

相関基礎 2025 大問 1-3



最終更新日 2025 年 8 月 8 日

第 1 問

I. (1).

$x = 0$ を代入すると $y = 0$ になる. $x \neq 0$ とする. x で両辺割ると

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \quad (1)$$

となる. 上式の一般解を y , 特殊解を y_0 とすると,

$$\left(\frac{d}{dx} - \frac{1}{x} \right) (y - y_0) = x^2 - x^2 = 0$$

となるので, まず (1) 式の特殊解を 1 つ見つけた後に

$$y' - \frac{y}{x} = 0 \quad (2)$$

の一般解 y_1 を求めると, 求める一般解は $y_1 + y_0$ である.

$y_0 = x^3/2$ とすると, これは (1) 式の特殊解になっていることがわかる. 次に (2) 式の一般解を求める. 変数分離して積分すると,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \therefore \ln |y| = \ln |x| + C, \quad \therefore \frac{y}{x} = A$$

ここで C, A は定数. 以上より, 求める一般解は

$$y = Ax + \frac{x^3}{2}$$

となる ($x = 0$ で $y = 0$ も満たす).

I. (2).

(1) と同じように, 与えられた ODE の特殊解 y_0 を一つ見つけたあと,

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad (3)$$

の一般解を求めれば良い.

$y_0 = (x^2 - \frac{2}{3}x)e^x$ とすると, これは欲しい特殊解になっている¹⁾. 次に (3) の一般解を求める. λ を定数として, $y = e^{\lambda x}$ を (3) の左辺に代入すると,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 2\right)e^{\lambda x} = (\lambda^2 + \lambda - 2)e^{\lambda x}$$

となるので, $\lambda = 1, -2$ のとき $y = e^{\lambda x}$ は (3) の解である. この 2 解は独立で²⁾, 2 階斉次線型微分方程式の一般解は独立な 2 解の重ね合わせなので, 一般解は

$$y = Ae^{-2x} + Be^x$$

(A, B は定数) となる. 以上より, 求める一般解は

$$y = Ae^{-2x} + Be^x + \left(x^2 - \frac{2}{3}x\right)e^x$$

となる.

II. (1).

これは周期 2π の周期関数であり, かつ偶関数なので

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

と Fourier 級数展開される³⁾. 非負整数 m, n について

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos mx \cos nx = \begin{cases} 1 & (m = n), \\ 0 & (m \neq n). \end{cases} \quad (4)$$

なので,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 \cos nx = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & (n = 0), \\ \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} & (n > 0). \end{cases}$$

と計算され (途中計算略), 以上より

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

となる.

1) 私は $y = (ax^2 + bx + c)e^x$ を代入し, a, b, c を決める方針で特殊解を見つけた. 省いているけど, 答案にはこれが本当に特殊解になっていることを示した方が良いかも.

2) Wronskian を計算してそれが非零を見せればもっと丁寧?

3) a_0 の項は 2 で割っておくと見通しが良い. 忘れていても (4) の計算をして上手く調整すれば良い.

II. (2).

$f(x)^2$ の積分を 2 通りで表す.

$$\begin{aligned}\frac{2\pi^5}{5} &= \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \right)^2 \\ &= \frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \int_{-\pi}^{\pi} dx (\cos nx)^2 = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\end{aligned}$$

以上より,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

となる.

III. 反例 1 つ目

常に成立しない.

$$f_n(x) = \begin{cases} 2(x-n) & (n \leq x \leq n+1/2), \\ -2(x-n-1) & (n+1/2 \leq x \leq n), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

とすると, これは $n \rightarrow \infty$ で $f(x) = 0$ に各点収束し,

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

だが,

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 0$$

となり, 反例になっている⁴⁾.

III. 反例 2 つ目

今度は $f_n(x)$ を以下のようにする.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n^2}x & (0 \leq x \leq n/2), \\ -\frac{2}{n^2}x + \frac{2}{n} & (n/2 \leq x \leq n), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

4) 自力でできなかった. [1] を参考にした.

1 つ目と同じように考えれば, これは $f(x) = 0$ に収束するが⁵⁾, n を飛ばす前の三角形の面積は n に依存せず $1/2$ なので, 反例になっている.

IV. (1).

$i, j = 1, 2, 3, 4$ について, Ae_i, e_jA を愚直に計算することで

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

を得る.

IV. (2).

$bc \neq 0$ なので $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ である. そこで b ないしは c が対角成分にくるように M を行基本変形すると, $\text{rank} M = 2$ とわかる. 従って

$$\dim \text{Ker} f_A = 4 - \text{rank} M = 2$$

とわかる. 最後に $\text{Ker} f_A$ の基底を構成する. $e'_1 := e_1 + e_4$ とすれば,

$$f_A(e'_1) = f_A(e_1) + f_A(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

なので, $e'_1 \in \text{Ker} f_A$. また, $e'_2 := (a-d)e_1 + be_2 + ce_3$ とすれば, 同じような計算から $f_A(e'_2) = 0$, よって $e'_2 \in \text{Ker} f_A$ がわかる. e'_1, e'_2 は独立で, $\text{Ker} f_A$ の次元は 2 なので, $\{e'_1, e'_2\}$ は求める基底となっている.

V. (1)

a, b を定数として, $f = r^n(a \sin n\theta + b \cos n\theta)$ とすると,

$$\Delta f = \begin{cases} \{n(n-1)r^{n-2} + nr^{n-2} - n^2r^{n-2}\} (a \sin n\theta + b \cos n\theta) = 0 & (n \geq 2), \\ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) (a \sin n\theta + b \cos n\theta) = 0 & (n = 1). \end{cases}$$

となるので, この f は答え.

5) これは一様収束になっている. $\sup_{[0, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ より従う. 各点収束よりも強い一様収束についての反例にもなっているのが偉い. この反例は友人の M 君に教えてもらった.

V. (2)

3 倍角の公式から, $\sin^3 \theta = (3 \sin \theta - \sin 3\theta)/4$ とかけるが, (1) の結果から $3r \sin \theta/4$ も $-r^3 \sin 3\theta/4$ も Laplace 方程式の解であり, Laplace 方程式は解の重ね合せもまた解になることより,

$$u = \frac{3r}{4} \sin \theta - \frac{r^3}{4} \sin 3\theta$$

は求めるべき境界値問題の解になっている. これを (x, y) 座標系に直せば ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ などを使って),

$$u = \frac{y}{4}(3 - 3x^2 + y^2)$$

を得る.

第2問

I. (1).

与えられた Hamiltonian を代入すれば

$$[\hat{x}, \hat{H}] = \left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m} \right] = \frac{1}{2m} (\hat{p}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p}) = \frac{i\hbar}{m} \hat{p}$$

を得る. 同様にして

$$[\hat{p}, \hat{H}] = -i\hbar m\omega^2 \hat{x}$$

となる.

I. (2).

状態 $|\psi\rangle$ は定常なので, Schrödinger 方程式を使うことで

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \frac{\partial \langle \psi |}{\partial t} \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \frac{\partial | \psi \rangle}{\partial t} \\ &= -\frac{\langle \psi |}{i\hbar} \hat{H} \hat{A} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{A} \frac{\hat{H}}{i\hbar} | \psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi \rangle \end{aligned}$$

とかけるので, (1) の結果より

$$0 = \frac{1}{i\hbar} (-i\hbar m\omega^2) \langle \hat{x} \rangle, 0 = \frac{1}{i\hbar} \frac{i\hbar}{m} \langle \hat{p} \rangle, \quad \therefore \langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$$

を得る.

I. (3).

(2) の計算を使うと,

$$\frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\hat{x}\hat{p}, \hat{H}] | \psi \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{x}\hat{p} | \psi \rangle = 0$$

なので, 左辺の交換関係を計算して整理することで

$$\frac{m\omega^2}{2} \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{1}{2m} \langle \hat{p}^2 \rangle, \quad \therefore \langle \hat{U} \rangle = \langle \hat{K} \rangle$$

を得る⁶⁾.

I. (4).

基底状態は定常状態なので, これまでの結果が使える. (3) の結果から

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{K} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{U} | 0 \rangle = 2 \langle 0 | \hat{K} | 0 \rangle = 2 \langle 0 | \hat{U} | 0 \rangle$$

6) virial 定理から期待される結果と一致.

であり, $\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \hbar\omega/2$ なので

$$\langle 0 | \left(\frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \right) | 0 \rangle = \langle 0 | \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} \right) | 0 \rangle = \frac{\hbar\omega}{4}, \quad \therefore \langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle 0 | \hat{p}^2 | 0 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

また (2) より $\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p} \rangle = 0$ なので, $\delta x_0, \delta y_0$ の定義から

$$\delta x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \delta p_0 = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$$

を得る⁷⁾.

I. (5).

参考文献

- [1] 数学の景色「極限と積分の順序交換定理 6 つと交換できない例 3 つまとめ」
<https://mathlandscape.com/limit-int/#toc8>

7) $\delta x_0 \cdot \delta p_0 = \hbar/2$ と計算され, 最小不確定になっていて安心.