

ゆらぎの熱力学とパワー・効率トレードオフ関係

C2SB2105 森佑一

2026 年 1 月 10 日

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

Definition 1 (Shannon エントロピー)

Shannon エントロピー $H(x)$ を以下のように定義する.

$$H(x) := - \sum_i P_i \ln P_i.$$

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

状況設定

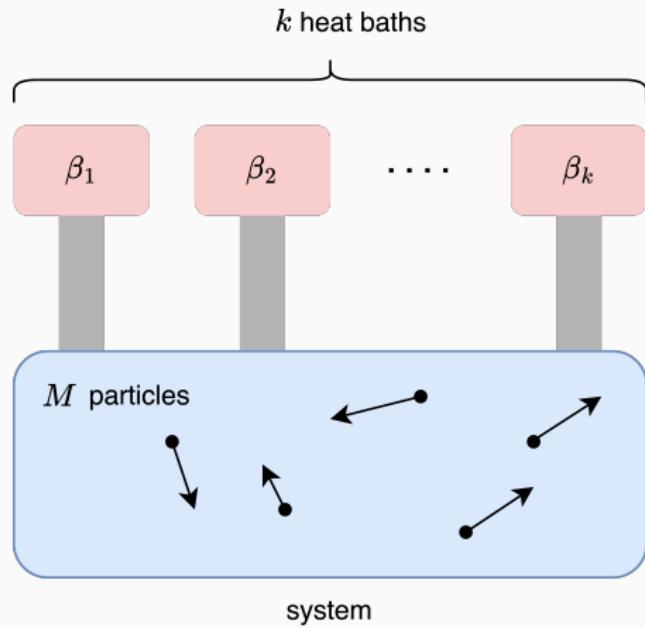


Figure 1: 系の概念図

状況設定

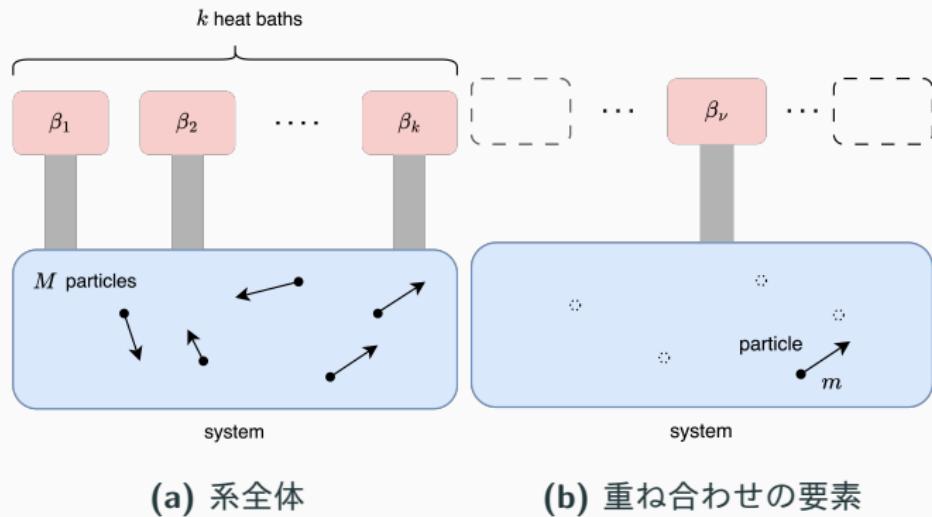


Figure 2: 概念図

熱流とエントロピー生成率とのトレードオフ

Theorem 2 (熱流とエントロピー生成率とのトレードオフ)

以上の setting の下で,

$$\sum_{\nu=1}^k |J_\nu^q| \leq \sqrt{\Theta^{(1)} \dot{\sigma}}.$$

ここで,

$$\Theta^{(1)} := \frac{1}{c_0} \sum_{\mu} \sum_{i \neq j} (\Delta E_i^{\mu})^2 (R_{ij}^{\mu} p_j + R_{ji}^{\mu} p_i) =: \sum_{\mu} \Theta_{\mu}^{(1)},$$

であり,

$$c_0 = \frac{8}{9}, \quad \Delta E_i^{\mu} := E_m^i - \langle E \rangle_{t, w^{-m}}$$

とする.

局所詳細つりあいがある場合

Theorem 3 (熱流とエントロピー生成率とのトレードオフ (局所詳細つりあいがある場合))

さらに、任意の w, w', ν について局所詳細つりあい

$$R_{ij}^\mu e^{-\beta_\nu E_j} = R_{ji}^\mu e^{-\beta_\nu E_i},$$

が成立するとき、

$$\sum_{\nu=1}^k |J_\nu^q| \leq \sqrt{\Theta^{(2)} \dot{\sigma}}.$$

ここで、

$$\Theta^{(2)} := \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (E_i - E_j)^2 R_{ij} p_j =: \sum_\mu \Theta_\mu^{(2)},$$

最後の $=:$ では R_{ij} の分解を使っている。

目次

1. はじめに
2. 数学の準備
 - 2.1. Markov Jump 課程
 - 2.2. 情報理論の知識
3. 物理的要請（ミニマム）
 - 3.1. 系の時間発展と熱
 - 3.2. エントロピー生成
4. 概観
 - 4.1. IFT と IFT like equalities
 - 4.2. トレードオフ不等式
5. 熱流とエントロピー生成率のトレードオフ
6. パワーと効率のトレードオフ

パワーと効率のトレードオフ

Theorem 4 (パワーと効率のトレードオフ)

上で定義した notation の下で

$$\frac{W}{\tau} \leq \bar{\Theta}^{(i)} \beta_L \eta (\eta_C - \eta), \quad \bar{\Theta}^{(i)} := \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \Theta(t)^{(i)}.$$

remark

$\Theta^{(i)}$ は経路に依存した量なので、上の関係式で $\bar{\Theta}^{(i)}$ を定数だと
思ってパワーの上界を与える引数として効率をもつ二次関数を想起する
のは危険である。

Thm.4 の導出

先に以下のように不等式を示しておくと,

$$\begin{aligned}(Q_H + Q_L)^2 &= \left(- \int_0^\tau dt J_1^q(t) + \int_0^\tau J_2^q(t) \right)^2 \\&\leq \left(\int_0^\tau dt \sum_\nu |J_\nu^q(t)| \right)^2 \\&\stackrel{\text{Thm.2, Thm.3}}{\longrightarrow} \leq \left(\int_0^\tau dt \sqrt{\Theta^{(i)} \dot{\sigma}(t)} \right)^2 \\&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\longrightarrow} \leq \left(\int_0^\tau dt \Theta^{(i)}(t) \right) \cdot \left(\int_0^\tau dt \dot{\sigma}(t) \right) \\&= \tau \bar{\Theta} \Delta S\end{aligned}$$

あとは W/τ を上から抑えれば,

Thm.4 の導出 (続き)

$$\begin{aligned}\frac{W}{\tau} &= \frac{Q_H \eta}{\tau} \cdot \frac{\beta_H Q_H - \beta_L Q_L}{\Delta S} \cdot \frac{\beta_L Q_H}{\beta_L Q_H} \\&= \eta(\eta_C - \eta) \frac{\beta_L Q_H^2}{\tau \Delta S} \\&\stackrel{\text{上の不等式}}{\longrightarrow} \leq \eta(\eta_C - \eta) \frac{\beta_L Q_H^2 \bar{\Theta}}{(Q_H + Q_L)^2} \\&\leq \eta(\eta_C - \eta) \beta_L \bar{\Theta}.\end{aligned}$$

となり, 示された.

おわりに

ご清聴ありがとうございました.

目次（補足資料）

7. $\Theta^{(i)}$ の評価

7.1. $\Theta^{(1)}$ の評価

7.2. $\Theta^{(2)}$ と熱伝導度

$\Theta^{(1)}$ の評価

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu}^{(1)} &= \frac{1}{c_0} \sum_{w \neq w'} (\Delta E_w^{\mu})^2 (R_{ww'}^{\mu} p_{w'} + R_{w'w}^{\mu} p_w) \\&= \frac{1}{c_0} \sum_w \left(\sum_{w' \neq w} (\Delta E_w^{\mu})^2 R_{ww'}^{\mu} p_{w'} + (\Delta E_w^{\mu})^2 (-R_{ww}^{\mu}) p_w \right) \\&= \frac{1}{c_0} \left(\sum_{w',w} (\Delta E_w^{\mu})^2 R_{ww'}^{\mu} p_{w'} - 2 \sum_w (\Delta E_w^{\mu})^2 R_{ww}^{\mu} p_w \right) \\&= \frac{1}{c_0} \left(\sum_w (\Delta E_w^{\mu})^2 \left[\frac{d}{dt} \right]_{\mu} p_w + 2 \sum_w (\Delta E_w^{\mu})^2 |R_{ww}^{\mu}| p_w \right) \\&\leq \frac{1}{c_0} \sum_{w^{-m}} p_{w^{-m}} \left(\left[\frac{d}{dt} \right]_{\mu} \langle (E_w^{\mu})^2 \rangle_{t,w^{-m}} + 2R_{max} \langle (E_w^{\mu})^2 \rangle_{t,w^{-m}} \right).\end{aligned}$$

上式で 1 項目が発散することはなさそうなので, R_{max} が有界であれば $\Theta^{(1)}$ も有界だとわかる.

$\Theta^{(2)}$ と熱伝導度

線形応答領域において $\Theta^{(2)}$ が熱伝導度に対応する.

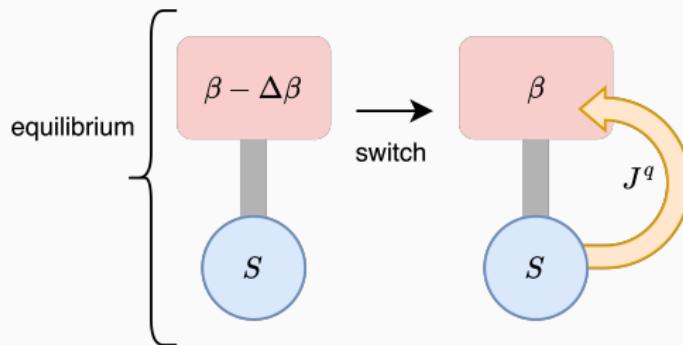


Figure 3: 状況設定

$\Delta\beta > 0$ として, 逆温度 $\beta - \Delta\beta$ の熱浴と平衡状態にあった系について, 热浴を逆温度 β のものに取り替えると, 热浴に J^q だけの热流が流れる. このとき, 现象论的には Fourier の法則より

$$J^q = \kappa \Delta\beta,$$

と表されると期待される. ここで κ は热伝導度である.

$\Theta^{(2)}$ と熱伝導度

このとき, p_i^β を温度 β の canonical 分布として J^q を式変形すると,

$$J^q = \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^{\beta - \Delta\beta}$$

$\Delta\beta$ で展開 $\longrightarrow = \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^\beta (1 + (E_i - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta) + O((\Delta\beta)^2)$

詳細つりあい $\longrightarrow \simeq \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^\beta (E_i - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j) R_{ji} p_i^\beta (E_i - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta + \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_j - E_i) R_{ij} p_j^\beta (E_j - \langle E \rangle^\beta) \Delta\beta$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j) [R_{ji} p_i^\beta (E_i - \langle E \rangle^\beta) - R_{ij} p_j^\beta (E_j - \langle E \rangle^\beta)] \Delta\beta$$

詳細つりあい $\longrightarrow = \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j)^2 R_{ji} p_i^\beta \Delta\beta$

$$= \Theta^{(2)} \Delta\beta,$$

と変形されるので,

$$\kappa = \Theta^{(2)}$$

となり, $\Theta^{(2)}$ に物理的意味が与えられる.