Series de tiempo

Vectores autorregresivos:

STATA:

Capítulo 5 Carol

Cluster volatilidad

Media: Cuando trabajo con datos diarios la media es diaria y en activo financiero es muy pequeño.

obs: Ver en BTC y SPY

Volatilidad = σ = desvío estándar

σ^2 = varianza

Retornos

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Retorno Neto o Retorno simple.

Retorno Bruto

$$1 + R_t = \boxed{\frac{P_t}{P_{t-1}}}.$$

El retorno logarítmico es el logaritmo del retorno bruto simple.

$$\boxed{r_t = \ln\left(P_t/P_{t-1}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})}$$

Por taylor vemos que $\ln(x) \cong x-1$.

$\Rightarrow$

$$\boxed{r_t = \ln\left(P_t/P_{t-1}\right) = \ln(R_t + 1) \cong R_t}$$

- $\underline{\text{obs}}$: vale para retornos pequeños

- Para los retornos logarítmicos

El retorno acumulado en un periodo es la suma de los retornos logarítmicos.

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{k} r_i = \ln\left(\frac{P_k}{P_0}\right)}$$

Coeficiente de asimetría

$$\text{skewness} = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

Momentos

μ_i : i-ésimo momento central. $E(X - E(x))^i$

$$\mu_2 = E\left[(X - E(x))^2 \right] = E\left[(X - E(x)) (X - E(x)) \right]$$

$$= E\left(X^2 - 2X E(x) + E(x)^2 \right) = E(X^2) - 2E(X) E(E(X)) + E(X)^2$$

$$= E(x^2) - 2E(x) E(x) + E(x)^2 = E(x^2) - 2E(x)^2 + E(x)^2$$

$$= E(x^2) - E(x)^2$$

$$\mu_3 = E\left[(X - E(x))^3 \right] =$$

$$[X - E(X)]^3$$

$$(X - E(X))\,(X - E(X))\,(X - E(X))$$

$$X^2 - X\,E(X) - X\,E(X) + E(X)^2$$

$$(X^2 - 2X\,E(X) + E(X)^2)\,(X - E(X))$$

$$X^3 - X^2 E(X) - 2\cancel{X^2} E(X) + 2X\,E(X)^2 + X\,E(X)^2 - E(X)^3$$

$$X^3 - 3X^2 E(X) + 3X\,E(X)^2 - E(X)^3$$

Todo E.

$$E[X^3 - 3X^2 E(X) + 3X\,E(X)^2 - E(X)^3]$$

$$E(X^3) - 3\,E(X^2)\,E(X) + 3\,E(X)\,E(X)^2 - E(X)^3$$

$$E(X^3) - 3\,E(X^2)\,E(X) + 3\,E(X)^3 - E(X)^3$$

$$= \boxed{E(X^3) - 3\,E(X^2)\,E(X) + 2\,E(X)^3}$$

Momentos (Gujarati 815.)

μ^3 y μ^4 sirven para estudiar la forma de la distribución de probabilidad

$$S = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} \qquad K = \frac{E(X-\mu)^4}{[E(X-\mu)^2]^2} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2}$$

Recordamos que

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = VAR(x) = \sigma^2$$

$\boxed{\mu_i = \text{i-esimo momento alrededor de la media}}$

$$\boxed{JB = \frac{n}{6}\left(\text{skewness}^2 + \frac{K_E^2}{4}\right)}$$

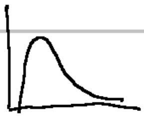
Ver apunte de JB

$\boxed{\text{Valor crítico} \cong 6-9}$

BS: Wooldridge

$\boxed{\mu^3 \text{ sirve p/ ver simetría.} \qquad \mu^4\text{: curtosis}}$

Cuando la **Curtosis** es mas grande se pueden cometer errores al tratarlo como una normal porque las colas tienen mas peso.



cola pesada
a la derecha

[En el Excel lo que muestra es curtosis en exceso. **Que es la de Fisher. p/la normal ≈ 0**]

Mixture de normales: mezcla de las densidades

• Mezcla normales con la misma media fuerza VA leptocurtica $\boxed{K_E > 0}$

Mixtura no es la CL de las variables sino de las densidades.

$$\mu_3 = E(X) - E(X)^3 = 0 \text{ para la normal.}$$

$$\text{Curtosis} = \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\underbrace{\mu_2^2}_{\text{varianza}}} = 3 \quad \forall \text{ normal}$$

$$E(X_m^2) = \int x^2 f(x) \cdot w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 \, dx$$

Sea $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ y son independientes.

$$Y = aX_1 + bX_2$$

Se demuestra que.

$$Y \sim N\left(a\mu_1 + b\mu_2 , \left(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 \right) \right)$$

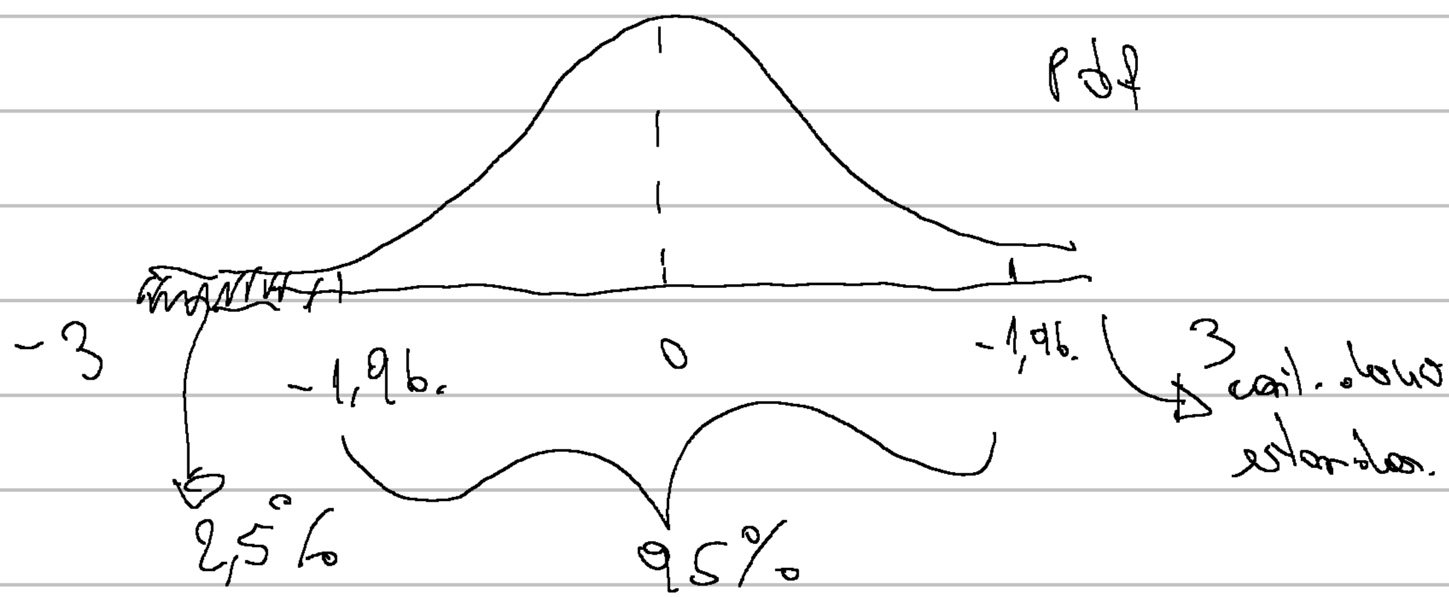
La combinación lineal de 2 VA con distribución normal tiene una normal que es una CL de sus medias y sus varianzas.

clase 2

QQ-Plots

$Z = \frac{X_i - \bar{x}}{S}$ ⇒ estandariza y no tiene unidad de medida.

Z: no tiene unidad de medida y permite comparar



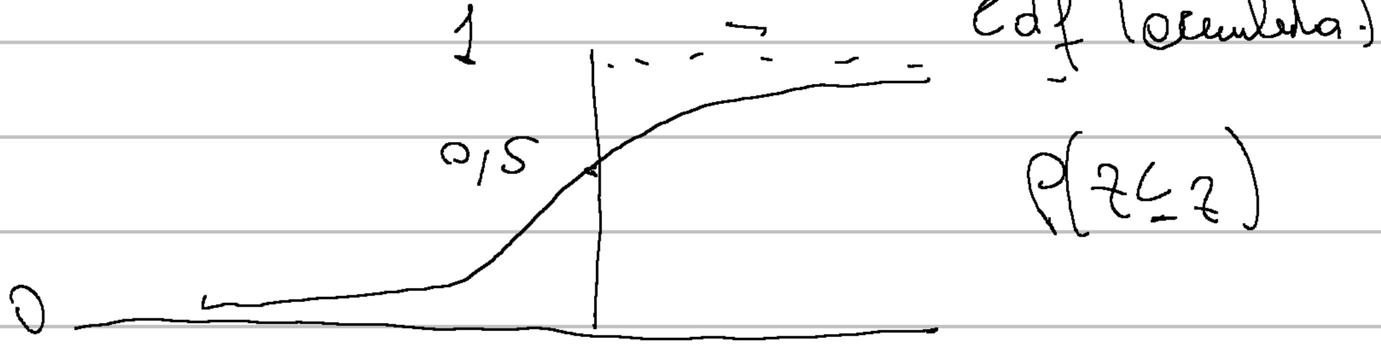
[Nota: si es normal ⇒ calculo la media y s.
luego el 95% de la muestra está entre -1,96 y 1,96 desvío estándar. (2 desvíos estándares a la izq. o a la derecha)]

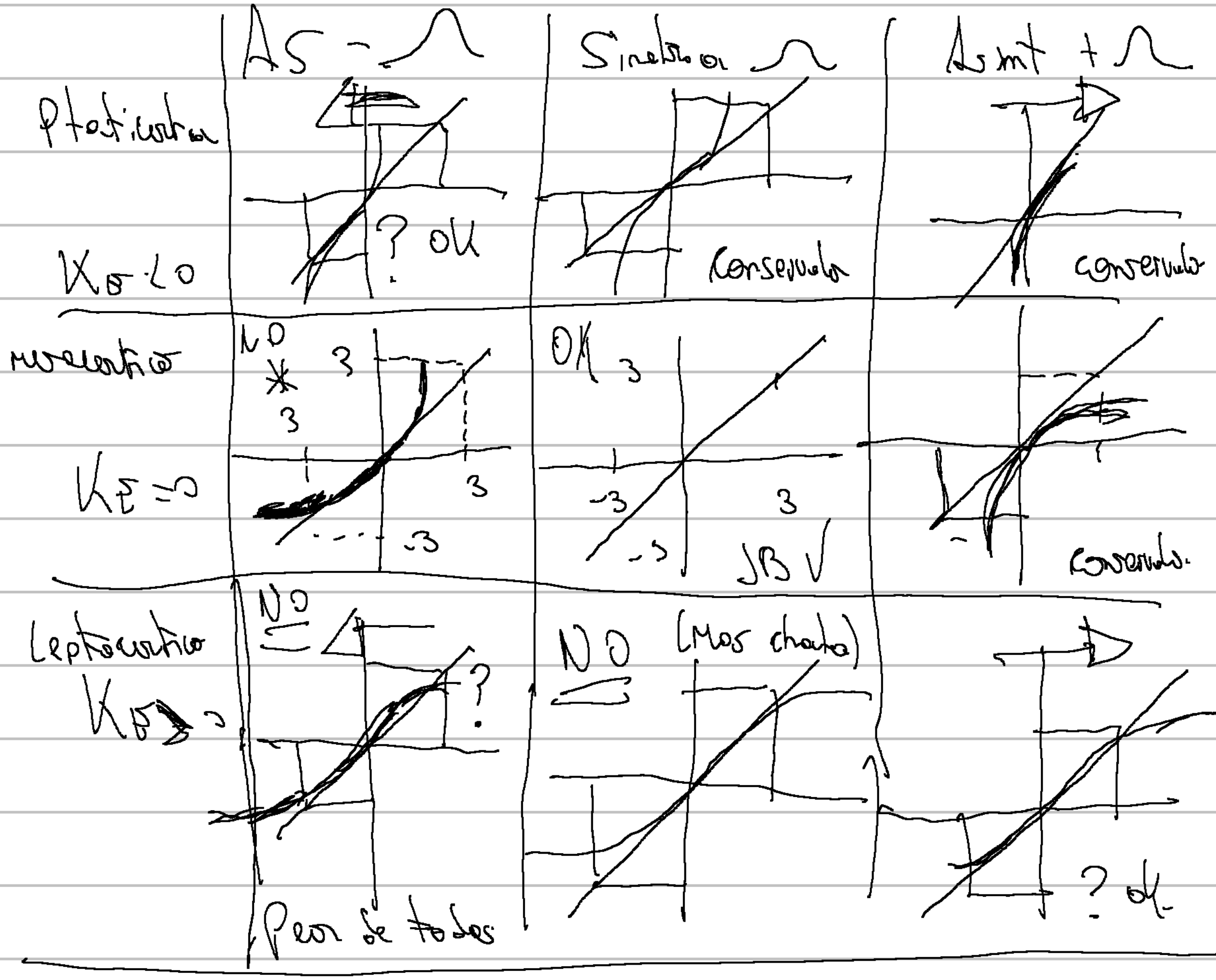
$\pm 2{,}576$ 0,5%
$\pm 1{,}96$ 2,5% en cada cola.
$\pm 1{,}645$ 5%

$-2{,}33 \rightarrow$ 1% en la cola izq.

QQ-plot Quantile-Quantile (Percentiles).

Armar QQ-plot
- Ordenar de menor a mayor.
- Estandarizar los datos. $(X_i - \bar{X})/s$.





* Al tirar de la cola izq y KE=0 se hace más chica la cola derecha. Def. bruja:

Lepto ⇒ colas más pesadas =

plati ⇒ colas más chicas =

$KE = 6.$ $K = 3.$ $KE = K - 3 = 0.$

μ_4/σ^4 $KE + 3 = K$

Las mixturas de normales no son normales

Las mixturas de normales no son el de normales (las ponderaciones deben sumar 1)

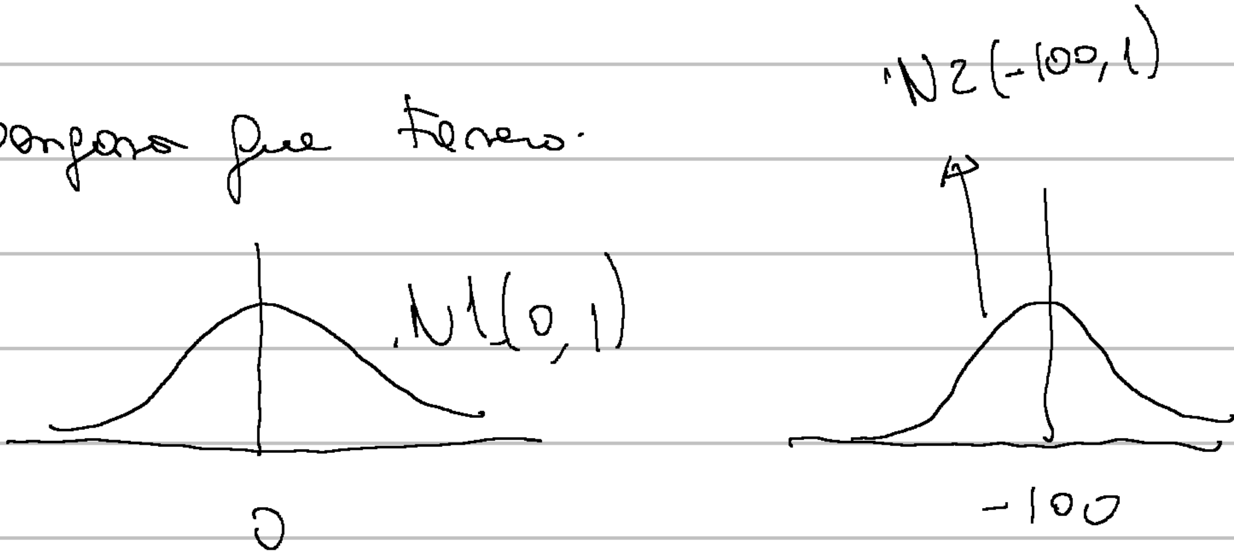
Mezclas normales con la misma μ sea μ - normal leptocúrtica siempre (según el profe) yo veo que no.

Ej: genera data aleatoria con una t-student estandarizada y nos tome fue con el QQplot. Observa la simetría y leptocúrtica

. Como genera valores aleatorios de una mixtura.

Mixture ejemplo

Supongamos que tenemos:



y hacemos un mix de $0,1\ N2 + 0,99 N1$.

Esto da: leptocúrtico y asimétrico negativo

Uniforme: simétrica y platicúrtica

Tendencia ciclo

Estudio bien retorno simples
- bruto
- log

- Tasa promedio anual

35 años:
$(1+g_a) = (1+g)^n \Rightarrow (1+g)^{35} = 111\%$

Despejamos y queda la cuenta

La tasa de crecimiento es la pendiente de $\ln(x)$.

$\lambda = 100$ dato anual

$\lambda = 300$ trimestral sin desestacionalizar

$\lambda = 400 - 800$

Descomponemos en la tendencia y la diferencia que es un ciclo.

$$PBI\ Real = \sum P_i^{0} Q_i^{t}$$

0 → ano base.

$$PBI\ nominal = \sum P_i^{t} Q_i^{t}$$

$$\boxed{1 + g_{acum} = (1+g)^{n}}$$

g: Taxa de c/ período

g_{acum}: Taxa acumulada de n períodos.

<u>Exemplo:</u> Taxa de crescimento acumulada

$$= 1 + \frac{PBI\ Real\ t}{PBI\ Real\ t-1}$$

$$\text{Taxa média} = \left[1 + \frac{PBI\ Real\ t}{PBI\ Real\ t\ c}\right] = (1+g)^{n}$$

$$= \left(1 + \frac{PBI\ Real\ t}{PBI\ Real\ t-1}\right)^{1/n} = 1 + g$$

g: Taxa média n anos.

Grafica en escala logaritmica

Cuando está en escala logarítmica la pendiente es la tasa de crecimiento:

$$\frac{\partial \ln(f(t))}{\partial t} = \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \simeq g.$$

$$\left(1+g_{acum}\right)^{1/n} = 1+g. \quad \text{por tasa}$$

$$1+g_{acum} = \left(1+\frac{PBI_t}{PBI_{t-1}}\right) = \lg\left(\frac{PBI_t}{PBI_{t-1}}\right)$$

Reemplazando.

$$\lg\left(\frac{PBI_t}{PBI_{t-1}}\right)^{1/n} = 1+g.$$

Tener gráfico en log permite partir en periodos p/ determinar la tasa de crecimiento entre periodos.

Formas de descompon.

1)

1) Siempre se trabaja en log.

$$y_t = y_t^f + y_t^c$$

$y_t^f \rightarrow$ Tendencia

$y_t^c \rightarrow$ cíclica.

Media movil

2)

HP1

$$\underbrace{\left(y_{t+1}^f - y_t^f\right)}_{\text{Tasa de crecimento periodo } t+1} - \underbrace{\left(y_t^f - y_{t-1}^f\right)}_{\text{Tasa de crecento periodo } t}$$

clase 3

$$E(X) = \int x f(x)\, dx$$

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ pdf. φ_1

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ pdf. φ_2

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)\, dx$$

$\hookrightarrow$ no centrado.

$$E(X^2_{\text{mixtura}}) = \int x^2 f(x) \quad \text{donde } f(x) = p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$= \int x^2 (p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2)\, dx$$

$$= p_1 \underbrace{\int x^2 \varphi_1(x)\, dx}_{E(X_1^2)} + p_2 \underbrace{\int x^2 \varphi_2(x)\, dx}_{E(X_2^2)}$$

$E(X_1) = \mu_1 \qquad E(X_2) = \mu_2$

por lo tanto el $E(X^n)$ es el promedio ponderado de los momentos.

Esto vale para cualquier momento no centrado

Momento centrado

$$VAR(X_M) = E(X_M - E(X_M))^2$$

$$= E(X_M^2) - E(X_M)^2$$

Para uma normal

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$VAR(X_1) = \sigma_1^2 = E(X_1^2) - \mu_1^2$$

$$\Rightarrow E(X_1^2) - E(X_1)^2$$

$$\mu_3 = \text{terceiro momento centrado} = E(X-\mu)^3$$

$$= E\left[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right]$$

$$= E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

si es normal

$$0 = E(X^3) - 3\mu E(X^2) + 2\mu^3$$

curtosis

$$\mu_4 = E(X-\mu)^4 = E\left(x^4 - 4x^3\mu + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4\right)$$

$$3\,Var(x)^2 = E(x^4) - \mu\, 4\, E(x^3) + 6\mu^2 E(x) - 3\mu^4$$

si es normal.

Normal curtosis: $\dfrac{E(X-\mu)^4}{VAR(x)^2} = E(x-\mu)^4 = 3\,VAR(x)^2$

Para $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X-\mu_1)^4 = 3(\sigma^2)^2 = 3\sigma^4$

VA:

$$\text{curtosis} = \frac{E(X-\mu)^4}{(VAR(X))^2}$$

muestra

$$\text{curtosis} = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{X_i - \bar{x}}{S}\right)^4 = \frac{1}{S^4} \cdot \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{x})^4$$

TP 1

Generamos simulaciones de los retornos logarítmicos de grupo de 20.
Esto se hace 1000 simulaciones.

Bootstrap no paramétrico.

Regresion lineal

Supuestos

$E(Y_i) = \alpha + \beta x_i \quad [E(Y_i|X_i)]$ 1 linealidad

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \underbrace{Y_i - E(Y_i)}_{\text{Error } = V_i}$$

$$Y_i = \overbrace{\alpha + \beta x_i}^{\text{Parametro}} + V_i$$

$V_i \rightarrow$ variable aleatoria

$Y_i \rightarrow$ variable aleatoria

No observamos α, β, V_i observamos Y_i, X_i

Usamos MCO/OLS para estimar α, β y V_i

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ estimadores

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$$

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ Residuo. e_i es aleatorio.

Se observan los residuos y no los errores U_i

MCO

Sea $S(a,b) = \sum (Y_i - a - bx_i)^2$

Minimizando.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum Y_i - a - bx_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = (-2) \sum (Y_i - a - bx_i) x_i$$

$$\Rightarrow \text{①} \ \sum y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i = 0$$

$$\text{②} \ \sum \left(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i \right) x_i = 0$$

ecuaciones normales.

① son los residuos y son 0 por como la construy.

② es la suma de los residuos por la variable explicativa es 0

Obs: si no hay intercepto la fórmula de $\hat{\beta}$ cambia.

$$\beta = \frac{cov(X,Y)}{Var\ldots}$$

Corolario

La recta estimada pasa siempre por $\bar{X}, \bar{Y}$.

si $X_i = \bar{x} \Rightarrow \hat{y}_i = \bar{Y}$

Dem

$$\hat{y}_i = \alpha + \hat{\beta} x_i = \alpha + \hat{\beta}\bar{X}$$

$$= (\bar{Y} - \cancel{\beta \bar{X}}) + \cancel{\hat{\beta} X}$$

$$= \bar{Y}$$

3) $\sum e_i = 0$ por construcción de los residuos

4)

5) Signo de $\hat{\beta}$ es el de la $cov(X, Y)$

$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$ Variabilidad total de la variable dependiente.

$TSS = ESS + RSS$.

$\qquad\qquad \sum e_i^2$

↳ son ortogonales

$\frac{ESS}{TSS} = R^2$ (bondad de ajuste) siempre que haya intercepto $0 \leq R^2 \leq 1$

$= 1 - \frac{RSS}{TSS}$

$R^2 = corr(y,x)^2$

Insesgadez

$E(\hat{\beta}) = \beta$

$E(\hat{\alpha}) = \alpha$.

Supuesto 2

Homocedasticidad

1) $Var(U_i) = \sigma^2$ se rompe en cortes transversales

2b) $Cov(u_i, u_j) = 0$ No autocorrelación
se rompe en series de tiempo.

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Para que la $Var(\hat{\beta})$ necesito que $(x_i - \bar{x})^2$ sea grande, por lo tanto los x_i deben estar lejos de la media.

Ejercicio: probar que si están cerca de $\bar{X}$ al agregar una nota $\hat{\beta}$ cambia mucho
o
muy lejos de $\bar{X}$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} \quad \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

para que sea bajo n grande o $\bar{X} \simeq 0$.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son variables aleatorias.

$$Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = - \frac{\bar{x}\, \sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

si $\bar{x} = 0 \Rightarrow Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ es negativo.

Teorema de Gauss Markov

Los MCO son MELI

$\Rightarrow$ no hay otro estimadores insesgado de menor varianza..

Supuesto 3

$U_i \sim N(0, \sigma^2)$ iid