Universidad de San Andrés
Maestría en Inteligencia Artificial
Modelado Estocástico

**Ejemplo de Cointegración 1:** consideremos el sistema cointegrado bivariado $\boldsymbol{y_t} = (y_{1t}, y_{2t})'$ con vector de cointegración $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -\beta_2)'$. Una representación triangular del sistema sería:

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + u_t, \text{ donde } u_t \sim I(0)$$

$$y_{2t} = y_{2t-1} + v_t, \text{ donde } v_t \sim I(0)$$

Por ejemplo, si $\beta_2 = 1$, podemos pensar en precios spot y futuros como las dos variables. Las innovaciones $u_t$ y $v_t$ pueden estar contemporáneamente y serialmente correlacionadas. La estructura de estas innovaciones va a caracterizar la dinámica de corto plazo del sistema cointegrado.

Note que $y_{2t} = y_{20} + \sum_{i=1}^{t} v_i$.

**Ejercicio 1:** considere $u_t = 0.75 u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid\ N(0, 0.5^2) \quad v_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$. Genere 250 observaciones y grafique $y_{1t}, y_{2t}$ y en otro gráfico, el residuo de cointegración, $u_t = y_{1t} - y_{2t}$. Asuma $y_{20} = 0$, y también $u_0 = 0$ En este ejercicio estamos asumiendo $\beta_2 = 1$.

**Ejemplo de Cointegración (simulación 2):** consideremos el sistema cointegrado trivariado $\boldsymbol{y_t} = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$ con vector de cointegración $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -\beta_2 \quad -\beta_3)'$. Cuando el sistema de cointegración es trivariado puede haber una o pueden haber dos vectores de cointegración. Con un único vector de cointegración, van a haber dos tendencias estocásticas comunes. En cambio, con dos vectores de cointegración, habría solamente una tendencia estocástica común. Una representación triangular del sistema con un solo vector de cointegración, $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -\beta_2 \quad -\beta_3)'$ y dos tendencias estocásticas sería:

$$y_{1t} = \beta_2 y_{2t} + \beta_3 y_{3t} + u_t, \text{ donde } u_t \sim I(0)$$

$$y_{2t} = y_{2t-1} + v_t, \text{ donde } v_t \sim I(0)$$

$$y_{3t} = y_{3t-1} + w_t, \text{ donde } w_t \sim I(0)$$

La primera ecuación describe la relación de largo plazo y la segunda y tercera ecuación indican las tendencias estocásticas. Un ejemplo de este sistema sería, por ejemplo, tipo de cambio nominales, un índice de precios doméstico y un índice de precios foráneo. El vector de cointegración $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -1 \quad -1)'$ indicaría que el tipo de cambio **real** es estacionario (la Teoría de la Paridad del Poder Adquisitivo, en su versión absoluta, sostiene que el tipo de cambio real es constante e igual al valor 1).

**Ejercicio 2:** asuma para este sistema trivariado que el vector de cointegración es el siguiente: $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad -0.5 \quad -0.5)'$ y considere las siguientes innovaciones en este sistema: $u_t = 0.75u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$, $v_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$ y $w_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$. Genere 250 observaciones y grafique $y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}$ y en otro gráfico, el residuo de cointegración, $u_t = y_{1t} - 0.5y_{2t} - 0.5y_{3t}$.

En este ejemplo, $y_{2t}$ e $y_{3t}$ describen las dos tendencias estocásticas independientes (específicamente, las tendencias estocásticas son $\sum_{i=1}^{t} v_i$ y $\sum_{i=1}^{t} w_i$) y por otro lado, $y_{1t} = 0.5y_{2t} + 0.5y_{3t} + u_t$ es el vector de cointegración y es el promedio de las dos tendencias estocásticas más un término de error AR(1) (residuo de cointegración).

**Ejemplo de Cointegración (simulación 3):** por último, consideremos el sistema cointegrado trivariado $\boldsymbol{y_t} = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})'$ con dos vectores de cointegración y una tendencia estocástica común. Los vectores de cointegración asuma que son $\boldsymbol{\beta_1} = (1 \quad 0 \quad -\beta_{13})'$ y $\boldsymbol{\beta_2} = (0 \quad 1 \quad -\beta_{23})'$. La representación triangular del sistema sería:

$$y_{1t} = \beta_{13} y_{3t} + u_t, \text{ donde } u_t \sim I(0)$$

$$y_{2t} = \beta_{23} y_{3t} + v_t, \text{ donde } v_t \sim I(0)$$

$$y_{3t} = y_{3t-1} + w_t, \text{ donde } w_t \sim I(0)$$

Las primeras dos ecuaciones describen dos relaciones de equilibrio de largo plazo mientras que la última indica la tendencia estocástica común. Un ejemplo de este sistema en finanzas sería la estructura temporal de tasas de interés, donde $y_{3t}$ representa una tasa de corto plazo y donde $y_{1t}$ e $y_{2t}$ representan dos tasas de mayor (largo) plazo. Los vectores de cointegración indicarían que los spreads entre la tasa de largo plazo y la de corto plazo son estacionarios.

**Ejercicio 3:** asuma para este sistema trivariado que los vectores de cointegración son $\boldsymbol{\beta_1} = (1 \quad 0 \quad -1)'$ y $\boldsymbol{\beta_2} = (0 \quad 1 \quad -1)'$ , $u_t = 0.75u_{t-1} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$, $v = 0.75v_{t-1} + \gamma_t$, $\gamma_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$ y $w_t \sim iid\ N(0, 0.5^2)$. Genere 250 observaciones y grafique $y_{1t}$ , $y_{2t}$, $y_{3t}$ y por otro lado, en otro gráfico, los residuos de cointegración $u_t$ y $v_t$.