Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

Carlos A Delgado

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

* Lógica de predicados
* Concepto de predicado
* Cuantificadores
* Cuantificadores anidados
* Equivalencias lógicas
* Representación de lenguaje natural en lógica de predicados
* Inferencia de predicados
* Lógica de predicados de primer orden

predicado

nombre masculino

1. Parte de una oración en la que se dice o se predica algo del sujeto

En la oración "el tren llegaba con retraso", "llegaba con retraso" es el predicado

En la oración "marte es un planeta", "es un planeta" es el predicado

Lógica de predicados

"El tren llegaba con retraso"

"Marte es un planeta"

"Donald Trump habla inglés"

“Diciembre es un mes de 31 días”

“El Deportivo Cali es un equipo de la primera A”

Lógica de predicados

"El tren <u>llegaba con retraso</u>"

"Marte <u>es un planeta</u>"

"Donald Trump <u>habla inglés</u>"

“Diciembre <u>es un mes de 31 días</u>”

“El Deportivo Cali <u>es un equipo de la primera A</u>”

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ⇨ planeta(marte)

planeta (x)

x es un planeta

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ⇨ planeta(marte)

predicado *sujeto*

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ⇨ planeta(marte)

"Venus es un planeta" ⇨ ???

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ⇨ planeta(marte)

"Venus es un planeta" ⇨ planeta(venus)

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ⇨ planeta(marte)

"Venus es un planeta" ⇨ planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés" ⇨ ???

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ➡ planeta(marte)

"Venus es un planeta" ➡ planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés" ➡ hablaIngles(donaldTrump)

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"	⇒	planeta(marte)
"Venus es un planeta"	⇒	planeta(venus)
"Donald Trump habla inglés"	⇒	hablaIngles(donaldTrump)
"Uribe habla inglés"	⇒	???

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ➡ planeta(marte)

"Venus es un planeta" ➡ planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés" ➡ hablaIngles(donaldTrump)

"Uribe habla inglés" ➡ hablaIngles(uribe)

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" ⇒ planeta(marte)

predicado *sujeto*

Lógica de predicados

"Marte es un planeta" planeta(marte)

predicado sujeto

planeta(x): "x es un planeta"

x es un elemento de un conjunto que llamamos que llamamos el universo del discurso.

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

planeta(marte) ← V

planeta(titan) ← F

planeta(saturno) ← V

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

planeta(marte) es **verdadero**

planeta(titan) es **falso**

planeta(saturno) es **verdadero**

Lógica de predicados

"Cali es un equipo de la primera A"

Lógica de predicados

"Cali es un equipo de la primera A" ⇒ liga(Cali)

$\underset{\text{predicado}}{\uparrow}$ $\underset{\text{sujeto}}{\uparrow}$

Lógica de predicados

"Cali es un equipo de la primera A" ⇨ liga(Cali)

predicado *sujeto*

liga(x): "x es un equipo de la primera A"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

liga(Cali) v

liga(Cortuluá) f

liga(Millonarios) v

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

liga(Cali) es **verdadero**

liga(Cortuluá) es **falso**

---

liga(Millonarios) es **verdadero**

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

P(x): "x es mayor que 3"

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

P(x): "x es mayor que 3"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

P(5)

P(2)

P(14)

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

P(x): "x es mayor que 3"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

P(5) es **verdadero**

P(2) es **falso**

P(14) es **verdadero**

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$Q(x,y)$: "$x = y + 3$"

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$Q(x,y)$: "$x = y + 3$"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

Q(4,1)

Q(10,7)

Q(5,3)

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$Q(x,y)$: "$x = y + 3$"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

Q(4,1) es **verdadero**

Q(10,7) es **verdadero**

Q(5,3) es **falso**

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

madre(x,y): “x es la madre de y”

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

madre(x,y): “x es la madre de y”

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

madre(maria,jesus)

madre(amparoGrisales,alvaroUribe)

madre(shakira,milan)

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

madre(x,y): "x es la madre de y"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

madre(maria,jesus) es **verdadero**

madre(amparoGrisales,alvaroUribe) es **falso**

madre(shakira,milan) es **verdadero**

Lógica de predicados

- P(x): “x es mayor que 3”
- Q(x,y): “x = y + 3”
- hablaIngles(x): “x habla inglés”
- madre(x,y): “x es la madre de y”

Lógica de predicados

- P(x): "x es mayor que 3"
- Q(x,y): "x = y + 3"
- hablaIngles(x): "x habla inglés"
- madre(x,y): "x es la madre de y"

¿Cuál es el valor de verdad de P(x)?

Lógica de predicados

- P(x): “x es mayor que 3”
- Q(x,y): “x = y + 3”
- hablaIngles(x): “x habla inglés”
- madre(x,y): “x es la madre de y”

Para conocer el valor de verdad de un predicado se debe especificar el sujeto

Lógica de predicados

Sean:

- P(x): "x es mayor que 3"
- Q(x,y): "x = y + 3"
- hablaIngles(x): "x habla inglés"
- madre(x,y): "x es la madre de y"

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- P(0), P(100)
- Q(7,4), Q(3,2)
- hablaIngles(AlvaroUribe), hablaIngles(BarackObama)
- madre(María,Jesús),madre(AmparoGrisales,AlvaroUribe)

Lógica de predicados

Expresar en lógica de predicados los siguientes enunciados y mostrar ejemplos de expresiones que sean falsas y otras que sean verdaderas:

- $x^2 + y^2 = z^2$ $\equiv S(x, y, z)$
- x es una película de ciencia ficción

PeliculaFiccion(x)

Lógica de predicados

Expresar en lógica de predicados los siguientes enunciados y mostrar ejemplos de expresiones que sean falsas y otras que sean verdaderas:

- $P(x,y,z)$: "$x^2 + y^2 = z^2$"

  $P(3,4,5)$ es **verdadero**

  $P(2,5,7)$ es **falso**

- $Q(x)$: "x es una película de ciencia ficción"

  Q(star wars) es **verdadero**

  Q(El conjuro) es **falso**

Lógica de predicados

Expresar en lógica de predicados los siguientes enunciados y mostrar ejemplos de expresiones que sean falsas y otras que sean verdaderas:

- $x + y = z$
- x es un mes de 31 días
- $x + 1 > x$

Lógica de predicados

P(x,y,z): "x + y = z"

- P(2,3,5) es verdadero
- P(1,2,0) es falso

Q(x): "x es un mes de 31 días"

- Q(diciembre) es verdadero
- Q(febrero) es falso

R(x): "x + 1 > x"

- R(2) es verdadero
- No hay una expresión que sea falsa

Lógica de predicados

Dominio

Cada variable lógica en un predicado tiene asociado un dominio o **Universo del discurso**, esto es, un conjunto de posibles valores

Lógica de predicados

Dominio

Cada variable lógica en un predicado tiene asociado un dominio o **Universo del discurso**, esto es, un conjunto de posibles valores

- M(x): "**x es un mes de 31 días**"

  Los posibles valores que puede tomar x son:

  {Enero, Febrero, Marzo, Abril, Mayo, Junio, Julio, Agosto, Septiembre, Octubre, Noviembre, Diciembre}

Lógica de predicados

D(x): "**x es un número entero diferente de 1**"

Lógica de predicados

D(x): "**x es un número entero diferente de 1**"

El dominio de x son los números enteros Z

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado M(x) donde x tiene como dominio los números enteros Z={-∞,…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…,∞}

M(x): "**x+1 > x**"

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado M(x) donde x tiene como dominio los números enteros Z={-∞,…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…,∞}

M(x): "**x+1 > x**"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- M(-2)
- M(-1)
- M(0)
- M(1)
- M(2)

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado M(x) donde x tiene como dominio los números enteros Z={-∞,…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…,∞}

M(x): "**x+1 >x**"

M(-2): "-1>-2" es verdadero

M(-1): "0>-1" es verdadero

M(0): "1>0" es verdadero

M(1): "2>1" es verdadero

M(2): "3>2" es verdadero

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado M(x) donde x tiene como dominio los números enteros Z={-∞,...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,∞}

M(x): "**x+1 >x**"

M(x) es cierto para todos los elementos del dominio de x, esto se expresa por medio del **cuantificador universal**

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado M(x) donde x tiene como dominio los números enteros $\boxed{Z=\{-\infty,\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,\infty\}}$

M(x): "**x+1 > x**"

M(x) es cierto para todos los elementos del dominio de x, esto se expresa por medio del **cuantificador universal**

$\forall$**x M(x)**

Esto es verdadero sii M(x) es verdadero para todos los x del dominio o del universo del discurso.

Esto es falso, si existe un x tal que M(x) es falso.

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado M(x) donde x tiene como dominio los números enteros Z={-∞,…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…,∞}

M(x): "**x+1 >x**"

M(x) es cierto para todos los elementos del dominio de x, esto se expresa por medio del **cuantificador universal**

$\forall$**x M(x)**

Para todo x en el dominio

Lógica de predicados

Cuantificación universal

La cuantificación universal de P(X), expresada como $\forall x\, P(x)$, es la proposición:

> *"P(x) es verdadero para todos los valores de x en el universo del discurso"*

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x\, M(x)$, donde $M(x)$: "x>2", dominio los enteros

$\forall x\, M(x) = F$ ejemplo $M(1) = F$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x\ M(x)$, donde $M(x)$: "$x>2$", dominio los enteros
- $\forall x\ N(x)$, donde $N(x)$: "$x^2 \geq x$", dominio los $\boxed{\text{reales}}$

$\forall_x N(x) = F$ $\qquad N(0.5) = 0.25 = F$

$0.25 \geq 0.5$ X

dominio los enteros

$\forall_x N(x) = V$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x\ M(x)$, donde $M(x)$: "$x>2$", dominio los enteros
- $\forall x\ N(x)$, donde $N(x)$: "$x^2 \geq x$", dominio los reales
- $\forall x\ P(x)$, donde $P(x)$: "x ve Discretas por primera vez", dominio los estudiantes de este salón

F

$x = pepito$

$\boxed{p(pepito) = F}$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x\ M(x)$, donde $M(x)$: "$x>2$", dominio los enteros
- $\forall x\ N(x)$, donde $N(x)$: "$x^2 \geq x$", dominio los reales
- $\forall x\ P(x)$, donde $P(x)$: "x ve Discretas por primera vez", dominio los estudiantes de este salón
- $\forall x\ E(x)$, donde $E(x)$: "x tiene el promedio sobre 3.2", dominio los estudiantes de este salón

V

x tiene el promedio sobre 4.5

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x\ M(x)$, donde $M(x)$: "$x>2$", dominio los enteros
- $\forall x\ N(x)$, donde $N(x)$: "$x^2 \geq x$", dominio los reales
- $\forall x\ P(x)$, donde $P(x)$: "x ve Discretas por primera vez", dominio los estudiantes de este salón
- $\forall x\ E(x)$, donde $E(x)$: "x tiene el promedio sobre 3.2", dominio los estudiantes de este salón
- $\forall x\ T(x)$, donde $T(x)$: "x trabaja", dominio los estudiantes de este salón

T(pepito) = F

F

Lógica de predicados

Cuantificación universal

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x\ P(x)$	$P(x)$ es verdadera para cada x del dominio	Por lo menos hay un valor de x para el cual no se cumple $P(x)$

Lógica de predicados

Cuantificación existencial

La cuantificación existencial de P(X), expresada como $\exists x\, P(x)$, es la proposición:

> *"P(x) es verdadero para alguno de los valores de x en el universo del discurso"*

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x\ M(x)$, donde $M(x)$: "x>3", dominio los enteros

$M(100) = V$ $\qquad\qquad$ $\exists x\ M(x) = V$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x\ M(x)$, donde $M(x)$: "$x>3$", dominio los enteros

$\exists x\ N(x)$, donde $N(x)$: "$x=x+1$", dominio los enteros

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x\, M(x)$, donde $M(x)$: "$x>3$", dominio los enteros

$\exists x\, N(x)$, donde $N(x)$: "$x=x+1$", dominio los enteros

$\exists x\, P(x)$, donde $P(x)$: "x ve Discretas por primera vez"

V

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x\, M(x)$, donde $M(x)$: "$x>3$", dominio los enteros

$\exists x\, N(x)$, donde $N(x)$: "$x=x+1$", dominio los enteros

$\exists x\, P(x)$, donde $P(x)$: "x ve Discretas por primera vez"

$\underbrace{\exists x\, E(x)}_{V}$, donde $E(x)$: "x tiene el promedio sobre 4.7"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x\ M(x)$, donde $M(x)$: "$x>3$", dominio los enteros

$\exists x\ N(x)$, donde $N(x)$: "$x=x+1$", dominio los enteros

$\exists x\ P(x)$, donde $P(x)$: "x ve Discretas por primera vez"

$\exists x\ E(x)$, donde $E(x)$: "x tiene el promedio sobre 4.7"

$\exists x\ T(x)$, donde $T(x)$: "x trabaja"

T

Lógica de predicados

Cuantificación existencial

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x\ P(x)$	P(x) es verdadera para algún x	P(x) es falsa para todos los x del dominio

$\forall x \, P(x)$

P(x) x es verdaero para todos los valores/miembros del universo discurso

$\exists x \, P(x)$

P(x) es verdadero, si alguno de los valores del universo del discurso es verdadero.

Lógica de predicados

Cuantificadores anidados

Se pueden utilizar varios y diferentes cuantificadores en la misma proposición

- $\forall x \forall y\ (x+y=y+x)$
- $\forall x \exists y\ (x+y=0)$ $y = -x$
- $\boxed{\exists x \forall y\ (x \cdot y=1)}$
- $\exists x \exists y\ (x+y=x-y)$

El valor de y es diferente para cada x x = 1, y = -1, x=4, y = -4

Existe un valor de x que sirve para todo y

Lógica de predicados

Dada la expresión

$\forall x \forall y\ (x+y=y+x)$, dominio los enteros

indica "para todo x y para todo y, se cumple que $x+y=y+x$"

Lógica de predicados

Dada la expresión

$$\forall x \forall y\ (x+y=y+x),\ \text{dominio los enteros}$$

indica "para todo x y para todo y, se cumple que x+y=y+x"

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y\ (x+y=x-y)$, dominio los enteros

$\neg P(5, 3)$ $5+3=5-3$

$8=2$ F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y\ (x+y=x-y)$, dominio los enteros

La expresión es **falsa** porque para x=1, y=2 no se cumple

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y\ (x \cdot y = y \cdot x)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y\ (x \cdot y = y \cdot x)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y$ ($(x>0 \wedge y<0) \rightarrow x \cdot y<0$), dominio los enteros

V → F ≡ F

X pos y pos V ∧ F → F F → F ≡ V

X pos y neg V ∧ V → V V → V ≡ V

X neg y pos F ∧ F → V F → V ≡ V

X neg y neg F ∧ V → F F → F ≡ V

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y \; (\; (x>0 \wedge y<0) \rightarrow x \cdot y<0 \;)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y\ (\ (x>0 \wedge y>0) \rightarrow x-y>0\ )$, dominio los enteros

$V \rightarrow F \equiv F$

$x = 1$ $\quad y = 5$

$V \wedge V \longrightarrow F \equiv V \longrightarrow F \equiv F$

Si y es mayor que x no se cumple el predicado. (Falso)

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y \; (\; (x>0 \wedge y>0) \rightarrow x-y>0 \;)$, dominio los enteros

La expresión es **falsa** porque para $x=1$, $y=2$, $x-y=-1$ no es positivo

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x \forall y P(x,y)$	P(x,y) es verdadera para todos los posibles valores x,y	Hay al menos un par x, y para el cual P(x,y) es falso

$\forall x \forall y \forall z \, P(x, y, z)$

¿Cuando es verdadero? Para toda combinación de x, y, z P(x,y,z) es VERDADERO.   P(x,y,z) debe ser una TAUTOLOGIA

Sea x,y, z con dominio 0 y 1, donde P(x,y,z) es x + y = x + z compruebe $\forall x \forall y \forall z \, P(x,y,z) \equiv F$

x	y	z	P(x,y,z)	x + y = x + z
1	1	1	V	
1	1	0	F	
1	0	1	F	
1	0	0	V	
0	1	1	V	
0	1	0	F	
0	0	1	F	
0	0	0	V	

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=x-y)$, dominio los enteros

Representa la expresión

"Existe x, existe y, tal que x+y=x-y"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=x-y)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=x-y)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera** porque para $x=1$, $y=0$ se cumple que $1+0=1-0=1$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y<x-y)$, dominio los enteros

$x = 3 \quad y = -2$

$1 < 5$ ✓

los enteros positivos

Falso

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \exists y\ (x+y<x-y)$$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera** porque para $x=1$, $y=-5$ se cumple que $-4<6$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y \sqrt{(x+y)} = (x+y)$, dominio los $\boxed{\text{reales}}$

$x = 0$
$y = 0$

$\sqrt{0} = 0$

$0^{\frac{1}{2}} = 0$

$x + y = 1$

$x = 0.8$

$y = 0.2$

$\sqrt{1} = 1$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y \sqrt{(x+y)} = (x+y)$, dominio los reales

La expresión es **verdadera** porque para x=0.6, y=0.4 se cumple que $\sqrt{(0.6+0.4)} = (0.6+0.4) = 1.0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=6 \wedge x-y=5)$, dominio los reales

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=6 \wedge x-y=5)$, dominio los reales

La expresión es **verdadera**, $x=11/2$, $y=1/2$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=2 \wedge x-y=0)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y\ (x+y=2 \wedge x-y=0)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera** porque para $x=1$, $y=1$ se cumple que $1+1=2 \wedge 1-1=0$

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x \exists y\, P(x,y)$	Existe al menos un par x,y para el cual P(x,y) es verdadera	P(x,y) es falso para todos los pares x, y

$\exists x \exists y \exists z\, P(x,y,z)$

Sea x,y, z con dominio 0 y 1, donde P(x,y,z) es x + y = x + z
compruebe $\exists x \exists y \exists z \, P(x,y,z) \equiv V$ $\quad P(1,1,1) \equiv V$

x	y	z	P(x, y, z)	x + y = x + z
1	1	1	V	
1	1	0	F	
1	0	1	F	
1	0	0	V	
0	1	1	V	
0	1	0	F	
0	0	1	F	
0	0	0	V	

b) $(\forall x)(\forall y)((\exists z)P(x,y,z) \wedge ((\exists u)Q(x,u) \rightarrow (\exists v)Q(y,v)))$

14. Tome como interpretación al dominio $\boxed{D = \{1,2\}}$, $a = 1$, $b = 2$ y las siguientes asignaciones para f:

f(1)	f(2)
2	1

Las asignaciones para los predicados P y Q:

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
F	V	V	V	F	V

Así mismo para el predicado R(x,y).

R(1,1)	R(1,2)	R(2,1)	R(2,2)
V	F	F	V

$\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x,y))$

$\exists x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge P(f(x)) \wedge Q(f(x), f(y)))$

$\forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x,y)) \equiv F$ Porque $x = 2$ y $y = 1$, $P(2) \rightarrow Q(2,1) \equiv F$

x	y	P(x)	Q(x,y)	P(x) → Q(x,y)
1	1	F	V	V
1	2	F	V	V
2	1	V	F	F
2	2	V	V	V

Tautología

$\exists x \exists y \exists z (R(x,y) \wedge P(f(x)) \wedge Q(f(x), f(z))) \equiv V$

Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
V	V	F	V

$x = 1$ $y = 1$ $z = 1$ $= V$

x	y	z	R(x,y)	P(f(x))	Q(f(x), f(z))			
1	1	1	V	V	Q(f(1), f(1))	Q(2,2)	V	V
1	1	2	V	V	Q(f(1), f(2))	Q(2,1)	F	F
1	2	1	F	V	Q(f(1), f(1))	Q(2,2)	V	F
1	2	2	F	V	Q(f(1), f(2))	Q(2,1)	F	F
2	1	1	F	F	Q(f(2), f(1))	Q(1,2)	V	F
2	1	2	F	F	Q(f(2), f(2))	Q(1,1)	V	F
2	2	1	V	F	Q(f(2), f(1))	Q(1,2)	V	F
2	2	2	V	F	Q(f(2), f(2))	Q(1,1)	V	F

P(f(1)) = P(2)

P(f(2)) = P(1)

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x+y=0)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x+y=0)$, dominio los enteros

La expresión representa la frase:

Para todo x, existe un y tal que x+y=0

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x+y=0)$, dominio los enteros

La expresión representa la frase:

Para todo x, existe un y tal que x+y=0

$x=1$, existe y tal que $x+y=0$? $y=-1$

$x=2$, existe y tal que $x+y=0$? $y=-2$

$x=-5$, existe y tal que $x+y=0$? $y=5$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y\ (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Para todo x, existe un y tal que x+y=0

$x=1$, existe $y=-1$ tal que $x+y=0$

$x=2$, existe $y=-2$ tal que $x+y=0$

$x=-5$, existe $y=5$ tal que $x+y=0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y\ (x+y=0)$$

La expresión es **verdadera** porque para todo x existe un y tal que se cumple x+y=0

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x \cdot y = 1)$, dominio los $\boxed{\text{reales}}$

$\boxed{x, y \in \mathbb{R}}$

$x = 4 \quad y = \frac{1}{4}$

$x = 0.3 \quad y = \frac{1}{0.3}$

$\boxed{x = 0 \quad y = \text{no existe}}$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y \ (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$x=1$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

$x=2$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

$x=-5$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

$x=0$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$x=1$, existe $y=1$ tal que $x \cdot y=1$

$x=2$, existe $y=1/2$ tal que $x \cdot y=1$

$x=-5$, existe $y=-1/5$ tal que $x \cdot y=1$

$x=0$, no existe y

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$x=1$, existe $y=1$ tal que $x \cdot y=1$

$x=2$, existe $y=1/2$ tal que $x \cdot y=1$

$x=-5$, existe $y=-1/5$ tal que $x \cdot y=1$

$x=0$, no existe y

¿Se cumple $\forall x \exists y\ (x \cdot y=1)$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

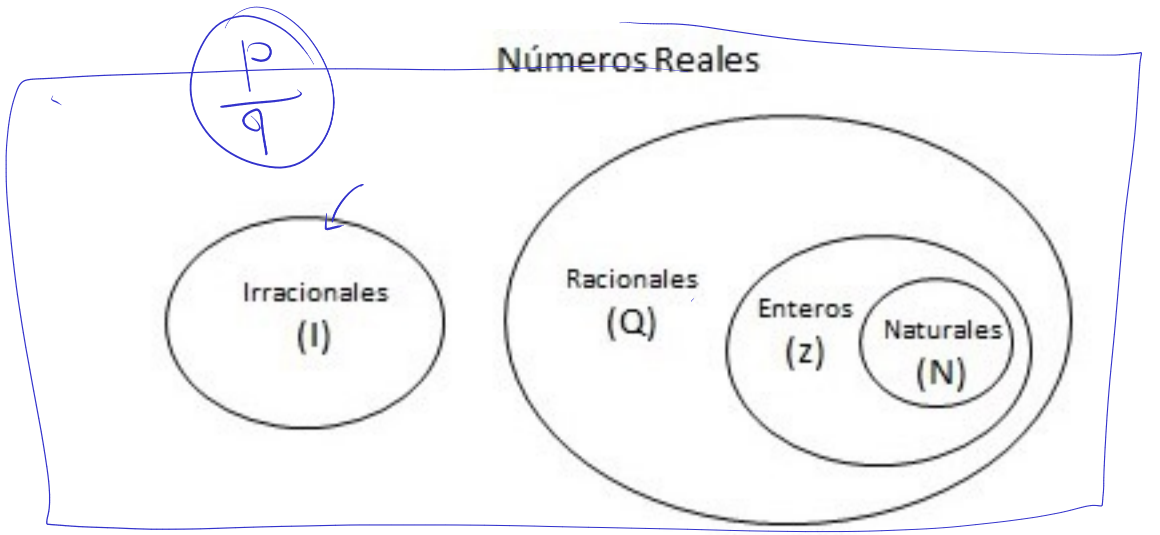
$\forall x \exists y\ (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

La expresión es **falsa** porque para $x=0$ no existe y tal que $x \cdot y = 1$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x=y^2)$, dominio los $\boxed{\text{reales}}$



$x = y^2$

-5

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x=y^2)$, dominio los reales

$x=1$, existe y tal que $x=y^2$?

$x=2$, existe y tal que $x=y^2$?

$x=-1$, existe y tal que $x=y^2$?

$x=-2$, existe y tal que $x=y^2$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x=y^2)$, dominio los reales

$x=1$, existe $y=1$ tal que $x=y^2$?

$x=2$, existe $y=\sqrt{2}$ tal que $x=y^2$?

$x=-1$, no existe y tal que $x=y^2$?

$x=-2$, no existe y tal que $x=y^2$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x=y^2)$, dominio los reales

La expresión es **falsa** porque para $x=-1$, no existe y tal que $x=y^2$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x^2 < y)$, dominio $\boxed{\text{los enteros}}$

$X = 5$ $\quad 25 < y \quad 25 < 28$

$X = 8 \quad 64 < y \quad 64 < 100$

$X = 0 \quad 0 < y \quad 0 < 4$

$X = -100 \quad (-100)^2 < 200^2$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x^2<y)$, dominio los enteros

$x=1$, existe y tal que $x^2<y$?

$x=2$, existe y tal que $x^2<y$?

$x=3$, existe y tal que $x^2<y$?

$x=-1$, existe y tal que $x^2<y$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y\ (x^2 < y)$, dominio los enteros

$x=1$, existe $y=2$ tal que $x^2<y$

$x=2$, existe $y=5$ tal que $x^2<y$

$x=3$, existe $y=10$ tal que $x^2<y$

$x=-1$, existe $y=2$ tal que $x^2<y$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y \, (x^2 < y)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right)$$, dominio los enteros

$X = 5 \qquad y = 5 \qquad \frac{5}{5} = 1$

$X = 8 \qquad y = 8 \qquad \frac{8}{8} = 1$

$X = 0 \qquad \frac{0}{y} = 1$

no existe

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right)$$, dominio los enteros

x=1, existe y tal que x/y=1?

x=2, existe y tal que x/y=1?

x=-1, existe y tal que x/y=1?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right)$$, dominio los enteros

x=1, existe y=1 tal que 1/1=1

x=2, existe y=2 tal que 2/2=1

x=-1, existe y=-1 tal que 1/-1=1

¿Se cumple $\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right)$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right)$$, dominio los enteros

La expresión es **falsa**, porque para x=0 no existe y que cumpla la condición

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x \exists y\ P(x,y)$	Para cada x existe un y para el cual P(x,y) es verdadero	Hay al menos un x para el cual no existe y tal que se cumpla P(x,y)

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\boxed{\exists x}\forall y\ (x+y=0)$

Numero Entero

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que x+y=0

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que x+y=0

- *x=-1 sirve para y=1*
- *x=-2 sirve para y=2*
- *x=-3 sirve para y=3*
- *x=-4 sirve para y=4*

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que x+y=0

- *x=-1 sirve para y=1*
- *x=-2 sirve para y=2*
- *x=-3 sirve para y=3*
- *x=-4 sirve para y=4*

No hay un solo x que sirva para todo y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que x+y=0

No hay un mismo valor de x que sirva para todo y,

por lo tanto la sentencia es **falsa**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

Entero

$$\exists x \forall y\ (x \cdot y = 0)$$

$x = 0$ $\forall y$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \, (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para $y=1$ porque $0 \cdot 1 = 0$

$x=0$ sirve para $y=2$ porque $0 \cdot 2 = 0$

$x=0$ sirve para $y=3$ porque $0 \cdot 3 = 0$

$x=0$ sirve para $y=4$ porque $0 \cdot 4 = 0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para $y=1$ porque $0 \cdot 1=0$

$x=0$ sirve para $y=2$ porque $0 \cdot 2=0$

$x=0$ sirve para $y=3$ porque $0 \cdot 3=0$

$x=0$ sirve para $y=4$ porque $0 \cdot 4=0$

Es el mismo x el que sirve para todo y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para todo y.

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \ (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para todo y.

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \forall y\ (y^2 < x)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \forall y\ (y^2 < x)$, dominio los enteros

$x=2$, sirve para $y=1$ porque $1^2<2$

$x=5$, sirve para $y=2$ porque $2^2<5$

$x=10$, sirve para $y=3$ porque $3^2<10$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \forall y\ (y^2 < x)$, dominio los enteros

x=2, sirve para y=1 porque $1^2<2$

x=5, sirve para y=2 porque $2^2<5$

x=10, sirve para y=3 porque $3^2<10$

No hay un solo x que sirva para todo y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \left(\frac{y}{3} + x = \frac{y}{3} \right)$$, dominio son los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \left(\frac{y}{3} + x = \frac{y}{3} \right)$$, dominio son los enteros

x=0 sirve para todo y. La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \, (x \cdot y = y)$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (x \cdot y = y)$$

x=1 sirve para todo y

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \ (y+x=y-x)$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y\ (y+x=y-x)$$

x=0 sirve para todo y

$1+0=1-0$

$2+0=2-0$

$3+0=3-0$

$4+0=4-0$

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x \forall y\ P(x,y)$	Hay un x para el cual P(x,y) es verdadero para todos los valores de y	No existe un mismo x que sirva para todo y

$\exists x \forall y \forall z$

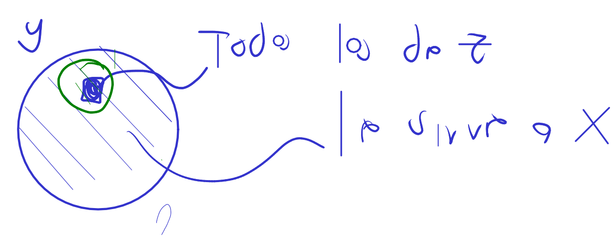
Un mismo valor de x que sirve para todas las combinaciones de (y, z)

$\forall x \forall y \exists z$

Para cada combinación de x e y, existe un valor z (que puede ser diferente) tal que la expresión es verdadera

$\forall x \exists y \forall z$

El valor de y debe ser el mismo para todo z
Para cada valor x debe existir un y



b) $(\forall x)(\forall y)((\exists z)P(x,y,z) \wedge ((\exists u)Q(x,u) \to (\exists v)Q(y,v)))$

14. Tome como interpretación al dominio $D = \{1,2\}$, $a = 1$, $b = 2$ y las siguientes asignaciones para f:

f(1)	f(2)
2	1

Las asignaciones para los predicados P y Q:

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
F	V	V	V	F	V

Así mismo para el predicado R(x,y).

R(1,1)	R(1,2)	R(2,1)	R(2,2)
V	F	F	V

$\forall x \, \exists y \, \exists z \; Q(x,y) \to R(y,z)$

$\forall x \, \forall y \, \exists z \; (P(x) \wedge P(y)) \to P(z)$

$\forall x \, \exists y \; R(x,y) \wedge P(y)$

$\forall x \, \exists y \, \forall z \; P(x) \vee Q(y,z)$

$$\forall x\, \exists y\, \exists z\; \varphi(x,y) \to R(y,z)$$

x	y	z	$\varphi(x,y)$	$R(y,z)$	$\varphi(x,y) \to R(y,z)$
1	1	1	V	V	V
1	1	2	V	F	F
1	2	1	V	F	F
1	2	2	V	V	V
2	1	1	F	V	V
2	1	2	F	F	V
2	2	1	V	F	F
2	2	2	V	V	V

$$V = \forall x\, \exists y\, \exists z$$

x	y	z
1	1	1
2	1	2

$$V = \exists y\, \exists z\, \forall x$$

x	y	z
1	1	1
	2	2
2	1	1
	2	2

$\forall x \forall y \exists z \ (P(x) \wedge P(y)) \to P(z) \equiv V$

x	y	z	P(x)	P(y)	P(z)	P(x) ∧ P(y)	P(x) ∧ P(y) → P(x)
1	1	1	F	F	F	F	V
1	1	2	F	F	V	F	V
1	2	1	F	V	F	F	V
1	2	2	F	V	V	F	V
2	1	1	V	F	F	F	V
2	1	2	V	F	V	F	V
2	2	1	V	V	F	V	F
2	2	2	V	V	V	V	V

x	y	z
1	1	1
1	2	1
2	1	1
2	1	2

$\exists z \forall x \forall y$

x	y	z
1	1	2
1	2	2
2	1	2
2	1	2

$\equiv V$

$\forall x \, \exists y \quad R(x,y) \wedge P(y) \equiv F$

x	y	$R(x,y)$	$P(y)$	$R(x,y) \wedge P(y)$
1	1	V	F	F
~~1~~	~~2~~	F	F	F
2	1	F	V	F
2	2	V	V	V

$\forall x \, \exists y$

x	y
1	No existe
2	2 ✓

$\exists y \, \forall x$

más restringido

Un mismo valor de y le sirve a todos los valores x

$\underline{\forall x\, \exists y\, \forall z}\quad P(x) \vee \varphi(y,z)$

x	y	z	$P(x)$	$\varphi(y,z)$	$P(x) \vee \varphi(y,z)$
1	1	1	F	V	V
1	1	2	F	V	V
1	2	1	F	F	F
1	2	2	F	F	F
2	1	1	V	V	V
2	1	2	V	V	V
2	2	1	V	V	V
2	2	2	V	V	V

$\forall x\, \exists y\, \forall z$

x	y
1	1
2	1 o 2

z	y
1	1
2	1

Lógica de predicados

Sea Q(x,y): "x+y=x-y". Si el dominio para ambas variables son los enteros, indique el valor de verdad de las siguientes sentencias:

- Q(1,1) $\equiv$ F $\quad 2 \neq 0$
- Q(2,0) $\equiv$ V
- $\forall x \exists y$ Q(x,y) V

$x = 1 \quad y = 0$

$x = 2 \quad y = 0$

Exista un valor

$\exists y \forall x \; Q(x,y)$ V

$x = 1 \quad y = 0$

$x = 100 \quad y = 0$

Mismo y para todo los X

Lógica de predicados

Sea $Q(x,y)$: "$x+y=x-y$". Si el dominio para ambas variables son los enteros, indique el valor de verdad de las siguientes sentencias:

- $Q(1,1)$, **falso** ($2 \neq 0$)
- $Q(2,0)$, **verdadero** ($2=2$)
- $\forall x \exists y\, Q(x,y)$, **verdadero** ($y=0$)

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\forall x \exists y \ (x+y=1)$ Verdadero, porque y = -(x-1), y existe
- $\exists x \forall y \ (x+y=1)$ Falso, no existe ningun número x que para todos los enteros y cumpla x + y = 1
- $\exists x \forall y \ (x^2+y^2=y^2)$

Verdadero, con x = 0, se cumple

$0^2 + y^2 = y^2$

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\forall x \exists y\ (x+y=1)$, **verdadero** (dado un x, existe y)
- $\exists x \forall y\ (x+y=1)$, **falso** (el mismo x no sirve en todos los casos)
- $\exists x \forall y\ (x^2+y^2=y^2)$, **verdadero** (x=0 sirve en todos los casos)

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\exists x \exists y\ (x+y=4 \wedge x-y=1)$ Falso, no existe valor x e y que cumpla
- $\exists x \exists y\ (x+y=4 \wedge x-y=2)$ V
- $\exists x \exists y\ (x+y \neq y+x)$ F

$$\begin{array}{r} x+y=4 \\ x-y=2 \\ \hline 2x=6 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}}$$

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\exists x \exists y\ (x+y=4 \wedge x-y=1)$, **falso** (no existen los enteros)
- $\exists x \exists y\ (x+y=4 \wedge x-y=2)$, **verdadero** ($x=3$, $y=1$)
- $\exists x \exists y\ (x+y \neq y+x)$, **falso** (no existen x y y)

Lógica de predicados

Al igual que en lógica preposicional en lógica de predicados se tienen las equivalencias lógicas, las cuales consideran el cuantificador que se esté utilizando

Negación

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$
$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Distribución

$$\forall x \big(P(x) \land Q(x)\big) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$$
$$\exists x \big(P(x) \lor Q(x)\big) \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$$

No se puede aplicar distribución para disyunciones de cuantificadores universales ni conjunciones de existenciales

Lógica de predicados

Ejemplo

Muestre que $\neg\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

1. $\neg\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \equiv \exists x\,(\neg(P(x) \to Q(x)))$ Empujar negación
2. $\exists x\,(\neg(P(x) \to Q(x))) \equiv \exists x\,(\neg(\neg P(x) \vee Q(x)))$ Implicación
3. $\exists x\big(\neg\big(\neg P(x) \vee Q(x)\big)\big) \equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ D'Morgan

$\neg \forall x\,(P(x) \to Q(x))$

$\exists x\,\neg(P(x) \to Q(x)) \equiv \exists x\,\neg(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Lógica de predicados

Representación de lenguaje natural en lógica de predicados

Las expresiones con cuantificadores pueden representar expresiones en lenguaje natural. Para esto se deben tener en cuenta los cuantificadores "para todo" "existe" "ninguno" "al menos uno" y los conectores vistos en lógica preposicional "si .. entonces" "y" "o" "sí y solo sí".

Lógica de predicados

Ejemplo

Si una persona es mujer y alguien es su pariente, entonces esta persona es la madre de alguien.

Para expresar esto, se hace el siguiente cambio

Para cada persona x, si una x es mujer y x es pariente de alguien y, entonces x será la madre de esa persona y.

El dominio del discurso son las personas.

Se define F(x): x es mujer, P(x) x es un pariente y M(x,y) es que x es madre de y.

y

$$\forall x\left(F(x) \wedge P(x)\right) \rightarrow \exists y M(x, y)$$

$$\forall x \exists y (F(x) \wedge P(x) \rightarrow M(x, y))$$

Ejemplo

Cada persona $\boxed{\text{tiene exactamente un mejor amigo.}}$

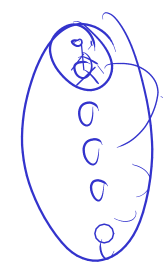
Se observa como: Para cada persona x, x tiene exactamente un mejor amigo.

El dominio del discurso son las personas, B(x,y) y es el mejor amigo de x.

$$\forall x \exists y (B(x,y) \land \forall z (z \neq y) \to \neg B(x,z)))$$

$\forall x \; \exists_x (y \neq x)$

$z \neq y \land z \neq x$



Lógica proposicional, planteaban variables proposicionales

a: Juan gana discretas

b: Juan Matricula Discretas II

a -> b (Relación lógica)

Lógica de predicados

Toda persona que gane discretas puede matricular discretas 2. x está en el dominio del discurso de las personas

P(x) x gana discretas

Q(x) x matricula discretas II

$$\boxed{\forall x \, (P(x) \to Q(x))}$$

$\neg$

$\lor$

$\land$

$\to$

$\leftrightarrow$

$\oplus$

Lógica de predicados

Inferencia de predicados

Para aplicar reglas de inferencia de predicados, debemos quitar los cuantificadores.

- Quitar cuantificadores universales
- Quitar cuantificadores existenciales

Una vez eliminados los cuantificadores, podemos aplicar las reglas de inferencia de lógica preposicional

Lógica de predicados

Regla de inferencia	**Nombre**
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	Simplificación Universal
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)}$ para algún elemento c	Simplificación existencial

En el caso de la simplificación universal el c es cualquier elemento del dominio del discurso.

Para el caso de la simplificación existencial, el elemento c es cualquiera que sepamos que es $P(c)$VERDADERO

Dominio de las personas

$\forall x P(x)$ x tiene corazon

$P(juan)$ $P(pedro)$

$P(ana)$

$\exists x F(x)$ X es mujer

$F(paola)$ $F(Sandra)$

$F(ana)$

Lógica de predicados

Ejemplo

Dominio del discurso: Personas

Un estudiante de la clase no ha leído el libro. Todos en esta clase pasan el primer examen. Por lo tanto, alguien que ha pasado el examen no ha leído el libro.

Sea C(x) x está en esta clase, B(x) es x ha leído el libro y P(x) x ha pasado el examen. Se busca demostrar $\exists x \big(P(x) \land \neg B(x) \big)$ o $P(a) \land \neg B(a)$

1. $\exists x(\underline{C(x)} \land \underline{\neg B(x)})$ Premisa
2. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ Premisa

$\neg B(x)$

$\forall x \; P(x)$

$\exists x \; \neg B(x)$

Lógica de predicados

Ejemplo

Asumo que a no ha leido el libro y es estudiante de la clase

1. $\exists x(C(x) \land \neg B(x))$ Premisa
2. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ Premisa
3. $C(a) \land \neg B(a)$ Eliminación existencial (1)
4. $C(a) \rightarrow P(a)$ Eliminación Universal (2)
5. $C(a)$ Simplificación (3)
6. $\neg B(a)$ Simplificación (3)
7. $P(a)$ Modus Ponens(4,5)
8. $P(a) \land \neg B(a)$ Conjunción(6,7) DEMOSTRADO

Sistema
lógica proposicional

Lógica de predicados

Cuantificadores anidados

Para los casos de cuantificadores anidados se deben considerer dos casos

Caso 1: Cuantificador existencial no está dentro del alcance de un universal

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

Caso 2: El cuantificador existencial está dentro del alcance de un universal

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

Lógica de predicados

Cuantificadores anidados

Caso 1: Cuantificador existencial no está dentro del alcance de un universal

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

Se reemplace la variable cuantificada existencialmente por una constante que no hace parte de la base de conocimiento (BC), es decir que no ha sido introducida hasta el momento.

$$\forall x P(x, \underline{a})$$

Porque un valor de y sirve para todos los x

a no se encuentra en la BC

Lógica de predicados

Cuantificadores anidados

Caso 2: Cuantificador existencial está dentro del alcance de un universal

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

Piense en el siguiente ejemplo:

"Todos tenemos un amigo", si hacemos el reemplazo

$$\forall x P(x, a)$$

Esto indicaría que todos tenemos el mismo amigo a, lo que va en contra del significado del cuantificador

Lógica de predicados

Cuantificadores anidados

Caso 2: Cuantificador existencial está dentro del alcance de un universal

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

Para este caso para indicar que cada persona tiene su propio amigo, se debe introducir una función

$$\forall x P(x, f(x))$$

Donde $f(x)$ es una función que indica quien es el amigo de x.

Estrategias de demostración

1. Eliminar implicaciones $p \leftrightarrow q \equiv p \to q \wedge q \to p$ $\quad p \to q \equiv \neg p \vee q$
2. Empujar negaciones D'Morgan / doble negaciones
3. Eliminar cuantificadores existenciales
4. Eliminar cuantificadores universales

   conmuta

5. Aplicar inferencia Lógica proposicional

Lógica de predicados

Ejemplo

Suponga el siguiente sistema en lógica de predicados

1. $\forall x \exists y (E(y) \land R(x,y) \rightarrow A(x))$
2. $\forall x \forall y (A(x) \rightarrow (I(y) \rightarrow \neg M(x,y)))$
3. $\exists x (E(x) \land R(a,x))$

* 4. $\mathrm{M}(a,b) \lor \underline{M(c,b)}$

5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\forall x G(x) \rightarrow I(x)$

Simplificación

Demuestre $M(c,b)$

¿Como extraen M(c,b) ?

$\neg M(a,b)$

Silogismo disyuntivo

Lógica de predicados

1. Eliminar implicaciones

$p \to q \quad \neg p \vee q$

1. $\forall x \exists y \neg \big(E(y) \wedge R(x,y)\big) \vee A(x)$
2. $\forall x \forall y \neg A(x) \vee \neg I(y) \vee \neg M(x,y)$
3. $\exists x\ E(x) \wedge R(a,x)$
4. $\mathrm{M}(a,b) \vee M(c,b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\forall x \neg G(x) \vee I(x)$

Demuestre $M(c,b)$

Lógica de predicados

2. Empujar negaciones

1. $\forall x \boxed{\exists y} \neg E(y) \vee \neg R(x,y) \vee A(x)$ $y = f(x)$
2. $\forall x \forall y \neg A(x) \vee \neg I(y) \vee \neg M(x,y)$
3. $\exists x\ E(x) \wedge R(a,x)$ x puede cambiarse por cualquiera
4. $\mathrm{M}(a,b) \vee M(c,b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\forall x \neg G(x) \vee I(x)$

Demuestre $M(c,b)$

Lógica de predicados

3.Eliminar cuantificadores existenciales

1. $\forall x \neg E(f(x)) \vee \neg R(x, f(x)) \vee A(\boxed{x})$

   a

2. $\forall x \forall y \neg A(x) \vee \neg I(y) \vee \neg M(x, y)$
3. $E(d) \wedge \boxed{R(a, d)}$
4. $\mathrm{M}(a, b) \vee M(c, b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\forall x \neg G(x) \vee I(x)$

$R(a, d)$

$R(a, \boxed{F(x)})$

$F(x) = d$

Demuestre $M(c, b)$

Lógica de predicados

4. Eliminar cuantificadores universales

1. $\neg E(d) \vee \neg R(a,d) \vee A(a), f(x) = d, x = a$
2. $\forall x \forall y \neg A(x) \vee \neg I(y) \vee \neg M(x,y)$ $x = a$ $y = b$
3. $E(d) \wedge R(a,d)$
4. $\mathrm{M}(a,b) \vee M(c,b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\forall x \neg G(x) \vee I(x)$

En este paso debe seleccionar las variables que más le convengan en la demostración

Demuestre $M(c,b)$

Lógica de predicados

4. Eliminar cuantificadores universales

1. $\neg E(d) \vee \neg R(a,d) \vee A(a)$
2. $\neg A(a) \vee \neg I(b) \vee \neg M(a,b), x = a, y = b$
3. $E(d) \wedge R(a,d)$
4. $\mathrm{M}(a,b) \vee M(c,b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\forall x \neg G(x) \vee I(x)$

En este paso debe seleccionar las variables que más le convengan en la demostración

Demuestre $M(c,b)$

Lógica de predicados

4. Eliminar cuantificadores universales

1. $\neg E(d) \vee \neg R(a, d) \vee A(a)$
2. $\neg A(a) \vee \neg I(b) \vee \neg M(a, b)$
3. $E(d) \wedge R(a, d)$
4. $\mathrm{M}(a, b) \vee M(c, b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\neg G(b) \vee I(b), x = b$

En este paso debe seleccionar las variables que más le convengan en la demostración

Demuestre $M(c, b)$

Lógica de predicados

4. Aplicar inferencia

1. $\neg E(d) \vee \neg R(a,d) \vee A(a)$
2. $\neg A(a) \vee \neg I(b) \vee \neg M(a,b)$
3. $E(d) \wedge R(a,d)$
4. $\mathrm{M}(a,b) \vee M(c,b)$
5. $\mathrm{G}(b)$
6. $\neg G(b) \vee \underline{I(b)}$
7. $E(d)$ Simplificación(3)
8. $R(a,d)$ Simplificación(3)
9. $\neg R(a,d) \vee A(a)$ Resolución(1,7)

4. Aplicar inferencia

$10.\ A(a)$	Resolución(8,9)
$11.\ \neg I(b) \lor \neg M(a,b)$	Resolución(2,10)
$12.\ I(b)$	Resolución(5,6)
$13.\ \neg M(a,b)$	Resolución(11,12)
$\boxed{14.\ M(c,b)}$	Resolución(4,13)

DEMOSTRADO.

Lógica de predicados

Prolog

Es un lenguaje de programación diseñado para el razonamiento en lógica de predicados. Un programa está compuesto por dos tipos de sentencias

- **Base del conocimiento:** Son predicados predefinidos que se conocen con anterioridad
- **Reglas:** Permite definir nuevos predicados a partir de la base del conocimiento

Nota: La base del conocimiento se establece en minúsculas y las variables en Mayúsculas.

Lógica de predicados

Ejemplo

Considere el siguiente enunciado. Todo político que de puestos en el gobierno y de prebendas para cumplir sus intereses y favorece a sus familiares aprovechándose de su puesto es corrupto. Si alguien corrupto y convoca a una marcha contra la corrupción, entonces ese alguien es un descarado. Juanito es un reconocido político. Es bien sabido que Juanito dio puestos en el gobierno. Juanito dio sobornos para favorecer sus objetivos. De la misma manera, ayudó a sus familiares siendo gobernante. Además, hace poco Juanito convocó a una marcha ~~por~~ contra la corrupción. Demuestre por inferencia lógica en lógica de predicados que Juanito es corrupto y descarado.

Ejemplificar

Problema proporcionado por Carlos Alberto Ramirez,Ph.D.

Lógica de predicados

Ejemplo

Modelemos

P(x) x es político

C(x) x es corrupto

D(x) x da puestos en el gobierno

E(x) x da prebendas para cumplir sus intereses

F(x) x favorece a sus familiares aprovechando su puesto

G(x) x convoca una marcha contra la corrupción

H(x) x es un descarado

Dominio: discurso

Polícas

Ejemplo

Todo político que de puestos en el gobierno y de prebendas para cumplir sus intereses y favorece a sus familiares aprovechándose de su puesto es corrupto.

$$\forall x(P(x) \land D(x) \land E(x) \land F(x)) \rightarrow C(x)$$

Si alguien corrupto convoca a una marcha contra la corrupción entonces ese alguien es un descarado

$$\exists x(C(x) \land G(x)) \rightarrow H(x)$$

Lógica de predicados

Ejemplo

Dominio del discurso

Juanito es un reconocido político, j = juanito

$$P(j)$$

Es bien sabido que Juanito dio puestos en el gobierno

$$D(j)$$

Juanito dio sobornos para favorecer sus objetivos

$$E(j)$$

De la misma manera, ayudó a sus familiares siendo gobernante.

$$F(j)$$

Además, hace poco Juanito convocó a una marcha por la corrupción

$$G(j)$$

Ejemplo

El sistema que se plantea es

1. $\forall x(P(x) \wedge D(x) \wedge E(x) \wedge F(x)) \to C(x)$
2. $\exists x(C(x) \wedge G(x)) \to H(x)$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$

Ejemplificación

Demuestre $C(j) \wedge H(j)$

Lógica de predicados

Ejemplo

1. Eliminar implicaciones

1. $\forall x \neg \left(P(x) \wedge D(x) \wedge E(x) \wedge F(x)\right) \vee C(x)$
2. $\exists x \neg (C(x) \wedge G(x)) \vee H(x)$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$

Demuestre $C(j) \wedge H(j)$

Ejemplo

2. Empujar negaciones

1. $\forall x \neg P(x) \vee \neg D(x) \vee \neg E(x) \vee \neg F(x) \vee C(x)$
2. $\exists x \neg C(x) \vee \neg G(x) \vee H(x)$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$

Demuestre H(j)

Lógica de predicados

Ejemplo

3. Eliminar cuantificadores existenciales

1. $\forall x \neg P(x) \vee \neg D(x) \vee \neg E(x) \vee \neg F(x) \vee C(x)$
2. $\neg C(j) \vee \neg G(j) \vee H(j), x = j$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$

Demuestre $C(j) \wedge H(j)$

Lógica de predicados

Ejemplo

4. Eliminar cuantificadores universales

1. $\neg P(j) \vee \neg D(j) \vee \neg E(j) \vee \neg F(j) \vee C(j)$ $x = j$
2. $\neg C(j) \vee \neg G(j) \vee H(j)\, , x = j$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$

Demuestre $C(j) \wedge H(j)$

Lógica de predicados

Ejemplo

5. Aplicar inferencia

1. $\neg P(j) \vee \neg D(j) \vee \neg E(j) \vee \neg F(j) \vee C(j)$
2. $\neg C(j) \vee \neg G(j) \vee H(j)$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$
8. $P(j) \wedge D(j) \wedge E(j) \wedge F(j)$ Conjunción(3,4,5,6)

Ejemplo

5. Aplicar inferencia

9. $C(j)$	Resolución(1,8)
10. $C(j) \wedge G(j)$	Conjunción(7,9)
11. $H(j)$	Resolución(2,10)
12. $C(j) \wedge H(j)$	Conjunción(9,11)

Demostrado ☺

Lógica de predicados

Lógica de predicados de primer orden (LPO)

Para resolver sistemas en LPO usaremos la herramienta que nos provee logictools.

http://logictools.org/index.html

Los predicados se revuelven usando un solver especializado denominado gkc.

Lógica de predicados

Lógica de predicados de primer orden (LPO)

Cada formula está compuesta por

- Conjunciones &
- Disyunciones |
- Negación - o ~
- Implicación =>
- Para todo ![variables] : formula
- Existencial ?[variables] : formula
- Átomos: -father(juan, Carlos).
- Igualdad: gender(juan) = male o gender(juan)!=female

Mayor información: http://logictools.org/index.html#syntax

Hechos

Son conjuntos de átomos considerados como ciertos, un ejemplo son los estudiantes matriculados en los cursos y los profesores que los dictan.

```
matriculado(“Juan”,”Calculo III”).
matriculado(“Juan”,”Matemáticas discretas”).
matriculado(“Pedro”, “Calculo II”).
matriculado(“Ana”,”Calculo III”).
matriculado(“Erika”,”Calculo II”).
dicta(“Efrain”,”Calculo III”).
dicta(“Carlos”,”Matemáticas discretas”).
dicta(“Duberney”, “Calculo II”).
```

Lógica de predicados

Reglas

A partir del la base de conocimiento anterior, se puede establecer que profesor está enseñando a un alumno.

```
dicta(P,S) & matriculado(E,S) => profesorDe(P,E).
```

Esto implica que el profesor P dicta la asignatura S y el estudiante E está matriculado en la asignatura S.

Lógica de predicados

Respuesta

Es una situación que deseamos comprobar, ejemplo:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$$

```
profesorDe(X,”Juan”) => $ans(X)
```

En este caso usamos $ans(X) para saber los valores de X que cumplen las reglas y hechos.

$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \\ \underline{p} \\ q \end{array}$$

Ejemplo disponible: https://pastebin.com/xv48Ahan

Lógica de predicados

Ejemplo

Result:

```
result: proof found

answer: $ans("Efrain").
proof:
 1: [in] -dicta(X,Y) | -matriculado(Z,Y) | profesorDe(X,Z).
 2: [in] dicta("Efrain","Calculo III").
 3: [mp, 1, 2] profesorDe("Efrain",X) | -matriculado(X,"Calculo III").
 4: [in] matriculado("Juan","Calculo III").
 5: [mp, 3.1, 4] profesorDe("Efrain","Juan").
 6: [in] -profesorDe(X,"Juan") | $ans(X).
 7: [mp, 5, 6] $ans("Efrain").
```

Ejemplo

Generemos un sistema para el ejemplo del político corrupto y descarado.

1. $\forall x(P(x) \wedge D(x) \wedge E(x) \wedge F(x)) \to C(x)$
2. $\exists x(C(x) \wedge G(x)) \to H(x)$
3. $P(j)$
4. $D(j)$
5. $E(j)$
6. $F(j)$
7. $G(j)$

Demuestre $C(j) \wedge H(j)$

Lógica de predicados

Ejemplo: https://pastebin.com/cw9ccsqa

```
%Hechos
p('juanito’).
d('juanito’).
e('juanito’).
f('juanito’).
g('juanito’).

%Reglas

p(X) & d(X) & e(X) & f(X) => c(X).
c(X) & g(X) => h(X).
```

g(x) & h(x) => $ans(X)

Lógica de predicados

Ejemplo

```
result: proof found

answer: $ans('juanito').
proof:
 1: [in] -f(X) | -e(X) | -d(X) | -p(X) | c(X).
 2: [in] f('juanito').
 3: [in] e('juanito').
 4: [in] d('juanito').
 5: [in] p('juanito').
 6: [mp, 1, 2, 3, 4, 5] c('juanito').
 7: [in] -c(X) | -g(X) | h(X).
 8: [in] g('juanito').
 9: [mp, 6, 7, 8] h('juanito').
 10: [in] -h(X) | $ans(X).
 11: [mp, 9, 10] $ans('juanito').
```