# Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

## Árboles de búsqueda binaria

**Abril de 2018**

**Propiedad de un árbol de búsqueda binaria**

**Árboles y recorrido *inorden***

**Operaciones mínimo, máximo, sucesor y predecesor**

**Inserción y eliminación**

# Árboles

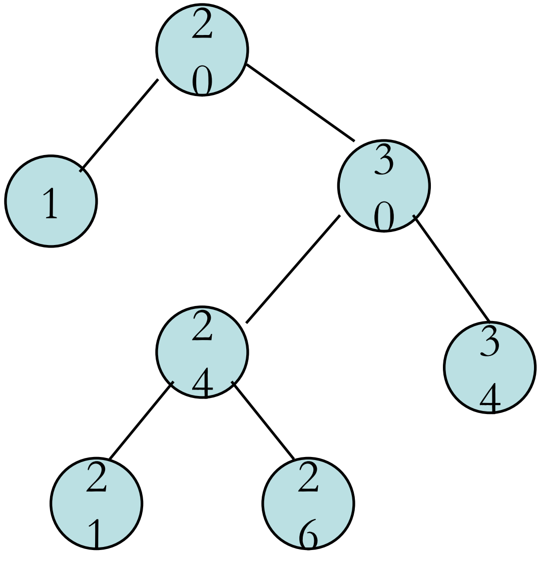
## Por qué son importantes los árboles

- Operaciones básicas como insertar, borrar y buscar, toman un tiempo proporcional a la altura del árbol
- Para un árbol binario completo con n nodos, las operaciones básicas toman $\Theta(\lg n)$
- Si el árbol se construye como una cadena lineal de n nodos, tomarían $\Theta(n)$

# Árboles

## Árbol de búsqueda binaria

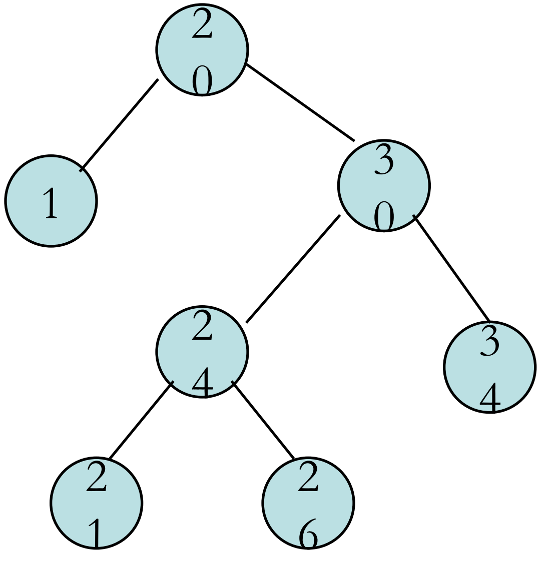
Es un árbol binario en el cual se cumple que, para cada nodo x, los nodos del subarbol izquierdo son menores o iguales a x y que, los nodos del subarbol derecho son mayores o iguales a x



# Árboles

## Propiedad del árbol de búsqueda binaria

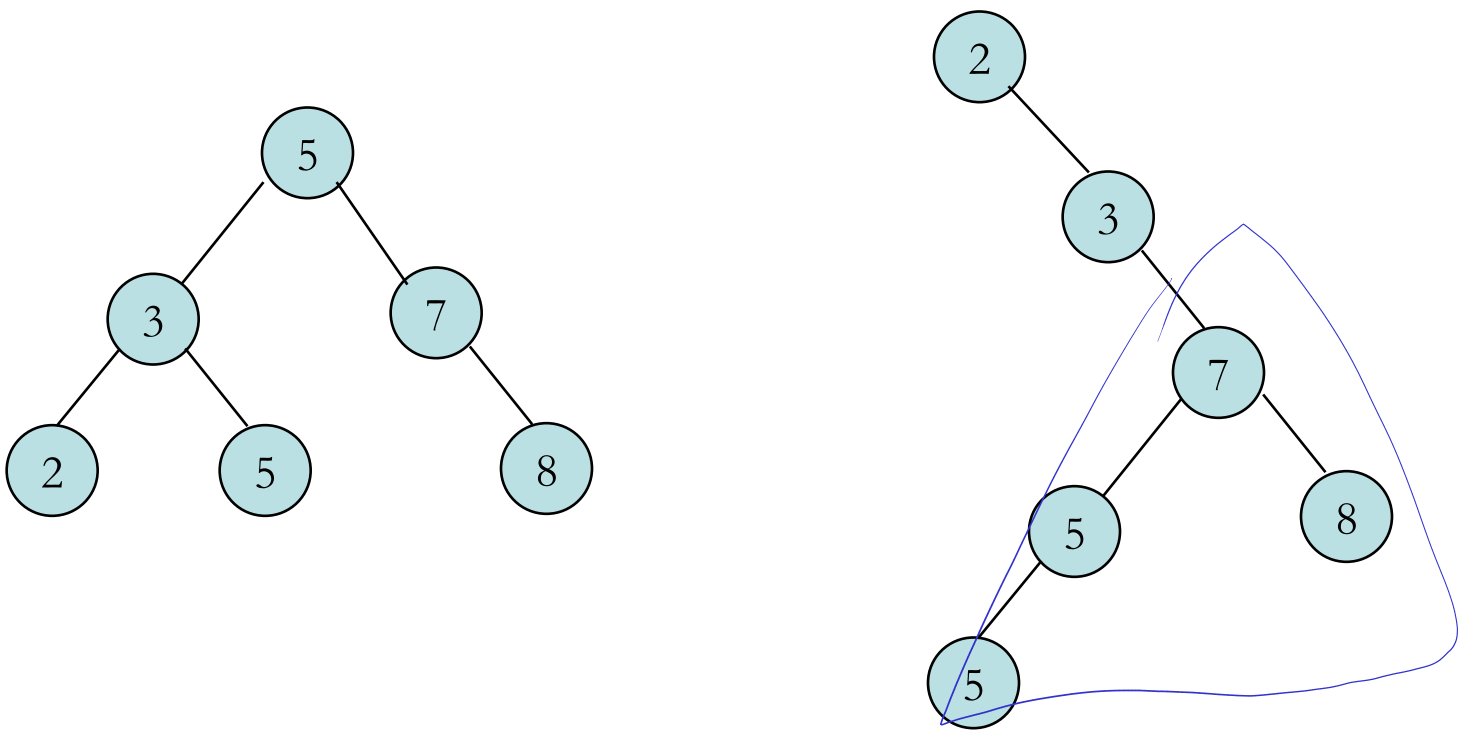
Sea x un nodo del árbol. Si y es un nodo en el subarbol izquierdo de x, entonces key[y]≤key[x]. Si y es un nodo en el subarbol derecho de x, entonces key[y]≥key[x]



# Árboles

## Propiedad del árbol de búsqueda binaria

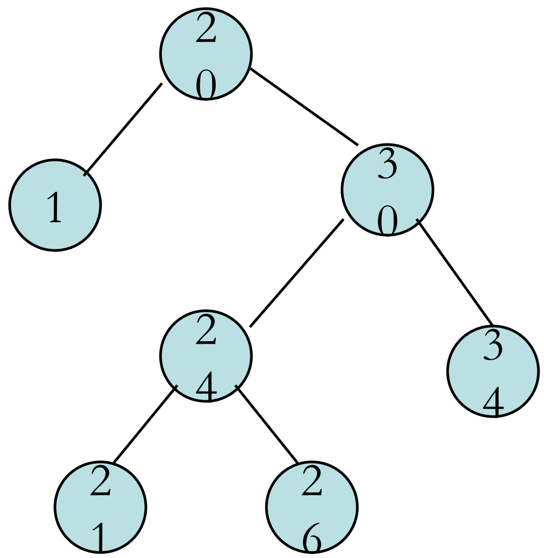
Sea x un nodo del árbol. Si y es un nodo en el subarbol izquierdo de x, entonces key[y]≤key[x]. Si y es un nodo en el subarbol derecho de x, entonces key[y]≥key[x]



# Árboles

## Árbol de búsqueda binaria

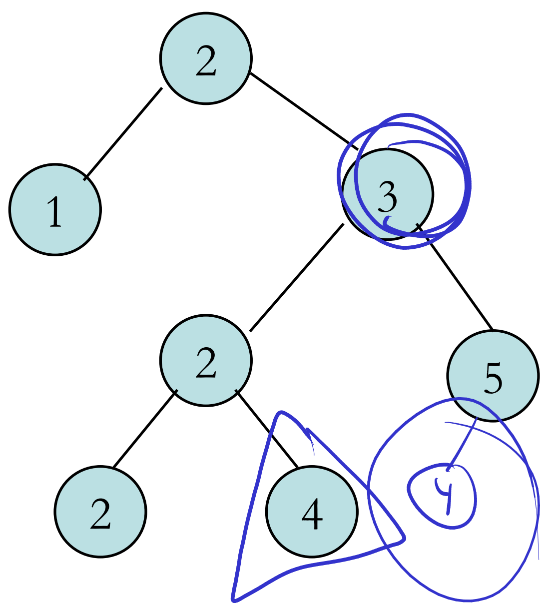
Indique si el siguiente árbol es de búsqueda binaria



# Árboles

## Árbol de búsqueda binaria

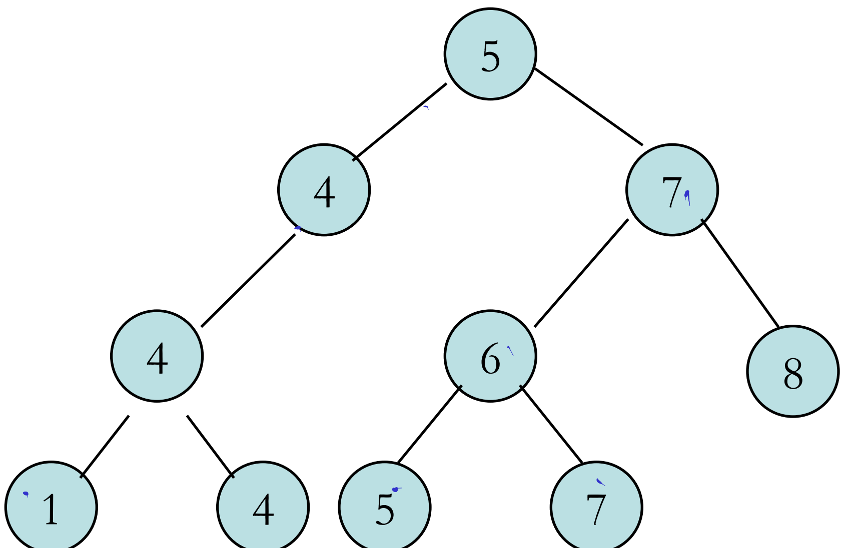
Indique si el siguiente árbol es de búsqueda binaria



# Árboles

## Árbol de búsqueda binaria

Indique si el siguiente árbol es de búsqueda binaria




Sí

1, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8

# Árboles

Los árboles de búsqueda binaria tienen otra característica, si son recorridos en *inorden*, producen una lista de las llaves ordenada ascendentemente

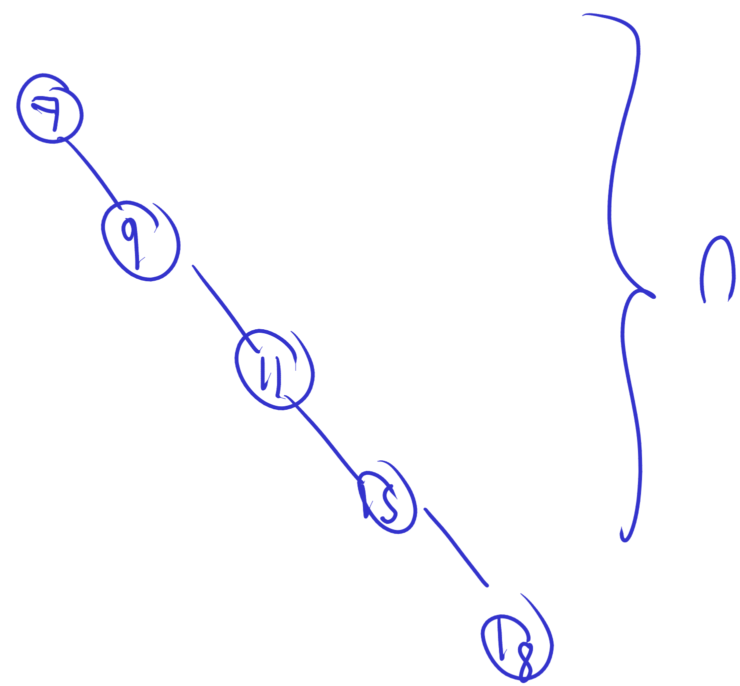
I
R
D

```
INORDER-TREE-WALK(x)
 if x ≠ nil
    then INORDER-TREE-WALK(left[x])        I
         print key[x]                      R
         INORDER-TREE-WALK(right[x])       D
```

# Árboles

•Recorra los árboles de búsqueda binaria previos, en inorden

•Demuestre que la complejidad del algoritmo INORDER-TREE-WALK(x) es $\Theta(n)$



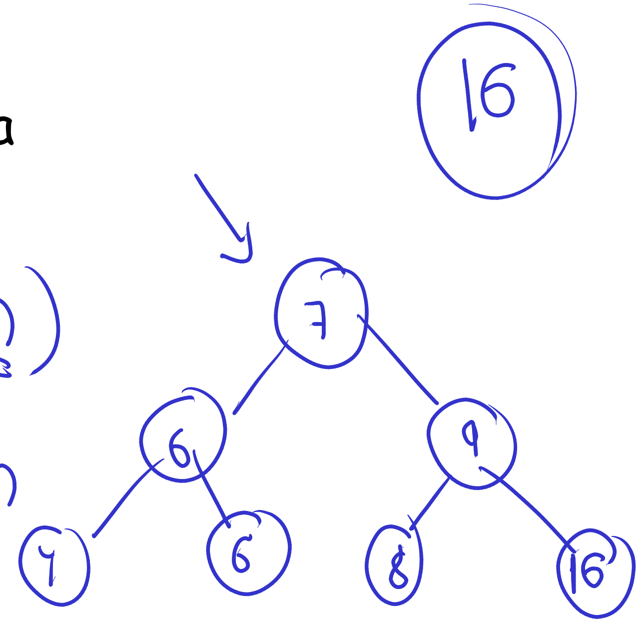
# Árboles

Consulta de un árbol de búsqueda binaria

- Búsqueda de una llave
- Mínimo
- Máximo
- Sucesor de un nodo
- Predecesor de un nodo

O(h)

log(n) — n




Cada una de estas operaciones se puede hacer en O(h) donde h es la altura del árbol

# Árboles

Buscar un nodo con llave k dado un árbol con apuntador a la raiz x

```
TREE-SEARCH(x,k)
  if x=nil or k=key[x]
    then return x
  if k<key[x]
    then return TREE-SEARCH(left[x],k)
    else return TREE-SEARCH(right[x],k)
```

# Árboles

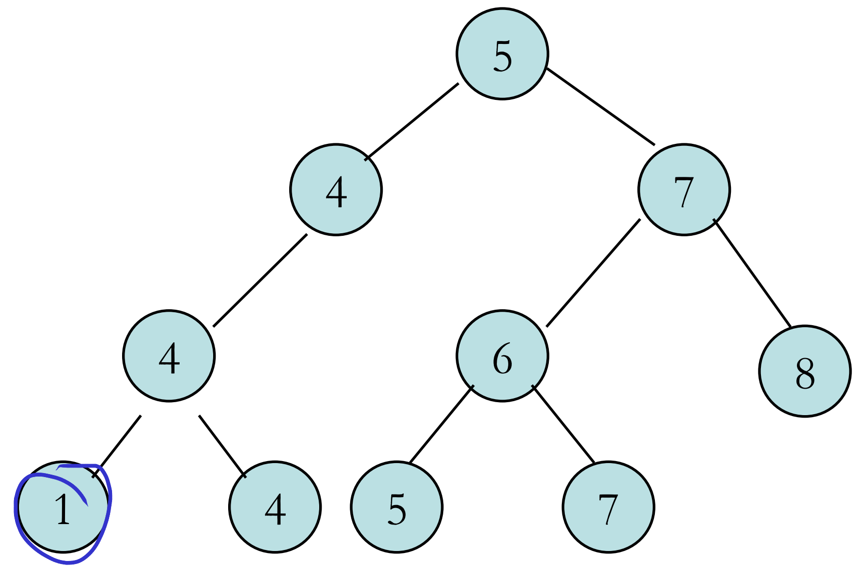
Búsqueda iterativa

ITERATIVE-TREE-SEARCH(x,k)

```
  while x≠nil and k≠key[x]
    do if k<key[x]
            then x←left[x]
            else  x←right[x]
```

# Árboles

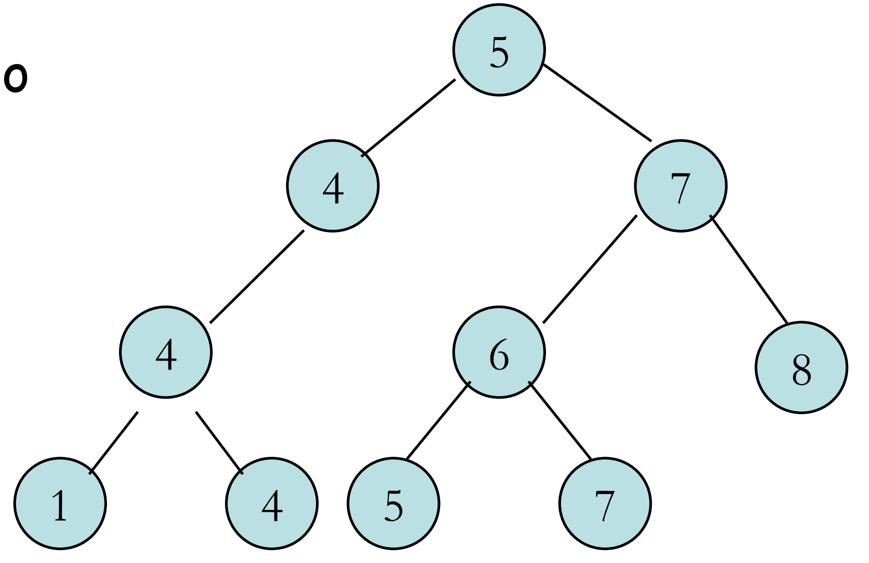
En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento mínimo?



# Árboles

En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento mínimo?

Idea: seguir los apuntadores al hijo izquierdo desde la raiz hasta que se encuentre nil



# Árboles

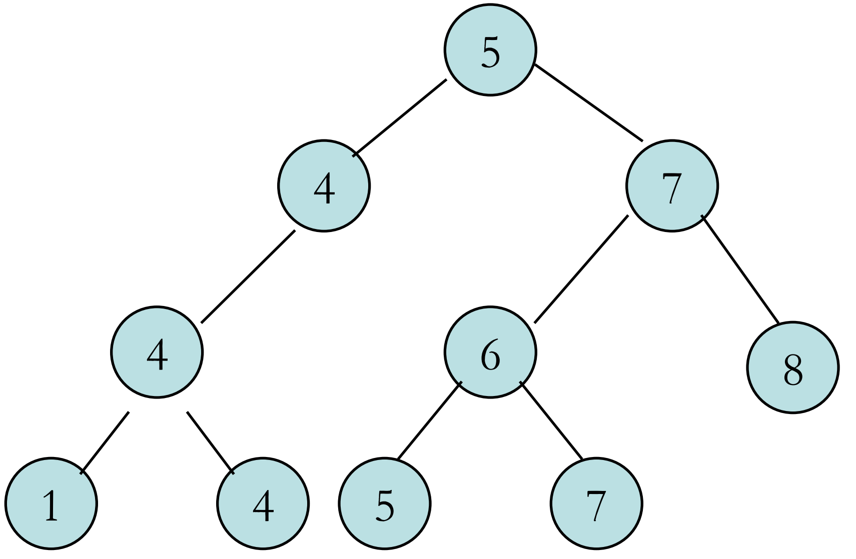
En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento mínimo?

TREE-MINIMUN(x)

while left[x] ≠nil

do x ← left[x]

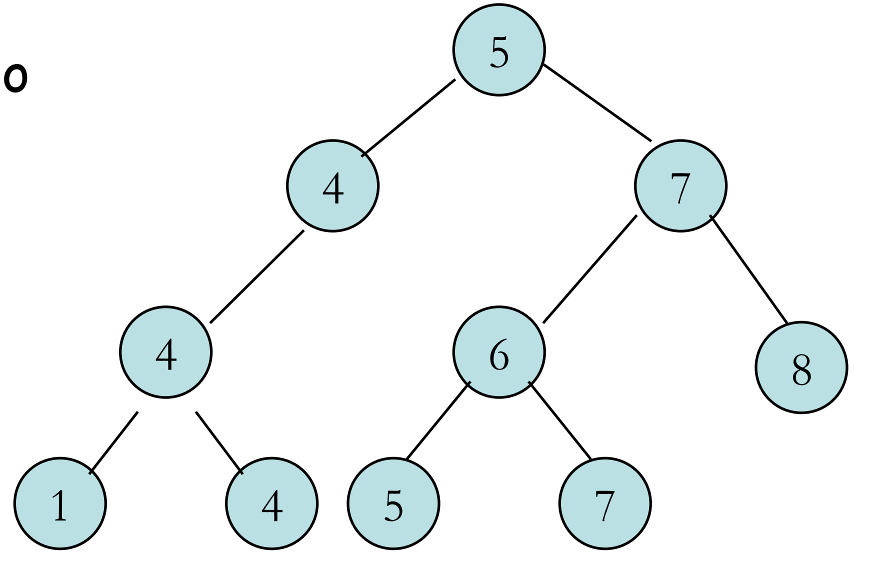
return x



# Árboles

En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento máximo?

Idea: seguir los apuntadores al hijo derecho desde la raiz hasta que se encuentre nil



# Árboles

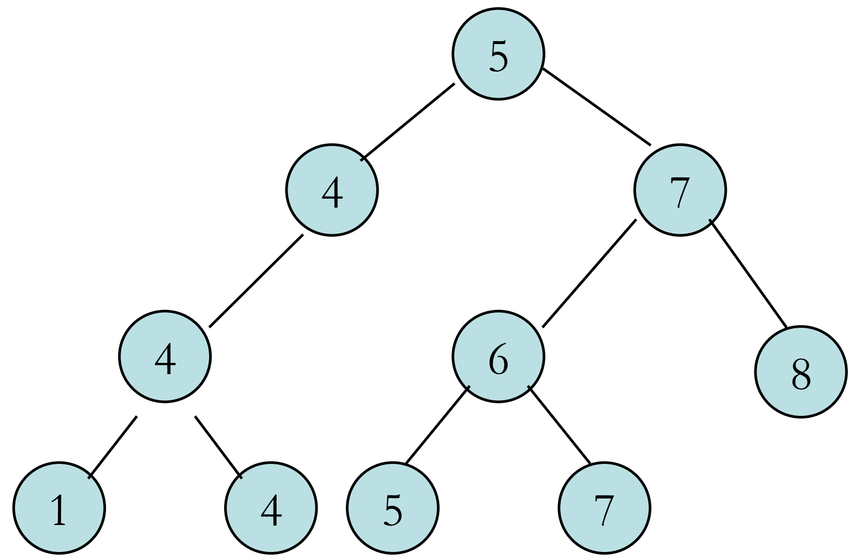
En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento máximo?

TREE-MAXIMUM(x)

  while right[x] ≠nil

    do x ← right[x]

  return x



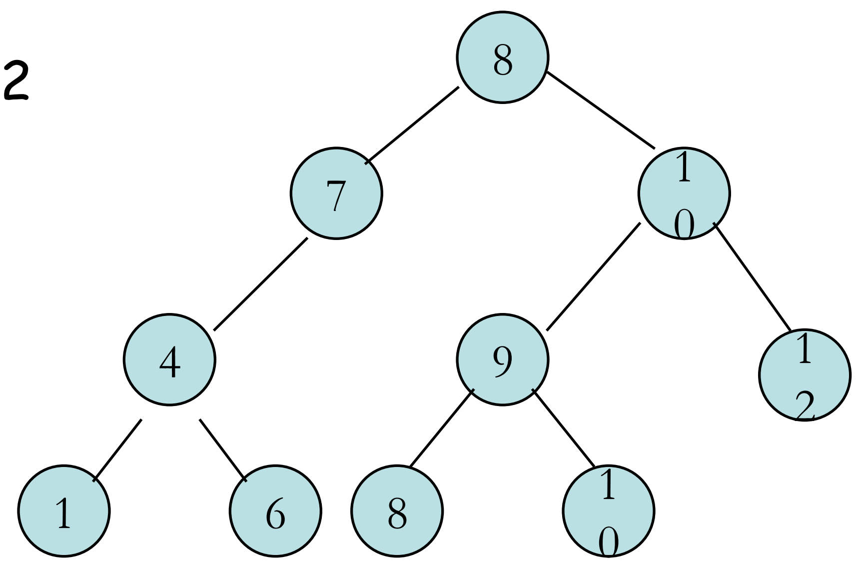
# Árboles

## Sucesor

Dado un nodo x donde key[x]=k, el sucesor de x es el nodo y tal que key[y] es la llave más pequeña, mayor que key[x]

Cuál es el sucesor de 7, 9, 10 y 12

Si right[x] != null
  min(right[x])
Sino
  father[x]

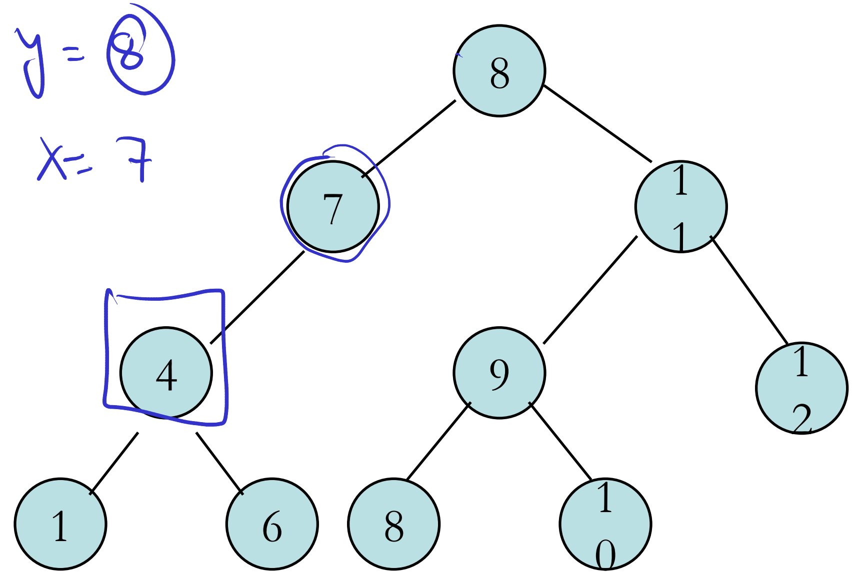


# Árboles

```
TREE-SUCCESSOR(x)
  if right[x]≠nil
     then return TREE-MINIMUM(right[x])
  y←p[x]
  while y≠nil and x=right[y]
     do x←y
        y←p[y]
  return y
```

y = 8

x= 7



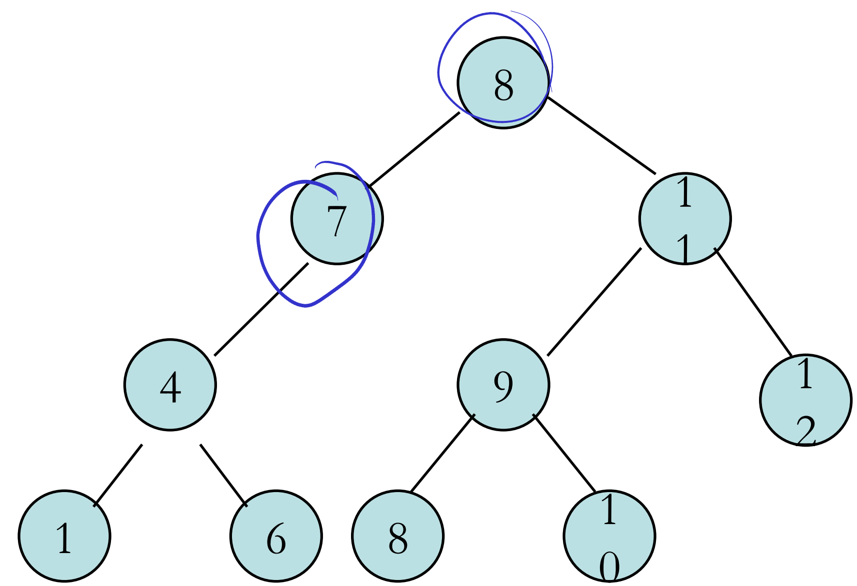

Explique el código anterior

para el caso de TREE-SUCCESSOR(4)

# Árboles

```
TREE-SUCCESSOR(x)
  if right[x]≠nil
     then return TREE-MINIMUM(right[x])
  y ← p[x]
  while y≠nil and x=right[y]
     do x ← y
        y ← p[y]
  return y
```

y = 8




Explique el código anterior

para el caso de TREE-SUCCESSOR(7)

# Árboles

```
TREE-SUCCESSOR(x)
  if right[x]≠nil
     then return TREE-MINIMUM(right[x])
  y←p[x]
                x
  while y≠nil and x=right[y]
     do x←y
        y←p[y]
  return y
```

$y = 7$

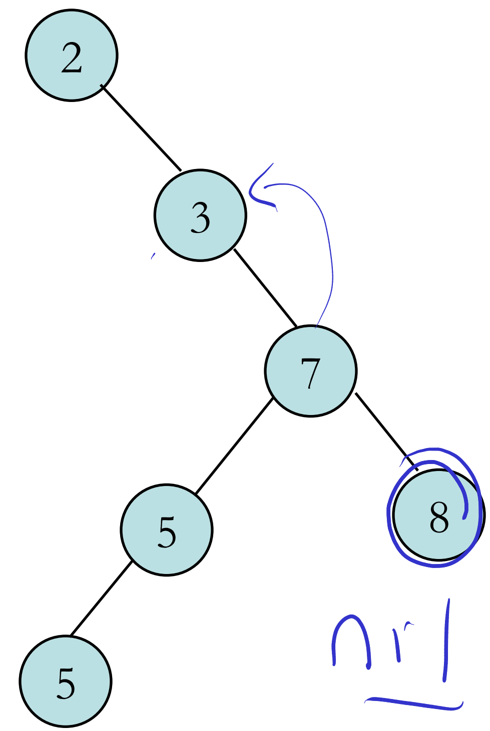
$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

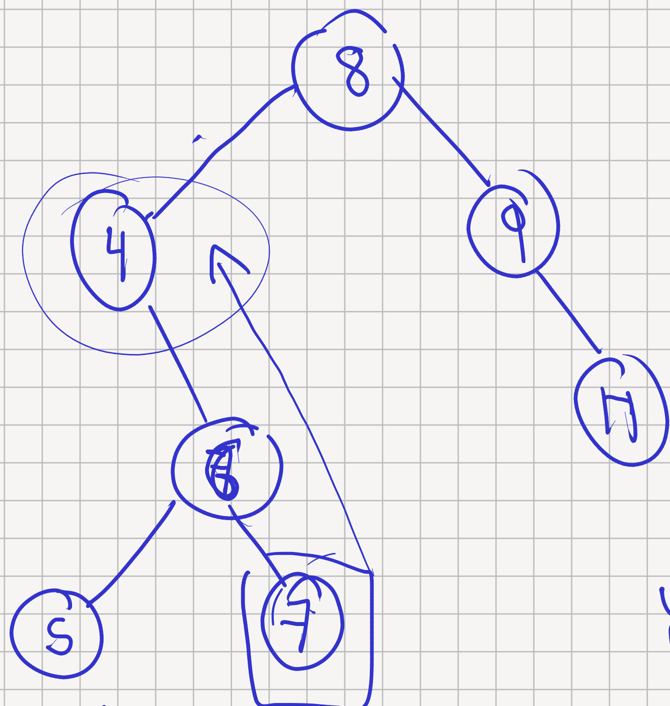
$\begin{cases} x = 2 \\ y = nil \end{cases}$

Explique el código anterior

para el caso de TREE-SUCCESSOR(8)




nil



$y = 6$

$y \neq nil$ y $x = right[y]$

$x = 6$

$y = 4$

$y \neq nil$ y $x = right[y]$

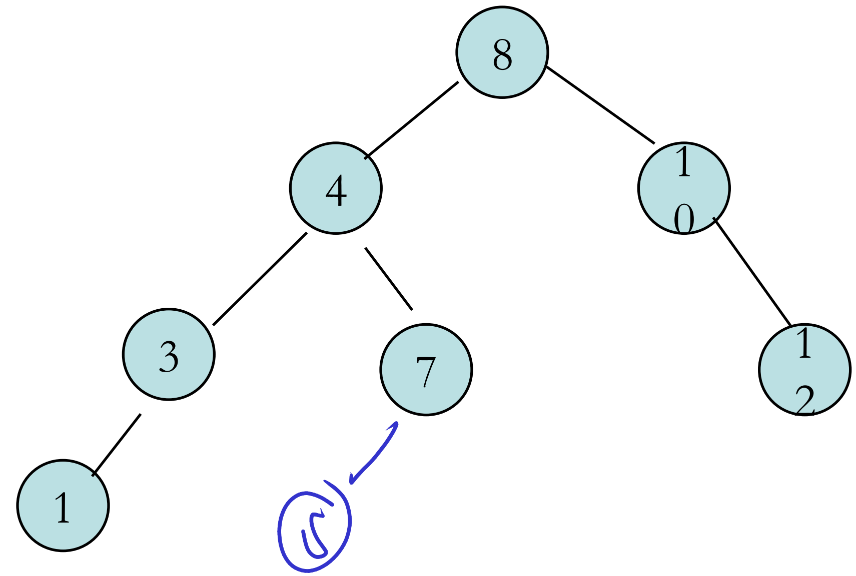
$x = 4$

$y = 8$

~~$y \neq nil$ y $x = right(y)$~~

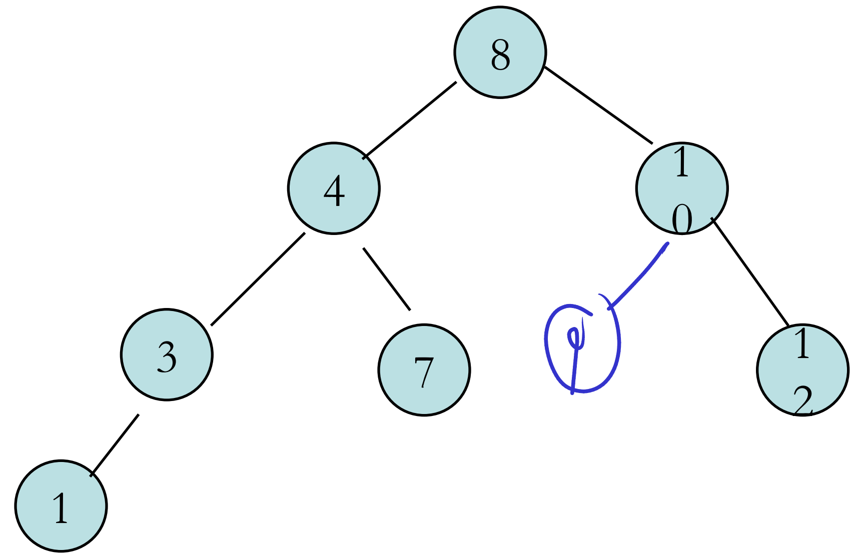
return 8

```
TREE-INSERT(x)
  y ← nil
  x ← root[T]
  while x≠nil
     do y ← x
        if key[z]<key[x]
           then x ← left[x]
           else x ← right[x]
  p[z] ← y
  if y=nil
     then root[T] ← z
     else if key[z]<key[y]
        then left[y] ← z
        else right[y] ← z
```



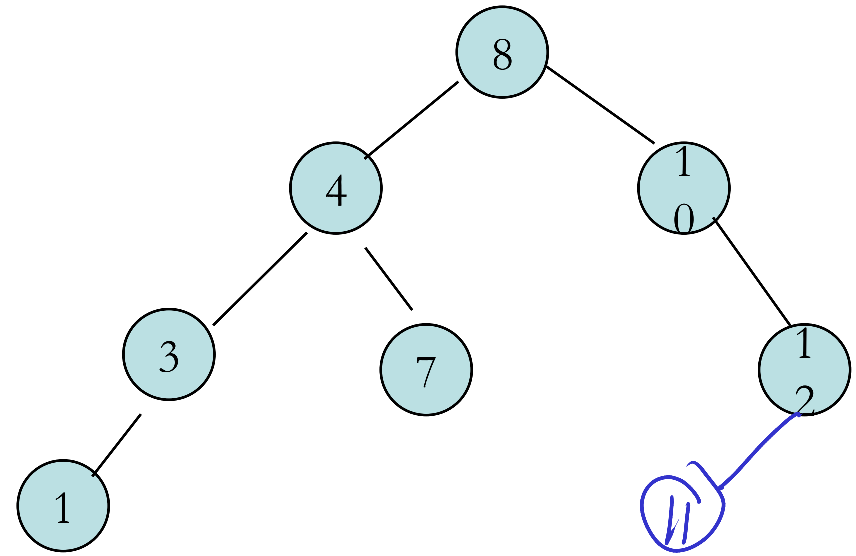

Explique el código para el caso de TREE-INSERT(z), donde key[z]=5

```
TREE-INSERT(x)
  y ← nil
  x ← root[T]
  while x≠nil
     do y ← x
        if key[z]<key[x]
           then x ← left[x]
           else x ← right[x]
  p[z] ← y
  if y=nil
     then root[T] ← z
     else if key[z]<key[y]
        then left[y] ← z
        else right[y] ← z
```



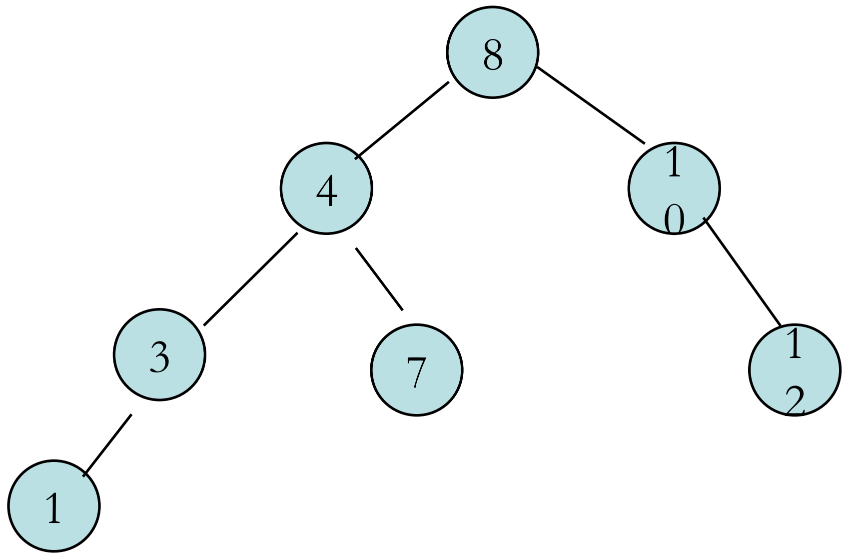

Explique el código para el caso de TREE-INSERT(z), donde key[z]=9

```
TREE-INSERT(x)
  y ← nil
  x ← root[T]
  while x≠nil
     do y ← x
        if key[z]<key[x]
           then x ← left[x]
           else x ← right[x]
  p[z] ← y
  if y=nil
     then root[T] ← z
     else if key[z]<key[y]
        then left[y] ← z
        else right[y] ← z
```



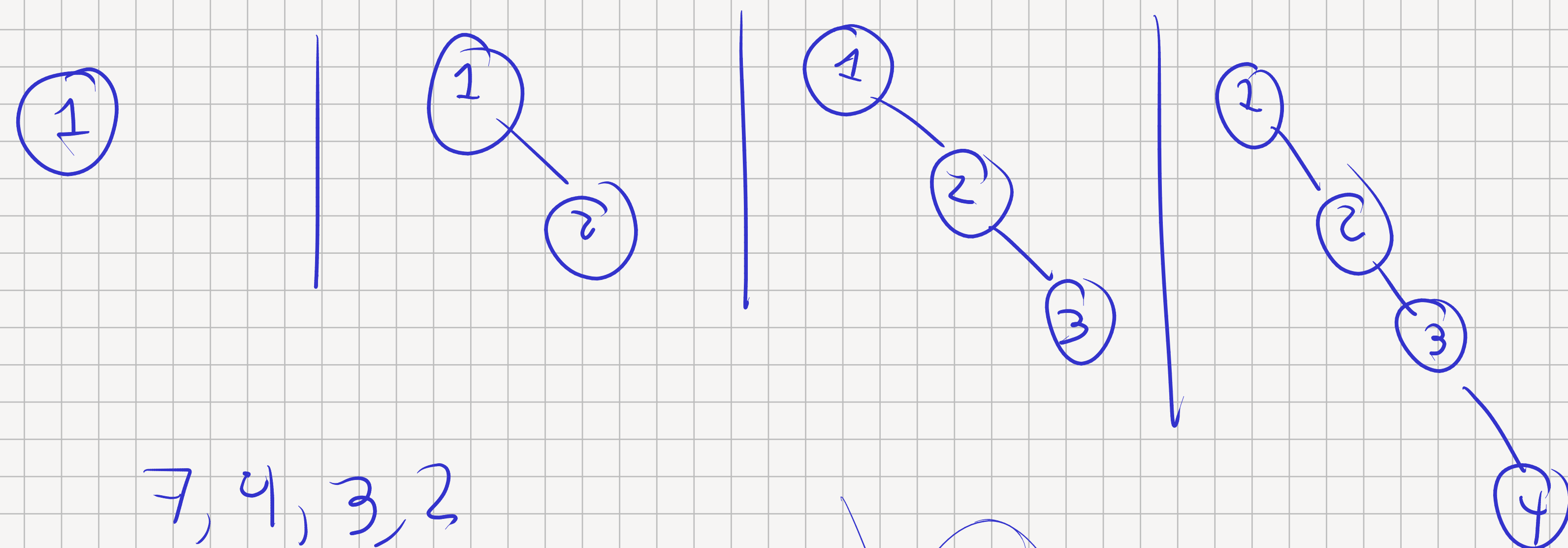

Explique el código para el caso de TREE-INSERT(z), donde key[z]=11

```
TREE-INSERT(x)
 y ← nil
 x ← root[T]
 while x≠nil
    do y ← x
       if key[z]<key[x]
          then x ← left[x]
          else x ← right[x]
 p[z] ← y
 if y=nil
    then root[T] ← z
    else if key[z]<key[y]
       then left[y] ← z
       else right[y] ← z
```

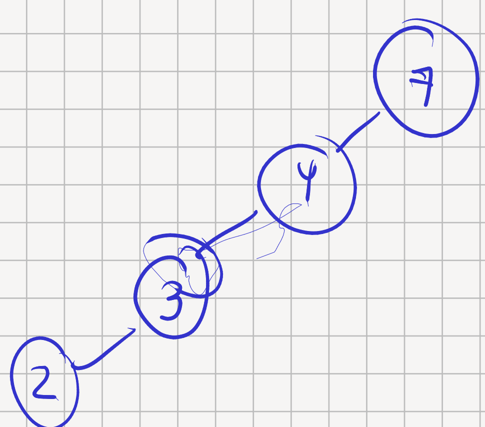


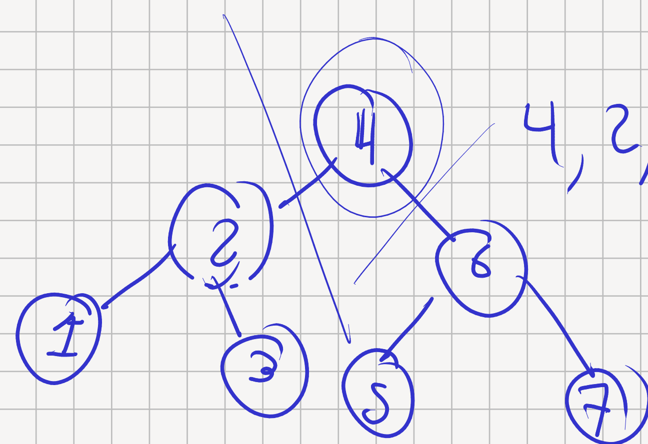

La complejidad es de O(h)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7




7, 4, 3, 2




4, 2, 6, 1, 3, 5, 7

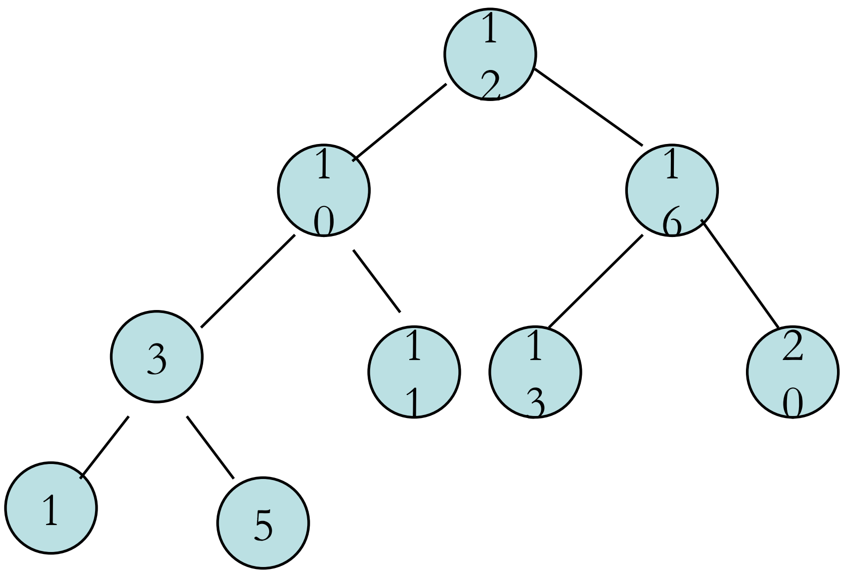
```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y ← z
    else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y]≠nil
    then x ← left[y]
    else x ← right[y]
if x≠nil
    then p[x] ← p[y]
if p[y]=nil
    then root[T] ← x
    else if y=left[p[y]]
          then left[p[y]] ← x
          else right[p[y]] ← x
if y≠z
    then key[z] ← key[y]
return y
```

## Caso 1:

Borrar z y z no tiene hijos.

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=5

Qué se debe hacer?



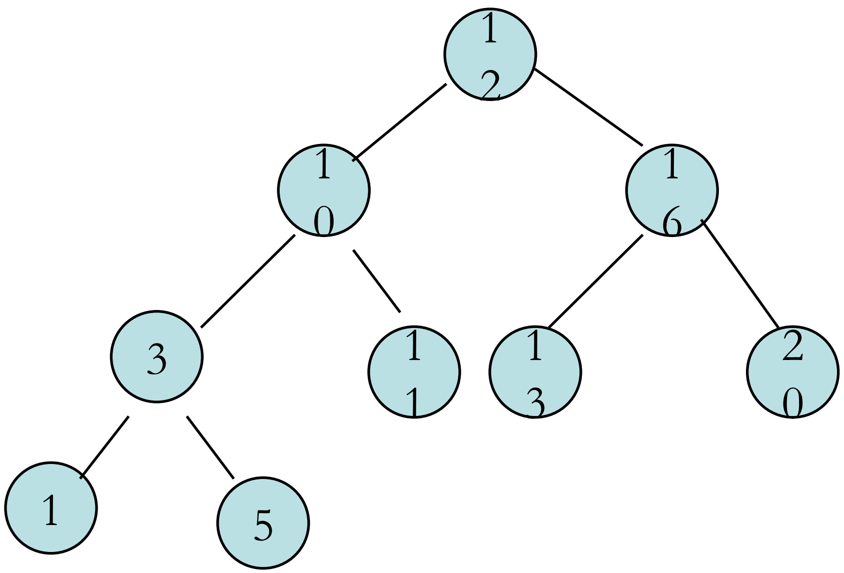
## Caso 1:

Borrar z y z no tiene hijos.

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=5

El padre de z debe ahora apuntar a nil

p[z] $\leftarrow$ nil

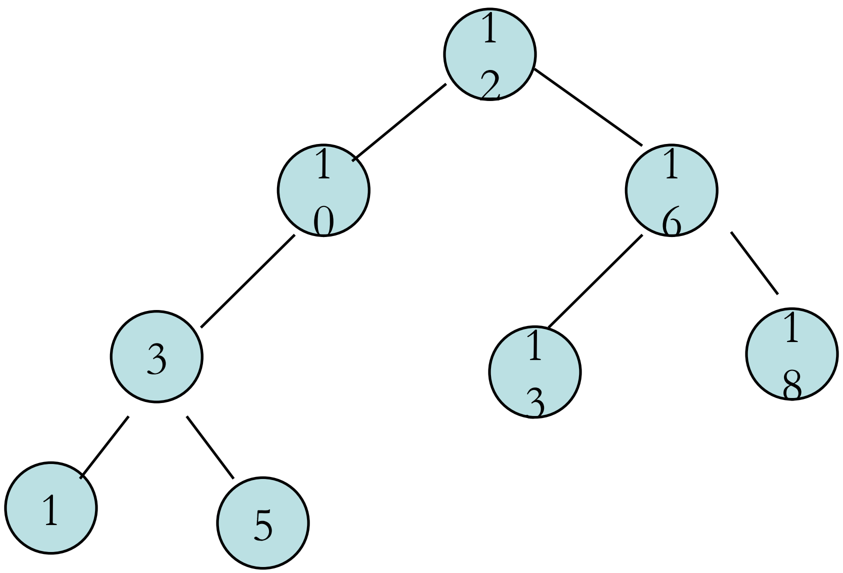


## Caso 2:

Borrar z y z tiene un solo hijo

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=10

Qué se debe hacer?

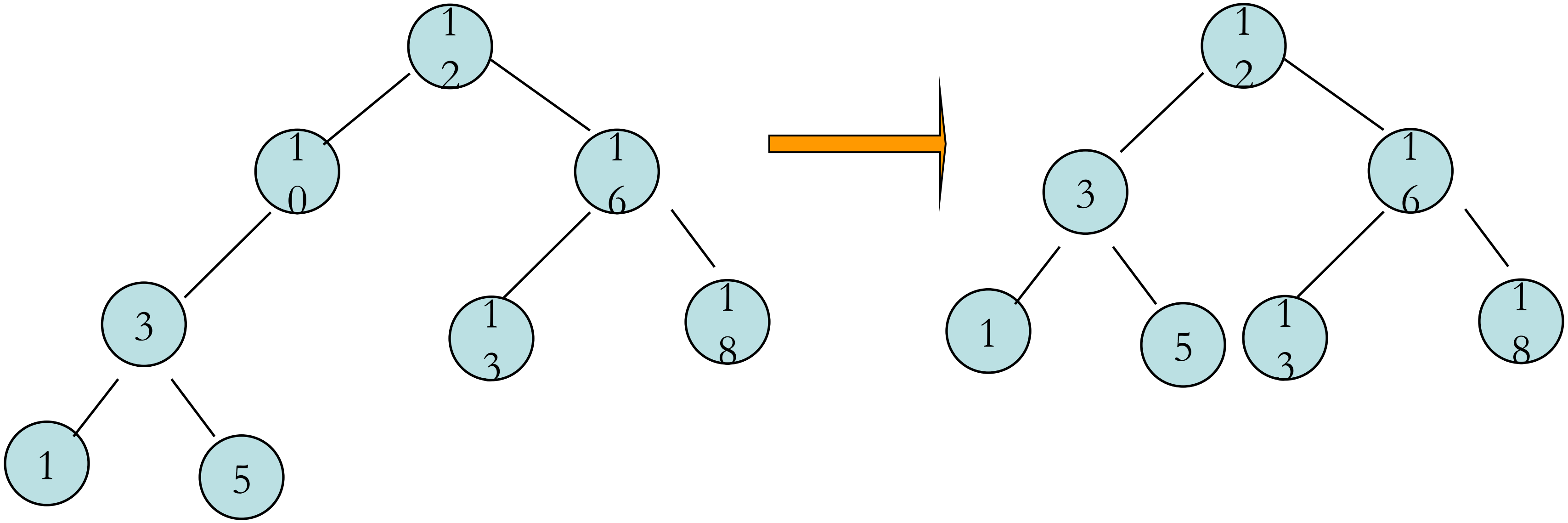


## Caso 2:

Borrar z y z tiene un solo hijo

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=10

Se separa z del árbol

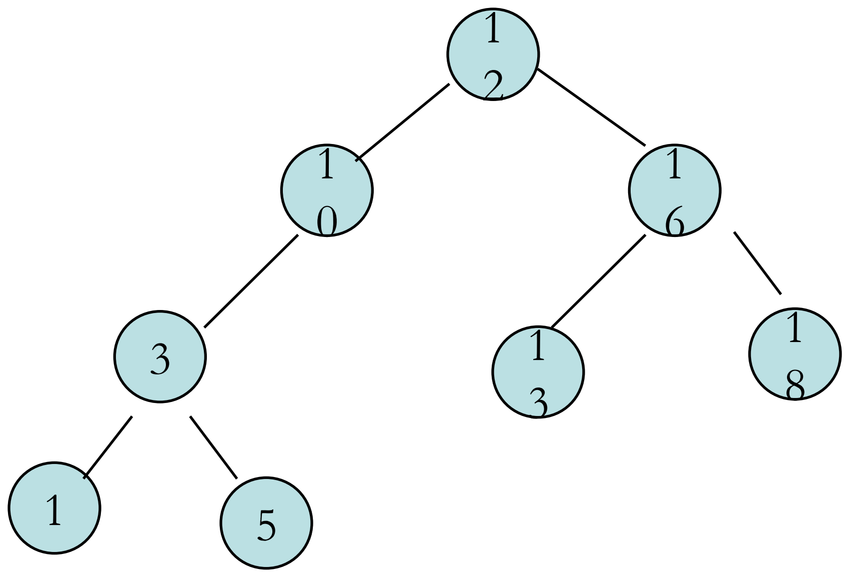


## Caso 3:

Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Qué se debe hacer?

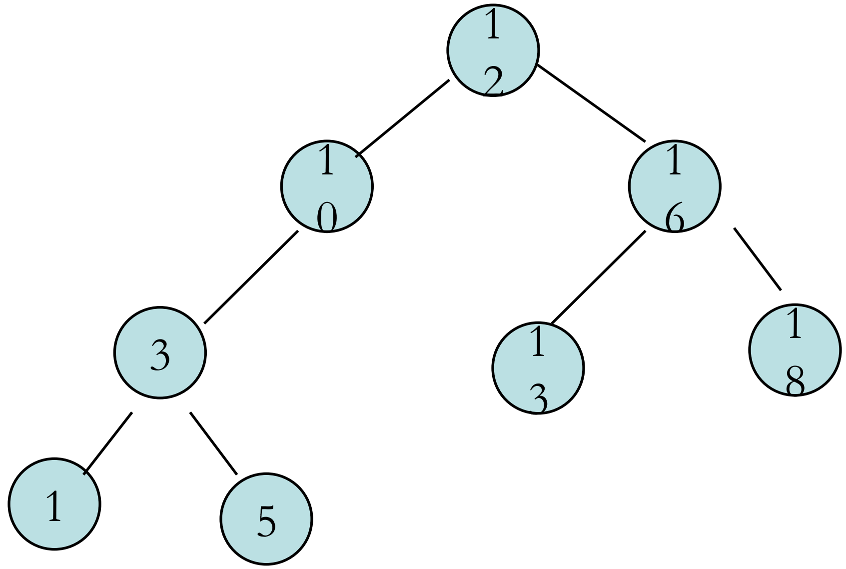


## Caso 3:

Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Qué se debe hacer?



Caso 3:

Borrar z y z tiene dos hijos

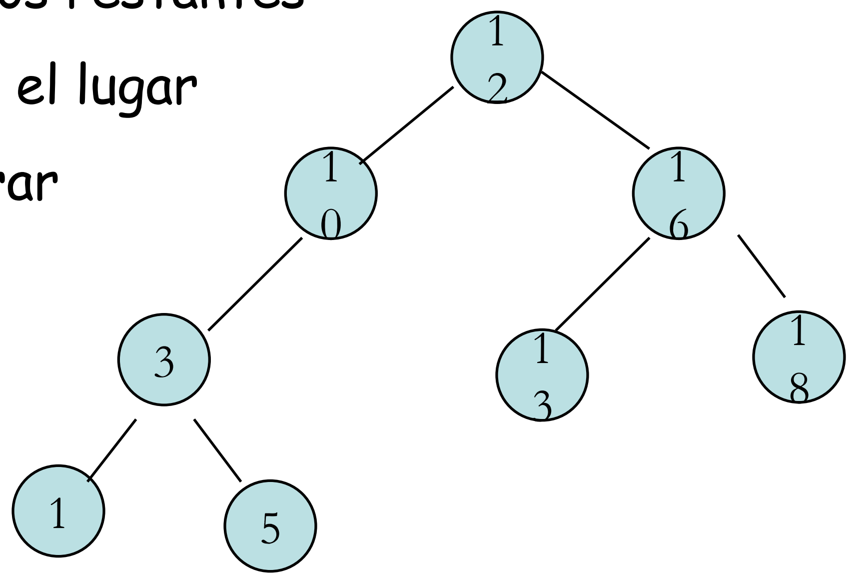
TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Qué se debe hacer?

Cuál de los nodos restantes

debería ocupar el lugar

del nodo a borrar



## Caso 3:

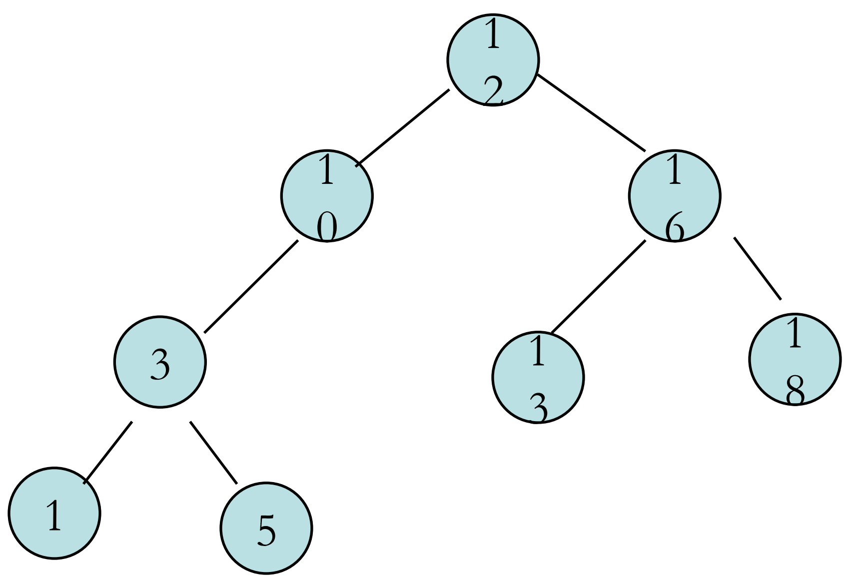
Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Se <u>separa(elimina)</u> su sucesor y del árbol

y se reemplaza su contenido con el

de z



## Caso 3:

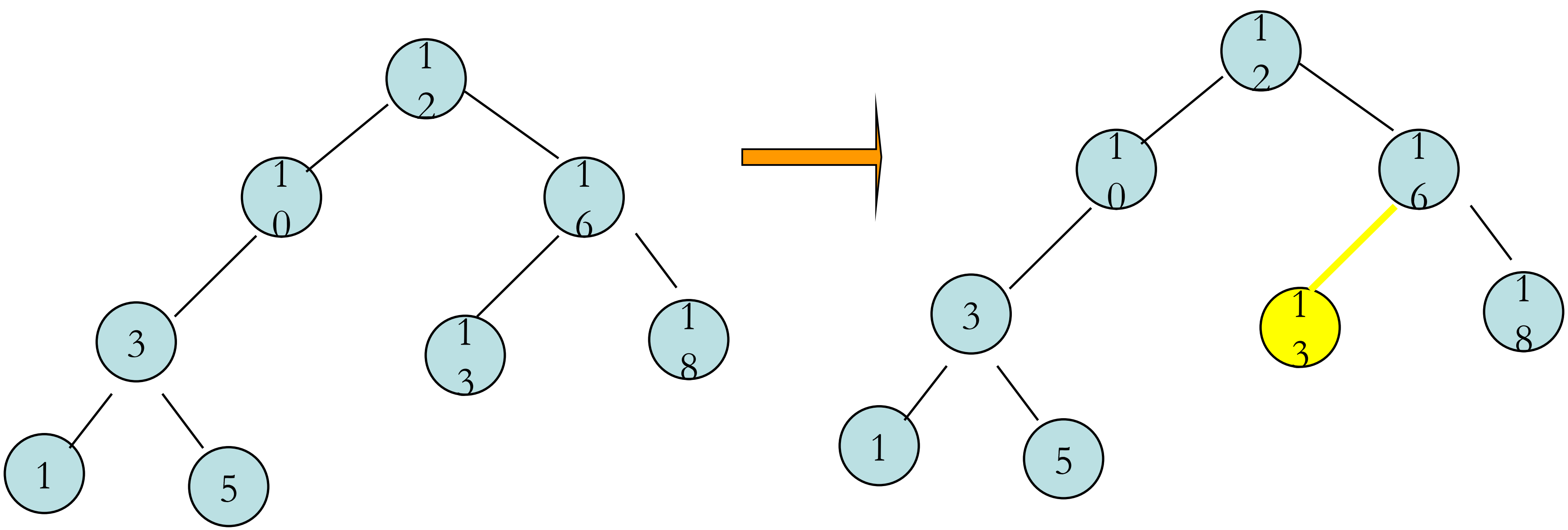
Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Se separa(elimina) su sucesor y del árbol

y se reemplaza su contenido con el

de z



## Caso 3:

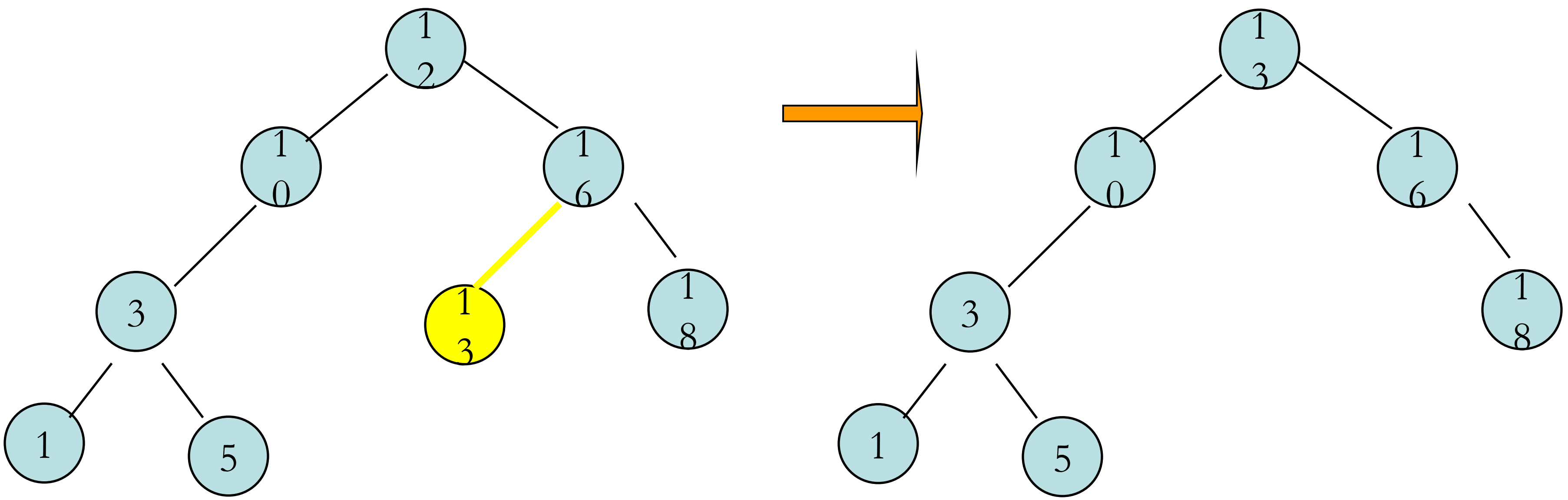
Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

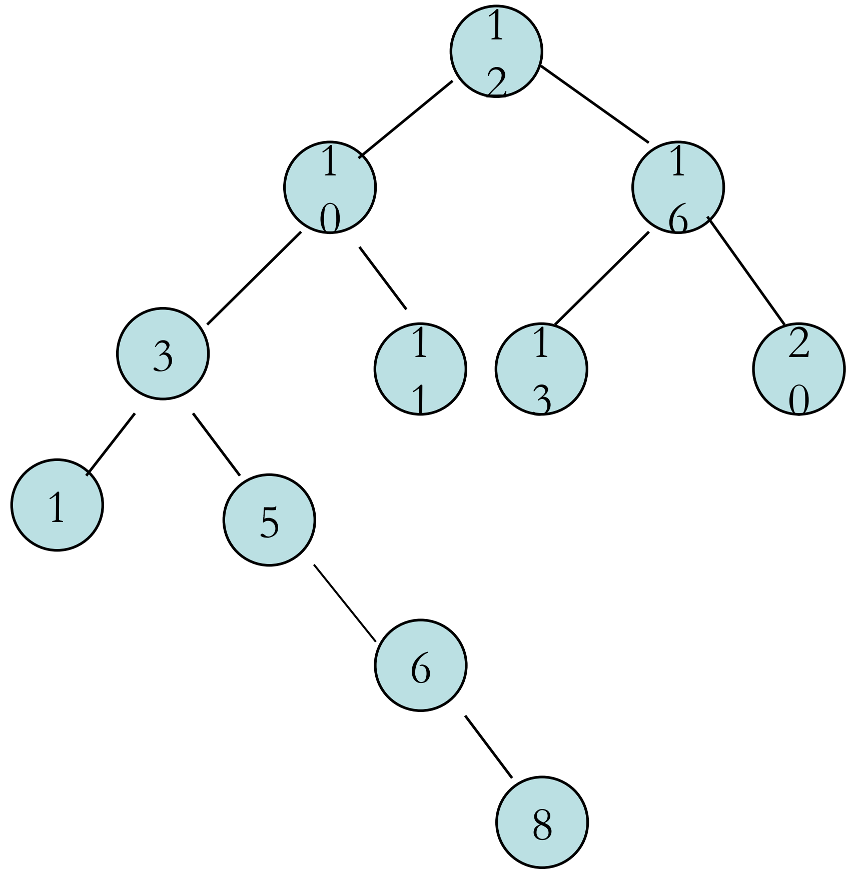
Se <u>separa(elimina)</u> su sucesor y del árbol

y se reemplaza su contenido con el

de z

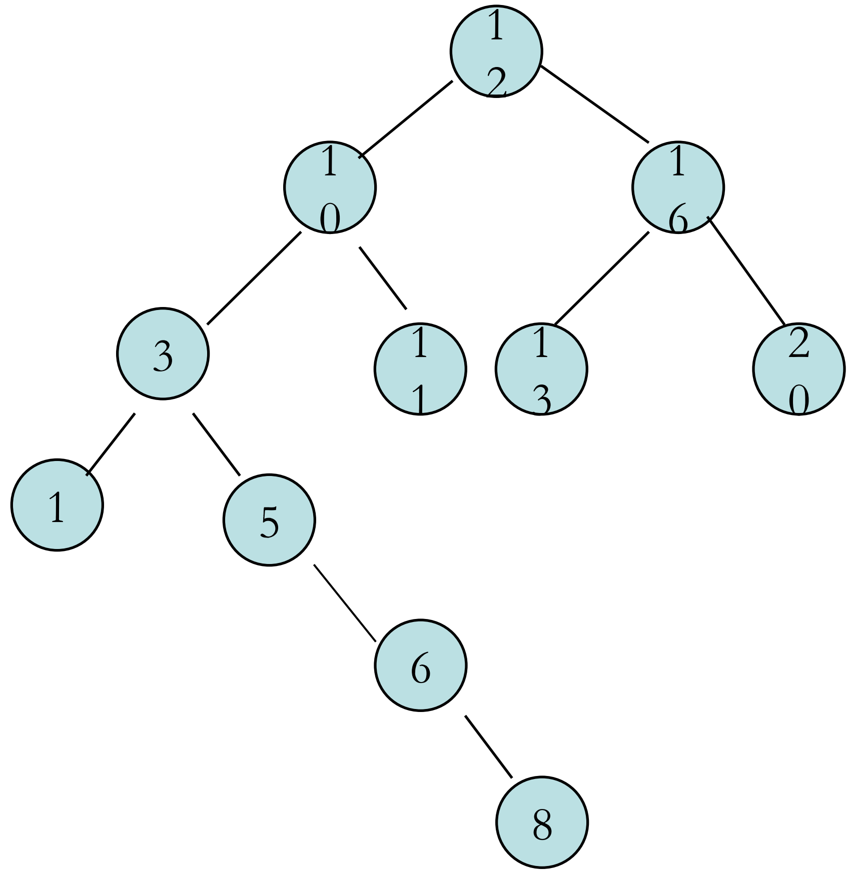


```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y ← z
    else y ← TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y]≠nil
    then x ← left[y]
    else x ← right[y]
if x≠nil
    then p[x] ← p[y]
if p[y]=nil
    then root[T] ← x
    else if y=left[p[y]]
          then left[p[y]] ← x
          else right[p[y]] ← x
if y≠z
    then key[z] ← key[y]
return y
```



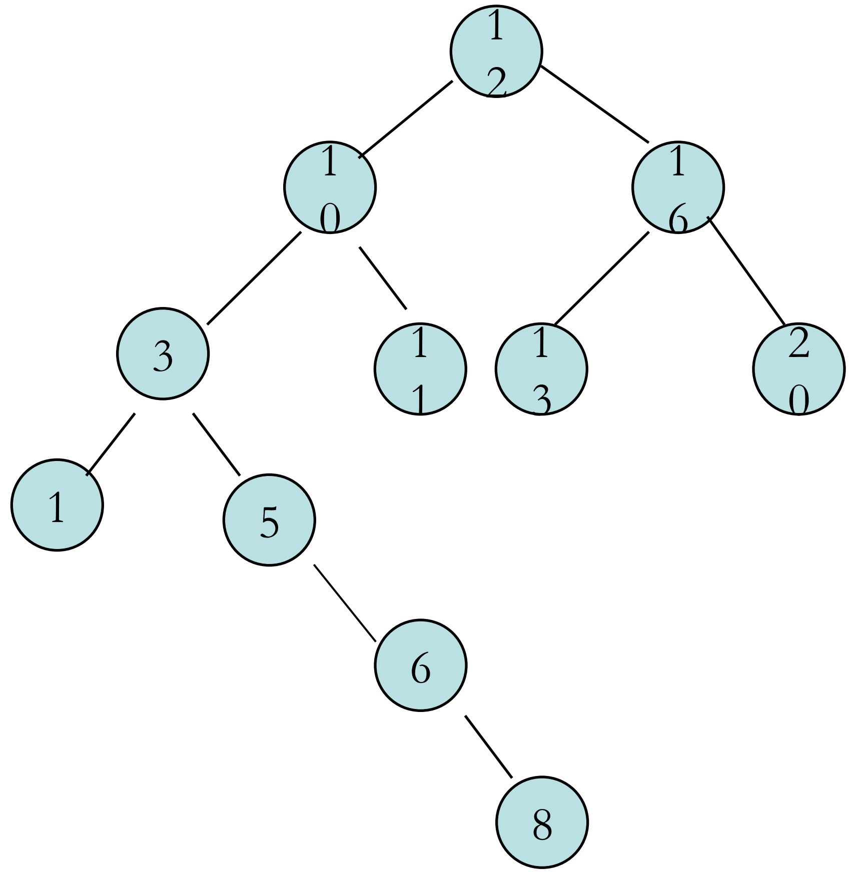

Siga el algoritmo TREE-DELETE(T,z) donde z es el nodo tal que key[z]=11

```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y]≠nil
    then x←left[y]
    else x←right[y]
if x≠nil
    then p[x]←p[y]
if p[y]=nil
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
          then left[p[y]]←x
          else right[p[y]]←x
if y≠z
    then key[z]←key[y]
return y
```




Siga el algoritmo TREE-DELETE(T,z) donde z es el nodo tal que key[z]=6

```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y]≠nil
    then x←left[y]
    else x←right[y]
if x≠nil
    then p[x]←p[y]
if p[y]=nil
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
          then left[p[y]]←x
          else right[p[y]]←x
if y≠z
    then key[z]←key[y]
return y
```




Siga el algoritmo TREE-DELETE(T,z) donde z es el nodo tal que key[z]=10

# Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 12

# Gracias

Próximo tema:

Estructuras de datos: Arboles rojinegros