Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN

* Demostración directa
* Demostración indirecta
* Demostración por contraejemplo
* Inducción matemática

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración directa

- Se parte de la hipótesis y se intenta llegar a la conclusión

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

Técnicas de demostración

Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

- Si n y m son números impares, se pueden expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

$$m=2\cdot k_2+1$$

- La suma n+m será:

$$\begin{aligned} n + m &= (2\cdot k_1+1) + (2\cdot k_2+1) \\ &= 2\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + 2 \\ &= 2\cdot(k_1 + k_2 + 1) \\ &= 2\cdot k_3 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n+m debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

$n = 2k_1 + 1$

$3(2k_1 + 1) + 2$

$6k_1 + 3 + 2$

$6k_1 + 4 + 1$

$2(\underbrace{3k_1 + 2}_{k_2}) + 1$

$\boxed{2k_2 + 1}$ Impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

  $n=2\cdot k_1+1$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2\cdot k_1+1) + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 3 + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 4 + 1 \\ &= 2(3\cdot k_1 + 2) + 1 \\ &= 2\cdot k_2 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, 3n+2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

$$n = 2k_1 + 1$$

$$n^2 = (2k_1 + 1)^2$$

$$n^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1$$

$$n^2 = 2(\underbrace{2k_1^2 + 2k_1}_{k_2}) + 1$$

$$n^2 = \boxed{2k_2 + 1} \leftarrow \text{Impar}$$

Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

$$n = 2k_1 + 1$$

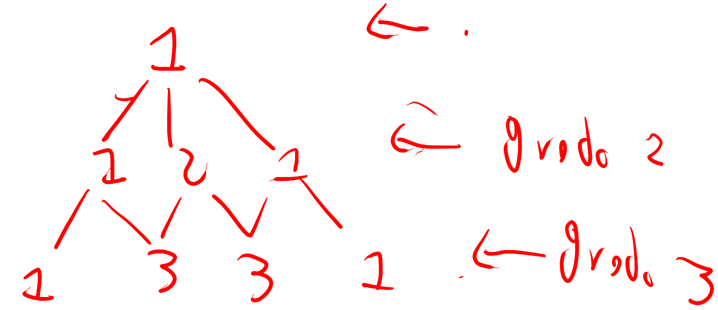
$$n^3 + 5$$

$$(2k_1 + 1)^3 + 5$$

$$8k_1^3 + 12k_1^2 + 6k_1 + 1 + 5$$

$$8k_1^3 + 12k_1^2 + 6k_1 + 6$$

$$2(4\underbrace{k_1^3 + 6k_1^2 + 3k_1 + 3}_{k_3}) = \boxed{2k_3} \leftarrow \text{Par}$$



Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^3+5 se tiene:

$$\begin{aligned} n^3 &= (2\cdot k_1+1)^3+5 \\ &= (2\cdot k_1)^3 + 3\cdot(2k_1)^2\cdot 1 + 3\cdot 2k_1\cdot 1^2 + 1^3 + 5 \\ &= 8\cdot k_1^3 + 12\cdot k_1^2 + 6\cdot k_1 + 6 \\ &= 2(4\cdot k_1^3 + 6\cdot k_1^2 + 3\cdot k_1 + 3) \\ &= 2\cdot k_2 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^3+5 debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

$n = 2k_1 \qquad m = 2k_2 + 1$

$m - 2n = 2k_1 + 1 - 4k_2$

$= 2(\underbrace{k_1 - 2k_2}) + 1$

$\boxed{= 2k_3 + 1}$ Impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

- Si n es par y m es impar, se pueden expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

$$m=2\cdot k_2+1$$

- Al calcular m-2n se tiene:

$$\begin{aligned} m-2n &= (2\cdot k_2+1)-2(2\cdot k_1) \\ &= 2\cdot k_2 + 1 - 4k_1 \\ &= 2(k_2 - 2\cdot k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, m-2n debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2 \cdot m \cdot n+n^2$ es impar

$m = 2k_1 + 1 \qquad n = 2k_2$

$m^2 + 2mn + n^2$

$(2k_1+1)^2 + 2(2k_1+1)(2k_2) + (2k_2)^2$

$4k_1^2 + 4k_1 + \boxed{1} + 8k_1k_2 + 4k_2 + 4k_2^2$

$2(2k_1^2 + 2k_1 + 4k_1k_2 + 2k_2 + 2k_2^2) + 1$

$\boxed{2k_3 + 1}$ Impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ es impar

- Si n es impar y n es par, se pueden expresar de la forma:

  $m=2\cdot k_1+1$

  $n=2\cdot k_2$

- Al calcular $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
m^2+2\cdot m\cdot n+n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2+2(2\cdot k_1+1)(2\cdot k_2)+(2\cdot k_2)^2 \\
&= 4\cdot k_1{}^2 + 4\cdot k_1 + 1 + 8\cdot k_1\cdot k_2 + 4\cdot k_2 + 4\cdot k_2{}^2 \\
&= 2(2\cdot k_1{}^2 + 2\cdot k_1 + 4\cdot k_1\cdot k_2 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_2{}^2) + 1 \\
&= 2\cdot k_3 + 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ debe ser un número impar

n = impar

n^5 es impar

$(a+b)^5$

1
1 2 1 ← 2
1 3 3 1 ← 3
1 4 6 4 1 ← 5
1 5 10 10 5 1

$a^5b^0 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^2b^3 \quad ab^4 \quad b^5$

$$(2k_1+1)^5 = 32k_1^5 + 5\times 16k_1^4 + 80k_1^3 + 40k^2 + 10k + 1$$

$$2(16k_1^5 + 5\times 8k_1^4 + 40k_1^3 + 20k_1^2 + 5k_1) + 1$$

$\boxed{2k_3+1}$ Impar

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración indirecta

- Utiliza la contrapositiva de $p \to q$, $\neg q \to \neg p$
- Toma como hipótesis $\neg q$ e intenta llegar a la conclusión $\neg p$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que “si n es par, entonces 3n+2 es par”

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 3n+2 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

  $n=2 \cdot k_1$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2 \cdot k_1) + 2 \\ &= 6 \cdot k_1 + 2 \\ &= 2(3 \cdot k_1 + 1) \\ &= 2 \cdot k_2 \text{ , es decir, } 3n+2 \text{ es par} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

Si n es impar entonces n^2 es impar

$$n = 2k_1 + 1$$

$$n^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1$$

$$n^2 = 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1$$

$$\boxed{2k_2 + 1} \quad \text{Impar}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1{}^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 4(k_1{}^2 + k_1) + 1 \\ &= 4\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } n^2 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

Si n es impar entonces 7n-4 es impar

$n = 2k_1 + 1$

$7(2k_1 + 1) - 4$

$14k_1 + 7 - 4$

$14k_1 + 3$

$14k_1 + 2 + 1 = 2(\underbrace{7k_1 + 1}_{k_2}) + 1$

$\boxed{2k_2 + 1}$ Impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces 7n-4 es impar"

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces 7n-4 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

  $n=2\cdot k_1+1$
- Al calcular 7n-4 se tiene:

$$
\begin{aligned}
7n-4 &= 7(2\cdot k_1+1) - 4 \\
&= 14\cdot k_1 + 7 - 4 \\
&= 14\cdot k_1 + 3 \\
&= 14\cdot k_1 + 2 + 1 \\
&= 2(7\cdot k_1 + 1) + 1 \\
&= 2\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } 7n-4 \text{ es impar}
\end{aligned}
$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que “si n es par, entonces 5n-6 es par“

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 5n-6 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

  $n=2\cdot k_1$
- Al calcular 5n-6 se tiene:

$$
\begin{aligned}
5n-6 &= 5(2\cdot k_1) - 6 \\
&= 10\cdot k_1 - 6 \\
&= 2(5\cdot k_1 - 3) \\
&= 2\cdot k_2, \text{ es decir, } 5n-6 \text{ es par}
\end{aligned}
$$

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración por contraejemplo

- Se muestra un caso donde no se cumple una expresión cuantificada universalmente

*

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n

Técnicas de demostración

- **Todos los primos son impares**

  2 es un contraejemplo ya que es par y primo

- **Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo**

  n=7 es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no

- **n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos nx**

  n=40 es un contraejemplo ya que $40^2+40+41= 1681$ no es primo (es divisible entre 41)

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n
- $\forall x\ x^2 \geq x$
- $\forall x \forall y\ (x+y=x-y)$
- $\forall x \forall y\ ((x>0 \land y>0) \rightarrow x-y>0)$

$V \longrightarrow F$

Técnicas de demostración

1) Demuestre **q** a partir de las siguientes sentencias:

1. $p \vee \neg t$
2. $\neg s \vee w$
3. $t \wedge \neg r$
4. $p \rightarrow \neg w$
5. $\neg q \rightarrow s$

2) Demuestre de forma directa que si n y m son impares, entonces $(n^2+m^2)/2$ es impar

Técnicas de demostración

3) Demuestre de forma indirecta que si n^2+2m es par, entonces n y m son pares

4) Demuestre por contradicción que la siguiente afirmación no es correcta "2^n+1 es un número primo para todos los enteros no negativos n"