

# ゆらぎの熱力学とパワー・効率トレードオフ関係

---

C2SB2105 森佑一

2026 年 1 月 10 日

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

## Definition 1 (Shannon エントロピー)

Shannon エントロピー  $H(x)$  を以下のように定義する.

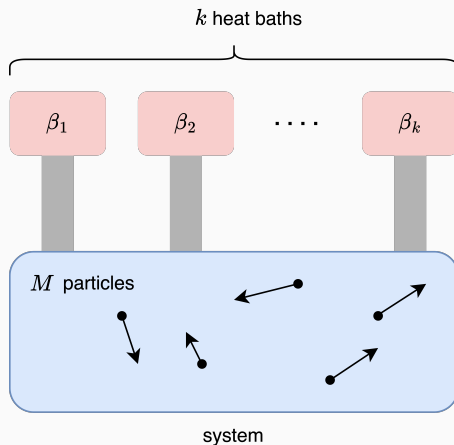
$$H(x) := - \sum_i P_i \ln P_i.$$

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ





**Figure 1:** 系の概念図

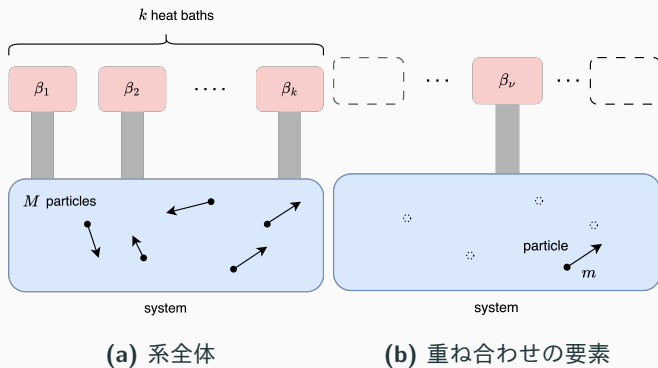


Figure 2: 概念図

## Theorem 2 (熱流とエントロピー生成率とのトレードオフ)

以上の setting の下で,

$$\sum_{\nu=1}^k |J_{\nu}^q| \leq \sqrt{\Theta^{(1)} \dot{\sigma}}.$$

ここで,

$$\Theta^{(1)} := \frac{1}{c_0} \sum_{\mu} \sum_{i \neq j} (\Delta E_i^{\mu})^2 (R_{ij}^{\mu} p_j + R_{ji}^{\mu} p_i) =: \sum_{\mu} \Theta_{\mu}^{(1)},$$

であり,

$$c_0 = \frac{8}{9}, \quad \Delta E_i^{\mu} := E_m^i - \langle E \rangle_{t, w^{-m}}$$

とする.

**Theorem 3** (熱流とエントロピー生成率とのトレードオフ (局所詳細つりあいがある場合) )

さらに, 任意の  $w, w', \nu$  について局所詳細つりあい

$$R_{ij}^{\mu} e^{-\beta_{\nu} E_j} = R_{ji}^{\mu} e^{-\beta_{\nu} E_i},$$

が成立するとき,

$$\sum_{\nu=1}^k |J_{\nu}^q| \leq \sqrt{\Theta^{(2)} \dot{\sigma}}.$$

ここで,

$$\Theta^{(2)} := \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (E_i - E_j)^2 R_{ij} p_j =: \sum_{\mu} \Theta_{\mu}^{(2)},$$

最後の  $=:$  では  $R_{ij}$  の分解を使っている.

1. はじめに
2. 数学の準備
  - 2.1. Markov Jump 課程
  - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
  - 3.1. 系の時間発展と熱
  - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
  - 4.1. IFT と IFT like equalities
  - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

## Theorem 4 (パワーと効率のトレードオフ)

上で定義した notation の下で

$$\frac{W}{\tau} \leq \bar{\Theta}^{(i)} \beta_L \eta (\eta_C - \eta), \quad \bar{\Theta}^{(i)} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \Theta(t)^{(i)}.$$

### remark

$\Theta^{(i)}$  は経路に依存した量なので, 上の関係式で  $\bar{\Theta}^{(i)}$  を定数だと思ってパワーの上界を与える引数として効率をもつ二次関数を想起するのは危険である.

## Thm.4 の導出

先に以下のように不等式を示しておくと,

$$\begin{aligned}(Q_H + Q_L)^2 &= \left( - \int_0^\tau dt J_1^q(t) + \int_0^\tau J_2^q(t) \right)^2 \\ &\leq \left( \int_0^\tau dt \sum_\nu |J_\nu^q(t)| \right)^2 \\ \text{Thm.2, Thm.3} &\longrightarrow \leq \left( \int_0^\tau dt \sqrt{\Theta^{(i)} \dot{\sigma}(t)} \right)^2 \\ \text{Cauchy-Schwarz} &\longrightarrow \leq \left( \int_0^\tau dt \Theta^{(i)}(t) \right) \cdot \left( \int_0^\tau dt \dot{\sigma}(t) \right) \\ &= \tau \bar{\Theta} \Delta S\end{aligned}$$

あとは  $W/\tau$  を上から抑えれば,

## Thm.4 の導出 (続き)

$$\frac{W}{\tau} = \frac{Q_H \eta}{\tau} \cdot \frac{\beta_H Q_H - \beta_L Q_L}{\Delta S} \cdot \frac{\beta_L Q_H}{\beta_L Q_H}$$

$$= \eta(\eta_C - \eta) \frac{\beta_L Q_H^2}{\tau \Delta S}$$

上の不等式  $\longrightarrow$   $\leq \eta(\eta_C - \eta) \frac{\beta_L Q_H^2 \bar{\Theta}}{(Q_H + Q_L)^2}$

$$\leq \eta(\eta_C - \eta) \beta_L \bar{\Theta}.$$

となり, 示された.



ご清聴ありがとうございました.

### 7. $\theta^{(i)}$ の評価

#### 7.1. $\theta^{(1)}$ の評価

#### 7.2. $\theta^{(2)}$ と熱伝導度

## $\Theta^{(1)}$ の評価

$$\begin{aligned}
 \Theta_\mu^{(1)} &= \frac{1}{c_0} \sum_{w \neq w'} (\Delta E_w^\mu)^2 (R_{ww'}^\mu p_{w'} + R_{w'w}^\mu p_w) \\
 &= \frac{1}{c_0} \sum_w \left( \sum_{w' \neq w} (\Delta E_w^\mu)^2 R_{ww'}^\mu p_{w'} + (\Delta E_w^\mu)^2 (-R_{ww}^\mu) p_w \right) \\
 &= \frac{1}{c_0} \left( \sum_{w', w} (\Delta E_w^\mu)^2 R_{ww'}^\mu p_{w'} - 2 \sum_w (\Delta E_w^\mu)^2 R_{ww}^\mu p_w \right) \\
 &= \frac{1}{c_0} \left( \sum_w (\Delta E_w^\mu)^2 \left[ \frac{d}{dt} \right]_\mu p_w + 2 \sum_w (\Delta E_w^\mu)^2 |R_{ww}^\mu| p_w \right) \\
 &\leq \frac{1}{c_0} \sum_{w^{-m}} p_{w^{-m}} \left( \left[ \frac{d}{dt} \right]_\mu \langle (E_w^\mu)^2 \rangle_{t, w^{-m}} + 2R_{max} \langle (E_w^\mu)^2 \rangle_{t, w^{-m}} \right).
 \end{aligned}$$

上式で1項目が発散することはなさそうなので,  $R_{max}$  が有界であれば  $\Theta^{(1)}$  も有界だとわかる.

## $\Theta^{(2)}$ と熱伝導度

線形応答領域において  $\Theta^{(2)}$  が熱伝導度に対応する.

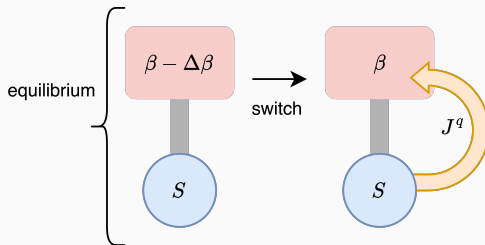


Figure 3: 状況設定

$\Delta\beta > 0$  として, 逆温度  $\beta - \Delta\beta$  の熱浴と平衡状態にあった系について, 熱浴を逆温度  $\beta$  のものに取り替えると, 熱浴に  $J^q$  だけの熱流が流れる. このとき, 現象論的には Fourier の法則より

$$J^q = \kappa \Delta\beta,$$

と表されると期待される. ここで  $\kappa$  は熱伝導度である.

## $\Theta^{(2)}$ と熱伝導度

このとき,  $p_i^\beta$  を温度  $\beta$  の canonical 分布として  $J^q$  を式変形すると,

$$J^q = \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^{\beta - \Delta\beta}$$

$\Delta\beta$ で展開  $\longrightarrow$  
$$= \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^\beta \left( 1 + (E_i - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta \right) + O((\Delta\beta)^2)$$

詳細つりあい  $\longrightarrow$  
$$\begin{aligned} &\simeq \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^\beta (E_i - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^\beta (E_i - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta + \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_j - E_i) R_{ij} p_j^\beta (E_j - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j) \left[ R_{ji} p_i^\beta (E_i - \langle E \rangle^\beta) - R_{ij} p_j^\beta (E_j - \langle E \rangle^\beta) \right] \Delta\beta \end{aligned}$$

詳細つりあい  $\longrightarrow$  
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j)^2 R_{ji} p_i^\beta \Delta\beta \\ &= \Theta^{(2)} \Delta\beta, \end{aligned}$$

と変形されるので,

$$\kappa = \Theta^{(2)}$$

となり,  $\Theta^{(2)}$  に物理的意味が与えられる.