Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas
- Cambio de variable
- Método maestro

Contenido

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas
- Cambio de variable
- Método maestro

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Ecuacion homogenea

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + \boxed{F(n)}$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$

Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ (Hanoi) para $a_1 = 1$ (Hanoi) La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

$\boxed{F(n) = 2F(n-1)} + 1$ $\qquad F(1) = 1$

$F(n) = \{F(n)\}^{(h)} + \boxed{\{F(n)\}^{(p)}}$

$\{F(n)\}^{(h)}$

$F(n) = 2F(n-1) \qquad F(n) = r^n$

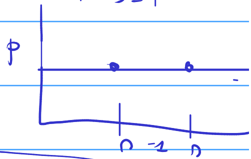
$r - 2 = 0$ EC

$\frac{r^n}{r^{n-1}} = \frac{2r^{n-1}}{r^{n-1}} \Rightarrow r = 2$

$\boxed{r - 2 = 0}$

$\boxed{F(n) = A2^n}$

$F(n) = p$



$\{F(n)\}^{p}$

$\boxed{F(n) = p}$

$p = 2p + 1 \qquad \boxed{p = -1}$

Sol homogena + Sol particula

$F(n) = A2^n - 1$

$1 = A2 - 1 \qquad 2A = 2 \qquad A = 1$

$\boxed{F(n) = 2^n - 1}$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$$

homogenea

particular

r^n

$$a_n = \{a_n\}^h + \{a_n\}^p$$

• $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

E.C $\quad r^2 - 5r + 6 = 0 \qquad r = \{-2, -3\}$

$$\boxed{a_n = A(-2)^n + B(-3)^n}$$

$\boxed{a_n^{(p)} = C\,7^n}$ $\qquad$ • $C\,7^n = 5C\,7^{n-1} - 6C\,7^{n-2} + 7^n$

$$C\,7^n = \frac{5}{7}C\,7^n - \frac{6}{49}C\,7^n + 7^n$$

$$7^n \left\{ \; C = \frac{5}{7}C - \frac{6}{49}C + 1 \right.$$

$$-1 = \left(\frac{5}{7} - \frac{6}{49} - 1\right)C \qquad -1 = \left(\frac{35}{49} - \frac{6}{49} - \frac{49}{49}\right)C$$

$$-1 = \frac{-20}{49}C \qquad \boxed{\frac{49}{20} = C} \qquad \boxed{a_n^{(p)} = \frac{49}{20}7^n}$$

$$\boxed{a_n = A(-2)^n + B(-3)^n + \frac{49}{20}7^n}$$

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**
La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$\underline{a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n}$$

Colocar orden polinomios

Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
Pl$_0$ $\leftarrow$ C_1	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

Universidad del Valle

Dada la recurrencia $\boxed{a_n = 2a_{n-1}} + \boxed{n+5}$ determine la solución para $a_0 = 4$

polinomio grado 1

$a_n = a_n^h + a_n^p$

a_n^h

E.C $r - 2 = 0$ $\boxed{r = 2}$

$\boxed{a^h(n) = A(2)^n}$

$a_n^{(p)} = Bn + C$

$Bn + C = 2(B(n-1) + C) + n + 5$

$\cancel{Bn} + \cancel{C} = 2\cancel{Bn} - 2B + 2C + \cancel{n} + 5$

$$\begin{array}{c|l} n & B = 2B + 1 \\ cte & C = -2B + 2C + 5 \\ & C = 2 + 2C + 5 \\ & -C = 7 \end{array}$$

$\boxed{B = -1}$

$\boxed{C = -7}$

$\boxed{a(n) = A\,2^n - n - 7}$

$a_0 = 4$

$4 = A2^0 - 0 - 7$

$4 = A - 7$ $A = 11$

$\boxed{a(n) = 11 \times 2^n - n - 7}$

:)

Recurrencias lineales no homogéneas

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes
   $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$\boxed{a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7}$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

$A2^n + B3^n + \boxed{C8^n}$ Sp

- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad m, existe una solución particular de la forma

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

$A2^n + B3^n + C2^n$

$A2^n + B3^n + Cn2^n$

.

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$nC2^n + An + B = 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B]$$
$$-6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n$$

2^n

$(P_0)2^n$

nP_02^n

$n^0 2^n$ $\quad$ $P_0 2^n$

$m=1$

$n^1 P_0 2^n = n P_0 2^n$

Encontrar la solución general de la recurrencia
$a_n = \underline{5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n}$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$
$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \to 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \underline{\alpha 3^n} + \underline{\beta 2^n} - \underline{n2^{n+1}} + \underline{3/2n} + \underline{21/4}$

$-2n2^n$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

$a_n^{(h)}$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \rightarrow a_n = r^n$$

$$r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2} \qquad \frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{5r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{6r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

$$r^2 = 5r - 6 \qquad \boxed{r^2 - 5r + 6 = 0}$$

$$0 = (r-2)(r-3) \quad r=2,\ r=3 \qquad \boxed{a_n^{(h)} = A2^n + B3^n}$$

$r^n \quad nr^n \quad n^2r^n \ldots n^m r^n$

$a^{(p)}$ $\quad F(n) = 2^n + 3n$

r^n Pol grado 1

$$Q^{(p)} = \boxed{Cn2^n + Dn + E}$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

$$Cn2^n + Dn + E = 5(C(n-1)2^{n-1} + D(n-1) + E) - 6(C(n-2)2^{n-2} + D(n-2) + E) + 2^n + 3n$$

$$2^{n-1} = \frac{2^n}{2} \qquad 2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$$

$n2^n$ $\quad C = \frac{5C}{2} - \frac{6C}{4} \qquad C = \frac{10C}{4} - \frac{6C}{4} \qquad C = \frac{4}{4}C \qquad \boxed{C = C}$

2^n $\quad 0 = -\frac{5}{2}C - \left(-\frac{12}{4}C\right) + 1 \qquad 0 = -\frac{5}{2}C + 3C + 1$

$$0 = -\frac{5}{2}C + \frac{6}{2}C + 1 \qquad -1 = \frac{1}{2}C \qquad \boxed{C = -2}$$

n $\quad D = 5D - 6D + 3 \qquad D = -D + 3 \qquad 2D = 3 \qquad \boxed{D = \frac{3}{2}}$

cte (1) $\quad E = -5D + 5E - (6D(-2) + 6E)$

$$-12D$$

$$E = -5D + 5E + 12D - 6E$$

$$E = 7D - E \qquad 2E = 7D \qquad E = \frac{7}{2}D$$

$$E = \frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4} \qquad \boxed{E = \frac{21}{4}}$$

$$-n2^{n+1}$$

$$\boxed{a_n = A2^n + B3^n + -2n2^n + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}}$$

$a_0 = 3$
$a_1 = 5$

$$f(n) = c_1 2^n + c_2 3^n - \frac{1}{2}(2^{n+2} - 3)n - 2^{n+2} + \frac{21}{4}$$

$$-\frac{1}{2}(4 \times 2^n - 3)n - 4 2^n$$

$$-2 \times n2^n + \frac{3}{2}n - 4 2^n$$

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 1 + 3n + 3^n \quad T(0) = 4$$

$r^2 - 2r + 1 = 0$ (pol, r^n) $T(1) = 6$

$(r-1)(r-1) \to r = 1 \quad m = 2$

$T^{(t)}(n) = T^{(h)}(n) + T^{(p)}(n)$

Pol grad 1

$T^{(h)}(n) = A 1^n + B n 1^n \to T^{(h)}(n) = A + Bn$

$1^n = \boxed{m=2}$

$T^{(p)}(n) = Cn + D + E3^n$

$n^2(Cn + D)$

$$\boxed{T^{(p)}(n) = Cn^3 + Dn^2 + E3^n}$$

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 1 + 3n + 3^n$$

$$Cn^3 + Dn^2 + E3^n = 2(C(n-1)^3 + D(n-1)^2 + E3^{n-1})$$

$$-(C(n-2)^3 + D(n-2)^2 + E3^{n-2}) + 1 + 3n + 3^n$$

$$Cn^3 + Dn^2 + E3^n = 2(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1) + \frac{E3^n}{3})$$

$$-(C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8) + D(n^2 - 4n + 4) + \frac{E3^n}{9})$$

$$+1 + 3n + 3^n$$

n^3: $C = 2C - C \qquad \boxed{C = C}$

n^2: $D = -6C + 2D + 6C - D \qquad \boxed{D = D}$

n: $0 = 6C - 4D - 12C + 4D + 3 \to 0 = -6C + 3 \quad 6C = 3$

$\boxed{C = \frac{1}{2}}$

cte: $0 = -2C + 2D + 8C - 4D + 1$

$0 = 6C - 2D + 1 \qquad -1 = 6C - 2D$

$-1 = 6(\frac{1}{2}) - 2D \qquad -1 = 3 - 2D \qquad -4 = -2D$

$\boxed{D = 2}$

3^n: $E = \frac{2}{3}E - \frac{1}{9}E + 1$

$E = \frac{6}{9}E - \frac{1}{9}E + 1 \qquad 1E = \frac{5}{9}E + 1 \qquad \frac{9}{9} = 1$

$\frac{9}{9}E - \frac{5}{9}E = 1 \qquad \frac{4}{9}E = 1 \qquad \boxed{E = \frac{9}{4}}$

$$T(n) = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + 2n^2 + \frac{9}{4}3^n$$

$T(0) = 4$

$T(1) = 6$

$n = 0 \left\{ 4 = A + \frac{9}{4} \qquad \frac{16}{4} - \frac{9}{4} = A \qquad \frac{7}{4} = A \right.$

$n = 1 \left\{ 6 = A + B + \frac{1}{2} + 2 + \frac{27}{4} \right.$ ($A = \frac{7}{4}$)

$6 - \frac{7}{4} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{27}{4} = B \qquad \boxed{B = -5}$

$$T(n) = \frac{7}{4} - 5n + \frac{1}{2}n^3 + 2n^2 + \frac{9}{4}3^n$$

Contenido

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas
- Cambio de variable
- Método maestro

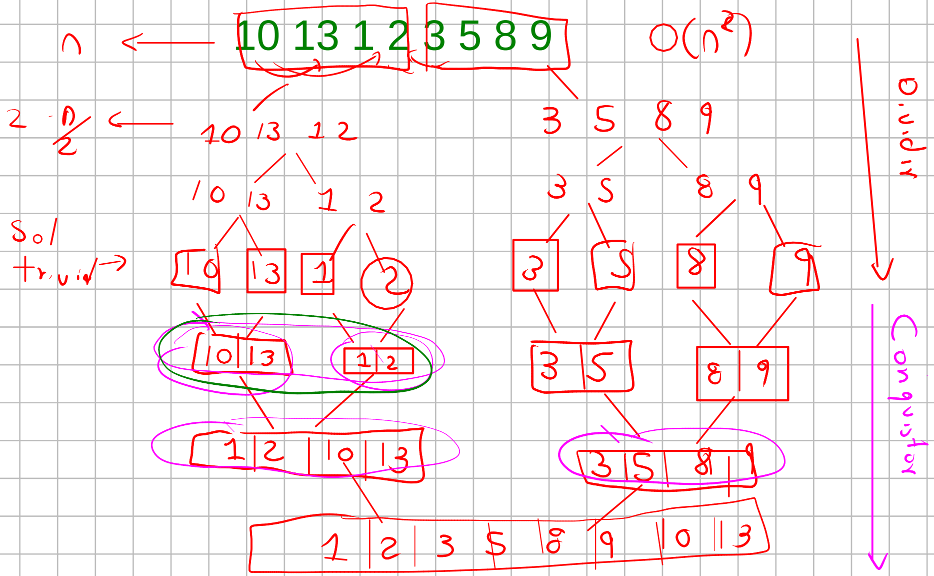
Universidad del Valle

Estrategias de solución de recurrencias

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$



$O(n \log(n))$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Estrategias de solución de recurrencias

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución ← FADA
- Por ~~iteración~~ ← Expansión
- Funciones generatrices ← Calculo X

Cambio de variable

$T(n) = c_1 + (n-1) + c\, T(n-2) + \ldots \quad D\,T(n-k$

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1. Supongamos $n = 2^k$

$$
\begin{aligned}
T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 = 2T(2^{k-1}) + 2 \\
T(2^k) &= t_k
\end{aligned}
$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 2t_{k-1} + 2$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

Cambio de variable

$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

$$T(n) = 5T(n/2) + 3 \text{ y } T(1) = 7$$

$n = 2^k$

n

$T(2^k) = 5\,T(2^{k-1}) + 3 \qquad T(2^k) = T_k$

$T_k = 5T_{k-1} + 3$

$T_k = T_k^{(h)} + T_k^{(p)}$

$r - 5 = 0 \qquad T_k^{(h)} = A5^k$

$T_k^{(p)} = B$

$B = 5B + 3 \qquad -4B = 3 \qquad \boxed{B = \frac{-3}{4}}$

$T_k = A5^k - \frac{3}{4} \qquad n = 2^k \quad k = \log_2(n)$

$T_n = A5^{\log_2(n)} - \frac{3}{4}$

$T_n = A\,n^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}$

$7 = A\,\cancel{1^{\log_2(5)}}^{\,1} - \frac{3}{4}$

$\frac{28}{4} + \frac{3}{4} = A \qquad \frac{31}{4} = A$

$\boxed{T(n) = \frac{31}{4} \times n^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}} \qquad O\left(n^{\log_2(5)}\right)$

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$n = 3^k \qquad T(3^k) = 9T(3^{k-1}) + 3^k$$

$$\boxed{T_k = 9T_{k-1} + 3^k}$$

$$r - 9 = 0$$

$$\boxed{T_k^{(h)} = A 9^k}$$

$$T_k^{(p)} = B 3^k$$

$$B3^k = \frac{9B3^k}{3} + 3^k \longrightarrow B = \frac{9B}{3} + 1$$

$$B = 3B + 1$$

$$\boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{T_k = A9^k - \frac{1}{2}3^k}$$

$$n = 3^k \qquad k = \log_3(n)$$

$$T(n) = A\, 9^{\log_3(n)} - \frac{1}{2} 3^{\log_3(n)}$$

$$T(n) = A\, n^{\log_3(9)} - \frac{1}{2} n^{\log_3(3)}$$

$$\boxed{T(n) = An^2 - \frac{1}{2}n} \longrightarrow O(n^2)$$

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1]$, $A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned} \log n &= \log 4^k \\ &= k \log_4 4 \\ \log n &= k \end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak + B)4^k$

$$(Ak + B)4^k = 3[(A(k-1) + B)4^{k-1}] + 4^k k$$
$$(Ak + B)4^k = 4^k(3/4[(A(k-1) + B)] + k)$$
$$Ak + B = 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k$$

Universidad del Valle

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n\log n)$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 17 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que: $T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + cn^d}$$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$a = 4$

$b = 2$

$c = 1$

$d = 2$

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

$\times\ 4 < 2^2 \quad 4 < 4$

$4 = 4$

$O(n^2 \log(n))$

Método Maestro

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$

  $O(n^{\log_3 9})$

  $9 < 3^1$ ×
  $9 = 3^1$ ×
  $9 > 3^1$ ✓

  $T(n)$ es $O(n^2)$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$
  $O(n^0 \log n) = \boxed{O(\log n)}$

  $1 < (\frac{3}{2})^0$
  $1 < 1$ ×
  $1 = 1$ ✓

  $T(n)$ es $O(\log n)$

- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $O(n^{\log_2 5})$

  $5 < 2^0$
  $5 < 1$ ×
  $5 = 1$ ×
  $5 > 1$ ✓

  $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Universidad del Valle

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$d = 0 \quad a \geq 1$

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{cases} \}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

Método Maestro

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

Método Maestro

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

Universidad del Valle

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + \boxed{3n}$

$T(0) = 1$
$T(1) = 4$

$r^n = 2r^{n-1} - r^{n-2}$

$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{2r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{r^{n-2}}{r^{n-2}}$

$r^2 = 2r - 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = 0$

$r = 1;\ r = 1$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2.1}$

$\frac{2\sqrt{0}}{2} = 0$

n^0 n^1

$T(n) = A + Bn$ $+ En^2$ E P

Parte particular

$T(n)^{(p)} = Cn^2 + Dn + E$ n^2

Remplazamos en la original

$Cn^2 + Dn + E = 2(C(n-1)^2 + D(n-1) + E)$
$\quad - (C(n-2)^2 + D(n-2) + E) + 3n$

$Cn^2 + Dn + E = 2(C(n^2 - 2n + 1) + D(n-1) + E)$
$\quad - (C(n^2 - 4n + 4) + D(n-2) + E) + 3n$

1^n

$\underbrace{\ }_{}$ $(Cn + D)1^n$

$n^2(Cn + D)$

$Cn^3 + Dn^2$

n^3 n^2

n^2	$C = 2C - C$ ⇒ $-1C = -1$ ⇒ $C = 1$
n	$D = 4C - 2D - (-2C - D)$
	$D = 4 - 2D + 2 + D$ ⇒ $D = 6 - D$ ⇒ $D = 3$
cte	$E = 2C + 2D + 2E - (C + D + E)$
	$E = 2 + 6 + 2E - 1 - 3 + E$
	$E = 4 + 3E$ ⇒ $-2E = 4$ ⇒ $E = -2$

$a_n = A + Bn + Cn^2 + Dn + E$

$a_n = A + Bn + n^2 + 3n - 2$

(1, 1, 1) 1 m=3

n^0

$A + Bn + Cn^2$

$(En + D)n^3$

$En^4 + Dn^3$

$T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2} + 3n$ $\quad T(0)=1,\ T(1)=4$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = r=1 \quad m=2$

$T(n) = A1^n + Bn1^n$ $\quad P = T(n) = Cn + d$

$n^2(Cn+d)$

60% - 80%

$h = T(n) \ A + Bn$ $\quad \boxed{T(n) = Cn^3 + dn^2}$

$Cn^3 + dn^2 = 2(C(n-1)^3 + d(n-1)^2) - (C(n-2)^3 + d(n-2)^2) + 3n$

$Cn^3 + dn^2 = 2[C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + d(n^2 - 2n + 1)] - [C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8) + d(n^2 - 4n + 4)] + 3n$

n^3	$C = 2C - C \rightarrow \boxed{C=C}$
n^2	$d = -6C + 2d + 6C - d \quad \boxed{d=d}$
n	$0 = -6C - 4d - 12C + 4d + 3n \quad 0 = -6C + 3 = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \quad C = \frac{1}{2}$
Const	$0 = -2C + 2d + 8C - 4d \quad 0 = 6C - 2d$

$0 = \frac{6}{2} - 2d$

$0 = 3 - 2d \Rightarrow 2d = 3 \quad d = \frac{3}{2}$

homo $= T(n) = A + Bn + Cn^3 + dn^2$

$T(n) = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2$ $\quad T(0)=4,\ T(1)=6$

$n=0 \rightarrow \boxed{4 = A}$ $\quad n=1 \rightarrow 6 = A + B + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$6 = 5 + B$

$6 - 5 = B$

$\boxed{1 = B}$

$\boxed{T_n = 4 + n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2}$

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 3n \qquad T(0) = 1$

$T(1) = 4$

$T_n = r^n$

$r^n = 2r^{n-1} - r^{n-2} \qquad 3n = Cn + D$

$\frac{r^n r^2}{r^n} = \frac{2 r^n r^2}{r^n r} - \frac{r^n r^2}{r^n r^2} \qquad n^2(Cn + D)$

$\boxed{Cn^3 + Dn^2}$

$r^2 = 2r - 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \end{array}\right\} \boxed{m = 2}$

$\boxed{T_n = A + Bn}$ ✓

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 3n$

$Cn^3 + Dn^2 = 2\left(C(n-1)^3 + D(n-1)^2\right) - \left(C(n-2)^3 + D(n-2)^2\right) + 3n$

$Cn^3 + Dn^2 = 2\left(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1)\right) - \left(C(n^3 - 6n^2 + 12n - 1) + \ldots\right.$

$\left. D(n^2 - 4n + 4)\right) + 3n$

$n^3 \quad C = 2C - C \qquad C = C$

$n^2 \quad D = -6C + 2D + 6C - D$

$D = D$

$n \quad 0 = 6C - 4D - 12C + 4D + 3$

$0 = -6C + 3 \qquad 6C = 3 \qquad \boxed{C = \frac{1}{2}}$

$$\text{cte} \;\Big|\; = 0 = -2C + 2D + C - 4D$$

$$0 = -C - 2D$$

$$0 = -\frac{1}{2} - 2D$$

$$\frac{1}{2} = 2D \qquad \frac{1}{4} = D$$

$$T_{(n)} = A + Bn + Cn^3 + Dn^2$$

$$T_{(n)} = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$T_{(0)} = 4$$

$$\boxed{1 = A}$$

$$T_{(1)} = 4$$

$$4 = 1 + B + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$4 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{16}{4} - \frac{4}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = B$$

$$\boxed{\frac{9}{4} = B}$$

$$\boxed{T(n) = 1 + \frac{9}{4}n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2}$$

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 3n, \quad T(0) = 1, \quad T(1) =$

$r^n = 2r^{n-1} - r^{n-2}$

$r^2 = 2r - 1 \rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2}$$

$\frac{2}{2}$ — $1 \; R_1$, $1 \; R_2$

$T(n) = (A + Bn)1^n \rightarrow A + Bn$

$T(n)^{(p)} = 3n \rightarrow Cn + D$

$n^2(Cn + D) = Cn^3 + Dn^2$

$\boxed{T(n)^{(p)} = Cn^3 + Dn^2}$

$Cn^3 + Dn^2 = 2(C(n-1)^3 + D(n-1)^2) - C(n-2)^3 + D(n-2)^2 + 3n$

$= 2(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1)) - 1(C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8) + D(n^2 - 4n + 4)) + 3n$

$n^3 \{ C = 2C - C \rightarrow \boxed{C = C}$

$n^2 \{ D = -6C + 2D - (-6C + D)$
$= -6C + 2D + 6C - D$
$D = 2D - D \rightarrow \boxed{D = D}$

$n \{ 0 = 6C - 4D - (12C - 4D) + 3$
$= 6C - 4D - 12C + 4D + 3$
$-3 = -6C$
$\frac{-3}{-6} = C = \boxed{1/2}$

$C + 0 \{ 0 = -2C + 2D - (-8C + 4D)$
$= -2C + 2D + 8C - 4D$
$= 6C - 2D$
$-6(1/2) = -2D$
$\frac{-3}{-2} = D \rightarrow \boxed{D = \frac{3}{2}}$

Solución:

$$\boxed{T(n) = 1 + 1n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2}$$

quiz

$T(n) = \underbrace{2T(n-1) + T(n-2)}_{P(h)} + \underbrace{3n}_{(P)}$, $T(0)=1$, $T(1)=4$

$r^n = 2r - 1$ $\qquad T_n = r^n$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) \longrightarrow r = 1 \qquad m = 2$

$T(n) = T^h(n) + T^p(n)$

$T^h(n) = A1^n + Bn1^n \longrightarrow \boxed{T^h(n) = A + Bn}$ polinomio Grado 1

$T^p(n) = Cn + D$

$\boxed{n^2(Cn+D)} \rightarrow \boxed{T(n) = (Cn^3 + Dn^2)}$ Solucion particular

Entonces

$Cn^3 + Dn^2 = 2(C(n-1)^3 + D(n-1)^2) - 1(C(n-2)^3 + D(n-2)^2) + 3n$

$= Cn^3 + Dn^2 = 2(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1)) - 1(C(n^3 - 6n^2 + 6n - 8)$
$+ D(n^2 - 4n + 4)) + 3n$

$n^3 \mid C = 2C - C \rightarrow \boxed{C = C}$

$n^2 \mid D = -6C + 2D + 6C - D \rightarrow \boxed{D = D}$

$n \mid 0 = 6C - 4D - 12C + 4D + 3 = 0 = -6C + 3$

$C = \frac{1}{2}$

$$\boxed{T(n) = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + 2n^2}$$

$r = \{2, 3\}$

$T(n) = \boxed{A2^n} + B3^n$

$m = 1$

$f(n) = 3^n + n2^n + n^2 2^n$

$(n+n^2)2^n$

orden 2

$T(n) = \underline{\underline{Cn3^n}}$

$\underline{n^m}(p_0 + p_1 n + p_2 n^2)2^n$

$T(n) = Cn3^n + n(p_0 + p_1 n + p_2 n^2)2^n$

2^n

$n2^n$

$n^2 2^n$

$n^3 2^n$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 3n + 4, T(1) = 4$$

$n = 2^k$

$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 3\,2^k + 4$

$T(2^k) = T_k$

$\boxed{T_k = 2T_{k-1}} + \boxed{3\,2^k + 4}$

$T_k^{(h)} + T_k^{(p)}$ $\quad \gamma^k \quad$ pol orden 0 $\quad F(k)$

$r - 2 = 0$ $\quad \boxed{T_k^{(h)} = A(2)^k}$ $\quad$ Sol homogenea

$$\boxed{T^{(p)} = Bk2^k + C}$$

$$T_k = 2T_{k-1} + 3\,2^k + 4$$

$$Bk2^k + C = 2(B(k-1)2^{k-1} + C) + 32^k + 4$$

$$Bk2^k + C = \frac{2Bk2^k}{2} - \boxed{\frac{2B2^k}{2}} + 2C + \boxed{3 \cdot 2^k} + 4$$

$-B$ $\quad 3$

$k2^k$	$B = B$
2^k	$0 = -B + 3, B = 3$
C_{te}	$C = 2C + 4, -C = 4, C = -4$

$$T(k) = A2^k + 3k2^k - 4$$

$\boxed{n = 2^k \quad k = \log_2(n)}$

$T(n) = A\,2^{\log_2(n)} + 3\log_2(n)\,2^{\log_2(n)} - 4$

$T(n) = A n^{\cancel{\log_2(2)}} + 3\log_2(n)\, n^{\cancel{\log_2(2)}} - 4$

$T(n) = An + 3\log_2(n) \times n - 4 \quad \boxed{O(n\log(n))}$

$4 = A(1) + 3\cancel{\log_2(1)} \times 1 - 4$

$4 = A - 4 \quad \boxed{A = 8}$

$$\boxed{T(n) = 8n + 3\log_2(n) \times n - 4}$$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.