

Matemáticas discretas II

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Marzo 2018

Contenido

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

3 Árboles de expansión

Contenido

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

3 Árboles de expansión

Introducción a los árboles

No existen caminos cerrados

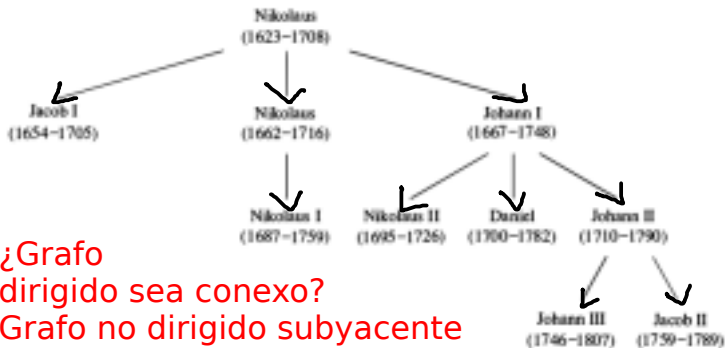
Introducción

Un árbol es un grafo conexo que no contiene circuitos simples. Los árboles son utilizados en un gran número de problemas computacionales, como es el caso de algoritmos de codificación, programación dinámica, entre otros.

Introducción a los árboles

Definición 1

Un árbol no tiene ningún circuito simple. Esto quiere decir que no puede contener aristas múltiples ni ciclos.

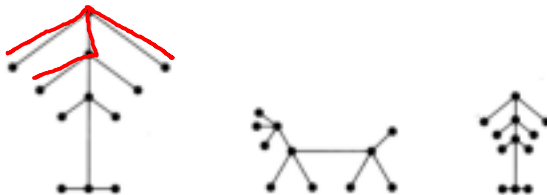


¿Grafo
dirigido sea conexo?
Grafo no dirigido subyacente
sea conexo

Introducción a los árboles

Teorema 1

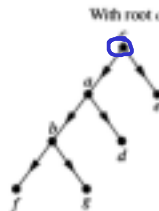
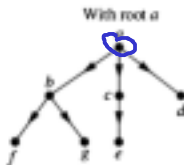
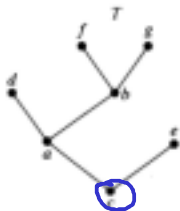
Un grafo no dirigido es un árbol si y sólo si hay un único camino entre cada par de **vertices**



Introducción a los árboles

Definición 2

Un árbol con raíz es un árbol con un vértice que ha sido designado como raíz y cada arista se puede acceder desde un camino directo desde la raíz.



Introducción a los árboles

Definición 3

La terminología de los árboles tiene orígenes botánicos y genealógicos. Suponga que T es un árbol con raíz.

- El **padre** de v es el único vertice u , tal que hay una arista dirigida de u a v
- El caso contrario anterior, se dice v es **hijo** de u
- Los vértices con el mismo padre son llamados **hermanos**
- Los **antecesoros** de cualquier vértices, son el camino desde la **raíz** hasta el vértices, pero excluyéndolo a él
- Los **descendientes** de un vértice son todos aquellos que tienen a v como antecesor



Introducción a los árboles

Definición 4

- Un vértice es llamado **hoja** si no tiene hijos
- Los vértices de los hijos son llamados **vértices internos**

Definición 5

El **nivel de un vértice** es la longitud del único camino desde la raíz que hasta él. El nivel de la raíz es 0

Introducción a los árboles

Definición 6

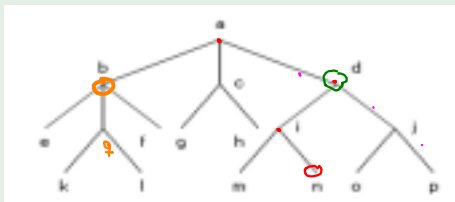
La **altura** de un árbol es la **longitud del camino más largo** desde la raíz hasta cualquier vértice

Definición 7

Un árbol de altura (h), está **equilibrado** o **balanceado** si todas sus hojas están en los niveles h o $h - 1$

Introducción a los árboles

Ejemplo de árbol equilibrado

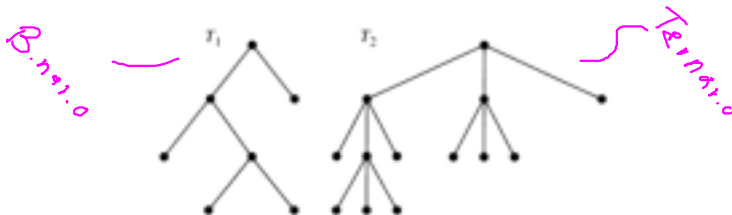


- 1 El árbol está **equilibrado**
- 2 Su **altura** es 3
- 3 j es el **padre** de p
- 4 Los **antecedentes** de n son $\{i, d, a\}$
- 5 los **descendientes** de h son $\{i, j, m, n, o, p\}$
- 6 Los vértices $\{e, k, l, f, g, h, m, n, o, p\}$ son **hojas**
- 7 Los vértices $\{a, b, c, d, i, j\}$ son **vértices internos**

Introducción a los árboles

Definición 8

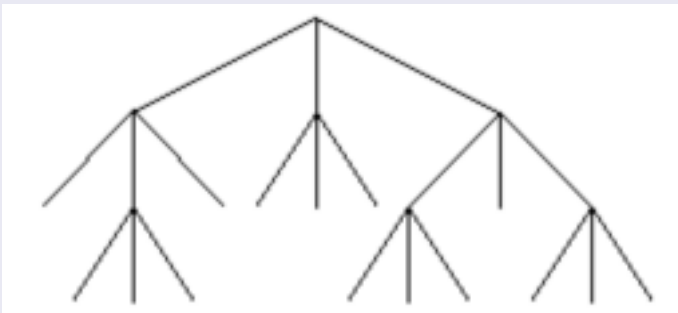
Un árbol con raíz es llamado m -ario si cada vértice interno no tiene más de m hijos. Un árbol es llamado un árbol m -ario completo si cada vértice interno tiene exactamente m hijos. Un árbol m -ario con $m = 2$ es llamado árbol binario.



Introducción a los árboles

Definición 9

Un **árbol m -ario completo** es aquel donde los vértices internos tienen exactamente m hijos y es equilibrado.



Introducción a los árboles

Propiedades de los árboles

Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

Demostración

Paso base: Con $n = 1$ se tiene 0 aristas.

Paso inductivo: Si se supone que para n existen $n - 1$ aristas, ahora miramos para $n + 1$, para conectar el nuevo vértice se necesita una nueva arista

$$\begin{array}{lcl} n \text{ vertices} & & n - 1 \text{ aristas} \\ n + 1 & \longrightarrow & n \text{ aristas} \\ \hline v.v. & & \end{array}$$

Introducción a los árboles

Propiedades de los árboles

Un árbol m -ario completo con i vértices internos contiene $n = m \cdot i + 1$ vértices.

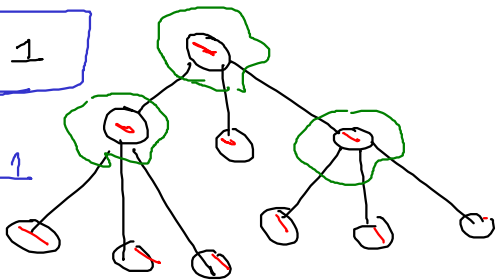
Demostración

Puesto que el número de nodos internos es i y cada uno tiene m hijos diferentes de la raíz.

$$n = m \times i + 1$$

$$n = 3 \times 3 + 1$$

$$n = 10$$



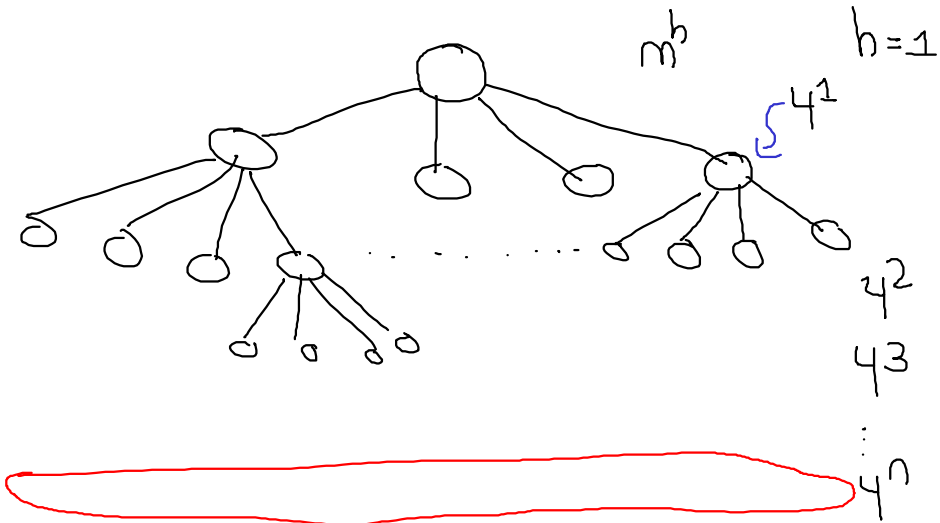
Introducción a los árboles

Propiedades de los árboles

Un árbol m -ario de altura h , tiene máximo m^h hojas.

Demostración

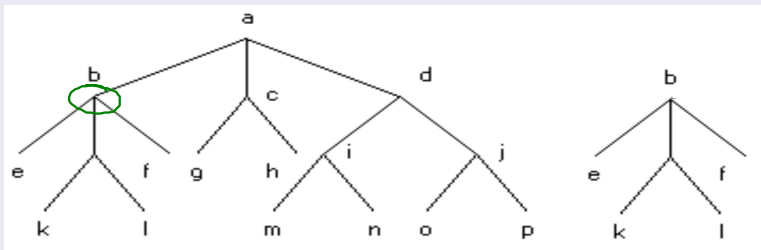
- **Paso base** Con $h = 1$ se tiene m hijos
- **Paso inductivo** Tomando h cualquier se tienen m^h hijos. Para $h + 1$ cada hijo tiene m hijos, por lo tanto, se tienen en total $m * m^h = m^{h+1}$ hijos.



Introducción a los árboles

Propiedades de los árboles

Un **subárbol** es un árbol que se obtiene al tomar uno de los nodos internos de un árbol como raíz.



¿Que es un árbol?

Grafo aciciclo dirigido conexo (Que no contiene circuitos simples)

¿Que es un árbol con raíz?

Hemos seleccionado un vértice como raíz. Existe un camino de este vértice al resto

Definicion

Padre: Es un vértice U , el cual tiene una arista que va de U a V

Hijo: Es un vértice V , el cual tiene una arista que va de U a V

Antecesoros: Dado un nodo U , son todos aquellos vértices que van desde él (excluyendolo) hasta la raíz

Sucesores: Dado un vértice U , son todos aquellos vértices que desde el hasta las hojas.

¿Que es un árbol equilibrado? Es un árbol cuyas hojas están a altura h o $h-1$

¿Que es un árbol m -ario? Es un árbol cuyos nodos internos tienen a lo sumo m hijos

¿Que es un árbol m -ario completo? Los nodos tienen exactamente m hijos y es equilibrado

¿El número máximo hojas tiene un árbol m-ario completo de altura h ?

$$m^h$$

Esto es análogo también a contar los vértices internos en un nivel dado

Contenido

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

3 Árboles de expansión

Recorridos en árboles

Definición

Los árboles con raíz se utilizan frecuentemente para almacenar información. Existen algoritmos de recorrido para visitar cada uno de los vértices para acceder a los datos. Los algoritmos más conocidos de recorrido de árboles son:

- Recorrido en preorden
- Recorrido en inorden
- Recorrido en postorden

Recorridos en árboles

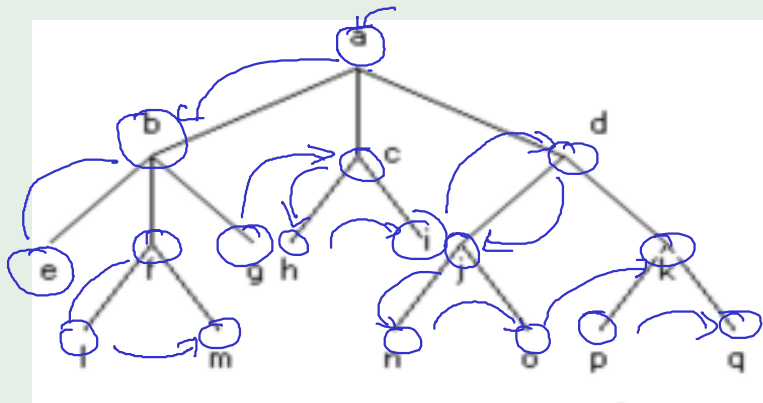
Recorrido en preorden

Para realizar el recorrido en preorden:

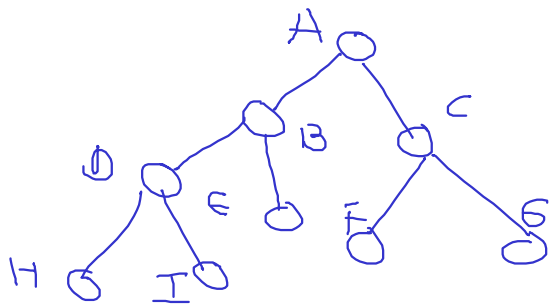
- 1 Visite la raíz. muestre la raíz
- 2 Visite los subárboles de izquierda a derecha (repita el procedimiento hasta llegar a las hojas)

Recorridos en árboles

Recorrido en preorden



El recorrido preorden es $a, b, e, f, l, m, g, c, h, i, d, j, n, o, k, p, q$



A, B, D, H, I, E, C, F, G

Recorridos en árboles

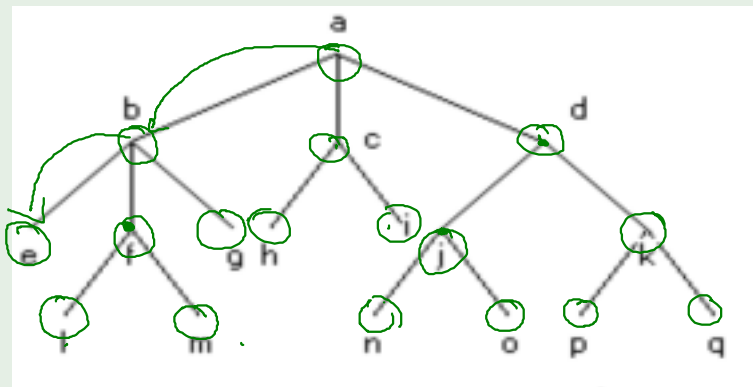
Recorrido en inorden

Para realizar el recorrido en inorden:

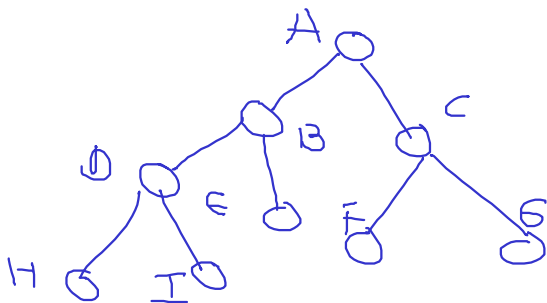
- 1 Visite el sub-arbol más izquierdo (primer hijo de izquierda a la derecha)
- 2 Visite la raíz. muestre la raíz
- 3 Visite los subárboles restantes de izquierda a derecha (repita el procedimiento hasta llegar a las hojas)

Recorridos en árboles

Recorrido en inorden



El recorrido en inorden es: e, b, l, f, m, g, a, h, c, i, n, j, o, d, p, k, q



H, D, I, E, B, A, F, C, G

Recorridos en árboles

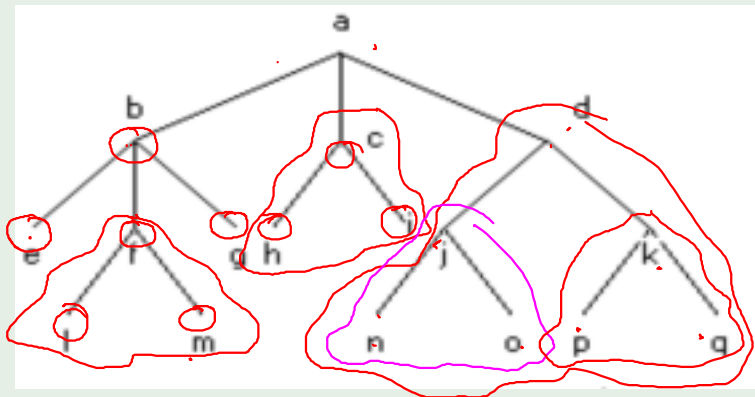
Recorrido en postorden

Para realizar el recorrido en postorden:

- 1 Visite el sub-arbol más izquierdo (primer hijo de izquierda a la derecha)
- 2 Visite los subárboles restantes de izquierda a derecha (repita el procedimiento hasta llegar a las hojas)
- 3 Visite la raíz. muestre la raíz

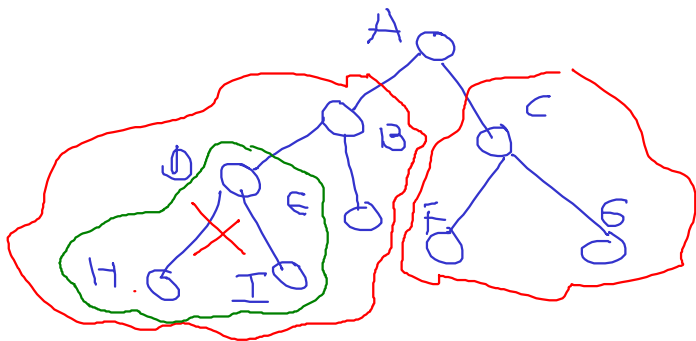
Recorridos en árboles

Recorrido en postorden



El recorrido en postorden es:

e, l, m, f, g, b, h, i, c, n, o, j, p, q, k, d, a



H I D E B F G C A

Resumen

Preorden: Raíz, Izquierda, Derecho(s)

Inorden: Izquierda, Raíz, Derecha(s)

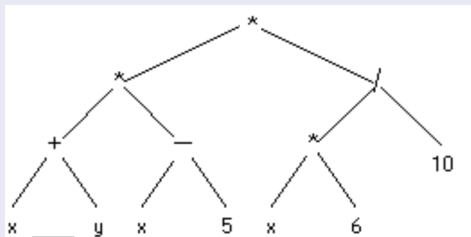
Postorden: Izquierda, Derecha(s), Raiz

Recuerde que al explorar un subarbol se inicia el algoritmo.

Recorridos en árboles

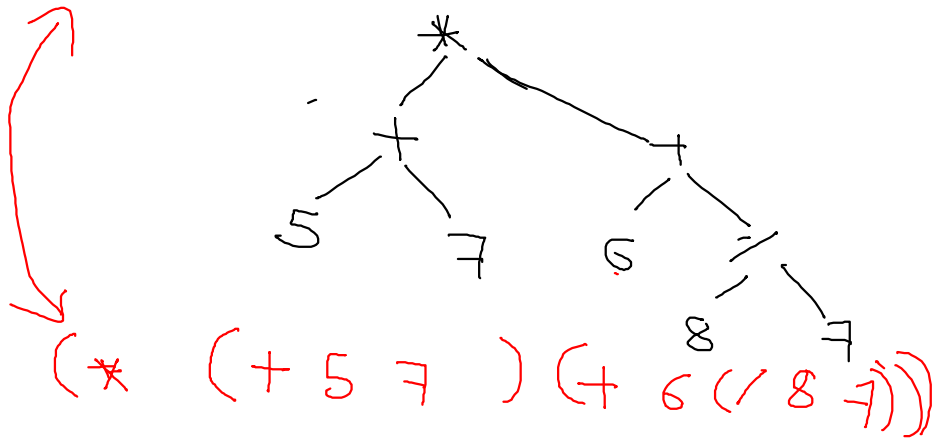
Expresiones aritméticas

Las expresiones matemáticas pueden ser representadas usando árboles:



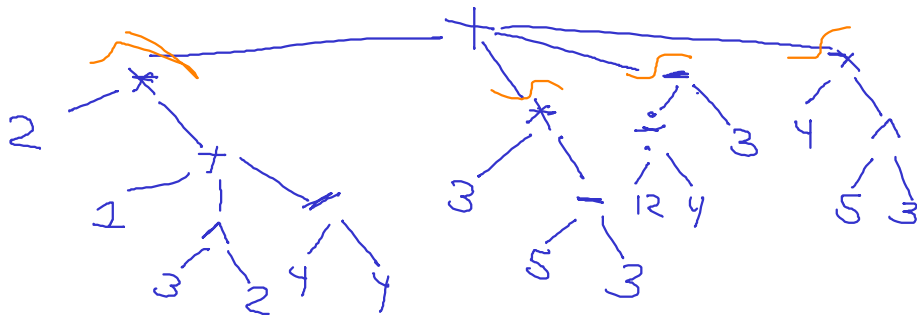
- En preorden: $(* (* (+ x y) (- x 5)) (/ (* x 6) 10))$
- En inorden: $((x + y) * (x - 5)) * ((x * 6) / 10)$
- En postorden: $((((x y +) (x 5 -) *) ((x 6 *) 10 /) *)$

$$(5 + 7) * (6 + (8 / 7))$$



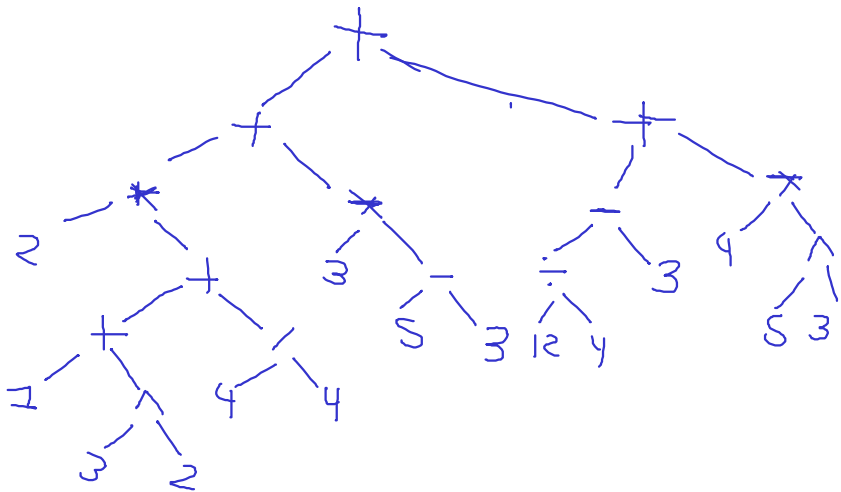
$$\left(2 * \left(1 + 3^2 + \frac{4}{4} \right) \right) + \left(3 * (5 - 3) \right) + \left(\frac{12}{4} - 3 \right) + \left(4 * 5^3 \right)$$

H_1 H_2 H_3 H_4



```
( + ( * 2 ( + 1 ( ^ 3 2 ) ( / 4 4 ) )
  ( * 3 ( - 5 3 ) )
  ( - ( / 12 4 ) 3 )
  ( * 4 ( ^ 5 3 ) ) )
```

$$\left(\left(2 * (1 + 3^2) + \frac{4}{4} \right) + (3 * (5 - 3)) + \left(\frac{12}{4} - 3 \right) + 4 * 5^3 \right)$$



Contenido

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

3 Árboles de expansión

Árboles de expansión

Definición

Es un problema que está asociado a como obtener un árbol expansión para un grafo. Este árbol contiene todos los nodos del grafo y algunas de sus aristas para asegurar conectividad

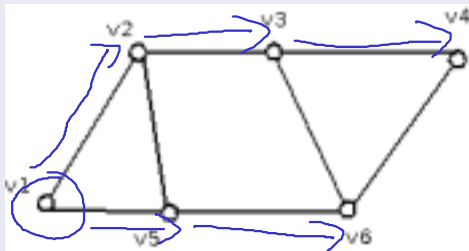
Definition

Un árbol de expansión de un **grafo conexo** $G=(V,E)$ es un árbol que tiene el conjunto de nodos N y es subgrafo de G . Esto es, un árbol de expansión es conexo, acíclico y tiene a todo N y a parte de A como un conjunto de aristas.

Árboles de expansión

Obtención del árbol

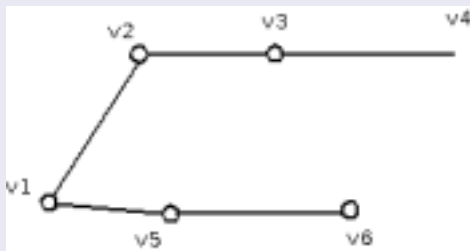
Hay muchas formas de obtener un árbol de expansión. Al empezar a borrar aristas para borrar los ciclos, por ejemplo:



Árboles de expansión

Obtención del árbol

Al eliminar $\{(v1, v5), (v3, v6)(v4, v6)\}$

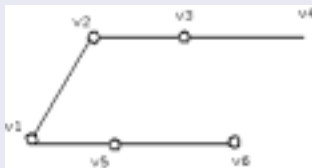


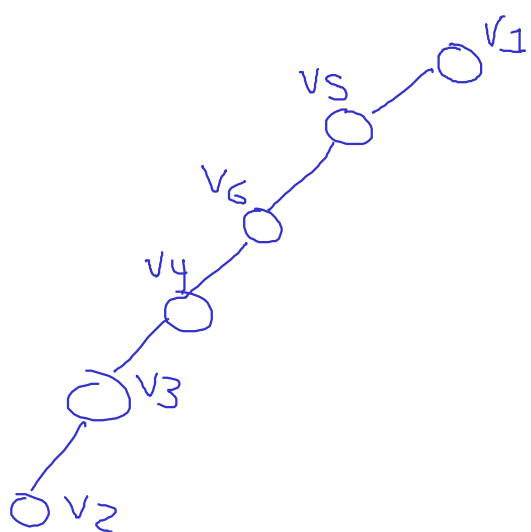
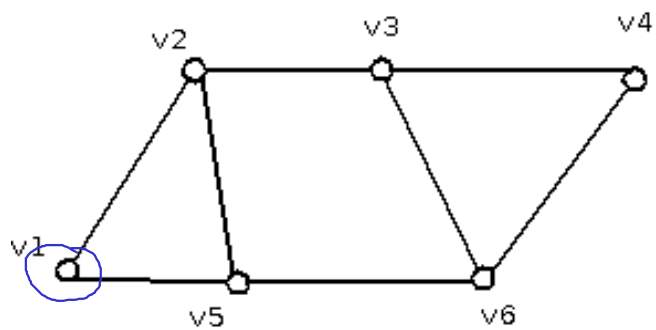
Árboles de expansión

Obtención del árbol

Una forma más sencilla es aplicar BFS (Búsqueda por amplitud) a un grafo evitando recorrer los nodos ya visitados, desde un nodo arbitrario, esto nos genera un árbol de expansión, para ejemplo anterior si comenzamos en $V1$ obtenemos.

- $\{(v1, v2), (v1, v5)\}$
- $\{(v2, v3), (v5, v6)\}$
- $\{(v3, v4)\}$







Kenneth H. Rosen.

Discrete Mathematics and Its Applications.

McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.

Chapter 11. Graphs.

Gracias

Próximo tema:
Lenguajes y gramáticas