Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscarbed@eisc.univalle.edu.co

http://eisc.univalle.edu.co/~oscarbed/MD/

* Notación O

Crecimiento de funciones

Edmund Landau

- Creador de la notación O para analizar o comparar el crecimiento de funciones
- Trabajó sobre la distribución de números primos

(1877-1938)

Crecimiento de funciones

Donald Knuth

• Cuando estaba en 8° grado participó en un concurso que consistía en formas palabras con las letras de la expresión "Ziegler's giant Bar"

• Estudió Física, matemáticas y ciencias

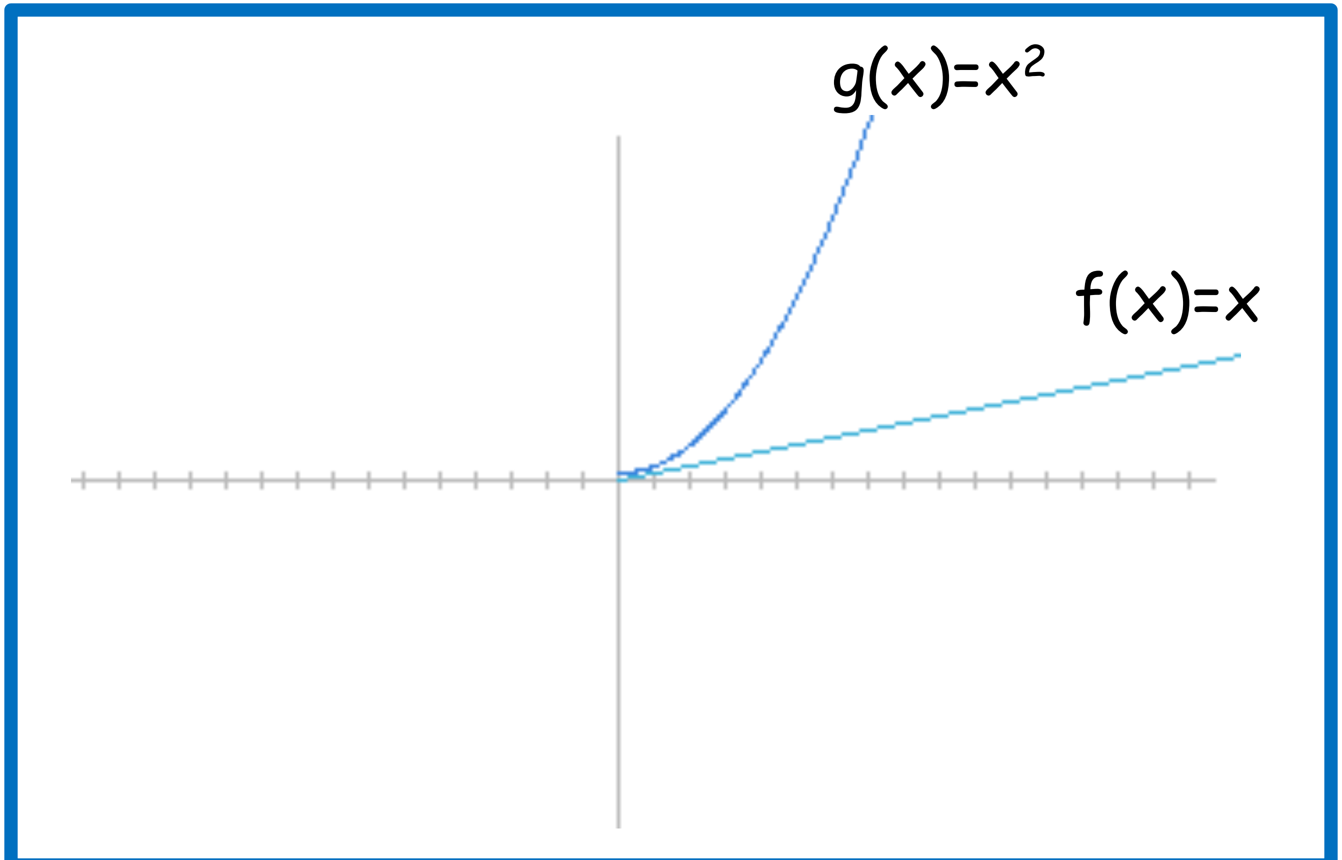
• Escribió *The Art of Computer Programming*

•Desarrolló TeX

(1938 -)

Crecimiento de funciones

El **análisis de crecimiento de funciones** se basa en comparar el comportamiento de dos o más funciones



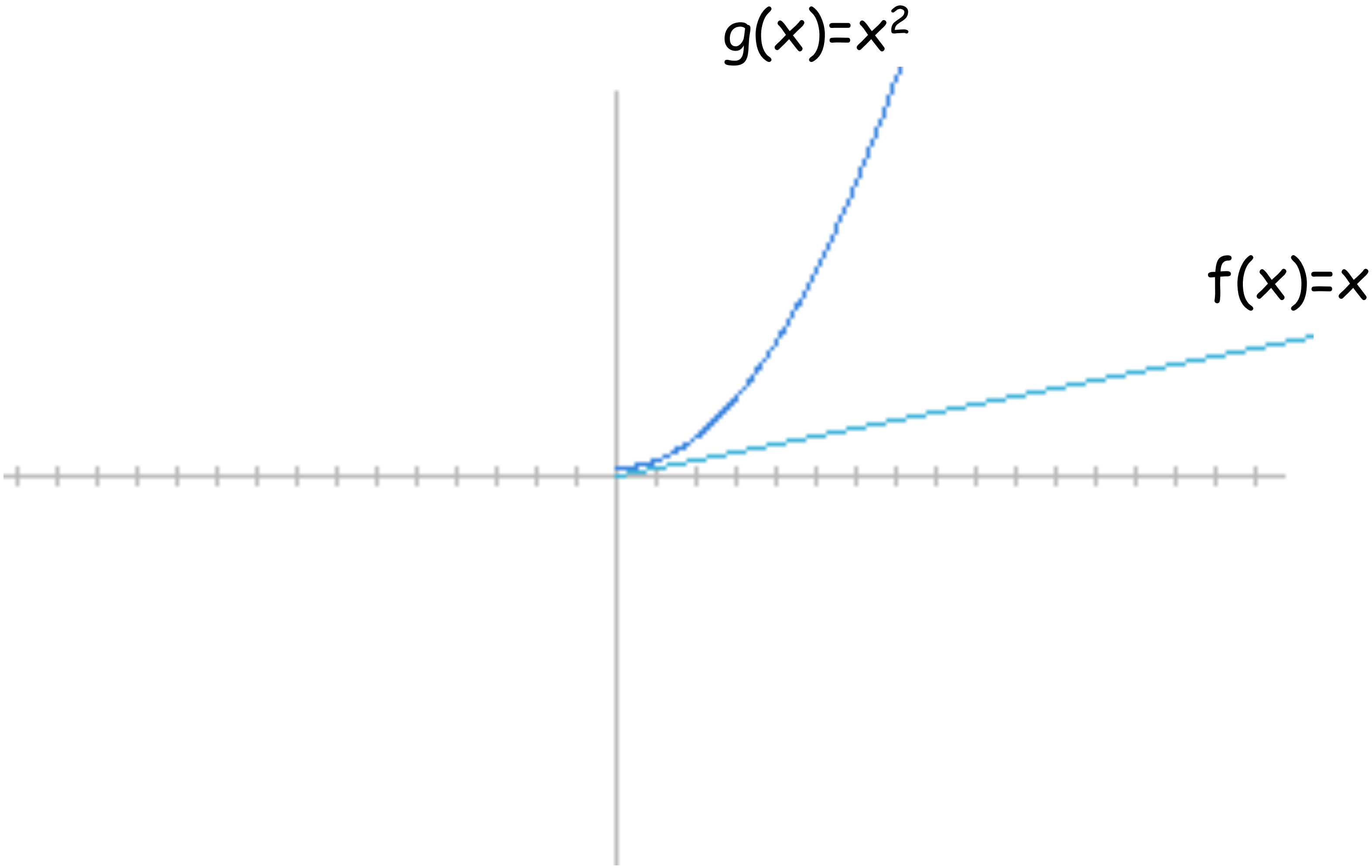
Programa 1:

```
public void buscar(){
  for(int i=1; i<=n; i=i+1){
   if (datos[i]==b){
     System.out.println("Encontrado");
     break;
   }
  }
}
```

Programa 2:

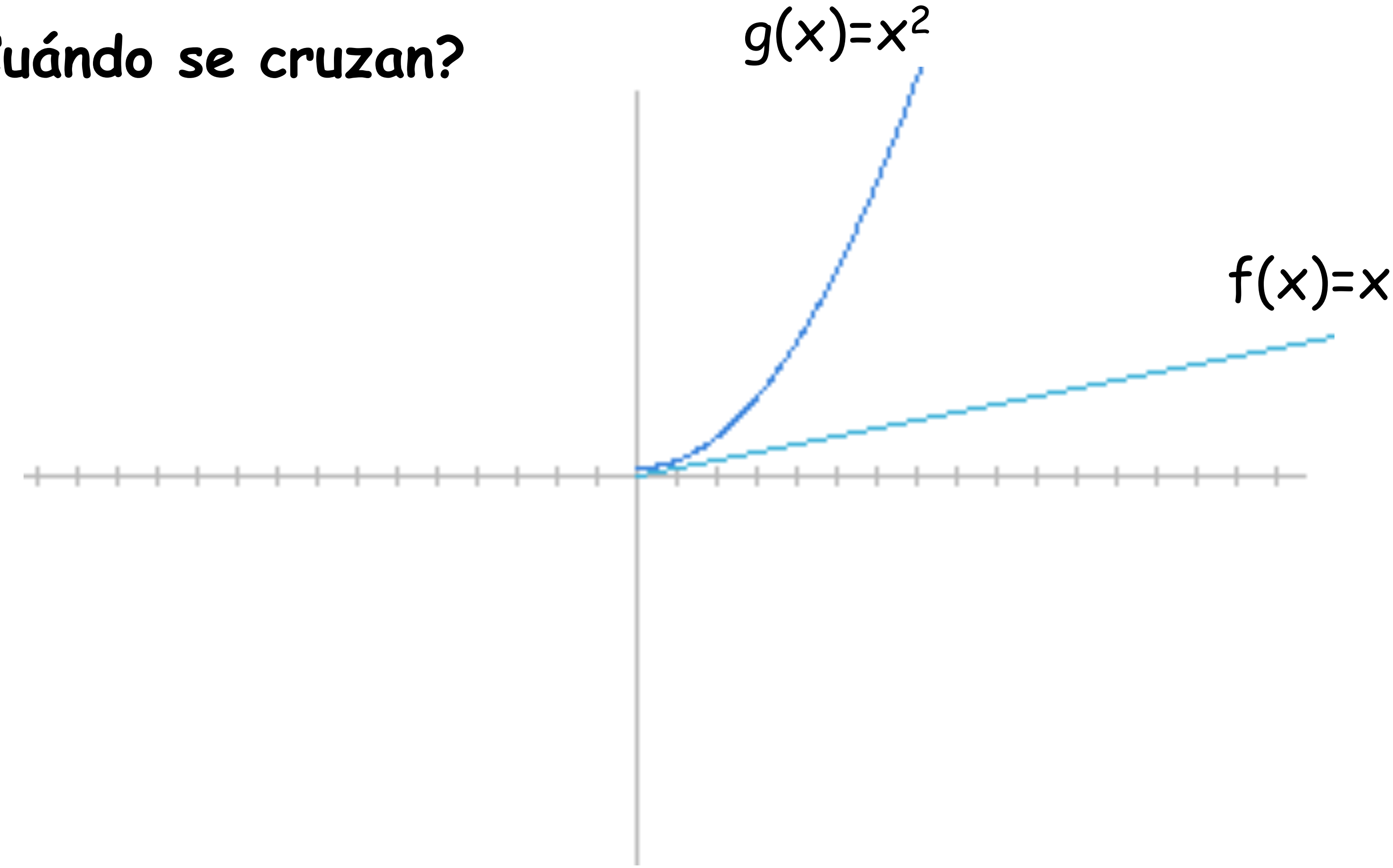
```
public void buscar(int i, int j){
  medio=(i+j)/2;
  if (a[medio]==b)
    break;
  if (a[medio]<b)
    buscar(medio,j);
  if (a[medio]>b)
    buscar(i,medio);
}
```

Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

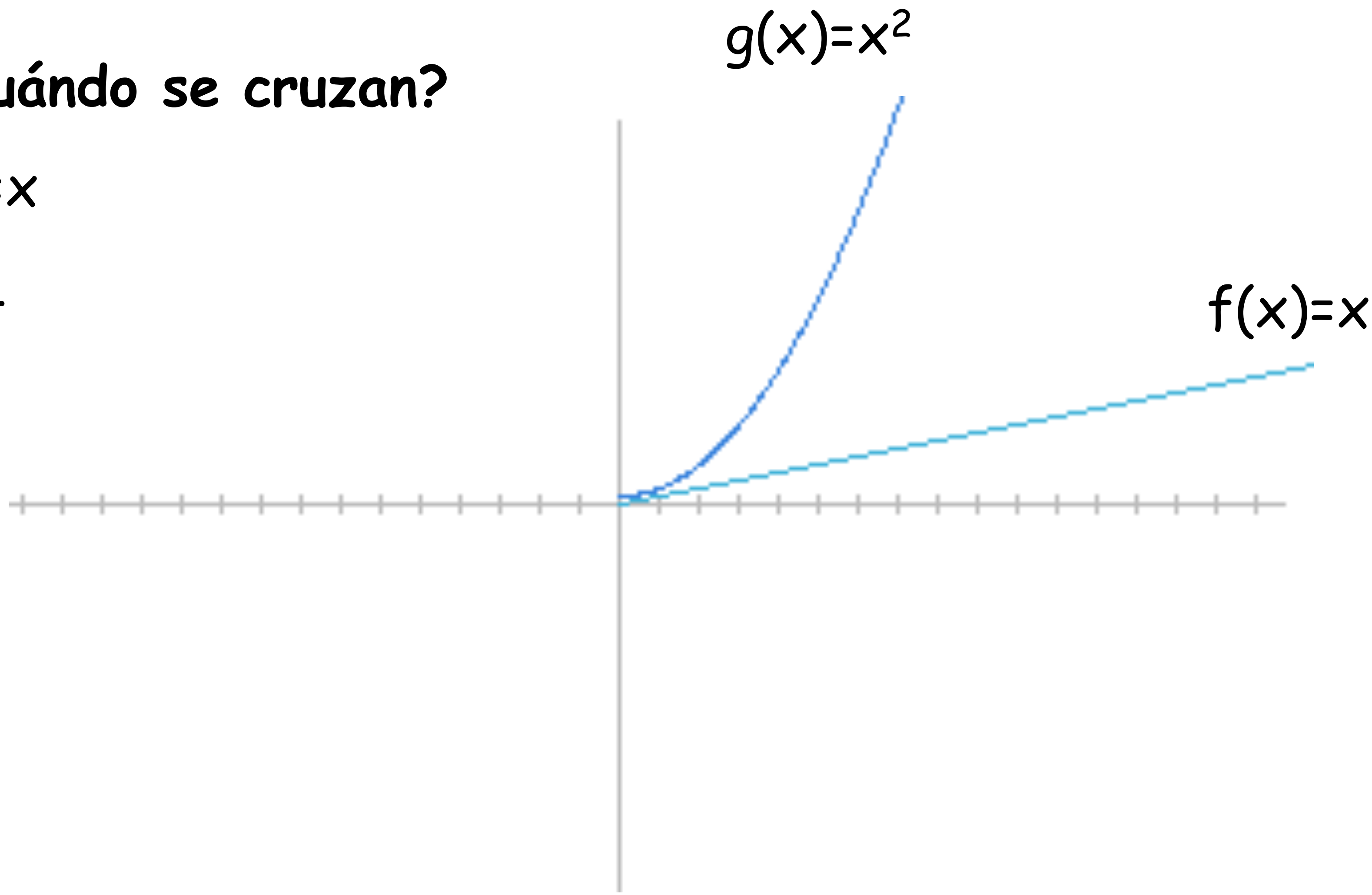


Crecimiento de funciones

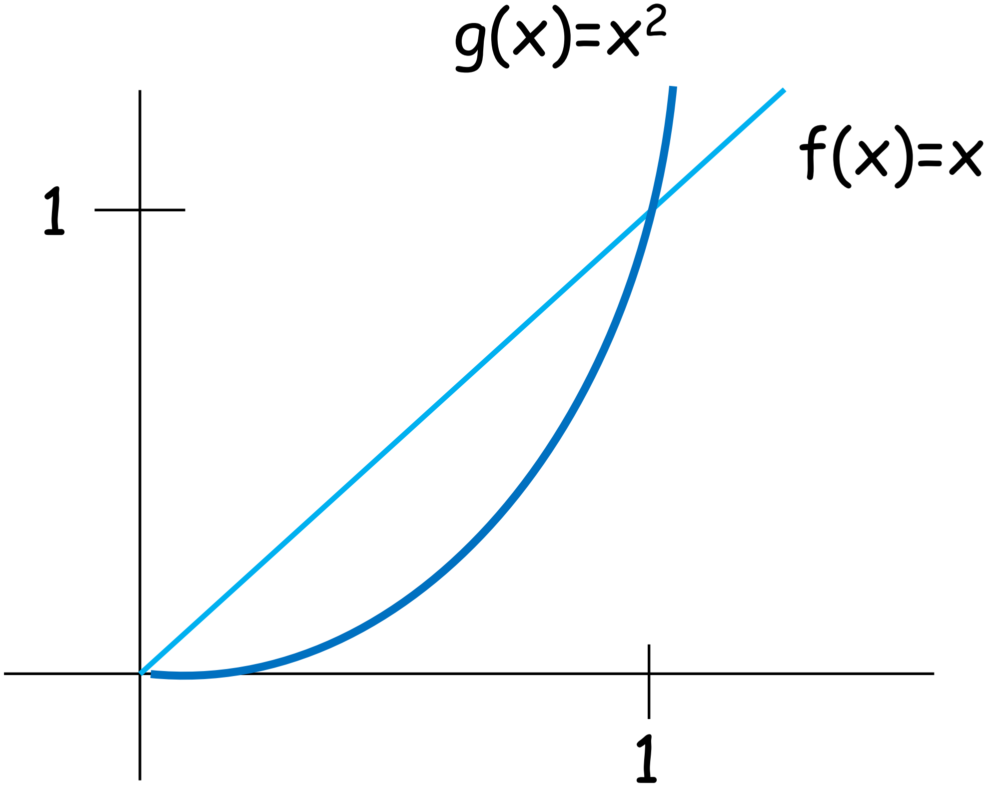
¿Cuándo se cruzan?

$x^2=x$

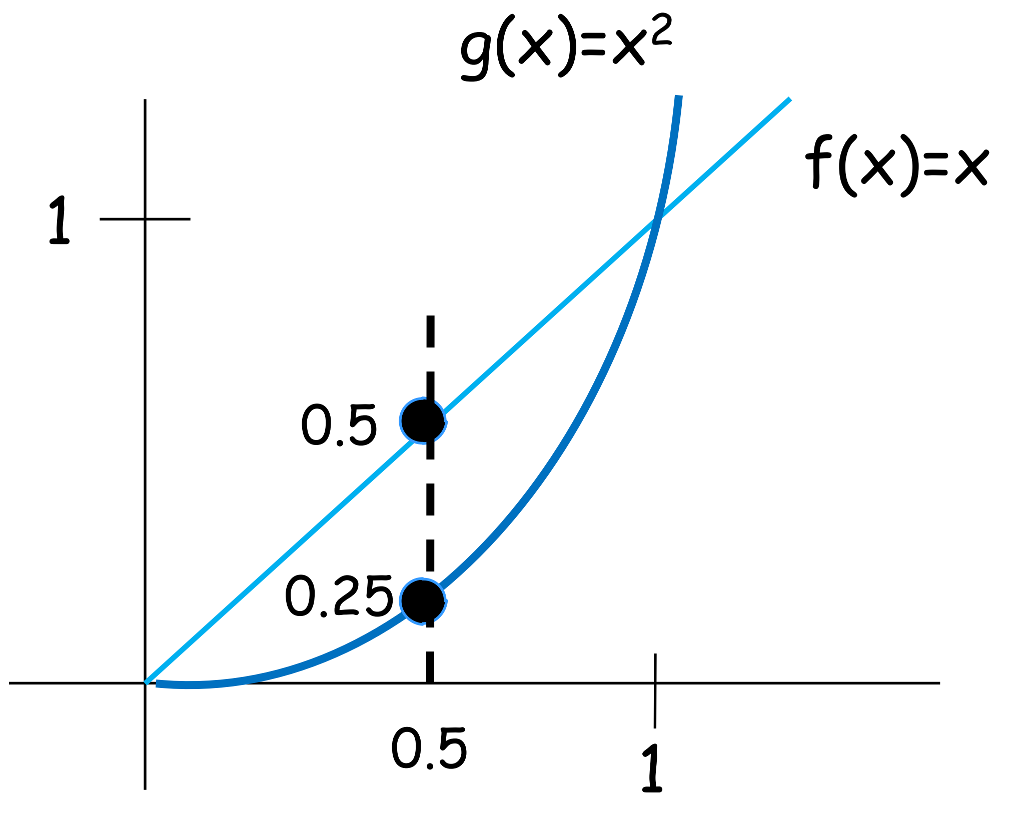
$x=1$



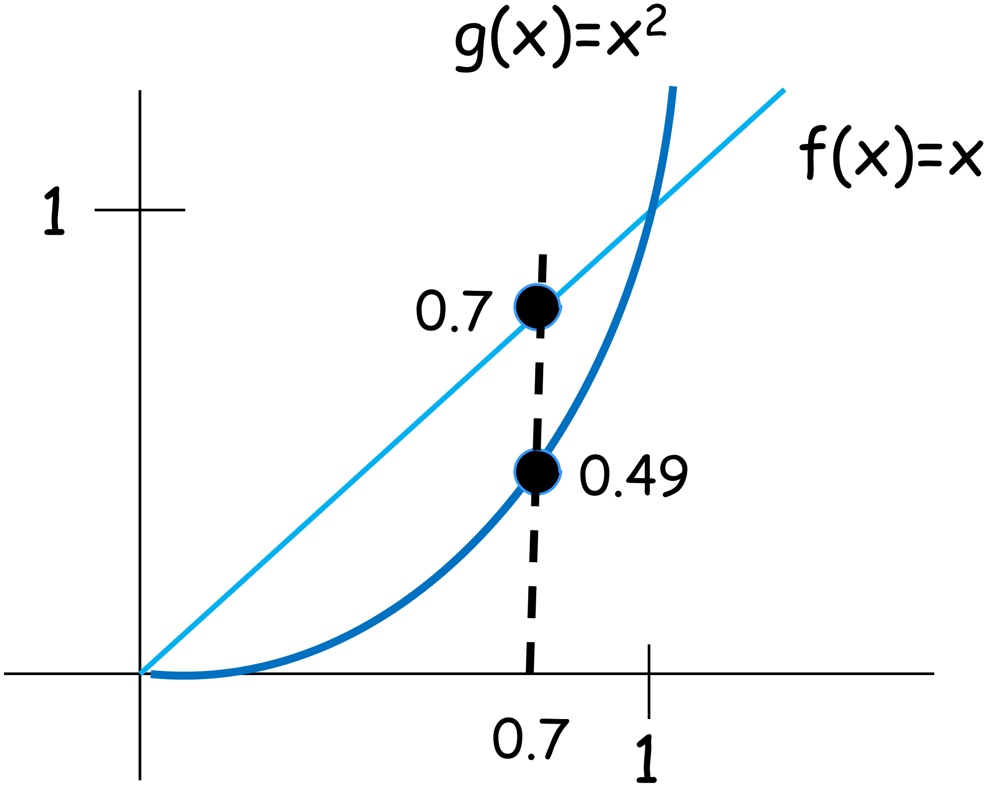
Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

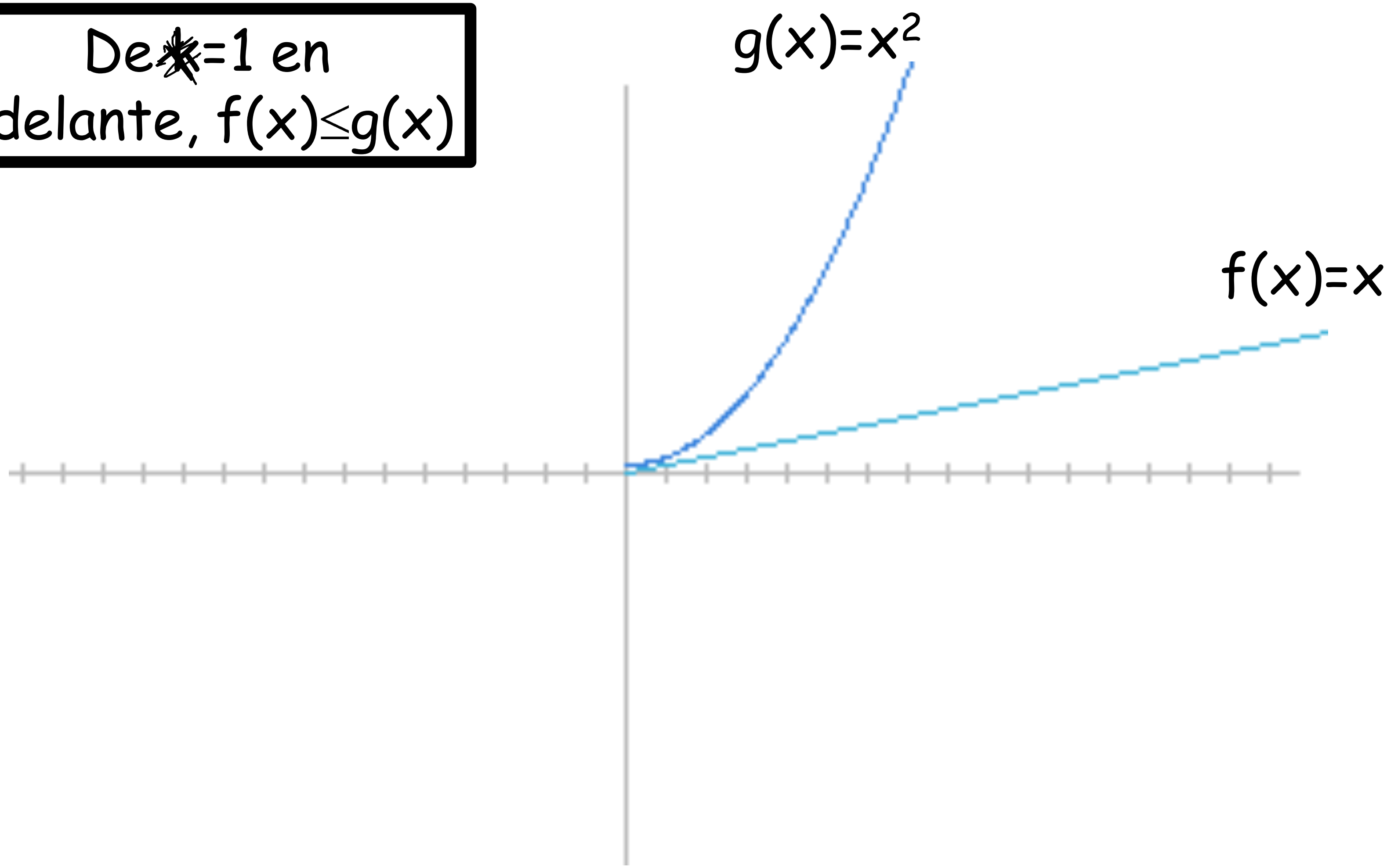


Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

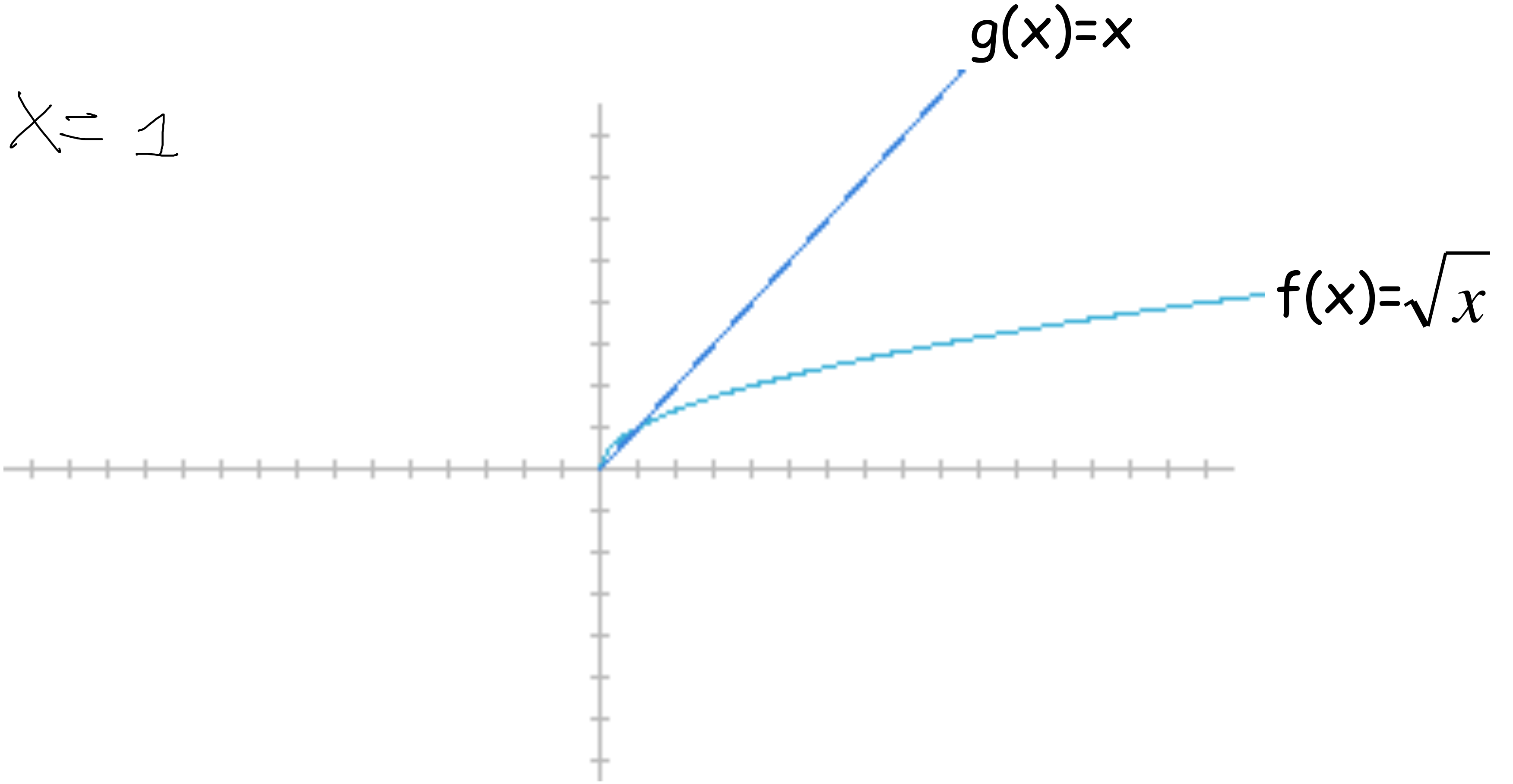
De $x=1$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



Crecimiento de funciones

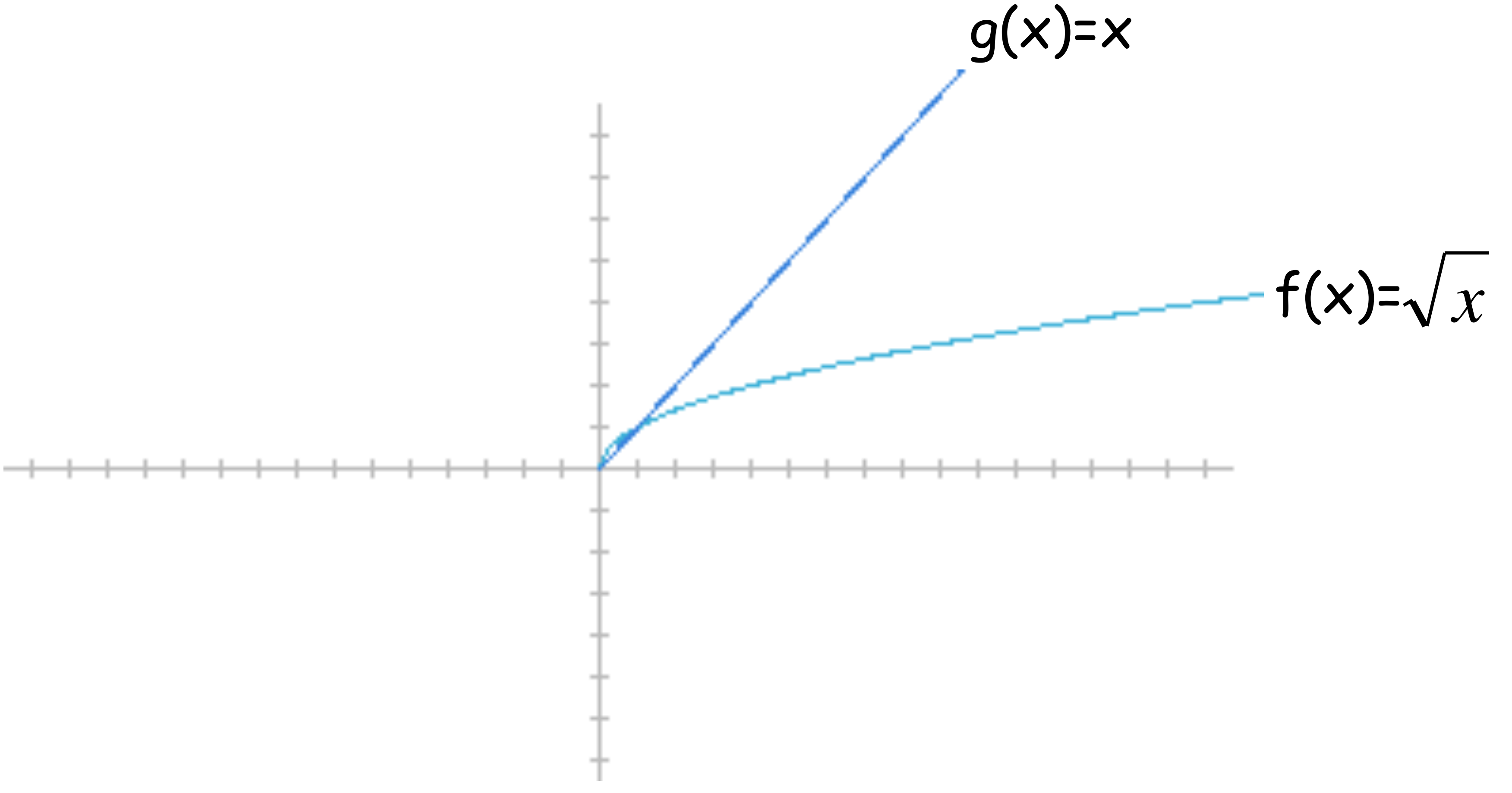
Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$X = 1$



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

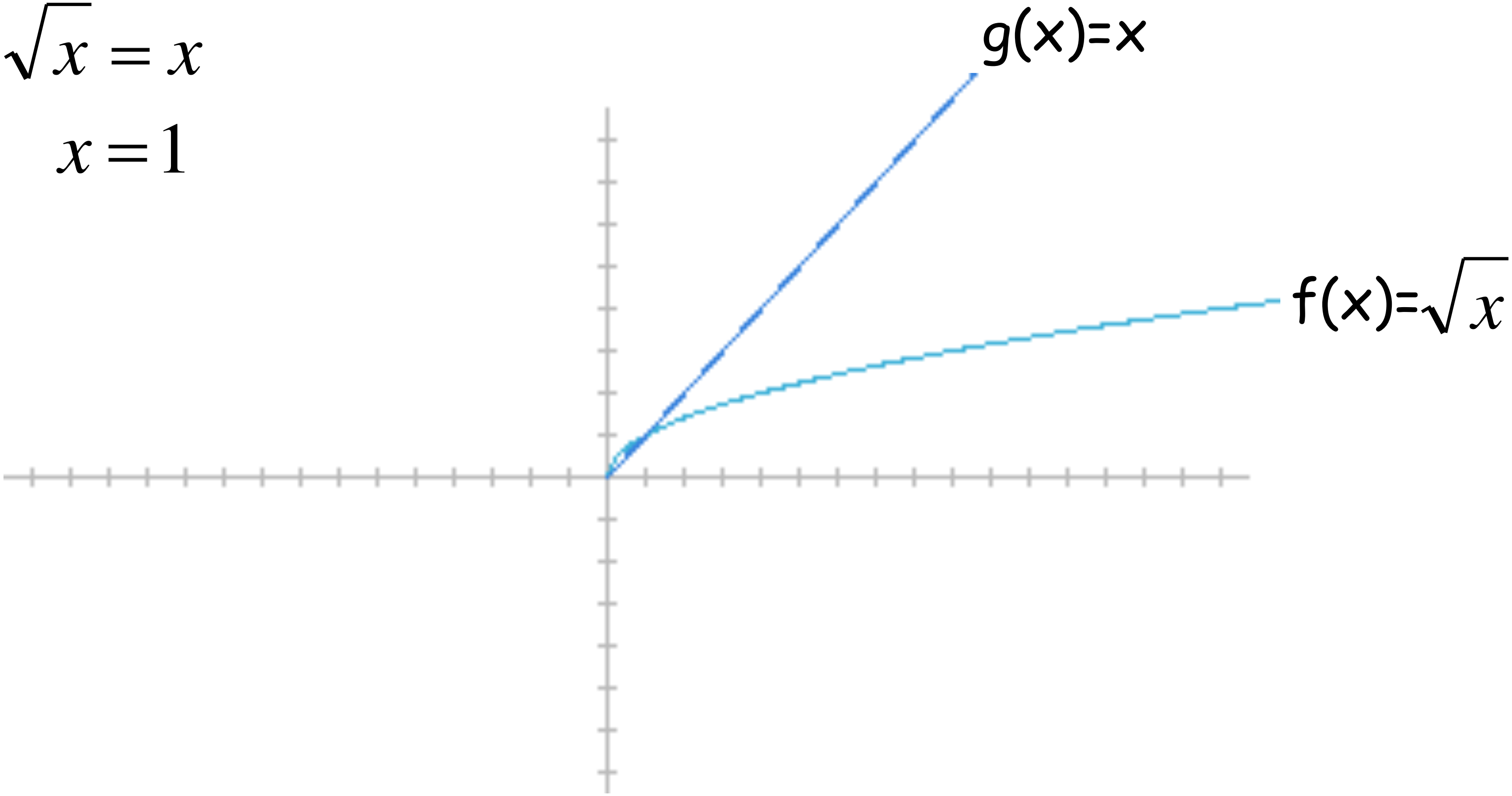


Crecimiento de funciones

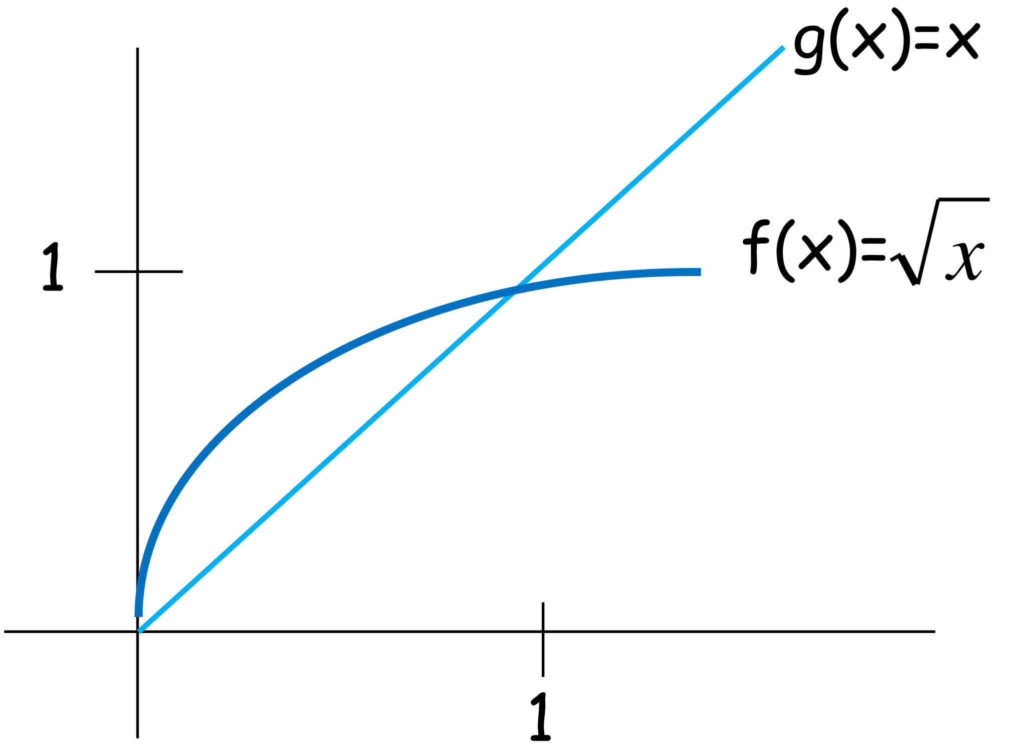
¿Cuándo se cruzan?

$$\sqrt{x} = x$$

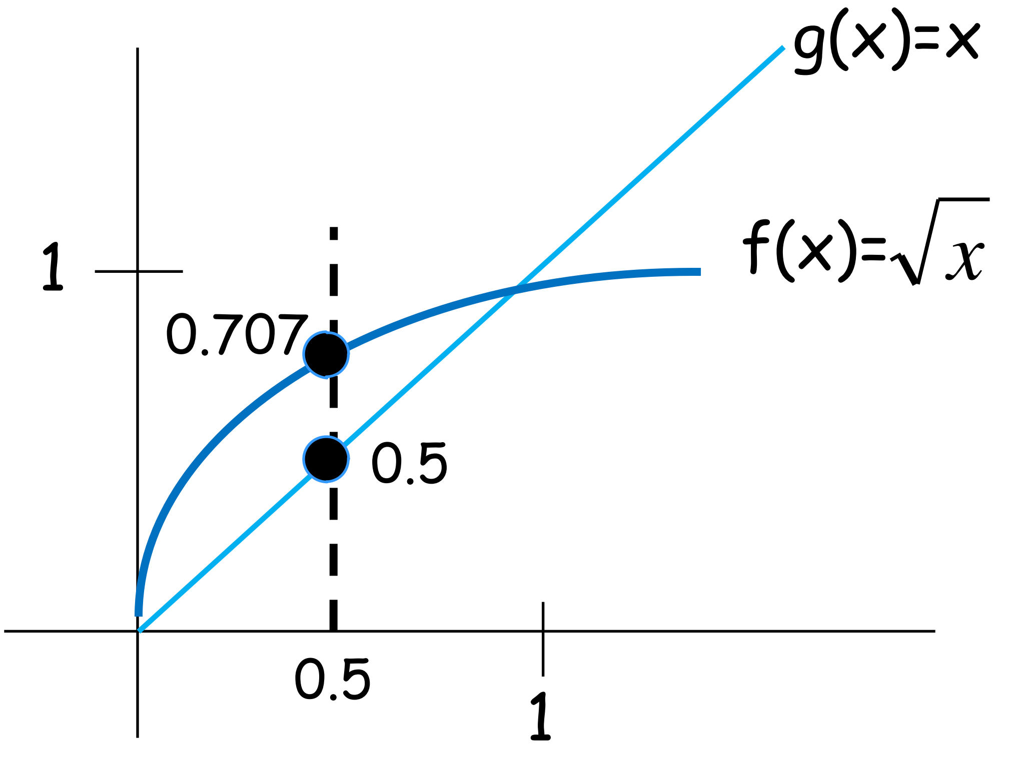
$$x = 1$$



Crecimiento de funciones

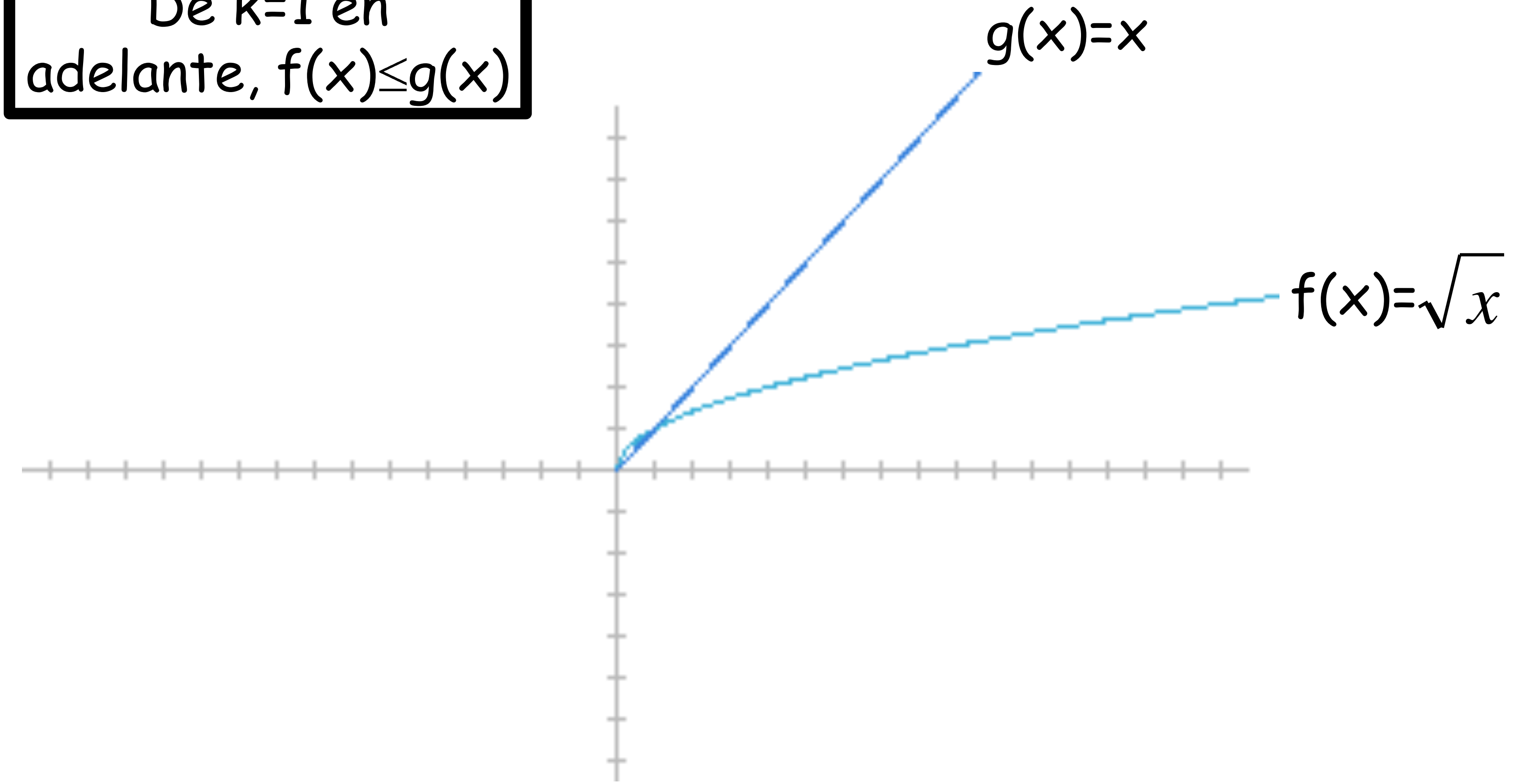


Crecimiento de funciones



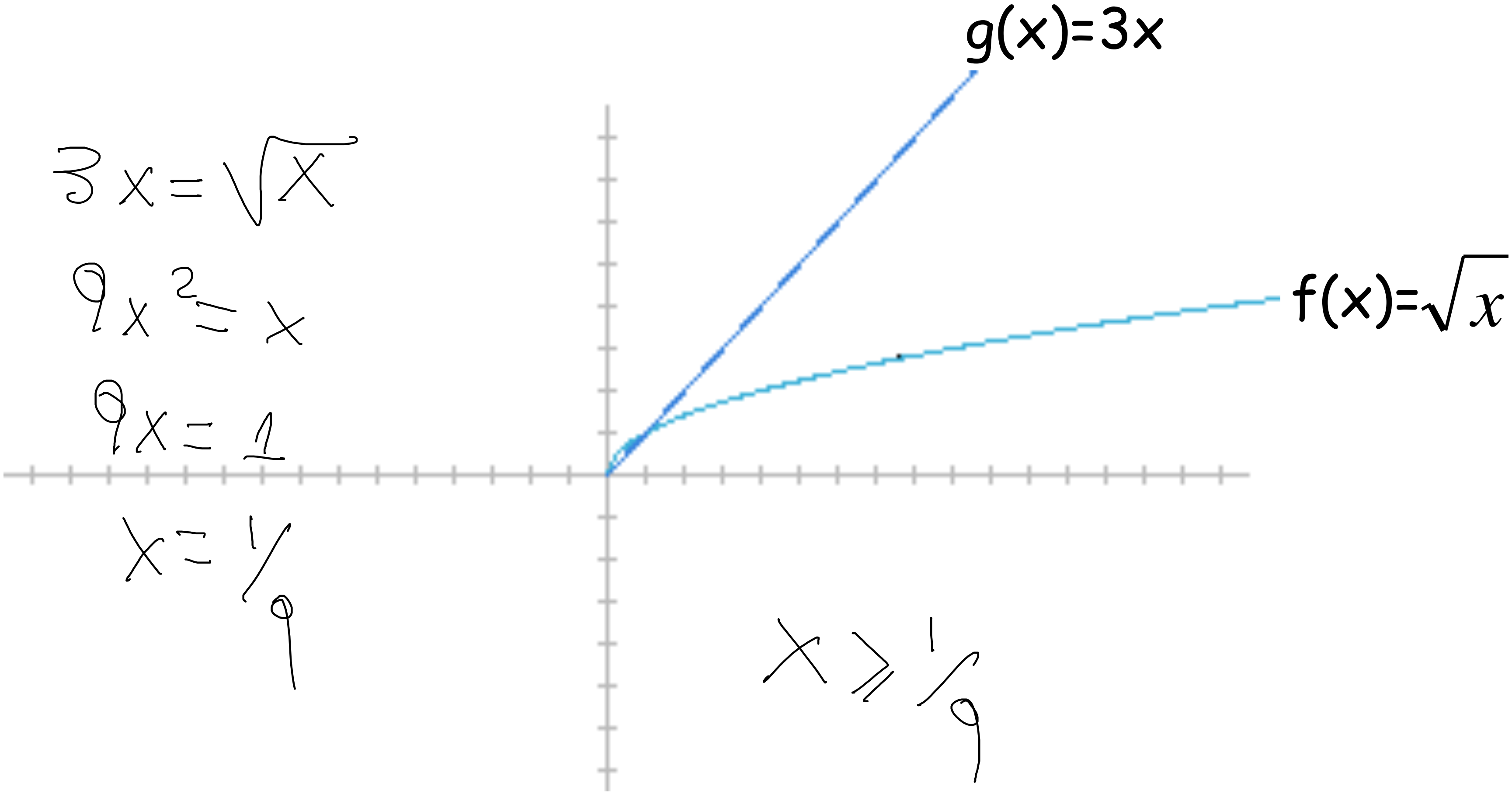
Crecimiento de funciones

De k=1 en adelante, $f(x) \leq g(x)$



Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



$3x = \sqrt{x}$

$9x^2 = x$

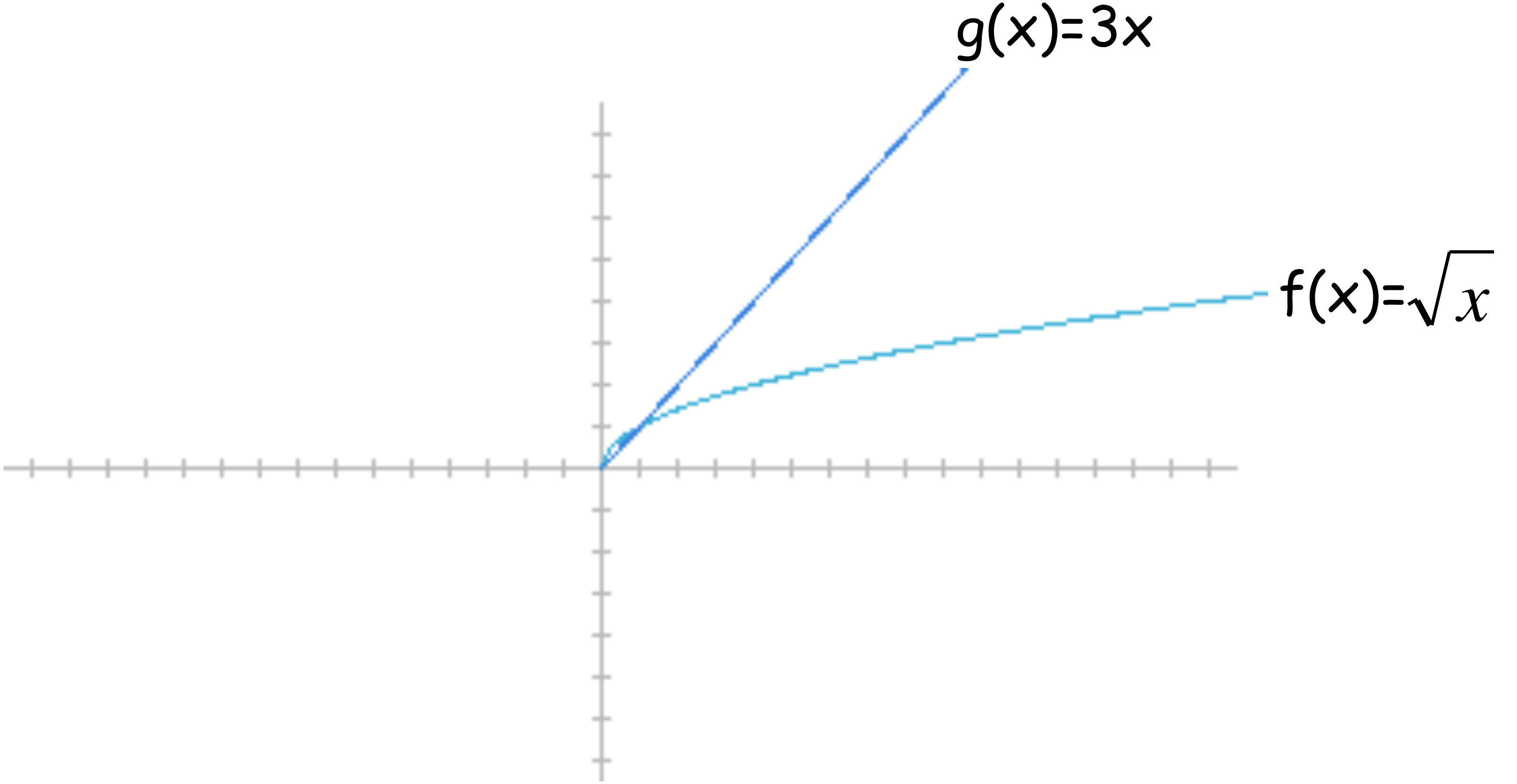
$9x = 1$

$x = 1/9$

$x \geq 1/9$

Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

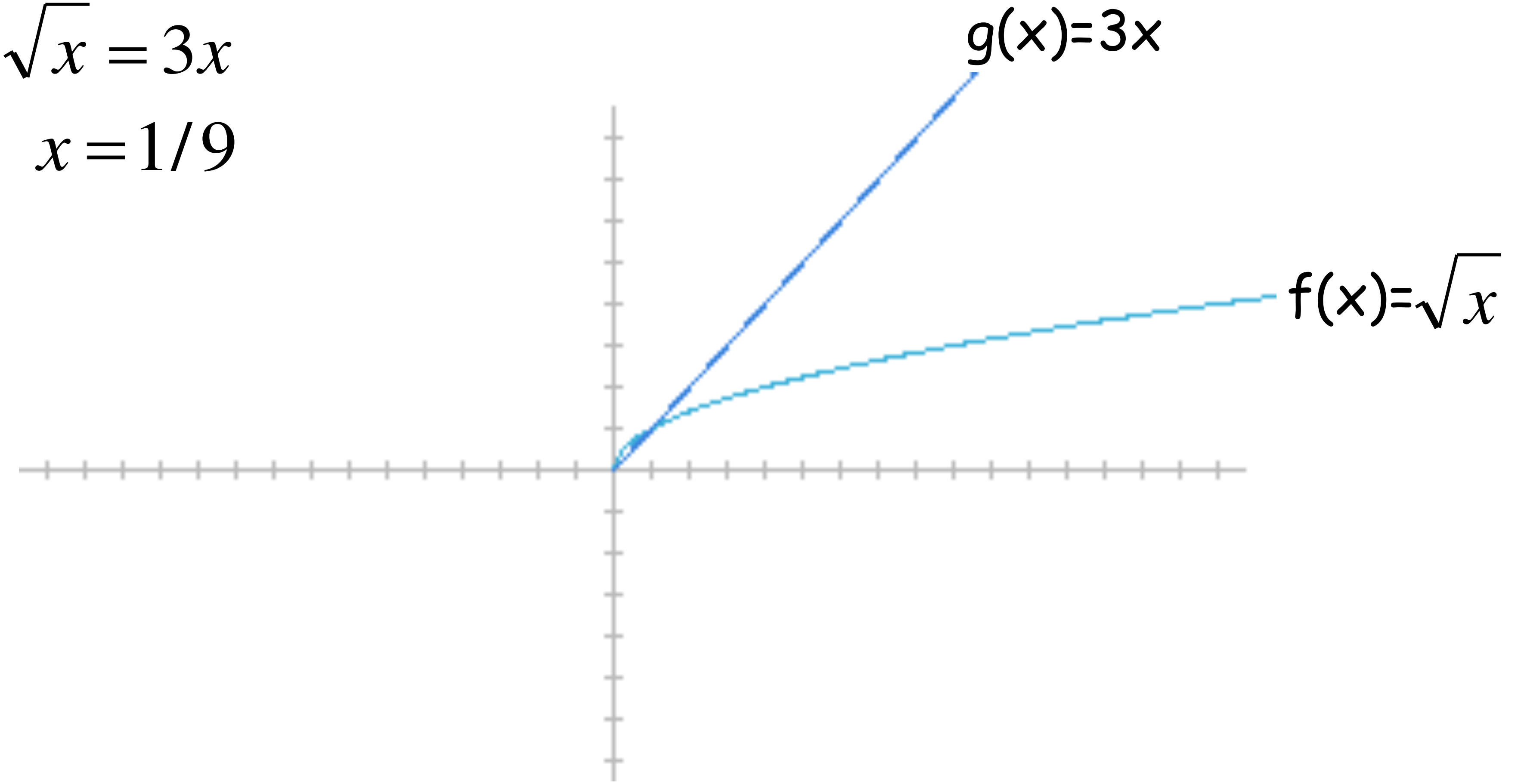


Crecimiento de funciones

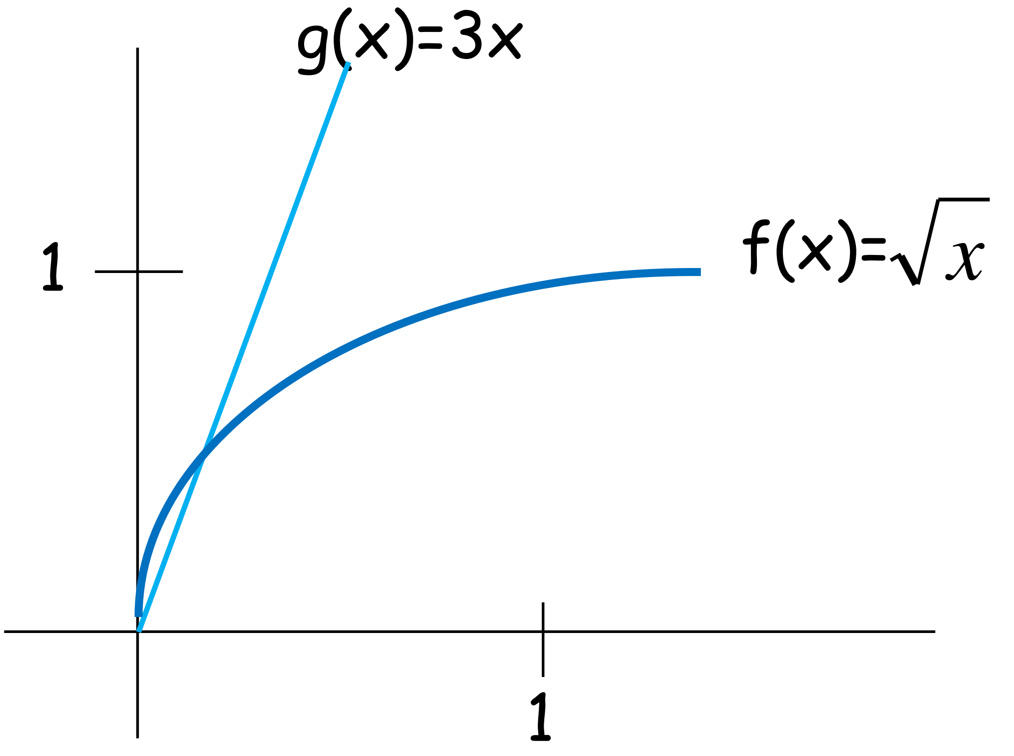
¿Cuándo se cruzan?

$$\sqrt{x} = 3x$$

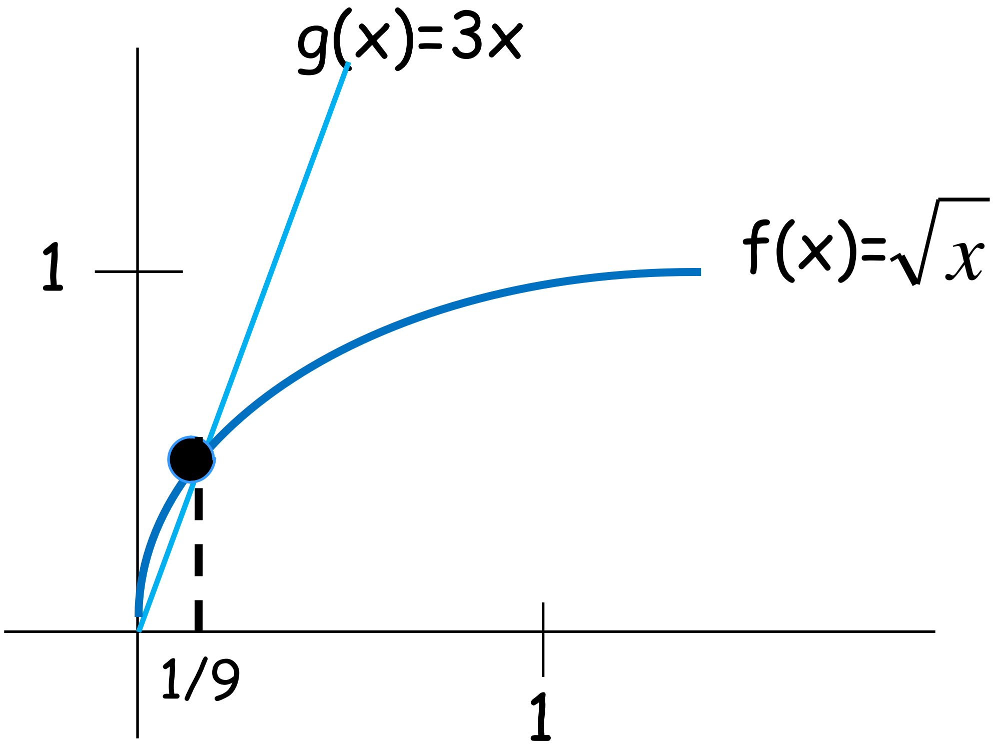
$$x = 1/9$$



Crecimiento de funciones

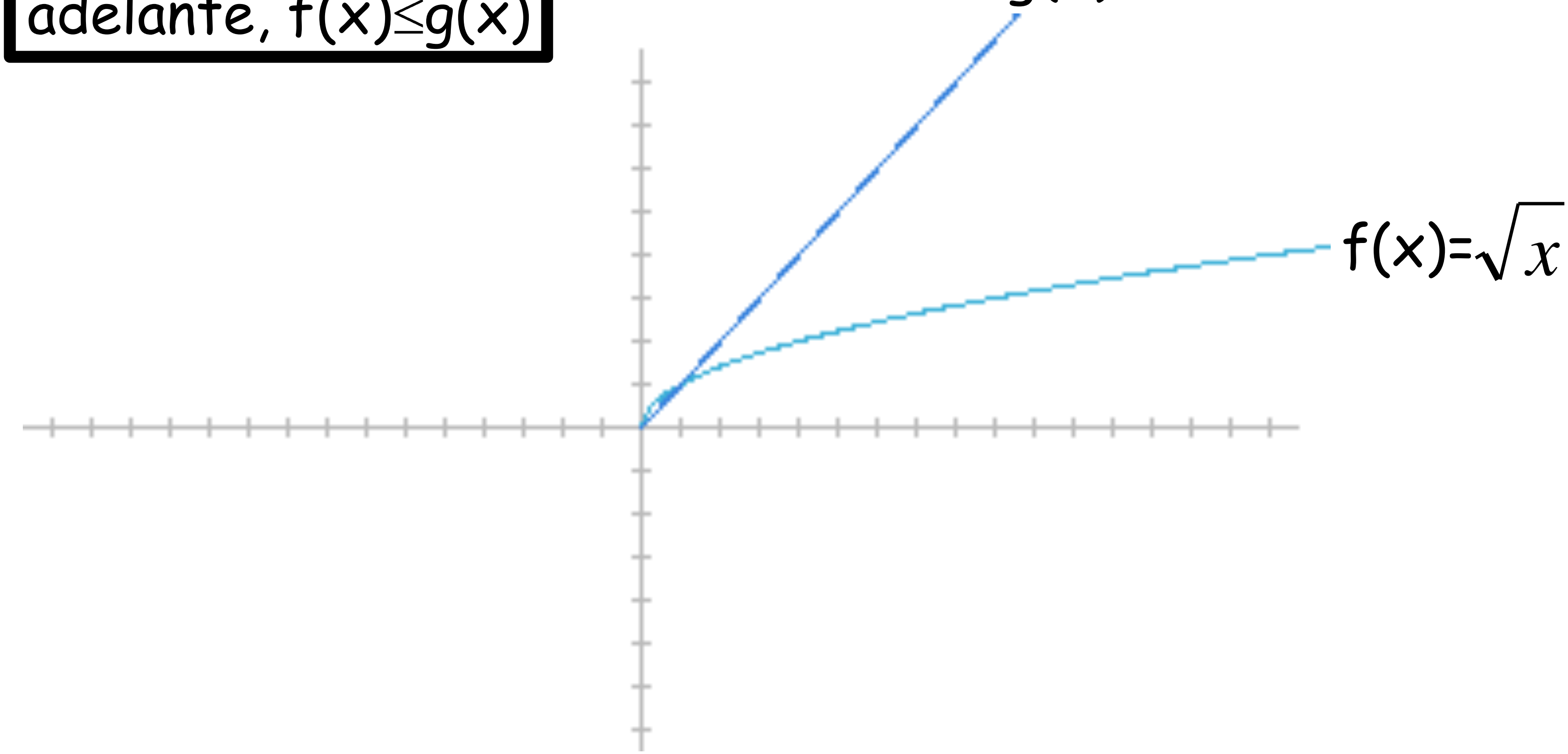


Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

De k=1/9 en adelante, $f(x) \leq g(x)$



Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$g(x)=x^2$

$f(x)=x+2$

$$x^2 = x+2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\frac{+1 \pm \sqrt{1-(-2)}}{2}$$

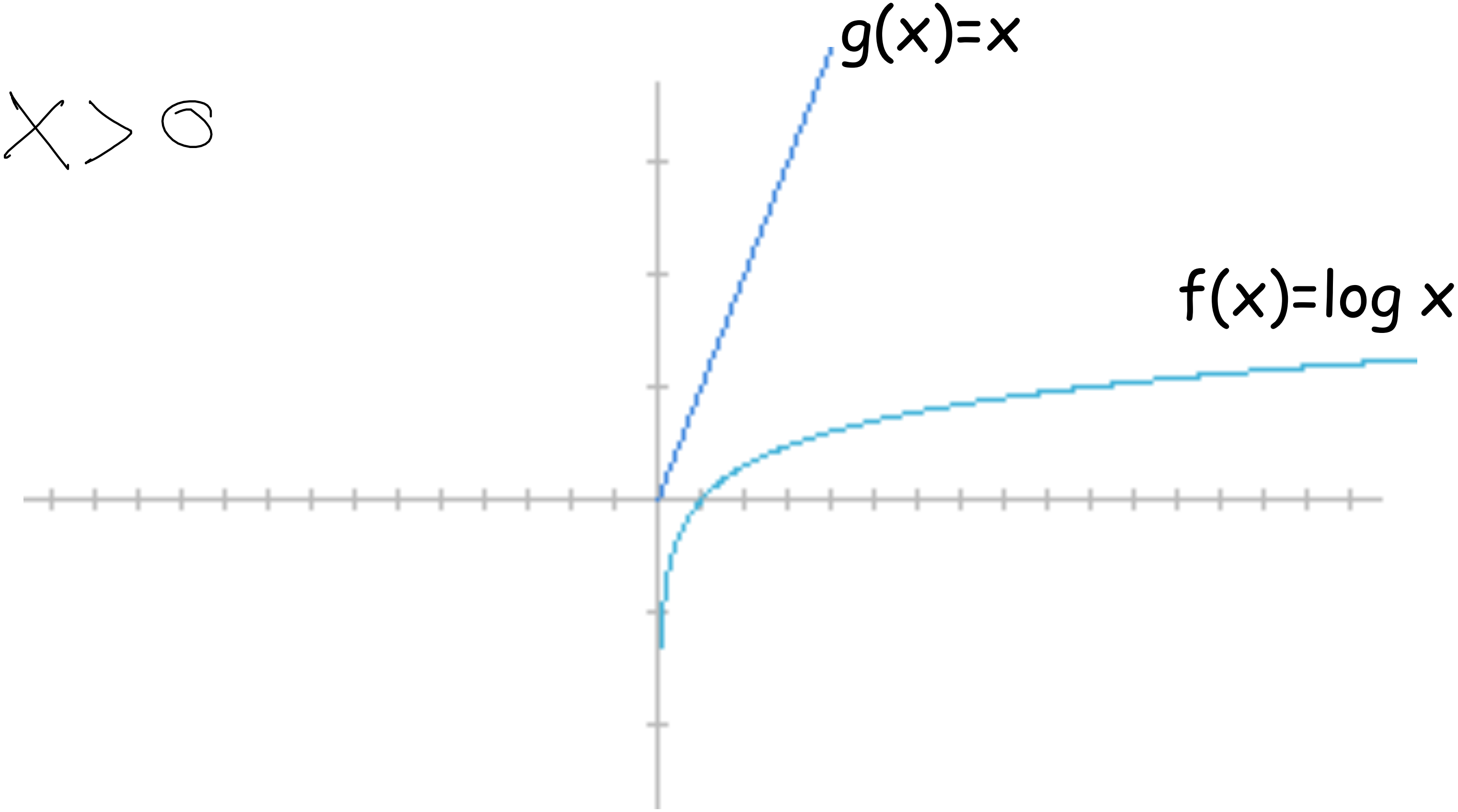
$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{+1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Crecimiento de funciones

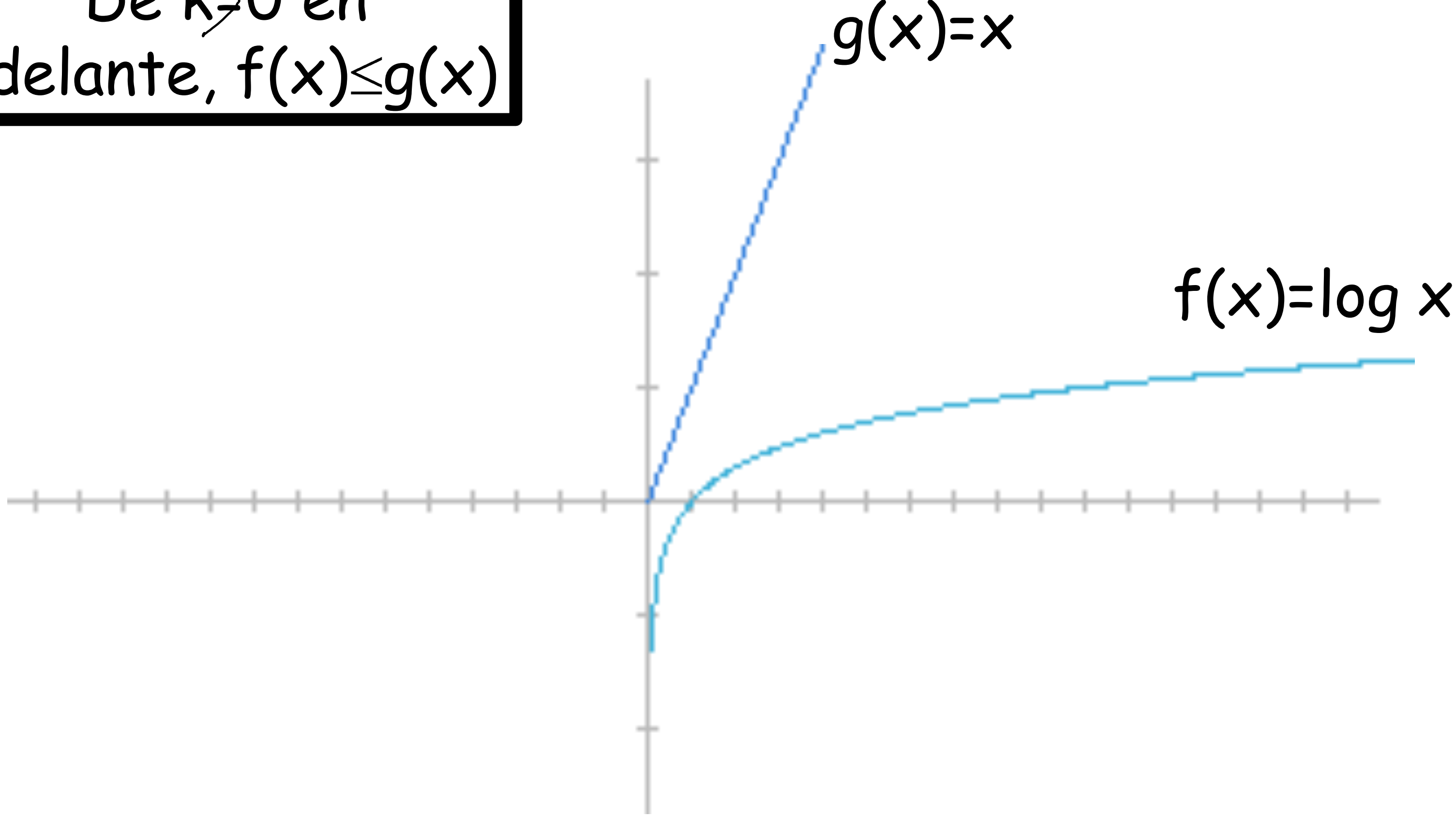
Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$x > 0$



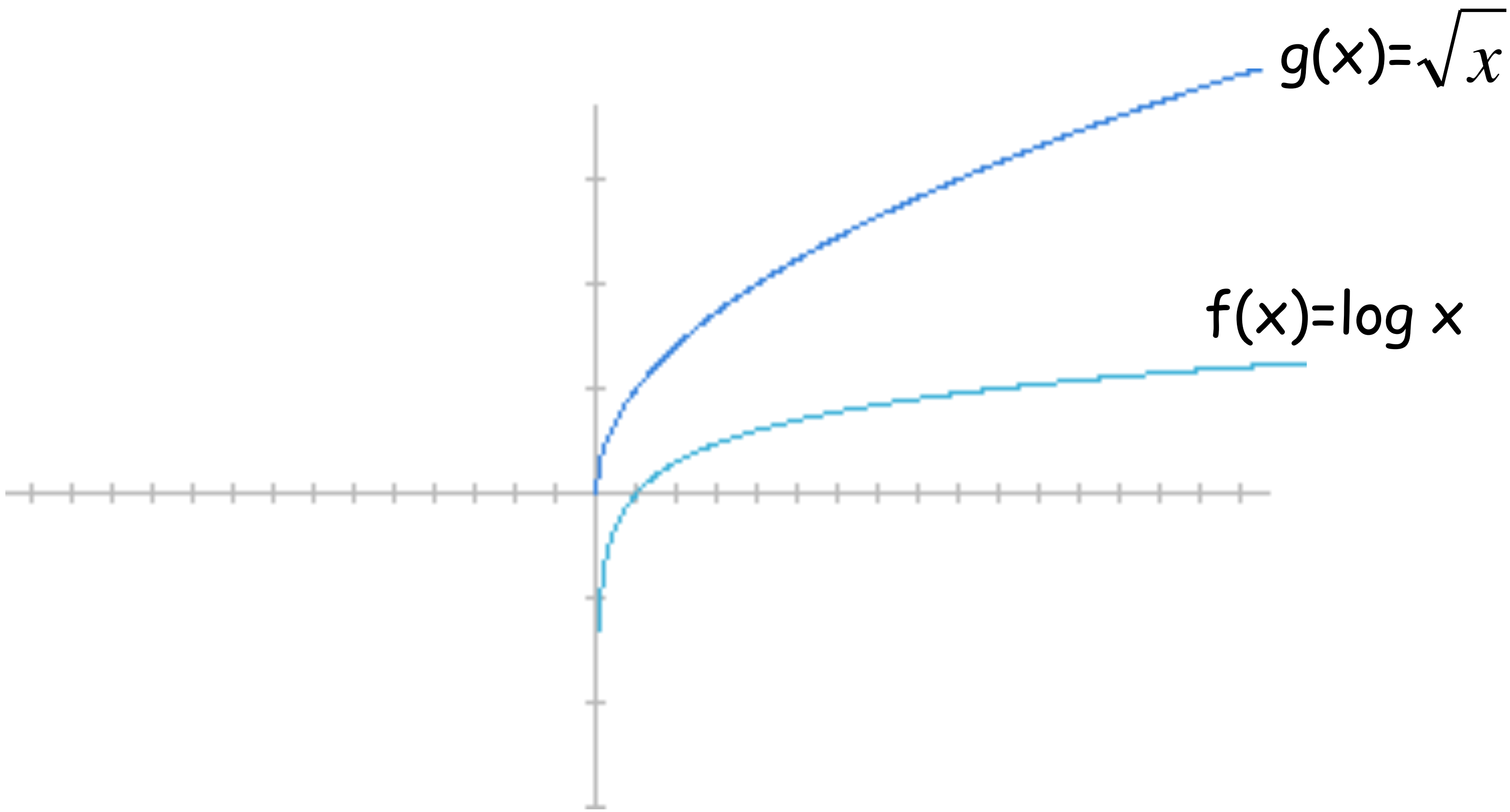
Crecimiento de funciones

De $k \geq 0$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



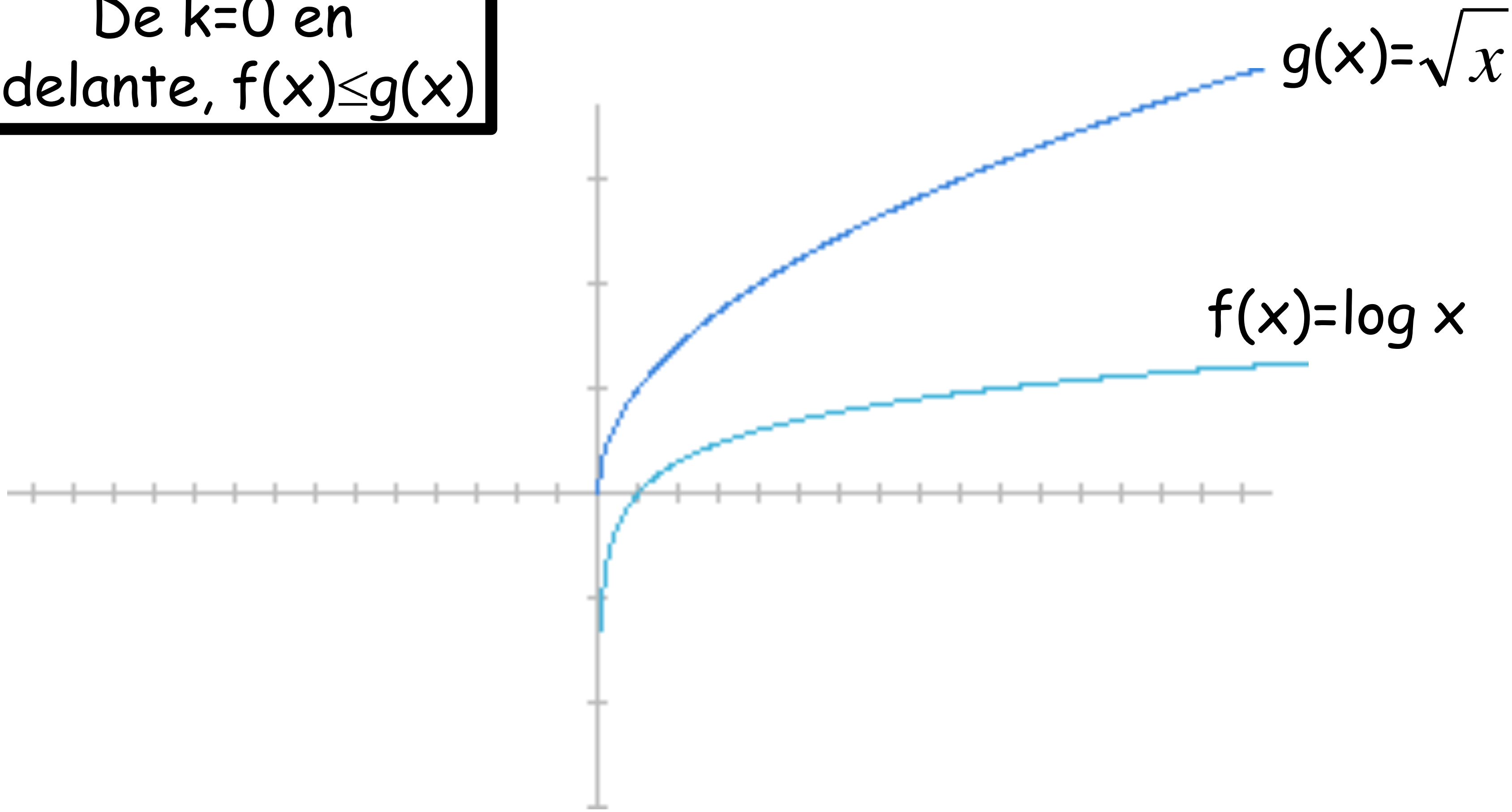
Crecimiento de funciones

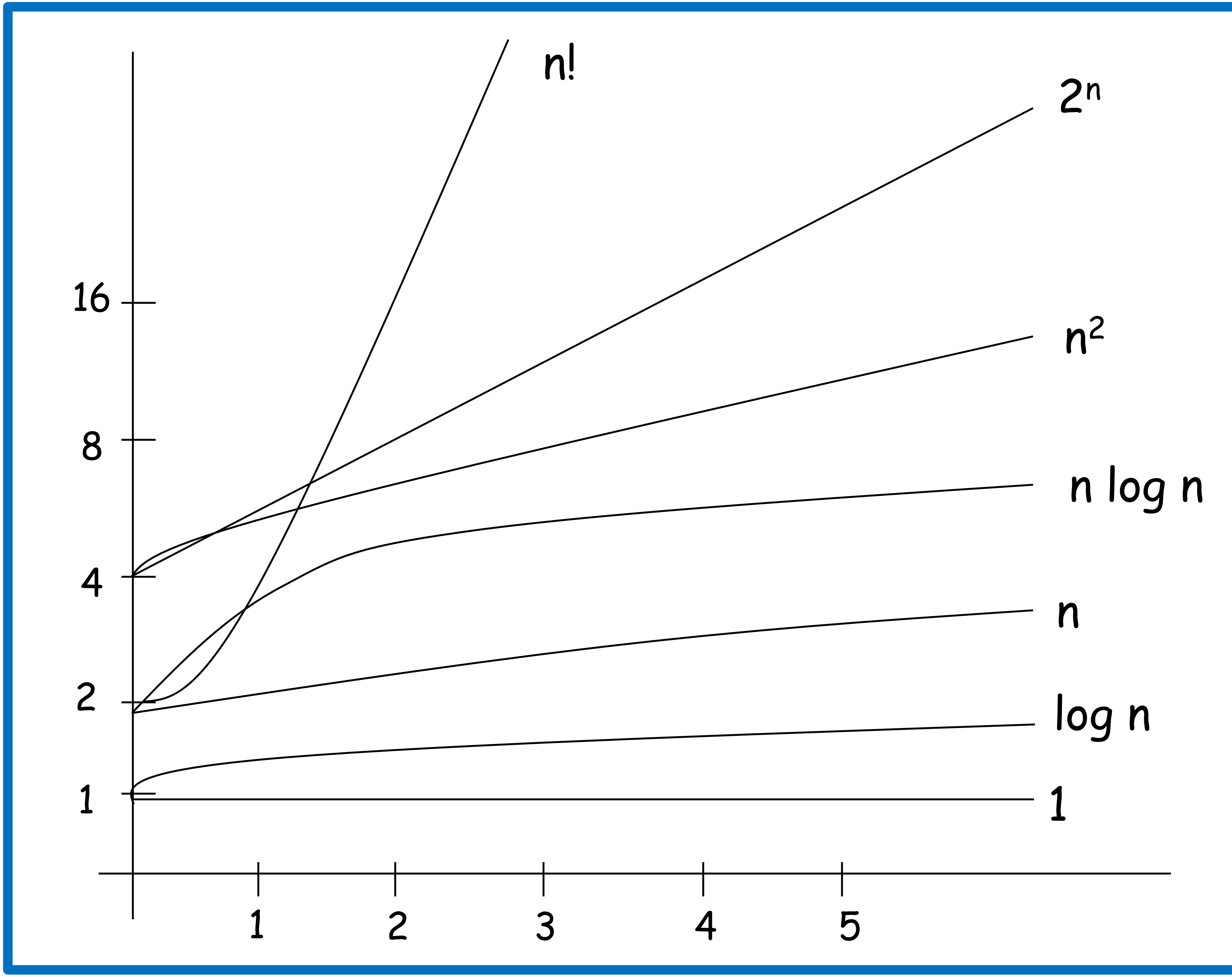
Analice el crecimiento de las siguientes funciones



Crecimiento de funciones

De k=0 en adelante, $f(x) \leq g(x)$




n!
2n
n2
n log n
n
log n
1
16
8
4
2
1
1
2
3
4
5

Crecimiento de funciones

Notación O

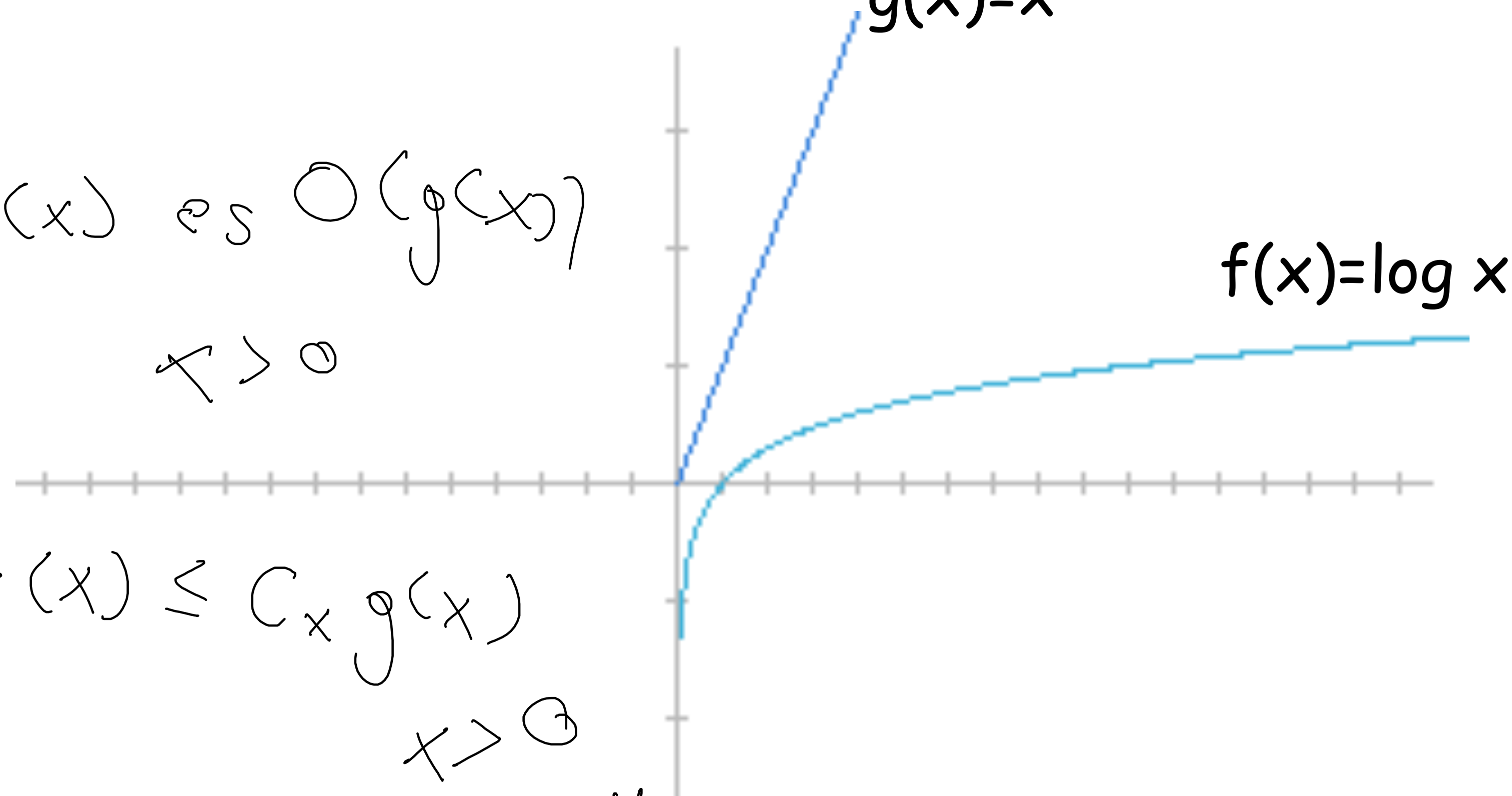
Sea f y g dos funciones, se dice que $f(x)$ es $O(g(X))$ si se cumple que

$$f(x) \leq g(x)$$

para $x > k$

Crecimiento de funciones

$f(x) \leq g(x)$ para $x>0$



$f(x)$ es $O(g(x))$

$x > 0$

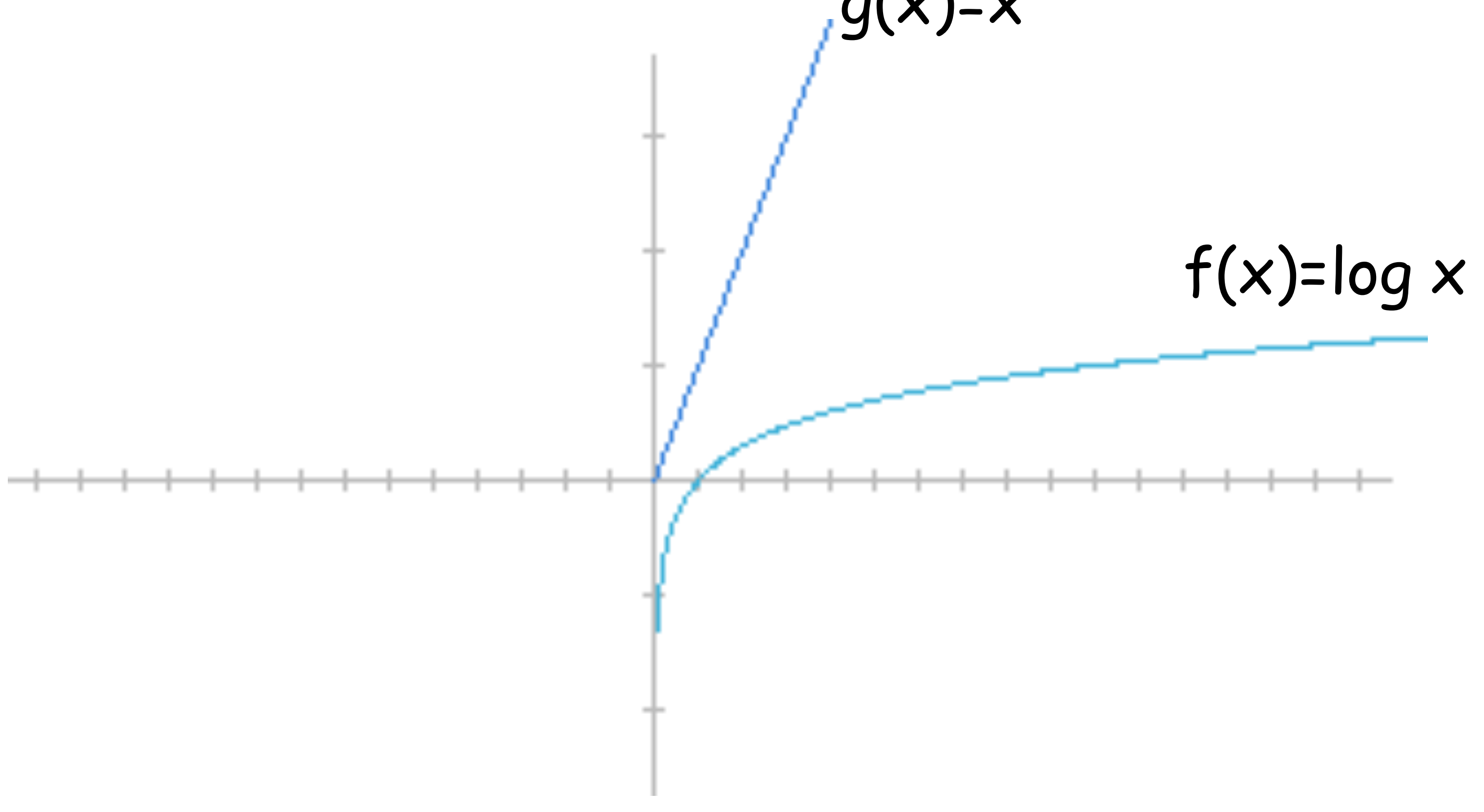
$f(x) \leq c \times g(x)$

$x > 0$

$c \geq 1$ y

Crecimiento de funciones

$f(x) \leq 1 \cdot g(x)$ para $x > 0$

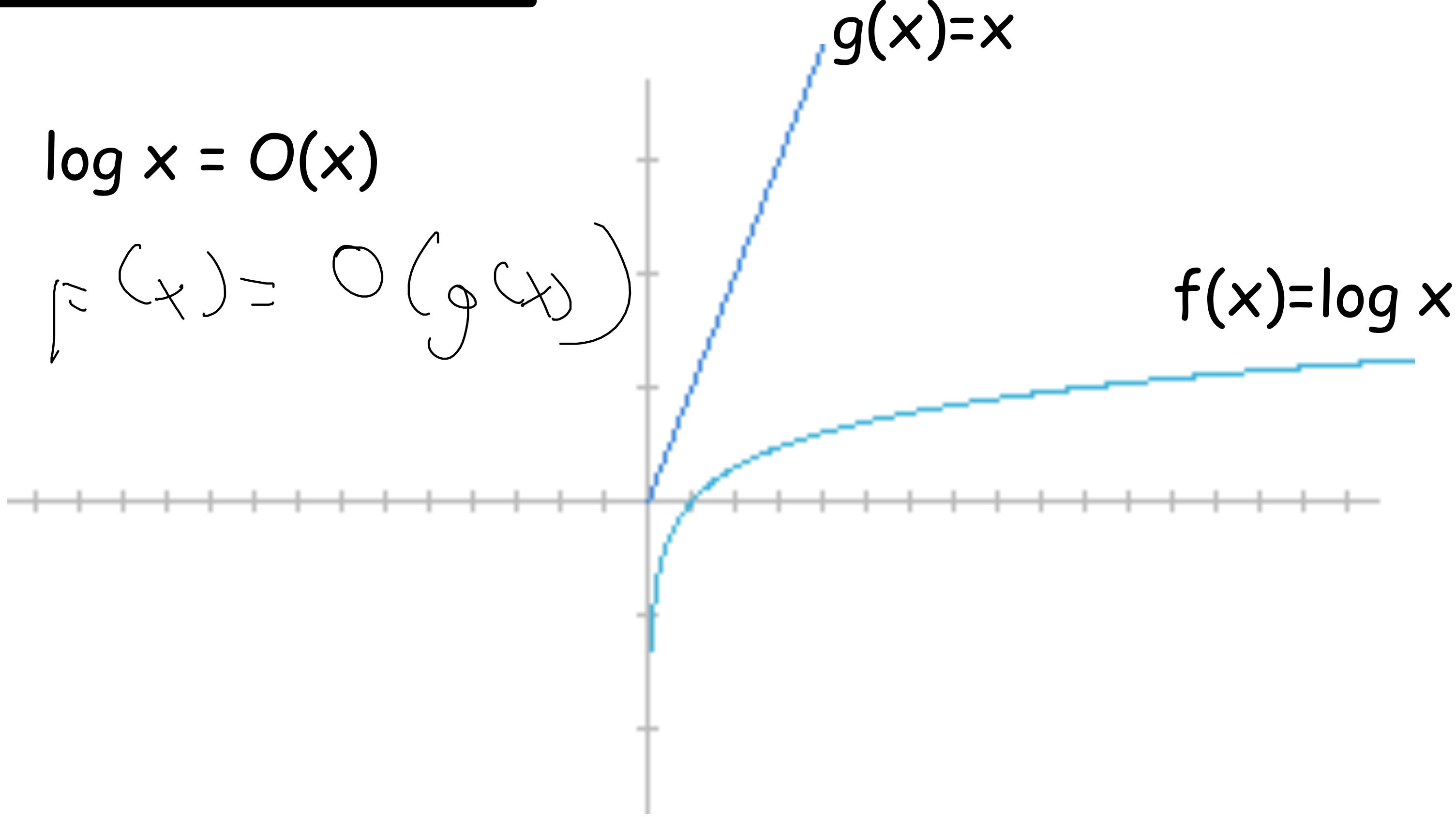


Crecimiento de funciones

$\boxed{f(x) \leq 1 \cdot g(x) \text{ para } x>0}$

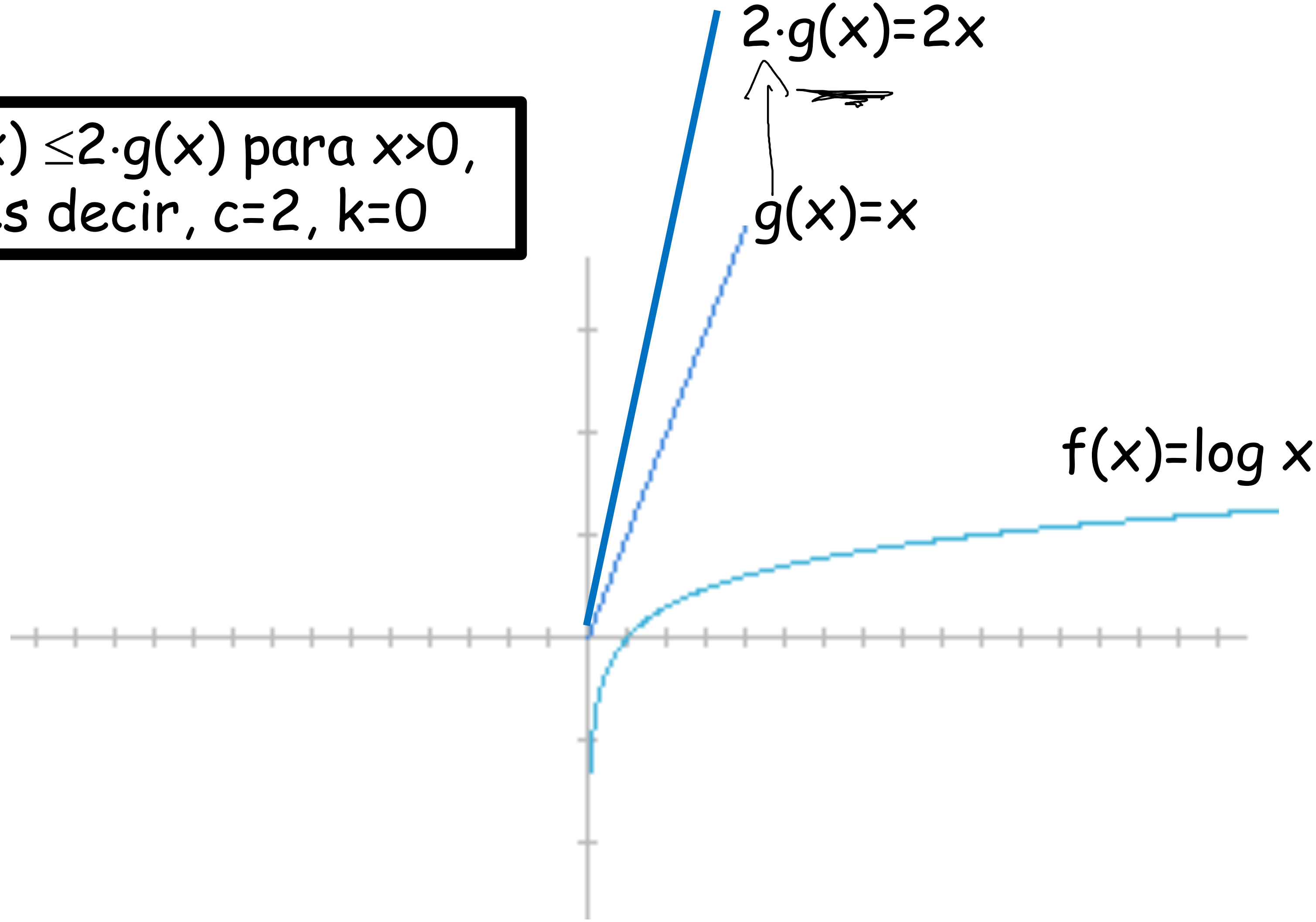
$\log x = O(x)$

$f(x) = O(g(x))$



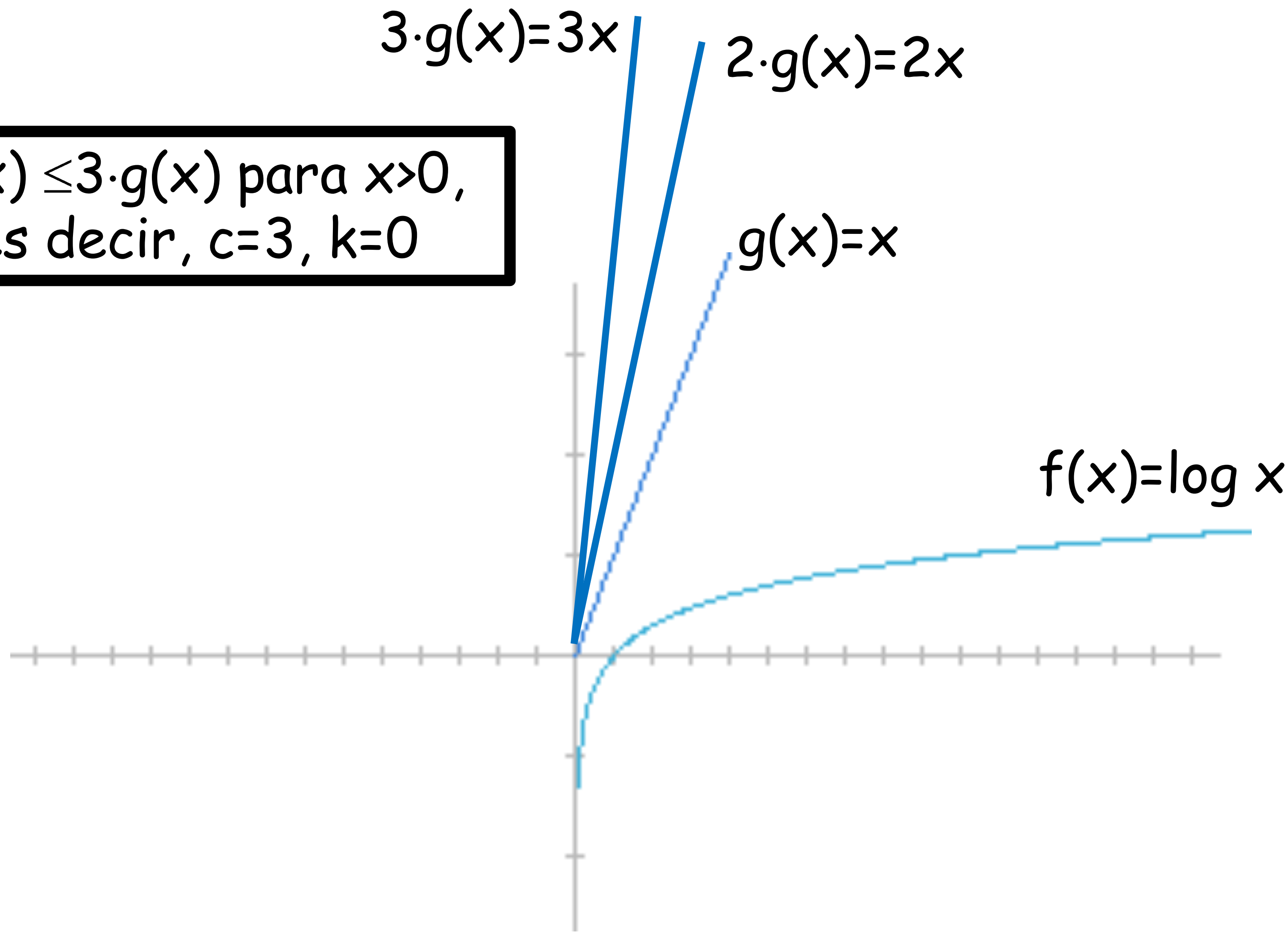
Crecimiento de funciones

$f(x) \leq 2 \cdot g(x)$ para $x>0$,
es decir, $c=2$, $k=0$



Crecimiento de funciones

$f(x) \leq 3 \cdot g(x)$ para $x>0$,
es decir, $c=3$, $k=0$



Notación O

Sea f y g dos funciones, se dice que f(x) es O(g(X)) si se cumple que

$$\boxed{f(x) \leq \mathbf{c} \cdot g(x)}$$

para x>**k**

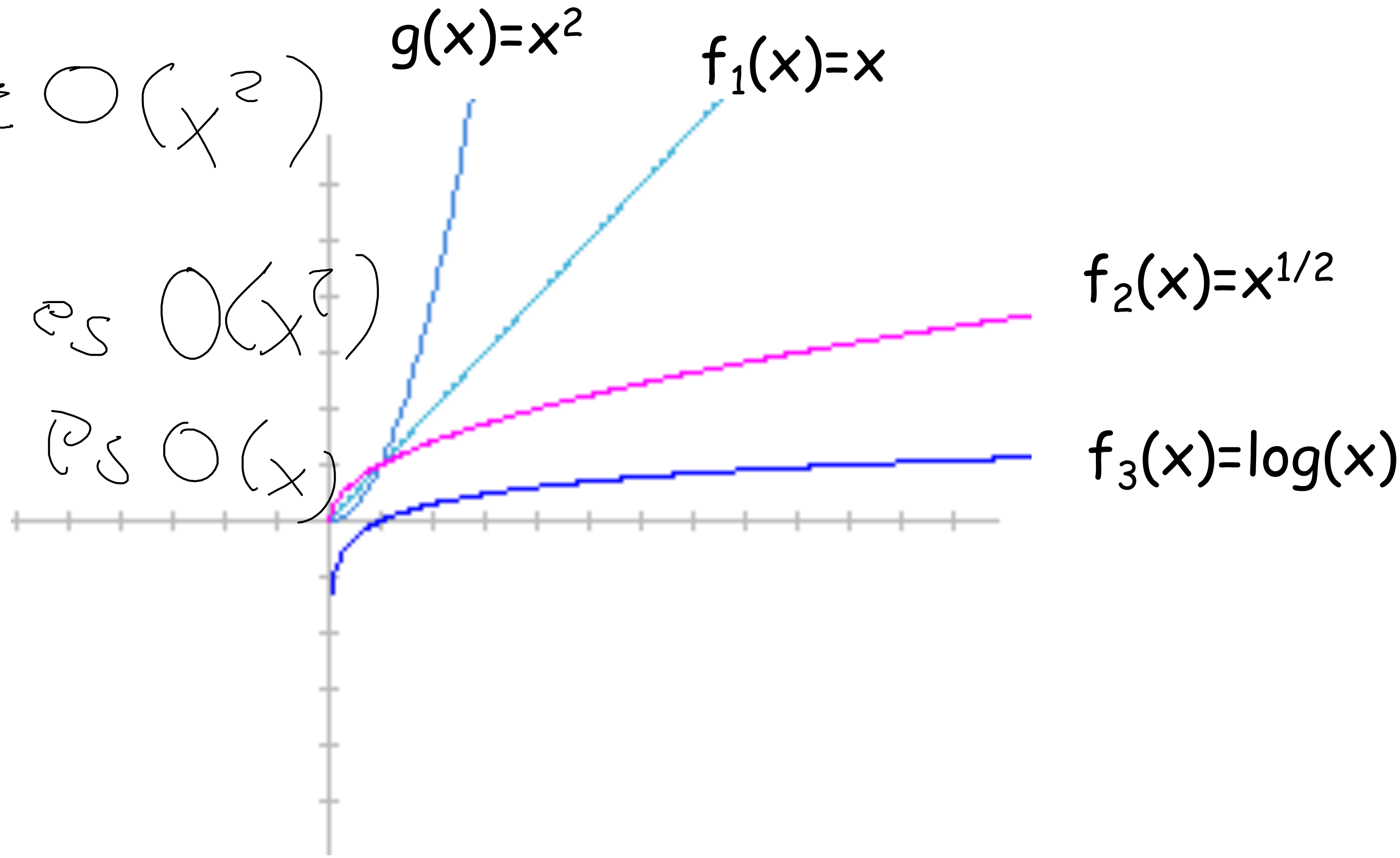
$c \geq 1$

Crecimiento de funciones

$x = O(x^2)$

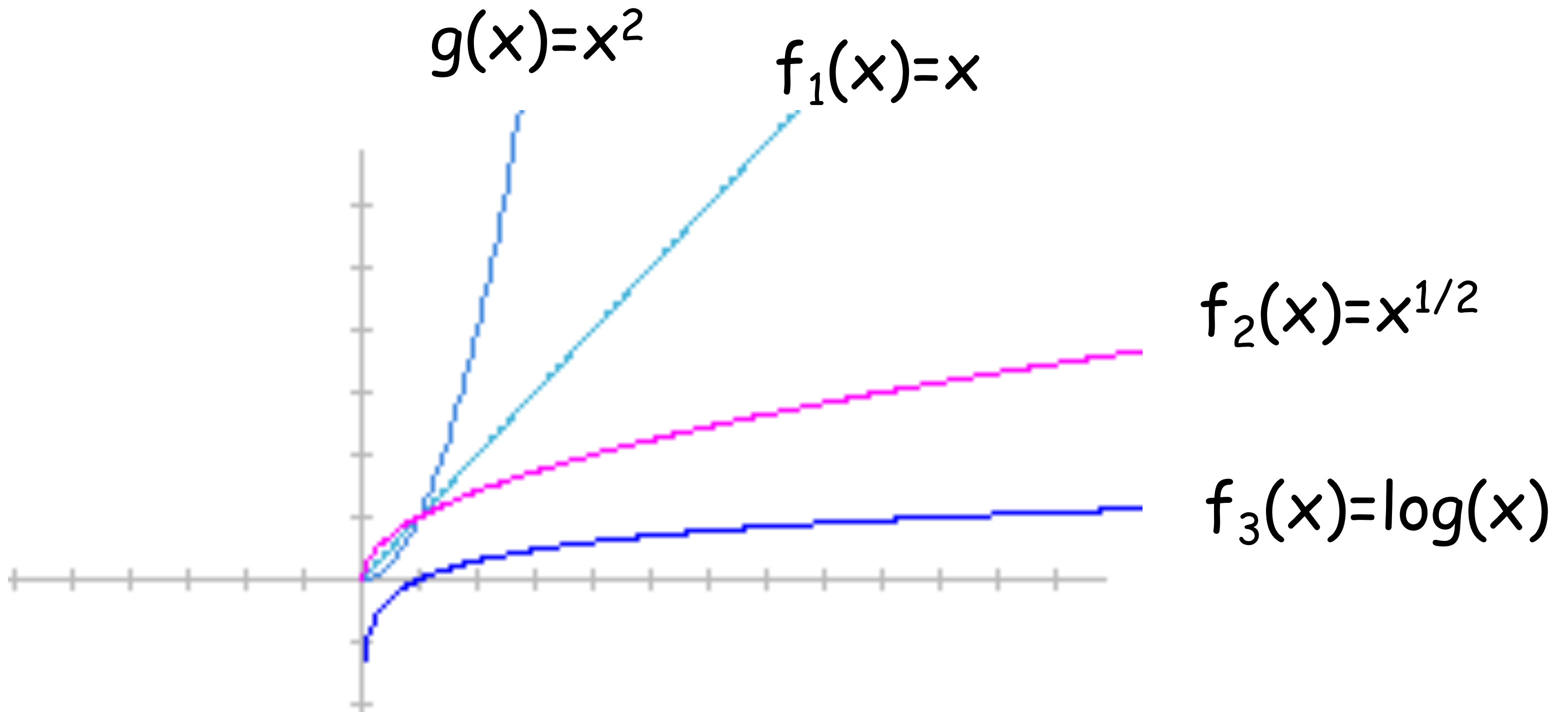
$\sqrt{x}$ es $O(x^2)$

es $O(x)$



Se cumple que $f_1(x) \leq g(x)$, $f_2(x) \leq g(x)$ $f_3(x) \leq g(x)$, para $x>1$

Crecimiento de funciones

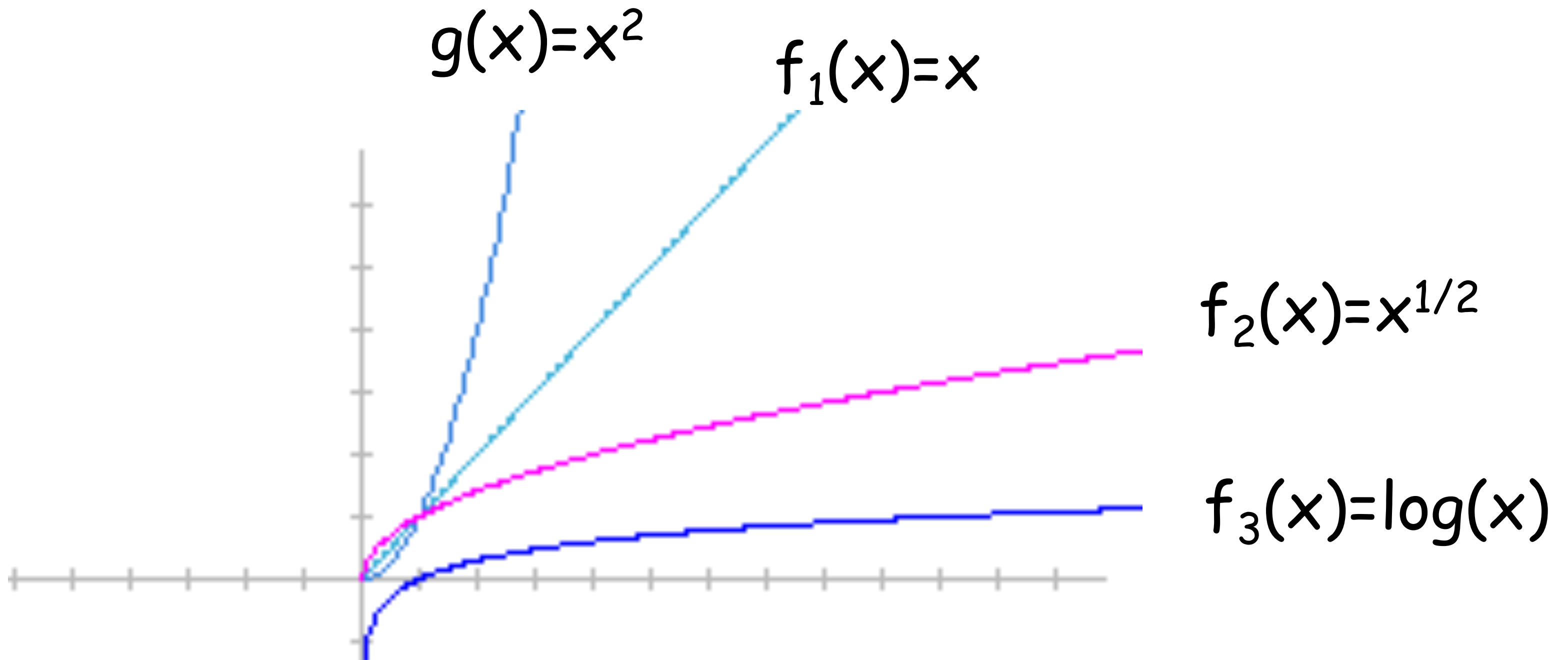


$f_1(x)$ es $O(x^2)$

$f_2(x)$ es $O(x^2)$

$f_3(x)$ es $O(x^2)$

Crecimiento de funciones

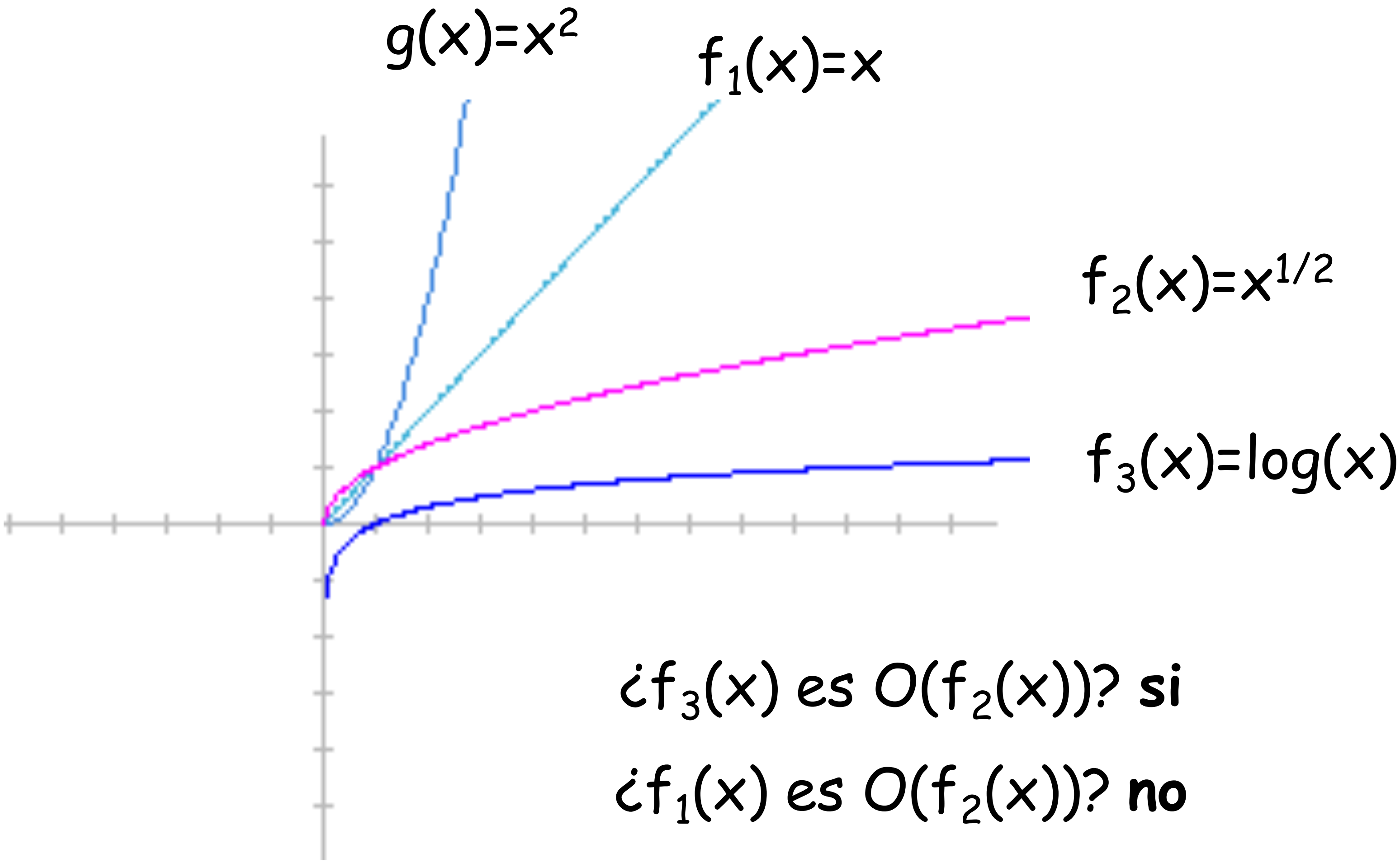


SI ← ¿$f_3(x)$ es $O(f_2(x))$?

NO → ¿$f_1(x)$ es $O(f_2(x))$?

SI ← ¿$f_3(x)$ es $O(f_1(x))$?

Crecimiento de funciones



¿$f_3(x)$ es $O(f_2(x))$? **si**

¿$f_1(x)$ es $O(f_2(x))$? **no**

¿$f_3(x)$ es $O(f_1(x))$? **si**

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2$ es $O(x^3)$ ✓

$7x^2 \leq C \cdot x^3$ $\quad x \geq k$

$7 \leq Cx$ $\quad C = 2$

$7/2 \leq x$ $\quad x \geq 7/2$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2$ es $O(x^3)$

- $7x^2$ es $O(x^3)$ si se cumple que

$$7x^2 \leq c \cdot x^3, \text{ para } x > k$$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2$ es $O(x^3)$

- $7x^2$ es $O(x^3)$ si se cumple que

$$7x^2 \leq c \cdot x^3, \text{ para } x > k$$

$$7 \leq c \cdot x$$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2$ es $O(x^3)$

- $7x^2$ es $O(x^3)$ si se cumple que

  $7x^2 \leq c \cdot x^3$, para $x>k$

  $7 \leq c \cdot x$

- Se escogen c y k

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2$ es $O(x^3)$

- $7x^2$ es $O(x^3)$ si se cumple que

  $7x^2 \leq c \cdot x^3$, para $x>k$

  $7 \leq c \cdot x$

- Se escogen c y k

  - Si $c=1$, se cumple para $x>7$
  - Si $c=2$, se cumple para $x>7/2$
  - Si $c=3$, se cumple para $x>7/3$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2$ es $O(x^3)$

- $7x^2$ es $O(x^3)$ si se cumple que

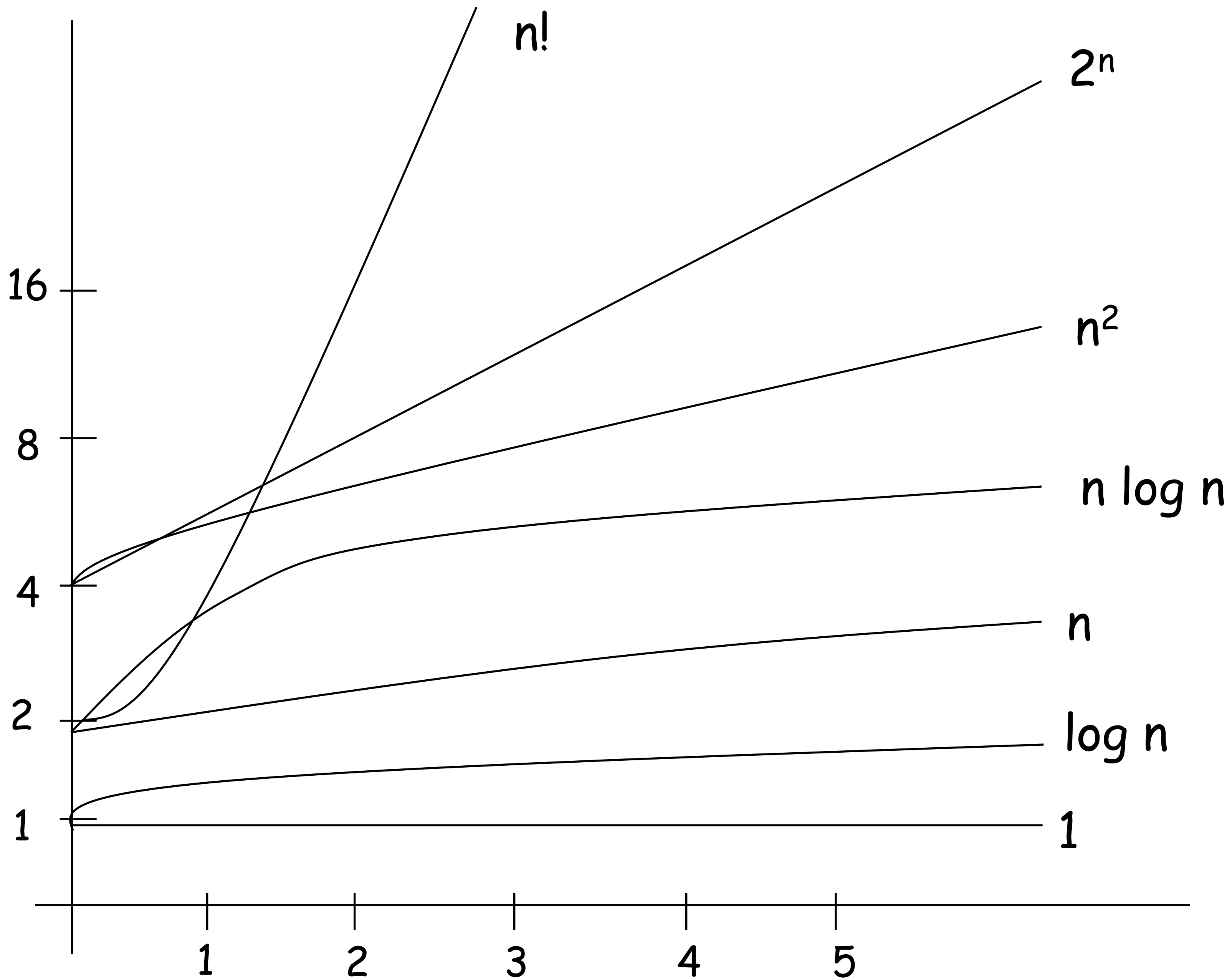
  $7x^2 \leq c \cdot x^3$, para $x>k$

  $7 \leq c \cdot x$

- Se escogen c y k

  - Si $c=1$, se cumple para $x>7$
  - Si $c=2$, se cumple para $x>7/2$
  - Si $c=3$, se cumple para $x>7/3$

$7x^2$ es $O(x^3)$ ya que $c=1$ y $k=7$ hace que se cumpla que $7x^2 \leq c \cdot x^3$, para $x>k$


n!
2ⁿ
n²
n log n
n
log n
1
16
8
4
2
1
1
2
3
4
5

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

• Suponga que tiene dos algoritmos cuyos tiempos de ejecución están acotados de la siguiente forma:

- $T_1(n) = O(n^2)$
- $T_2(n) = O(\log n)$

• ¿Cuál algoritmo escogería?

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

• Suponga que tiene dos algoritmos cuyos tiempos de ejecución están acotados de la siguiente forma:

- $T_1(n) = O(n^2)$
- $T_2(n) = O(\log n)$

• ¿Cuál algoritmo escogería? **el algoritmo 2**

Crecimiento de funciones

Suponga que tiene un arreglo ordenado ascendentemente

2	4	6	8	9	11	23	54

Se quiere buscar el dato 23, ¿qué algoritmo seguiría para decidir si está, o no, en el arreglo?

T_1 buscar todo $O(n)$

T_2 $O(\log(n))$ Busqueda binaria

Parcial 1 (Viernes 9 de Octubre)

- Lógica
- Conjuntos
- Funciones
- Series y sumatorias