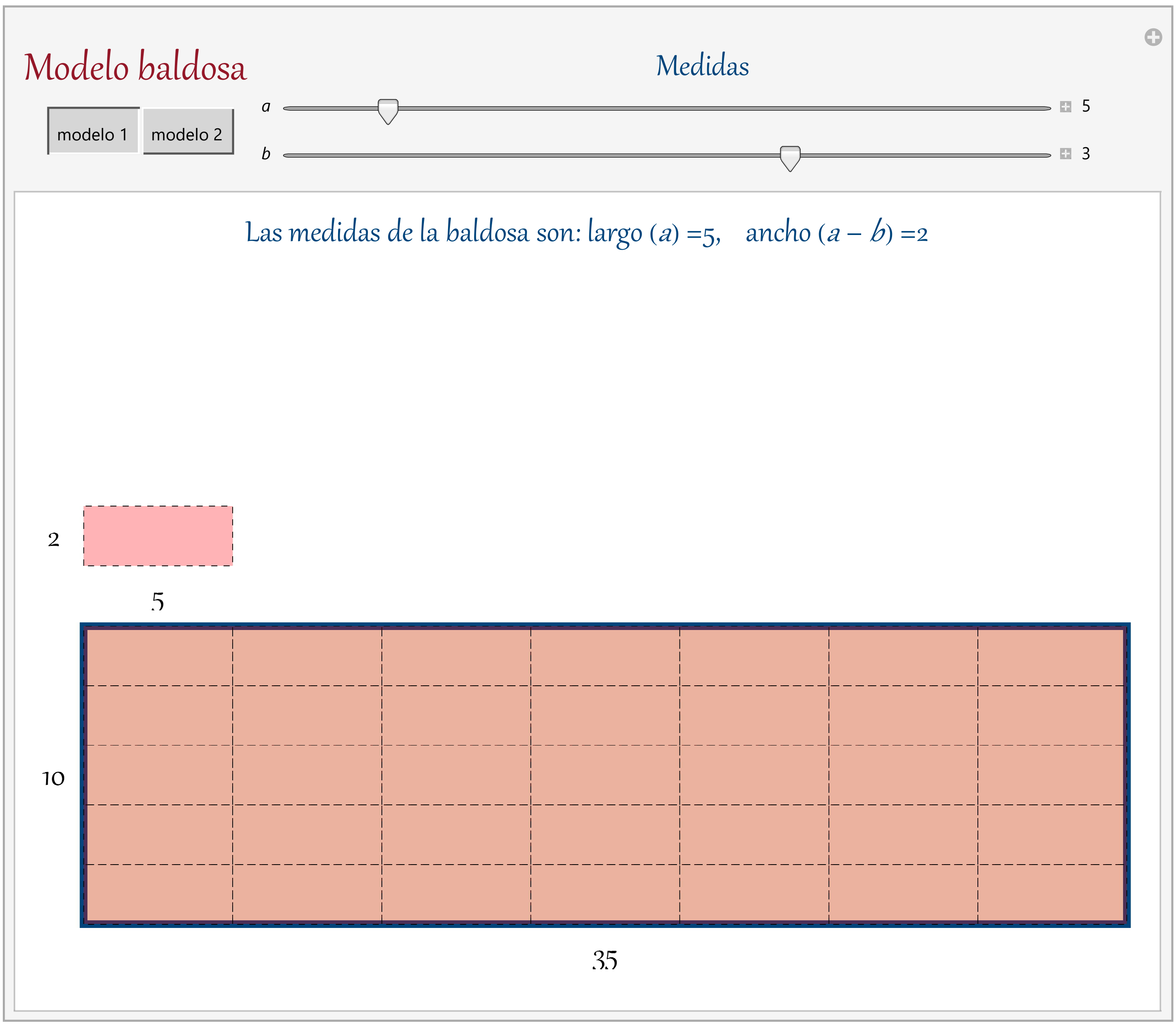
⇒ *Elabore el dibujo del área que se piede recubrir, analice los modelos de baldosas 1 y 2 e identifique algunas opciones de recubrimiento.*

Solución

Para determinar algunas opciones de recubrimiento es necesario identificar el área en la que se trabajará; en este caso es un rectángulo de 35 cm de largo y 10 cm de ancho.



Con esta información se pueden identificar algunas posibilidades de recubrimiento; para corroborar sus propuestas, interactúe con el siguiente recurso y observe qué ocurre si se usa cada uno de los modelos por separado.



⇒ *Mencione como mínimo 2 alternativas con cada tipo de baldosa; en caso de presentar solo una, indique por qué no le es posible determinar otra.*

Solución

Como se observa al emplear el modelo 1, una alternativa es que cada baldosa mida 5 unidades de largo, en cuyo caso $a = 5$ y $b = 4$ unidades, mientras con el modelo 2 una opción es que $a = 11$ y $b = 1$ unidades. Mueva los deslizadores de acuerdo con las medidas dadas e identifique lo que ocurre. Note que se eligieron esas medidas porque un propósito fundamental es el de aprovechar el material y, con este, el área se recubre perfectamente sin desperdiciarlo.

Teniendo identificada la importancia de las medidas para lograr un recubrimiento perfecto, además del elemento físico respecto a cómo se ve, queda el interrogante de cuál es la cantidad de material empleado y para ello es importante reconocer el cálculo del área a recubrir.

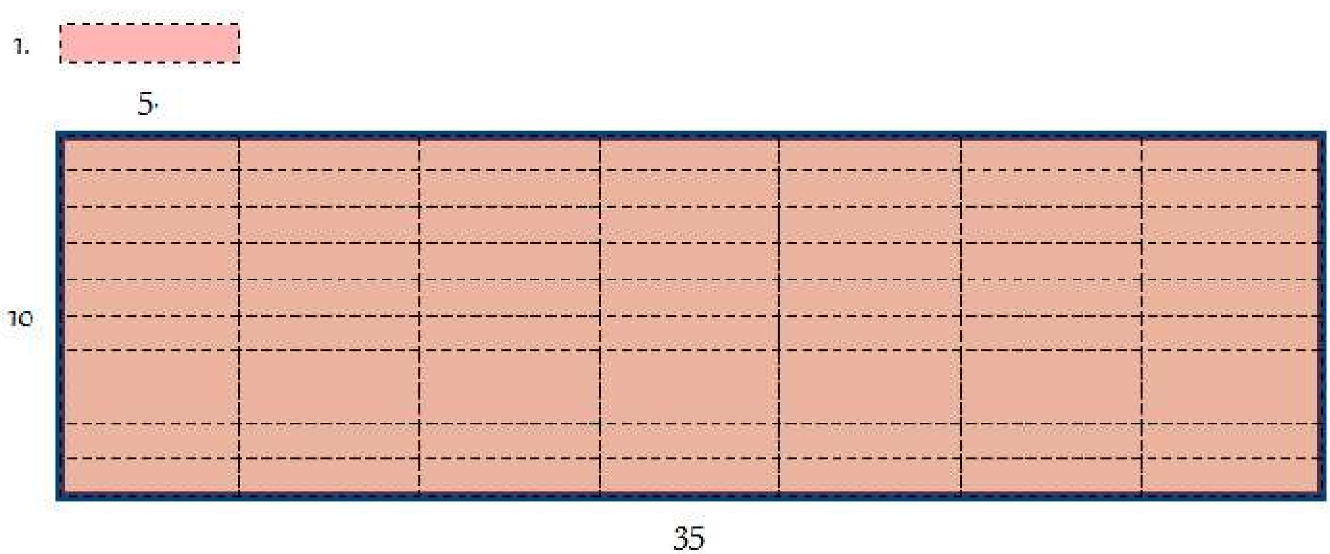
Analizar

Responda los interrogantes.

⇒ *1. Con los valores encontrados en la actividad anterior, ¿cómo escribiría el cálculo del área en términos del área de la baldosa del modelo 1, por medio de una adición?*

Solución

Con el modelo 1, siendo $a = 5$ y $b = 4$, el largo y el ancho de la baldosa serían de 5 unidades y 1 unidad, respectivamente, y la región quedaría como se muestra a continuación:



Así, una opción para representar el cálculo del área a recubrir en términos del área de la baldosa indicada consistiría en adicionar el área de una baldosa tantas veces como fuese necesario hasta cubrir toda la región. Partiendo de la figura, una alternativa sería adicionar 70 veces el valor $(5 \cdot 1)$, que es el cálculo del área de cada baldosa.

Área de la región en términos del área del modelo de baldosa 1:

$$\overbrace{(5\cdot 1)+(5\cdot 1)+(5\cdot 1)+(5\cdot 1)+(5\cdot 1)+(5\cdot 1)+\ldots+(5\cdot 1)}^{70\text{ veces}}$$

≪ Respuesta

⇒ *2. ¿Hay alguna forma de reescribir el anterior cálculo de forma más abreviada?, ¿tal vez con otra operación?*

Solución

El cálculo del área podría abreviarse de varias formas, se mencionarán tres de ellas:

1. Hacia el largo de la región se pueden usar 7 baldosas de área 5 u^2 (unidades cuadradas) y como el ancho de esta es de 10 unidades, se podrían adicionar 10 veces las 7 baldosas de 5 u^2; matemáticamente esto sería:
   Área de la región: $(7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5) + (7 \cdot 5)$.
2. A lo ancho, por su parte, la región se recubre con 10 baldosas de área 5 u^2 y para calcular el área se adicionarían 7 veces las 10 baldosas de área 5 u^2; esto es:
   Área de la región: $(10 \cdot 5) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 5)$.
3. De otra parte, como a lo largo se recubre la región con 7 baldosas de $(5 \cdot 1)$ de área y a lo ancho con 10 de estas, el área total se podría calcular como:
   Área de la región: $7 \cdot (5 \cdot 1) \cdot 10$.

Este último proceso es más corto que los anteriores, en términos de eficiencia, y permite establecer el valor del área total a recubrir en términos del área de la baldosa, por lo que la respuesta al interrogante es que sí hay una forma de reescribir el cálculo del área total de forma abreviada y esta es a través de una multiplicación.

Área de la región: $7 \cdot (5 \cdot 1) \cdot 10\ u^2$

« Respuesta

⇒ *3. ¿Para qué es útil encontrar esa posibilidad de reescritura?*

Solución

Determinar esa opción de reescritura es útil porque reduce los procesos operativos de cálculo y permite abreviar la escritura de operaciones extensas que contengan adiciones de términos repetidos.

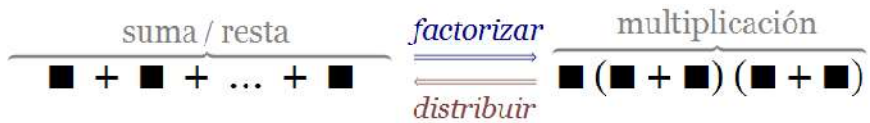
« Respuesta

El hecho de que sea más práctico multiplicar que adicionar evidencia la importancia de la factorización.

Resumen

Factorización

Factorizar es el proceso de **reescribir una adición o sustracción** de dos o más términos **a través de multiplicaciones** lo mas reducidas posibles, es el **proceso inverso** de la distribución en expresiones algebraicas.



Ejemplo 1

Ejemplo 2

Ejemplo 3

La expresión $5+5+5+5+5+5+5+5$ se puede escribir de forma reducida como 5×8

Puede descargar el siguiente aplicativo para practicar

Factorización

Debido a la gran variedad de situaciones que se pueden plantear en diferentes contextos de la vida cotidiana, se han establecido estructuras generales para factorizar, siendo las más utilizadas la de *factor común*, *diferencia de cuadrados*, *trinomio cuadrado*, *diferencia de cubos* y *suma de cubos*.

2.2 Estructuras generales de factorización

Factor común

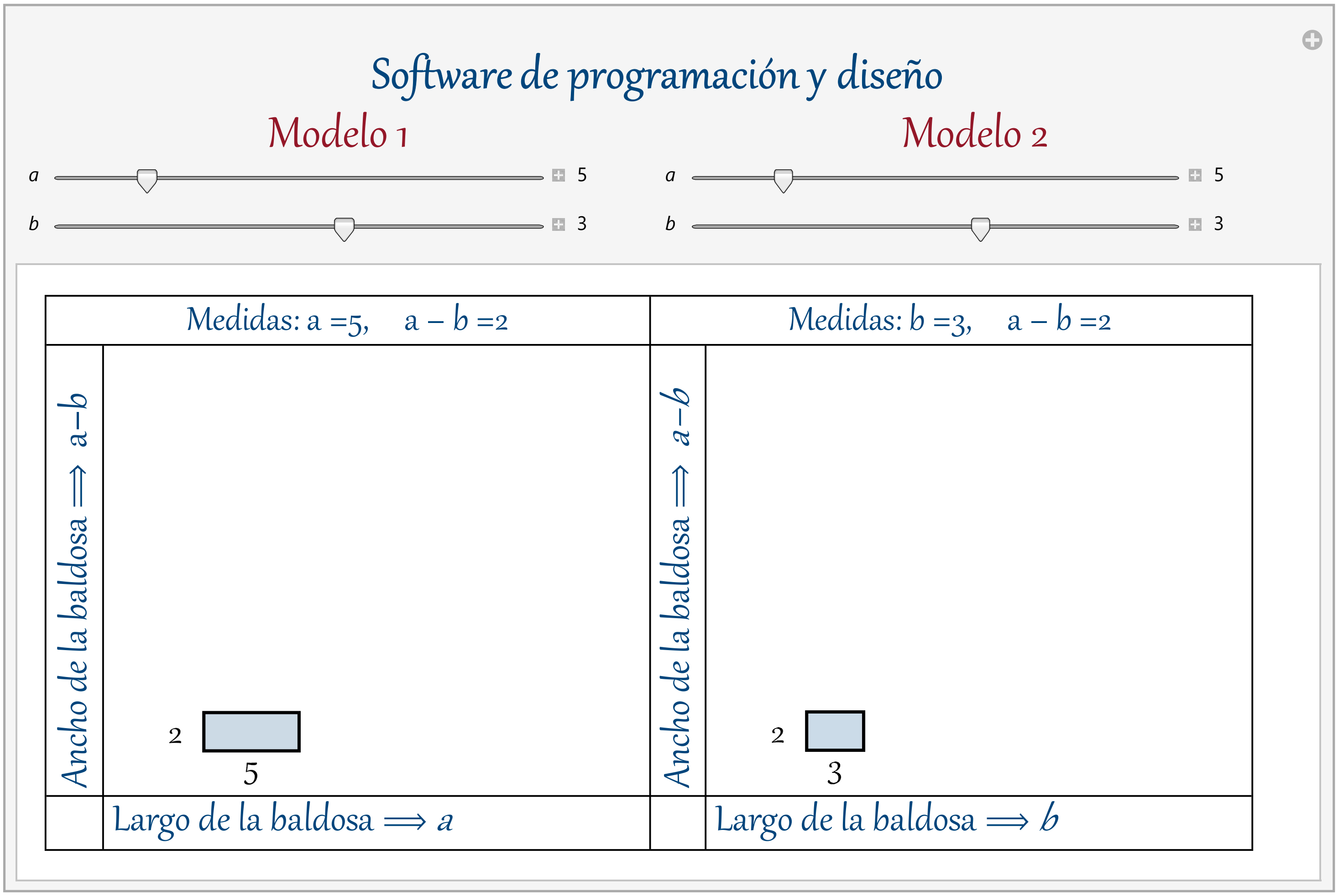
Para comprender esta estructura de factorización es importante reconocer el significado de las palabras que constituyen su nombre. La palabra **factor** hace referencia a los **elementos que constituyen una multiplicación**, por ejemplo, en la operación $2\cdot3$, el 2 y el 3 son los *factores*. La palabra **común** al conjugarse con la palabra factor y el proceso de factorización, indica que este debe aparecer en cada término de la operación dada, pero debe ser el mayor factor posible.

De acuerdo con esto, el proceso de factor común consiste en reescribir una adición y/o sustracción, de modo que uno de los factores sea el mayor factor común a cada uno de los términos y la expresión resultante debe ser la más reducida posible (Pase el mouse encima de la figura para identificar la estructura de factor común).

A continuación se analizará esta estructura.

Analizar

Considere los modelos 1 y 2 de baldosa y responda los interrogantes; para ello, tenga en cuenta que los modelos no deben emplear números, por lo que las dimensiones deben expresarse con las letras que los determinan.



⇒ *1. ¿Con qué expresión calcularía el área de una baldosa del* ***modelo 1 y 2****?*

Solución

- **Modelo 1**: dado que la baldosa mide a de largo y $a - b$ de ancho, el área se expresa como:

$$a(a-b)$$

« Respuesta

- **Modelo 2**: como las dimensiones de este modelo son b y $a - b$, el área se expresa como:

$$b(a-b)$$

« Respuesta

⇒ *2. ¿Qué expresión se obtiene al calcular el área de cada modelo?, ¿qué permite establecer este proceso?*

Solución

- **Modelo 1**:
  Al operar la expresión $a(a-b)$ se obtiene $a^2 - a\,b$, lo cual permite establecer una igualdad entre las expresiones, esto es:

$$a(a-b) = a^2 - a\,b$$

≪ Respuesta

- **Modelo 2**:
  Al operar la expresión $b(a-b)$ se obtiene $b^2 - a\,b$, lo cual permite establecer una igualdad entre las expresiones, a saber:

$$b(a-b) = a\,b - b^2$$

≪ Respuesta

⇒ *3. ¿De qué sirven las igualdades obtenidas?*

Solución

Uno de los momentos de aprendizaje más importantes en la matemática es la comprensión lectora de los resultados obtenidos al realizar operaciones con expresiones algebraicas; en este caso, por ejemplo, realizar las operaciones dio lugar a dos **igualdades** que **permiten reescribir cada miembro de ellas en términos del otro**, es decir, que la expresión $b^2 - a\,b$ da lo mismo que hacer la operación $b\,(a-b)$ (lo mismo ocurre con la otra igualdad).

$$a(a-b) = a^2 - a\,b$$
$$b(a-b) = a\,b - b^2$$

Para hacer una adecuada comprensión lectora se debe reconocer cuál es la estructura de la expresión. En el anterior caso, por ejemplo, había una diferencia de dos términos y uno de ellos era un factor al cuadrado, mientras el otro era la multiplicación del mismo factor, ya no al cuadrado, por un factor diferente. Con esta información, si alguna expresión tiene esa forma se puede aplicar la igualdad para reescribirla como una multiplicación tal que un factor es el mayor común posible y el otro es la resta del no común con el que sí lo es.

Observe una forma de aplicar esta igualdad: si se tiene una expresión como $c^2 - c\,d$, se debe reconocer que ella tiene la estructura del miembro del lado derecho de cualquiera de las igualdades obtenidas, por lo que se puede reescribir de forma abreviada como $c(c-d)$.

Esas igualdades se pueden aplicar en toda expresión que tengan la estructura de alguno de los miembros. Por ejemplo, la expresión $(x-1)^2 - (x-1)\,y$, tiene una estructura como las de los miembros derechos de las igualdades, por lo que se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(x-1)^2 - (x-1)\,y = (x-1)\,(x-1-y)$$

Esta igualdad a su vez define otra igualdad al reordenar los elementos de los factores, observe:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 - (x-1)\,y &= (x-1)\,(x-1-y)\\ &= (x-1)\,(x-y-1)\end{aligned}$$

Esta estructura también se puede aplicar a adiciones, por ejemplo $a\,c + a\,b$ y $a(3-y) + a\,b\,(3-x)$. En ambos casos se cumple que uno de los miembros está en todos los términos, por lo que al aplicar la estructura se obtiene:

$$a\,c + a\,b = a\,(c+b)$$

y

$$a(3-y)+a\,b\,(3-x)=a((3-y)+\ b\,(3-x)).$$

Para la última igualdad, si se opera lo que aparece dentro del corchete se puede establecer otra igualdad más reducida:

$$\begin{aligned} a(3-y)-a\,b\,(3-x) &= a((3-y)+\ b\,(3-x)) \\ &= a(3-y+\ 3\,b\ -3\,x) \\ &= a(3+\ 3\,b\ -3\,x-y) \end{aligned}$$

Note cómo existen múltiples ejercicios que podrían reescribirse según lo indicado por las igualdades, tan solo se debe reconocer la estructura para aplicarla según corresponda.

La igualdad obtenida sirve para reescribir otras expresiones con características similares en términos de sus factores.

≪ Respuesta

Las expresiones vistas hasta el momento son sencillas, ahora se generalizarán para conformar modelos matemáticos más estructurados por medio del proceso de factor común, pero en expresiones un poco más complejas.

Al analizar la expresión $(x-1)^3+(x-1)^2$ se identifica que en los términos (que son $(x-1)^3$ y $(x-1)^2$) hay un factor común que es $(x-1)$, sin embargo, no es el mayor factor común porque en el primero aparece 3 veces y en el segundo aparece 2 veces, luego el mayor factor común es $(x-1)^2$ por estar dos o más veces en cada término.

Reconociendo ese factor se puede aplicar el proceso de factor común y la idea que se obtuvo con las igualdades que arrojaron los modelos de baldosas al calcular sus áreas. Observe:

$$(x-1)^3+(x-1)^2=(x-1)^2\,((x-1)+1)$$

Esta expresión aún no está lo más reducida posible, por lo que se operará no la multiplicación, porque se perdería la factorización, sino lo que aparece dentro del corchete por ser la expresión que no está reducida al máximo.

$$\begin{aligned} (x-1)^3+(x-1)^2 &= (x-1)^2\,((x-1)+1) \\ &= (x-1)^2\,(x-1+1) \\ &= (x-1)^2\,(x) \\ &= x(x-1)^2 \end{aligned}$$

⇒ *4. ¿Por qué son útiles estas igualdades?*

Solución

El establecimiento de la igualdad, que aparenta no tener mucha importancia, es demasiado útil en matemáticas porque permite hacer generalizaciones a través del modelo que presenta, dando la posibilidad de usar la estructura en diversas situaciones. Para comprender esa relevancia, se debe identificar que la igualdad obliga al lector a **reconocer los dos sentidos en que se puede aplicar**, esto es de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

En el caso de los modelos que elabora la máquina del contexto, por ejemplo, esa reescritura es útil porque si con la información enviada por el cliente se determina que cada baldosa debe tener un área de 30 u^2, es más sencillo determinar las dimensiones de la baldosa usando la expresión reducida $a(a-b)$ que la resuelta $a^2-a\,b$, observe:

- *Con la expresión reducida*

  Dos números que multiplicados den 30 son 5 y 6. El número 5 se puede escribir como 6 – 1, por ende, una opción de baldosa está definida cuando $a = 6$ y $b = 1$.

- *Con la expresión resuelta*

  Se deben buscar dos números tales que la resta de uno de ellos al cuadrado con el producto de ellos dé como resultado 30. Un poco más difícil ¿no? Al hacer un proceso de inspección se podría elegir un número pequeño y uno algo mayor para ver el comportamiento de los resultados a fin de identificar si sirven o se acercan: $3^2 - 3(1) = 6$, que está muy lejos y $5^2 - 5(1) = 25 - 5 = 20$, que está más cerca pero no da el valor solicitado para la cotización del cliente. Aunque es posible encontrar los valores, puede llegar a ser un poco más demorado que usar la primera alternativa.

Problema

Si un cliente presenta una cotización con la cual se establece que el área de cada baldosa debe medir $72\ u^2$, ¿qué sería más práctico?

⇒ *¿Usar la expresión $a^2 - a\,b$ para hallar el valor de a y de b? o ¿usar la expresión $a\,(a - b)$ para hallar el valor de a y de b?*

Solución

Las posibilidades de que la resta de dos números dé 72, es mucho mayor que hallar dos números que multiplicados den 72. Con la segunda opción se pueden determinar con mayor facilidad los posibles valores de los tamaños de las baldosas.

El hecho de que $a(a - b)$ sea más práctico que hacer la operación $a^2 - a\,b$ evidencia la importancia de reescribir adiciones y sustracciones a través de multiplicaciones, es decir, de ***factorizar***.

Resumen

Factor común

Las estructuras $a\,b + a\,c = a(b + c)$ y $a\,b - a\,c = a(b - c)$ se conocen con el nombre de **factor común** y se factoriza como se muestra a continuación:

$$\overbrace{\blacksquare\bullet + \blacksquare\blacktriangle + \ldots + \blacksquare\blacktriangledown}^{\text{suma / resta}} \xrightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{\blacksquare(\bullet + \blacktriangle + \ldots + \blacktriangledown)}^{\text{multiplicación}}$$

¿Cómo aplicar el factor común? | Ejemplo 1. | Ejemplo 2.

Ejemplo 1
Ejemplo 2
Ejemplo 3
Ejemplo 4
Ejemplo 5
Ejemplo 6
Ejemplo 7
Ejemplo 8

De ser posible, factorizar la expresión: $b(x - 3) + c\,(x - 3)^2 - 2\,(x - 3)$

$$b\,(x - 3) + c\,(x - 3)^2 - 2\,(x - 3) = (x - 3)\,(b + c - 2)$$

Diferencia de cuadrados

Para comenzar, se reconocerá el significado de las palabras que constituyen el nombre de este proceso. La palabra **diferencia** indica que la expresión debe ser una sustracción y al conjugarla con la palabra **cuadrados**, significa que los términos de la sustracción deben estar al cuadrado.

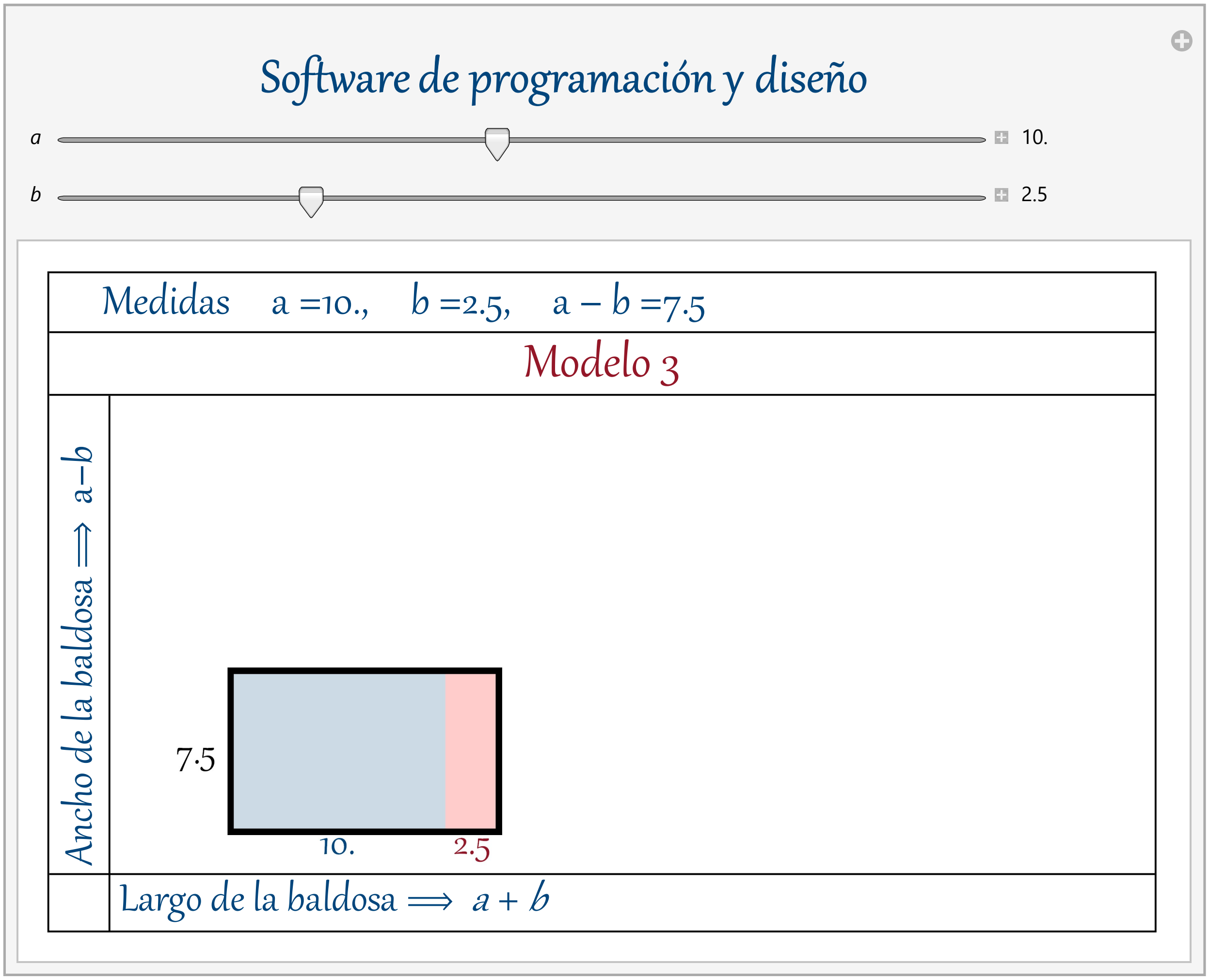
Cabe resaltar que esa condición de cuadrados no necesariamente implica que el exponente sea 2, lo importante en realidad es que a al menos uno de los términos de la sustracción se le pueda sacar raíz cuadrada, la cual no tiene que ser exacta (Pase el mouse encima de la figura para identificar de forma general la estructura).

$$\overbrace{\blacksquare^2 - \bullet^2}^{\text{resta}} \xrightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{(\blacksquare - \bullet)\,(\blacksquare + \bullet)}^{\text{multiplicación}}$$

A continuación se analizará esta estructura.

Analizar

Considere el modelo 3 y responda los interrogantes. Tenga presente que no se deben usar valores numéricos porque la idea es modelar matemáticamente la situación (Se usarán las letras que representan las dimensiones del modelo.)



⇒ *1. ¿Cómo escribiría el cálculo del área a recubrir en términos del área de la baldosa del* ***modelo 3****?*

Solución

Modelo 3: dado que la baldosa mide *a*+*b* de largo y *a* - *b* de ancho, el área se expresa como:

$$(a+b)(a-b)$$

≪ Respuesta

⇒ *2. ¿Qué expresión se obtiene al calcular el área anterior? y ¿qué permite establecer el proceso?*

Solución

Modelo 3: al operar la expresión $(a+b)(a-b)$ se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b)\\ &= a^2-\text{ab}+\text{ab}-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

lo que permite establecer una igualdad entre la expresión inicial y la final:

$$(a+b)(a-b)=a^2-\ b^2$$

≪ Respuesta

3. ¿De qué sirve la igualdad obtenida?

Solución

El establecimiento de la igualdad es útil porque permite reescribir cada miembro de ella en términos del otro. Para comprender esa relevancia, se debe identificar que la igualdad obliga al lector a **reconocer los dos sentidos en que se puede aplicar**, esto es de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

Para el caso de la igualdad $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, la comprensión lectora debe conducir a identificar que multiplicar la suma de dos términos y la resta de los mismos se reduce a sustraer los cuadrados de dichos términos, si se lee de izquierda a derecha, o que la diferencia de los cuadrados de dos términos equivale a multiplicar la suma de las raíces de los términos con la diferencia de esas mismas raíces, si se lee de derecha a izquierda.

Comprender esta igualdad permite hacer generalizaciones y aplicar la estructura en muchas otras expresiones. Por ejemplo, si se tiene una expresión como $3\,y^2 - 4$, ella es una diferencia de los términos $3\,y^2$ y 4 por lo que se puede aplicar la igualdad, para reescribirla como una multiplicación lo más reducida posible. Los pasos para ello consisten en:

1) determinar las raíces de los términos: $\sqrt{3\,y^2} = \sqrt{3}\,y$; $\sqrt{4} = 2$, que equivalen a los valores de a y b que no están al cuadrado en la estructura y,
2) escribir el producto de dos factores: uno con la adición de las raíces de los términos $(a+b)$ y otro con la diferencia de ellos $(a-b)$; que para este ejemplo quedaría expresada así: $(\sqrt{3}\,y + 2)(\sqrt{3}\,y - 2)$.

Otra expresión en la que también se puede aplicar la estructura es $64\,x^6 - 81\,y^2$, como es unq diferencia al sacar la raíz cuadrada de los términos se puede aplicar la igualdad: $\sqrt{64\,x^6} = 8\,x^3$; $\sqrt{81\,y^2} = 9\,y$; con esto se escribe la diferencia como una multiplicación: $(8\,x^3 + 9\,y)(8\,x^3 - 9\,y)$.

La igualdad obtenida sirve para reescribir otras expresiones con características similares en términos de sus raíces.

≪ Respuesta

4. ¿Por qué es útil la igualdad obtenida?

Solución

Suponga que un cliente proporciona las dimensiones de la región a recubrir, 8 de largo y 4 de ancho. Con estas dimensiones, para el fabricante es más útil emplear la expresión factorizada que la sustracción de los cuadrados, porque la máquina corta las baldosas según el valor del largo y del ancho, las cuales corresponden a $a+b$ y $a-b$.

Dado que el área de la región es 32 unidades cuadradas, observe qué pasa si se usa la expresión factorizada o la expandida.

- *Con la expresión factorizada*

  se usarían directamente las dimensiones para calcular el área: $(a+b)(a-b) = 32\,u^2$. Como el largo es 8 y el ancho es 4, se identifica que $a+b = 8$ y que $a-b = 4$. Con esta información se averiguan fácilmente los valores de a y de b; dos valores que cumplen las condiciones son $a = 6$ y $b = 2$.

- *Con la expresión expandida*

  se tendría que ensayar hasta encontrar dos valores para a y b que cumplan que el área sea la mencionada. Algunos de ellos podrían ser: $a^2 - b^2 = 48 - 16 = 32$; $a^2 - b^2 = 56 - 24 = 32$, pero con esos valores las dimensiones de a y de b no darían valores exactos y los cortes de las baldosas en las máquinas requerirían de aproximaciones que provocarían errores de medición o cortes imprecisos.

La igualdad obtenida es útil porque permite hacer cálculos más simples, además de proveer de generalizaciones a través del modelo que presenta, dando con ello la posibilidad de usar la estructura en diversas situaciones.

≪ Respuesta

Problema

Si un cliente presenta una cotización que incluye el uso de ambas baldosas, de modo que el área de la región cubierta por las baldosas debe medir 44 u^2,¿qué sería más práctico?

⇒ *¿Usar la expresión $a^2 - b^2$ para hallar el valor de a y de b? o ¿usar la expresión $(a+b)(a-b)$ para hallar el valor de a y de b?*

Solución

Las posibilidades de que la resta de los cuadrados de dos números dé 44, es mucho mayor que hallar dos números que multiplicados den 44. Con la segunda opción se pueden determinar con mayor facilidad los posibles valores de los tamaños de las baldosas.

Observe uno de los casos que se puede presentar:

$$(a+b)(a-b) = 44$$

$a+b = 22$ y $a-b = 2$.

Con esta información, una alternativa es que a valga 12 y b valga 10.

*El hecho de que $(a+b)(a-b)$ sea más práctico de usar que hacer la operación $a^2 - b^2$ evidencia la importancia de reescribir adiciones y sustracciones a través de multiplicaciones lo más reducidas posible, es decir, de **factorizar**.*

Resumen

Diferencia de cuadrados

A la estructura $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ se le conoce con el nombre de **diferencia de cuadrados.**

$$\overbrace{\blacksquare^2 - \bullet^2}^{\text{resta}} \xRightarrow{\textit{factorizar}} \overbrace{(\blacksquare - \bullet)(\blacksquare + \bullet)}^{\text{multiplicación}}$$

¿Cómo aplicar la diferencia de cuadrados? | Ejemplo 1. | Ejemplo 2.

Ejemplo 1
Ejemplo 2
Ejemplo 3
Ejemplo 4
Ejemplo 5
Ejemplo 6
Ejemplo 7
Ejemplo 8

De ser posible, factorizar la expresión $4x^2 - y^2 + 4x - 2y$:

$4x^2 - y^2 + 4x - 2y$	$=$	$(4x^2 - y^2) + (4x - 2y)$	Agrupando los términos
	$=$	$2x - y)(2x + y) + 2(2x - y)$	Diferencia de cuadrados y factor común
	$=$	$(2x - y)((2x - y) + 2)$	Factor común
	$=$	$(2x - y)(2x - y + 2)$	Simplificando

Trinomio cuadrado

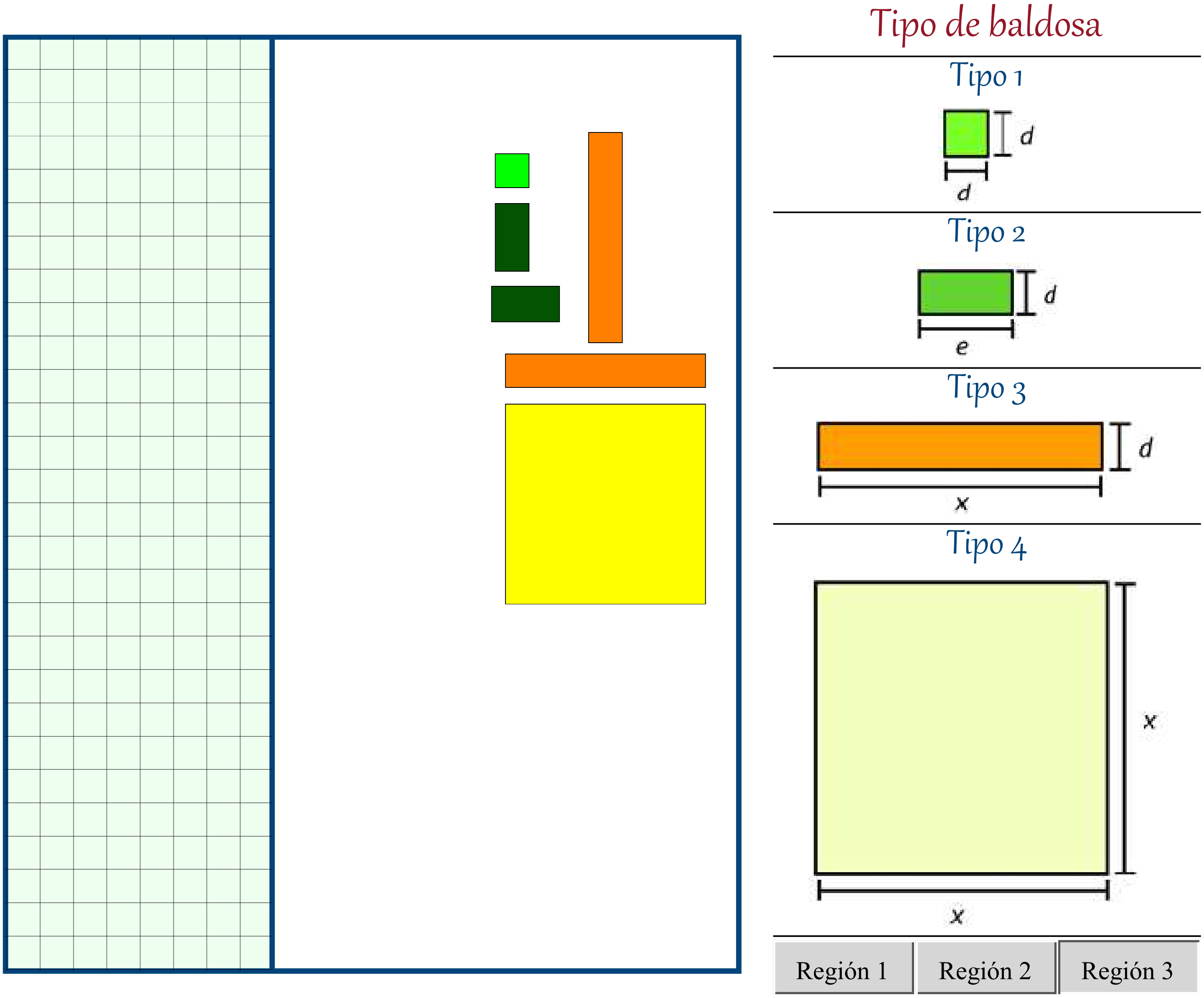
Para comprender esta estructura se reconocerá el significado de su nombre. La palabra **trinomio** indica que la expresión debe tener tres términos y por la palabra **cuadrado**, el mayor exponente de la variable debe ser 2 o un múltiplo de 2, (pase el mouse encima de la figura para identificar la estructura).

$$\overbrace{a \cdot \blacksquare^2 + b\,\blacksquare + c}^{\text{suma / resta}} \xRightarrow[\textit{(no siempre se puede)}]{\textit{factorizar}} \overbrace{(p\,\blacksquare \pm \blacktriangle)(q\,\blacksquare \pm \blacktriangledown)}^{\text{multiplicación}}$$

A continuación se analizará esta estructura.

Analizar

Interactúe con el recurso, establezca algunos modelos de recubrimiento para las regiones dadas arrastrando cada tipo de baldosa de la derecha sobre la región y de acuerdo con ellos.



1. Determine cómo escribiría el cálculo del área de cada recubrimiento.

Solución

Para calcular el área de cada región a recubrir se pueden hacer varios cubrimientos y con el que se ajuste y sea del agrado de quien lo elige se deben identificar el largo y el ancho de la región, para luego escribir la multiplicación de esas dimensiones sin operar. Observe algunas alternativas y efectúe un proceso análogo con el cubrimiento de su elección.

- Región 1

  Para un cubrimiento como el que se observa en la figura 1, los valores del largo y el ancho son $(x+d)$ y $(x+d)$, por lo que el cálculo del área se escribe $(x+d)\,(x+d)$.

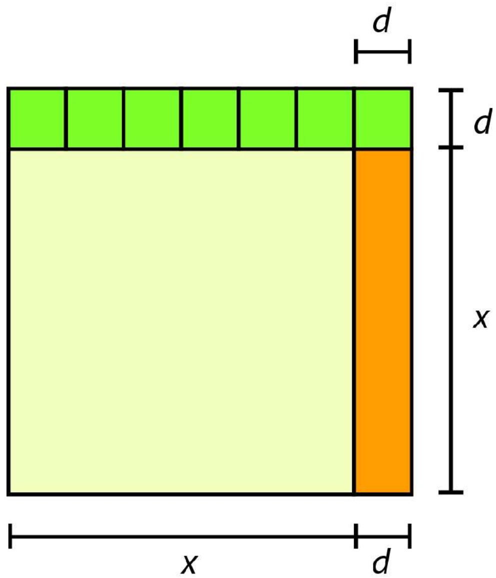


Figura 1. Alternativa de cubrimiento de la región 1.

- Región 2

  Para un cubrimiento como el que se observa en la figura 2, como el largo y el ancho miden $(4\,x + d)$ y $(2\,x + e)$, el cálculo del área se escribe $(4\,x + d)\,(2\,x + e)$.

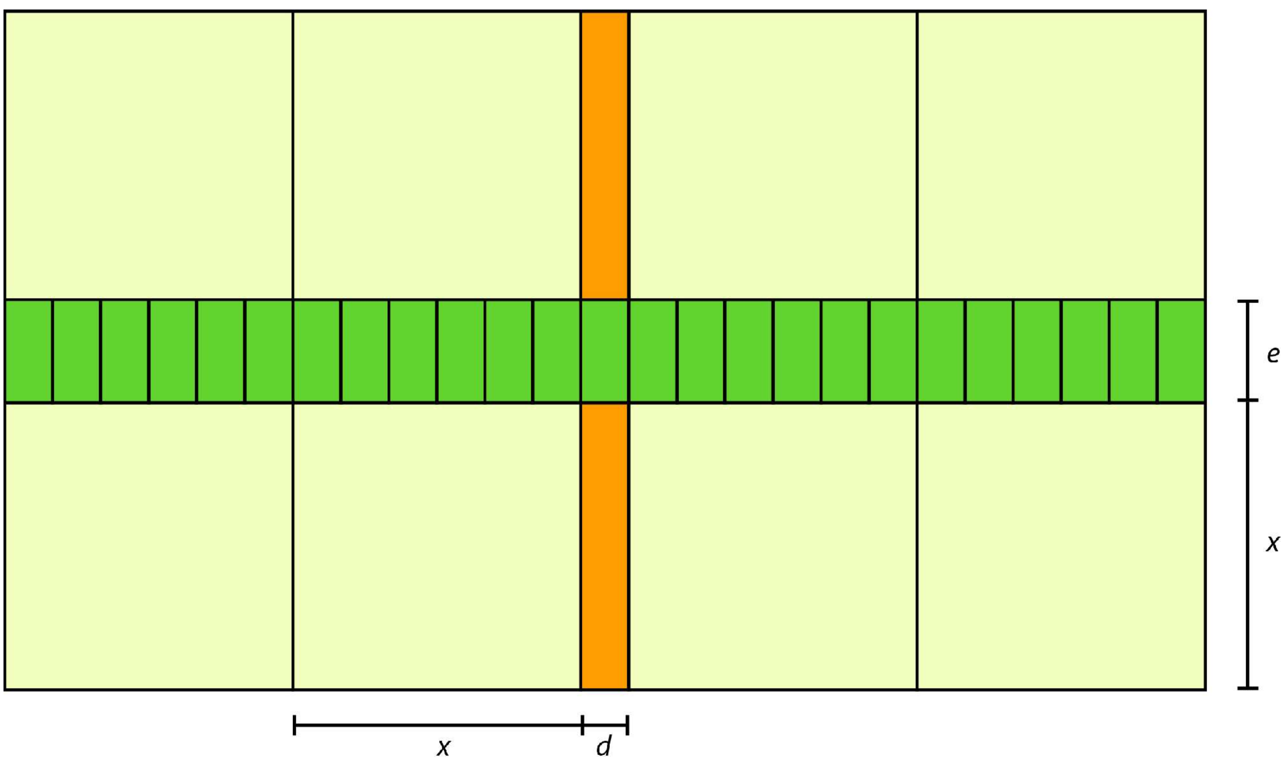


Figura 2. Alternativa de cubrimiento de la región 2.

- Región 3

  Un posible cubrimiento de la región 3 es el que se observa en la figura 3; en ella, el largo de la región mide $(5\,x - 2\,d)$ mientras el ancho mide $(x + e)$. Con estas medidas el cálculo del área se escribe como $(5\,x - 2\,d)\,(x + e)$.

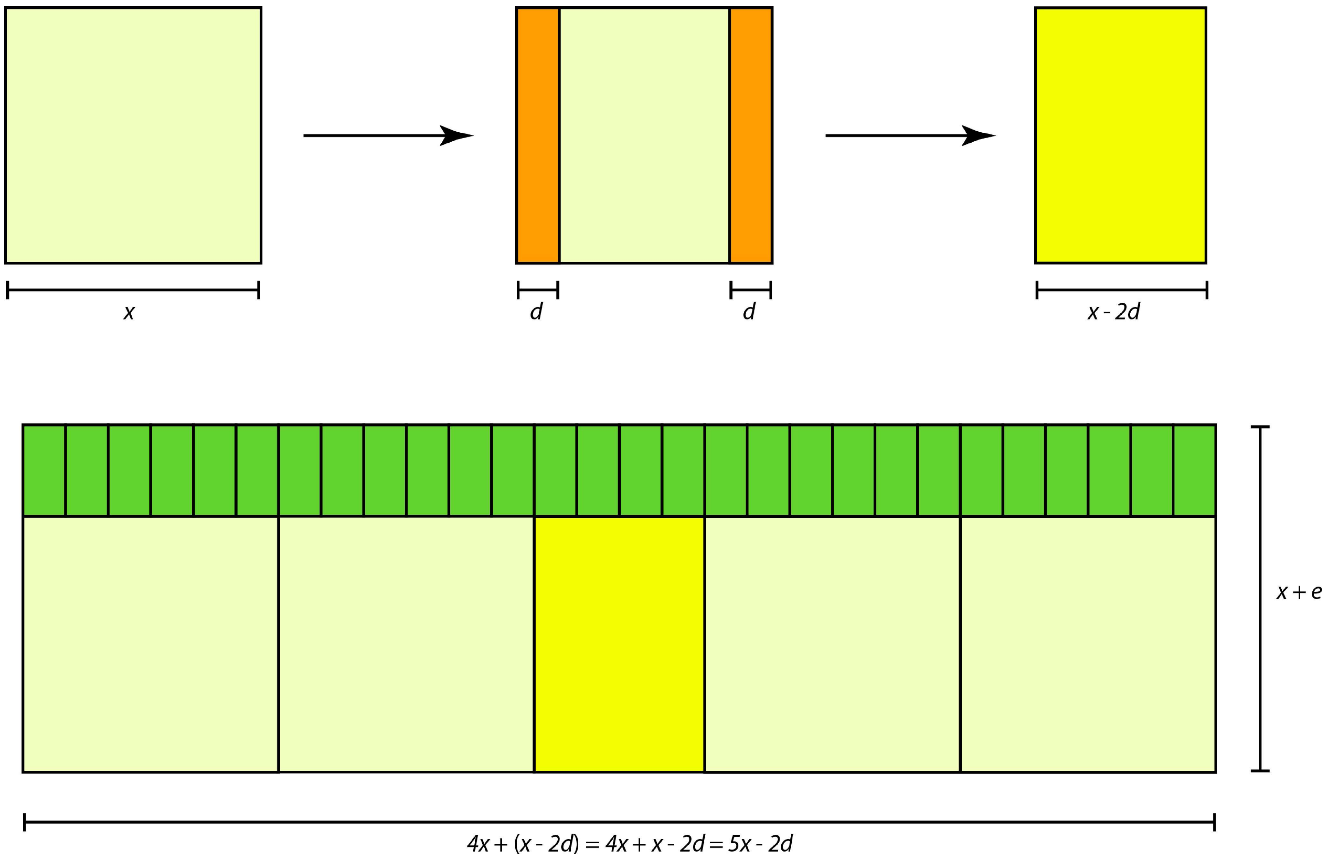


Figura 3. Alternativa de cubrimiento de la región 3.

El cálculo del área de cada región se escribe:

$$(x+d)\,(x+d)$$
$$(4\,x+d)\,(2\,x+e)$$
$$(5\,x-2\,d)\,(x+e)$$

≪ Respuesta

⇒ *2. ¿Qué expresión se obtiene al expandir cada una de las expresiones para las áreas anteriores?*
y, ¿qué permite establecer este proceso?

Solución

Al expandir u operar el cálculo de cada una de las áreas anteriores se obtienen las siguientes expresiones:

- Región 1

$$\begin{aligned}(x+d)\,(x+d) &= (x+d)^2\\ &= x^2+d\,x+d\,x+d^2\\ &= x^2+2\,d\,x+d^2\end{aligned}$$

- Región 2

$$\begin{aligned}(4\,x+d)\,(2\,x+e) &= 8\,x^2+4\,e\,x+2\,d\,x+d\,e\\ &= 8\,x^2+(4\,e+2\,d)\,x+d\,e\end{aligned}$$

- Región 3

$$\begin{aligned}(5\,x-2\,d)\,(x+e) &= 5\,x^2+5\,e\,x-2\,d\,x-2\,d\,e\\ &= 8\,x^2+(4\,e+2\,d)\,x+d\,e\end{aligned}$$

que permiten establecer 3 igualdades para los recubrimientos de las regiones:

$$(x+d)^2 = x^2 + 2\,d\,x + d^2$$
$$(4\,x+d)\,(2\,x+e) = 8\,x^2 + (4\,e + 2\,d)\,x + d\,e$$
$$(5\,x-2\,d)\,(x+e) = 5\,x^2 + (5\,e - 2\,d)\,x - 2\,d\,e$$

≪ Respuesta

⇒

3. ¿Por qué son útiles la igualdades obtenidas?

Solución

El establecimiento de las anteriores igualdades, de nuevo permite hacer generalizaciones por medio de los modelos que ellas generan. Para comprender su relevancia, se deben **reconocer los dos sentidos en que se puede aplicar**, esto es de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

Suponga que un cliente indica que para la región 1 requiere una cotización en la que en la baldosa de dimensiones $x \times d$, el valor de d sea 6 sin importar el valor de x y que el área de la región a cubrir sea $225\,u^2$; de acuerdo con esto, la empresa deberá establecer el valor de x el cual es más sencillo de determinar si se usa la expresión factorizada en lugar de la expresión resuelta, observe:

- *Con la expresión factorizada:*

$$(x+6)\,(x+6) = 225\,u^2$$

$$(x+6)^2 = 225$$

De acuerdo con esto se busca que $x + 6$ al cuadrado sea 225, luego $x + 6$ debe ser 15 ya que su cuadrado es 225.

$$x + 6 = 15$$

En este punto se busca un número que adicionado con 6 dé 15; dicho valor es 9.

$$x = 9$$

Con esta información se le puede indicar al cliente que la tableta cuadrada más grande a diseñar tendría $9\,u$ (unidades que pueden ser centímetros o decímetros, según lo que solicite el cliente) de largo y de ancho, si desea que la angosta tenga $6\,u$ y se recubra un área de $225\,u^2$.

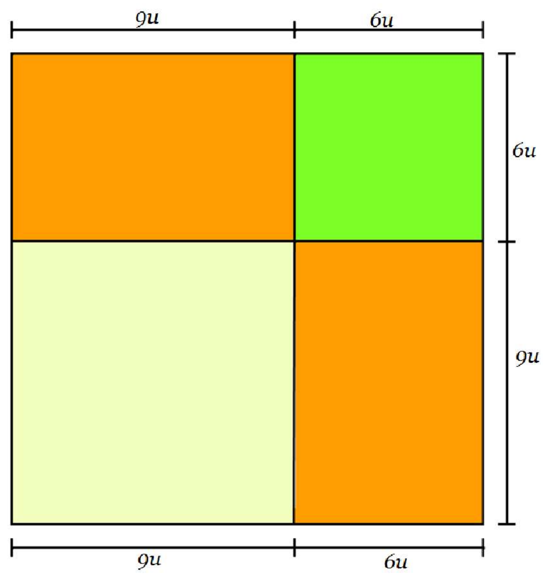


Figura 4. Alternativa de cubrimiento de la región 1 bajo las indicaciones dadas por el cliente.

- *Con la expresión expandida:*

$$x^2 + 2\,d\,x + d^2 = x^2 - 12\,x + 36$$
$$225\,u^2 = x^2 - 12\,x + 36$$

De acuerdo con esto habría que encontrar un valor para x tal que, al sustraerle 12 veces su valor, a su cuadrado, se le adicionen 36 unidades y dé como resultado 225.

Determinar lo solicitado se vuelve complejo y aunque se pueden hacer varias inspecciones bajo la sola intuición, el proceso sería extenso.

Si otro cliente indica que para la región 2 desea que los valores de d y e sean 3 y 5 unidades, respectivamente, para un área de 23 de largo y 15 de ancho, usar la expresión factorizada permite determinar el valor de x con mayor facilidad que con la expresión expandida.

Con la expresión factorizada:

$$(4\,x + 3)\,(2\,x + 5) = 23 \times 15\,u^2$$

Las condiciones de esta cotización implican que:

$4\,x + 3 = 23\,u$, y $2\,x + 5 = 15\,u$. En ambos casos, el valor que satisface las igualdades es 5 por lo que se concluye que $x = 5$.

Con esta información se le puede indicar al cliente que, bajo las condiciones establecidas por él, la tableta cuadrada más grande a diseñar tendría $5\,u$ (unidades que pueden ser centímetros o decímetros, según lo que solicite el cliente) de largo y de ancho, mientras las demás tendrían un área de 3×5 unidades cuadradas, respectivamente.

Debido a lo anterior, el diseño de la región 2 ya no se vería como el de la figura 2 sino como se muestra a continuación.

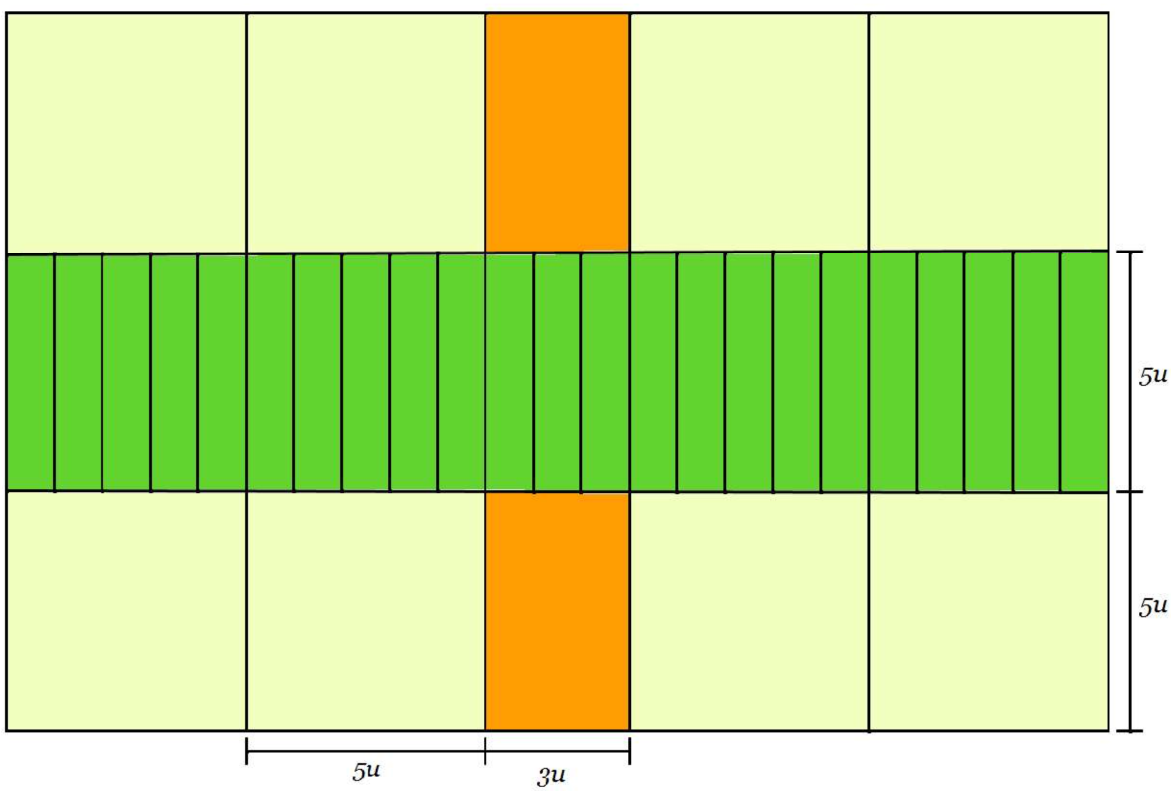


Figura 5. Alternativa de cubrimiento de la región 2 bajo las indicaciones dadas por el cliente.

- *Con la expresión expandida:*

$$8x^2 + (4(5) + 2(3))x + (3)(5)$$
$$= 8x^2 + 26x + 15$$

De acuerdo con esto habría que encontrar un valor para x tal que 8 veces su cuadrado más 26 veces su valor adicionado con 15 dé una región con un área de 23×15 unidades cuadradas.

Con solo observar la instrucción se identifica la dificultad y la necesidad de emplear otro tipo de técnicas matemáticas que permitan hallar el valor de x que cumpla las condiciones, por lo que sería mejor volver con la expresión factorizada.

Si un tercer cliente indica que para la región 3 desea que los valores de d y e sean 3 y 6 unidades, respectivamente, para un área de 64 de largo y 20 de ancho, usar la expresión factorizada permite determinar el valor de x con mayor facilidad que con la expresión expandida.

- *Con la expresión factorizada:*

$$(5x - 6)(x + 6) = 64\times 20\, u^2$$

Las condiciones de esta cotización implican que:

$5x - 6 = 64\,u$, y, $x + 6 = 20\,u$. En ambos casos, el valor que satisface las igualdades es $x = 14$.

Con esta información se le puede indicar al cliente que bajo las condiciones establecidas por él, la tableta cuadrada más grande a diseñar tendría $14\,u$ (unidades que pueden ser centímetros o decímetros, según lo que solicite el cliente) de largo y de ancho, mientras las demás tendrían un área de 8×14 y 8×6 unidades cuadradas, respectivamente, y el diseño se vería según el modelo expuesto de ejemplo:

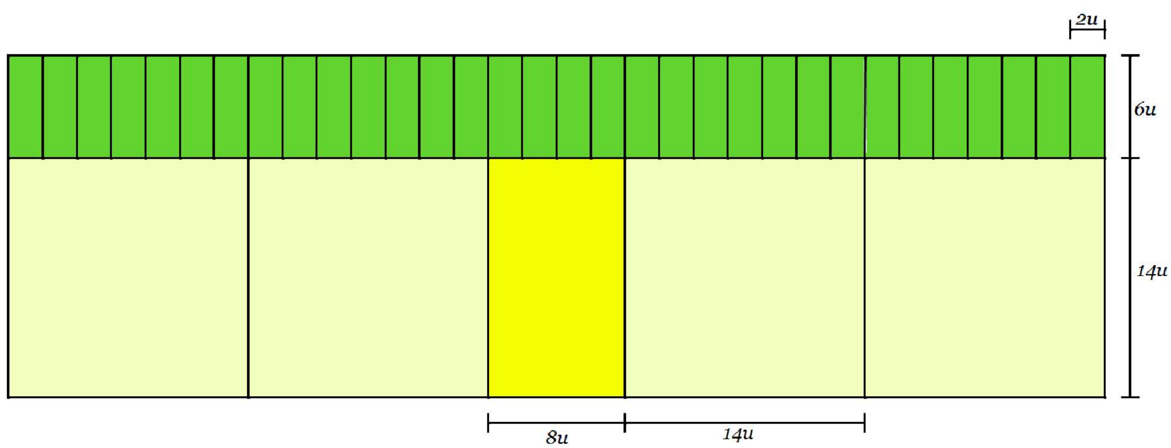


Figura 6 Alternativa de cubrimiento de la región 2 bajo las indicaciones dadas por el cliente.

- *Con la expresión expandida:*

$$5x^2 + (5(6) - 2(3))x - 2(3)(6)$$
$$= 5x^2 + 24x - 36$$

De acuerdo con esto habría que encontrar un valor para x tal que 5 veces su cuadrado más 24 veces su valor sustraído con 36 dé una región con un área de 64×20 unidades cuadradas.

Tal y como ocurrió con el diseño para la región 2, solo observar la instrucción muestra la dificultad y la necesidad de emplear otro tipo de técnicas matemáticas que permitan hallar el valor de x que cumpla las condiciones, por lo que sigue siendo mejor emplear la expresión factorizada.

La igualdad obtenida es útil porque permite hacer generalizaciones por medio del modelo que presenta, dando con ello la posibilidad de usar la estructura en diversas situaciones.

« Respuesta

Problema

Un cliente presenta una cotización en la cual se establece que el área de la región a recubrir mide $30\,u^2$ y desea usar la estructura de la región 3, cuya área se puede calcular con la expresión $5x^2+(5e-2d)x-2de$, o con la factorización $(5x-2d)(x+e)$. Para determinar las dimensiones de las baldosas a usar, sería más simple:

⇒ *¿Usar la expresión resuelta? o, ¿usar la expresión factorizada?*

Solución

Encontrar los valores de x, d y e de modo que $5x^2+(5e-2d)x-2de$, dé 30, es mucho más complejo que hallar dos números que multiplicados den 30 como indica la factorización $(5x-2d)(x+e)$; con esta, se pueden determinar las dimensiones de la siguiente forma.

$$(5x-2d)(x+e)=30$$
$$(5x-2d)(x+e)=2\cdot 3\cdot 5$$

De lo cual se tienen entre las alternativas de diseño, las siguientes condiciones:

Factor	**Factor**	**Multiplicación**
$(5x-2d)=2$	$(x+e)=15$	$(5x-2d)(x+e)=2\times 15=30$
$(5x-2d)=15$	$(x+e)=2$	$(5x-2d)(x+e)=15\times 2=30$
$(5x-2d)=6$	$(x+e)=5$	$(5x-2d)(x+e)=6\times 5=30$
$(5x-2d)=5$	$(x+e)=6$	$(5x-2d)(x+e)=5\times 6=30$
$(5x-2d)=30$	$(x+e)=1$	$(5x-2d)(x+e)=30\times 1=30$
$(5x-2d)=1$	$(x+e)=30$	$(5x-2d)(x+e)=1\times 30=30$

Para cada una de ellas se generan a su vez varias alternativas para las dimensiones que conforman las tabletas. Para la tercera opción, por ejemplo, se puede dar que $d=7$, $e=1$ y $x=4$ unidades de longitud.

*El hecho de que la factorización $(px \pm y)(qx \pm z)$ sea más práctico de usar que hacer la operación $ax^2 + bx + c^2$ evidencia la importancia de reescribir adiciones y sustracciones a través de multiplicaciones lo más reducidas posible, es decir, de **factorizar**.*

Resumen

Trinomio cuadrado

A la estructura $a\,x^2 + b\,x + c = (p\,x \pm \square)(q\,x \pm \diamond)$ se le conoce con el nombre de **trinomio cuadrado**, no siempre es factorizable.

$$\overbrace{a \cdot \blacksquare^2 + b\,\blacksquare + c}^{\text{suma / resta}} \xrightarrow[\text{(no siempre se puede)}]{\textit{factorizar}} \overbrace{(p\,\blacksquare \pm \blacktriangle)(q\,\blacksquare \pm \blacktriangledown)}^{\text{multiplicación}}$$

A continuación se exponen tres métodos de factorización, con sus procesos y ejemplos.

Método 1	Método 2	Método 3
Ejemplo	Ejemplo	Ejemplo

Ejemplo 1 | Ejemplo 2 | Ejemplo 3 | Ejemplo 4 | Ejemplo 5

De ser posible, factorizar la expresión $m^2 - 5\,m - 14$:

$m^2 - 5\,m - 14 =$	$m^2 + \_\_\_\,m - \_\_\_\,m - 14$	Se descompone el término del medio
$=$	$m^2 + 2\,m - 7\,m - 14$	
$=$	$m(m+2) - 7\,(m+2)$	Factor común por agrupación
$=$	$(m+2)\,(m-7)$	Factor común

3. Conclusiones del capítulo

Una de las competencias básicas y fundamentales de los individuos es la planeación; con ella, se busca lograr un objetivo de forma consciente, metódica, lógica, eficaz, eficiente y abreviada. Este es un factor relevante en la vida cotidiana, porque constantemente las personas necesitan hacer planes para resolver cuestiones o problemas desde los más simples hasta los más complejos, de la forma más abreviada posible. Un ejemplo de esto aparece cuando se tienen varias diligencias para realizar en un día, sabiendo que todas deben lograrse y que al no hacerse esto, acarreará problemas; las personas planean su día con base en una organización de desplazamientos y por jerarquía, optimizando su tiempo. Esta idea es la que justamente propone el proceso de factorización en el área de las matemáticas. Pueden existir muchas formas de abreviar procesos, pero los seres humanos siempre buscan aquel que sea más eficiente y efectivo, y la factorización es un medio bastante pertinente para lograrlo, en las matemáticas.

Al hacer uso de la factorización se pueden hacer razonamientos simples, que conduzcan a la solución de una situación particular. En este capítulo se vieron tres procesos: **factor común** (sin y con agrupación), **diferencia de cuadrados** y **trinomio cuadrado**, cuyos propósitos coincidían y correspondían a reescribir expresiones algebraicas a través de productos sencillos, para tomar decisiones en situaciones asociadas a la multiplicación. Estos procesos no son los únicos que existen, algunos son combinaciones de ellos y hay otros dos conocidos con los nombres de **diferencia de cubos** y **suma de cubos**, que aunque en el capítulo no se abordaron, pueden revisarse, aprenderse y aplicarse en la pestaña que aparece en el resumen final del capítulo.

Como el elemento que enmarca los procesos de factorización es la abreviación, existen diversas aplicaciones entre las cuales se encuentra la simplificación de **expresiones algebraicas fraccionarias**. Si se desea profundizar en este aspecto, en la sección que lleva ese nombre se puede consultar.

Para finalizar, se resalta que el aspecto más importante en el aprendizaje de la factorización es su automatización, es decir, en realizar una practica constante de los procesos, de modo que su uso se vuelva automático; con esto, el elemento operativo de las matemáticas se facilita y simplifica significativamente, porque ya no habrá que preocuparse por aprender las técnicas sino que se usarán de forma intuitiva, hasta convertirse en una habilidad propia de quien automatiza los procesos mencionados.

Resumen de capítulo

Factorización	*Factor común*	*Diferencia de cuadrados*	*Trinomio cuadrado*	*Diferencia y suma de cubos*

Factorizar es el proceso de **reescribir una adición o sustracción** de dos o más términos **a través de multiplicaciones** lo mas reducidas posibles, es el **proceso inverso** de la distribución en expresiones algebraicas.

$$\overbrace{\blacksquare + \blacksquare + \ldots + \blacksquare}^{\text{suma / resta}} \underset{\textit{distribuir}}{\overset{\textit{factorizar}}{\rightleftarrows}} \overbrace{\blacksquare(\blacksquare+\blacksquare)(\blacksquare+\blacksquare)}^{\text{multiplicación}}$$

Ejemplo 1

Ejemplo 2

Ejemplo 3

La expresión $5+5+5+5+5+5+5+5$ se puede escribir de forma reducida como 5×8

Puede descargar el siguiente aplicativo para practicar

Factorización

Aplicación: Simplificación de expresiones con fracciones algebraicas

Las fracciones y expresiones con fracciones algebraicas son operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) con términos algebraicos. Algunos ejemplos de ellas son los siguientes.

$$\frac{3\,a\,b}{2\,a^2\,x+2\,a^2} \qquad \frac{x^2-y^2}{x^2+2\,xy+y^2}$$

$$\frac{6\,x^2+3}{42\,x^5-9\,x^3-15\,x} \qquad 2\,a-3\,x-\frac{5\,a\,x-6\,x^2}{5\,a-6\,x}$$

$$\frac{2\,a-3}{3\,a}+\frac{3\,x+2}{10\,x}+\frac{x-a}{5\,a\,x} \qquad \frac{2\,x}{3\,x^2+11\,x+6}+\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{1}{3\,x+2}$$

$$\frac{2}{2\,x^2+5\,x+3}-\frac{1}{2\,x^2-x-6}+\frac{3}{x^2-x-2}$$

Para realizar operaciones o simplificar expresiones con fracciones algebraicas es conveniente usar la factorización. A continuación se expone su uso.

Ejemplos

» Ejemplo 1. Simplificar la expresión: $\frac{3\,a\,b}{2\,a^2\,x+2\,a^2}$

1. Factorice tanto el numerador como el denominador de la fracción algebraica, si es posible o en donde sea posible:

   $3\,a\,b$ — Este término está lo más reducido posible, así que no se puede factorizar.

   $2\,a^2\,x+2\,a^2 = 2\,a^2(x+1)$ — Se aplica el proceso de factor común, que es el conveniente para este caso.

2. Se reescribe la fracción con la factorización realizada:

$$\frac{3\,a\,b}{2\,a^2\,x+2\,a^2}=\frac{3\,a\,b}{2\,a^2(x+1)}$$

3. Se simplifican el numerador y el denominador de la fracción:

$$\frac{3\,a\,b}{2\,a^2\,x+2\,a^2}=\frac{3\,a\,b}{2\,a^2(x+1)}$$
$$=\frac{3\,b}{2\,a(x+1)}$$

4. Se efectúan las operaciones que resulten de la simplificación, si existen.

5. Se verifica que la expresión esté lo más reducida posible: debido a que la fracción se simplificó y no hay más expresiones para operar, se confirma que la expresión está lo más reducida posible.

$$\frac{3\,a\,b}{2\,a^2\,x+2\,a^2}=\frac{3\,b}{2\,a(x+1)}$$

≪ Respuesta

» Ejemplo 2. Simplificar la expresión: $a-3\,x-\frac{5\,a\,x-6\,x^2}{5\,a-6\,x}$

1. Factorice los términos de la expresión, el numerador y el denominador de la fracción algebraica, si es posible o en donde sea posible:

   $a-3\,x$ — Estos términos están lo más reducidos posible, así que no se factorizan.

   $5\,a\,x-6\,x^2 = x(5\,a-6\,x)$ — Se aplica el proceso de factor.

   $5\,a-6\,x$ — Estos términos están lo más reducidos posible, así que no se factorizan.

2. Se reescribe la fracción con la factorización realizada:

$$a-3\,x-\frac{5\,a\,x-6\,x^2}{5\,a-6\,x}=a-3\,x-\frac{x(5\,a-6\,x)}{5\,a-6\,x}$$

3. Se simplifican el numerador y el denominador de la fracción:

$$a - 3\,x - \frac{5\,a\,x - 6\,x^2}{5\,a - 6\,x} = a - 3\,x - \frac{x\,(5\,a - 6\,x)}{5\,a - 6\,x}$$
$$= a - 3\,x - x$$

4. Se efectúan las operaciones que resulten de la simplificación, si existen:

$$a - 3\,x - \frac{5\,a\,x - 6\,x^2}{5\,a - 6\,x} = a - 3\,x - \frac{x\,(5\,a - 6\,x)}{5\,a - 6\,x}$$
$$= a - 3\,x - x$$
$$= a - 4\,x$$

5. Se verifica que la expresión esté lo más reducida posible: debido a que la fracción se simplificó y no hay más expresiones para operar, se confirma que la expresión está lo más reducida posible.

$$a - 3\,x - \frac{5\,a\,x - 6\,x^2}{5\,a - 6\,x} = a - 4\,x$$

« Respuesta

» Ejemplo 3. Simplificar la expresión: $\frac{2\,x}{3\,x^2 + 11\,x + 6} + \frac{x+1}{x^2 - 9} + \frac{1}{3\,x + 2}$

1. Factorice los términos de la expresión, el numerador y el denominador de la fracción algebraica, si es posible o en donde sea posible:

Denominador de la primera fracción:

$3\,x^2 + 11\,x + 6 = 3\,x^2 + \_\_\_\,x + \_\_\_\,x + 6$ Se aplica el proceso de factorización de trinomios.

$= 3\,x^2 + 9\,x + 2\,x + 6$

$= 3\,x(x+3) + 2\,(x+3)$

$= (x+3)\,(3\,x+2)$

Denominador de la segunda fracción:

$x^2 - 9 = (x-3)\,(x+3)$ Se aplica el proceso de diferencia de cuadrados.

Las expresiones restantes: $2\,x$, $x+1$, 1 y $3\,x+2$ ya están lo más reducidas posibles, no se pueden factorizar más.

2. Se reescribe la expresión con la factorización realizada:

$\frac{2\,x}{3\,x^2+11\,x+6} + \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{1}{3\,x+2} = \frac{2\,x}{(x+3)\,(3\,x+2)} + \frac{x+1}{(x-3)\,(x+3)} + \frac{1}{3\,x+2}$.

$$\frac{2\,x}{3\,x^2+11\,x+6} + \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{1}{3\,x+2} = \frac{2\,x}{(x+3)\,(3\,x+2)} + \frac{x+1}{(x-3)\,(x+3)} + \frac{1}{3\,x+2}$$

3. Se simplifican el numerador y el denominador de las fracciones, si es posible: en este caso no lo es, ya que no hay numeradores ni denominadores comunes en cada término. Se debe tener presente que la simplificación se hace término por término y no se pueden cruzar.

4. Se efectúan las operaciones que resulten de la simplificación, si existen: en este caso hay que operar las adiciones de fracciones como se hace con los números.

- Se determina el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$(x+3)\,(3\,x+2),\;\;(x-3)\,(x+3)\;\;\text{y}\;\;3\,x+2$$

Es preciso recordar que el mínimo común múltiplo está constituido por la multiplicación de los factores comunes con el mayor exponente con que aparezcan por los no comunes: $(x+3)\,(3\,x+2)\,(x-3)$.

- Se simplifican los términos de la expresión; esto es, se multiplica y divide cada término de la expresión por y entre el factor o factores que hagan falta en los denominadores, para que sean iguales al mínimo común múltiplo:

$$\frac{2\,x}{3\,x^2+11\,x+6} + \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{1}{3\,x+2} = \frac{2\,x}{(x+3)\,(3\,x+2)} + \frac{x+1}{(x-3)\,(x+3)} + \frac{1}{3\,x+2}$$
$$= \frac{2\,x\,(x-3)}{(x+3)\,(3\,x+2)\,(x-3)} + \frac{(x+1)\,(3\,x+2)}{(x-3)\,(x+3)\,(3\,x+2)} + \frac{1\,(x-3)\,(x+3)}{(3\,x+2)\,(x-3)\,(x+3)}$$

- Como las fracciones se volvieron homogéneas, se adicionan como corresponde (se deja el mismo denominador y se adicionan los numeradores operando primero los términos para reducir las expresiones):

$$\frac{2x}{3x^2+11x+6}+\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{1}{3x+2}=\frac{2x}{(x+3)(3x+2)}+\frac{x+1}{(x-3)(x+3)}+\frac{1}{3x+2}$$
$$=\frac{2x(x-3)}{(x+3)(3x+2)(x-3)}+\frac{(x+1)(3x+2)}{(x-3)(x+3)(3x+2)}+\frac{1(x-3)(x+3)}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{2x(x-3)+(x+1)(3x+2)+1(x-3)(x+3)}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{2x^2-6x+3x^2+2x+3x+2+x^2-9}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{6x^2-x-7}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$

5. Como de nuevo quedó una fracción, se debe intentar factorizar el numerador para ver si es posible simplificar aún más.

$6x^2-x-7=6x^2-\_\_\_x+\_\_\_x-7$ Se aplica el proceso de factorización de trinomios.

$$=6x^2-7x+6x-7$$
$$=x(6x-7)+1(6x+7)$$
$$=(6x-7)(x+1)$$

6. Se reescribe la expresión con la factorización realizada:

$$\frac{2x}{3x^2+11x+6}+\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{1}{3x+2}=\frac{2x}{(x+3)(3x+2)}+\frac{x+1}{(x-3)(x+3)}+\frac{1}{3x+2}$$
$$=\frac{2x(x-3)}{(x+3)(3x+2)(x-3)}+\frac{(x+1)(3x+2)}{(x-3)(x+3)(3x+2)}+\frac{1(x-3)(x+3)}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{2x(x-3)+(x+1)(3x+2)+1(x-3)(x+3)}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{2x^2-6x+3x^2+2x+3x+2+x^2-9}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{6x^2-x-7}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{(6x-7)(x+1)}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$

7. Se verifica que la expresión esté lo más reducida posible: debido a que la fracción se simplificó y no hay más expresiones para operar, se confirma que la expresión está lo más reducida posible.

$$\frac{2x}{3x^2+11x+6}+\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{1}{3x+2}=\frac{(6x-7)(x+1)}{(3x+2)(x-3)(x+3)}$$

« Respuesta

» Ejemplo 4. Simplificar la expresión: $\frac{6x^2+3}{42x^5-9x^3-15x}$

$\frac{6x^2+3}{42x^5-9x^3-15x}=\frac{3(2x^2+1)}{3x(14x^4-3x^2-5)}$ Factor común.

$=\frac{3(2x^2+1)}{3x(14x^4-\_\_\_x^2+\_\_\_x^2-5)}$ Proceso para factorizar trinomios.

$$=\frac{3(2x^2+1)}{3x(14x^4-10x^2+7x^2-5)}$$
$$=\frac{3(2x^2+1)}{3x(2x^2(7x^2-5)+1(7x^2-5))}$$
$$=\frac{3(2x^2+1)}{3x((7x^2-5)(2x^2+1))}$$

$=\frac{3(2x^2+1)}{3x((7x^2-5)(2x^2+1))}$ Simplificación de fracciones.

$\frac{6x^2+3}{42x^5-9x^3-15x}=\frac{1}{x(7x^2-5)}$ Cuando se reduce el numerador completamente siempre se ubica un 1, de lo contrario desaparecería la fracción, lo cual sería incorrecto.

$$\frac{6x^2+3}{42x^5-9x^3-15x}=\frac{1}{x(7x^2-5)}$$

« Respuesta

» Ejemplo 5. Simplificar la expresión: $\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}$

$$\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}=\frac{(2a-3)\,10x}{3a(10x)}+\frac{(3x+2)\,(3a)}{10x(3a)}+\frac{(x-a)\,(2\cdot 3)}{5ax(2\cdot 3)}$$ Mínimo común múltiplo de las fracciones.

$$=\frac{20ax-30x}{30ax}+\frac{9ax+6a}{30ax}+\frac{6x-6a}{30ax}$$ Se opera y se simplifica.

$$=\frac{20ax-30x+9ax+6a+6x-6a}{30ax}$$ Suma de fracciones.

$$=\frac{29ax-24x}{30ax}$$

$$=\frac{x(29a-24)}{30ax}$$ Factor común.

$$=\frac{x(29a-24)}{30ax}$$ Simplificación de fracciones.

$$\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}=\frac{29a-24}{30a}$$

$$\frac{2a-3}{3a}+\frac{3x+2}{10x}+\frac{x-a}{5ax}=\frac{29a-24}{30a}$$ ≪ Respuesta

» Ejemplo 6. Simplificar la expresión: $\frac{2}{2x^2+5x+3}-\frac{1}{2x^2-x-6}+\frac{3}{x^2-x-2}$

$$\frac{2}{2x^2+5x+3}-\frac{1}{2x^2-x-6}+\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{2}{2x^2+\_\_\_x+\_\_\_x+3}-\frac{1}{2x^2-\_\_\_x+\_\_\_x-6}+\frac{3}{x^2-\_\_\_x+\_\_\_x-2}$$

Proceso para factorizar trinomios.

$$=\frac{2}{2x^2+3x+2x+3}-\frac{1}{2x^2-4x+3x-6}+\frac{3}{x^2-2x+1x-2}$$

$$=\frac{2}{x(2x+3)+1\,(2x+3)}-\frac{1}{2x(x-2)+3\,(x-2)}+\frac{3}{x(x-2)+1\,(x-2)}$$

$$=\frac{2}{(2x+3)\,(x+1)}-\frac{1}{(x-2)\,(2x+3)}+\frac{3}{(x-2)\,(x+1)}$$

$$=\frac{2\,(x-2)}{(2x+3)\,(x+1)\,(x-2)}-\frac{1\,(x+1)}{(x-2)\,(2x+3)\,(x+1)}+\frac{3\,(2x+3)}{(x-2)\,(x+1)\,(2x+3)}$$

Mínimo común múltiplo de las fracciones.

$$=\frac{2\,(x-2)-1\,(x+1)+3\,(2x+3)}{(2x+3)\,(x+1)\,(x-2)}$$ Suma de fracciones.

$$=\frac{2x-4-x-1+6x+9}{(2x+3)\,(x+1)\,(x-2)}$$ Simplificación.

$$\frac{2}{2x^2+5x+3}-\frac{1}{2x^2-x-6}+\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{7x+4}{(2x+3)\,(x+1)\,(x-2)}$$

$$\frac{2}{2x^2+5x+3}-\frac{1}{2x^2-x-6}+\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{7x+4}{(2x+3)\,(x+1)\,(x-2)}$$ ≪ Respuesta