拉格朗日插值

黄知远

2025 年 10 月 30 日

目录

1　拉格朗日插值的代数形式

引理 1. *对于 n 次多项式 $f(x)$, 只需要 $n+1$ 个不同函数值就能确定 $f(x)$ 的各项系数.*

证明. 设 n 次多项式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

若已知其在 $n+1$ 个互不相同点上的取值

$$P(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

则有线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

左矩阵为 Vandermonde 矩阵，其行列式

$$\prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$$

当 x_i 互异时可逆，方程组唯一可解。

故 n 次多项式由 $n+1$ 个点唯一确定。 □

对于 n 次多项式 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 如果已知 $P(x_0), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ 的值, 我们可以构造:

$$P(x) = \sum_0^n P(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

带入 $(x_i, P(x_i))$ 验证, 发现这个形式是正确的, 因此这是对 $P(x)$ 一种合法表示.

2 单点拉格朗日插值

2.1 已知值取值连续时的做法

若已知量 $x_0 \ldots\ x_n$ 连续, 且按照大小顺序排序, 我们可以将第一节提到的合法表示改写成下面的形式:

$$P(x) = \sum_0^n (-1)^{n-i} y_i \frac{pre_{i-1} \cdot suf_{i+1}}{fac_i \cdot fac_{n-i}}$$

$$pre_i = \prod_0^i x - x_i$$

$$suc_i = \prod_i^n x - x_i$$

$$fac_i = \prod_1^i j$$

通过前后缀优化, 我们可以 $O(n \log n)$ 计算这个式子, 其中 $\log n$ 来源于计算逆元, 当然你可以用 $O(1)$ 逆元的技巧将其优化到 $O(n)$.

2.2 已知值不连续时的做法

笔者只知道朴素的 $O(n^2)$ 做法, 不做赘述.