



Primer examen opcional: Conteo y combinatoria.
Matemáticas discretas II
Duración 2 horas

Carlos Andres Delgado S, Msc *

25 de Marzo de 2019

Importante: Debe mostrar el procedimiento realizado en cada uno de los puntos, no es válido únicamente mostrar la respuesta.

1. [20 puntos] De entre un alfabeto de 26 letras mayúsculas y 26 minúsculas. Cuántas cadenas de diez caracteres existen

- a) Que no contengan vocales si las letras se pueden repetir
- b) Que no contengan vocales si las letras no se pueden repetir
- c) Que comiencen con una vocal si las letras se pueden repetir
- d) Que comiencen con una vocal si las letras no se pueden repetir

2. [20 puntos] De Cuántas maneras puede un fotógrafo de boda ordenar un grupo de 5 hombres y 5 mujeres si:

- No pueden haber dos hombres juntos en la foto.
- Debe iniciar con un hombre y terminar con una mujer y no pueden haber dos mujeres juntas en la foto.

Cada caso es por aparte.

3. [30 puntos] Resuelva la relación de recurrencia $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2) + 2^n + 3n^2$
4. [30 puntos] Resuelva la relación de recurrencia $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + 2n + 4, T(1) = 4$ con el método de sustitución. Compare su solución con el método del maestro.

Ayudas

Conceptos básicos

Ecuación cuadrática de $ax^2 + bx + c$:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Principio de Palomar

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Tenemos N palomas para k nidos.

Combinatoria y permutación

Permutación:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

Combinatoria:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (3)$$

Permutación con objetos indistinguibles:

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!} \quad (4)$$

Combinatoria con repetición:

$$C(n+r-1, r) \quad (5)$$

* carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Forma solución particular

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbb{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \dots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbb{R}$	$A r^n$
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in \mathbb{Z}^+, r \in \mathbb{R}$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \dots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Cuadro 1: Forma de la solución particular dado $f(n)$

Método del maestro

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \text{ es } \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

¡Éxitos!