Recurrencias lineales homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Julio 2020

Complejidades en O

$b>3$ ×

P

Complejidad	Terminología
$O(1)$	Complejidad constante
$O(logn)$	Complejidad logarítmica
$O(n)$	Complejidad lineal
$O(nlogn)$	Complejidad n log n
$O(n^b)$,donde b es un racional, $b \geq 1$	Complejidad polinómica
$O(b^n)$, donde $b > 1$	Complejidad exponencial
$O(n!)$	Complejidad factorial

NP

Contenido

Recurrencias

- Las relaciones de recurrencia juegan un papel importante en el estudio de los algortimos.
- La programación dinámica en la cual el algoritmo parte un problema e varios subproblemas.
- La complejidad de tales algoritmos puede ser analizada usando especiales relaciones de recurrencia.
- También la complejidad de los algoritmos de divide y vencerás pueden ser analizados mediante relaciones de recurrencias.
- Podemos resolver problemas avanzados de conteo usando las funciones generatrices para resolver relaciones de recurrencias.

Universidad del Valle

Recurrencias

Problema bacterias

Suponga que el número de bacterias de una colonia se dobla a cada hora. Si la colonia comienza con 5 bacterias. ¿Cuántas bacterias habrán en n horas?

1. Sea a_n el número de bacterias al final de las n horas.
2. Como el número de bacterias es el doble cada hora tenemos la relación $\boxed{a_n=2a_{n-1}}$ para $n \in Z^+$.
3. Por lo tanto al cabo de 5 horas habrán : Sea $a_0 = 5$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 = 2 \cdot 5 = 10 \\
a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 10 = 20 \\
a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 20 = 40 \\
a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 40 = 80 \\
a_5 &= 2a_4 = 2 \cdot 80 = 160
\end{aligned}
$$

Problema de los conejos ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)

Problema conejos

Una pareja de conejos recién nacidos (uno de cada sexo) se sueltan en una isla. Los conejos no pueden tener descendencia hasta que cumplan dos meses, cada pareja tiene como descendencia otra pareja de conejos cada mes. Encuentre el número de conejos una vez transcurridos n meses.

mes	Parejas Repro.	Parejas Jov
1	0	1_A
2	0	1_A
3	1_A	1_B
4	1_A	$1_B + 1_C$
5	$1_A + 1_B$	$1_{B_1} + 1_C + 1_D$
6	$1_A + 1_B + 1_C$	$1_{B_1} + 1_{B_2} + 1_{C_1} + 1_D + 1_E$
7	$1_A + 1_B + 1_C + 1_{B_1} + 1_D$	$1_{B_{11}} + 1_{B_2} + 1_{B_3} + 1_{C_1} + 1_{C_2} + 1_{D_1} + 1_E + 1_F$

Problema de los conejos ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)

mes	Parejas Repro.	Parejas Jov
1	0	1_A
2	0	1_A
3	1_A	1_B
4	1_A	$1_B + 1_C$
5	$1_A + 1_B$	$1_{B_1} + 1_C + 1_D$
6	$1_A + 1_B + 1_C$	$1_{B_1} + 1_{B_2} + 1_{C_1} + 1_D + 1_E$
7	$1_A + 1_B + 1_C + 1_{B_1} + 1_D$	$1_{B_{1_1}} + 1_{B_2} + 1_{B_3} + 1_{C_1} + 1_{C_2} + 1_{D_1} + 1_E + 1_F$

1. El primer mes el número de parejas jóvenes de conejos es $f_1 = 1$ si f_n es el número de parejas en n meses.
2. Durante el segundo mes $f_2 = 1$ y f_{n-1} el número de parejas que había el mes anterior.
3. f_{n-2} es el número de parejas en cada nacimiento par.

Universidad del Valle

Número de Fibonacci

Problemas de conejos como una relación de recurrencia

Sea $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ entonces

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

para $n \geq 3$

Problema bancario

Problema bancario

Supongamos que una persona deposita 10000 pesos en una cuenta bancaria que le proporciona un interés anual del 11%. Si los intereses se abonan a la misma cuenta. ¿Cuanto dinero habrá en la cuenta al cabo de 30 años?

Sea P_n: saldo de la cuenta la cabo de n años.
P_{n-1}: saldo de la cuenta transcurridos $n-1$ años.
$0.11P_{n-1}$ es el interés y P_{n-1} es el saldo. Por lo tanto, para $P_0 = 10000$

$1.11^{30} \times 10000$

$$P_n = \overbrace{P_{n-1} + 0.11P_{n-1}} = 1.11P_{n-1}$$

Calculamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$

Problema bancario

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Calculamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$

$P_0 = 10000$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1.11P_0 \\
P_2 &= 1.11(1,11)P_0 = (1,11)^2 P_0 \\
P_{\boxed{3}} &= 1.11P_2 = (1,11)^{\boxed{3}} P_0 \\
&\vdots \\
\boxed{P_n} &\boxed{= (1.11)^n P_0}
\end{aligned}$$

Suponga que el número de bacterias de una colonia se triplica a cada hora.

1. Determinar una relación de recurrencia para el número de bacterias después de transcurridas n horas

$$a_n = 3a_{n-1}$$

Problema bacterias

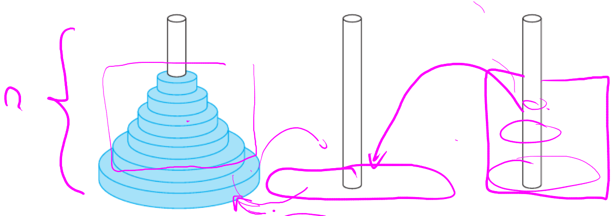
2. Si se utilizan 100 bacterias para empezar una nueva colonia ¿Cuántas bacterias habrá en la colonia después de diez horas? $a_0 = 100$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3a_0 \\
a_1 &= 3(100) \qquad 90 \\
a_2 &= 3 \cdot \boxed{3(100)} \qquad \cdot\, 3^2(100) \\
a_3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3(100) \qquad 3^3(100) \\
&\;\;\vdots \\
a_n &= 3^n(100)
\end{aligned}
$$

Si $n = 10$ tenemos $a_{10} = 3^{10}(100)$ bacterias.

Torres de Hanoi

Se componen tres barras montadas sobre una base cada una junto con discos de diferentes tamaños. Reglas del juego:
1. Los discos se mueven de uno en uno.
2. Un disco no se puede colocar encima de otro más pequeño.
3. Los discos colocados en la primera barra se deben colocar en la segunda barra ordenados con el de mayor base.



$2T(n-1) + \boxed{1}$

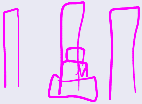
Solución de Torres de Hanoi

Sea H_n número de movimientos necesarios para resolver el problema con n discos. Sea H_1 el movimiento de tener un disco.

$H_n = 2H_{n-1} + 1$

1. Los $n - 1$ discos de encima se pueden llevar a cualquier torre, realizando H_{n-1} movimientos.
2. Siempre se realizan H_{n-1} para mover el disco a una torre y H_{n-1} a la otra

$$\boxed{H_n = 2H_{n-1} + 1}$$



$$H_2 = 2H_1 + 1 = 3$$
$$H_3 = 2H_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$
$$H_4 = 2H_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

Problemas de cadenas con relación de recurrencia

Definición

Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para el número de cadenas de n bits que **NO** contienen dos ceros consecutivos.¿Cuántas cadenas de longitud 4 hay?

Inicialmente, a_n: Cadenas de n bits que inician en 1 + Cadenas de n bits que inician en 0.
Si $n = 1$, 0 y 1, $a_1 = 2$ (cadenas de longitud 1)
Si $n = 2$, 01, 10, 11, $a_2 = 3$ (cadenas de longitud 2)
Si $n = 3$

Universidad del Valle

Problemas de cadenas con relación de recurrencia

1. Tomamos las cadenas de $n-1$ bits y le añadimos un 1 al principio, sea $n-1=2$, es decir, $01, 10, 11$ y le agregamos 1, $011, 101, 111$
2. Tomamos las cadenas de $n-2=1$ bits y le añadimos un 10 al principio, entonces $010, 110$. Por lo tanto tenemos que $a_3=5$, es decir, $a_3=a_2+a_1=3+2=5$

En general,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para} \quad n \geq 3$$

a_{n-1}: cadenas de $n-1$ bits que inician en 1.
a_{n-2}: cadenas de $n-2$ bits que inician en 0.

Cadenas 00 consecutivos

1) 0
1

2) 01
10
11

3) 010
011
101
110
111

4) 0101
0110
0111
1010
1011
1101
1110
1111

Rojo yo puedo agregar un 1 sin problema

2 3 5 8

$$T(n) = \underbrace{T(n-2)}_{0} + \underbrace{T(n-1)}_{1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T(1) = 2 \\ T(2) = 3 \end{array}}$$

10 {

Tamaño {0,1,2}

22

10

1)
0
1

2)
00
01
11

3)
001
000
011
111

4)
0011
0001
0000
0111
1111

$\boxed{T(n) = T(n-1) + 1}$

$\boxed{T(1) : 2}$

8 ~ 22

1)
0
1
2

3

2)
00
01
02
10
11
12
20
21

3)
002]3
012]3
020
021]2
102]3
112]3
120
121]2
202]3
212]3

4)
T(n-2)
1 | 2
0 | 2
T(n-1)

$\boxed{22}$

$$T(n) = 2\,\overbrace{T(n-1)}^{0,1} + 2T(n-2)$$

$T(1) = 3$
$T(2) = 8$

$T(3) = 16 + 6 = 22$
$T(4) = 44 + 16$
60

0 1 0 1

1 0 1 0 1

00
01
11 $T(n-2)$

1)
0
1

2)
00
01
10
11

3)
000
001
010
011
100
110
111

4)
0000 2
0001 2
0010 1
0011 2
0100 2
0110 1
0111 2
1000 2
1001 2
1100 2
1110 1
1111 2

101

2

4 7

1

12 4

1

12 7 4

8-

2, 4, 7, 12, 21

1 2 3 4 5

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

$$0 + T(n-4)$$

7 - 4 = 3

12 - 7 = 5

21 - 12 = 9

37 - 21 = 16

65 - 37 = 28

21

1

|

2

|

3

101

8-1=7

4)

1010

1011

0101

1101

2

16-4=12

5)

10100

10101

101$\boxed{10}$

10111

010$\boxed{10}$

01011

110$\boxed{10}$

11011

00101

01101

11101

32-11=21

6)

22

000101

001101

011101

100101

111101

64-22-5

37

n 1 ProblemaP3 2 RR 2
n 2 ProblemaP3 4 RR 4
n 3 ProblemaP3 7 RR $\boxed{7}$
n 4 ProblemaP3 12 RR 12
n 5 ProblemaP3 21 RR $\boxed{21}$
n 6 ProblemaP3 37 RR $\boxed{38}$
n 7 ProblemaP3 65 RR $\boxed{71}$
n 8 ProblemaP3 114 RR 136
n 9 ProblemaP3 200 RR 265

$71 = 38 +$

$136 = 71 +.$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-4)$$

$T(1) = 2 \quad T(2) = 4 \quad T(3) = 7 \quad T(4) = 12$

n

0 | 00 | 001 | ~~0010~~, 0011
0 | 01 | 010 | 0100, 0101
0 | 01 | 011 | ~~0110~~, 0111
1 | 10 | 100 | 1001
1 | 10 | 101 | ~~1010~~, 1011
1 | 11 | 110 | ~~1110~~
1 | 11 | 111 | 1111

13

1100
1101

1000
0000
0001

2 4 7

$$T(n) = \overbrace{T(n-1)}^{1} + \underbrace{T(n-2)}_{11} + T(n-3)$$

81 - 44 - 24 = 13

44 - 24 - 13 = 7

13 - 7 - 4 = 2

5)	6)	7)
24	44	81

Base 3 $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

No tirnm 22

1) 3^1

0

1

2

3

2) 3^2

00
01
02
10
11
12
20
21

3) $3^3 = 27$

000
001
002
010
011
012
020
021

100
101
102
110
111
112
120
121

200
201
202
210
211
212

4) 3^4

8

22

$$\boxed{T(n) = 2T(n-1) + 2T(n-2)}$$

0
1
} 2

Contenido

Recurrencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes

Una relación lineal, homogénea con coeficientes constantes es de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \quad \text{Homogénea de orden } k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes reales y $\boxed{c_k \neq 0}$

Recurrencias lineales homogéneas

Recurrencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes

Para resolver la R.R suponemos una solución $a_n = r^n$, r constante.

$a_n = r^n$ es solución de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ **sii**

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k} \tag{1}$$

Recurrencias lineales homogéneas

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k} \tag{2}$$

Dividimos por r^{n-k}

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{c_1 r^{n-1}}{r^{n-k}} + \frac{c_2 r^{n-2}}{r^{n-k}} + \ldots + \frac{c_k r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

Planteamos la ecuación característica:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_{k-1} r + c_k \tag{3}$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0 \tag{4}$$

$a_n = r^n$ es solución **sii** r es solución de (4)

Teorema

Sean c_1 *y* c_2 *reales, supongamos que* $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *tiene dos raices reales distintas* r_1 *y* r_2*. Entonces la suceción* $\{a_n\}$ *es una solución de la recurrencia* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *sii* $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$*, para* $n = 0, 1, 2$ *donde* α_1 *y* α_2 *son constantes.*

$T(n) = 2T(n-1) + 2T(n-2)$

Solucion

$T(n) = r^n$

$$\boxed{r^n = 2r^{n-1} + 2r^{n-2}}$$

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{2r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{2r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

$$\frac{\cancel{r^n}}{\cancel{r^n} r^{-2}} = \frac{2\cancel{r^n} r^{-1}}{\cancel{r^n} r^{-2}} + \frac{2\cancel{r^n}\cancel{r^{-2}}}{\cancel{r^n}\cancel{r^{-2}}}$$

$$\frac{1}{r^{-2}} = \frac{2r^{-1}}{r^{-2}} + 2$$

$$r^2 = 2\frac{r^2}{r} + 2$$

Ecuación característica

$a^{b+c} = a^b a^c$

$$r^2 = 2r + 2$$

$r^2 = 2r + 2$

$$\boxed{r^2 - 2r - 2 = 0}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad \boxed{b^2 - 4ac \geq 0}$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3 \times 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$1 + \sqrt{3}$

$1 - \sqrt{3}$

$$T(n) = A(1-\sqrt{3})^n + B(1+\sqrt{3})^n$$

$$T(n) = 2T(n-1) + T(n-2)$$

1) $T(n) = r^n$ $\qquad r^n = 2r^{n-1} + r^{n-2}$

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{2r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

$$r^2 = 2r + 1$$

$$\boxed{r^2 - 2r - 1 = 0}$$

E.C

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2 \times 4}}{2} = \frac{\cancel{2} \pm 2\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{T(n) = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n}$$

$r^n = r^{n-1} + 2r^{n-2} \Rightarrow r^2 = r + 2 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0$

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$

1. La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. Así **Por teorema**, la secuencia $\{a_n\}$ es la solución de la recurrencia **sii**

$$a_n = \overset{A}{\alpha_1} 2^n + \overset{B}{\alpha_2}(-1)^n$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 7 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1)$$

Recurrencias lineales homogéneas

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $\boxed{a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}}$ para $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$

2. Entonces $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -1$ por lo tanto la solución de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

$$T(n) = 7T(n-1) + 6T(n-2)$$

$T(0) = 3 \quad T(1) = 15$

$\downarrow \; T(n) = r^n$

$$r^n = 7r^{n-1} + 6r^{n-2}$$

$$r^2 = 7r + 6 \qquad \boxed{r^2 - 7r - 6 = 0} \qquad \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(-6)}}{2}$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49 + 24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$\rightarrow \; T(n) = A\left(\frac{7 - \sqrt{73}}{2}\right)^n + B\left(\frac{7 + \sqrt{73}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ 15 = A\left(\frac{7 - \sqrt{73}}{2}\right) + B\left(\frac{7 + \sqrt{73}}{2}\right) \end{cases}$$

$A \approx 0.97331$

$B \approx 2.026685$

$$T(n) = 6T(n-1) - 2T(n-2)$$

$T(0) = 8$

$T(1) = 16$

$6 \times 16 - 2 \times 8 = 96 - 16 = 80$

$$r^2 - 6r + 2 = 0$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 2}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 7}}{2}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \boxed{3 \pm \sqrt{7}}$$

$$T(n) = A(3 - \sqrt{7}) + B(3 + \sqrt{7})$$

$$T(n) = 4T(n-1) + T(n-2)$$

$T(0) = 10$

$T(1) = 16$

$$r^2 - 4r - 1$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$T(n) = A(2 - \sqrt{5})^n + B(2 + \sqrt{5})^n$$

$10 = A + B$

$16 = A(2 - \sqrt{5}) + B(2 + \sqrt{5})$

$$\boxed{T(n) = 2T(n-1) + 3T(n-2)}$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \frac{6}{2} = 3 \quad \frac{-2}{2} = -1$$

$$T(n) = A(-1)^n + B(3)^n$$

$$T(n) = N(-1)^n + M(3)^n$$

$$T(n) = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(3)^n$$

- Es capaz de plantear la EC de un RR

T(n) = 3T(n-1)+4T(n-2)

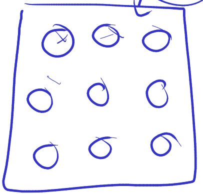
$$\boxed{r^2 - 3r - 4 = 0}$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$T(n) = J(-1)^n + K(4)^n$$

15



7

$15C7$

$$\boxed{T(n) = T(n-1)} + 1$$

Cues to return

n

$$r^n = r^{n-1}$$

$$r = 1$$

$$r - 1 = 0$$

$$T^h(n) = A\,1^n$$

$$T^h(n) = A$$

$$T(n) = T(n-1) + t(n-2) + t(n-3)$$

$$\boxed{r^3 - r^2 - r - 1} = 0$$

Resolver la relación de recurrencia de fibonacci

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$ por tanto la ecuación característica $r^2 - r - 1 = 0$ cuyas raíces son: $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ por lo tanto por teorema:

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Para algunas constantes α_1 y α_2 y las condiciones iniciales $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ f_1 &= \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Resolver la relación de recurrencia de fibonacci
La solución de las ecuación $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$ y $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$, por tanto una **fórmula explicita de Fibonacci:**

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales homogéneas

Resolver la recurrencia $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ para $n \geq 0$, $a_0 = 2$ y $a_1 = 8$

1. Sea $a_{n+2} = r^{n+2}$ para $n \geq 0$ por tanto se obtiene la ecuación característica $r^2 + 4r - 5 = (r+5)(r-1) = 0$ cuyas raíces $r_1 = -5$ y $r_2 = 1$
2. La sucesión $\{a_n\}$ es solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1(-5)^n + \alpha_2(1)^n$$

3. Por tanto el sistema de ecuaciones para obtener α_1 y α_2

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= 8 = \alpha_1(-5) + \alpha_2 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 3$

$$a_n = 3(1)^n - (-5)^n$$

$T(n) = 8T(n-1) - 7T(n-2)$

$T(0) = 8$
$T(1) = 12$

1) ¿Cual es la E.C?

$\boxed{r^2 - 8r + 7 = 0}$

$\frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 7}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2}$

$\frac{8+6}{2} = 7$

$\frac{8-6}{2} = 1$

2) ¿Cual es la solución general?

3) ¿Cuales son los valores de las constantes?

2) $T(n) = A(7)^n + B(1)^n$

$8 = A + B$
$12 = 7A + B$

$-4 = -6A$

$A = 4/6$

$8 = \frac{4}{6} + B$

$\frac{48}{6} - \frac{4}{6} = B$

$\frac{44}{6} = B$ $\quad \frac{22}{3} = B$

3) $\boxed{T(n) = \frac{4}{6} 7^n + \frac{22}{3}}$

$T(n) = 6T(n-1) + 7T(n-2)$

$T(0) = 6$

$T(1) = 18$

$r^2 - 6r - 7 = 0$

$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \times 7}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$ → 7, -1

Sol general

$T(n) = A(7)^n + B(-1)^n$

$6 = A + B$

$18 = 7A - B$

$24 = 8A$

$\boxed{A = 3}$

$\boxed{B = 3}$

$$\boxed{T(n) = 3 \times (7)^n + 3(-1)^n}$$

← Sol

Recurrencias lineales homogéneas

Teorema 2

Sean c_1 y c_2 reales con $c_2 \neq 0$, supongamos que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ tiene una sola raíz r_0. Una secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ **sii** $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, para $n = 0, 1, 2$ donde α_1 y α_2 son constantes.

$T(0)=4$

$T(n) = A3^n + Bn3^n$

$T(1)=10$

3^n $n3^n$

$r_1 = 3$

$r_2 = 3$

$\boxed{b^2 - 4ac = 0}$

Recurrencias lineales homogéneas

Solucionar la recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ y condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 6$

1. Entonces $r^2 - 6r + 9 = 0$, $(r-3)^2 = 0$ tiene como única raíz $r = 3$.
2. La solución de la recurrencia por **teorema 2** es:

$$a_n = \alpha_1 \boxed{3^n} + \alpha_2 \boxed{n3^n}$$

3. Usando los valores iniciales calculamos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \quad 1 = \alpha_1 \\ a_1 &= 6 \quad = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$

$$a_n = 3^n + n3^n$$

Recurrencias lineales homogéneas

Teorema 3

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con k **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son constantes.

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

1. La ecuación característica $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 1, r_2 = 2$ y $r_3 = 3$, porque $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$
2. La solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Por tanto las constantes deben ser calculadas

$$\begin{aligned} a_0 = 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 = 5 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3, \\ a_2 = 15 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9 \end{aligned}$$

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$, Por lo tanto la **única solución** de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$ con

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Recurrencias lineales homogéneas

Teorema 4

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con t **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_t$ con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_t$ respectivamente, así que $m_i \geq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, t$ y $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$ Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$\begin{aligned} a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + \\ (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n + \ldots + \\ (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_{i,j}$ son constantes para $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$

Supongamos que las raíces de la ecuación característica son $2, 2, 2, 5, 5$ y 9 que forma tiene la solución general.

1. Hay tres raíces distintas.
2. Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.
3. Solución

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n$$

$n = 3$

$$2^n(A + Bn + Cn^2) + 5^n(D + En) + \boxed{C}\,9^n$$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales homogéneas

Encontrar la solución la recurrencia

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Con $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$, la ecuación característica de la recurrencia es :

$r = -1$

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_{1,0} \\ a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2}, \\ a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2} \end{cases}$$

Entonces $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3$ y $\alpha_{1,2} = -2$, la única solución es la secuencia $\{a_0\}$

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

$$T(n) = -8T(n-1) - 4T(n-2) + 80T(n-3) + 64T(n-4) - 256T(n-5)$$

$T(0) = 2$ $\quad$ $T(2) = 9$ $\quad$ $T(4) = 25$

$T(1) = 5$ $\quad$ $T(3) = 16$

$$EC \Rightarrow \boxed{r^5 + 8r^4 + 4r^3 - 80r^2 - 64r + 256 = 0}$$

$r_1 = 2 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = -4 \quad r_4 = -4 \quad r_5 = -4$

$$T(n) = A2^n + Bn2^n + C(-4)^n + Dn(-4)^n + En^2(-4)^n$$

4

n	
0	$2 = A + C$
1	$5 = 2A + 2B - 4C - 4D - 4E$
2	$9 = 4A + 8B + 16C + 32D + 64E$
3	$16 = 8A + 24B - 64C - 192D - 576E$
4	$25 = 16A + 64B + 256C + 1024D + 4096E$

16×4

16×256

A B C D E

$$T(n) = -8T(n-1) - 4T(n-2) + 80T(n-3) + 64T(n-4) - 256T(n-5)$$

$$T(5) = -8T(4) - 4T(3) + 80T(2) + 64T(1) - 256T(0)$$

$T(0) = 2$ $\cancel{T(2) = 9}$ $\cancel{T(4) = 25}$

$T(1) = 5$ $\cancel{T(3) = 16}$

$$T(5) = -8 \times 25 - 4 \times 16 + 80 \times 9 + 64 \times 5 - 256 \times 2$$

$$T(n) = 15T(n-1) - 75T(n-2) + 125T(n-3)$$

$T(0) = 5$

$T(1) = 15$

$T(2) = 35$

$$r^3 - 15r^2 + 75r - 125 = 0$$

$$\underline{\underline{r = 5}}$$

$$T(n) = A5^n + Bn5^n + Cn^2 5^n$$

n	
0	$5 = A$
1	$15 = 5A + 5B + 5C$
2	$35 = 25A + 50B + 100C$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Recurrencias no homogéneas