Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

* Inducción matemática
* Ejemplos

Técnicas de demostración

Inducción matemática

- Muchos teoremas establecen que $P(n)$ es verdad para todos los enteros positivos n, donde $P(n)$ es una expresión matemática

Técnicas de demostración

Inducción matemática

Una prueba por inducción matemática consiste de dos pasos

Trivial!

- **Paso base**. Se muestra que la proposición **P(1)** se cumple
- **Paso inductivo**. Se supone que P(n) es cierto y se intenta demostrar que P(n+1) también. **P(n)→P(n+1)**

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\mathbf{1+2+3+\ldots+n}$ es $\mathbf{n \cdot (n+1)/2}$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\boxed{\mathbf{1}}\mathbf{+2+3+\ldots+n}$ es $\mathbf{n\cdot(n+1)/2}$

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1\cdot2/2 = 1$$

*

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\mathbf{1+2+3+\ldots+n}$ es $\mathbf{n\cdot(n+1)/2}$

- **Paso base**. P(1)

  $1 = 1\cdot 2/2 = 1$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

  $1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \Rightarrow$?

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

  $1 = 1 \cdot 2/2 = 1$

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

  $1+2+3+\ldots+n = n \cdot (n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad 1+2+3+\ldots+n+(n+1)$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

  $1 = 1 \cdot 2/2 = 1$

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

  $1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \Rightarrow \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

$$= n\cdot(n+1)/2 + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)/2$$

$$= P(n+1)$$

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$P(n)$

Rremplazo
$n = n+1$

$$\frac{(n+1)\ (n+2)}{2}$$

$P(n+1)$

$$\overbrace{\boxed{1+2+3+4+\dots+n}}^{P(n)} + n+1$$

$$\frac{n\,\boxed{(n+1)}}{2} + \boxed{n+1}$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \quad \frac{2}{2}$$

$$(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $\boxed{2^0}+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$

$6 \times 6^a = 6^{a+1}$ $3 \times 3^2 = 3^{2+1}$

3^3

Paso base $n=a$

$1 = 2^{0+1} - 1 \rightarrow 1 = 2 - 1$ $1 = 1$ ✓

Paso inductivo

$n \rightarrow n+1$

$\boxed{2^{n+2} - 1}$

$\boxed{2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n} + 2^{n+1}$

$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$

$2(2^{n+1}) - 1$

$\boxed{2^{n+2} - 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base**. P(0)

  $2^0 = 1$ y $2^{0+1}-1 = 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Longrightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

  $2^0 = 1$ y $2^{0+1}-1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

  $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \Rightarrow 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+ 2^{n+1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+ 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1}-1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1}-1$$

$$= 2^{(n+1)+1}-1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

1 2 3 n

Paso base $n=1$

$1=1^2$

$1=1$

Paso inductivo $P(n)\longrightarrow P(n+1)$

$1+3+5+\ldots+(2n-1)+2(n+1)-1$

$\boxed{1+3+5+\ldots+2n-1}+(2n+1)$

n^2+2n+1

$(n+1)^2$

$(n+1)^2$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \, . \, . \, . + (2n-1) = n^2$

- **Paso base.** P(1)

  $1 = 1^2$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 + 3 + \dots + (2n-1)} + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n + 1)^2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

$$P(1) = 1^2 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$$

$$P(n) \longrightarrow P(n+1)$$

$$\boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2} + (n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{(n+1)}{6}\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)$$

$$\frac{(n+1)}{6}\left(2n^2+n+6n+6\right)$$

$$\frac{(n+1)}{6}\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$\begin{array}{l|l} 2n^2 + 7n + 6 & n+2 \\ \hline -2n^2 - 4n & 2n+3 \\ \hline \quad 3n + 6 & \\ \quad -3n - 6 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{(n+1)}{6}\Big((n+2)(2n+3)\Big)}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

$$= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2$$

$$= (n+1)(2n^2+7n+6)/6$$

$$= (n+1)(2n+3)(n+2)/6$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

$P(1) = 1^3 = 1$

$$\left[\frac{1(2)}{2}\right]^2 = 1^2$$

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\boxed{1^3+2^3+\ldots+n^3} + (n+1)^3$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4}{4}(n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4}{4}(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right)$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$9^2 6^2 = (9\times 6)^2$$

$$5^2 \times 8^2 = 40^2 \qquad 2^2 8^2 = 16^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

$$= n^2(n+1)^2/4 +(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2[n^2/4 +(n+1)]$$

$$= (n+1)^2(n+2)^2/4 = [(n+1)(n+2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

$P(1)$ $n = 1$ $1.2 = 2$ $\frac{1(2)\cancel{(3)}}{\cancel{3}} = 2$ ✓

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$\boxed{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$

$\boxed{1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1)} + (n+1)(n+2)$

$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3}$

$\boxed{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

  $$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

  $1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \;\Rightarrow\; 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

  $1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow \underline{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)} + (n+1) \cdot (n+2)$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3$ $\Rightarrow$ $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2)$

$= n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)\cdot(n+2)$

$= (n+1)(n+2)[\ n/3 + 1]$

$= (n+1)(n+2)(n+3)/3$

$=P(n+1)$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

$P(1)$ $\quad n=1 \quad 1 \cdot 1! = 1$

$(n+1)! - 1 \quad 2! - 1 = 2 - 1 = 2$

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$5! \times 6 = 6!$

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$\boxed{(n+2)! - 1}$

$\boxed{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!} + (n+1) \times (n+1)!$

$(n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$

$(n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$

$(n+1)!\,(n+2) - 1$

$\boxed{(n+2)! - 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!-1$

- **Paso base.** P(1)

  $1\cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!-1 \Rightarrow 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)!$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

  $1\cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow \underline{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)![1 + (n+1)] - 1$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n pares es n·(n+1), es decir, 2+4+6+ . . . + 2n = n·(n+1)

$P(1) = 2$ $\quad 1(2) = 2$ ✓

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$\boxed{2+4+6+\ldots+2n} + 2(n+1)$

$(n+1)(n+2)$

$n(n+1) + 2(n+1)$

$\boxed{(n+1)(n+2)}$