

# Matemáticas discretas II: Teoría de Grafos II

Universidad del Valle  
EISC

Septiembre 2017

1 Grafos complementarios

2 Grafos planos

3 Representación de grafos

4 Conectividad

1 Grafos complementarios

2 Grafos planos

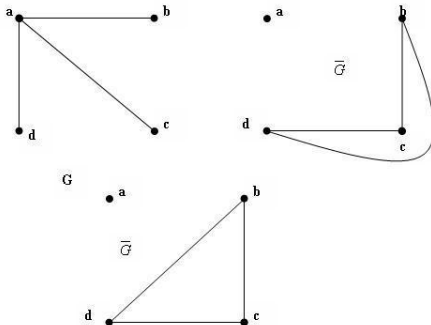
3 Representación de grafos

4 Conectividad

## Grafo complementario

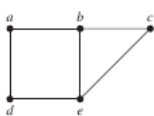
Sea  $G$  un grafo simple no dirigido sin bucles con  $n$  vértices. El complementario de  $G$ , se denota como  $\overline{G}$ .  $\overline{G}$  de un grafo simple  $G$  tiene los mismos vértices que  $G$ . Dos vértices son adyacentes en  $\overline{G}$  **sii** estos dos vértices no son adyacentes en  $G$ .

Si  $G = K_n$ ,  $\overline{G}$  es un grafo con  $n$  vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama **grafo nulo**.

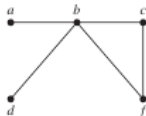


## Unión de grafos

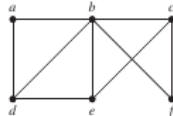
La unión de dos grafos simples  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  es el grafo simple con el conjunto de vértices  $V_1 \cup V_2$  y el conjunto de aristas  $E_1 \cup E_2$ . La unión de  $G_1$  y  $G_2$  es denotada por  $G_1 \cup G_2$ .



$G_1$



$G_2$



$G_1 \cup G_2$

## Grafos complementarios y $K_n$

### Teorema

*Si  $G$  es un grafo simple con  $n$  vértices, entonces la unión de  $G$  y  $\overline{G}$  es  $K_n$ .*

**Dem//** La unión de  $G$  y  $\overline{G}$  contienen una arista entre cada par de  $n$  vértices. Por lo tanto, esta unión es  $K_n$ .

### Ejercicio

Si la secuencia de grado de un grafo simple  $G$  es  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , ¿Cuál es la secuencia de grado de  $\overline{G}$ ?

$$n - 1 - d_n, n - 1 - d_{n-1}, \dots, n - 1 - d_2, n - 1 - d_1$$

### Problema

Si el grafo simple  $G$  tiene  $v$  vértices y  $e$  aristas, ¿Cuántas aristas tiene  $\overline{G}$ ?

1 Grafos complementarios

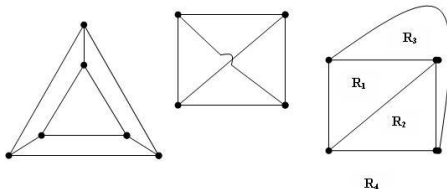
2 Grafos planos

3 Representación de grafos

4 Conectividad

## Grafo plano.

Un grafo (o multigrafo)  $G$  es plano si podemos dibujar  $G$  en el plano de modo que sus aristas se intersectan sólo en los vértices de  $G$ . Este dibujo se conoce como una inmersión (*embedding*) de  $G$ .



Al igual que  $K_4$  también  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  son planos a diferencia de  $K_5$  que no lo es.



## Teorema

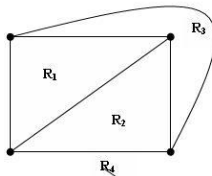
Sea  $G$  un grafo simple conexo con  $e$  aristas y  $v$  vértices. Sea  $r$  el número de regiones de una representación plana de  $G$ . Entonces,  $r = e - v + 2$

## Observación

Sea  $G = (V, E)$  un grafo plano sin bucles con  $|V| = v$ ,  $|E| = e > 2$ , y  $r$  regiones, entonces  $3r \leq 2e$  y  $e \leq 3v - 6$

**Ejemplo.** El grafo  $K_4$ , tiene  $|V| = 4$ ,  $|E| = 6 > 2$ , además cumple con las dos condiciones: (ver grafo)

- $3r \leq 12 \rightarrow r \leq 4$
- $e \leq 3(4) - 6, \quad e \leq 6, 6 \leq 6$



4 regiones

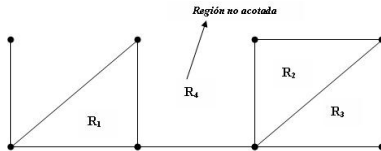
$$\begin{aligned} r &= e - v + 2 \\ r &= 6 - 4 + 2 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Región no acotada

**Ejemplo.** Sea el grafo  $K_5$ , tiene  $|V| = 5$ , y  $2e = 4 \cdot 5$ ,  $e = 10$  no cumple con la condición:

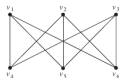
■  $e \leq 3(5) - 6$ ,  $e \leq 9$ ,  $10 \leq 9$

**Ejemplo.** Cálculo de las regiones en un grafo planar.



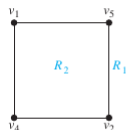
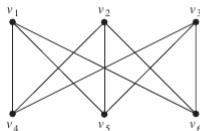
$$r = e - v + 2 = 10 - 8 + 2 = 4 \text{ regiones}$$

Grafo plano

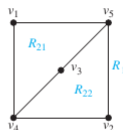


$|V| = 6$  y  $|E| = 9$ ,  $e \leq 3(6) - 6$ ,  
 $e \leq 12$  Por lo tanto  $9 \leq 12$   
 y  $r$ ????

## ¿Es $K_{3,3}$ plano?



(a)



(b)

- Sea  $v_1, v_4, v_5, v_2$  un subgrafo con dos regiones  $R_1$  y  $R_2$  que forman una curva cerrada, entonces, el vértice  $v_3$  estaría en  $R_1$  o en  $R_2$ . Cuando  $v_3$  está en  $R_2$  al interior de la curva cerrada, las aristas  $\{v_3, v_4\}$  y  $\{v_3, v_5\}$  separan a  $R_2$  en dos regiones,  $R_{21}$  y  $R_{22}$ , sigue siendo plano.
- Entonces no hay manera de colocar el vértice  $v_6$  sin cruzar, si  $v_6$  está en  $R_1$ , entonces el lado  $\{v_3, v_6\}$  no se puede dibujar sin cruzar. Si  $v_6$  está en  $R_{21}$ , entonces  $\{v_2, v_6\}$  no se puede ser dibujado sin cruzar. Si  $v_6$  está en  $R_{22}$ , entonces  $\{v_1, v_6\}$  no puede dibujar sin cruzar.
- De manera similar cuando  $v_3 \in R_1$ .

1 Grafos complementarios

2 Grafos planos

**3 Representación de grafos**

4 Conectividad

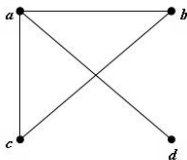
## Matriz de Adyacencia

Sea  $G = (V, E)$  un grafo simple con  $|V| = n$ , la matriz de adyacencia es la **matriz booleana** de  $n \times n$  tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- hay  $n!$  matrices de adyacencia distintas para un grafo de  $n$  vértices.
- todos los grafos no dirigidos, incluyendo multigrafos, pseudografos, tienen matrices simétricas

**Ejemplo.** La matriz de adyacencia de un grafo simple



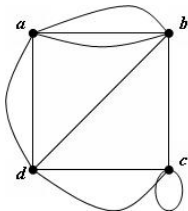
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido con bucles y con aristas paralelas tiene las siguientes características:

- Un bucle en el vértice  $a_i$  se representa por medio de un 1 en la posición  $(i, i)$  de la matriz.
- Cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana, ya que el elemento de la posición  $(i, j)$  es igual al número de aristas asociadas a  $\{v_i, v_j\}$

**Ejemplo.** Matriz de adyacencia de un **pseudografo**.

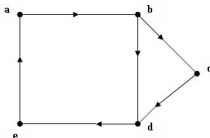


$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

**La Matriz de adyacencia de un grafo dirigido**  $G = (V, E)$  tiene 1 en la posición  $(i, j)$  si hay arista de  $v_i$  a  $v_j$ , siendo  $v_1, v_2, \dots, v_n$  un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. entonces:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

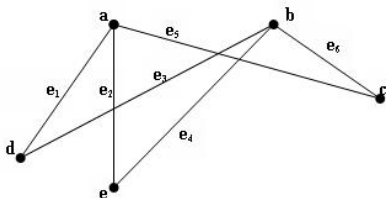


$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matriz de incidencia

Sea  $G = (V, E)$  un grafo no dirigido, supongamos que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son los vértices y  $e_1, e_2, \dots, e_m$  las aristas de  $G$ . Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de  $V$  y  $E$  es la matriz  $M = [m_{ij}]$  de  $n \times m$  dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } \{e_j\} \text{ es incidente con } \{v_i\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



1 Grafos complementarios

2 Grafos planos

3 Representación de grafos

4 Conectividad

## Teorema

Sea  $M_R = (m_{ij})$  la matriz de adyacencia de un grafo.

$$M_R \otimes M_R = M_R^2$$

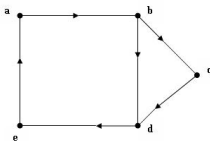
$$M_R \otimes M_R \otimes M_R = M_R^3$$

$\vdots$

$$\underbrace{M_R \otimes M_R \otimes M_R \dots \otimes M_R}_n = M_R^n$$

- $\otimes$  es el producto booleano.
- 1 en  $M_R^n$  en un grafo dirigido significa que se puede ir del nodo  $i$  al  $j$  recorriendo exactamente  $n$  aristas en el grado.

**Ejemplo** Sea el siguiente grafo y su matriz de adyacencia.

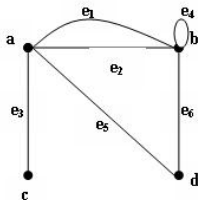


$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El 1 en  $M_R^2(1, 3)$  significa que hay un camino de longitud 2 de a -c: a,b,c.

**Ejemplo.** Sea el siguiente pseudografo obtener la cuantía de los caminos de longitud 2.



$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

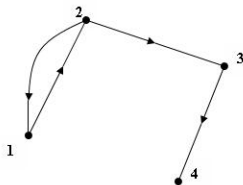
El 6 significa que hay 6 caminos de longitud 2 de a-a:

## Matriz de Conectividad

La matriz de conectividad se define como:

$$M_R^\infty = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \dots \vee M_R^n$$

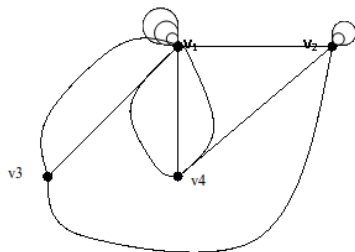
**Ejemplo** Obtener la matriz de conectividad para el siguiente grafo.



$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Matrices de Pseudografos



|       | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_1$ | 3     | 1     | 2     | 3     |
| $v_2$ | 1     | 2     | 1     | 1     |
| $v_3$ | 2     | 1     | 0     | 0     |
| $v_4$ | 3     | 1     | 0     | 0     |

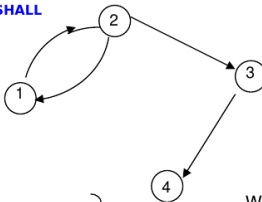
$$W^0 = M_R$$

## CONECTIVIDAD POR WARSHALL

$$W^1 = W^0 \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{1j}) \quad i, j \geq 1, k \leq n$$

$$W^k = W^{k-1} \vee (W^{k-1}_{ik} \wedge W^{k-1}_{kj})$$

$$W^n = M_R^\infty$$



$$M_R = W^0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SUBROUTINE WARSHALL (M)

FOR K := 1 TO N

FOR I := 1 TO N

FOR J := 1 TO N

M[I,J] := M[I,J] OR M[I,K] AND M[K,J]

END SUBROUTINE;

## Camino

Es una trayectoria que comienza en un vértice  $v_0$  y termina en un vértice  $v_n$  donde se pueden repetir aristas y vértices. Un camino se puede representar como una sucesión de vértices  $v_0, v_1 \dots v_{n-1}, v_n$  o como una sucesión de aristas

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2) \dots (v_{n-1}, v_n)$$

## Camino simple

Es un camino que NO repite aristas.

## Camino cerrado o circuito

Es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y puede repetir aristas y vértices.

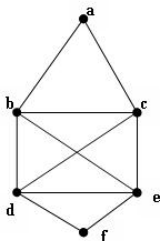
## Circuito simple

Es un camino cerrado en el que no se pueden repetir aristas.



## Longitud de un camino

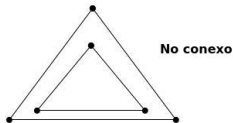
Es el número de aristas que recorre el camino. Un camino de longitud  $n$  debe tener  $n + 1$  vértices. Para el siguiente grafo:



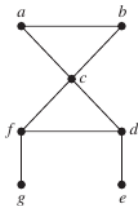
- Un camino simple de longitud 4 que empiece en b: **b,a,c,e,f**
- Un camino cerrado de longitud 5 que inicie en f: **f,d,c,d,e,f**
- Un camino de longitud 5 de d-c: **d,b,c,b,c,d**
- Un circuito simple de longitud 4 que empiece en c: **c,b,d,e,c**

## Grafo conexo

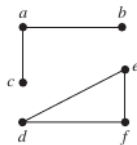
Un grafo  $G = (V, E)$  no dirigido es conexo si para cualquiera  $a, b \in V$ , existe un camino o trayectoria de cualquier longitud.



$G_1$  es conexo y  $G_2$  no es conexo



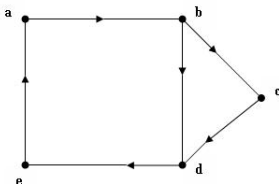
$G_1$



$G_2$

## Débilmente conexo

Se dice que un grafo dirigido es *débilmente conexo* si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.



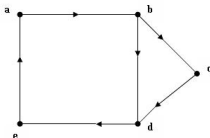
|                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| <b>a-b:</b> a,b     | <b>b-a:</b> b,d,e,a | <b>a-e:</b> a,b,d,e |
| <b>e-a:</b> e,a     | <b>a-c:</b> a,b,c   | <b>c-a:</b> c,d,e,a |
| <b>a-d:</b> a,b,c,d | <b>d-a:</b> d,e,a   | <b>c-b:</b> c,d,b   |
| <b>b-c:</b> b,c     |                     |                     |

Por lo tanto, también es débilmente conexo. si obtenemos el grafo no dirigido subyacente encontramos que existe un camino para cualquiera dos vértices.

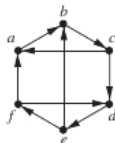
## Grafo fuertemente conexo

### Conexidad en grafos dirigidos

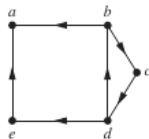
Se dice que un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si hay un camino de  $a$  a  $b$  y un camino de  $b$  a  $a$  para cualquiera dos vértices  $a$  y  $b$  en el grafo.



$H$  es débilmente conexo y  $G$  es fuertemente conexo

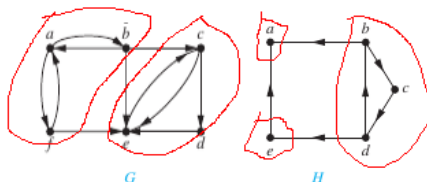


$G$



$H$

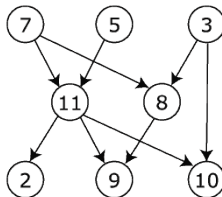
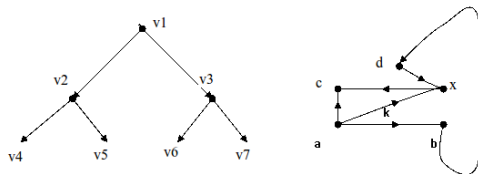
## Componentes fuertemente conexos



- El grafo  $H$  tiene 3 componentes fuertemente conexas; el vértice  $a$  y el vértice  $e$  por ser subgrafos y el componente que es un subgrafo consistente de los vértices  $\{b, c, d\}$
- El grafo  $G$  tiene dos componentes fuertemente conexas que son los subgrafos formados por los vértices  $\{a, b, f\}$  y  $\{c, d, e\}$

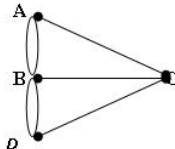
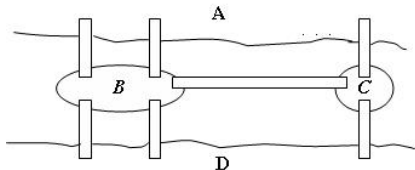
## Grafo acíclico dirigido

Es un grafo que no tiene ciclos.



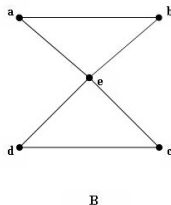
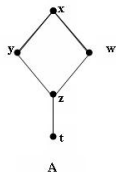
## Problema de los puentes de Königsberg

Partir de cualquier lugar (A,B,C y D) caminar sobre cada puente exactamente una vez y regresar a la posición inicial de partida.



## Circuito de Euler

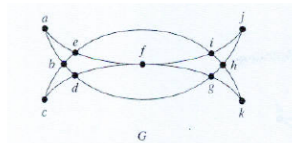
Un **circuito de Euler** en un grafo  $G$  es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada arista de  $G$ . Un **camino de Euler** en  $G$  es un camino simple que pasa exactamente una vez por cada arista.



En el grafo  $A$  hay una *camino de Euler*  $t, z, w, x, y, z$  se pueden repetir vértices pero no aristas. En el grafo  $B$  hay un circuito euleriano:  $a, e, c, d, e, b, a$

## Teorema

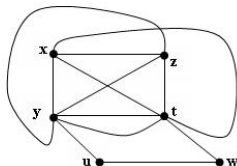
Un **pseudografo** conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.





**Ejemplo.** Sea el siguiente grafo tiene un circuito euleriano

$z, y, t, y, x, z, t, x, t, w, u, y, z$



$$\delta(u) = 2$$

$$\delta(w) = 2$$

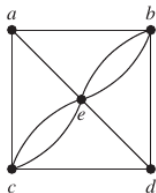
$$\delta(y) = 6$$

$$\delta(t) = 6$$

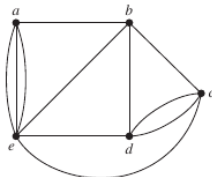
$$\delta(z) = 4$$

$$\delta(x) = 4$$

Hay camino de Euler y circuito de Euler

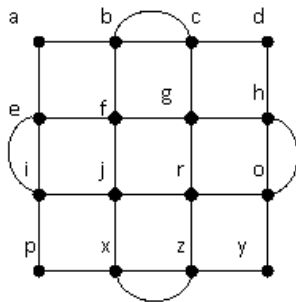


$a, e, c, e, b, e, d, b, a, c, d$



$a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, e, a$

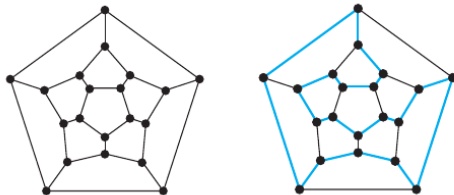
Un circuito de Euler.



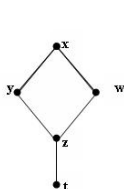
Circuito de Euler: [a,b,c,b,f,g,c,d,h,g,r,o,h,o,y,z,r,j,x,z,x,p,i,j,f,e,i,e,a](#)

## Circuito de Hamilton

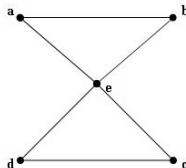
Un **camino de Hamilton** en un grafo  $G$  es un *camino simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice, y un **circuito de Hamilton** en un grafo  $G$  es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice. Es decir, el camino simple  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  en el grafo  $G = (V, E)$  es un camino de Hamilton si  $V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  y  $x_i \neq x_j$  para  $0 \leq i < j \leq n$ , y un circuito simple  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_0$  ( $n > 0$ ) es un circuito de Hamilton si  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  es un camino de Hamilton.



20 ciudades son visitadas pasando exactamente una vez.

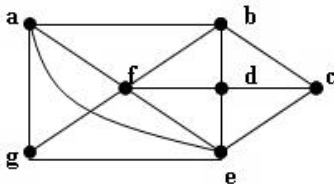


A



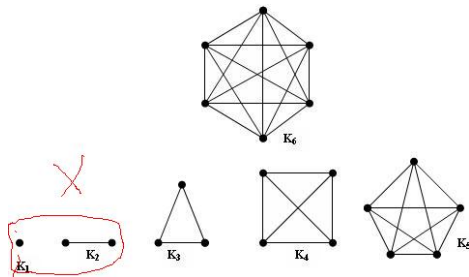
B

El grafo  $A$  tiene un camino hamiltoniano  $t, z, y, x, w$  y el grafo  $B$  tiene un camino hamiltoniano  $a, b, e, d, c$ . Ninguno de los dos grafos tiene circuito hamiltoniano. El siguiente grafo tiene el circuito hamiltoniano  $a, b, c, d, e, f, g, a$



## Hamilton y $K_n$

Muestre que  $K_n$  tiene un circuito de Hamilton siempre que  $n \geq 3$



De los circuitos especiales se puede decir:

- Que son *circuitos simples*. En el caso del circuito de Euler se pueden repetir vértices pero en el caso del circuito de Hamilton NO.
- Los caminos especiales son *caminos simples*. En el camino de Euler se pueden repetir vértices. Pero en el camino de Hamilton no se pueden repetir vértices.



Kenneth H. Rosen.

*Discrete Mathematics and Its Applications.*

McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.

Chapter 10. Graphs.