

Métodos Numéricos

Introducción

Daniel Barragán ¹

¹Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

February 8, 2015

Agenda

- 1 Modelado Matemático
 - Ecuación General
 - Caso de Estudio
 - Solución Analítica
- 2 Métodos Numéricos
 - Método de Euler
 - Solución analítica Vs Solución Aproximada
- 3 Métodos Numéricos en Ingeniería
 - Métodos Numéricos
 - Algunas Aplicaciones

Modelo Matemático.

Ecuación General.

- Un modelo matemático es una ecuación que expresa las características esenciales de un proceso

$$\text{vd} = f(\text{vi}, \text{params}, \text{ie})$$

Donde:

vd = variable dependiente

vi = variables independientes

params = parámetros

ie = influencias externas

$$F = ma$$

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Segunda Ley de Newton

$$F = ma$$

Donde:

F = fuerza actuando sobre el cuerpo (N ó $kg \frac{m}{s^2}$)

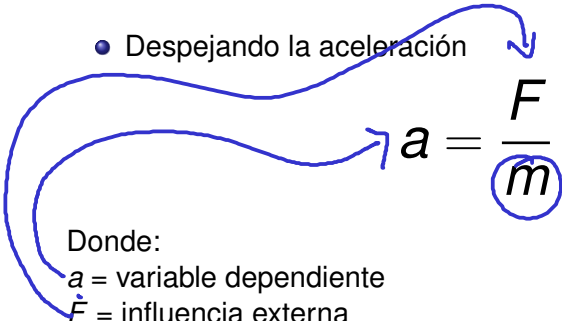
m = masa del objeto (kg)

a = aceleración ($\frac{m}{s^2}$)

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Despejando la aceleración


$$a = \frac{F}{m}$$

Donde:

a = variable dependiente

F = influencia externa

m = parámetro

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- La formula anterior:
 - Describe un proceso natural en términos matemáticos
 - Simplifica la realidad
 - Permite realizar una predicción

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Segunda Ley de Newton para calcular la velocidad terminal de un objeto en caída libre

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

- La aceleración aumenta si la fuerza es positiva
- La aceleración disminuye si la fuerza es negativa
- La velocidad es constante si la fuerza es cero

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Es posible expresar F en términos de dos fuerzas opuestas

+ Fuerza - Fricción



$$F = F_D + F_U$$

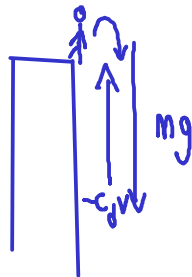
$$F_D = mg$$

$$F_U = -c_d v$$

Donde:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

c_d = coeficiente de arrastre ($\frac{kg}{s}$)



Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Combinando las ecuaciones

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$
$$F = F_D + F_U$$

Se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_D + F_U}{m}$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - c_d v}{m}$$
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v}{m}$$

$$F = F_0 + \dot{F}_v$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{F_0 + F_v}{m} = \frac{mg - c_d v}{m} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{mg - c_d v}{m}$$

$$\frac{dv}{mg - c_d v} = \frac{1}{m} dt \quad \int \frac{dv}{mg - c_d v} = \int \frac{1}{m} dt$$

$$\frac{-1}{c_d} \ln |mg - c_d v| = \frac{t}{m} + C$$

$$\ln |mg - c_d v| = -\frac{c_d t}{m} + C$$

$$mg - c_d v = e^{-\frac{c_d t}{m}} e^C$$

$$v=0 \quad t=0$$

$$v = \frac{mg - e^{-\frac{c_d t}{m}} e^C}{c_d}$$

$$0 = \frac{mg - e^C}{c_d} \rightarrow -\frac{mg}{c_d} = -\frac{e^C}{c_d}$$

$$mg = e^C$$

$$v(t) = \frac{mg - e^{-\frac{c_d t}{m}} mg}{c_d} \rightarrow \frac{mg(1 - e^{-\frac{c_d t}{m}})}{c_d}$$

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- **Problema:** Obtenga una solución por medio del cálculo para la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v}{m}$$

- **Integral:**

$$\int \frac{1}{a - bx} dx = \frac{-1}{b} \ln |a - bx|$$

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- **Solución:**

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

$$\frac{dv}{g - kv} = dt$$

$$\frac{-1}{k} \ln |g - kv| = t + B$$

$$|g - kv| = e^{-kt} e^{-kB}$$

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- Considerando que el objeto en $t = 0$, está en reposo $v = 0$

$$|g - 0| = e^{-0} e^{-kB}$$

$$g = e^{-kB}$$

Reemplazando

$$g - kv = e^{-kt}g$$

$$-kv = e^{-kt}g - g$$

$$-kv = g(e^{-kt} - 1)$$

$$v = \frac{g}{-k}(e^{-kt} - 1)$$

$$\left\{ v = \frac{gm}{C_d}(1 - e^{-(\frac{C_d}{m})t}) \right.$$

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- Note que la ecuación resultante está en la forma general

$$v = \frac{gm}{c_d} \left(1 - e^{-\left(\frac{c_d}{m}\right)t} \right)$$

Donde:

v = variable dependiente

t = variable independiente

m y c_d = parámetros

g = influencia externa

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- **Problema:** Un paracaidista de masa 68.1 kg salta de un globo estacionario. Encuentre su velocidad antes de abrir el paracaídas. El coeficiente de arrastre es igual a $12.5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

$$t = [0, 30]$$

$$f(v) = \frac{gm}{C_d} e^{-\frac{C_d}{m}t}$$

$$15$$

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- **Solución**

$$v(t) = \frac{9.8(68.1)}{12.5} \left(1 - e^{-\left(\frac{12.5}{68.1}\right)t}\right)$$

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

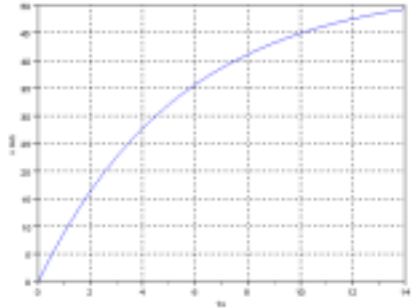
● Instrucciones Scilab

```
t = 0:2:12;  
v = ((9.8*68.1)/(12.5))*(1-exp(-(12.5/68.1)*t));  
plot(t,v)
```

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

t en <i>seg</i>	v en $\frac{m}{s}$
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39



Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- La ecuación anterior es llamada una solución exacta o analítica por que satisface exactamente la ecuación diferencial original
- Hay muchos modelos matemáticos que no pueden ser solucionados exactamente. En la mayoría de casos la única alternativa es encontrar una solución empleando métodos numericos que sea aproximada

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- En los métodos numéricos el modelo matemático es reformulado para que pueda solucionarse por medio de operaciones aritméticas

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- El cambio de velocidad respecto al tiempo en la Segunda Ley de Newton puede ser aproximado por

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

- Esta ecuación es llamada una aproximación por diferencias finitas en el tiempo t_i

$$V = \{ V_0 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad \dots \}$$

ΔV
 $V_2 - V_1$
 $V_1 - V_0$

$$T = \{ T_0 \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \dots \}$$

$T_2 - T_1$
 $T_1 - T_0$

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- Igualando las ecuaciones:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\left\{ \frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v(t_i)}{m} \right.$$

Se tiene:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d v(t_i)}{m}$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d v(t_i)}{m} \right] (t_{i+1} - t_i)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v(t)}{m} \quad \leftarrow mg - c_d v(t)$$

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{i+1} - t_i \end{array} \right.} = g - \frac{c_d v(t_i)}{m}$$

$$v(t_{i+1}) = \left(g - \frac{c_d v(t_i)}{m} \right) \Delta t + v(t_i)$$

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- La ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación que permite conocer la velocidad en el instante t_{i+1} a partir de valores previos de t y v

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- **Problema:** Un paracaidista de masa 68.1 kg salta de un globo estacionario. El coeficiente de arrastre es igual a $12.5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Emplee el método de Euler con intervalos de tiempo de 2 segundos para encontrar su velocidad antes de abrir el paracaídas.


$$V(t_{i+1}) = \left(g - \frac{c_d V(t_i)}{m} \right) \Delta t + V(t_i)$$

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- Solución

$$t=0 \quad V(0)=0 \quad t=0, 2, 4, 6, 8$$

$$v(t_1) = v(t_0) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_0) \right] (t_1 - t_0)$$

$$v(t_1) = 0 + \left[\underline{9.8} - \frac{12.5}{68.1} \underline{(0)} \right] (\underline{2} - 0) = 19.60 \frac{m}{s}$$

$V(2)$

$$v(t_2) = v(t_1) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_1) \right] (t_2 - t_1)$$

$$v(t_2) = 19.60 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1} (\underline{19.60}) \right] (4 - 2) = \underline{32.00} \frac{m}{s}$$

$V(4)$

$$t = [0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots]$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

1 2 3 4 5 6

$$t(1) = 0 \quad t(2) = 2$$

$$t(3) = 4$$

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

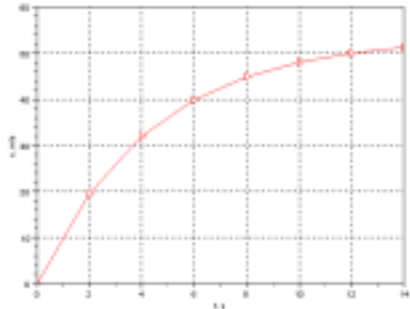
• Instrucciones Scilab

```
t = 0:2:12;  
v(1) = 0;  
//v = zeros(1,length(t));  
for i = 1:length(t)-1  
v(i+1) = v(i) + (9.81-(12.5/68.1)*v(i))*(t(i+1)-t(i));  
end  
plot(t,v,'color','red','marker','>');
```

Métodos Numéricos.

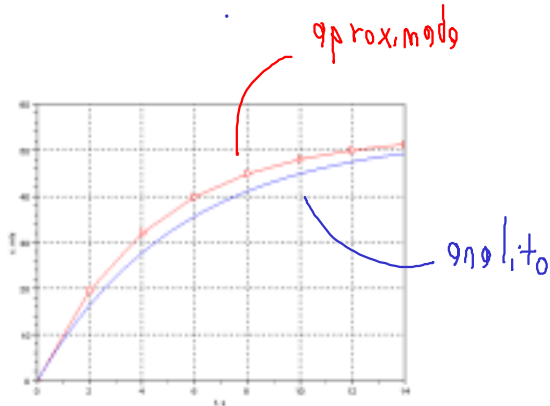
Método de Euler.

t en seg	v en $\frac{m}{s}$
0	0.00
2	19.60
4	32.00
6	39.85
8	44.82
10	47.97
12	49.96
∞	53.39



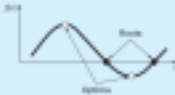
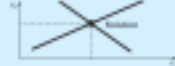
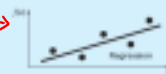
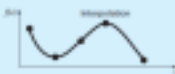

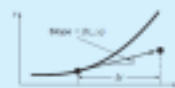
Métodos Numéricos.

Solución analítica Vs Solución Aproximada.



Métodos Numéricos en Ingeniería.

Métodos Numéricos.

Tema 3 →	<p>(a) Part 1: Roots and optimization</p> <p>Roots: Solve for x so that $f(x) = 0$</p> <p>Optimization: Solve for x so that $f'(x) = 0$</p> 
Tema 4 →	<p>(b) Part 2: Linear algebraic equations</p> <p>Given the A and B matrix, solve for the x</p> $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = B_1$ $A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = B_2$ 
Tema 2 →	<p>(c) Part 3: Curve fitting</p>  
Tema 5 →	<p>(d) Part 4: Integration and differentiation</p> <p>Integration: Find the area under the curve</p> <p>Differentiation: Find the slope of the curve</p> 
Tema 6 →	<p>(e) Part 5: Differential equations</p> <p>Given</p> $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ <p>solve for a curve function $y(x)$</p> <p>$y(x_0) = y_0$ at x_0, y_0</p> 

Métodos Numéricos en Ingeniería.









Algunas Aplicaciones.

- Las leyes de conservación son importantes en Ingeniería por que permiten **predecir** cambios con respecto al tiempo

$$\text{cambios} = \text{incrementos} - \text{decrementos}$$

Métodos Numéricos en Ingeniería.

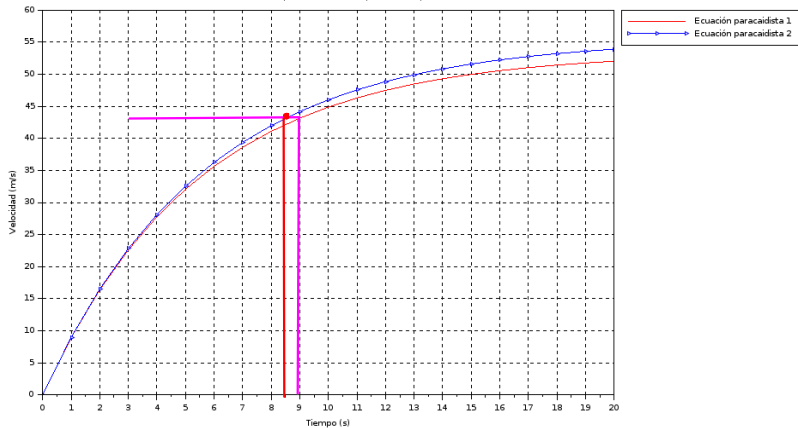
Algunas Aplicaciones.

Field	Devices	Conservation Principle	Mathematical Expression
Thermal engineering		Conservation of mass	Mass balance: input = output Over a unit of time period Stream = input - output
Civil engineering		Conservation of momentum	Force balance:  At each node: $\sum \text{horizontal forces } (F_x) = 0$ $\sum \text{vertical forces } (F_y) = 0$
Mechanical engineering		Conservation of momentum	Force balance:  at Σ = downward force - upward force
Electrical engineering		Conservation of charge	Current balance:  At each node: $\sum \text{current } (I) = 0$
		Conservation of energy	Voltage balance:  Around each loop: $\sum \text{emf} = \sum \text{voltage drops for resistors}$ $= 0$ $\sum \mathcal{E} - \sum IR = 0$

Problemas I

- **Problema:** Un primer paracaidista tiene una masa de 70kg y un coeficiente de arrastre de 12kg/s . Un segundo paracaidista tiene una masa de 80kg y un coeficiente de arrastre de 15kg/s . ¿Cuanto tiempo le tardará al segundo paracaidista alcanzar la misma velocidad que el primer paracaidista alcanza en 9 segundos?

Velocidad del paracaidista con respecto al tiempo



Problemas I

analítica

Euler

- **Problema:** En lugar de emplear una relación lineal para el coeficiente de arrastre, se recomienda modelar la fuerza hacia arriba como una relación de segundo orden, $F_U = -c_d v^2$, donde c_d es un coeficiente de arrastre de segundo orden (kg/m)

$$F = F_D - F_U$$

- Obtenga la solución analítica para el caso donde el paracaidista esta inicialmente en reposo
- Realice una tabla con las velocidades para un paracaidista de masa $68.1kg$, coeficiente de arrastre de $0.225kg/m$, para un tiempo desde $t = 0s$ a $t = 12s$. Realice una gráfica con los datos

$$F = mg - c_d v^2$$

$$F = F_0 + F_v$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{F_0 + F_v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m} + \frac{F_v}{m}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2}$$

$$\frac{m}{c_d} \frac{dv}{dt} = \frac{gm}{c_d} - v^2$$

$$\int \frac{dv}{\frac{gm}{c_d} - v^2} = \int \frac{m}{c_d} dt \quad \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\sqrt{\frac{c_d}{gm}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{c_d}{gm}} v \right) = \frac{mt}{c_d} + C$$

$$v(0) = 0$$

$$\sqrt{\frac{c_d}{gm}} \tanh^{-1} (0) = C \quad C = 0$$

$$\sqrt{\frac{c_d}{gm}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{c_d}{gm}} v \right) = \frac{mt}{c_d}$$

$$\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{c_d}{gm}} v \right) = \frac{mt}{c_d} \times \sqrt{\frac{gm}{c_d}}$$

$$\sqrt{\frac{c_d}{gm}} v = \tanh \left(\frac{m}{c_d} \sqrt{\frac{gm}{c_d}} t \right)$$

$$\boxed{v = \tanh \left(\frac{m}{c_d} \sqrt{\frac{gm}{c_d}} t \right) \times \sqrt{\frac{gm}{c_d}}}$$

$$\begin{aligned} & \vee t=0 \quad v=0 \\ & \vee t=1 \\ & \vee t=2 \end{aligned}$$

Euler

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2}$$

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\Delta t} = g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2$$

$$v(t_{i+1}) = \left(g - \frac{c_d}{m} v(t_i)^2 \right) \Delta t + v(t_i)$$

$$v(0) = 0$$

$$v(1) = \left(\frac{g - c_d (0)^2}{m} \right) (1) + 0$$

$$v(2) = \left(\frac{g - c_d (v(1))^2}{m} \right) (1) + v(1)$$

$$\frac{dT}{dt} = (\dot{q} - kt)$$

$$q = 80 \quad k = 0.5$$

$$t=0 \quad T(0) = q$$

Método analítico $t=0$

Método Euler $t=1$

$t=2$

$t=3$

Método analítico

$$\frac{dT}{dt} = (\dot{q} - kt) \quad \int dT = \int (\dot{q} - kt) dt$$

$$T(t) = qt - \frac{k}{2}t^2 + C \quad T(0) = q$$

$$q = C$$

$$T(t) = qt - \frac{k}{2}t^2 + q$$

$$T(t) = 80t - \frac{1}{4}t^2 + 80$$

t	T
0	80
1	159,75
2	239
3	$320 - \frac{9}{4} = 317,75$

Método de Euler

$$\frac{dT}{dt} = (\dot{q} - kt) \quad \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t} = (\dot{q} - kt_i)$$

$$T(t_{i+1}) = (\dot{q} - kt_i)\Delta t + T(t_i)$$

$$T(1) = (80 - \frac{1}{2}(0))(1) + 80$$

$$T(2) = (80 - \frac{1}{2}(1))(1) + 160$$

$$T(3) = (80 - \frac{1}{2}(2))(1) + 239,5$$

t	T
0	80
1	160
2	239,5
3	318,5

$$\frac{dc}{dt} = -kc \quad \frac{dc}{-kc} = dt \quad k=1.3 \quad c(0)=20$$

$$t=0, 2, 4, 6$$

$$-\frac{1}{k} \ln |c| = t + D$$

$$c(t) = -kt + Dk \rightarrow c(t) = e^{-kt} \times D$$

$$20 = D$$

$$c(t) = 20e^{-kt}$$

t	c(t)
0	20
2	1,48
4	0,11
6	$8,19 \times 10^{-3}$

Método Euler

$$\frac{dc}{dt} = -kc$$

$$\frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{\Delta t} = -k c(t_i)$$

$$c(t_{i+1}) = -k c(t_i) \Delta t + c(t_i)$$

$$c(0) = 20$$

$$c(2) = -1.3 \times 20 \times 2 + 20 = -32$$

$$c(4) = -1.3(-32) \times 2 + 32 = 81,2$$

$$c(6) = -1.3(81,2) \times 2 + 81,2 = -81,92$$

t	c(t)
0	20
2	-32
4	81,2
6	-81,92

$$\frac{dc}{dt} \approx \frac{\Delta c}{\Delta t} \rightarrow \frac{dc}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta t}$$

$$\frac{dV}{dt} = qV + t$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = qV + t \rightarrow \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{\Delta t} = qV(t_i) + t_i$$

$$V(t_{i+1}) = (qV(t_i) + t_i) \Delta t + V(t_i)$$

$$\Delta t = 3$$

$$V(0) = k$$

$$V(3) = (qV(0) + 0)(3) + V(0)$$

$$V(6) = (qV(3) + 3)(3) + V(3)$$

Problemas I

- Escilab / papel
- **Problema:** Un paracaidista de masa 68.1 kg salta de un globo estacionario. El coeficiente de arrastre es igual a $0.225\frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Emplee el método de Euler con intervalos de tiempo de 2 segundos para encontrar su velocidad antes de abrir el paracaídas.

Integrales I

$$\int \frac{1}{a - bx} dx = -\frac{1}{b} \ln |a - bx|$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a}$$

Bibliografía I



S. Chapra.

Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.

Mac Graw Hill, 2010.