Primer Examen - NP-Completitud

Complejidad y Optimización

Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Universidad del Valle

Nombre:______________________________
Código:_______________

El problema de Partición ($\mathcal{PRT}$)

- **Entrada:** Un conjunto de enteros positivos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.
- **Salida:** 1 si existe una partición de $\mathcal{A}$, es decir dos conjutnos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ y $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, tales que
$$\sum_{a_i \in \mathcal{A}_1} a_i = \sum_{a_i \in \mathcal{A}_2} a_i.$$
0 en caso contrario.

El problema de la suma de subconjuntos($\mathcal{SS}$)

- **Entrada:** Un conjunto $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ de n números, y una constante C.
- **Salida:** 1 si existe un subconjunto M' de M tal que
$$\sum_{m \in M'} m = C$$

El objetivo de este examen es demostrar que $\mathcal{SS}$ es NP-Completo.

1. **Entendimos los problemas [30 pts.]**

   a) **[2 pts.]** Cual es la salida de $\mathcal{SS}$ para la entrada $n = 7, \mathcal{A} = \{7, 5, 19, 1, 12, 8, 14\}, C = 33$.

   b) **[2 pts.]** Cual es la salida de $\mathcal{SS}$ para la entrada $n = 5, \mathcal{A} = \{7, 5, 19, 8, 14\}, C = 52$.

   c) **[2 pts.]** Cual es la salida de $\mathcal{PRT}$ para la entrada $\mathcal{A} = \{8, 3, 1, 4, 10\}$.

   d) **[2 pts.]** Cual es la salida de $\mathcal{PRT}$ para la entrada $\mathcal{A} = \{5, 6, 9, 3\}$.

   e) **[6 pts.]** Describa tres instancias de $\mathcal{SS}$ para las que la respuesta sea positiva.

f) **[5 pts.]** Describa tres instancias de $\mathcal{SS}$ para las que la respuesta sea negativa.

g) **[5 pts.]** Describa tres instancias de $\mathcal{PRT}$ para las que la respuesta sea positiva.

h) **[6 pts.]** Describa tres instancias de $\mathcal{PRT}$ para las que la respuesta sea negativa.

2. **[70 pts.]** Demuestre que $\mathcal{SS}$ es NP-completo, suponiendo que $\mathcal{PRT}$ lo es. Es decir:

a) **[10 pts.]** Demuestre que $\mathcal{SS}$ es NP

b) **[60 pts.]** Demuestre que $\mathcal{SS}$ es NP-Hard:

1) **[10 pts.]** Escoja entre las tres reducciones siguientes la que utilizará para su demostración.

RedA $\mathcal{PRT} \preceq \mathcal{SS}$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, tal que $n = p$ y $m_i = a_i$, para $i = 1..n$, y

$$C = \lceil \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} \rceil$$

RedB $\mathcal{PRT} \preceq \mathcal{SS}$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, tal que $n = p$ y $m_i = a_i$, para $i = 1..n$, y

Positivos

$$C = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} & \text{Si } \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ es par} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i & \text{Si no} \end{cases}$$

Negativos

RedC $\mathcal{PRT} \preceq \mathcal{SS}$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, tal que $n = p$ y $m_i = a_i$, para $i = 1..n$, y

$$C = \lfloor \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} \rfloor$$

Escojo ________________

Justifique porqué descarta cada una de las otras dos:
Descarto ________________porque:

Descarto ________________porque:

2) **[10 pts.]** Muestre que entiende la reducción, es decir:

a′ **[5 pts.]** Para una de las instancias positivas del problema del lado izquierdo muestre claramente la instancia que le corresponde según la reducción, y verifique que ésta sea una instancia positiva para el problema del lado derecho.

A = A1 y A2
→ Positivos
Negativos
A no es PRT

ΣA es impar
$A_1 = \lceil \frac{\Sigma A}{2} \rceil$ } ¿SS?
$A_1 \subseteq A$
→ C

$A_2 = \lfloor \frac{\Sigma A}{2} \rfloor$

b′ **[5 pts.]** Para una de las instancias negativas del problema del lado izquierdo muestre claramente la instancia que le corresponde según la reducción, y verifique que ésta sea una instancia negativa para el problema del lado derecho.

3) **[30 pts.]** Demuestre que la reducción es correcta, es decir:

a' **[15 pts.]** Instancias positivas del problema del lado izquierdo se reducen siempre en instancias positivas del problema del lado derecho.

PRT A

$A_1 = \frac{\sum A}{2}$ — e va existir Subconjunto es SS

$A_2 = \frac{\sum A}{2}$

b' **[15 pts.]** Instancias negativas del problema del lado izquierdo se reducen siempre en instancias negativas del problema del lado derecho.

Impar	Pares
$\underline{\sum A + 1}$ ✓ $\underline{\text{NO}}$	$C = \frac{\sum A}{2}$ PRT → Subconj. $\frac{\sum A}{2}$

4) **[10 pts.]** Demuestre que la reducción se hace en tiempo polinomial.

1) Transformacion 1-1 A - M

$O(n)$

2) Calcular la sumatoria

$O(n)$

$\boxed{O(n)}$