Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

http://eisc.univalle.edu.co/~oscarbed/MD/

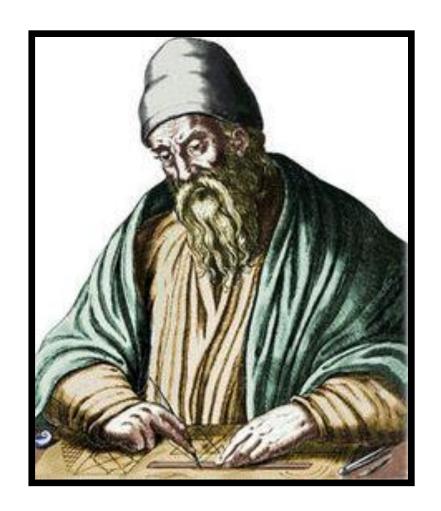
- * Algoritmo de Euclides
- * Combinación lineal
- * Inverso de a mod m

Algoritmo de Euclides

```
public int mcd(int a, int b){
 x=a;
 int x, r;
 while (y = 0)
   r= x \mod y;
    x=y;
    y= r;
return x;
```

Euclides

- Matemático y geómetra griego
- Se le conoce como el padre de la geometría



(300a.c - ?)



Fragmento de Los elementos de Euclides escrito en papiro

$$x = 287$$

 $y = 91$

$$Y = 287 \mod 91$$
 $V = 14$
 $X = 91$
 $Y = 14$

$$Y = 1 \leq m_0 \leq J$$

$$Y = 0$$

$$X = 7$$

$$Y = 0$$

•
$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

•
$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

 $91 = 14 \cdot ? + ?$

•
$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

 $91 = 14 \cdot 6 + 7$

•
$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

 $91 = 14 \cdot 6 + 7$
 $14 = 7 \cdot ? + ?$

•
$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

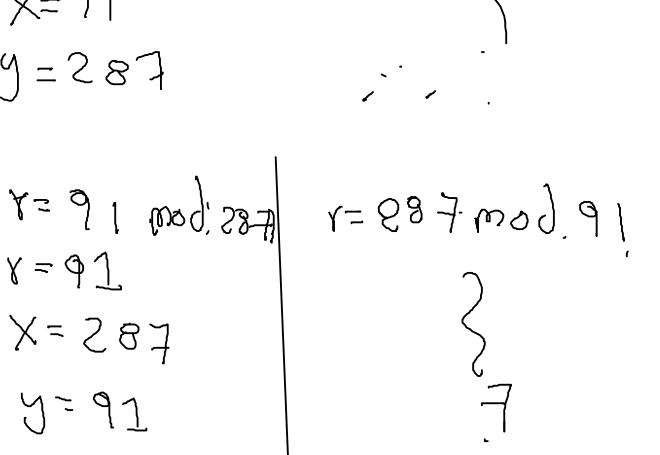
 $91 = 14 \cdot 6 + 7$
 $14 = 7 \cdot 2 + 0$

Aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar mcd(287,91)

•
$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

 $91 = 14 \cdot 6 + 7$
 $14 = 7 \cdot 2 + 0$

Se toma el último residuo diferente de 0, en este caso, mcd(287,91)=7



Aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar mcd(91,287)

$$mcd(91,287)=7$$

• Para aplicar el algoritmo de Euclides se inicia siempre dividiendo el mayor (287) entre el menor (91)

$$287 = 91 \cdot 3 + 14$$

$$91 = 14 \cdot 6 + 7$$

$$14 = 7 \cdot 2 + 0$$

Aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar:

• mcd(342,76) = 39

• mcd(342,76)

$$342 = 76 \cdot 4 + 38$$

$$76 = 38 \cdot 2 + 0$$

• mcd(342,76) = 38

Aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar:

• mcd(48,512)

$$512 = 48 \cdot 10 + 32$$

$$48 = 32 \cdot 1 + 16$$

$$32 = 16 \cdot 2 + 0$$

• mcd(48,512) = 16

Aplicar el algoritmo de Euclides para encontrar:

mcd(252,198)

mcd(252,198)

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

Teorema: si a y b son enteros positivos, entonces existen enteros s y t tales que $mcd(a,b)=a\cdot(s) + b\cdot(t)$

Teorema: si a y b son enteros positivos, entonces existen enteros s y t tales que $mcd(a,b)=a\cdot(s) + b\cdot(t)$

El mcd(a,b) se puede expresar como una combinación lineal de a y b

mcd(252,198) = 18

$$mcd(252,198) = 18 = 252 \cdot x + 198 \cdot y$$

$$mcd(252,198) = 18 = 252\cdot(4) + 198\cdot(-5)$$

$$mcd(252, 198)$$
 $252 = 198(1) + 54$
 $54 = 36(4) + 18$
 $198 = 54(3) + 36$
 $36 = 18(2)$

mcd(252,198)

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$36 = 198 - 54.3$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$18 = 54 - 36.1$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

 \cdot mcd(252,198) = 18

Se despejan los residuos

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

•
$$mcd(252,198) = 18$$

Se reemplazan siempre en la ecuación que tiene al mcd

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$18 = 54 - (198 - 54.3).1$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

• mcd(252,198) = 18

• mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$18 = 54 - 198.1 + 54.3$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

• mcd(252,198) = 18

• mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$54 = 252 - 198.1$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$18 = 54.4 - 198.1$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

• mcd(252,198) = 18

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

• mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

$$18 = (252 - 198.1).4 - 198.1$$

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

$$18 = 252.4 - 198.4 - 198.1$$

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

$$\cdot$$
 mcd(252,198) = 18

$$18 = 252.4 - 198.5$$

mcd(252,198)

$$252 = 198 \cdot 1 + 54$$

$$198 = 54 \cdot 3 + 36$$

$$54 = 36 \cdot 1 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

Exprese el mcd(512,48)=16 como una combinación lineal

$$512 = 48 \cdot 10 + 32$$

$$48 = 32 \cdot 1 + 16$$

$$32 = 16 \cdot 2 + 0$$

$$16 = 48 - 512 + 48(10)$$

$$16 = 48(11) + 512(-2)$$

$$512 = 48 \cdot 10 + 32$$
 $32 = 512 - 48.10$

$$32 = 512 - 48.10$$

$$32 = 16 \cdot 2 + 0$$

Exprese el mcd(512,48)=16 como una combinación lineal

$$512 = 48 \cdot 10 + 32$$

$$48 = 32 \cdot 1 + 16$$

$$32 = 16 \cdot 2 + 0$$

$$16 = 48 - (512 - 48.10).1$$

$$16 = 48 - 512.1 + 48.10$$

$$16 = 48.11 - 512.1$$

$$16 = 48 \cdot (11) + 512 \cdot (-1)$$

$$322 = 51 \cdot 6 + 16$$

$$16 = 322 - 51.6$$

$$51 = 16 \cdot 3 + 3$$
 $3 = 51 - 16 \cdot 3$

$$3 = 51 - 16.3$$

$$16 = 3 \cdot 5 + 1$$

$$1 = 16 - 3.5$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

$$322 = 51 \cdot 6 + 16$$

$$16 = 322 - 51.6$$

$$51 = 16 \cdot 3 + 3$$

$$3 = 51 - 16.3$$

$$16 = 3 \cdot 5 + 1$$

$$1 = 16 - 3.5$$

$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

$$1 = 322 \cdot (16) + 51 \cdot (-101)$$

$$235 = 37 \cdot 6 + 13$$

$$37 = 13 \cdot 2 + 11$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$235 = 37 \cdot 6 + 13$$

$$13 = 235 - 37.6$$

$$37 = 13 \cdot 2 + 11$$

$$11 = 37 - 13.2$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$1 = 11 - 2.5$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$235 = 37 \cdot 6 + 13$$

$$37 = 13 \cdot 2 + 11$$
 $11 = 37 - 13.2$

$$11 = 37 - 13.2$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$1 = 11 - 13.5 + 11.5 = 11.6 - 13.5$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$235 = 37 \cdot 6 + 13$$
 $13 = 235 - 37.6$

$$37 = 13 \cdot 2 + 11$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$13 = 235 - 37.6$$

$$1 = 37.6 - 13.12 - 13.5 = 37.6 - 13.17$$

$$235 = 37 \cdot 6 + 13$$
 $37 = 13 \cdot 2 + 11$
 $13 = 11 \cdot 1 + 2$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$
 $1 = 37.6 - (235 - 37.6).17$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$235 = 37 \cdot 6 + 13$$

$$37 = 13 \cdot 2 + 11$$

$$13 = 11 \cdot 1 + 2$$

$$11 = 2 \cdot 5 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$1 = 37.6 - 235.17 + 37.102$$

$$1 = 37.108 - 235.17$$

$$1 = 37 \cdot (108) + 235 \cdot (-17)$$

Exprese el mcd(426,37) como una combinación lineal
 mcd(426,37) = ___ = 426·(___) + 37· (___)

El inverso de a mod m

• Dado a mod m, su inverso se denota como \overline{a}

El inverso de a mod m

- Dado a mod m, su inverso se denota como \overline{a}
- Se cumple que $\overline{a} \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$

El inverso de a mod m

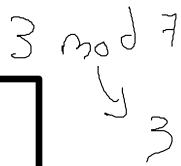
- Dado a mod m, su inverso se denota como \overline{a}
- Se cumple que $\overline{a} \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$

Se tiene 3 mod 7

$$\overline{a} = -2$$

Se puede verificar que:

$$(-2)\cdot 3 \equiv 1 \mod 7$$



El inverso de a mod m

Solo existe un inverso si mcd(a,m)=1

El inverso de a mod m

- Para encontrar \overline{a} , calcule mcd(a,m), debe ser 1
- Exprese mcd(a,m)=1 como una combinación lineal

$$1 = a \cdot (\underline{s}) + m \cdot (\dagger)$$

• El coeficiente que acompaña a a, es decir s, es el inverso \overline{a}

$$235 \mod 37$$
 $\mod (235,37)=1$
 $13=235-37(6)$
 $235 \mod 37=13$
 $235 \mod 37=13$
 $2=13-11(1)$
 $37 \mod 13-11$
 $1=17-2(5)$
 $11 \mod 2=1$

$$1 = 11 - (5)(13 - 11)$$

$$1 = (6)(11 - (5)(3)$$

$$1 = (6)(37 - 13(2)) - (5)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (6)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (17)(37 - (17)(3)$$

$$1 = (1$$

- mcd(235,37) = 1
- 1 = $235 \cdot (-17) + 37 \cdot (108)$

- mcd(235,37) = 1
- 1 = $235 \cdot (-17) + 37 \cdot (108)$
- -17 es el inverso de 235 mod 37

· Se puede verificar que

$$\overline{a} \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

ya que

$$-17 \cdot 235 \equiv 1 \pmod{37}$$

$$-3995 \equiv 1 \pmod{37}$$

• Encuentre el inverso de 3 mod 7

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

 $3 = 1 \cdot 3 + 0$

• Se verifica que mcd(7,3)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 7 - 3.2$$
$$1 = 3.(-2) + 7.(1)$$

• El inverso de 3 mod 7 es -2

• Encuentre el inverso de 7 mod 3

$$7 = 3 \cdot 2 + 1$$

 $3 = 1 \cdot 3 + 0$

• Se verifica que mcd(7,3)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 7 - 3.2$$
$$1 = 3.(-2) + 7.(1)$$

• El inverso de 7 mod 3 es 1

• Encuentre el inverso de 7 mod 26

$$26 = 7 \cdot 3 + 5$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

• Se verifica que mcd(26,7)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$26 = 7 \cdot 3 + 5$$

$$5 = 26 - 7.3$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$2 = 7 - 5.1$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 5 - 2.2$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$26 = 7 \cdot 3 + 5$$

$$5 = 26 - 7.3$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 5 - (7 - 5.1) \cdot 2 = 5.3 - 7.2$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

$$26 = 7 \cdot 3 + 5$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$1 = (26 - 7.3).3 - 7.2$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

• Encuentre el inverso de 7 mod 26

$$26 = 7 \cdot 3 + 5$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$1 = 26 \cdot (3) + 7 \cdot (-11)$$

1 = 26.3 - 7.9 - 7.2 = 26.3 - 7.11

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

• Encuentre el inverso de 7 mod 26

$$26 = 7 \cdot 3 + 5$$
 $7 = 5 \cdot 1 + 2$
 $5 = 2 \cdot 2 + 1$
 $1 = 26 \cdot 3 - 7 \cdot 9 - 7 \cdot 2 = 26 \cdot 3 - 7 \cdot 11$
 $2 = 1 \cdot 2 + 0$
 $1 = 26 \cdot (3) + 7 \cdot (-11)$

• Como 1 = $26 \cdot (3) + 7 \cdot (-11)$, el inverso de 7 mod 26 es -11

Encuentre el inverso de:

• 5 mod 7

• Encuentre el inverso de 5 mod 7

$$7 = 5.1 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0$$

• Se verifica que mcd(5,7)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

• Encuentre el inverso de 5 mod 7

$$7 = 5.1 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0$$

• Se verifica que mcd(5,7)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 5 \cdot (3) + 7 \cdot (-2)$$

• Encuentre el inverso de 5 mod 7

$$7 = 5.1 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0$$

• Se verifica que mcd(5,7)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 5 \cdot (3) + 7 \cdot (-2)$$

• El inverso de 5 mod 7 es 3

Encuentre el inverso de:

• 3 mod 17

• Encuentre el inverso de 3 mod 17

$$17 = 3.5 + 2$$

$$3 = 2.1 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0$$

• Se verifica que mcd(3,17)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

• Encuentre el inverso de 3 mod 17

$$17 = 3.5 + 2$$

 $3 = 2.1 + 1$

$$2 = 1.2 + 0$$

• Se verifica que mcd(3,17)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 3 \cdot (6) + 17 \cdot (-1)$$

• Encuentre el inverso de 3 mod 17

$$17 = 3.5 + 2$$
 $3 = 2.1 + 1$
 $2 = 1.2 + 0$

• Se verifica que mcd(3,17)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 3 \cdot (6) + 17 \cdot (-1)$$

• El inverso de 3 mod 17 es 6

>Encuentre el inverso de:

• 9 mod 32

• Encuentre el inverso de 9 mod 32

$$32 = 9.3 + 5$$

$$9 = 5.1 + 4$$

$$5 = 4.1 + 1$$

$$4 = 1.4 + 0$$

• Se verifica que mcd(9,32)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

• Encuentre el inverso de 9 mod 32

$$32 = 9.3 + 5$$

$$9 = 5.1 + 4$$

$$5 = 4.1 + 1$$

$$4 = 1.4 + 0$$

• Se verifica que mcd(9,32)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 9 \cdot (-7) + 32 \cdot (2)$$

• Encuentre el inverso de 9 mod 32

$$32 = 9.3 + 5$$

$$9 = 5.1 + 4$$

$$5 = 4.1 + 1$$

$$4 = 1.4 + 0$$

• Se verifica que mcd(9,32)=1. Ahora se expresa como combinación lineal

$$1 = 9 \cdot (-7) + 32 \cdot (2)$$

• El inverso de 9 mod 32 es -7