

# 关于凸函数的 trick

黄知远, chatgpt

2025 年 10 月 21 日

## 目录

1 序列的 min-plus 卷积	1
1.1 a 和 b 均为凸序列时	1

## 1 序列的 min-plus 卷积

给定两个序列  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ 、 $b = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})$ ，它们的 min-plus 卷积定义为

$$c_i = \min_{\substack{0 \leq j \leq n-1 \\ 0 \leq k \leq m-1 \\ j+k=i}} (a_j + b_k), \quad (0 \leq i \leq n+m-2).$$

通常情况下，只有  $O(nm)$  的暴力做法。

### 1.1 a 和 b 均为凸序列时

根据凸序列的定义，凸序列的差分显然是单调增的，如果 a 和 b 都是凸序列，那么考虑其差分，我们计算  $c_i$  时必然考虑前 i 个最小的差分，于是我们只需要做一个双指针进行贪心的选择就可以了，时间复杂度  $O(n+m)$ 。

更通俗的说，结论是 c 的差分数组，就是 a 和 b 的差分数组合并在一起，然后从小到大排序的结果。于是我们发现一个事，两个凸序列的 min-plus 卷积仍然是一个凸序列。