



Primer examen opcional  
FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS Y DISEÑO DE ALGORITMOS  
Grupo 51

Duración: 2 horas  
Carlos Andres Delgado S, Ing \*

08 de Abril de 2015

**Nota:** Por favor marcar todas las hojas del examen con su nombre y código de estudiante. Recuerde colocar los procedimientos debido a que tienen un gran valor en la calificación.

## 1. Computación iterativa [39 puntos]

Se requiere un algoritmo que permita calcular una función cuya entrada es un número entero  $n$  y salida es

$$\sum_{i=0}^n (i^3 + \sum_{j=0}^{i+3} 2j) + \sum_{i=0}^{n-2} 2i + \sum_{i=0}^{2n+1} 4$$

- [4 puntos.] Indique las salidas para las siguientes entradas:  $n = \{0, 1, 3, 5, 7\}$
- [35 puntos.] Diseñe un algoritmo **utilizando ciclos** que solucione el problema
  - [6 puntos.] Escriba el algoritmo diseñado.
  - [11 puntos.] ¿Cual es la complejidad espacial y temporal de su algoritmo para una entrada de tamaño  $n$  en términos de  $O(f(n))$ ?. Indique cuantas veces se ejecuta cada línea. Justifique su respuesta.
  - [4 puntos.] ¿Como puede representar los estados de su solución?. ¿Cual sería el estado inicial?
  - [6 puntos.] ¿Cual es la transición de estados de su algoritmo?.
  - [8 puntos.] ¿Cual es la invariante de ciclo de su algoritmo?.

## 2. Crecimiento de funciones y ecuaciones de recurrencia [16 puntos]

- [8 puntos] Suponiendo que  $f(n)$  está definida demuestre que no existe una función  $g(n)$  tal que cumpla  $f(n) = o(g(n))$  y  $f(n) = \omega(g(n))$ .
- [8 puntos] Resuelva la ecuación  $T(n) = 6T(\frac{n}{6}) + 4n^2$  con  $T(1) = 0$  utilizando método del maestro.

## 3. Estructuras de datos [45 puntos]

### 3.1. Conceptos teóricos ([20 puntos])

Indicar cuales de las siguientes expresiones son verdaderas y falsas, en caso de ser falsas justifique su respuesta.

#### 1. Estructura Pilas (Stack) y Colas (Queue)

- a) [4 puntos.] Una cola se puede considerar una estructura *FIFO* es decir, que el primer elemento encolado es el primero en ser desencolado.
- b) [4 puntos.] La complejidad de las operaciones **Push** y **Pop** en una pila es  $\Theta(n \log(n))$

#### 2. Estructura Listas

- a) [4 puntos.] En la lista **simplemente enlazada** la operación  $LIST - INSERT(L, x)$  inserta  $x$  al inicio de la lista
- b) [4 puntos.] En una lista **doblemente enlazada** la complejidad de  $LIST - DELETE(L, x)$  será  $\mathcal{O}(1)$

#### 3. Estructura Tablas Hash

\* carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

- a) [4 puntos.] Si se utiliza una buena función hash en una tabla hash con un número de **slots**  $m$  y un universo de llaves de tamaño  $k$  la complejidad de una **búsqueda** (*exitosa o no*) es  $\Theta(n)$

### 3.2. Ejercicio práctico ([25 puntos])

Construya un árbol rojinegro insertando los siguientes elementos en este orden (13, 2, 3, 7, 9, 4, 5, -1, 7, 19, 18, 10). Muestre el procedimiento para agregar elemento por elemento.

## Ayudas

### Formulas de sumatorias

- $\sum_{k=1}^n c = cn$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{ar^{(n+1)} - a}{r-1}$  Si  $r \neq 1$
- $\sum_{k=0}^n ar^k = (n+1)a$  Si  $r = 1$

### Formulas solución método del maestro

Recuerde la forma  $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si  $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$  para algún  $\epsilon > 0$  entonces  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- Si  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$  entonces  $T(n) = \Theta(\log(n) * n^{\log_b a})$
- Si  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$  para algún  $\epsilon > 0$ ,  $c < 1$  y  $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$  entonces  $T(n) = \Theta(f(n))$ .

### Inserción árboles rojinegros

- Caso 1: x(rojo) es un hijo de un padre rojo y el tío de x es rojo, se pintan de negro padre y tío de x, el abuelo de x queda entonces de rojo. x es ahora el abuelo de x
- Caso 2: x(rojo) es un hijo derecho de un padre rojo y el tío de x, y, es ahora negro. Se rota a la izquierda p[x]. x ahora es el padre de x

- Caso 3: x(rojo) es el hijo izquierdo de un padre rojo y el tío es negro. Se cambian los colores de p[x] y p[p[x]]. Se rota a la derecha p[x].

Figura 1: Rotaciones rojinegros

