量子情報入門から Single-Shot の量子熱力学まで

森

2025 年 2 月 20 日

目次

第 1 章　量子情報の枠組みミニマム

1.1　状態

1.1.1　純粋状態

1.1.2　混合状態

1.2　量子操作

量子操作を記述する写像 $\mathcal{E}$ の満たすべき性質を箇条書きにしていく.

- 定義域 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ と値域 $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ は異なっていても良さそう. というのも, 例えば入力は 3-qubit, 全て測定して潰して出力は状態はないというような過程を考えても良いはずだから.
- $\mathcal{E}$ は線型であるべき. これは密度演算子は状態の古典確率混合であるので, $\mathcal{E}$ による操作で出てくる密度演算子は元の状態が $\mathcal{E}$ で遷移したものの同じ確率分布による混合になってほしいから.
- 物理的には出力も量子状態なので, 少なくとも入力が半正定値演算子なら出力も半正定値であるべきである.
- さらに, ある系を制御して, その外部系には何もしないような量子操作を考える. そんな写像は $\mathcal{E} \otimes I$ でかけるはずである. このとき定義域は $\mathcal{L}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{H}_{env})$ で, 入力が半正定値なとき出力は同様に半正定値であるはずである. ちなみに影響を加えない環境は好きなだけ大きい次元をとって構わないはずである.

以上を踏まえて物理的に実現可能な量子操作は次の写像で表現されると考える.

定義 1.2.1 (CP 写像)**.** $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}')$ は線型写像とする．$\mathcal{E}$ が以下の 3 つを満たすとき, これを CP 写像と呼ぶ（Complete-Positive）．

1. X, Y を演算子とする．このとき, $X \geq 0$ ならば $\mathcal{E}(X) \geq 0$．この条件を満たせば, その写像は Positive であるという．
2. $\mathcal{E} \otimes I_n$ が Positive である．これを n-positive と呼ぶ.
3. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $\mathcal{E}$ は n-positive.

参考のために, Positive だが CP ではない写像の例を挙げる.

例 1 (Positive but not CP)**.** 簡単のために qubit 空間 $\mathcal{H}_2$ 上で考える．いつも通り $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を正規直交基底とする．$\mathcal{E}_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ を $\mathcal{E}_T : |i\rangle\langle j| \mapsto |j\rangle\langle i|$ な線型写像とする．これは Positive である[1)]．次に, $I \otimes \mathcal{E}_T$ を例えば $|\psi\rangle = |00\rangle + |11\rangle$（規格化は無視）に作用させることを考える.

$$\rho_\psi = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|$$

とかけることに注意すれば,

$$I \otimes \mathcal{E}_T(\rho_\psi) = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \doteq \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

となる．この行列の固有値は $1, 1, 1, -1$ なので, 確かにこれは CP ではない.

次に TP（Trace Preserving）を定義する.

定義 1.2.2 (TP 写像)**.** 線型写像 $\mathcal{E}$ が任意の演算子 X について

$$\mathrm{tr}(\mathcal{E}(X)) = \mathrm{tr}(X)$$

を満たすとき, これを TP という．また, 任意の $X \geq 0$ について $\mathrm{tr}(\mathcal{E}(X)) \leq \mathrm{tr}(X)$ のとき, $\mathcal{E}$ は trace-nonincreasing という.

CPTP 写像には, 理解が深まる同値な表現がある.

---

1) $\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \geq 0$ であるとき両辺転置を取れば $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} \geq 0$

定理 1.2.3 (CPTP 写像の同値な表現)**.** 線型写像 $\mathcal{E}$ について, 以下は同値：

(a). $\mathcal{E}$ は CPTP 写像.

(b). $\mathcal{E}$ は $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$ を満たす Kraus 演算子で $\mathcal{E}(\rho) = \sum_k M_k \rho M_k^\dagger$ とかける.

(c). 環境系を表す量子状態 $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$ が存在して，ある Unitary 演算子 $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}'_A$ を使って $\mathcal{E}(\rho) = \mathrm{tr}_{A'}(U\rho \otimes \sigma U^\dagger)$ とかける．これを Stinespring 表現という.

証明　Appendix にかけたら書く. □

1.2.1　モチベーション

1.2.2　同値な表現

1.3　測定

1.3.1　量子測定

1.3.2　POVM

1.3.3　応用例：量子状態の識別

1.4　複合系

1.5　量子状態間の尺度

1.5.1　トレース距離

1.5.2　忠実度

1.5.3　応用例：クローン不可能定理

1.6　色々なエントロピー

1.6.1　von Neumann エントロピー

1.6.2　量子相対エントロピー

1.6.3　Rényi-α ダイバージェンス

1.6.4　平滑化 Rényi-α ダイバージェンス

第 2 章　量子仮説検定

2.1　状況設定

2.2　量子 Neyman-Pearson 検定

2.3　漸近論と量子相対エントロピーの創発

第 3 章　Single-Shot の量子熱力学

3.1　状況設定

3.2　Exact Case

3.3　Approximate Case

3.4　Assymptotic Case

付録 A　CPTP 写像の 3 つの表現の同値性の証明

付録 B　i.i.d. での量子 Stein の補題の証明

参考文献

[1]　サンプル