Matemáticas discretas II

Principios básicos del conteo

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Noviembre 2020

Contenido

Contenido

Universidad del Valle

Introducción

Introducción

- La combinatoria nos permite estudiar cómo se pueden organizar un conjunto de elementos
- Esto nos ayuda a estudiar la complejidad de ciertos algoritmos y de algunos juegos. Dejemos esta pregunta para el final ¿Cual es la complejidad computacional de ordenar un arreglo de tamaño n probando todas las posibilidades?
- Esto ha adquirido importancia en estudios como la secuenciación del DNA

Introducción

Introducción

Al crear una contraseña para su correo electrónico. Han pensado los siguiente: Si nuestra contraseña tiene 8 dígitos alfanuméricos ¿Cuantas posibles combinaciones de contraseñas existen?. ¿Un hacker podría superar la seguridad de mi contraseña?.

`https://howsecureismypassword.net`

¿Son realmente seguros los accesos a los sistemas informáticos?

Universidad del Valle

Introducción

Introducción

Existen dos principios básicos de combinatoria: **Regla del producto** y **Regla de la suma**. Estos principios los vamos aplicar para realizar el conteo de cuantas formas se puede realizar una tarea.

Universidad del Valle

Contenido

Universidad del Valle

Regla del producto

Regla del producto

Supongamos una tarea se puede dividir en dos tareas consecutivas. Si hay n_1 formas de realizar la primera y n_2 formas de realizar la segunda, entonces hay $n_1 n_2$ formas de realizar la tareas.

T < T1 colocar letra
T2 colocar num 00 - 100

L L L L L L L

658

L 95

F 04

Ejemplo 1

Se quiere etiquetar unas sillas con una letra del alfabeto ingles (26 en total) y un número entero desde 0 hasta 100. ¿Cual es el máximo número de sillas que se puede asignar con la etiqueta disponible?.

$T_1 = 26$ $T_2 = 101$

$\boxed{2600 + 26 = 2626}$

Universidad del Valle

Regla del producto

Solución

El proceso consiste en dos tareas:

1. Asignar una de las 26 letras del alfabeto.
2. Asignar uno de los 101 posibles números.

Regla del producto

Solución

Según la regla de producto:
Existen $26 * 101 = 2626$ formas de etiquetar una butaca.

Universidad del Valle

Regla del producto

$30 \times 24 + 2 \times 24$

$720 + 48 = \boxed{768}$

32×24

PC

Ejemplo 2

En una sala hay $\boxed{32}$ ordenadores. Cada ordenador tiene $\boxed{24}$ puertos. ¿Cuantos puertos diferentes hay en la sala?.

T

$T_1 =$ Selecciono el PC 32

$\times$

$T_2 =$ Selecciono el puerto 24

Universidad del Valle

Regla del producto

Solución

El proceso consiste en dos tareas:

1. Seleccionar un ordenador.
2. Seleccionar un puerto en dicho ordenador.

Regla del producto

Solución

El proceso consiste en dos tareas:

1. Hay 32 posibles elecciones de ordenador.
2. Hay 24 posibles elecciones de puerto.

Regla del producto

Solución

Según la regla de producto:
Existen $32 * 24 = 768$ puertos.

Regla del producto

Anotación

La regla del producto se puede extender a más de dos tareas. Suponga que una tarea requiere realizar sucesivamente $T_1, T_2, ..., T_m$ veces. Si cada tarea T_i puede realizarse de n_i formas entonces hay $n_1 * n_2 * ... * n_m$ formas de completar la tarea.

Regla del producto

Ejemplo 3

¿Cuantas cadenas de bits diferentes hay con longitud 7?.

$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\overline{T_1}$ $\overline{T_2}$ $\overline{T_3}$ $\overline{T_4}$ $\overline{T_5}$ $\overline{T_6}$ $\overline{T_7}$

T T_1 = Seleccionar el primer bit: $\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ 2

T_2 " " segundo " : 2

T_3 " " tercer " 2

:

T_7 " " septimo bit 2

$$2^7 = 128$$

Universidad del Valle

Regla del producto

Solución

Analicemos: Cada bit en la cadena puede tener un valor de 0 o 1, es decir que existen 2 formas de elegir cada bit en la cadena.

Regla del producto

Solución

Aplicando la regla del producto sucesivamente se obtiene la siguiente relación: $2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^7 = 128$ cadenas de bits diferentes con longitud 7.

Ejemplo 4

¿Cuantas matriculas están disponibles si cada una contiene una serie de tres letras seguidas de tres dígitos?.

ABC 134

HPC 456

$$\underbrace{\frac{26}{T_1}}\ \underbrace{\frac{26}{T_2}\ \frac{26}{T_3}}_{T}\ \ \underbrace{\frac{10}{T_4}\ \frac{10}{T_5}\ \frac{10}{T_6}}$$

Universidad del Valle

Regla del producto

Solución

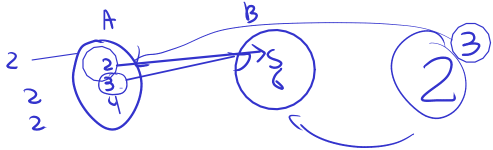
Analicemos: Hay 26 posibilidades para cada una de las tres letras y diez posibilidades para cada uno de los tres dígitos.

Regla del producto

Solución

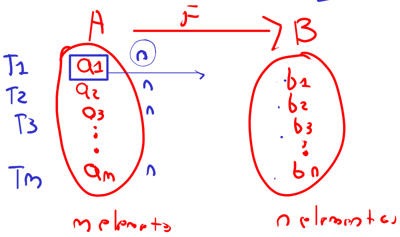
Aplicando la regla del producto sucesivamente se obtiene la siguiente relación: $26 * 26 * 26 * 10 * 10 * 10 = 17576000$ posibles matriculas.

Regla del producto



Ejemplo 5

¿Cuantas funciones se pueden definir de un conjunto de *m* elementos (dominio) a otro conjunto *n* elementos (imagen)?.



$\boxed{n^m}$

¿Cual condición debe cumplir una función? Que todos los elementos de A (dominio) tengan una imágen en B (codominio)

Regla del producto

Solución

Analicemos: Una función se corresponde con la elección de uno de los m elementos del conjunto imagen para cada uno de los n elementos del dominio.

Regla del producto

Solución

Aplicando la regla del producto sucesivamente se obtiene la siguiente relación: $n * n * n * ... * n * n = n^m$ posibles funciones.

Regla del producto

Solución

¿Según lo visto anteriormente cuantas funciones existen desde un conjunto de 4 en otro conjunto de 6 elementos?

Solución

Existen 6^4 posibles funciones

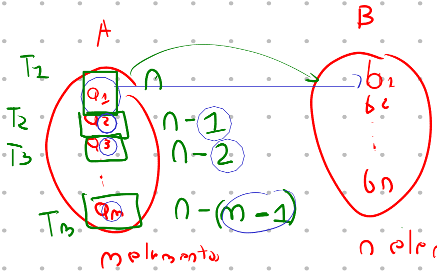
Regla del producto

Solución

¿Según lo visto anteriormente cuantas funciones existen desde un conjunto de 4 en otro conjunto de 6 elementos?

Solución

Existen 6^4 posibles funciones



$n!$

¿Inyectivos?

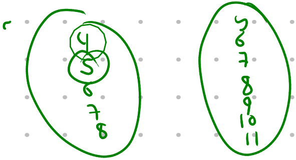
$\boxed{\cdot\, n + m\,?}$

$\cdot\, n$ \\\\

$\boxed{n \geq m}$

$$\boxed{n \times (n-1) \times (n-2) \times \; \times (n-(m-1))} \times \begin{array}{c} 8 \quad\quad 7 \quad\quad 6 \\ n-m \times n-(m+1) \times n-(m+1) \\ \hline \times \dfrac{1}{(n-m)!} \end{array}$$

$$\times P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

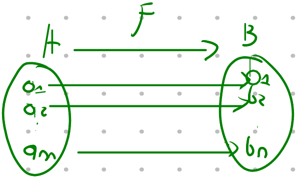


$T_1 = 7$
$T_2 = 6$
$T_3 = 5$
$T_4 = 4$
$T_5 = 3$

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \boxed{\times 2 \times 1}$

$$P(7, 5) = \frac{7!}{(7-5)!}$$

Funciones



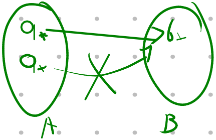
$|A| = m$

$|B| = n$

$F(a_1) = b_1$

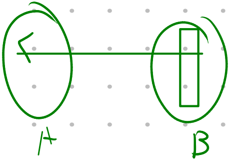
Inyectivas

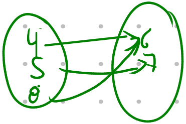
Un elemento de b no puede ser imágen de más de un elemento a.



$|B| > |A|$

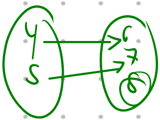
Sobreyectivas





Biyectiva = Inyectiva y sobreyectiva

|A| = |B|



Regla del producto

TIene una tarea que se divide en n tareas T1 hasta Tn

T1 = n1 formas T2 = n2 formas T3 = n3 formas .... Tn = nn formas

¿Cuantas formas se hace T?

$$\boxed{T = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \quad \times n_n}$$

Contenido

Universidad del Valle

Regla de la suma

Definición

Si una primera tarea se puede realizar de n_1 formas y una segunda tarea se puede realizar de n_2 formas, y si las dos tareas son incompatibles, entonces hay $n_1 + n_2$ formas de realizar una de las dos tareas.

Regla la suma

Ejemplo 1

Para elegir un representante para la Universidad del Valle Sede Tulua, una comisión puede elegir a un profesor o a un estudiante de doctorado. Existen 37 profesores y 83 estudiantes de doctorado.

Regla la suma

Solución

Analicemos: Podemos dividir esta tarea en dos:

1. Se puede elegir un profesor, lo que puede hacer de 37 formas distintas.
2. Se puede elegir un estudiante de doctorado, lo que se puede hacer de 83 formas distintas.

Regla la suma

Solución

Por lo que aplicando la regla de la suma se puede elegir un representante para Univalle de $37 + 83$ formas posibles.

Regla la suma

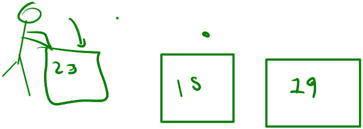
Anotación

La regla de la suma se puede extenderse a más de dos tareas. Suponga que una tarea se puede dividir en $T_1, T_2, \ldots T_m$ tareas independientes y cada tarea T_i se puede realizar de n_i formas entonces existe $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ formas de completar la tarea.

Regla la suma

Ejemplo 2

Un estudiante puede elegir un proyecto de trabajo de entre tres listas. Cada una de las listas contiene respectivamente 23,15 y 19 propuestas de trabajo. ¿Cuántos posibles proyectos tiene el estudiante para elegir?.



$23 + 15 + 19$

Universidad del Valle

Regla la suma

Solución

Analicemos: De la primera lista puede elegir 23 formas distintas de trabajo. De la segunda lista puede elegir 15 formas de trabajo y de la tercera lista puede elegir 19 formas de trabajo.

Regla la suma

Ejemplo 2

De acuerdo a la regla de la suma existe $\underline{23 + 15 + 19} = 57$ proyectos para elegir

Ejercicio

Retomemos

Con lo adquirido en clase, indique: ¿Cual es la complejidad computacional de ordenar un arreglo de tamaño *n* probando todas las posibilidades?

$$\frac{n}{T_1} \quad \frac{n-1}{T_2} \quad \frac{n-2}{T_3} \quad \frac{n-3}{T_4} \quad \frac{n-4}{T_5} \quad \frac{n-5}{T_6} \quad \frac{n-6}{T_7} \quad \frac{n-7}{T_8} \quad \frac{n-8}{T_9} \ldots \frac{1}{T_n}$$

$$O(n!)$$

$$n!$$

Regla de la suma

TIene una tarea T que puede dividirse en n tareas T1, T2 .. Tn
Estas tareas son MUTUAMENTE EXCLUYENTES. ¿Que quiere decir?

R/. Si hace por ejemplo T1, no se puede hacer ninguna otra. O si se hace T2 no se puede hacer otra ... En general, si hago una tarea cualquiera no puede hacer ninguna otra.

Si T1= n1 formas, T2 = n2 formas, Tn = nn formas
¿Cuantas formas puedo hacer T?

$$\boxed{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_n}$$

Contenido

Universidad del Valle

Problemas de recuento

Definición

Muchos problemas de recuento no se pueden resolver utilizando sólo las reglas de la suma ni del producto. Sin embargo, es posible utilizar ambos principios de forma simultanea de ambos principios para solucionarlos.

Problemas de recuento

$A = a$

Ejemplo 1

En una versión del lenguaje **UV-KILL**, el nombre de una variable es una cadena de **uno o dos caracteres alfanuméricos** y las letras mayúsculas o minúsculas no se distinguen. El nombre de la variable debe comenzar por una letra y debe ser diferente de las cinco cadenas de dos caracteres que esta reservadas en el lenguaje ¿Cuantos nombres de variables distintos son posibles?

T = asignar nombre a una variable

$$T \begin{cases} T_1 & \text{variables con un caracter} \\ T_2 & \text{variable con dos caracteres} \end{cases}$$

$T_1 + T_2$

Universidad del Valle

$\boxed{\text{Variable debe comenzar por una letra}}$

¿Que quiere decir para variables de un carácter?

$T1 \rightarrow 26$

$T2 \cdot \quad \underline{26} \; \underline{36} - 5$

$\{ T21 \times T22$

asignar el primero

asignar el segunto

$26 + 26 \times 36 - 5$

(reservados

Problemas de recuento

Solución

Sea V el número de variables disponibles. Sea V_1 el número de variables compuestas por sólo un carácter y V_2 el número de variables compuesta por dos caracteres.

Problemas de recuento

Solución

- V_1 es 26 debido a que sólo puede ser una letra.
- V_2 debe ser $26 * 36$ debido es la forma de generar el nombre de una variables de dos caracteres.
- Sin embargo, cinco de ellas están excluidas por lo que $V_2 = 26 * 36 - 5 = 931$

Universidad del Valle

Problemas de recuento

Solución

Entonces el número de variables en el lenguaje es:
$V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ nombres posibles de variables.

Problemas de recuento

Ejemplo 2

Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, que tiene una longitud entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es un digito o una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito ¿Cuantas contraseñas distintas admite el sistema?.

Universidad del Valle

Ejemplo 2

Cada usuario de un ordenador tiene una contraseña, que tiene una longitud entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es un digito o una letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito ¿Cuantas contraseñas distintas admite el sistema?.

T_1 6 caract

T_2 7 caract

T_3 8 caract

36

$$T \left\{ \begin{array}{ll} T_1 & 36^6 - 26^6 \\ + & \\ T_2 & 36^7 - 26^7 \\ + & \\ T_3 & 36^8 - 26^8 \end{array} \right.$$

Contraseñas con al menos un digito:

Total de contraseñas - $\boxed{\text{Contraseñas con sólo letras}}$

$36^6 - 26^6$ — $26^5 \times 10 \times 6$

10^6

Cadenas que tiene al menos un dígito

Cadenas que tienen exactamente un DIGITO

IGUAL si contamos 1 digito + 2 digito + 3 digito + 4 digto + 5 digito+ 6 digo

Problemas de recuento

Solución

Sea P el número total de contraseñas y sean $P_6, P_7 y P_8$ respectivamente las contraseñas de longitud 6, 7 y 8.

Solución

Para calcular P_6,P_7 y P_8, lo mejor es realizar la diferencia entre todas las cadenas válidas de longitud 6,7 o 8 y restarlas con las que no son válidas.

Problemas de recuento

Solución

- $P_6 = 36^6 - 26^6 = 1867866560$
- $P_7 = 36^7 - 26^7 = 70332353920$
- $P_8 = 36^8 - 26^8 = 2612282842880$

Solución

Finalmente, $P_6 + P_7 + P_8 = 2684483063360$

.

Contenido

Universidad del Valle

Problemas de recuento

Definición

Cuando dos tareas se pueden realizar simultáneamente, no se puede utilizar la regla de la suma o el producto para contar las maneras en que se pueden realizar las tareas, pues estaremos contando dos veces las tareas.

Universidad del Valle

Problemas de recuento

Definición

Para solucionar este problema de contar las tareas simultaneas, se suman las maneras de realizar cada tarea y luego se restan las formas de realizar las dos formas simultáneamente. Esta técnica es conocida como el **principio de inclusión-exclusión**

Problemas de recuento

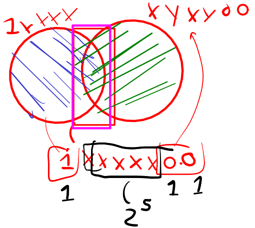
Ejemplo 1

¿Cuantas cadenas de bits que tengan longitud ocho y que bien comiencen con un 1 o bien terminen con 00?

T_1 1 XXXXXXX 2^7

T_2 XXXXXX00 2^6

$$2^7 + 2^6 - 2^5$$



Problemas de recuento

Solución

Análisis, las tareas de nuestro problema son:

- Una tarea es construir una cadena de 8 bits que comience en 1.
- Existe una segunda tarea que consiste en construir una cadena de 8 bits que termine en 00.

Problemas de recuento

Solución

Para la primera tarea se tiene que:
$1 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^7 = 128$ Formas de construir una cadena de longitud ocho que inicia en 1, aplicando la regla de la multiplicación.

Problemas de recuento

Solución

Para la segunda tarea se tiene que:
$2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 1 * 1 = 2^6 = 64$ Formas de construir una cadena de longitud ocho que termina en 00, aplicando la regla de la multiplicación.

Problemas de recuento

Solución

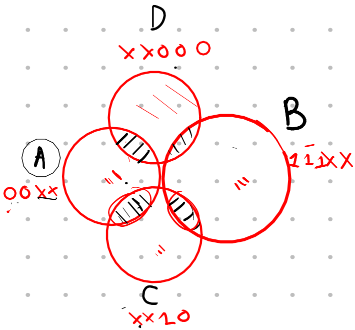
Ahora debemos analizar lo siguiente, las dos tareas simultáneamente, es decir construir una cadena que comience en 1 y termine en 00 se puede hacer:
$1 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 1 * 1 = 2^5 = 32$ formas posibles.

Problemas de recuento

Solución

Por lo tanto, el número de cadenas de 8 bits que pueden construir que inician en 1 y terminan en 00 se pude hacer:
$128 + 64 - 32 = 160$ Formas posibles.

¿Cuantas cadenas de $\boxed{\text{10 bits h}}$ay que comiencen en 00 o 111, o terminen en 10 o 000?



$A \cap B = \emptyset$

$C \cap D = \emptyset$

$A + C ~~+ D~~ - a \cap c - a \cap d$

$A + B + C - A \cap C - B \cap C + D - A \cap D - B \cap D$

$$\boxed{2^8 + 2^7 + 2^8 - 2^6 - 2^5 + 2^7 - 2^5 - 2^4}$$

10

100 x00

¿Cuantas cadenas inician en 000 o 00 y terminan en 11 o 10?

A 000xx

B 00xx

000xx

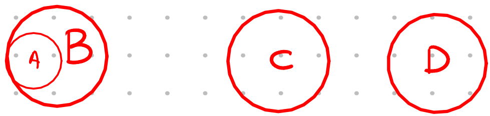
001xxx

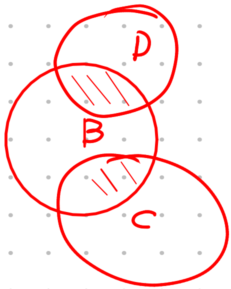
$C = xx11$

$D = xx10$

000

00





$$B + C + D - B \cap C - B \cap D$$

$$\boxed{2^8 + 2^8 + 2^8 - 2^6 - 2^6}$$

4. Cuántas cadenas de n bits, donde n es un entro positivo,están compuestas enteramente por unos?

5. Cuántas cadenas de letras minúsculas existen de longitud cuatro o menor?

1) tamaño 0, tamaño 1, tamaño 2, tamaño 3, ... tamaño n

□ 1 11 111 111

1 1 1 1 1

$n+1$

tamaño 0

2) $26^4 + 26^3 + 26^2 + 26^1 + \boxed{26^0}$

6. De entre las cadenas de tres dígitos decimales,

(a) Cuántas no contienen el mismo dígito tres veces?

(b) Cuántas comienzan por un dígito impar?

(c) Cuántas contienen exactamente dos cuatros?

0 — 9

10

○ 4 4 = $9 \times 1 \times 1 = 9$

9

4 ○ 4 = $1 \times 9 \times 1 = 9$

4 4 X → $1 \times 1 \times 9 = 9$

27

9. De entre un alfabeto de ~~26 letras mayúsculas~~ y 26 minúsculas. Cuántas cadenas de ocho caracteres existen

(a) que no contengan vocales si las letras se pueden repetir?

(b) que no contengan vocales si las letras no se pueden repetir?

(c) que comiencen con una vocal si la letras se pueden repetir?

(d) que comiencen con una vocal si las letras no se pueden repetir?

a) 21^8

b) $21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14$

c) 5×26^7

d)

$5 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19$

Comienza por vocal

vocal

26

Revisar enunciado!

9. (a) 37.822.859.361

(b) 8.204.716.800

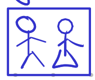
(c) 40.159.050.880

(d) 12.113.640.000

12. De Cuántas maneras puede un fotógrafo de boda ordenar un grupo de $\boxed{6}$ personas si:

(a) los novios deben salir juntos en la foto?

(b) los novios no pueden salir juntos en la foto?



una persona

a) $5! \times 2 = (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2$

$\boxed{\text{a) } 240}$
b) 480

b) $\underline{0}$ _ $\underline{0}$ 0

$6! - 240 = 480$

todo novios

11. Cuántas funciones hay entre el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, donde n es un entero positivo, y el conjunto $\{0, 1\}$

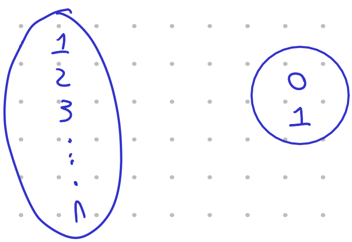
(a) que sean inyectivas?

*carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

11. (a) 2 si n=1, 2 si n=2 y 0 si $n \geq 3$
(b) 2^{n-2} si n 1 y 1 si n=1

(b) que asignen el 0 (codominio) a 1 y n (dominio)?

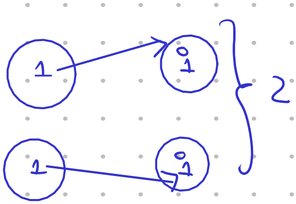
(c) que asignen el 1 (codominio) a un sólo elemento entre 1 y n-1 (dominio)?.

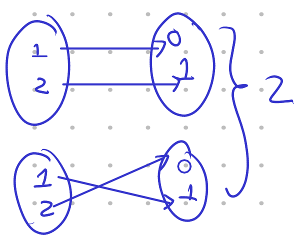


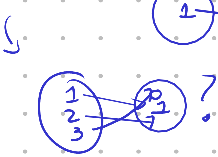
$n = 1$
⋮
$n = ?$

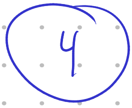
Inyectivos $n = 1$

$n = 2$

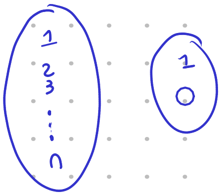








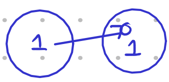
(b) que asignen el 0 (codominio) a 1 y n (dominio)?



Si $n = 1$, 1

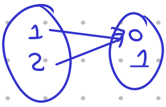
Si $n > 1$, $\boxed{2^{n-2}}$

$\boxed{n = 1}$



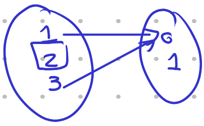
$\}$ 1

$n = 2$



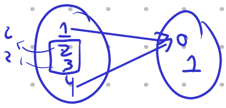
$\}$ $1 = 2^0$

$n = 3$



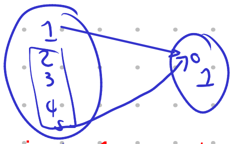
$\}$ 2 $\leftarrow 2^1$

$n = 4$

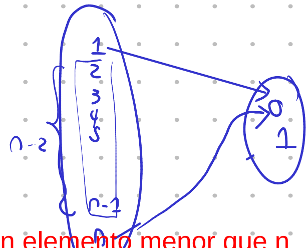


$\}$ 4 $\leftarrow 2^2$

$n = 5$



$\}$ 8 $\leftarrow 2^3$



$\}$ 2^{n-2}

que asignen 1 a exactamente a un elemento menor que n

(c) que asignen el 1 (codominio) a un sólo elemento entre 1 y n-1 (dominio)?.

37. How many functions are there from the set $\{1, 2, \ldots, n\}$, where n is a positive integer, to the set $\{0, 1\}$

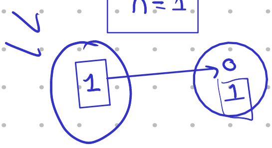
a) that are one-to-one?

b) that assign 0 to both 1 and n?

c) that assign 1 to exactly one of the positive integers less than n?

$2(n-1)$

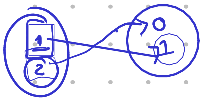
$\boxed{n = 1}$



excepcion

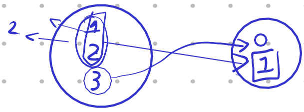
$\}$ 2

$n = 2$



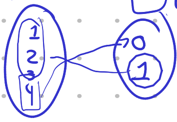
$\}$ 2 $\leftarrow 2 \times n-1$

$n = 3$



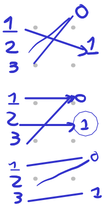
$\}$ 2×2, $n-1$

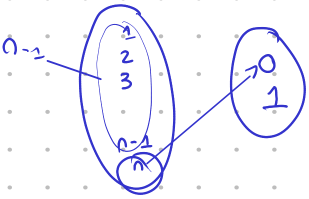
$n = 4$



$n-1$

$\boxed{3} \times \boxed{2}$





$(n-1)2$

ziasniper reply 0

i think, part (c) is incorrect. question says assign 1 to less than n, so n can't be 1. therefore (n-1) times is the correct answer.

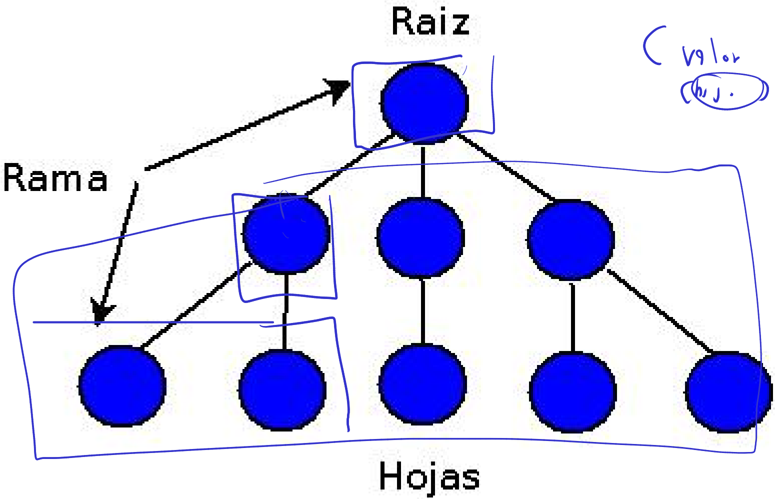
> Sarah Schrijvers m reply 0
>
> The exercise prompt states that exactly one of the positive integers less than n is assigned to 1. However, this does not mean that n cannot be assigned to 1 (moreover, n can be assigned to 0 or to 1). This is also confirmed by the answer in the back of the textbook.

Si $n = 1$ 2, Si $n > 1$, $2(n-1)$

Contenido

Universidad del Valle

Diagramas en árbol



Diagramas en árbol

Definición

Algunos problemas se pueden solucionar utilizando diagramas de árbol. Un árbol esta formado por una raíz y un determinado número de ramas que parten de la raíz. Los resultados posibles están representados por las hojas del árbol, que son los extremos de las ramas.

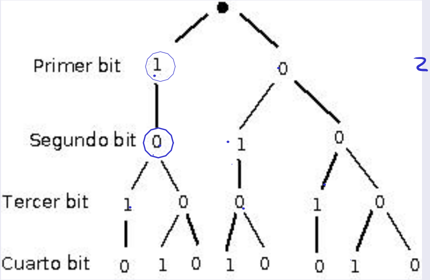
Diagramas en árbol

Ejemplo 1

¿Cuantas cadenas de longitud cuatro no tienen dos unos consecutivos?

Diagramas en árbol

Solución



2

Solución

De acuerdo al anterior árbol las posibles soluciones son:
0101,1001,0001,1010,0010,0100,1000,0000

Universidad del Valle

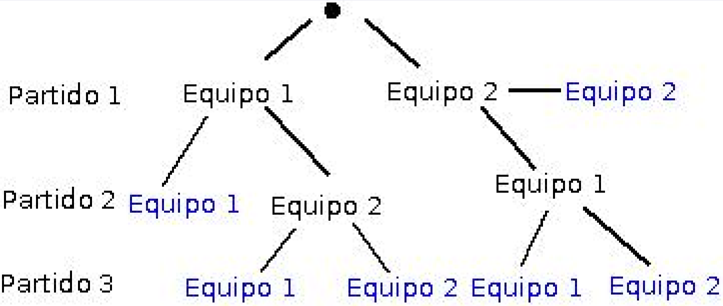
Diagramas en árbol

Ejemplo 2

Un torneo entre dos equipos consiste en lo más de tres partidos, el primer equipo que gane dos partidos resulta vencedor

Diagramas en árbol

Solución



En azul está el ganador

Diagramas en árbol

Ejemplo 3

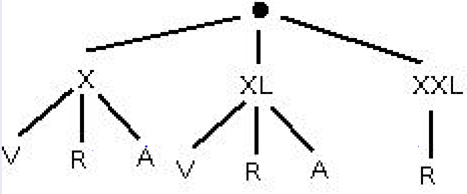
Supongamos que un modelo de camiseta se fabrica en 3 tallas diferentes: X, XL y XXL. Cada camisa se fabrica en tres colores: Verde, Rojo y Azul. Excepto para la talla XXL que sólo se fabrica en rojo. ¿Cuantas camisetas diferentes debe haber?.

Diagramas en árbol

Solución

T1 talla

T2 color



Números entre 1 y n que son divisibles por k

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

Números entre 1 y 100 que son divisibles por 5

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$$

Número entre 1 y 100 que son divisibles por 3

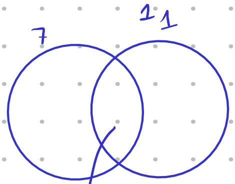
$$\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$$

3, 6, 9, 12, 15, 18,

Número entre 1 y 100 divisibles por 11

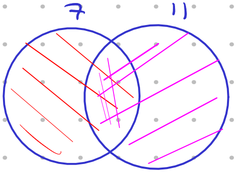
$$\left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor = 9$$

Divisibles entre 7 y 11



$$\boxed{mcm(7, 11)} = 77$$

Divisibles por 7 u 11e



$$\left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{77} \right\rfloor$$

Contenido

Universidad del Valle

Ejercicios

Ejercicio 1

En Univalle hay 18 estudiantes de matemáticas y 325 de Ingeniería de Sistemas

- ¿De cuantas formas se pueden escoger dos representantes, uno de ellos sea estudiante de matemáticas y el otro sea de Ingeniería de Sistemas?
- ¿De cuantas maneras se puede escoger un representante que sea estudiante que sea estudiante de matemáticas o Ingeniería de Sistemas?.

Universidad del Valle

Ejercicios

Solución

- Para la primera pregunta, la elección se puede tratar como dos tareas separadas: T_1 elegir representante matemáticas y T_2 elegir representante Ingeniería de Sistemas, por lo que aplicamos regla del producto: $18 * 325 = 5850$ formas de elegir los dos representantes.
- Para la segunda pregunta, la elección se puede tratar como una tarea dependiente, es decir se puede aplicar regla de la suma $18 + 325 = 343$.

Ejercicios

Ejercicio 2

Un cuestionario tiene diez preguntas, cada una tiene cuatro posibles respuestas:

- ¿De cuantas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si responde todas las preguntas?
- ¿De cuantas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si puede dejar preguntas sin contestar?.

Ejercicios

Solución

- Para la primera pregunta, se aplicar regla del producto al cuestionario por lo que tendríamos $4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 * 4 = 4^{10}$.
- Para la segunda pregunta, se aplica que el estudiante puede responder cada pregunta con 4 posibles respuestas o no contestar, por lo que serían 5 formas. Por ende tendríamos: $5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 5^{10}$.

Ejercicios

Ejercicio 3

¿Cuantas cadenas de letras minúsculas existen de longitud cuatro o menor?. Existen 26 letras.

Ejercicios

Ejercicio 4

Dado el siguiente código. ¿Que valor toma k al final?

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
    for i2 := 1 to n2
        ...
        for im := 1 to nm
            k := k + 1
        end
        ...
    end
end
```

Universidad del Valle

Ejercicios

Ejercicio 4

Dado el siguiente código. ¿Que valor toma k al final?

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
    k := k + 1
end

for i2 := 1 to n2
    k := k + 1
end
...
for im := 1 to nm
    k := k + 1
end
```

Universidad del Valle

Ejercicios

Solución

Es necesario examinar el número de cadenas de 0,1,2,3 y 4 de longitud que corresponden a P_1, P_2, P_3, P_4 por lo que seria:

- $P_0 = 1$
- $P_1 = 26$
- $P_2 = 26 * 26 = 676$
- $P_3 = 26 * 26 * 26 = 17576$
- $P_4 = 26 * 26 * 26 * 26 = 456976$
- $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 475255$

Ejercicios

Ejercicios

De los enteros entre 100 y 999, ambos inclusive:

- ¿Cuantos son divisibles por 7?
- ¿Cuantos son impares?
- ¿Cuantos tienen los tres dígitos iguales?
- ¿Cuantos no son divisibles por 4?
- ¿Cuantos son divisibles por 3 o 4?
- ¿Cuantos bien no son divisibles por 3 o bien no son divisibles por 4?.
- ¿Cuantos son divisibles por 3, pero no son divisibles por 4?
- ¿Cuantos son divisibles por 3 y por 4?

Universidad del Valle

Ejercicios

Ejercicios

¿Cuantos son divisibles por 7?
Se realiza esta operación $\lfloor \frac{900}{7} \rfloor = 128$. Observe que hay 900 números entre 100 y 999.

Ejercicios

¿Cuantos son impares?
Son aquellos que no son divisibles por 2 entonces, primero calculamos los divisibles por 2, es decir $\lfloor \frac{900}{2} \rfloor = 450$. Y luego restamos esto al total de números: $900 - 450 = 450$.

Ejercicios

Ejercicios

¿Cuantos tienen los tres dígitos iguales?
En este caso se realiza de la siguiente manera: Tenemos tres dígitos, si incluyes un dígito los otros deben ser iguales, entonces al tener 9 posibles dígitos debido a que el 0 no es una posible solución obtenemos $9 * 1 * 1 = 9$.

Ejercicios

¿Cuantos no son divisibles por 4?
Son aquellos que no son divisibles por 4 entonces calculamos los divisibles por 4 $\lfloor \frac{900}{4} \rfloor = 225$. Entonces: $900 - 225 = 675$.

Universidad del Valle

Ejercicios

¿Cuantos son divisibles por 3 o 4?
Se parte en dos tareas, lo que se realiza es calcular los divisibles por 3 y 4, luego sumar los que son divisibles por ambos y luego restar los que son divisibles por ambos al tiempo. Divisibles por 3 $\lfloor \frac{900}{3} \rfloor = 300$, divisibles por 4 $\lfloor \frac{900}{4} \rfloor = 225$ y por ambos $\lfloor \frac{900}{12} \rfloor = 75$.
Entonces finalmente se tiene $300 + 225 - 75 = 450$.

Ejercicios

Ejercicios

¿Cuantos bien no son divisibles por 3 o bien no son divisibles por 4?.

En este caso calculamos los que no son divisibles por 3, luego lo que no son divisibles por 4 y luego los que no son divisibles por ellos. Como estamos contando dos veces los que no son divisibles por 3 y 4 es necesario restar de la cuenta a los que no son por ambos.

- No divisibles por 3: $900 - 300 = 600$
- No divisibles por 4: $900 - 225 = 675$
- No divisibles por 12: $900 - 75 = 825$. Se toma el mínimo común múltiplo entre 3 y 4 que es 12.
- Finalmente $600 + 675 - 825 = 450$

Ejercicios

Ejercicios

¿Cuantos son divisibles por 3, pero no son divisibles por 4?
Se calcula los que son divisibles por 3, luego los que son divisibles por 3 y 4, los valores son respectivamente $300 y 75$ la formula a calcular es $300 - 75 = 225$ ya que son excluyentes.

Ejercicios

¿Cuantos son divisibles por 3 y por 4?.
En este caso se calcula los divisibles por 3 y 4 es decir con 12 por lo que se tiene un total de 75 número de acuerdo a los datos anteriores.

Ejercicios

Ejercicios

De cuantas maneras puede un fotógrafo de boda ordenar un grupo de 6 personas sí:

- ¿Los novios deben salir juntos en la foto?
- ¿Los novios no pueden salir juntos en la foto?
- ¿La novia sólo puede salir a la izquierda del novio?

Para entender el problema, intenta ubicar las personas sin restricciones

Universidad del Valle

Ejercicios

Ejercicios

Para ubicar las personas tomamos las posiciones que puede tomar cada persona, la primera que ingresa puede ubicarse de 6 formas, la que sigue en 5 y la siguiente en 4 y así sucesivamente, por lo que las formas posibles para ubicar la foto es: $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$.

Ejercicios

Ejercicios

¿Los novios deben salir juntos en la foto? En este caso se considera el novio y la novia como un sola persona por lo que existen $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$ formas de ordenar las personas en la foto, sin embargo es necesario considera el orden en que están los novios, entonces multiplicamos por 2 este valor obteniendo 240 formas de ordenar las personas en la foto.

Ejercicios

Ejercicios

¿Los novios no pueden salir juntos en la foto? En este caso restamos los casos donde los novios salen juntos, con el total posibles formas de acomodar las personas en la foto:
$720 - 240 = 480$.

Universidad del Valle

Ejercicios

Ejercicios

¿La novia sólo puede salir a la izquierda del novio? Si se analiza detenidamente en todas las formas posibles la novia esta a la derecha o izquierda del novio, si solo se toma la izquierda hablamos de la mitad del total de posibilidades entonces existen $720/2 = 360$ formas de que la novia salga a la izquierda del novio.

Referencias

Gracias

Próximo tema:
Estrategias avanzadas: Combinatorias y permutaciones.