

Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

Recurrencias lineales no homogéneas

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$

Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ (Hanoi) para $a_1 = 1$ (Hanoi) La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

- 1 Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz $r=2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
- 2 Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
- 3 El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces $A=-1$.

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

- 3 Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
- 4 Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α . Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de la relación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**

La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

- 1 Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ **(por Teorema 1)**

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

- 2 Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n .
- 3 Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Forma de las soluciones particulares

| $F(n)$ | $a_n^{(p)}$ |
|---|---|
| C_1 | A |
| n | $A_1n + A_0$ |
| n^2 | $A_2n^2 + A_1n + A_0$ |
| $n^t, t \in \mathbb{Z}^+$ | $A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + \dots + A_1n + A_0$ |
| $r^n, r \in \mathbb{R}$ | Ar^n |
| $\sin(\alpha n)$ | $A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$ |
| $\cos(\alpha n)$ | $A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$ |
| $n^t r^n, t \in \mathbb{Z}^+, r \in \mathbb{R}$ | $r^n(A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + \dots + A_1n + A_0)$ |
| $r^n \sin(\alpha n)$ | $Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$ |
| $r^n \cos(\alpha n)$ | $Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$ |

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n, a_0 = 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ **determine la solución para** $a_0 = 4$

- 1 Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
- 2 La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
- 3 La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
- 4 Entonces por términos semejantes
 $An + B = 2(A(n - 1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
- 5 Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
- 6 Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde c_1, c_2, \dots, c_k son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) S^n$$

- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad m , existe una solución particular de la forma

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) S^n$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Encontrar la solución general de la recurrencia

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

- 1 Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
- 2 La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
- 3 La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
- 4 Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B &= 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ &\quad - 6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Encontrar la solución general de la recurrencia

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

4 Solucionando:

$$nC2^n = 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n$$

$$nC = 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$

$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$$

La solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n 2^{n+1} + 3/2n + 21/4$$

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n . Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución
- Por iteración
- Funciones generatrices

Cambio de variable

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1 Supongamos $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^k/2) + 2$$

$$T(2^k) = t_k$$

2 Por tanto la recurrencia $t_k = 2t_{k-1} + 2$ tiene solución:

$$t_k^{(h)} = \alpha 2^k \text{ y } t_k^{(p)} = A$$

3 Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$

4 Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1 Supongamos $n = 2^k$

$$T(2^k) = 5T(2^k/2) + 3$$

$$T(2^k) = t_k$$

2 Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución:

$$t_k^{(h)} = \alpha 5^k \text{ y } t_k^{(p)} = A$$

- 3 Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
- 4 Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n . Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1 Supongamos $n = 3^k$

$$T(3^k) = 9T(3^k/3) + 3^k$$

$$T(3^k) = t_k$$

2 Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución:

$$t_k^{(h)} = \alpha 9^k \text{ y } t_k^{(p)} = A 3^k$$

3 Entonces $A 3^k = 3^k[3A + 1]$, $A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$

$$t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$$

$$T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$$

4 Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ **es** $O(n \log n)$
 $n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned}\log n &= \log 4^k \\ &= k \log_4 4 \\ \log n &= k\end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general

$$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$$

$$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$$

$$t_k^{(p)} = (Ak + B)4^k$$

$$(Ak + B)4^k = 3[(A(k-1) + B)4^{k-1}] + 4^k k$$

$$(Ak + B)4^k = 4^k (3/4[A(k-1) + B] + k)$$

$$Ak + B = 3/4 Ak - 3/4 A + 3/4 B + k$$

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ **es** $O(n \log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$,
 $B = -12$

$$\begin{aligned}t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\&= \alpha 3^{\log n} + 4n \log n - 12n\end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces

$$4n \log n > 12n$$

$\therefore T(n)$ **es** $O(n \log n)$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A, A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 173^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que:
 $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \text{ es } \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ **es** $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$

$$a > b^d, 9 > 3^1$$

$$O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$$

$$T(n) \text{ es } O(n^2)$$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ **es** $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$

$$a = b^d \text{ por tanto } 1 = 3/2^0$$

$$O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

$$T(n) \text{ es } O(\log n)$$

- **Mostrar que** $T(n) = T(5n/2) + 3$ **es** $O(n^{\log_2 5})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$

$$a > b^d \text{ por tanto } 5 > 2^0$$

$$O(n^{\log_2 5})$$

$$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b , donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in \mathbb{R}^+$.

Entonces

$$T(n) \text{ es } \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & \text{si } a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > 1 \end{array} \right\}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a - 1)$ y $C_2 = -c/(a - 1)$

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3 - 1)$ y $C_2 = -22/(3 - 1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$$T(n) = T(n/2) + 1 \text{ para } T(1) = 1$$

Por el m.m

$$a = 1, b = 2 \text{ y } d = 0$$

$$a = b^d \text{ por tanto } 1 = 2^0$$

$$O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

$$T(n) \text{ es } O(\log n)$$



Kenneth H. Rosen.

Discrete Mathematics and Its Applications.

McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.

Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.