Complejidad y Optimización

Programación Lineal

Carlos Alberto Ramirez Restrepo

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación,
home page: http://eisc.univalle.edu.co/
carlos.a.ramirez@correounivalle.edu.co

Plan

Programación Lineal

Generalidades

- Muchos problemas buscan maximizar o minimizar un **objetivo** a partir de **recursos limitados** y teniendo en cuenta algunas **restricciones**.
- Un problema de programación lineal tiene las siguientes características:
  - Es posible especificar el objetivo como una función lineal sobre ciertas variables (criterio objetivo) y
  - Es posible especificar las restricciones como igualdades y desigualdades sobre dichas variables.

Programación Lineal

Generalidades

- Muchos problemas buscan maximizar o minimizar un **objetivo** a partir de **recursos limitados** y teniendo en cuenta algunas **restricciones**.
- Un problema de programación lineal tiene las siguientes características:
  - Es posible especificar el objetivo como una función lineal sobre ciertas variables (criterio objetivo) y
  - Es posible especificar las restricciones como igualdades y desigualdades sobre dichas variables.

Programación Lineal

Generalidades

- Muchos problemas buscan maximizar o minimizar un **objetivo** a partir de **recursos limitados** y teniendo en cuenta algunas **restricciones**.
- Un problema de programación lineal tiene las siguientes características:
  - Es posible especificar el objetivo como una función lineal sobre ciertas variables (criterio objetivo) y
  - Es posible especificar las restricciones como igualdades y desigualdades sobre dichas variables.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Supongamos que usted es un político que quiere ganar una elección.
- Su ciudad tiene tres tipos diferentes de areas: urbanas, suburbanas y rurales, las cuales tiene 100mil, 200mil y 50mil votantes registrados respectivamente.
- Aunque como es normal, todos los votantes registrados no asistirán a las urnas, usted decide que, para gobernar efectivamente, le gustaría que al menos la mitad de los votantes registrados en cada región voten por usted.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Supongamos que usted es un político que quiere ganar una elección.
- Su ciudad tiene tres tipos diferentes de areas: urbanas, suburbanas y rurales, las cuales tiene 100mil, 200mil y 50mil votantes registrados respectivamente.
- Aunque como es normal, todos los votantes registrados no asistirán a las urnas, usted decide que, para gobernar efectivamente, le gustaría que al menos la mitad de los votantes registrados en cada región voten por usted.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Supongamos que usted es un político que quiere ganar una elección.
- Su ciudad tiene tres tipos diferentes de areas: urbanas, suburbanas y rurales, las cuales tiene 100mil, 200mil y 50mil votantes registrados respectivamente.
- Aunque como es normal, todos los votantes registrados no asistirán a las urnas, usted decide que, para gobernar efectivamente, le gustaría que al menos la mitad de los votantes registrados en cada región voten por usted.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Sin embargo, usted se da cuenta que ciertos temas pueden ser más efectivos a la hora de ganar votos en ciertos lugares.
- Sus prioridades durante su gobierno son la construcción de carreteras, control de armas, subsidios al campo y un impuesto a la gasolina que sea dedicado a mejorar el transito.
- Suponga que su equipo de campaña es capaz de estimar cuantos votos puede ganar o perder para cada segmento de la población por medio del gasto de 1 millon de pesos en publicidad para cada tema.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Sin embargo, usted se da cuenta que ciertos temas pueden ser más efectivos a la hora de ganar votos en ciertos lugares.
- Sus prioridades durante su gobierno son la construcción de carreteras, control de armas, subsidios al campo y un impuesto a la gasolina que sea dedicado a mejorar el transito.
- Suponga que su equipo de campaña es capaz de estimar cuantos votos puede ganar o perder para cada segmento de la población por medio del gasto de 1 millon de pesos en publicidad para cada tema.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Sin embargo, usted se da cuenta que ciertos temas pueden ser más efectivos a la hora de ganar votos en ciertos lugares.
- Sus prioridades durante su gobierno son la construcción de carreteras, control de armas, subsidios al campo y un impuesto a la gasolina que sea dedicado a mejorar el transito.
- Suponga que su equipo de campaña es capaz de estimar cuantos votos puede ganar o perder para cada segmento de la población por medio del gasto de 1 millon de pesos en publicidad para cada tema.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

La siguiente tabla muestra dicha estimación:

Aspecto	Región urbana	Región suburbana	Región rural
Construcción de carreteras	-2	5	3
Control de armas	8	2	-5
Subsidio al campo	0	0	10
Impuesto a la gasolina	10	0	-2

Donde cada número representa en miles la cantidad de votantes que se puede ganar mediante la inversión de 1 millon de pesos.

Los números negativos representan el hecho de que pierden votantes en lugar de ganarlos.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

La siguiente tabla muestra dicha estimación:

Aspecto	Región urbana	Región suburbana	Región rural
Construcción de carreteras	-2	5	3
Control de armas	8	2	-5
Subsidio al campo	0	0	10
Impuesto a la gasolina	10	0	-2

Donde cada número representa en miles la cantidad de votantes que se puede ganar mediante la inversión de 1 millon de pesos.

Los números negativos representan el hecho de que pierden votantes en lugar de ganarlos.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

La siguiente tabla muestra dicha estimación:

Aspecto	**Región urbana**	**Región suburbana**	**Región rural**
Construcción de carreteras	-2	5	3
Control de armas	8	2	-5
Subsidio al campo	0	0	10
Impuesto a la gasolina	10	0	-2

Donde cada número representa en miles la cantidad de votantes que se puede ganar mediante la inversión de 1 millon de pesos.

Los números negativos representan el hecho de que pierden votantes en lugar de ganarlos.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- De esta manera, se requiere determinar la menor cantidad de dinero que se necesita invertir para lograr ganar 50 mil votos urbanos, 100 mil votos suburbanos y 25 mil votos rurales.
- Una posibilidad es seguir una estrategia de prueba y error. Sin embargo, esta estrategia no es necesariamente la mejor.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- De esta manera, se requiere determinar la menor cantidad de dinero que se necesita invertir para lograr ganar 50 mil votos urbanos, 100 mil votos suburbanos y 25 mil votos rurales.
- Una posibilidad es seguir una estrategia de prueba y error. Sin embargo, esta estrategia no es necesariamente la mejor.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Por ejemplo, usted podría destinar 20 millones para publicidad sobre construcción de carreteras, 0 millones para control de armas, 4 millones para subsidios al campo y 9 millones para el impuesto a la gasolina.
- En este caso, usted ganaría

$$20 \cdot (-2) \ + \ 0 \cdot (8) \ + \ 4 \cdot (0) \ + \ 9 \cdot (10) = 50$$

$$20 \cdot (5) \ + \ 0 \cdot (2) \ + \ 4 \cdot (0) \ + \ 9 \cdot (0) = 100$$

$$20 \cdot (3) \ + \ 0 \cdot (-5) \ + \ 4 \cdot (10) \ + \ 9 \cdot (-2) = 82$$

  50 mil votos urbanos, 100 mil votos suburbanos y 82 mil votos rurales. La inversión total fue de 33 millones.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Por ejemplo, usted podría destinar 20 millones para publicidad sobre construcción de carreteras, 0 millones para control de armas, 4 millones para subsidios al campo y 9 millones para el impuesto a la gasolina.
- En este caso, usted ganaría

$$20 \cdot (-2) \;+\; 0 \cdot (8) \;+\; 4 \cdot (0) \;+\; 9 \cdot (10) = 50$$

$$20 \cdot (5) \;+\; 0 \cdot (2) \;+\; 4 \cdot (0) \;+\; 9 \cdot (0) = 100$$

$$20 \cdot (3) \;+\; 0 \cdot (-5) \;+\; 4 \cdot (10) \;+\; 9 \cdot (-2) = 82$$

50 mil votos urbanos, 100 mil votos suburbanos y 82 mil votos rurales. La inversión total fue de 33 millones.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Luego, es natural preguntarse si esta estrategia es la mejor posible.
- Esto es, si se alcanza las metas mientras se minimiza la inversión en publicidad.
- Es posible seguir con una estrategia de prueba y error para determinar lo anterior.
- Sin embargo, es posible seguir un método sistemático para resolver un problema como este.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Luego, es natural preguntarse si esta estrategia es la mejor posible.
- Esto es, si se alcanza las metas mientras se minimiza la inversión en publicidad.
- Es posible seguir con una estrategia de prueba y error para determinar lo anterior.
- Sin embargo, es posible seguir un método sistemático para resolver un problema como este.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Luego, es natural preguntarse si esta estrategia es la mejor posible.
- Esto es, si se alcanza las metas mientras se minimiza la inversión en publicidad.
- Es posible seguir con una estrategia de prueba y error para determinar lo anterior.
- Sin embargo, es posible seguir un método sistemático para resolver un problema como este.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

- Luego, es natural preguntarse si esta estrategia es la mejor posible.
- Esto es, si se alcanza las metas mientras se minimiza la inversión en publicidad.
- Es posible seguir con una estrategia de prueba y error para determinar lo anterior.
- Sin embargo, es posible seguir un método sistemático para resolver un problema como este.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

Pasos para resolver un problema de optimización:

1. Definición del problema
2. Construcción del modelo (variables decisorias, función objetivo, restricciones)
3. Solución del modelo (solución óptima, valor de la función objetivo)
4. Validación del modelo
5. Derivación de la solución del problema (decisión a tomar)

Simplex

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

Se modelará el anterior escenario matemáticamente. Se utilizarán 4 variables:

- x_1 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre construcción de carreteras.
- x_2 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre control de armas.
- x_3 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre subsidios al campo.
- x_4 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre el impuesto a la gasolina.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

Se modelará el anterior escenario matemáticamente. Se utilizarán 4 variables:

- x_1 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre construcción de carreteras.
- x_2 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre control de armas.
- x_3 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre subsidios al campo.
- x_4 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre el impuesto a la gasolina.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

Se modelará el anterior escenario matemáticamente. Se utilizarán 4 variables:

- x_1 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre construcción de carreteras.
- x_2 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre control de armas.
- x_3 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre subsidios al campo.
- x_4 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre el impuesto a la gasolina.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

Se modelará el anterior escenario matemáticamente. Se utilizarán 4 variables:

- x_1 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre construcción de carreteras.
- x_2 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre control de armas.
- x_3 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre subsidios al campo.
- x_4 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre el impuesto a la gasolina.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

Se modelará el anterior escenario matemáticamente. Se utilizarán 4 variables:

- x_1 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre construcción de carreteras.
- x_2 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre control de armas.
- x_3 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre subsidios al campo.
- x_4 es el número de millones de pesos que se invierten en publicidad sobre el impuesto a la gasolina.

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

De esta manera es posible representar el escenario de votación de la siguiente manera:

Minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
-2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 &\geq 50 \\
5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 &\geq 100 \\
3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 &\geq 100 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

De esta manera es posible representar el escenario de votación de la siguiente manera:

Minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 &\geq 50 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 &\geq 100 \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 &\geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

De esta manera es posible representar el escenario de votación de la siguiente manera:

Minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-2x_1 & + & 8x_2 & + & 0x_3 & + & 10x_4 & \geq & 50 \\
5x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & \geq & 100 \\
3x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & - & 2x_4 & \geq & 100 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Programación Lineal

Generalidades: Ejemplo

De esta manera es posible representar el escenario de votación de la siguiente manera:

Minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 &\geq 50 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 &\geq 100 \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 &\geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Generalidades

- En general, en los problemas de programación lineal, se requiere optimizar una función lineal considerando un conjunto de inigualdades lineales.
- Dado un conjunto de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y un conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, una función lineal f en dichas variables se puede definir así:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \ldots + a_n * x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j * x_j$$

Programación Lineal

Generalidades

- En general, en los problemas de programación lineal, se requiere optimizar una función lineal considerando un conjunto de inigualdades lineales.
- Dado un conjunto de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y un conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, una función lineal f en dichas variables se puede definir así:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underline{a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \ldots + a_n * x_n} = \sum_{j=1}^{n} a_j * x_j$$

$f(x_1, \ldots x_n) =$

Programación Lineal

Generalidades

- Si b es un número real y f una función lineal, entonces la ecuación

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; b$$

es una igualdad lineal.

- En tanto que, las inecuaciones

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\leq\; b$$

y

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\geq\; b$$

son inigualdades lineales.

Programación Lineal

Generalidades

- Si b es un número real y f una función lineal, entonces la ecuación

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$$

es una igualdad lineal.

- En tanto que, las inecuaciones

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$$

y

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$$

son inigualdades lineales.

Programación Lineal

Generalidades

- En general, el término restricción lineal denota igualdades lineales o inigualdades lineales.
- Formalmente, un problema de programación lineal es el problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeto a un conjunto finito de restricciones lineales.
- Informalmente, un programa lineal en forma estándar corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a inigualdades lineales.
- Así mismo, un programa lineal en forma "de holgura" corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a igualdades lineales.

Programación Lineal

Generalidades

- En general, el término restricción lineal denota igualdades lineales o inigualdades lineales.
- Formalmente, un problema de programación lineal es el problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeto a un conjunto finito de restricciones lineales.
- Informalmente, un programa lineal en forma estándar corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a inigualdades lineales.
- Así mismo, un programa lineal en forma "de holgura" corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a igualdades lineales.

Programación Lineal

Generalidades

- En general, el término restricción lineal denota igualdades lineales o inigualdades lineales.
- Formalmente, un problema de programación lineal es el problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeto a un conjunto finito de restricciones lineales.
- Informalmente, un programa lineal en forma estándar corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a inigualdades lineales.
- Así mismo, un programa lineal en forma "de holgura" corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a igualdades lineales.

Programación Lineal

Generalidades

- En general, el término restricción lineal denota igualdades lineales o inigualdades lineales.
- Formalmente, un problema de programación lineal es el problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeto a un conjunto finito de restricciones lineales.
- Informalmente, un programa lineal en forma estándar corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a inigualdades lineales.
- Así mismo, un programa lineal en forma "de holgura" corresponde a la maximización de una función lineal sujeto a igualdades lineales.

Programación Lineal

Modelamiento: Ejemplo

Una pequeña fábrica produce pinturas para interiores y exteriores de casas. Se utilizan dos materias primas A y B para cada tipo de pintura. La disponibilidad de A es de 6 toneladas diarias, la de B de 8 toneladas diarias. Para producir una tonelada de pintura para el exterior se requieren 1 tonelada de material A y 2 de material B. Para producir una tonelada de pintura para el interior se requieren 2 toneladas de material A y 1 de material B.

Un estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de la pintura para exteriores en más de una tonelada. La demanda máxima de la pintura para el interior es limitada por 2 toneladas diarias. El precio de venta es \$3000 por tonelada para la pintura para el exterior, \$2000 por tonelada para la pintura para el interior.

Cuánta pintura para el exterior y el interior debe producir la fábrica diariamente para maximizar el ingreso bruto?

$X_1 \longrightarrow$ interior

$X_2 \rightarrow$ Exterior

maxim $\longrightarrow 2X_1 + 3X_2$

S.a

Mat A $\rightarrow 2X_1 + X_2 \leq 6$

Mat B $\longrightarrow X_1 + 2X_2 \leq 8$

$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$

$X_2 \leq 2$

$X_1 \leq X_2 + 1$

$X_1 - X_2 \leq 1$

Programación Lineal

Modelamiento: Ejercicio

Una pequeña fábrica de muebles produce mesas y sillas. tarda 2 horas en ensamblar una mesa y 30 minutos en armar una silla . En ensamblaje lo realizan 4 trabajadores sobre la base de un solo turna diario de 8 horas. Los clientes suelen comprar cuando menos 4 veces más sillas que mesas. El precio de venta es $135 por mesa y $50 por silla.

Determine la combinación de sillas y mesas en la producción diaria que maximice el ingreso diario de la fábrica.

Programación Lineal

Modelamiento: Ejercicio

Los cerdos de una granja consumen 90 libras de comida especial todos los días. El alimento se prepare como mezcla de maíz y harina de soya con las siguientes composiciones (en libras):

	calcio (libra)	proteína (libra)	fibra (libra)	costo (\$/libra)
maíz (libra)	0.001	0.09	0.02	0.20
soya (libra)	0.002	0.60	0.06	0.60

Los requerimientos diarios de los cerdos son cuando menos 1% de calcio, por lo menos 30% de proteína y mínimo 5% de fibra.

Determine la mezcla con el costo mínimo por día.

Programación Lineal

Generalidades

Considere el siguiente problema lineal con dos variables:

Maximizar

$$x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 5x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Generalidades

Considere el siguiente problema lineal con dos variables:

Maximizar

$$x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 5x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Generalidades

Considere el siguiente problema lineal con dos variables:

Maximizar

$$x_1 + x_2$$

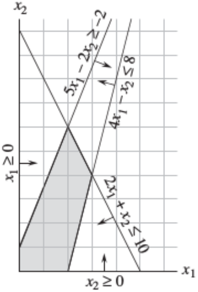
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 5x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Generalidades

- Una solución factible corresponde a cualquier asignación de las variables x_1 y x_2 que satisface todas las restricciones.
- Es posible graficar las restricciones en un sistema de coordenada (x_1, x_2) de la siguiente manera:



Programación Lineal

Generalidades

- El conjunto de soluciones factibles está sombreado y recibe el nombre de región factible.
- La función que se desea maximizar recibe el nombre de función objetivo.
- Conceptualmente, es posible evaluar la función objetivo $x_1 + x_2$ para cada punto en la región factible.
- Un valor objetivo es el valor de la función objetivo en un punto en particular.
- De esta manera, es posible identificar un punto que tiene el máximo valor objetivo como una solución óptima.

Programación Lineal

Generalidades

- El conjunto de soluciones factibles está sombreado y recibe el nombre de región factible.
- La función que se desea maximizar recibe el nombre de función objetivo.
- Conceptualmente, es posible evaluar la función objetivo $x_1 + x_2$ para cada punto en la región factible.
- Un valor objetivo es el valor de la función objetivo en un punto en particular.
- De esta manera, es posible identificar un punto que tiene el máximo valor objetivo como una solución óptima.

Programación Lineal

Generalidades

- El conjunto de soluciones factibles está sombreado y recibe el nombre de región factible.
- La función que se desea maximizar recibe el nombre de función objetivo.
- Conceptualmente, es posible evaluar la función objetivo $x_1 + x_2$ para cada punto en la región factible.
- Un valor objetivo es el valor de la función objetivo en un punto en particular.
- De esta manera, es posible identificar un punto que tiene el máximo valor objetivo como una solución óptima.

Programación Lineal

Generalidades

- El conjunto de soluciones factibles está sombreado y recibe el nombre de región factible.
- La función que se desea maximizar recibe el nombre de función objetivo.
- Conceptualmente, es posible evaluar la función objetivo $x_1 + x_2$ para cada punto en la región factible.
- Un valor objetivo es el valor de la función objetivo en un punto en particular.
- De esta manera, es posible identificar un punto que tiene el máximo valor objetivo como una solución óptima.

Programación Lineal

Generalidades

- El conjunto de soluciones factibles está sombreado y recibe el nombre de región factible.
- La función que se desea maximizar recibe el nombre de función objetivo.
- Conceptualmente, es posible evaluar la función objetivo $x_1 + x_2$ para cada punto en la región factible.
- Un valor objetivo es el valor de la función objetivo en un punto en particular.
- De esta manera, es posible identificar un punto que tiene el máximo valor objetivo como una solución óptima.

Programación Lineal

Generalidades

- Sin embargo, para el ejemplo anterior y para la mayoría de programas lineales, la región factible contiene un número infinito de puntos.
- Por lo tanto, es necesario determinar una forma eficiente de encontrar un punto que alcance el máximo valor objetivo sin evaluar explícitamente la función objetivo en cada punto en la región factible.

Programación Lineal

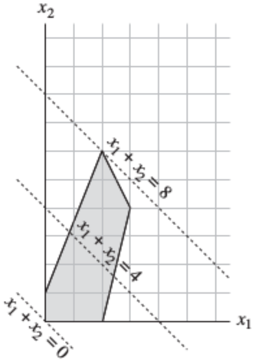
Generalidades

- Sin embargo, para el ejemplo anterior y para la mayoría de programas lineales, la región factible contiene un número infinito de puntos.
- Por lo tanto, es necesario determinar una forma eficiente de encontrar un punto que alcance el máximo valor objetivo sin evaluar explícitamente la función objetivo en cada punto en la región factible.

Programación Lineal

Generalidades

Procedimiento gráfico para maximizar la función objetivo:



Programación Lineal

Generalidades

- Aunque no es posible graficar fácilmente programas lineales con más de dos variables, la misma intuición del problema anterior se mantiene.
- Si tenemos tres variables, entonces cada restricción corresponde a un semi-espacio en el espacio tridimensional.
- La intersección de estos semiespacios forma la región factible.
- El conjunto de puntos para el cual la función objetivo da un valor dado es ahora un plano.

Programación Lineal

Generalidades

- Aunque no es posible graficar fácilmente programas lineales con más de dos variables, la misma intuición del problema anterior se mantiene.
- Si tenemos tres variables, entonces cada restricción corresponde a un semi-espacio en el espacio tridimensional.
- La intersección de estos semiespacios forma la región factible.
- El conjunto de puntos para el cual la función objetivo da un valor dado es ahora un plano.

Programación Lineal

Generalidades

- Aunque no es posible graficar fácilmente programas lineales con más de dos variables, la misma intuición del problema anterior se mantiene.
- Si tenemos tres variables, entonces cada restricción corresponde a un semi-espacio en el espacio tridimensional.
- La intersección de estos semiespacios forma la región factible.
- El conjunto de puntos para el cual la función objetivo da un valor dado es ahora un plano.

Programación Lineal

Generalidades

- Aunque no es posible graficar fácilmente programas lineales con más de dos variables, la misma intuición del problema anterior se mantiene.
- Si tenemos tres variables, entonces cada restricción corresponde a un semi-espacio en el espacio tridimensional.
- La intersección de estos semiespacios forma la región factible.
- El conjunto de puntos para el cual la función objetivo da un valor dado es ahora un plano.

Programación Lineal

Generalidades

- Como en el caso de 2 dimensiones, dado que la región factible es convexa, el conjunto de puntos que alcanza el óptimo valor objetivo debe incluir un vértice de la región factible.
- De forma similar, si tenemos n variables, cada restricción define un semi-espacio en un espacio n-dimensional.
- Se denomina simplex a la región factible formada por la intersección de dichos semi-espacios.
- La función objetivo en este caso define un hiperplano y debido a su convexidad, una solución óptima aún debe ocurrir en un vértice del simplex.

Programación Lineal

Generalidades

- Como en el caso de 2 dimensiones, dado que la región factible es convexa, el conjunto de puntos que alcanza el óptimo valor objetivo debe incluir un vértice de la región factible.
- De forma similar, si tenemos n variables, cada restricción define un semi-espacio en un espacio n-dimensional.
- Se denomina simplex a la región factible formada por la intersección de dichos semi-espacios.
- La función objetivo en este caso define un hiperplano y debido a su convexidad, una solución óptima aún debe ocurrir en un vértice del simplex.

Programación Lineal

Generalidades

- Como en el caso de 2 dimensiones, dado que la región factible es convexa, el conjunto de puntos que alcanza el óptimo valor objetivo debe incluir un vértice de la región factible.
- De forma similar, si tenemos *n* variables, cada restricción define un semi-espacio en un espacio *n*-dimensional.
- Se denomina simplex a la región factible formada por la intersección de dichos semi-espacios.
- La función objetivo en este caso define un hiperplano y debido a su convexidad, una solución óptima aún debe ocurrir en un vértice del simplex.

Programación Lineal

Generalidades

- Como en el caso de 2 dimensiones, dado que la región factible es convexa, el conjunto de puntos que alcanza el óptimo valor objetivo debe incluir un vértice de la región factible.
- De forma similar, si tenemos n variables, cada restricción define un semi-espacio en un espacio n-dimensional.
- Se denomina simplex a la región factible formada por la intersección de dichos semi-espacios.
- La función objetivo en este caso define un hiperplano y debido a su convexidad, una solución óptima aún debe ocurrir en un vértice del simplex.

Programación Lineal

Generalidades

- El algoritmo simplex toma como entrada un programa lineal y retorna una solución óptima.
- Este algoritmo comienza en algún vértice del simplex y desarrolla una secuencia de iteraciones.
- En cada iteración, el algoritmo se mueve hacia un vértice del simplex desde el vértice actual.

Programación Lineal

Generalidades

- El algoritmo simplex toma como entrada un programa lineal y retorna una solución óptima.
- Este algoritmo comienza en algún vértice del simplex y desarrolla una secuencia de iteraciones.
- En cada iteración, el algoritmo se mueve hacia un vértice del simplex desde el vértice actual.

Programación Lineal

Generalidades

- El algoritmo simplex toma como entrada un programa lineal y retorna una solución óptima.
- Este algoritmo comienza en algún vértice del simplex y desarrolla una secuencia de iteraciones.
- En cada iteración, el algoritmo se mueve hacia un vértice del simplex desde el vértice actual.

Programación Lineal

Generalidades

- Dicho vértice usualmente tiene un valor objetivo más grande o igual.
- El algoritmo termina cuando alcanza un máximo local, el cual es un vértice para el que todos sus vértices vecinos tienen un valor objetivo más pequeño.
- Este máximo local, es en realidad un óptimo global.

Programación Lineal

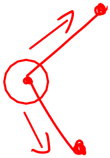
Generalidades

- Dicho vértice usualmente tiene un valor objetivo más grande o igual.
- El algoritmo termina cuando alcanza un máximo local, el cual es un vértice para el que todos sus vértices vecinos tienen un valor objetivo más pequeño.
- Este máximo local, es en realidad un óptimo global.

Programación Lineal

Generalidades

- Dicho vértice usualmente tiene un valor objetivo más grande o igual.
- El algoritmo termina cuando alcanza un máximo local, el cual es un vértice para el que todos sus vértices vecinos tienen un valor objetivo más pequeño.
- Este máximo local, es en realidad un óptimo global.



Plan

Programación Lineal

Forma Estándar

Un programa lineal está en forma estándar si tiene la siguiente estructura:

Maximizar

$$\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \; \leq \; b_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \; \geq \; 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Programación Lineal

Forma Estándar

Un programa lineal está en forma estándar si tiene la siguiente estructura:

Maximizar

$$\sum_{j=1}^{n} c_j * x_j$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j &\leq b_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j &\geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar

- Es posible convertir un programa lineal dado como la minimización o maximización de una función lineal sujeta a restricciones lineales a la forma estándar.
- Un programa lineal no está en forma estándar por calquiera de las siguientes razones:

  1. La función objetivo es una minimización en lugar de una maximización.
  2. Hay variables para las cuales no hay restricciones de no negatividad.
  3. Hay restricciones de igualdad.
  4. Hay restricciones de inigualdad con el signo $\geq$.

Programación Lineal

Forma Estándar

- Es posible convertir un programa lineal dado como la minimización o maximización de una función lineal sujeta a restricciones lineales a la forma estándar.
- Un programa lineal no está en forma estándar por calquiera de las siguientes razones:

  1. La función objetivo es una minimización en lugar de una maximización.
  2. Hay variables para las cuales no hay restricciones de no negatividad.
  3. Hay restricciones de igualdad.
  4. Hay restricciones de inigualdad con el signo $\geq$.

Programación Lineal

Forma Estándar

- Es posible convertir un programa lineal dado como la minimización o maximización de una función lineal sujeta a restricciones lineales a la forma estándar.
- Un programa lineal no está en forma estándar por calquiera de las siguientes razones:

    1. La función objetivo es una minimización en lugar de una maximización.
    2. Hay variables para las cuales no hay restricciones de no negatividad.
    3. Hay restricciones de igualdad.
    4. Hay restricciones de inigualdad con el signo $\geq$.

Programación Lineal

Forma Estándar

- Es posible convertir un programa lineal dado como la minimización o maximización de una función lineal sujeta a restricciones lineales a la forma estándar.
- Un programa lineal no está en forma estándar por calquiera de las siguientes razones:

  1. La función objetivo es una minimización en lugar de una maximización.
  2. Hay variables para las cuales no hay restricciones de no negatividad.
  3. Hay restricciones de igualdad.
  4. Hay restricciones de inigualdad con el signo $\geq$.

Programación Lineal

Forma Estándar

- Es posible convertir un programa lineal dado como la minimización o maximización de una función lineal sujeta a restricciones lineales a la forma estándar.
- Un programa lineal no está en forma estándar por calquiera de las siguientes razones:

    1. La función objetivo es una minimización en lugar de una maximización.
    2. Hay variables para las cuales no hay restricciones de no negatividad.
    3. Hay restricciones de igualdad.
    4. Hay restricciones de inigualdad con el signo $\geq$.

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir Función Objetivo

Minimizar

$$-2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Claramente, este programa lineal no está en forma estándar.

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir Función Objetivo

Minimizar

$$-2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Claramente, este programa lineal no está en forma estándar.

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir Función Objetivo

Para convertir la función objetivo es suficiente con negar los coeficientes.
De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir Función Objetivo

Para convertir la función objetivo es suficiente con negar los coeficientes. De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir Función Objetivo

Para convertir la función objetivo es suficiente con negar los coeficientes. De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir Función Objetivo

Para convertir la función objetivo es suficiente con negar los coeficientes. De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

X_2 irrestricto

Programación Lineal

Forma Estándar: Restricciones de no negatividad

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual para cada variable haya una restricción de no negatividad se realiza lo siguiente:

- Se reemplaza cada ocurrencia de la variable x_2 por $x_2^+ - x_2^-$.
- Se añaden las restricciones de no negatividad $x_2^+ \geq 0$ y $x_2^- \geq 0$.

En general, lo anterior debe ser realizado para cada variable que no tenga restricción de no negatividad.

Programación Lineal

Forma Estándar: Restricciones de no negatividad

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual para cada variable haya una restricción de no negatividad se realiza lo siguiente:

- Se reemplaza cada ocurrencia de la variable x_2 por $x_2^+ - x_2^-$.
- Se añaden las restricciones de no negatividad $x_2^+ \geq 0$ y $x_2^- \geq 0$.

En general, lo anterior debe ser realizado para cada variable que no tenga restricción de no negatividad.

Programación Lineal

Forma Estándar: Restricciones de no negatividad

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual para cada variable haya una restricción de no negatividad se realiza lo siguiente:

- Se reemplaza cada ocurrencia de la variable x_2 por $x_2^+ - x_2^-$.
- Se añaden las restricciones de no negatividad $x_2^+ \geq 0$ y $x_2^- \geq 0$.

En general, lo anterior debe ser realizado para cada variable que no tenga restricción de no negatividad.

Programación Lineal

Forma Estándar: Restricciones de no negatividad

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual para cada variable haya una restricción de no negatividad se realiza lo siguiente:

- Se reemplaza cada ocurrencia de la variable x_2 por $x_2^+ - x_2^-$.
- Se añaden las restricciones de no negatividad $x_2^+ \geq 0$ y $x_2^- \geq 0$.

En general, lo anterior debe ser realizado para cada variable que no tenga restricción de no negatividad.

Programación Lineal

Forma Estándar: Restricciones de no negatividad

De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^-$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^+ - x_2^- &= 7 \\ x_1 - 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq 4 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Restricciones de no negatividad

De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^-$$

$X_2 = X_2^+ - X_2^-$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^+ - x_2^- &= 7 \\ x_1 - 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq 4 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual todas las restricciones sean de inigualdad con el signo $\leq$ se realiza lo siguiente:

- Puesto que $x = y$ si $x \geq y$ y $x \leq y$. Es posible sustituir cada restricción de igualdad $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ por las restricciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ y $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$.
- Luego, se debe convertir cada restricción de inigualdad con signo $\geq$ multiplicando por -1 la restricción. De esta manera, una restricción de la forma
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$
es convertida a
$$\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq b_i$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual todas las restricciones sean de inigualdad con el signo $\leq$ se realiza lo siguiente:

- Puesto que $x = y$ si $x \geq y$ y $x \leq y$. Es posible sustituir cada restricción de igualdad $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ por las restricciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ y $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$.
- Luego, se debe convertir cada restricción de inigualdad con signo $\geq$ multiplicando por -1 la restricción. De esta manera, una restricción de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

es convertida a

$$\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq b_i$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

Para convertir el anterior programa lineal a uno equivalente en el cual todas las restricciones sean de inigualdad con el signo $\leq$ se realiza lo siguiente:

- Puesto que $x = y$ si $x \geq y$ y $x \leq y$. Es posible sustituir cada restricción de igualdad $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ por las restricciones $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ y $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$.
- Luego, se debe convertir cada restricción de inigualdad con signo $\geq$ multiplicando por -1 la restricción. De esta manera, una restricción de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

es convertida a

$$\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq b_i$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^-$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^+ - x_2^- &\leq 7 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- &\geq 7 \\ x_1 - 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq 4 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

De esta manera se tiene el siguiente programa lineal equivalente:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^-$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^+ - x_2^- &\leq 7 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- &\geq 7 \\ x_1 - 2x_2^+ - 2x_2^- &\leq 4 \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

$-x_2 - x_2^+ + x_2^- \leq -7$

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

Y luego se obtiene:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde adicionalmente se ha renombrado la variable x_2^+ por x_2 y x_2^- por x_3.

Programación Lineal

Forma Estándar: Convertir restricciones

Y luego se obtiene:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde adicionalmente se ha renombrado la variable x_2^+ por x_2 y x_2^- por x_3.

Programación Lineal

Forma de Holgura

- En la forma de holgura, cada restricción de un programa lineal es una restricción de igualdad.
- Cada restricción de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

es convertida a las restricciones

$$x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j$$

y

$$x_{n+1} \geq 0$$

Programación Lineal

Forma de Holgura

- En la forma de holgura, cada restricción de un programa lineal es una restricción de igualdad.
- Cada restricción de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \leq b_i$$

es convertida a las restricciones

$$x_{n+1} \ = \ b_i \ - \ \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j$$

y

$$x_{n+1} \geq 0$$

Programación Lineal

Forma de Holgura

De esta manera, el siguiente programa en forma Estándar:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma de Holgura

De esta manera, el siguiente programa en forma Estándar:

Maximizar

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma de Holgura

Es equivalente al siguiente programa lineal en forma de holgura:

$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\
x_4 &= 7 - x_1 - x_2 + x_3 \\
x_5 &= -7 + x_1 + x_2 - x_3 \\
x_6 &= 4 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Programación Lineal

Forma Estándar y de Holgura: Ejercicio

Convertir el siguiente programa lineal a forma estándar y luego a forma de holgura:

Minimizar

$$2x_1 + 7x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 18 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Forma Estándar y de Holgura: Ejercicio

Convertir el siguiente programa lineal a forma estándar y luego a forma de holgura:

Minimizar

$$2x_1 + 7x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 18 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

min $x_1 + 2x_2$

s.a

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1 + 3x_2 \geq 5$

$x_1 + 2x_2 = 8$

$x_1 \geq 0$, x_2 irrestrito

1) max $-x_1 - 2(x_2^+ - x_2^-)$

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$

$x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) \leq 6$

$-x_1 - 3(x_2^+ - x_2^-) \leq -5$

$x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) = 8$

$x_1 \geq 0$, $x_2^+ \geq 0$ $x_2^- \geq 0$

$\underbrace{x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-)}_{\leq 6} + S_1 = 6$

$-x_1 - 3(x_2^+ - x_2^-) + S_2 = -5$

$x_2 + 3(x_2^+ - x_2^-) - S_2 = 5$

$x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) = 8$

Plan

Programación Lineal

Método Simplex

- El algoritmo simplex es el método clásico para resolver problemas de programación lineal.
- Su tiempo de ejecución es no polinomial en el peor caso. Sin embargo, en la práctica es considerablemente rápido.
- El algoritmo simplex tiene alguna similaridad con la eliminación Gaussiana.

Programación Lineal

Método Simplex

- El algoritmo simplex es el método clásico para resolver problemas de programación lineal.
- Su tiempo de ejecución es no polinomial en el peor caso. Sin embargo, en la práctica es considerablemente rápido.
- El algoritmo simplex tiene alguna similaridad con la eliminación Gaussiana.

Programación Lineal

Método Simplex

- El algoritmo simplex es el método clásico para resolver problemas de programación lineal.
- Su tiempo de ejecución es no polinomial en el peor caso. Sin embargo, en la práctica es considerablemente rápido.
- El algoritmo simplex tiene alguna similaridad con la eliminación Gaussiana.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para inigualdades.

Programación Lineal

Método Simplex

- La eliminación Gaussiana comienza con un sistema de igualdades lineales cuya solución es desconocida.
- En cada iteración, el sistema es reescrito en una forma equivalente que tiene alguna estructura adicional.
- Después de algún número de iteraciones, es simple obtener la solución a partir del sistema de ecuaciones actual.
- El algoritmo simplex funciona de una forma similar y puede ser visto como una eliminación Gaussiana para iniguáldades.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Consideremos nuevamente el programa lineal asociado al problema de las pinturas:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_e + 2x_i &\leq 6 \\ 2x_e + x_i &\leq 8 \\ -x_e + x_i &\leq 1 \\ x_i &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Consideremos nuevamente el programa lineal asociado al problema de las pinturas:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcl} x_e & + & 2x_i & \leq & 6 \\ 2x_e & + & x_i & \leq & 8 \\ -x_e & + & x_i & \leq & 1 \\ & & x_i & \leq & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$X_e + \underline{2X_i} + S_1 = 6$

$2X_e + X_i + S_2 = 8$

$-X_e + X_i + S_3 = 1$

$X_i + S_4 = 2$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$
\begin{aligned}
z &= 3x_e + 2x_i \\
x_1 &= 6 - x_e - 2x_i \\
x_2 &= 8 - 2x_e - x_i \\
x_3 &= 1 + x_e - x_i \\
x_4 &= 2 - x_i
\end{aligned}
$$

$\{x_e, x_i\}$ Vnb

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ Vb

Inicialmente, se busca una solución básica factible. En una solución básica se igualan todas las variables en la parte derecha de las ecuaciones (variables no-básicas) a 0 y luego se calcula el valor de las variables en la parte izquierda (variables básicas).

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$
\begin{aligned}
z &= 3x_e + 2x_i \\
x_1 &= 6 - x_e - 2x_i \\
x_2 &= 8 - 2x_e - x_i \\
x_3 &= 1 + x_e - x_i \\
x_4 &= 2 - x_i
\end{aligned}
$$

Inicialmente, se busca una solución básica factible. En una solución básica se igualan todas las variables en la parte derecha de las ecuaciones (variables no-básicas) a 0 y luego se calcula el valor de las variables en la parte izquierda (variables básicas).

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$x_1 = 0 \rightarrow x_e = 6$

$\boxed{x_2 = 0 \rightarrow x_e = 4}$

$x_3 = 0 \rightarrow x_e = -1$ X

$x_4 = 0 \quad 0 = 2$ X

$$
\begin{aligned}
z &= 3x_e + 2x_i \\
x_1 &= 6 - x_e - 2x_i \\
x_2 &= 8 - 2x_e - x_i \\
x_3 &= 1 + x_e - x_i \\
x_4 &= 2 - x_i
\end{aligned}
$$

X

Inicialmente, se busca una solución básica factible. En una solución básica se igualan todas las variables en la parte derecha de las ecuaciones (variables no-básicas) a 0 y luego se calcula el valor de las variables en la parte izquierda (variables básicas).

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$z = 0$

Variable no-basica

$$
\begin{array}{lrcl}
 & z & = & 3x_e + 2x_i \\
S_1 & x_1 & = & 6 - x_e - 2x_i \\
S_2 & x_2 & = & 8 - 2x_e - x_i \\
S_3 & x_3 & = & 1 + x_e - x_i \\
S_4 & x_4 & = & 2 - x_i
\end{array}
$$

Variable basica

Una solución básica es $(x_e, x_i, x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 8, 1, 2)$. Esta solución es una solución factible y el valor de la función objetivo es 0.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe seleccionar una variable que al modificarse genere que el valor de la función objetivo aumente.
- En general, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_e tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_i tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_e para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e.
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_e = 6\\ \text{Si } x_2 = 0 \text{ entonces } x_e = 4\\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_e = -1\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces no hay solución}\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e.
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_e = 6\\ \text{Si } x_2 = 0 \text{ entonces } x_e = 4\\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_e = -1\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces no hay solución}\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e.
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_e = 6\\ \text{Si } x_2 = 0 \text{ entonces } x_e = 4\\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_e = -1\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces no hay solución}\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_e.
- Para esto, es necesario determinar cuál es el valor más alto que puede tomar x_e sin violar las restricciones. Esto es, que la parte derecha de las restricciones alcance un valor mayor o igual a 0.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_e = 6 \\ \boxed{\text{Si } x_2 = 0 \text{ entonces } x_e = 4} \\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_e = -1 \\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces no hay solución} \end{array}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_e = 4$ y se selecciona la variable x_2.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_e en la restricción $x_2 = 8 - 2x_e - x_i$ y se obtiene

$$x_e = 4 - 1/2x_i - 1/2x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_e de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_e en la restricción $x_2 = 8 - 2x_e - x_i$ y se obtiene

$$x_e = 4 - 1/2x_i - 1/2x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_e de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= 12 + 1/2x_i - 3/2x_2 \\
x_1 &= 2 - 3/2x_i + 1/2x_2 \\
\boxed{x_e} &\boxed{= 4 - 1/2x_i - 1/2x_2} \\
x_3 &= 5 - 3/2x_i - 1/2x_2 \\
x_4 &= 2 - x_i
\end{aligned}
$$

$x_1 = 0 \rightarrow x_i = 4/3$

$x_e = 0 \rightarrow x_i = 8$

$x_3 = 0 \rightarrow x_i = 10/3$

$x_4 = 0 \rightarrow x_i = 2$

$x_i = \dfrac{\left(\frac{1}{2}x_2 - x_1 + 2\right)2}{3}$

El anterior procedimiento recibe el nombre de pivote.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= 12 + 1/2x_i - 3/2x_2 \\
x_1 &= 2 - 3/2x_i + 1/2x_2 \\
x_e &= 4 - 1/2x_i - 1/2x_2 \\
x_3 &= 5 - 3/2x_i - 1/2x_2 \\
x_4 &= 2 - x_i
\end{aligned}
$$

El anterior procedimiento recibe el nombre de pivote.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_i es la única con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_i es la única con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_i es la única con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_i.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_i = 4/3 \\ \text{Si } x_e = 0 \text{ entonces } x_i = 8 \\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_i = 10/3 \\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_i = 2\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_i = 4/3$ y se selecciona la variable x_1.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_i.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_i = 4/3 \\ \text{Si } x_e = 0 \text{ entonces } x_i = 8 \\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_i = 10/3 \\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_i = 2 \end{array}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_i = 4/3$ y se selecciona la variable x_1.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_i.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_i = 4/3\\ \text{Si } x_e = 0 \text{ entonces } x_i = 8\\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_i = 10/3\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_i = 2\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_i = 4/3$ y se selecciona la variable x_1.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_i en la restricción $x_1 = 2 - 3/2x_i + 1/2x_2$ y se obtiene

$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_i de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

- Ahora se despeja x_i en la restricción $x_1 = 2 - 3/2x_i + 1/2x_2$ y se obtiene
$$x_i = 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_i de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en las restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= 38/3 - 1/3x_1 - 4/3x_2 \\
x_i &= 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2 \\
x_e &= 10/3 - 1/3x_1 - 2/3x_2 \\
x_3 &= 3 + x_1 - x_2 \\
x_4 &= 2/3 + 2/3x_1 - 1/3x_2
\end{aligned}
$$

En este punto, no es posible mejorar el valor de la función objetivo puesto que depende de variables con coeficiente negativo. Por tanto hemos llegado a la solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned}
z &= 38/3 - 1/3x_1 - 4/3x_2 \\
x_i &= 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2 \\
x_e &= 10/3 - 1/3x_1 - 2/3x_2 \\
x_3 &= 3 + x_1 - x_2 \\
x_4 &= 2/3 + 2/3x_1 - 1/3x_2
\end{aligned}$$

En este punto, no es posible mejorar el valor de la función objetivo puesto que depende de variables con coeficiente negativo. Por tanto hemos llegado a la solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 1

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned} z &= 38/3 - 1/3x_1 - 4/3x_2 \\ x_i &= 4/3 - 2/3x_1 + 1/3x_2 \\ x_e &= 10/3 - 1/3x_1 - 2/3x_2 \\ x_3 &= 3 + x_1 - x_2 \\ x_4 &= 2/3 + 2/3x_1 - 1/3x_2 \end{aligned}$$

La solución básica $(x_e, x_i, x_1, x_2, x_3, x_4) = (10/3, 4/3, 0, 0, 3, 2/3)$ es la solución óptima. Por ende, en el problema original $x_e = 10/3$, $x_i = 4/3$ y el valor de la función objetivo es $z = 38/3$.

Modelo. $\rightarrow \max\ 2X_1 + X_2$

F.E $\quad x_1 + 2x_2 \leq 8 \qquad X_1, X_2 \geq 0$

$2X_1 + X_2 \leq 6$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$z = 2X_1 + X_2$

$X_1 + 2X_2 + S_1 = 8 \rightarrow S_1 = 8 - X_1 - 2X_2$

$2X_1 + X_2 + S_2 = 6 \rightarrow S_2 = 6 - 2X_1 - X_2$

$z, S_1, S_2 \rightarrow$ V.B $\qquad X_1\ X_2$ VnB $= 0$

$S_1 = 0 \qquad X_1 = 8$

$S_2 = 0 \qquad X_1 = 3 \qquad X_1 = \frac{6 - X_2}{2} - S_2$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$3x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 24 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 36 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$3x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

max $Z = \boxed{3X_1} + X_2 + 2X_3$

$X_1, X_2, X_3 = 0$

$S_1, S_2, S_3 \geq 0$

$X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 30$
$2X_1 + 2X_2 + 5X_3 + S_2 = 24$
$4X_1 + X_2 + 2X_3 + S_3 = 36$

V. basicas

$S_1 = -X_1 - X_2 - 3X_3 + 30$
$S_2 = -2X_1 - 2X_2 - 5X_3 + 24$
$\to S_3 = -4X_1 - X_2 - 2X_3 + 36$

Entrar X_1 $\uparrow$ max $Z = \boxed{3X_1} + X_2 + 2X_3$

$Z = -\frac{3}{4}S_3 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + 27$

$S_1 = 0$ $\quad 0 = -X_1 + 30 \quad X_1 = 30$
$S_2 = 0$ $\quad 0 = -2X_1 + 24 \quad X_1 = 12$
$S_3 = 0$ $\quad 0 = -4X_1 + 36 \quad X_1 = 9$

V.b

$S_1 = \frac{S_3}{4} - \frac{3}{4}X_2 - \frac{5}{2}X_3 + 21$

$S_2 = \frac{S_3}{2} - \frac{3}{2}X_2 - 4X_3 + 6$

$X_1 = \frac{-X_2 - 2X_3 - S_3 + 36}{4}$

$S_1 = 0$ $\quad \frac{5}{2}X_3 = 21 \quad X_3 = \frac{42}{5} = 8, \ldots$
$S_2 = 0$ $\quad 4X_3 = 6 \quad X_3 = \frac{6}{4} = 1,5$
$X_1 = 0$ $\quad \frac{2}{4}X_3 = 36 \quad 72 = X_3$

S_2 sale
X_3 entra $\quad Z = -\frac{13}{16}S_3 + \frac{1}{16}X_2 - \frac{S_2}{8} + \frac{111}{4}$

$S_1 = -\frac{1}{16}S_3 + \frac{3}{16}X_2 + \frac{5}{8}S_2 + \frac{69}{4}$

$X_3 = \frac{\frac{S_3}{2} - \frac{3}{2}X_2 - S_2 + 6}{4}$

$X_1 = -\frac{7}{16}X_2 + \frac{1}{8}S_2 - \frac{5}{16}S_3 + \frac{33}{4}$

Meter X_2

$S_1 = 0$ $\quad X_2 \leq 0$ X
$X_3 = 0$ $\quad \frac{3}{8}X_2 = \frac{6}{4} \quad X_2 = 4$
$X_1 = 0$ $\quad \frac{7}{16}X_2 = \frac{33}{4}$

$Z = -\frac{19}{24}S_3 - \frac{1}{6}X_3 - \frac{1}{6}S_2 + 28$

$S_1 = -\frac{1}{16}S_3 + \frac{3}{16}X_2 + \frac{5}{8}S_2 + \frac{69}{4}$ $\quad \frac{35}{2}$

$\to X_2 = \frac{S_3}{3} - \frac{2}{3}S_2 + 4 - \frac{8}{3}X_3$ $\quad \frac{3}{8}X_2 = \frac{S_3}{8} - \frac{S_2}{4} + \frac{6}{4} - X_3$

$X_1 = -\frac{7}{16}X_2 + \frac{1}{8}S_2 - \frac{5}{16}S_3 + \frac{33}{4}$ $\quad \frac{69}{4} + \left(\frac{1}{16}\right) \times 4$

$Z = -\frac{13}{16}S_3 + \frac{1}{16}X_2 - \frac{S_2}{8} + \frac{111}{4}$ $\quad \frac{33}{4} + \frac{1}{16} \times 4$

$X_2 = 4, X_3 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0$

$S_1 = \frac{35}{2}, X_1 = \frac{17}{2}$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$\begin{aligned}
z &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
x_4 &= 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\
x_5 &= 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\
x_6 &= 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3
\end{aligned}$$

Una solución básica es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$. Esta solución es una solución factible y el valor de la función objetivo es 0.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

Inicialmente se transforma el programa a la forma de *holgura*:

$$
\begin{aligned}
z &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
x_4 &= 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\
x_5 &= 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\
x_6 &= 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Una solución básica es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$. Esta solución es una solución factible y el valor de la función objetivo es 0.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- En este momento, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_1 tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_2 tiene coeficiente 1 y x_3 tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_1 para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- En este momento, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_1 tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_2 tiene coeficiente 1 y x_3 tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_1 para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- En este momento, se debe seleccionar aquella variable cuyo coeficiente en la función objetivo sea positivo y mayor que el de las demás.
- En este caso, la variable x_1 tiene coeficiente 3 mientras que la variable x_2 tiene coeficiente 1 y x_3 tiene coeficiente 2.
- Por esta razon se selecciona x_1 para incluirse entre las variables básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_1.
- De esta manera se tiene que:

$$\text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_1 = 30$$
$$\text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_1 = 12$$
$$\text{Si } x_6 = 0 \text{ entonces } x_1 = 9$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_1 = 9$ y se selecciona la variable x_6.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_1.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_1 = 30 \\ \text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_1 = 12 \\ \text{Si } x_6 = 0 \text{ entonces } x_1 = 9 \end{array}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_1 = 9$ y se selecciona la variable x_6.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar una variable no-básica para intercambiarla con x_1.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_1 = 30 \\ \text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_1 = 12 \\ \text{Si } x_6 = 0 \text{ entonces } x_1 = 9 \end{array}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_1 = 9$ y se selecciona la variable x_6.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_1 en la restricción $x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$ y se obtiene

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_1 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_1 en la restricción $x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$ y se obtiene

$$x_1 = 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_1 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= 27 + 1/4x_2 + 1/2x_3 - 3/4x_6 \\
x_1 &= 9 - 1/4x_2 - 1/2x_3 - 1/4x_6 \\
x_4 &= 21 - 3/4x_2 - 5/2x_3 + 1/4x_6 \\
x_5 &= 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6
\end{aligned}
$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_3 tiene mayor coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_3 tiene mayor coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_3 tiene mayor coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_3.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_3 = 18 \\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_3 = 42/5 \\ \text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_3 = 3/2 \end{array}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_3 = 3/2$ y se selecciona la variable x_5.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_3.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_3 = 18\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_3 = 42/5\\ \text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_3 = 3/2\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_3 = 3/2$ y se selecciona la variable x_5.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_3.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{array}{c} \text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_3 = 18 \\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_3 = 42/5 \\ \text{Si } x_5 = 0 \text{ entonces } x_3 = 3/2 \end{array}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_3 = 3/2$ y se selecciona la variable x_5.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_3 en la restricción

$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$

y se obtiene

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_3 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_3 en la restricción

$$x_5 = 6 - 3/2x_2 - 4x_3 + 1/2x_6$$

y se obtiene

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_3 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

$x_4 = s_1$ $x_5 = s_2$
$x_6 = s_3$

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned}
z &= 111/4 + 1/16x_2 - 1/8x_5 - 11/16x_6 \\
x_1 &= 33/4 - 1/16x_2 + 1/8x_5 - 5/16x_6 \\
x_3 &= 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6 \\
x_4 &= 69/4 + 3/16x_2 + 5/8x_5 - 1/16x_6
\end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_2 es la única variable con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_2 es la única variable con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se debe intentar aumentar el valor de la función objetivo.
- Nuevamente, debe seleccionarse la variable cuyo coeficiente positivo sea mayor.
- En este caso, la variable x_2 es la única variable con coeficiente positivo y es seleccionada para incluirse entre las variable básicas.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_2.
- De esta manera se tiene que:

$$\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_2 = 132$$
$$\text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_2 = 4$$
$$\text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_2 = -92$$

  Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_2 = 4$ y se selecciona la variable x_3.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_2.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_2 = 132\\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_2 = 4\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_2 = -92\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_2 = 4$ y se selecciona la variable x_3.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora es necesario seleccionar nuevamente una variable no-básica para intercambiarla con x_2.
- De esta manera se tiene que:

$$\begin{gathered}\text{Si } x_1 = 0 \text{ entonces } x_2 = 132\\ \text{Si } x_3 = 0 \text{ entonces } x_2 = 4\\ \text{Si } x_4 = 0 \text{ entonces } x_2 = -92\end{gathered}$$

Luego se debe seleccionar el menor valor positivo, En este caso $x_2 = 4$ y se selecciona la variable x_3.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_2 en la restricción

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

y se obtiene

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_2 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

- Ahora se despeja x_2 en la restricción

$$x_3 = 3/2 - 3/8x_2 - 1/4x_5 + 1/8x_6$$

y se obtiene

$$x_2 = 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6$$

- Posteriormente, es necesario sustituir x_2 de acuerdo a la ecuación anterior en la función objetivo y en la restricciones del sistema.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned}
z &= 28 - 1/6x_3 - 1/6x_5 - 2/3x_6 \\
x_1 &= 8 + 1/6x_3 + 1/6x_5 - 1/3x_6 \\
x_2 &= 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6 \\
x_4 &= 18 - 1/2x_3 + 1/2x_5
\end{aligned}$$

En este punto no es posible mejorar el valor de la función objetivo puesto que todos los coeficientes son negativos. Por consiguiente, hemos alcanzado la solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejemplo 2

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned} z &= 28 - 1/6x_3 - 1/6x_5 - 2/3x_6 \\ x_1 &= 8 + 1/6x_3 + 1/6x_5 - 1/3x_6 \\ x_2 &= 4 - 8/3x_3 - 2/3x_5 + 1/3x_6 \\ x_4 &= 18 - 1/2x_3 + 1/2x_5 \end{aligned}$$

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8, 4, 0, 18, 0, 0)$ es la solución óptima. Por ende, en el problema original $x_e = 10/3$, $x_i = 4/3$ y el valor de la función objetivo es $z = 28$.

Programación Lineal

Método Simplex: Ejercicio

Maximizar

$$18x_1 + 12.5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 &\leq 12 \\ x_2 &\leq 16 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejercicio

Maximizar

$$5x_1 - 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Ejercicio

Minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7.5x_2 + x_3 &\geq 10000 \\ 20x_1 + 5x_2 + 10x_3 &\geq 30000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Consideremos nuevamente el programa lineal asociado al problema de las pinturas:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$X_e + 2X_i + S_1 = 6$

$$\begin{array}{rcl} x_e + 2x_i & \leq & 6 \\ 2x_e + x_i & \leq & 8 \\ -x_e + x_i & \leq & 1 \\ x_i & \leq & 2 \\ x_e, x_i & \geq & 0 \end{array}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Consideremos la forma de holgura del anterior programa lineal:

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 3x_e + 2x_i \\
x_1 & = & 6 - x_e - 2x_i \\
x_2 & = & 8 - 2x_e - x_i \\
x_3 & = & 1 + x_e - x_i \\
x_4 & = & 2 - x_i
\end{array}
$$

V.B	Xe	Xi	X1	X2	X3	X4	RHS
Z	3	2					0
X1	-1	-2					6
X2	-2	-1					8
X3	1	-1					1
X4	0	-1					2

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Las anteriores ecuaciones pueden ser expresadas como sigue:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
z & - & 3x_e & - & 2x_i & = & 0 \\
x_e & + & 2x_i & + & x_1 & = & 6 \\
2x_e & + & x_i & + & x_2 & = & 8 \\
-x_e & + & x_i & + & x_3 & = & 1 \\
 & & x_i & + & x_4 & = & 2
\end{array}
$$

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

$Z = -X_0$

Es posible utilizar un tablero para facilitar el procedimiento:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Luego, se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica. Se elige la variable con mayor coeficiente negativo:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	entra x_e
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8	
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Es posible utilizar un tablero para facilitar el procedimiento:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$X_e = 6$
$X_e = 4$
$X_e = \div 1$
$X_e = \infty X$

Luego, se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica. Se elige la variable con mayor coeficiente negativo:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	entra x_e
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8	
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	entra x_e
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	$6/1 = 6$
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$ sale x_2
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	$1/-1 = -1$
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	—

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	entra x_e
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	$6/1 = 6$
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$ sale x_2
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	$1/-1 = -1$
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	—

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	entra x_e
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	$6/1 = 6$
Xe x_2	0	2	1	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$ sale x_2
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	$1/-1 = -1$
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	—

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se debe seleccionar una variable básica para intercambiarla con x_e:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	entra x_e
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	$6/1 = 6$
x_2	0	2	1	0	1	0	0	8	$8/2 = 4$ sale x_2
x_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	$1/-1 = -1$
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	—

Luego, se debe actualizar el tablero. Se debe multiplicar la fila de la variable x_e con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote). Además, se suma cada una de las demás filas un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente).

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

De esta manera, se obtiene la siguiente configuración:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	
x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	4/3
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	2

Ahora se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	entra x_i
x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

De esta manera, se obtiene la siguiente configuración:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	
x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	

Ahora se debe seleccionar una variable no-básica para volverla básica:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	entra x_i
x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se selecciona la variable básica que debe salir:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	entra x_i
Xi x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	4/3 sale x_1
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	2

Posteriormente, se actualiza el tablero como se mencionó anteriormente:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3	
x_i	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3	
x_e	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3	
x_3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
x_4	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se selecciona la variable básica que debe salir:

Var. Básicas	**z**	**x_e**	**x_i**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**RHS**	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	entra x_i
x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	4/3 sale x_1
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	2

Posteriormente, se actualiza el tablero como se mencionó anteriormente:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3	
x_i	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3	
x_e	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3	
x_3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
x_4	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

Ahora se selecciona la variable básica que debe salir:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	entra x_i
x_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	4/3 sale x_1
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8
x_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
x_4	0	0	1	0	0	0	1	2	2

Posteriormente, se actualiza el tablero como se mencionó anteriormente:

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3	
x_i	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3	
x_e	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3	
x_3	0	0	0	-1	1	1	0	3	
x_4	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3	

Programación Lineal

Método Simplex: Tablero

A este punto ya no se debe iterar más y la solución es $x_i = 4/3$, $x_e = 10/3$ para un valor óptimo $z = 38/3$.

Var. Básicas	z	x_e	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
x_i	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
x_e	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
x_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
x_4	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

En algunos programas lineales, la solución básica inicial no es una solución factible. Por ejemplo, considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$2x_1 - x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 5x_2 &\leq -4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

En algunos programas lineales, la solución básica inicial no es una solución factible. Por ejemplo, considere el siguiente programa lineal:

Maximizar

$$2x_1 - x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\overset{+x_3}{\leq} 2 \\ x_1 - 5x_2 &\overset{+x_4}{\leq} -4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$X_1 - 5X_2 + X_4 = -4$$

$$X_4 = -4 - X_1 + 5X_2 + X_0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

El anterior programa en forma de holgura es como sigue:

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - x_2 \\ x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 \\ x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$X_1, X_2 = 0$

$z = 0$

$X_3 = 0$

$X_4 = -4$:(

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, -4)$ no es factible. Por esta razón, se debe realizar un procedimiento adicional para determinar si el programa anterior es factible y obtener una forma de holgura con la que si se pueda aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

El anterior programa en forma de holgura es como sigue:

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - x_2 \\ x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 \\ x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, -4)$ no es factible. Por esta razón, se debe realizar un procedimiento adicional para determinar si el programa anterior es factible y obtener una forma de holgura con la que si se pueda aplicar el método simplex.

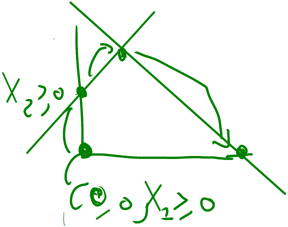
Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

El anterior programa en forma de holgura es como sigue:

$z = -x_0$

$$
\begin{aligned}
z &= 2x_1 - x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 \\
x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 \\
x_1, x_2, & \boxed{x_3, x_4} \geq 0
\end{aligned}
$$



La solución básica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, -4)$ no es factible. Por esta razón, se debe realizar un procedimiento adicional para determinar si el programa anterior es factible y obtener una forma de holgura con la que si se pueda aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$\begin{aligned} \boxed{z = -x_0} \\ x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 + \boxed{x_0} \\ x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 + \boxed{x_0} \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$
\begin{aligned}
z &= -x_0 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_0 \\
x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 + x_0 \\
& x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 \boxed{+\ x_0} \\ x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 \boxed{+\ x_0} \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Inicialmente, se utilizar una variable nueva x_0 y se sustituye la función de optimización como sigue:

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ x_3 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_0 \\ x_4 &= -4 - x_1 + 5x_2 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Luego, se aplican los pasos del método simplex (flexible) sobre este nuevo programa.
- Si el valor óptimo que se obtiene es 0, significa que el programa original tiene solución.
- En caso contrario, el programa original no tiene solución.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

.
- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

.

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

.

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Se debe incluir la variable x_0 entre las variables básicas.
- Por esta razon, se selecciona la variable x_4 para realizar el intercambio.
- Al despejar x_0 en la ecuación $x_4 = -4 - x_1 + 5x_2 + x_0$, se obtiene

$$x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$$

.

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_0 por la expresión anterior.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= -4 - x_1 + 5x_2 - x_4 \\
x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + x_4 \\
x_3 &= 6 - x_1 - 4x_2 + x_4 \\
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2.
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2.
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= -4 - x_1 + 5x_2 - x_4 \\
x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + x_4 \\
x_3 &= 6 - x_1 - 4x_2 + x_4 \\
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2.
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2.
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= -4 - x_1 + 5x_2 - x_4 \\
x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + x_4 \\
x_3 &= 6 - x_1 - 4x_2 + x_4 \\
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$5x_2 = 4$ $\quad x_2 = \frac{4}{5}$

$4x_2 = 6$ $\quad x_2 = \frac{6}{4}$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2.
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2.
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$
\begin{aligned}
z &= -4 - x_1 + 5x_2 - x_4 \\
x_0 &= 4 + x_1 - 5x_2 + x_4 \\
x_3 &= 6 - x_1 - 4x_2 + x_4 \\
x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- En este punto, es posible mejorar el valor de z si se incrementa el valor de x_2.
- Luego se debe seleccionar una variable para intercambiarla con x_2.
- Así, se selecciona la variable x_0 para realizar el intercambio.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Al despejar x_2 en la ecuación $x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$, se obtiene

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_2 por la expresión anterior.
- De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ x_2 &= 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 + 4x_0/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Al despejar x_2 en la ecuación $x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$, se obtiene

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_2 por la expresión anterior.
- De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$$\begin{aligned} z &= -x_0 \\ x_2 &= 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 + 4x_0/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- Al despejar x_2 en la ecuación $x_0 = 4 + x_1 - 5x_2 + x_4$, se obtiene

$$x_2 = 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5$$

- Luego, se debe reemplazar las ocurrencias de la variable x_2 por la expresión anterior.
- De esta manera, se obtiene el siguiente programa lineal equivalente:

$z = -2x_1 + x_2$

$$\left\{\begin{aligned} z &= -x_0 \\ x_2 &= 4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 + 4x_0/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \end{aligned}\right.$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

- El valor de la función objetivo en el programa anterior no puede ser mejorado.
- Este valor es igual a 0 y por lo tanto el programa original tiene solución.
- Ahora, el programa anterior puede ser modificado para retomar el programa original.
- La función objetivo en el programa original era $2x_1 - x_2$. Al sustituir x_2 con la expresión obtenida para el programa anterior se obtiene

$$2x_1 - (4/5 - x_0/5 + x_1/5 + x_4/5) = -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5$$

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Luego, se remueven las ocurrencias de x_0 puesto que es una variable auxiliar cuyo valor es 0. Así, se obtiene el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} z &= -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5 \\ x_2 &= 4/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este programa la solución básica inicial es factible y por lo tanto se puede aplicar el método simplex.

Programación Lineal

Método Simplex: Solución Básica No Factible

Luego, se remueven las ocurrencias de x_0 puesto que es una variable auxiliar cuyo valor es 0. Así, se obtiene el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} z &= -4/5 + 9x_1/5 - x_4/5 \\ x_2 &= 4/5 + x_1/5 + x_4/5 \\ x_3 &= 14/5 - 9x_1/5 + x_4/5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

En este programa la solución básica inicial es factible y por lo tanto se puede aplicar el método simplex.

Preguntas

?