Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas
- Cambio de variable
- Método maestro

Contenido

Recurrencias lineales no homogéneas

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$

Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

$$\underbrace{a_n = 2a_{n-1}} + 1 \qquad a_1 = 1$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \qquad r - 2 = 0 \qquad r = 2$$

$$\boxed{a_n^{(h)} = A2^n}$$

$$a_n^{(p)} = B \qquad a_n = 2^n - 1$$

$$B = 2B + 1 \qquad B = -1$$

$$\boxed{a_n = A2^n - 1} \qquad a_1 = 1$$

$$1 = A2 - 1 \longrightarrow A = 1$$

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

$a_0 = 5 \quad a_1 = 10$

$$a_n = 6a_{n-1} + 7a_{n-2} + 5$$

$$r^2 - 6r - 7 = 0$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} \Rightarrow \frac{6 \pm 8}{2} \to 7, \; -1$$

$$a_n = A(-1)^n + B(7)^n$$

$$a_n^{(p)} = C$$

$$C = 6C + 7C + 5$$

$$-12C = 5 \qquad C = -\frac{5}{12}$$

$$a_n = A(-1)^n + B(7)^n - \frac{5}{12}$$

$$5 = A + B - \frac{5}{12}$$

$$10 = -A + 7B - \frac{5}{12}$$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**

La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + \boxed{(49/20)7^n}$$

Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
$n+1$ n	$A_1 n + A_0$
n^2+n+2 n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	$A r^n$
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n + 3^n$$

$r^2 - 4r + 4 \qquad r = 2$

$3^{n-2} \to 3^n \times 3^{-2} \to \frac{3^n}{3^2}$

$$a_n^{(h)} = A2^n + Bn2^n$$

$$a_p = C3^n + Dn + E$$

$$C3^n + Dn + E = 4\left(C3^{n-1} + D(n-1) + E\right) - 4\left(C3^{n-2} + D(n-2) + E\right) + n + 3^n$$

$$\cancel{C3^n} + \cancel{Dn} + E = \frac{4\cancel{C3^n}}{3} + 4\cancel{Dn} - 4D + 4E - \frac{4\cancel{C3^n}}{9} - 4\cancel{Dn} + 8D - 4E + \cancel{n} + \cancel{3^n}$$

n

$n + r^n$

r^n

$$\begin{cases} C = \frac{4C}{3} - \frac{4C}{9} + 1 \qquad \frac{9}{9}C = \frac{8}{9}C + 1 \qquad \frac{1}{9}C = 1 \qquad C = 9 \\ D = 4D - 4D + 1 \qquad D = 1 \\ E = -4D + \cancel{4E} + 8D - \cancel{4E} \qquad E = -4 + 8 \end{cases}$$

$E = 4$

$$\boxed{a_n = A2^n + Bn2^n + 9 \times 3^n + n + 4}$$

$a_0 = 2$

$a_1 = 4$

-2^2

$2 = A + 9 + 4 \qquad A = -11$

$4 = 2A + 2B + 27 + 1 + 4 \to 4 = 2B + 10 \qquad \boxed{B = -3}$

$$\boxed{a_n = -11 \times 2^n - 3n2^n + 9 \times 3^n + n + 4}$$

$$\boxed{a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n + 3^n + n + 4}$$

$a_0 = 2$

$a_1 = 8$

$\begin{cases} r^n \to Cr^n \\ n = An + B \end{cases}$

$$a_n^{(h)} = A(6)^n + B(-1)^n$$

$$a_n^{(p)} = C2^n + D3^n + En + F.$$

$$C2^n + D3^n + En + F = 5\left(\frac{C2^n}{2} + \frac{D3^n}{3} + E(n-1) + F\right) + 6\left(\frac{C2^n}{4} + \frac{D3^n}{9} + E(n-2) + F\right) + 2^n + 3^n + n + 4$$

$$C2^n + D3^n + En + F = \frac{5}{2}C2^n + \frac{5}{3}D3^n + 5En - 5E + 5F + \frac{6}{4}C2^n + \frac{6}{9}D3^n + 6En - 12E + 6F + 2^n + 3^n + n + 4$$

$D = \frac{5}{3}D + \frac{6}{9}D + 1$

$C = \frac{5}{2}C + \frac{6}{4}C + 1$

$E = 5E + 6E + 1$

$F = -5E + 5F - 12E + 6F + 4$

$C = -1/3$

$D = -1/2$

$E = -\frac{1}{10}$

$F = -\frac{57}{100}$

$$\boxed{a_n = A(6)^n + B(-1)^n - \frac{1}{3}\times 2^n - \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{10}n - \frac{57}{100}}$$

$a_0 = 2$

$a_1 = 8$

$$2 = A + B - 1/2 - 1/3 - \frac{57}{100}$$

$$8 = 6A - B - 1 - 1 - \frac{1}{10} - \frac{57}{100}$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma
$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

$$r = 2, 2, 2, 3, 3, 4$$

$$F(n) = 2^n + 3^n + 4^n - 8n^5 + 4n^4 + 2$$

$$a_h^{(n)} = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + D3^n + En3^n + F4^n$$

$$a_p^{(n)} = Gn^3 2^n + Hn^2 3^n + In4^n + Jn^5 + Kn^4 + Ln^3 + Mn^2 + Nn + O$$

Encontrar la solución general de la recurrencia
$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B = {} & 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ & -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$

$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

Resolver la R.R

$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2) + 1 + 4^n + n$
$T(0) = 2,\ T(1) = 8$

$T(n) = T(n)^h + T(n)^p$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$r^2 - 3r - 4$ → -1, 4

$n^t = An^t + Bn^{t-1} + \dots z$

$cr^n = Ar^n$

$T(n)^h = A(-1)^n + B(4)^n$

$f(n) = 1 + 4^n + n$ → $C4^n$, $Cn4^n$; $Dn+E$

$T(n)^p = Cn4^n + Dn + E$

$Cn4^n + Dn + E = 3C(n-1)4^{n-1} + 3D(n-1) + 3E$
$4C(n-2)4^{n-2} + 4D(n-2) + 4E + 1 + 4^n + n$

$C+$
4^n
$n4^n$

$\cancel{Cn4^n} + \cancel{Dn} + \cancel{E} = \frac{3Cn4^n}{4} - \frac{3}{4}C4^n + \cancel{3Dn} - 3D + \cancel{3E} +$
$\frac{4Cn4^n}{16} - \frac{8C4^n}{16} + \cancel{4Dn} - 8D + \cancel{4E} + 1 + 4^n + n$

$C = \frac{16}{16}C$ $C=C$

$\{C = \frac{3}{4}C + \frac{4C}{16}$

$\{0 = -\frac{3}{4}C - \frac{8}{16}C + 1$

$D = 3D + 4D + 1$

$E = -3D + 3E - 8D + 1 + 4E$

$-1 = -\frac{20}{16}C$

$\boxed{C = \frac{16}{20}}$

$E = -11D + 7E + 1$

$-6D = 1$

$\boxed{D = -\frac{1}{6}}$

$E = \frac{-11D+1}{-6}$

$\boxed{E = -\frac{17}{36}}$

$T(n)^p = \frac{16}{20}n4^n - \frac{1}{6}n - \frac{17}{36}$

$T(n) = A(-1)^n + B(4)^n + \frac{16}{20}n4^n - \frac{1}{6}n - \frac{17}{36}$

$T(0) = 2$
$T(1) = 8$

- $2 = A + B - \frac{17}{36}$

① $\frac{89}{36} = A + B$

$8 = -A + 4B + \frac{64}{20} - \frac{1}{6} - \frac{17}{36}$ $\underbrace{\qquad}_{\frac{461}{180}}$

② $\frac{979}{80} = -A + 4B$

① + ② $\frac{10591}{720} = 5B$

- $B = \frac{10591}{3600}$ $A = -\frac{1691}{3600}$

T(n) = 5T(n-1) - 4T(n-2) + 4n + 4^n
T(0) = 5 T(1) = 10

$n^t = An^t + Bn^{t-1} + \dots$

$T(n) = T(n)^h + T(n)^p$

$T(2) = 5T(1) - 4T(0) + 8 + 16 = 54$

$T(n)^h = A(4)^n + B$

$T(n)^p = Cn^2 + Dn + En4^n$

$$Cn^2 + Dn + En4^n = 5\left(C(n-1)^2 + D(n-1) + \frac{E(n-1)4^n}{4}\right) - 4\left(C(n-2)^2 + D(n-2) + \frac{E(n-2)4^n}{16}\right) + 4n + 4^n$$

$$\cancel{Cn^2} + \cancel{Dn} + \cancel{En4^n} = 5\left(\cancel{Cn^2} - \cancel{2Cn} + \cancel{C} + \cancel{Dn} - \cancel{D} + \frac{\cancel{En4^n}}{4} - \frac{\cancel{E4^n}}{4}\right) - 4\left(\cancel{Cn^2} - \cancel{4Cn} + \cancel{4C} + \cancel{Dn} - \cancel{2D} + \frac{\cancel{En4^n}}{16} - \frac{2\cancel{E4^n}}{16}\right) + \cancel{4n} + \cancel{4^n}$$

$n4^n$
n^2
n
C
4^n

$E = \frac{5E}{4} - \frac{4E}{16}$ $\quad E = \frac{16}{16}E \quad E = E$

$C = 5C - 4C \quad C = C$

$\cancel{D} = -10C + \cancel{5D} + 16C - \cancel{4D} + 4$

$-4 = 6C \quad \boxed{C = -\frac{2}{3}}$

$0 = -\frac{5E}{4} + \frac{8}{16}E + 1 \quad \frac{3}{4}E = 1 \quad \boxed{E = \frac{4}{3}}$

$0 = 5C - 5D - 16C + 8D$

$0 = -11C + 3D \quad \frac{11}{3}C = D \quad \boxed{D = -\frac{22}{9}}$

$$\boxed{T(n) = A(4)^n + B - \frac{2}{3}n^2 - \frac{22}{9}n + \frac{4}{3}n4^n}$$

$T(0) = 5$
$T(1) = 10$

① $\boxed{5 = A + B}$

$10 = 4A + B \underbrace{- \frac{2}{3} - \frac{22}{9} + \frac{16}{3}}_{\frac{20}{9}}$ ② $\boxed{\frac{70}{9} = 4A + B}$

① - ②

$-\frac{25}{9} = -3A \quad \boxed{\frac{25}{27} = A}$

$\frac{70}{9} = \frac{4 \times 25}{27} + B \quad \boxed{B = \frac{110}{27}}$

$$\boxed{T(n) = \frac{25}{27}(4)^n + \frac{110}{27} - \frac{2}{3}n^2 - \frac{22}{9}n + \frac{4}{3}n4^n}$$

$T(0) = 5$ ✓
$T(1) = 10$ ✓
$T(2) = 54 \longrightarrow T(2) = \frac{25 \times 16}{27} + \frac{110}{27} - \frac{8}{3} - \frac{44}{9} + \frac{128}{3}$ ✓

Contenido

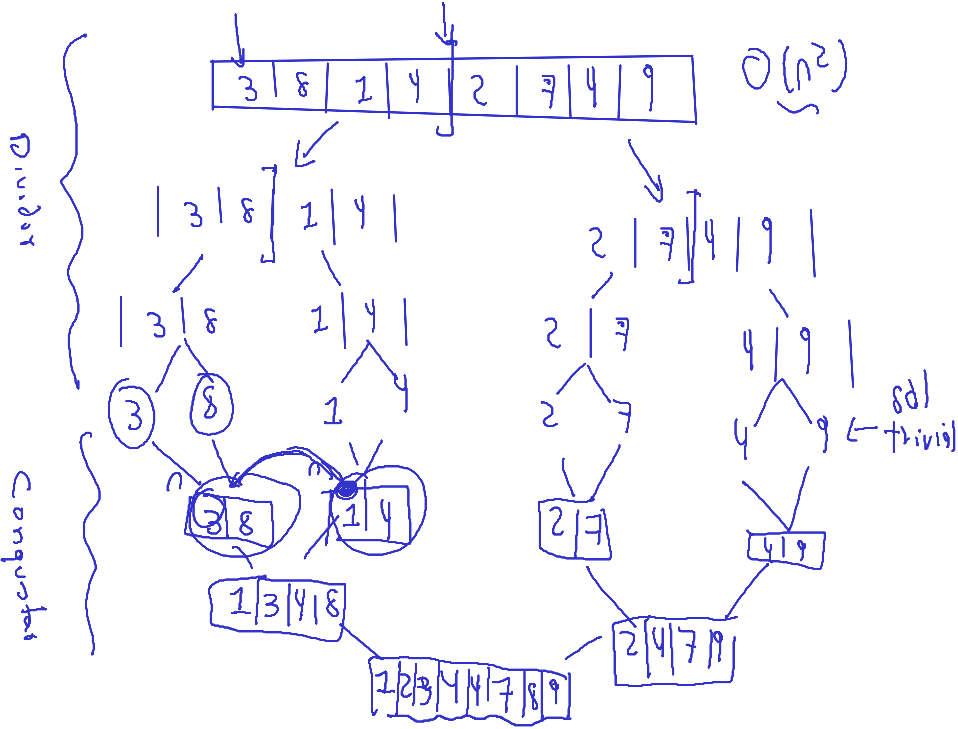
//Para la house
r^2-2r+1
T(n) = 2T(n-1)-T(n-2)+n^2+3^n
Esta es el reto de la noche.

Universidad del Valle

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$



$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n = O(n\log(n))$$

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro FADA
- Por sustitución FADA
- Por iteración FADA
- Funciones generatrices X

Cambio de variable

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1. Supongamos $n = 2^k$

2^{k-1}

$t_k = 2t_{k-1} + 2$

$$\begin{aligned} \leftarrow T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 = 2T(2^{k-1}) + 2 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $\boxed{t_k = 2t_{k-1} + 2}$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $\boxed{t_k = \alpha 2^k - 2}$
4. Como $n = 2^k$ entonces $\boxed{T(n) = \alpha n - 2}$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$ $\quad n = 3^k \quad T(1) = 9$

$T(3^k) = 9T(3^{k-1}) + 3^k$

$T_k = 9T_{k-1} + 3^k$

n $\quad T(3)$

$9T(1) + 3 = 84$

$T_k^h = A(9)^k \qquad T_k^p = B3^k$

$B3^k = 9\frac{B3^k}{3} + 3^k \qquad B = 3B + 1$

$-2B = 1 \quad B = -\frac{1}{2}$

$T_k = A(3^k)^2 - \frac{1}{2}3^k \qquad n = 3^k$

$T(n) = An^2 - \frac{1}{2}n$

$9 = A - \frac{1}{2} \qquad \boxed{\frac{19}{2} = A}$

$T(n) = \frac{19}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

$T(1) = 9$ ✓

$T(3) = \frac{19}{2} \times 9 - \frac{1}{2}.3 = 84$ ✓

$T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + 3 \quad T(1) = 7$

$n = 2^k$

$T_k = 5T_{k-1} + 3$

$T_k^h = A(5)^k$

$B = 5B + 3$

$T_k^p = B$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b (a)}$

$B = -\frac{3}{4}$

$$\boxed{T_k = A(5)^k - \frac{3}{4}}$$

$n = 2^k \quad \log_2(n) = k \quad T(n) = A(5)^{\log_2(n)} - \frac{3}{4}$

$T(n) = A(n)^{\log_2(5)} - \frac{3}{4} \quad \log_2(5) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(2)}$

$T(1) = 7$

$7 = A - \frac{3}{4} \quad \frac{31}{4} = A$

$T(n) = \frac{31}{4} n^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}$

$T(2) = 5T(1) + 3$

$35 + 3 = 38$

$T(2) = \frac{31}{4} 2^{2.3219} - \frac{3}{4} \simeq 37{,}999 = 38$

Recuerda:$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ $(a^{\log_b n} = n^{\log_b a})$ Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1], A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

$n = 4^k$ entonces

$c > 1$

$\leq c \times n \log(n)$

$n > k$

$$\begin{aligned} \log n &= \log 4^k \\ &= k \log_4 4 \\ \log n &= k \end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general

$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$

$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$

$t_k^{(p)} = (Ak + B)4^k$

$$\begin{aligned} (Ak + B)4^k &= 3[(A(k-1) + B)4^{k-1}] + 4^k k \\ (Ak + B)4^k &= 4^k(3/4[(A(k-1) + B)] + k) \\ Ak + B &= 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k \end{aligned}$$

$T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

$n = 4^k$

$T_k = 3T_{k-1} + 4^k \cdot k(2)$

$n^t r^n$

$T_k^h = A(3)^k$ $\qquad T_k^p = 4^k(Bk + C)$

$4^k(Bk+C) = 3 \cdot \frac{4^k}{4}(Bk - B + C) + 2k4^k$

$\cancel{B4^k k} + \cancel{C4^k} = \frac{3}{4}\cancel{4^k Bk} - \frac{3}{4}\cancel{4^k} B + \frac{3}{4}\cancel{4^k} C + 2\cancel{k4^k}$

$k4^k$

4^k

$B = \frac{3}{4}B + 2$ $\qquad C = -\frac{3}{4}B + \frac{3}{4}C$

$\boxed{B = 8}$

$C = -6 + \frac{3}{4}C$

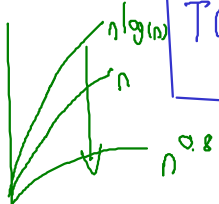
$\frac{1}{4}C = -6$ $\qquad \boxed{C = -24}$

$T_k = A(3)^k + 4^k(8k - 24)$

$n = 4^k$

$k = \log_4(n)$ $\qquad T(n) = A3^{\log_4(n)} + n(8\log_4(n) - 24))$

$$\boxed{T(n) = \cancel{An^{\log_4(3)}} + 8n\log_4(n) - \cancel{24n}}$$



$$\frac{8n\log_2(n)}{\log_2(4)}$$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n\log n)$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 173^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que: $T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Resumen método de cambio de variable

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

$n = b^k$

Resolver

Volver a n

Encontrar cte cond iniciales

R.R. no homogéneas

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

$a = 9 \quad b = 3 \quad c = 1 \quad d = 1$

Si $a < b^d$ $\quad 9 < 3^1$ ✗

Si $a = b^d$ $\quad 9 = 3^1$ ✗

Si $a > b^d$ $\quad 9 > 3$ ✓ $\quad O(n^{\log_b a})$

$O(n^{\log_3 9}) \rightarrow O(n^2)$

Método Maestro

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$
  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$
- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$
  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$
  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$
- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $O(n^{\log_2 5})$
  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c\,n^0 \qquad d = 0$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{cases} \}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

$T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + 3 \quad T(1) = 7$

$T(n) = \frac{31}{4} n^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}$

$a > 1$

$O\left(n^{\log_b(a)}\right)$

$O\left(n^{\log_2(5)}\right)$

$T(n) \leq c \times n^{\log_2(5)}$

$n > k$

Método Maestro

$n=6^k$ $\quad a\neq 1$ $\quad n=\left(\frac{3}{2}\right)^k$

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

Universidad del Valle

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

Resumen:

$1^1 + 2^2$

Método del maestro

T(n) = aT(n/b)+cn^d

Revisar los casos y aplicar la solución.

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Universidad del Valle

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.