Matemáticas Discretas

Carlos Andres Delgado Saavedra

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Lógica preposicional

* Formas normales
* Consecuencia Lógica
* Inferencia lógica

Formas normales

Formas normales

Una formula F se dice que esta en la forma normal conjuntiva (FNC) si y solo si

$$F = f_1 \wedge f_2 \wedge f3 \wedge \cdots \wedge f_n$$

Una formula F se dice que esta en la forma normal disyuntiva (FND) si y solo si

$$F = f_1 \vee f_2 \vee f3 \vee \cdots \vee f_n$$

Formas normales

Ejemplo 1

Transforme a forma normal disyuntiva (FND)

$$(P \vee \neg Q) \rightarrow R$$

Aplicando las equivalencias:

$$1.\ \neg(P \vee \neg Q) \vee R$$

$$2.\ (\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee R$$

$$3.\ \underbrace{(\neg P \wedge Q)}_{F_1} \vee \underbrace{R}_{F_2}$$ ← Disyunción de literales

Ejemplo 2

Transforme a forma normal conjuntiva (FNC)

$$(P \lor (Q \to R)) \to S$$

FND $F_1 \lor F_2 \lor F_3 \lor \ldots F_n$

FNC $= F_1 \land F_2 \land F_3 \land \ldots F_n$

Aplicando las equivalencias:

1. $\neg(P \lor (Q \to R)) \lor S$
2. $\neg(P \lor (\neg Q \lor R)) \lor S$
3. $(\neg P \land \neg(\neg Q \lor R)) \lor S$
4. $(\neg P \land Q \land \neg R) \lor S$ FND
5. $\boxed{(\neg P \lor S) \land (Q \lor S) \land (\neg R \lor S)}$ ← Conjunción de literales

literales → FNC

Formas normales

Consecuencia lógica

Dadas las formulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ y la formula G la cual se dice que es consecuencia lógica de $F_1, F_2, \ldots, F_n$ si y sólo para cualquier interpretación de $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$ es verdadera y G también lo es. De esta manera $F_1, F_2, \ldots, F_n$ son llamados axiomas o postulados de G

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \ldots \wedge F_n \to G \equiv T$$

V

Juan tiene 20 o 22 años. Si Juan tiene 22 años, entonces nació antes que Pedro. Juan no nació antes que Pedro. Por lo tanto, Juan tiene 20 años

a: Juan tiene 20 años
b: Juan tiene 22 años
c: Juan nacio antes que pedro.

1) $a \vee b$

2) $b \to c$

3) $\neg c$

---

a

$\neg(a \wedge b \wedge c \ \wedge d)$

$\neg a \vee \neg b \vee \neg c \ \vee \neg$

1) $(a \vee b) \wedge (b \to c) \wedge \neg c \to a$

2) $\neg((a \vee b) \wedge (b \to c) \wedge \neg c) \vee a$

3) $\neg(a \vee b) \vee \neg(\neg b \vee c) \vee c \vee a$

4) $\boxed{(\neg a \wedge \neg b)} \vee (b \wedge \neg c) \vee c \vee a$

5) $((\overset{T}{\cancel{\neg a \vee a}}) \wedge (\neg b \vee a)) \vee ((b \vee c) \wedge (\overset{\neg T}{c \vee \neg c}))$

6) $\boxed{\neg b} \vee a \vee \boxed{b} \vee c$

7) $T \vee a \vee c \equiv T$

Formas normales

Ejemplo

Suponga que el stock de precios baja si la prima de interés sube. Suponga también que la mayoría de la gente es infeliz cuando el stock de precios baja. Asuma que la prima de interés sube. Muestre que usted puede concluir
que la mayoría de gente es infeliz.

1. P = La primera de interés sube
2. S = El Stock de precios baja
3. U = La mayoría de gente es infeliz

Consecuencia lógica

Ejemplo

1. $P \to S$ Si la primera de interés sube, el stock de precios baja
2. $S \to U$ Si el stock de precios baja, la mayoría de gente es infeliz
3. P La prima de interés sube

4. U La mayoría de gente es infeliz

Para hacer esta demostración, el argumento lógico es de la siguiente forma

$$\boxed{(P \to S) \wedge (S \to U) \wedge P} \to \boxed{U}$$

$$(p \to s) \wedge (s \to u) \wedge p \to u$$

1) $$\neg((\neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee u) \wedge p) \vee u$$

2) $$(\neg(\neg p \vee s) \vee \neg(\neg s \vee u) \vee \neg p) \vee u$$

3) $$\boxed{(p \wedge \neg s)} \vee (s \wedge \neg u) \vee \neg p \vee u$$

4) $$(\overset{T}{\cancel{(p \vee \neg p)}} \wedge (\neg s \vee \neg p)) \vee ((s \vee u) \wedge \boxed{\overset{T}{(u \vee \neg u)}})$$

5) $$\neg s \vee \neg p \vee s \vee u$$

6) $$T \vee \neg p \vee u \equiv T$$

Consecuencia lógica

Ejemplo

Para demostrar debemos llevar a la forma normal conjuntiva el Sistema (FNC)

$$(P \to S) \wedge (S \to U) \wedge P \to U$$

Para demostrar que esto es verdadero, debemos analizar

$$(P \to S) \wedge (S \to U) \wedge P$$

Consecuencia lógica

Ejemplo

1. $(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P$
2. $(\neg P \vee S) \wedge (\neg S \vee U) \wedge P$
3. $((\neg P \wedge P) \vee (S \wedge P)) \wedge (\neg S \vee U)$
4. $(F \vee (S \wedge P)) \wedge (\neg S \vee U)$
5. $(\mathrm{S} \wedge P) \wedge (\neg S \vee U)$
6. $(\mathrm{S} \wedge P) \wedge (\neg S \vee U)$
7. $(\mathrm{S} \wedge P \wedge \neg S) \vee (S \wedge P \wedge U)$
8. $F \vee (S \wedge P \wedge U)$
9. $(S \wedge P \wedge U)$

Esto quiere decir que P, S y U deben ser verdaderos. Y U que es la consecuencia U es verdadera.

Consecuencia lógica

Teoremas

Concepto de consecuencia lógica

Dadas las formulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ y la formula G es consecuencia lógica sii $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \rightarrow G$ es VALIDA

Concepto de inconsistencia lógica

Dadas las formulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$ y la formula G es consecuencia lógica sii $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ es INCONSISTENTE O INSATISFACTIBLE (ES FALSA)

Consecuencia lógica

Ejemplo Demostrar $(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P \rightarrow U$

1. $(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow U) \wedge P \rightarrow U$
2. $\neg\big((\neg P \vee S) \wedge (\neg S \vee U) \wedge P\big) \vee U$
3. $\neg\big(((\neg P \wedge P) \vee (S \wedge P)) \wedge (\neg S \vee U)\big) \vee U$
4. $\neg\big((F \vee (S \wedge P)) \wedge (\neg S \vee U)\big) \vee U$
5. $\neg\big(S \wedge P \wedge (\neg S \vee U)\big) \vee U$
6. $\neg\big(P \wedge ((\neg S \wedge S) \vee (U \wedge S))\big) \vee U$
7. $\neg\big(P \wedge (F \vee (U \wedge S))\big) \vee U$
8. $\neg(P \wedge U \wedge S) \vee U$
9. $(\neg P \vee \neg U \vee \neg S) \vee U$
10. $\neg U \vee U \vee \neg P \vee \neg S$
11. $V \vee \neg P \vee \neg S$
12. $\boxed{V}$

1. $P \to S$ Si la primera de interés sube, el stock de precios baja
2. $S \to U$ Si el stock de precios baja, la mayoría de gente es infeliz
3. P La prima de interés sube

4. U La mayoría de gente es infeliz

Incosistencia lógica

$(p \to s) \wedge (s \to u) \wedge p \wedge \neg u$

1) $(\neg p \vee s) \wedge (\neg s \vee u) \wedge p \wedge \neg u$

2) $((\cancel{\neg p \wedge p}) \vee \boxed{(s \wedge \neg p)}) \wedge ((\neg s \wedge \neg u) \vee (\cancel{u \wedge \neg u}))$ F F

3) $s \wedge \neg p \wedge \neg s \wedge \neg u$

4) $F \wedge \neg p \wedge \neg u \equiv F$

Consecuencia lógica

Ejemplo Demostrar por INCONSISTENCIA que F2 es Consecuencia lógica de F1, donde

- Tom no es buen estudiante o es listo y su padre lo ayude
- Si Tom es buen estudiante, entonces su padre lo ayuda

Se modela de la siguiente forma

- P: Tom es buen estudiante
- Q: Tom es listo
- R: EL padre de Tom lo ayuda

Consecuencia lógica

Ejemplo Las formulas lógicas son:

$F1: \neg P \vee (Q \wedge R)$

$F2: P \rightarrow R$

Entonces

1. $F1 \wedge \neg F1 =: (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge \neg(P \rightarrow R)$
2. $(\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge \neg(\neg P \vee R)$
3. $(\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \wedge \neg R)$
4. $(\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \wedge \neg R)$
5. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \wedge \neg R)$
6. $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge P \wedge \neg R$
7. $(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge P) \vee (P \wedge R)) \wedge \neg R$
8. $(\neg P \vee Q) \wedge (F \vee (P \wedge R)) \wedge \neg R$
9. $(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge R \wedge \neg R$
10. $(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge F$ Al ser falso, Podemos indicar que F2 es consecuencia lógica de F1

Consecuencia lógica

Ejercicio Si Superman fuera capaz y quisiera prevenir el mal, él lo prevendría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, sería impotente; sí el no quisiera prevenir el mal, sería malévolo. Supermán no previene el mal. Si supermán existe, no es impotente ni malévolo. Entonces, Superman no existe.

Pruebe por consecuencia e inconsistencia lógica.

Consecuencia lógica

Ejercicio Determine si el siguiente argumento es válido: Si el Sr Suárez o la Sra Suárez ganan más de 300.000 al año, la familia Suarez puede pasar las vacaciones en Hawai. Puesto que yo sé que, o el Sr Suárez o su esposa, ganan más de 300.000, concluyo que la familia puede afrontar las vacaciones en Hawai.

Pruebe por consecuencia e inconsistencia lógica.

$$\frac{\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array}}{G}$$

Consecuencia $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots F_n \rightarrow G \equiv T$

Contradicción $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G \equiv F$

Ejercicio Determine si el siguiente argumento es válido: Si el Sr Suárez o la Sra Suárez ganan más de 300.000 al año, la familia Suarez puede pasar las vacaciones en Hawai. Puesto que yo sé que, o el Sr Suárez o su esposa, ganan más de 300.000, concluyo que la familia puede afrontar las vacaciones en Hawai.

1) Determinar variables proposicionales:

p: Sr Suarez gana mas 300 000

q: Sr Suarez "

r: la familia para vacaciones en Hawai

2) Establecer las relaciones lógicas de acuerdo al enunciado

1) $(p \vee q) \rightarrow r$

2) $p \vee q$

$\therefore r$

3) Demostrar

Consecuencia lógica

$$((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \vee q)) \rightarrow r$$

$$\neg(((\neg(p \vee q)) \vee r) \wedge (p \vee q)) \vee r$$

$$\neg(((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (p \vee q)) \vee r$$

$$(\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \vee \neg(p \vee q)) \vee r$$

$$(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

$$((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee r$$

$$((p \vee q \vee r) \wedge \cancel{(\neg r \vee r)}) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$(p \vee q \vee r \vee (\neg p \wedge \neg q))$$

$$((p \vee q \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee \neg q)) \vee r$$

$$((T \vee q) \wedge (p \vee T)) \vee r$$

$$(T \wedge T) \vee r$$

$$T \vee r$$

$$T$$

Contradicción

$$((p \vee q) \rightarrow r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$$

$$(\neg(p \vee q) \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$$

$$((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$$

$x \vee F =$

$$((\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \overset{F}{\cancel{(r \wedge \neg r)}}) \wedge (p \vee q)$$

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge (p \vee q))$$

$$((\neg p \wedge \overset{F}{\cancel{\neg q \wedge p}}) \vee (\neg p \wedge \overset{F}{\cancel{\neg q \wedge q}})) \wedge \neg r$$

$$(F \vee F) \wedge \neg r$$

$$F \wedge \neg r \equiv F$$

Consecuencia lógica

Ejercicio Considere el siguiente argumento: Dado que el congreso se rehusa a dictar nuevas leyes, la huelga no se hará a menos que dure mas de un año y el presidente se resigne a firmar. El congreso se rehusa a dictar las leyes y la huelga no durara mas de un año. Por lo tanto la huelga no se hará. Demuestre que el argumento es válido.

Pruebe por consecuencia e inconsistencia lógica.

p: congreso rehusa dictar nuevas leyes
q: la huelga se hace
r: La huela dura más de un año
s:El presidente se resigne a firma

1) $p \to (\neg(r \wedge s) \to \neg q)$

2) $p \wedge \neg r$

$\therefore \neg q$

$$(p \to (\neg(r \wedge s) \to \neg q) \wedge p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q$$

$$\neg((p \to (\neg(r \wedge s) \to \neg q)) \wedge p \wedge \neg r) \vee \neg q$$

$$\neg((\neg p \vee (\neg(r \wedge s) \to \neg q)) \wedge p \wedge \neg r) \vee \neg q$$

Eliminar Implicaciones

$$\neg(\underbrace{(\neg p \vee ((r \wedge s) \vee \neg q))}\wedge p \wedge \neg r) \vee \neg q$$

$$\neg(\neg p \vee ((r \wedge s) \vee \neg q)) \vee \neg p \vee r) \vee \neg q$$

$$(p \wedge \neg((r \wedge s) \vee \neg q)) \vee \neg p \vee r) \vee \neg q$$

$$(p \wedge (\neg(r \wedge s) \wedge q)) \vee \neg p \vee r) \vee \neg q$$

$$(p \wedge ((\neg r \vee \neg s) \wedge q)) \vee \neg p \vee r) \vee \neg q$$

Empujar negaciones

(Morgan)

$$((p \wedge q) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \vee \neg p \vee r \vee \neg q$$

$$\boxed{(p \wedge q \wedge \neg r)} \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg p \vee \boxed{(r \vee \neg q)} \quad \underline{FND}$$

Propiedades

La idea es irlo llevando a forma normal conjuntiva o forma normal disyuntiva.

$$((p \vee r \vee \neg q) \wedge \cancel{(q \vee r \vee \neg q)}^{T} \wedge \cancel{(\neg r \vee r \vee \neg q)}^{T}) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg p$$

$$(p \vee r \vee \neg q) \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg p$$

$$\downarrow$$

$$p \vee r \vee \neg q \vee (p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg p$$

$$T \vee r \vee \neg q \vee (p \wedge q \wedge \neg s)$$

$$T$$

Consecuencia lógica

Ejercicio Él o no está informado o él no es honesto.
Por lo tanto, No es verdadero que el esté informado y sea honesto.

Pruebe por consecuencia e inconsistencia lógica.

1) ¿Cuales son las variables proposicionales?

p: El está informado
q: El es honesto

2) Modelo (ecuaciones lógicas)

1) $\neg p \vee \neg q$

$\therefore \neg(p \wedge q)$

Consecuencia lógica.

$(\neg p \vee \neg q) \longrightarrow \neg(p \wedge q) \longrightarrow ((p \vee \neg p) \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q))$

$\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \wedge q)$

$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q) \equiv$

$(T \vee \neg q) \wedge (T \vee \neg p)$

$T \wedge T = T$

Contradicción lógica

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$$

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$$

$$(\overset{F}{\neg p \wedge p} \wedge q) \vee (\neg q \wedge \overset{F}{p} \wedge q)$$

$$F \vee F$$

$$F$$

Consecuencia lógica

Ejercicio Fue X o Y quién cometió el crimen. X estaba fuera del pueblo cuando el crimen fue cometido.
Si X estaba fuera del pueblo, no pudo haber estado en la escena del crimen. Por consecuencia, Si X no estaba en la escena del crimen, no pudo haber cometido el crimen

Pruebe por consecuencia e inconsistencia lógica.

Inferencia lógica

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. Si es viernes entonces hay audición
2. Hoy es viernes

Inferencia lógica

Reglas de inferencia

• A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. Si es viernes entonces hay audición
2. Hoy es viernes

$\therefore$ Hay audición

Inferencia lógica

Reglas de inferencia

• A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. Si es viernes entonces hay audición
2. Hoy es viernes
3. Hay audición, **modus ponens**(1,2)

Modus ponens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$((p \to q) \land p) \to q$

$\neg((\neg p \lor q) \land p) \lor q$

$(\neg(\neg p \lor q) \lor \neg p \lor q$

$((p \land \neg q) \lor (\neg p \lor q)$

$\to (p \lor \neg p \lor q) \land (\neg q \lor \neg p \lor q)$

$(T \lor q) \land (T \lor \neg p)$

$T \land T$

T

Inferencia lógica

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

Inferencia lógica

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

$\therefore$ El carro es negro

Inferencia lógica

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo
3. El carro es negro, **silogismo disyuntivo**(1,2)

Silogismo disyuntivo

$$p \vee q$$
$$\neg p$$
$$\therefore q$$

$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$

$(\cancel{p \wedge \neg p}^{F} \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \cancel{q \wedge \neg q}^{F})$

$(F \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge F)$

$F \vee F$

F ✓

Regla de inferencia	Nombre
$\begin{array}{l} \quad p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	Simplificación
$\begin{array}{l} \quad p \vee q \\ \quad \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Silogismo disyuntivo
$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	Modus tollens
$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Modus ponens
$\begin{array}{l} \quad p \rightarrow q \\ \quad q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	Silogismo hipotético

Regla de inferencia	Nombre
p q $\therefore p \wedge q$	Conjunción
$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$	Resolución
p $\therefore p \vee q$	Adición

No esta usando p

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee q \vee r$$

$\boxed{\text{2x morgan}}$

$$((\neg p \vee q) \wedge \overset{T}{(\neg q \vee q)}) \vee ((p \vee r) \wedge \overset{T}{(r \vee \neg r)}) \equiv \neg p \vee q \vee p \vee r \equiv T \vee q \vee r \equiv T$$

Inferencia lógica

Aplicar las siguientes reglas:

- **Simplificación** sobre
  1. $\neg q \wedge \neg t$

  $\neg q$

  $\neg t$
- **Silogismo disyuntivo** sobre
  1. $t \vee \neg p$
  2. p

  t
- **Modus tollens** sobre
  1. $\neg q \rightarrow \neg t$
  2. t

  q

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow p$
3. $\neg r \rightarrow s$
4. $s \rightarrow t$

5) $\neg p$ Simplificacion (1)
6) $\neg r$ Modus Tollens (2, 5)
7) s Modus Ponens (3, 6)
8) t Modus ponens (4, 7)

- Demuestre que **t** es cierto

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow p$
3. $\neg r \rightarrow s$
4. $s \rightarrow t$
5. $\neg p$, simplificación(1)
6. $\neg r$, modus tollens(2,5)
7. s, modus ponens(3,6)
8. t, modus ponens(4,7)

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $s \to q$
2. $\neg p \to r$
3. $r \to s$

4) $\neg p \to s$ Silogismo Hipotetico (2, 3)

5) $\neg p \to q$ Silogismo Hipotetico (1, 4)

- Demuestre que $\neg \mathbf{p} \to \mathbf{q}$ es cierto

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $s \rightarrow q$
2. $\neg p \rightarrow r$
3. $r \rightarrow s$
4. $\neg p \rightarrow s$, silogismo hipotético(2,3)
5. $\neg p \rightarrow q$, silogismo hipotético(4,1)

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \rightarrow \neg q$

2. $\neg r$

3. $\neg p \rightarrow s$

4. $\neg q \rightarrow r$

- Demuestre que **s** es cierto

Inference lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \rightarrow \neg q$
2. $\neg r$
3. $\neg p \rightarrow s$
4. $\neg q \rightarrow r$
5. q, modus tollens(2,4)
6. $\neg p$, modus tollens(1,5)
7. s, modus ponens(3,6)

Inference lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \vee \neg q$
2. $\neg p \wedge r$
3. $\neg q \rightarrow \neg s$
4. $s \vee t$

5) $\neg p$ Simp (2)
6) $\neg q$ SD (1, 5)
7) $\neg s$ Modus ponens (3, 6)
8) t SD (4, 7)

- Demuestre que **t** es cierto

1) MP

$$\frac{p \to q \quad p}{q}$$

2) MT

$$\frac{p \to q \quad \neg q}{\therefore \neg p}$$

2) Re

$$\frac{p \vee q \quad \neg q \vee r}{\therefore p \vee r}$$

3)

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p \quad \therefore q}$$

4)

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$$

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \lor \neg q$
2. $\neg p \land r$
3. $\neg q \rightarrow \neg s$
4. $s \lor t$
5. $\neg p$, simplificación(2)
6. $\neg q$, silogismo disyuntivo(1,5)
7. $\neg s$, modus ponens(3,6)
8. t, silogismo disyuntivo(4,7)

Inferencia lógica

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $u \vee w$
2. $p \wedge \neg q$
3. $t \rightarrow q$
4. $\neg w \vee s$
5. $u \rightarrow t$

6) Res(1,4) $u \vee s$

7) $\neg q$ Simp(2)

8) $\neg t$ Modus Tollens (3, 7)

9) $\neg u$ Modus Tollens (5, 8)

10) s Res (9, 6)

Sim $\frac{p \wedge q}{\therefore p \quad \therefore q}$

Modus ponens $\frac{p \rightarrow q \quad p}{\therefore q}$

Silogismo dis. $\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$

Modus Tollens $\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\therefore \neg p}$

Res $p \vee q$, $\neg q \vee r$ | $\therefore p \vee r$

- Demuestre que **s** es cierto

Inferencia lógica

1. $u \lor w$

2. $p \land \neg q$

3. $t \rightarrow q$

4. $\neg w \lor s$

5. $u \rightarrow t$

6. $\neg q$, simplificación(2)

7. $\neg t$, modus tollens(3,6)

8. $\neg u$, modus tollens(5,7)

9. w, silogismo disyuntivo(1,8)

10. s, silogismo disyuntivo(4,9)

Inferencia lógica

Ejercicio Si Superman fuera capaz y quisiera prevenir el mal, él lo prevendría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, sería impotente; sí el no quisiera prevenir el mal, sería malévolo. Supermán no previene el mal. Si supermán existe, no es impotente ni malévolo. Entonces, Superman no existe.

a: Superman es capaz de prevenir el mal
b: Superman quiere prevenir el mal
c: Superman previene el mal
d:: Superman es impotente
e: Superman es malevolo
f: Superman existe

Pruebe usando inferencia lógica

1) $(a \wedge b) \rightarrow c$

2) $\neg a \rightarrow d$

3) $\neg b \rightarrow e$

4) $\neg c$

5) $f \rightarrow \neg(d \wedge e)$

6) $\neg(a \wedge b)$

7) $\neg a \vee \neg b$

8) $a \vee d$

9) $b \vee e$

10) $\neg f \vee \neg d \vee \neg e$

11) $\neg a \vee e$ sb (7, 9)

12) $e \vee d$ sb (8, 11)

13) $\boxed{\neg f}$

Inferencia lógica

Ejercicio Determine si el siguiente argumento es válido: Si el Sr Suárez o la Sra Suárez ganan más de 300.000 al año, la familia Suarez puede pasar las vacaciones en Hawai. Puesto que yo sé que, o el Sr Suárez o su esposa, ganan más de 300.000, concluyo que la familia puede afrontar las vacaciones en Hawai.

Pruebe usando inferencia lógica

p : Sr o Sra ganan 300k

q : Van vacaciones

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Inferencia lógica

Ejercicio Considere el siguiente argumento: Dado que el congreso se rehúsa a dictar nuevas leyes, la huelga no se hará a menos que dure mas de un año y el presidente se resigne a firmar. El congreso se rehusa a dictar las leyes y la huelga no durara mas de un año. Por lo tanto la huelga no se hará. Demuestre que el argumento es válido.

Pruebe usando inferencia lógica

p: congreso rehusa dictar nuevas leyes
q: la huelga se hace
r: La huela dura más de un año
s:El presidente se resigne a firma

1) $p \to (\neg(r \wedge s) \to \neg q)$

2) $p \wedge \neg r$

$\therefore \neg q$

Vamos a hacerlo por inferencia

1) $p \to (\neg(r \wedge s) \to \neg q)$

2) $\boxed{p \wedge \neg r}$

$\therefore \neg q$

3) $\neg p \vee (\neg(r \wedge s) \to \neg q)$ Regla $p \to q$ (1)

4) p Simp(2)

5) $\neg(r \wedge s) \to \neg q$ Silogismo dis(3,4)

Regla $p \to q$

6) $(r \wedge s) \vee \neg q$

7) $(r \vee \neg q) \wedge (s \vee \neg q)$ Distributiva

8) $r \vee \neg q$ Simplificación (7)

10) $\neg r$ Simp(2)

11) $\boxed{\neg q \quad \text{Silogismo disyuntivo (10)}}$

Inferencia lógica

Ejercicio Él o no está informado o él no es honesto.
Por lo tanto, No es verdadero que el esté informado y sea honesto.

Pruebe usando inferencia lógica

p: El está informado
q: El es honesto

1) $\neg p \vee \neg q$

$\therefore \neg(p \wedge q)$

Morgan

$\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$ ✓

Inferencia lógica

Ejercicio Fue X o Y quién cometió el crimen. X estaba fuera del pueblo cuando el crimen fue cometido. Si X estaba fuera del pueblo, no pudo haber estado en la escena del crimen. Si X no estaba en la escena del crimen, no pudo haber cometido el crimen. Demuestre que X no cometió el crimen.

Pruebe usando inferencia lógica

p= X cometio el crime
q = y Cometio el crimen
r = X estaba fuera del pueblo
s = X estaba del escena del crimen

1) $p \vee q$
2) r
3) $r \rightarrow \neg s$
4) $\neg s \rightarrow \neg p$

$\boxed{\therefore \neg p}$

1) $p \vee q$

2) r

3) $r \rightarrow \neg s$

4) $\neg s \rightarrow \neg p$

$\boxed{\therefore \neg p}$

5) $r \rightarrow \neg p$ Silogismo hipotético (3, 4)

6) $\neg p$ modus ponens (2, 5)

Caso que ellos quieran la paz de verdad, y que nosotros seamos superiores en armamento, obstaculizaremos la conferencia de desarme. Habrá guerra a no ser que dejemos de obstaculizarla. Y la habrá sólo si ellos no desean verdaderamente la paz. Habrá guerra.
Concluya que que ellos no desean la paz de verdad. Demostrar
por consecuencia lógica, contradicción y por inferencia.
Usar logic tools para probar las dos primeras.

p: Ellos quieren la paz de verdad
q: Nosotros somos superiores en armamento
r: Obstaculizamos la conferencia de paz
s: Habrá guerra

1) $(p \wedge q) \rightarrow r$

2) $r \rightarrow s$

3) $\neg p \leftrightarrow s$ $\qquad \neg p \rightarrow s \wedge s \rightarrow \neg p$

4) $\boxed{s}$

$\therefore \neg p$

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

consecuencia

$$((p\wedge q\to r)\wedge(r\to s)\wedge(\neg p\to s)\wedge(s\to\neg p)\wedge s)\to\neg p$$

$$\neg((p\wedge q\to r)\wedge(r\to s)\wedge(\neg p\to s)\wedge(s\to\neg p)\wedge s)\vee\neg p$$

$$\neg(\neg(p\wedge q)\vee r)\wedge(\neg r\vee s)\wedge(p\vee s)\wedge(\neg s\vee\neg p)\wedge s)\vee\neg p$$

$$\neg(\neg(p\wedge q)\vee r)\vee\neg(\neg r\vee s)\vee\neg(p\vee s)\vee\neg(\neg s\vee\neg p)\vee\neg s\vee\neg p$$

$$(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg s)\vee(\neg p\wedge\neg s)\vee(s\wedge p)\vee(\neg s\vee\neg p)$$

$$(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg s)\vee(\neg p\wedge\neg s)\vee((\boxed{s\vee\neg s}\vee\neg p)\wedge(p\vee\neg s\vee\neg p))$$

$$\underbrace{T\vee\neg p}_{T}\quad\wedge\quad\underbrace{T\vee\neg s}_{T}$$

$$\underbrace{\wedge}_{T}$$

$$(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg s)\vee(\neg p\wedge\neg s)\vee T$$

$$\equiv T$$

FND $\quad F_1\vee F_2\vee F_3$

FNC $\quad F_1\wedge F_2\wedge F_3$

Contradicción

$$((p \land q \to r) \land (r \to s) \land (\neg p \to s) \land (s \to \neg p) \land s) \land p$$

$$((\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg r \lor s) \land (p \lor s) \land (\neg s \lor \neg p) \land (s \land p)$$

$$((\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg r \lor s) \land (p \lor s) \land ((\neg s \land s \land p) \lor (\neg p \land s \land p))$$

$$F \land p \qquad F \land s$$

$$F \lor F$$

$$F$$

$$(\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg r \lor s) \land (p \lor s) \land F \equiv F$$

1) $(p \wedge q) \rightarrow r$

2) $r \rightarrow S$

3a) $\neg p \rightarrow s$

3b) $s \rightarrow \neg p$

4) S

Demostrar $\neg p$

5) $\neg p$ MP(3b, 4)

Créditos

Algunas de las diapositivas fueron creadas por el profesor.

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co