Introducción al método de los Elementos Finitos en 2D

Lectura 2, Efs:
Discretizacion e Interpolación en 2D

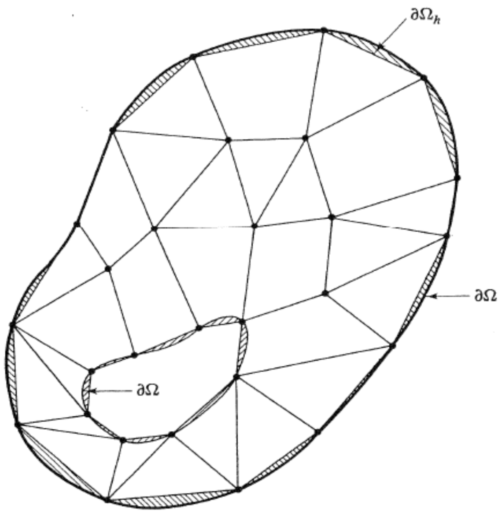
Adaptado por Jaime Puig-Pey (UC) de:

. Zabaras, N. Curso 'FE Analysis for Mech&Aerospace Design'. U. Cornell. 2012.
. Fish, J., Belytschko, T. "A First Course in Finite Elements". Ed. Wiley, 2007.

. La idea básica es representar una función aproximante v_h (ej. la solución aproximada u_h y las funciones de prueba/peso w_h) mediante polinomios definidos a trozos sobre subdominios (triángulos, cuadriláteros, etc.) simples geométricamente , que sean subconjuntos del dominio 2D Ω^h de borde poligonal.

. El conjunto de subdominios cuya unión conjuntista genera el dominio Ω^h se denomina **malla o mallado** del dominio.

. Si el dominio Ω tiene su borde o contorno curvo, siempre se tendrá un error de discretización del dominio, ya que Ω^h no ajustará exactamente con el dominio dado Ω.



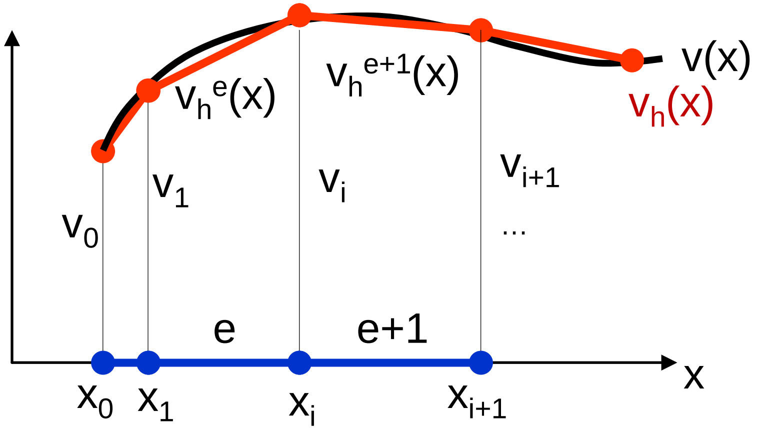
. Sin embargo, mediante refinamiento de malla,

$$\Omega^h \to \Omega$$

. Hay una correspondencia natural entre el número y localización de los puntos nodales o nodos en un elemento y el número de términos usados para la aproximación local.

- Recordemos que la interpolación en 1D de un elemento lineal de 2 nodos, se expresa: $v_h^e = a_1 + a_2 \cdot x$. Puesto que el elemento tiene 2 nodos, los 2 coeficientes se determinan unívocamente a partir de los valores en los nodos de $v_h^e(x_1)$ y $v_h^e(x_2)$.

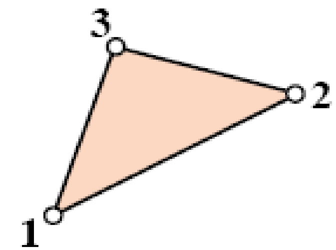
- Con esta aproximación, si exigimos a las funciones $v_h^e(x)$ y $v_h^{e+1}(x)$ en 2 elementos adyacentes que valgan lo mismo en el nodo común, generaremos una función continua $v_h(x)$, poligonal a trozos.



. Qué tipo de aproximaciones polinómicas se pueden utilizar en 2D?
Ejemplos comunes:

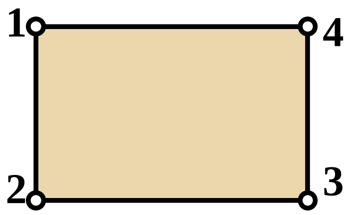
$$v_h^e(x) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

Un triángulo con 3 nodos en los vértices (3 coef.)



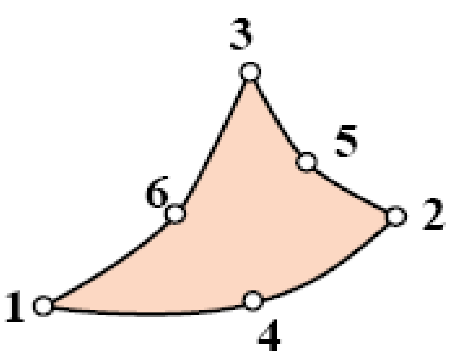
$$v_h^e(x) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy$$

Un rectángulo con 4 nodos en los vértices (4 coef.)



$$v_h^e(x) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2$$

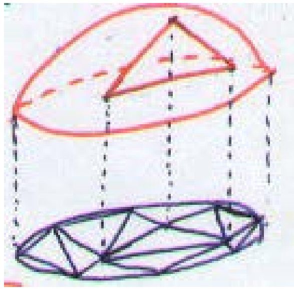
Un triángulo con 1 nodo en cada vértice y 1 nodo en el punto medio de cada lado (total: 6 vértices, 6 coef.)



. Vamos a contruir una función interpoladora $f_h(x,y)$ a una función $f(x,y)$ en un dominio Ω del modo siguiente (el subíndice h hace referencia a que $f_h(x,y)$ está definida a trozos en que interviene la magnitud h):

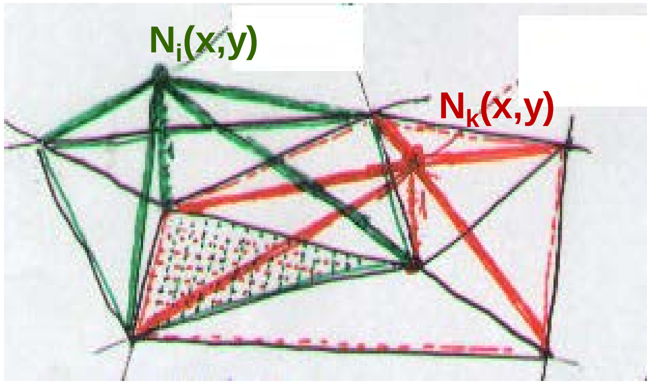
* siendo n el número de nodos en Ω^h y f_i el valor de $f(x,y)$ en (x_i,y_i), coordenadas del nodo genérico i en la malla de elementos finitos:

$$f_h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot N_i(x,y)$$



. Las funciones base $N_i(x,y)$ se definen de modo que:

$$N_i(x_j,y_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$$ delta de Kronecker



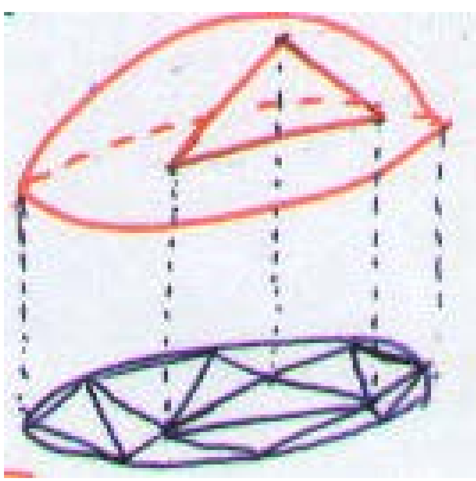
. Con esta definición, observar que:

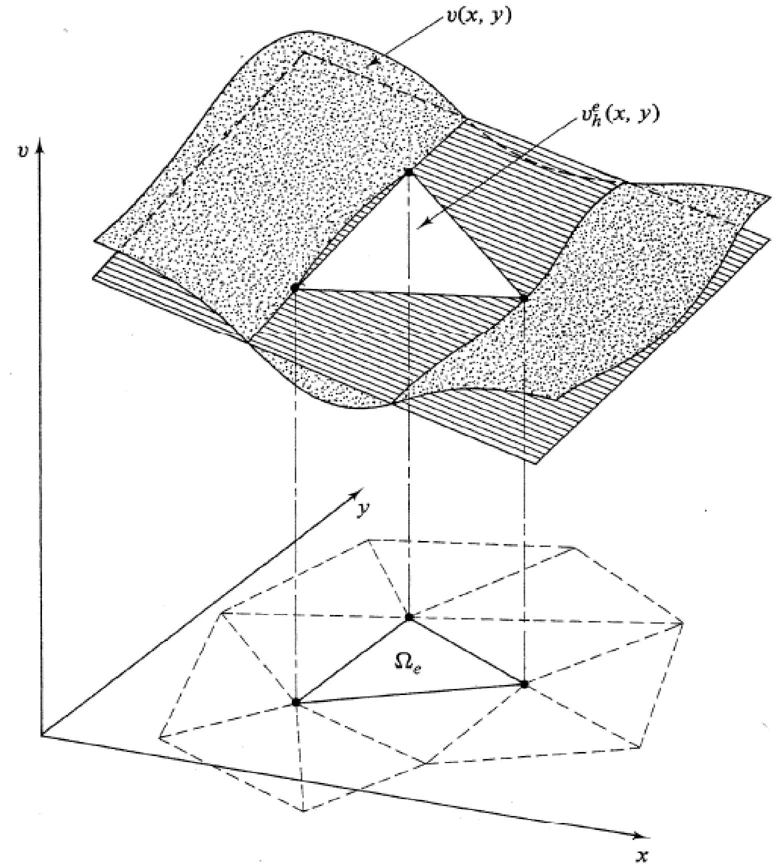
$$\boxed{f_h(x_j,y_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot N_i(x_j,y_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \delta_{ij} = f_j}$$

Considérese que el dominio Ω^h está formado por E elementos triangulares Ω_e y que realizamos una interpolación lineal sobre cada elemento triangular.

$$v_h^e(x,y)=a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot y$$

. Los 3 valores de v_h^e sobre los vértices de Ω_e determinan un plano que interpola a la superficie v(x,y) en 3 puntos

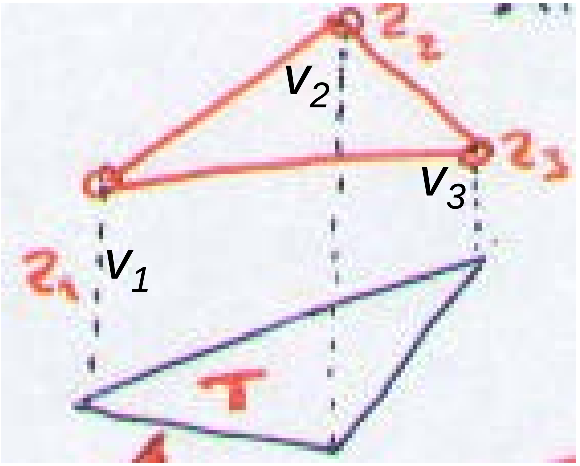




$$v_h^e(x,y)=a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot y$$

. Los 3 coeficientes se determinan imponiendo las 3 condiciones de interpolación:

$$v_1 \equiv v_h^e(x_1,y_1)=a_1+a_2x_1+a_3y_1,$$
$$v_2 \equiv v_h^e(x_2,y_2)=a_1+a_2x_2+a_3y_2,$$
$$v_3 \equiv v_h^e(x_3,y_3)=a_1+a_2x_3+a_3y_3,$$



. Resolviendo el sistema:

$$a_1=\frac{1}{2A_e}\left[v_1(x_2y_3-x_3y_2)+v_2(x_3y_1-x_1y_3)+v_3(x_1y_2-x_2y_1)\right]$$

$$a_2=\frac{1}{2A_e}\left[v_1(y_2-y_3)+v_2(y_3-y_1)+v_3(y_1-y_2)\right]$$

$$a_3=\frac{1}{2A_e}\left[v_1(x_3-x_2)+v_2(x_1-x_3)+v_3(x_2-x_1)\right]$$

A_e = *área del triángulo*

$$\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

Interpolación lineal a trozos sobre triángulos

$$v_h^e(x,y)=a_1+a_2\cdot x+a_3\cdot y$$

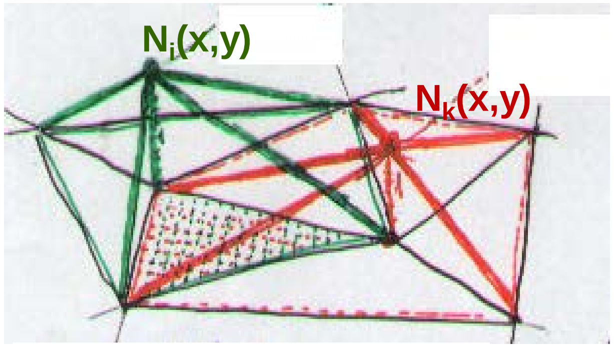
$$a_1=\frac{1}{2A_e}\left[v_1(x_2y_3-x_3y_2)+v_2(x_3y_1-x_1y_3)+v_3(x_1y_2-x_2y_1)\right]$$

$$a_2=\frac{1}{2A_e}\left[v_1(y_2-y_3)+v_2(y_3-y_1)+v_3(y_1-y_2)\right]$$

$$a_3=\frac{1}{2A_e}\left[v_1(x_3-x_2)+v_2(x_1-x_3)+v_3(x_2-x_1)\right]$$

. Sustituyendo los coeficientes en la expresión de $v_h^e(x,y)$:

$$\boxed{v_h^e(x,y)=v_1\cdot N_1^e(x,y)+v_2\cdot N_2^e(x,y)+v_3\cdot N_3^e(x,y)}$$



$$N_1^e(x,y)=\frac{1}{2A_e}\left[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2^e(x,y)=\frac{1}{2A_e}\left[(x_3y_1-x_1y_3)+(y_3-y_1)x+(x_1-x_3)y\right]$$

$$N_3^e(x,y)=\frac{1}{2A_e}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right]$$

A_e = *área del triángulo*

$$\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

$$N_1^e(x,y)=\frac{1}{2A_e}\left[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\right]$$

$$N_2^e(x,y)=\frac{1}{2A_e}\left[(x_3y_1-x_1y_3)+(y_3-y_1)x+(x_1-x_3)y\right]$$

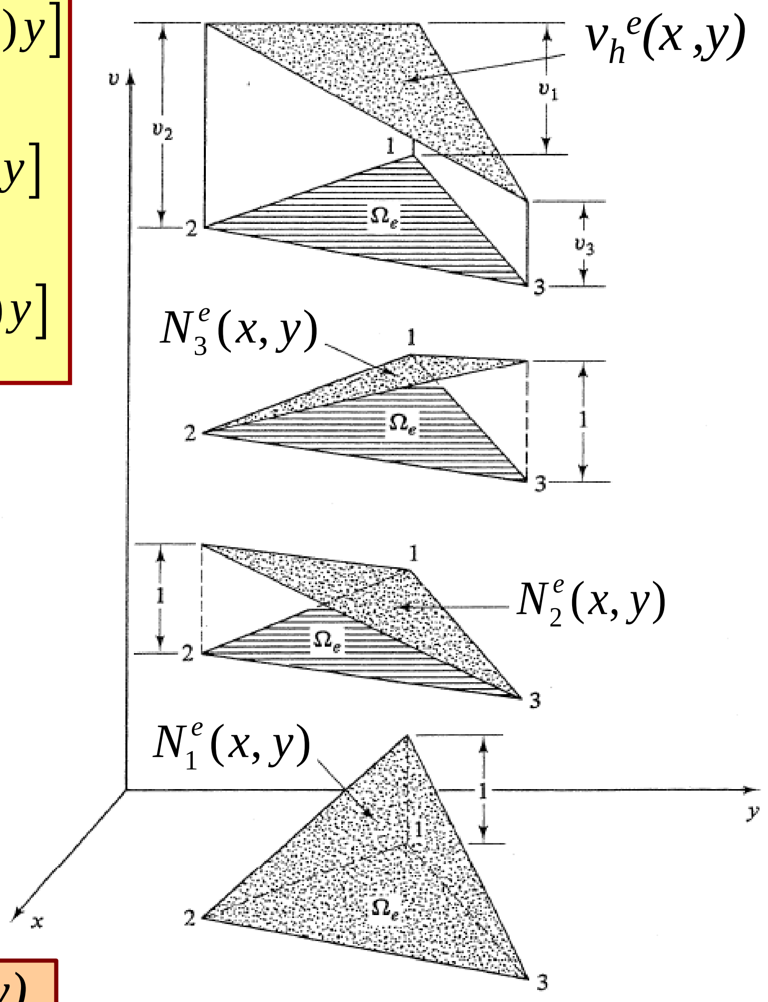
$$N_3^e(x,y)=\frac{1}{2A_e}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right]$$

A_e = *área del triángulo*

$$\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

. Obsérvese que: $N_i^e(x_j,y_j)=\delta_{ij}$

$$\boxed{v_h^e(x,y)=v_1\cdot N_1^e(x,y)+v_2\cdot N_2^e(x,y)+v_3\cdot N_3^e(x,y)}$$



. Las funciones de forma en un elemento e se pueden expresar en forma matricial así:

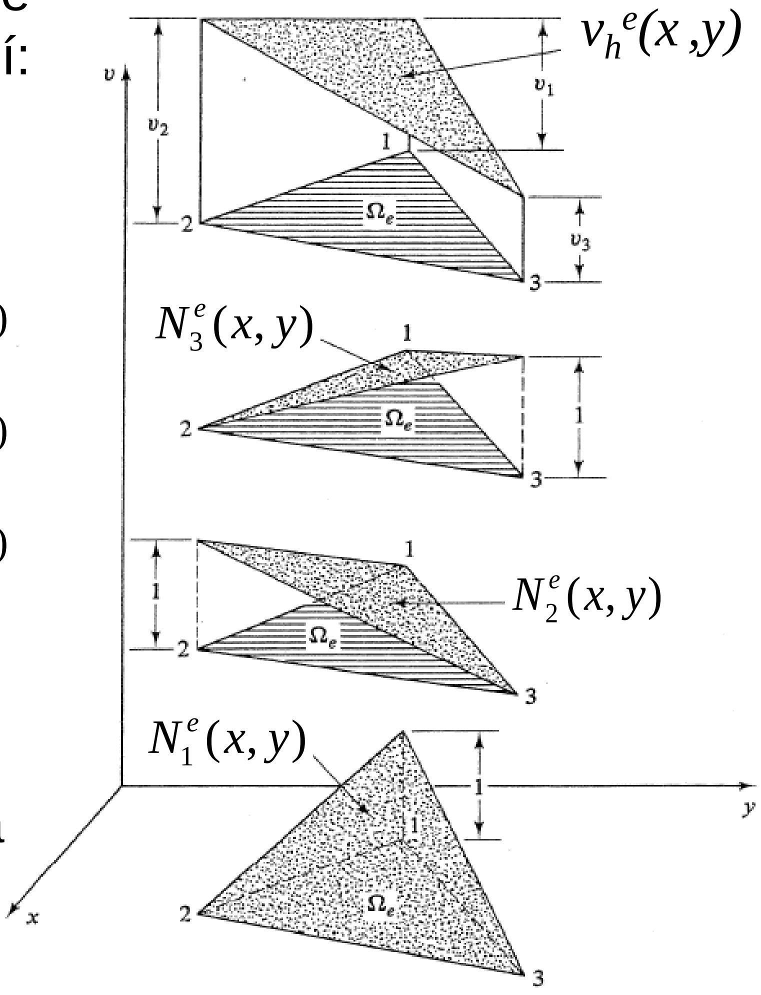
$N^e = [N_1^e \quad N_2^e \quad N_3^e]$

$$N_1^e = \frac{1}{2A^e}(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e + (y_2^e - y_3^e)x + (x_3^e - x_2^e)y)$$

$$N_2^e = \frac{1}{2A^e}(x_3^e y_1^e - x_1^e y_3^e + (y_3^e - y_1^e)x + (x_1^e - x_3^e)y)$$

$$N_3^e = \frac{1}{2A^e}(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e + (y_1^e - y_2^e)x + (x_2^e - x_1^e)y)$$

$$2A^e = \left(x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e\right) - \left(x_1^e y_3^e - x_3^e y_1^e\right) + \left(x_1^e y_2^e - x_2^e y_1^e\right)$$



. Así, la fórmula de interpolación en forma matricial es:

$$v_h^e(x,y) = [N_1^e \;\; N_2^e \;\; N_3^e]\cdot \begin{bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \\ v_3^e \end{bmatrix} = [N^e]\cdot \begin{bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \\ v_3^e \end{bmatrix}$$

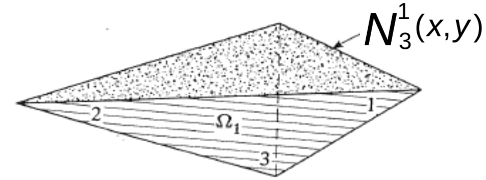
. Es necesario calcular el gradiente de v_h^e (x,y). Para ello vamos a calcular derivadas en la fórmula de la interpolación, obteniendo una matriz B^e que relaciona dicho gradiente con los valores nodales v_1, v_2, v_3:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\left[B^e\right]} \begin{bmatrix} v_1^e \\ v_2^e \\ v_3^e \end{bmatrix}$$

. Observar que la matriz B^e es constante en este caso interpolación lineal en un triángulo

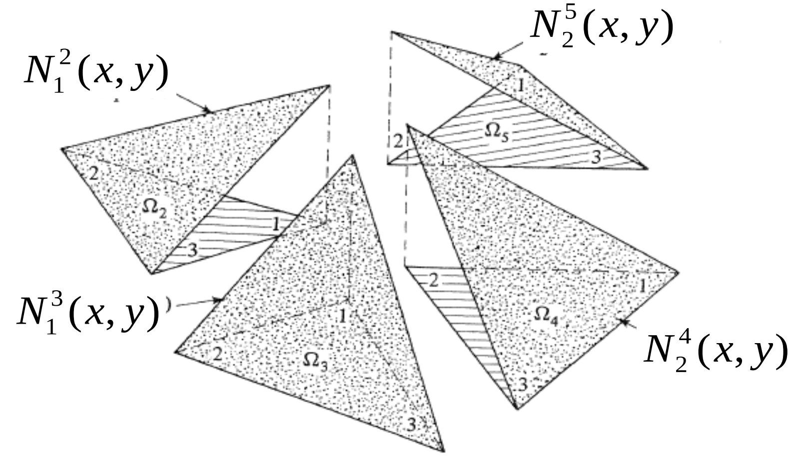
$$\underbrace{\left[B^e\right]}_{\text{matriz constante}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3^e}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} y_2^e - y_3^e & y_3^e - y_1^1 & y_1^e - y_2^e \\ x_3^e - x_2^e & x_1^e - x_3^e & x_2^e - x_1^e \end{bmatrix}$$

. ¿Cómo son las funciones base ‘globales’ N_i, i=1,2,…,n que generan las funciones locales N_k^e de cada triángulo?

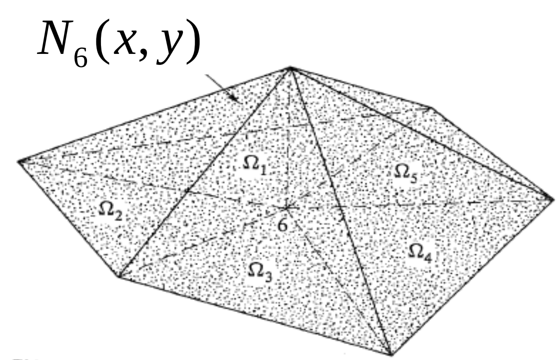


. Las funciones básicas locales N_k^e de elementos adyacentes, se agrupan juntas para producir una función pirámide $N_i(x,y)$ para cada nodo global i tal que :

$$N_i\,(x_j,y_j)=\delta_{ij}. \quad i, j= 1,2,\ldots,n$$



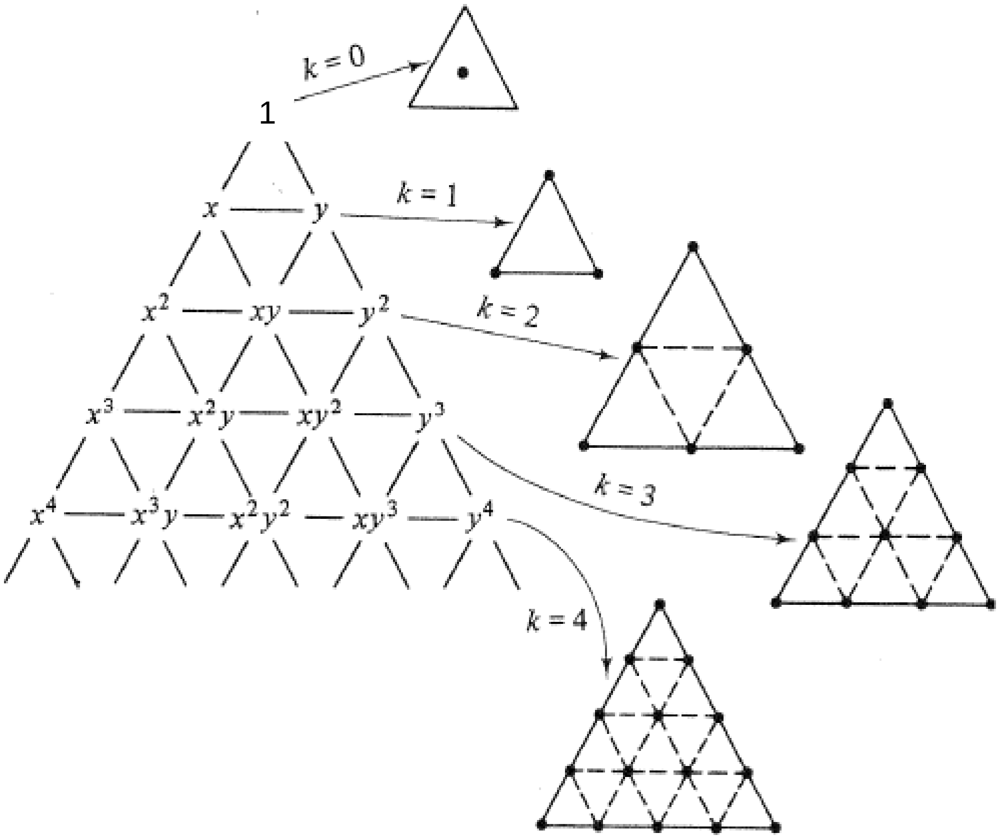
. Para los nodos del borde o contorno de Ω, la función básica es una porción de una pirámide, cuya base está definida por los nodos en la malla.



. Se pueden construir elementos triangulares de orden superior empleando el llamado 'triángulo de Pascal'

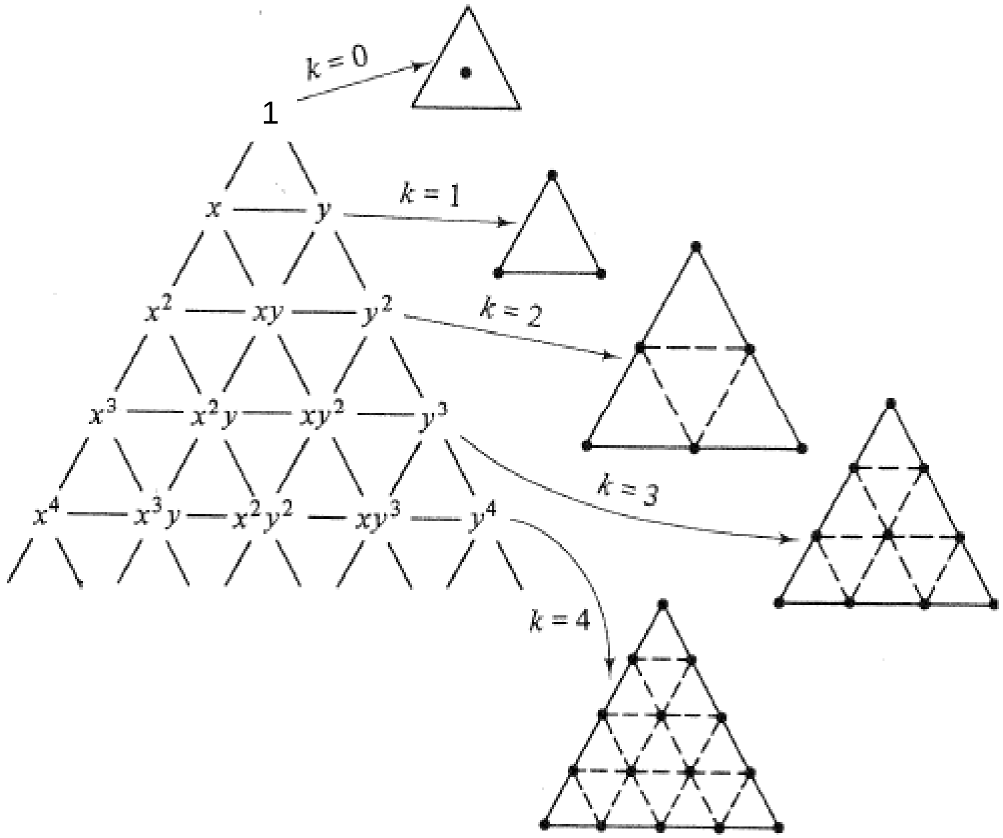
. Un polinomio completo
de grado total k en x e y
tiene (k+1)·(k+2)/2 términos
monomiales.

. Así, un polinomio completo
de grado k queda determinado
únívocamente dando su valor
en (k+1)·(k+2)/2 puntos
del plano



. El triángulo de Pascal implica la colocación simétrica de los nodos en elementos finitos triangulares.

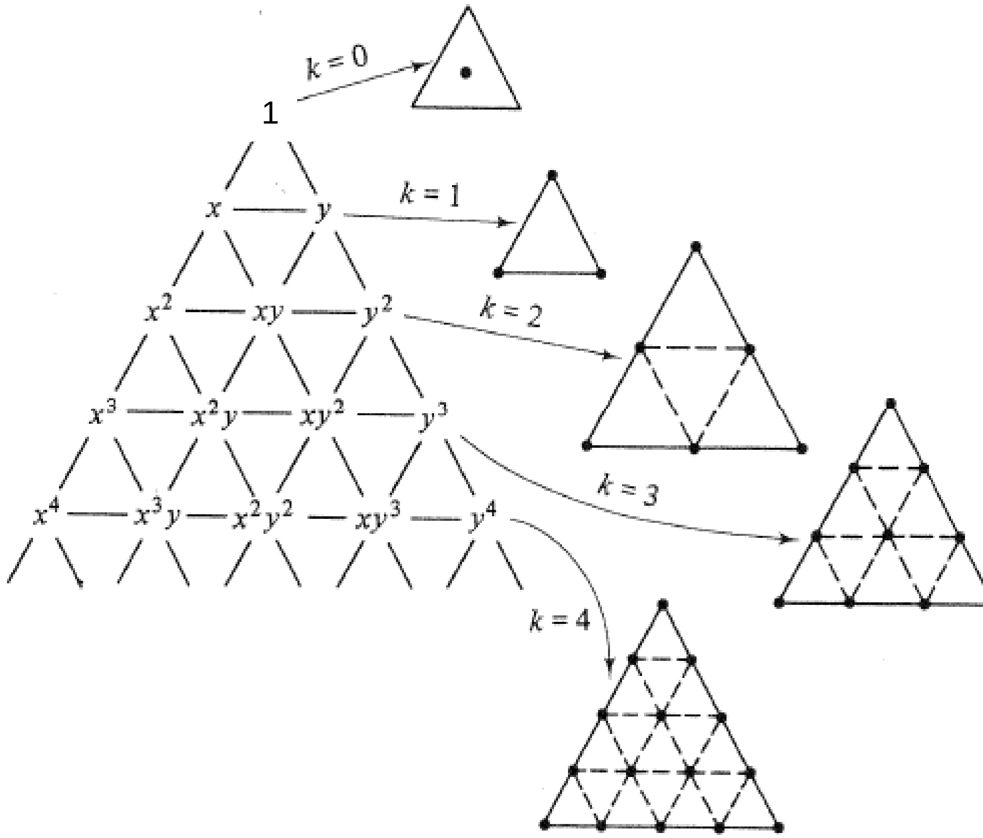
. Por ejemplo, los 6 términos del polinomio cuadrático se determinan dando el valor de $v_h^e(x,y)$ en 6 puntos nodales, 1 en cada vértice y 1 en el punto medio de cada lado.



. Observar que esta es justo la ubicación de monomios en el triángulo de Pascal para polinomio cuadrático!

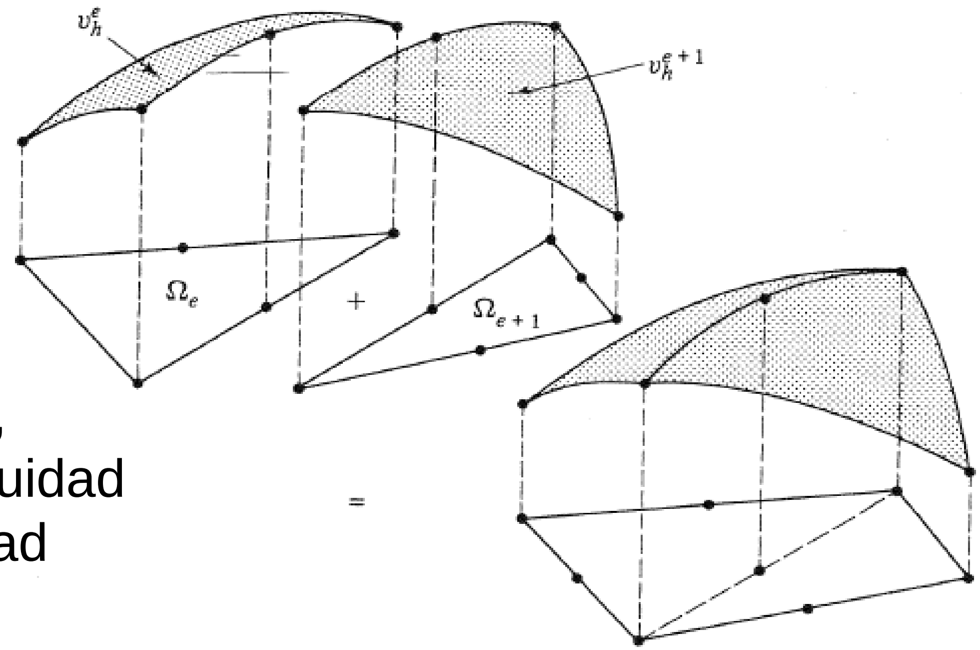
. ¿Qué pasa con un polinomio cúbico con 10 términos monomiales? Requiere un triángulo de 10 nodos.

. La ubicación de los nodos se puede determinar por la de los monomios en el triángulo de Pascal, 1 en cada vértice, 2 en cada lado dejando en él tres segmentos de igual longitud, y 1 nodo en el centro de gravedad del triángulo elemento finito considerado.



. Esos elementos producen funciones base que son continuas sobre el dominio, por tanto tienen derivadas primeras con cuadrado integrable.

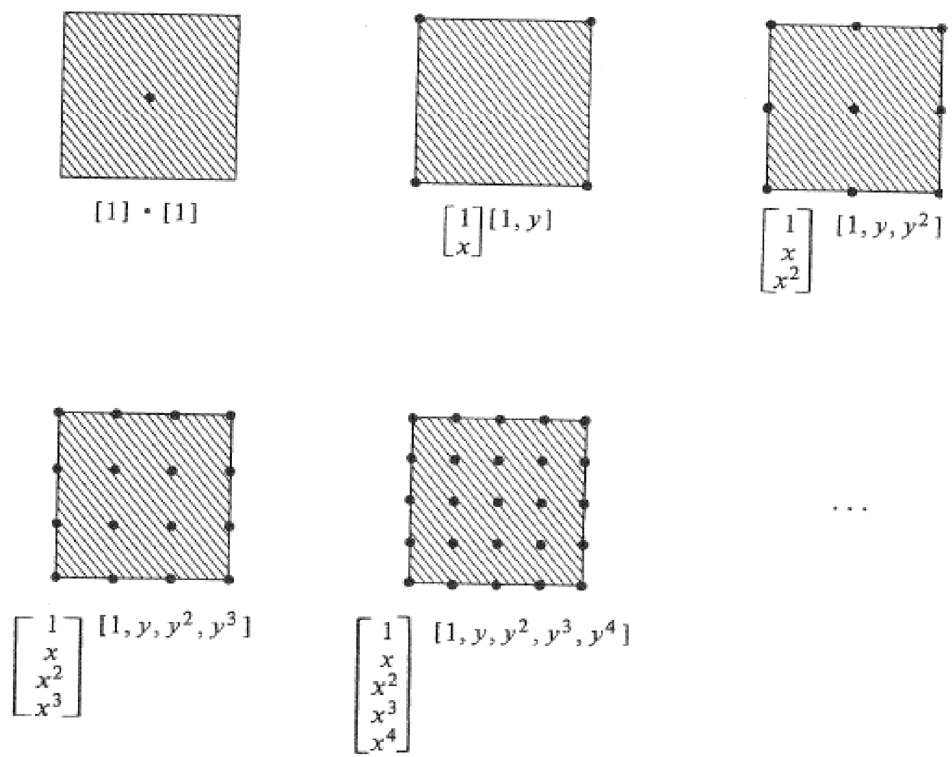
. En la figura se ven 2 triángulos contiguos de 6 nodos.
Los polinomios interpoladores locales v_h^e (x,y) y v_h^{e+1} (x,y) son cuadráticos y coinciden en los 3 nodos comunes a ambos elementos.
Comparten la curva de contacto, parábola de grado 2. Hay continuidad entre parches. No hay continuidad de derivadas transversales.



Elementos rectangulares

. Se pueden generar varios elementos rectangulares mediante producto tensorial de polinomios en x e y:

	1	y	y^2	y^3	y^4	$\cdots$
1	1	y	y^2	y^3	y^4	$\cdots$
x	x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	$\cdots$
x^2	x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	$\cdots$
x^3	x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	$\cdots$
x^4	x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	



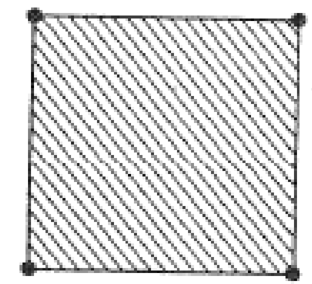
Polinomios bilineales

. El producto tensor de los monomios [1, x] con los monomios [1, y] produce la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & y\\x & xy\end{bmatrix}$$

. La combinación lineal de los elementos de esta matriz genera una aproximación polinómica bilineal local:

$$v_h^e(x,y)= a_1+a_2\, x+a_3\, y+ a_4\, x\cdot y$$



$\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}[1, y]$

. Observar que sobre cada uno de este tipo de elementos, $v_h^e(x,y)$ es lineal en y para x constante, lineal en x para y constante (bilineal).

. Estas funciones de forma producen funciones base $N_i(x,y)$ que son continuas, y por ello tienen derivadas 1as. con cuadrado integrable

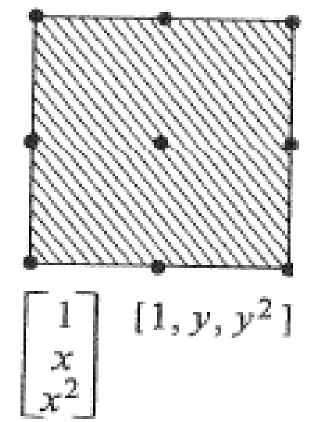
Polinomios base bicuadráticos a trozos

. El producto tensor de los monomios $[1,x,x^2]$ con los monomios $[1,y,y^2]$ produce la matriz siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \\ x & xy & xy^2 \\ x^2 & x^2 y & x^2 y^2 \end{bmatrix}$$

. La combinación lineal de los elementos de esta matriz genera una aproximación polinómica bicuadrática local:

$$v_h^e(x,y) = a_1 + a_2\, x + a_3\, y + a_4\, x \cdot y + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 x y^2 + a_9 x^2 y^2$$



. Observar que sobre cada uno de este tipo de elementos, $v_h^e(x,y)$ es cuadrática en y para x constante, cuadrática en x para y constante (bicuadrática).

. Estas funciones de forma producen funciones base $N_i(x,y)$ que son continuas, y por ello tienen derivadas 1as. con cuadrado integrable.

Error de interpolación

. Consideramos interpolación en 2D de una función g(x,y) empleando un polinomio completo de grado k, $g_h(x,y)$. Si las (k+1) primeras derivadas de g están acotadas en Ω^e, el error de interpolación es:

$$||g-g_h||_{\infty,\Omega^e} = \max_{(x,y) \in \Omega^e} |g(x,y)-g_h(x,y)| <= c \cdot h_e^{k+1}$$

donde c es una constante positiva y h_e es el 'diámetro' de Ω^e (la mayor distancia entre 2 puntos cualquiera de Ω^e)

. Esta estimación de error es válida sólo si $g_h(x,y)$ es un polinomio completo de grado k.

. Se puede deducir una estimación de error para la 1a . derivada:

$$\| \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g_h}{\partial x} \|_{\infty,\Omega_e} \leq c_1 h_e^k , \qquad \| \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g_h}{\partial y} \|_{\infty,\Omega_e} \leq c_2 h_e^k ,$$

. Se define la norma H^1 en 2D como sigue:

$$\| g \|_1^2 = \int_\Omega \left[g^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$$

. Suponiendo que no hay error de discretización ($\Omega_h = \Omega$) y que h es el máximo diámetro de todos los elementos en la malla, se puede demostrar que :

$\|g-g_h\|_1 <= c_3 \cdot h^k$, para h suficientemente pequeño

. Esta estimación es válida sólo si $g_h(x,y)$ es un polinomio completo de grado k.

$$||g-g_h||_1 <= c_3 \cdot h^k \text{ , para h suficientemente pequeño}$$

. Interpolación lineal a trozos sobre triángulos (k=1): el error es de orden O(h).

. Interpolación bilineal a trozos (sobre cuadriláteros): el error asimismo O(h) a pesar de que $v_h^e(x,y)=a_1+a_2x+a_3y+a_4x\cdot y$ contiene el término cuadrático x·y. Pero no contiene los términos x^2 e y^2 para tener un polinomio cuadrático completo.

. Para interpolación bicuadrática a trozos :

$$v_h^e(x,y)= a_1+a_2\, x+a_3\, y+ a_4\, x\cdot y+a_5x^2+a_6y^2+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9x^2y^2$$

El error es de orden $O(h^2)$ pues faltan los términos cúbicos x^3 e y^3.

. Estas aproximaciones tienen términos extra que proporcionan continuidad pero no contribuyen a la convergencia asintótica del error de interpolación.