# Matemáticas Discretas II

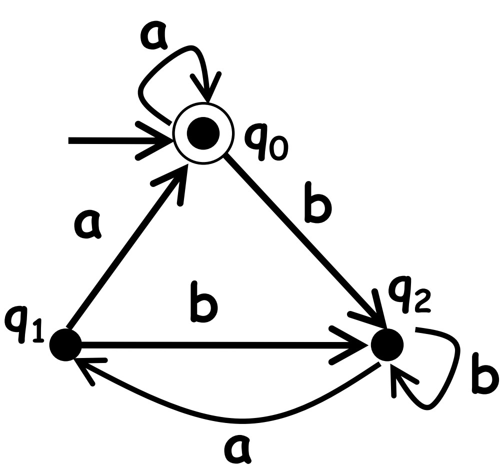
Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

- Lema de Arden
- Lema del bombeo
- Gramáticas regulares
- Forma Backus-Naur BNF

# Lenguajes regulares

**Problema**. Dado un autómata encontrar la expresión regular del lenguaje que acepta




$$(a \cup (b^+a)^+a)^*$$

# Lenguajes regulares

- Dados los lenguajes A y B

  **A={ab}**

  **B={bbb}**

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

  **X={ab}·X∪{bbb}**

$X = AX \cup B$

$X = \{ab\}X \cup \{bbb\}$

# Lenguajes regulares

- Dados los lenguajes A y B

  **A={ab}**

  **B={bbb}**

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

  **X={ab}·X∪{bbb}**

$\{ab\}\cdot\{\ \{ab\}\cdot X\cup\{bbb\}\ \} \rightarrow \{ab\}^2 X \cup \{ab\}\{bbb\} \cup \{bbb\}$

$\{ab\}^2\{\{ab\}X \cup \{bbb\}\} \cup \{ab\}\{bbb\} \cup \{bbb\}$

$\{ab\}^3 X \cup \{\boxed{abab}bbb, \boxed{ab}bbb, \boxed{\ }bbb\}$

$(ab)^*\{bbb\} \quad X = A^* B$

# Lenguajes regulares

- Dados los lenguajes A y B

  **A={ab}**

  **B={bbb}**

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

  $\mathbf{X=\{ab\}\cdot X\cup\{bbb\}}$

  $X=\{bbb, abbbb, ababbbb, \ldots\}=\{ab\}^{*}\cdot\{bbb\}$

# Lenguajes regulares

- Dados los lenguajes A y B

  $\mathbf{A=\{ab\}}$

  $\mathbf{B=\{bbb\}}$

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

  $\mathbf{X=\{ab\}\cdot X\cup\{bbb\}=A\cdot X\cup B}$

  $X=\{bbb,abbbb,ababbbb,\ \ldots\}=\{ab\}^*\cdot\{bbb\}=A^*\cdot B$

# Lenguajes regulares

- Dados los lenguajes A y B

  **A={ab}** ←

  **B={b,ba}**

- Se define el lenguaje X de forma recursiva:

  **X={ab}·X∪{b,ba}=A·X∪B**

$X = \{ab\}\{\{ab\}X \cup \{b, ba\}\} \cup \{b, ba\}$

$X = \{ab\}^2 X \cup \{abb, abba, b, ba\}$

$A^*B$

# Lenguajes regulares

**Lema de Arden.** Una ecuación de la forma $X=AX\cup B$, donde $A$, $B$, $X$ son lenguajes y $\varepsilon\notin A$ ($A$ no contiene la cadena vacía), tiene una solución única $X=A^*B$

$X = AX \cup B = A^*B$

# Lenguajes regulares

El lema permite expresar de forma no recursiva un lenguaje

**$X=A\cdot X \cup B$ es equivalente a $X=A^*B$**

# Lenguajes regulares

Dado un diagrama de transición se puede obtener una expresión regular de la siguiente forma:

- Escriba una ecuación por cada estado del diagrama que represente el lenguaje generado a partir de ese nodo
- Resuelva las ecuaciones recursivas por medio del lema de Arden
- Reemplace las expresiones calculadas

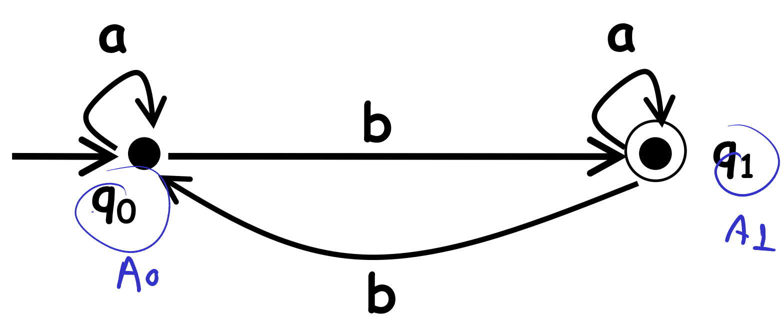
# Lenguajes regulares

Dado un diagrama de transición se puede obtener una expresión regular de la siguiente forma:

- Escriba una ecuación por cada estado del diagrama que represente el lenguaje generado a partir de ese nodo
- Resuelva las ecuaciones recursivas por medio del lema de Arden
- Reemplace las expresiones calculadas

- La expresión asociada a $q_0$ será la **expresión regular** del autómata

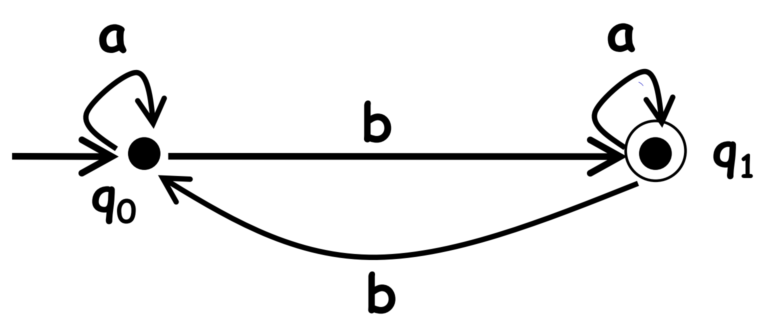
# Lenguajes regulares




$A_0 = aA_0 \cup bA_1$

$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \epsilon$ Estado aceptacion

# Lenguajes regulares




$A_0=aA_0 \cup bA_1$, indica las cadenas generadas en $q_0$

$A_1=aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon$, indica las cadenas generadas en $q_1$

# Lenguajes regulares

- Se aplica el lema de Arden para simplificar las ecuaciones:

$A_0 = aA_0 \cup bA_1$
$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon$

# Lenguajes regulares

- Se aplica el lema de Arden para simplificar las ecuaciones:

$A_0 = aA_0 \cup bA_1$

$A_1 = aA_1 \cup \overbrace{\boxed{bA_0 \cup \varepsilon}}^{B} = a^*(bA_0 \cup \varepsilon) = a^*bA_0 \cup a^*$

$AX \cup B$

$A_1 = a^*(bA_0 \cup \epsilon)$

$A_1 = a^*bA_0 \cup a^*$

$A_0 = aA_0 \cup bA_1 \Rightarrow A_0 = aA_0 \cup b(a^*bA_0 \cup a^*)$

$A_0 = a\boxed{A_0} \cup ba^*b\boxed{A_0} \cup ba^*$

Expresión regular

$A_0 = \underbrace{(a \cup ba^*b)}_{A} A_0 \cup \underbrace{ba^*}_{B} = \boxed{(a \cup ba^*b)^* ba^*}$

# Lenguajes regulares

- Se aplica el lema de Arden para simplificar las ecuaciones:

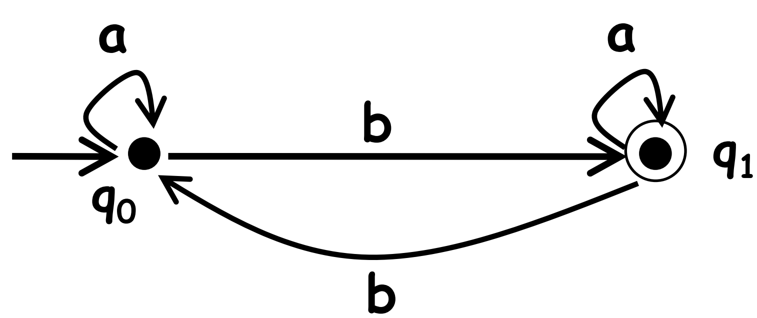
$A_0 = aA_0 \cup bA_1$
$A_1 = aA_1 \cup bA_0 \cup \varepsilon = a^*(bA_0 \cup \varepsilon) = a^*bA_0 \cup a^*$

- Se reemplaza $A_1$ en $A_0$ y se obtiene:

$$
\begin{aligned}
A_0 = aA_0 \cup b(a^*bA_0 \cup a^*) &= aA_0 \cup ba^*bA_0 \cup ba^* \\
&= (a \cup ba^*b)A_0 \cup ba^* \\
&= (a \cup ba^*b)^*ba^*
\end{aligned}
$$

La expresión asociada a $A_0$ es la expresión que representa el autómata

# Lenguajes regulares

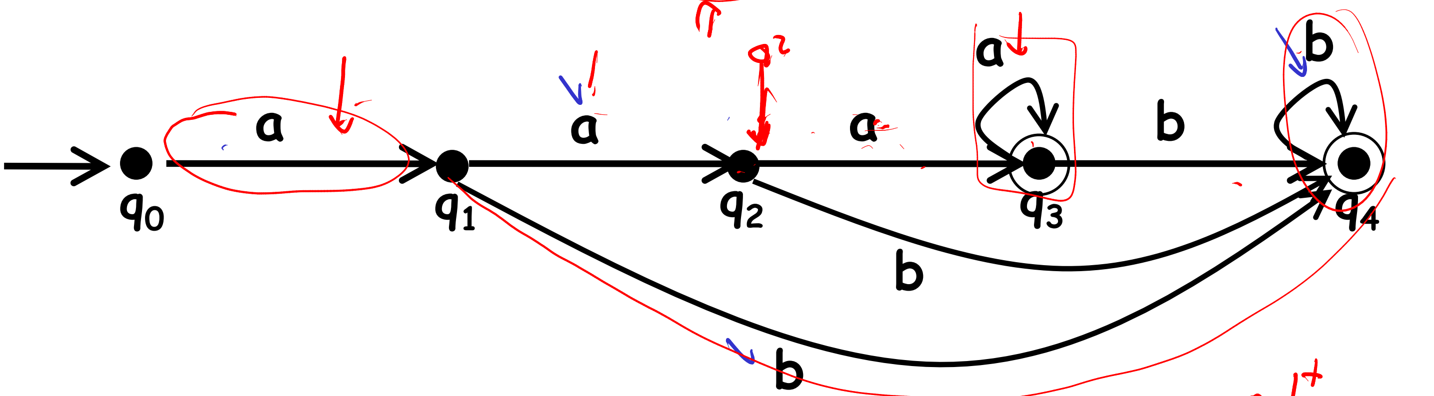



Autómata que representa **(a∪ba*b)*ba***

# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata

$a^+b^+ \cup a^2a^+$




$A_0 = aA_1$

$A_1 = aA_2 \cup bA_4$

$A_2 = aA_3 \cup bA_4$

$A_3 = aA_3 \cup bA_4 \cup \epsilon$

$A_4 = bA_4 \cup \epsilon$

$a^2 a \leftarrow a^{+}$

$a^2(a \cup a^2 \cup a^3 \cup \ldots)$

$ab^+$

$aab^+$

$aaab^+$

$aaa \leftrightarrow b^+$

$A_0 = aA_1 \leftarrow$

$A_1 = aA_2 \cup bA_4$

$A_2 = aA_3 \cup bA_4$

$A_3 = aA_3 \cup bA_4 \cup \epsilon$

$A_4 = bA_4 \cup \epsilon$

$\boxed{A_4 = b^*\epsilon = b^*}$

$A_3 = aA_3 \cup bb^* \cup \epsilon$

$A_3 = \boxed{a}A_3 \cup (b^+ \cup \epsilon)$

$A_3 = a^*(b^+ \cup \epsilon)$

$\boxed{A_3 = a^*b^+ \cup a^*}$

$A_2 = a(a^*b^+ \cup a^*) \cup b^+$

$A_2 = a^+b^+ \cup a^+ \cup b^+$

$A_1 = aa^+b^+ \cup \boxed{aa^+} \cup ab^+ \cup b^+$

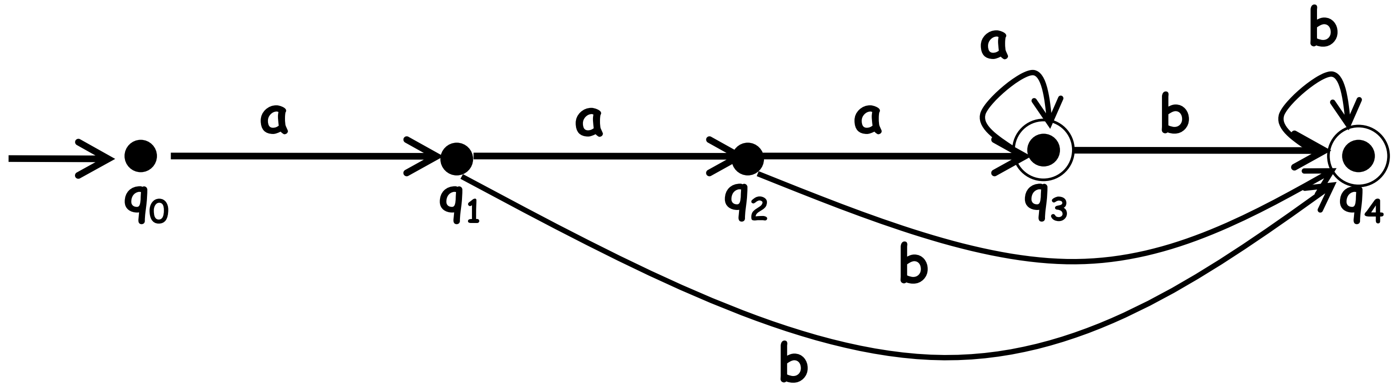
$A_0 = a^2a^+b^+ \cup a^2a^+ \cup a^2b^+ \cup ab^+$

$A_0 = (a^2a^+ \cup a^2 \cup a)b^+ \cup a^2a^+$

aaa, aaaa, aa, a

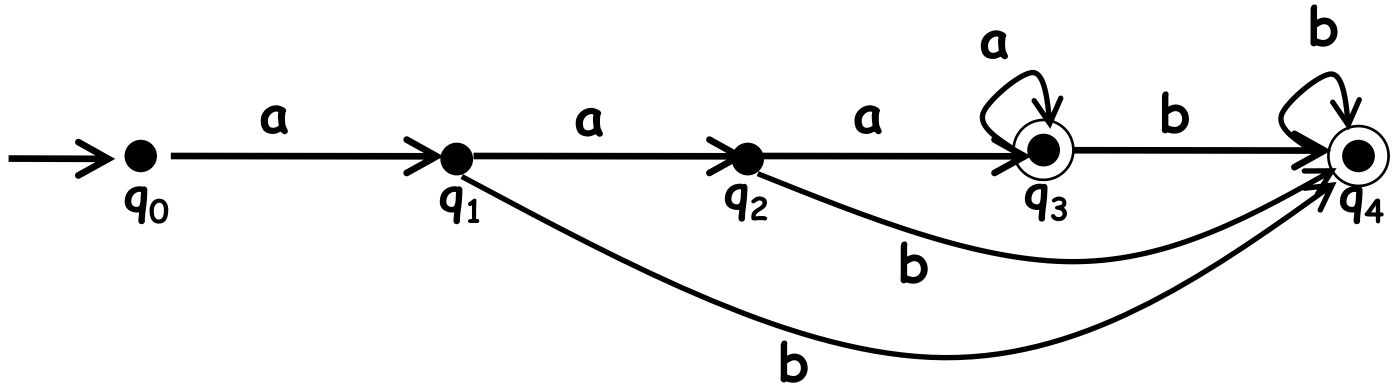
$= a^+b^+ \cup aa^+$

# Lenguajes regulares




$A_0 = aA_1$
$A_1 = aA_2 \cup bA_4$
$A_2 = aA_3 \cup bA_4$
$A_3 = aA_3 \cup bA_4 \cup \varepsilon$
$A_4 = bA_4 \cup \varepsilon$

# Lenguajes regulares




$A_0=aA_1$

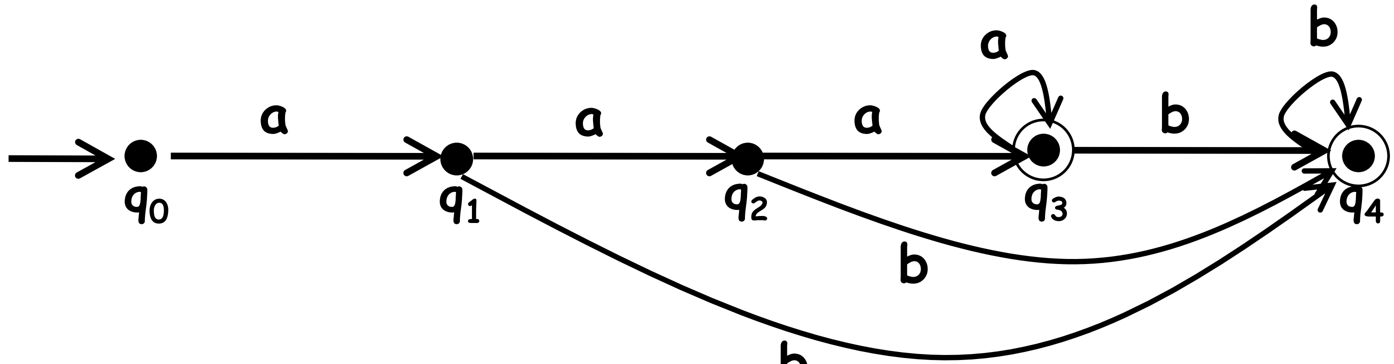
$A_1=aA_2 \cup bA_4$

$A_2=aA_3 \cup bA_4$

$A_3=aA_3 \cup bA_4 \cup \varepsilon$

$A_4=bA_4 \cup \varepsilon=b^*$

# Lenguajes regulares




Corr recta

$A_0=aA_1=a(aa^+b^*\cup ab^+\cup b^+)=\boxed{aaa^+b^*\cup aab^+\cup ab^+}$

$A_1=aA_2\cup bA_4=a(a^+b^*\cup b^+)\cup b^+=aa^+b^*\cup ab^+\cup b^+$

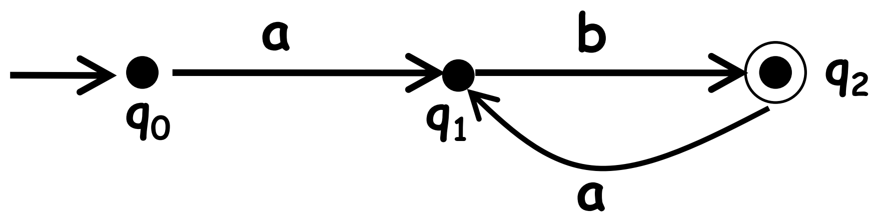
$A_2=aA_3\cup bA_4=aa^*b^*\cup bb^*=a^+b^*\cup b^+$

$A_3=aA_3\cup bA_4\cup\varepsilon=aA_3\cup bb^*\cup\varepsilon=aA_3\cup b^+\cup\varepsilon=a^*(b^+\cup\varepsilon)=a^*b^*$

$A_4=bA_4\cup\varepsilon=b^*$

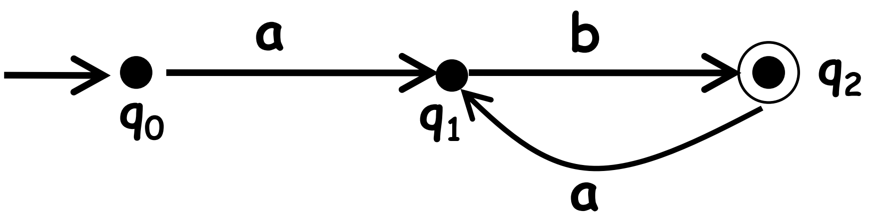
# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata




$A_0 = aA_1 = a(ba)^*b$

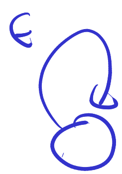
$A_1 = bA_2 = b(aA_1 \cup \varepsilon) = baA_1 \cup b = (ba)^*b$

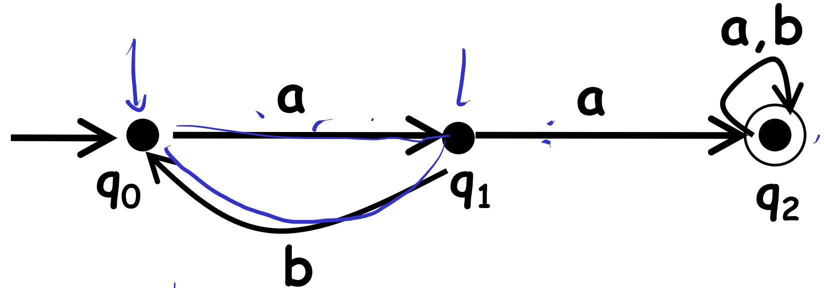
$A_2 = aA_1 \cup \varepsilon$

# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata

$(ab)^* a^2 (a \cup b)^*$




AFN-ε
$\longrightarrow$ AFN

$A_0 = \boxed{a A_1}$

$A_1 = a A_2 \cup b A_0$

$A_2 = (a \cup b) A_2 \cup \epsilon$

$A_2 = (a \cup b)^* \epsilon$

$A_1 = a(a \cup b)^* \cup b A_0$

$A_0 = a^2 (a \cup b)^* \cup ab A_0$

$A_0 = \overset{A}{\boxed{ab}}\, \boxed{A_0} \cup \overset{B}{\boxed{a^2 (a \cup b)^*}}$

$A_0 = (ab)^* a^2 (a \cup b)^*$

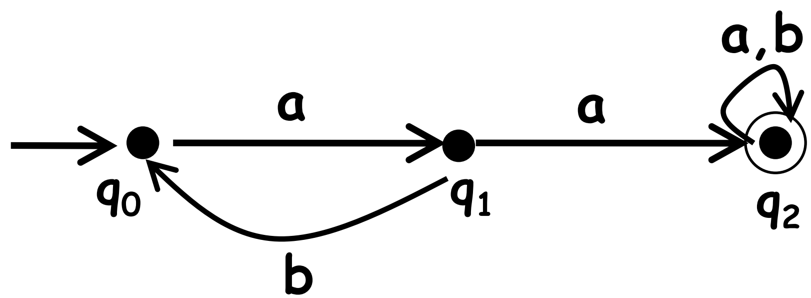
$(ab)^0 a^2 \epsilon = aa$ ✓

$ab a^2 \epsilon = abaa$ ✓

$ababab \quad aa \; (a \cup b)^*$

# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



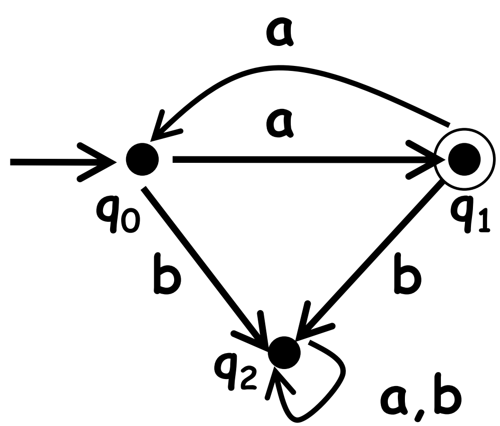

$A_0 = aA_1 = a(\ a(a \cup b)^* \cup bA_0) = aa(a \cup b)^* \cup abA_0 = (ab)^* aa(a \cup b)^*$

$A_1 = aA_2 \cup bA_0 = a(a \cup b)^* \cup bA_0$

$A_2 = aA_2 \cup bA_2 \cup \varepsilon = (a \cup b)A_2 \cup \varepsilon = (a \cup b)^*$

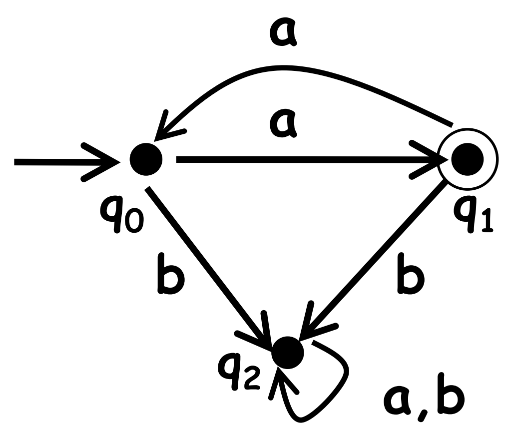
# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

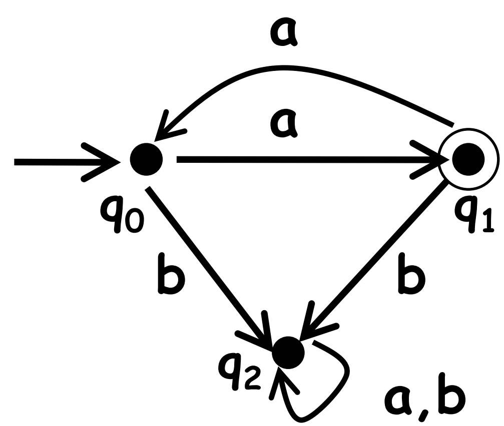
Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata




$A_0 = aA_1 \cup bA_2$
$A_1 = aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon$
$A_2 = aA_2 \cup bA_2$

# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata

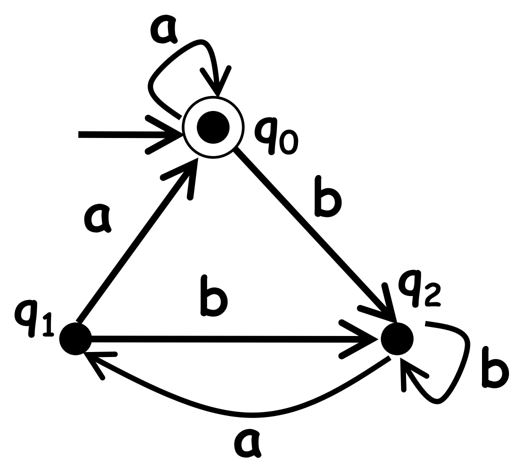



$A_0=aA_1\cup bA_2=a(aA_0\cup\varepsilon)=aaA_0\cup a=(aa)^*a$
$A_1=aA_0\cup bA_2\cup\varepsilon=aA_0\cup\varepsilon$
$A_2=aA_2\cup bA_2=(a\cup b)A_2\cup\varnothing=(a\cup b)\varnothing$

$\boxed{A\cdot\varnothing=\varnothing}$

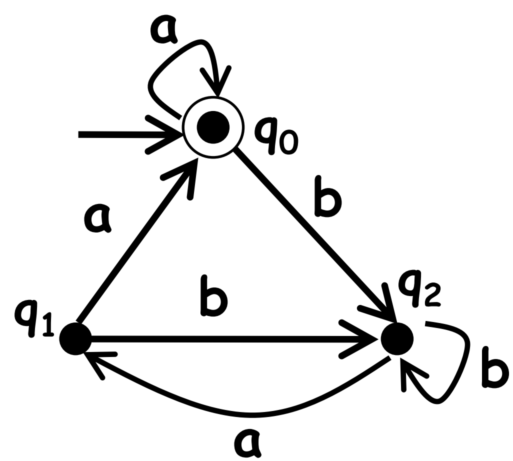
# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



# Lenguajes regulares

Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata



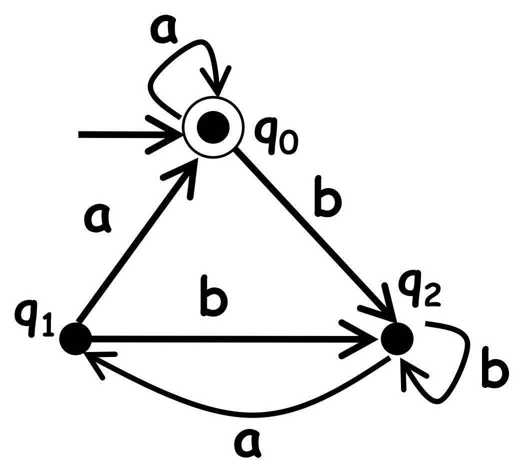

$A_0=aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon = aA_0 \cup bb^*aA_1 \cup \varepsilon = aA_0 \cup b^+a((b^+a)^*aA_0) \cup \varepsilon$

$A_1=aA_0 \cup bA_2 = aA_0 \cup bb^*aA_1 = (bb^*a)^*aA_0 = (b^+a)^*aA_0$

$A_2=aA_1 \cup bA_2 = bA_2 \cup aA_1 = b^*aA_1$

# Lenguajes regulares

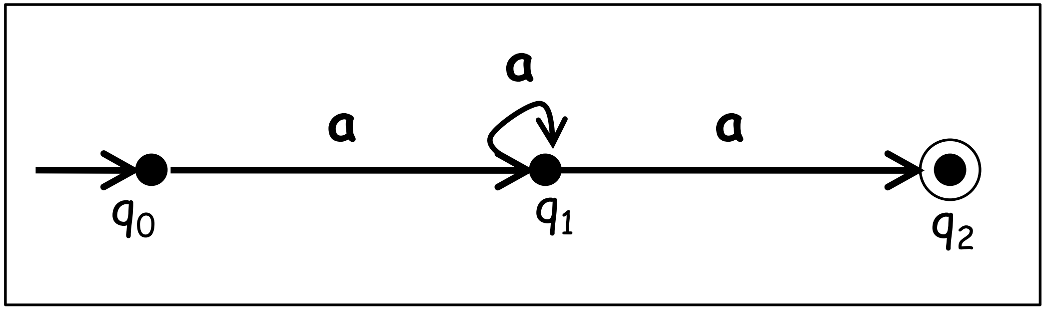
Encuentre la expresión regular asociada al siguiente autómata




$$A_0 = aA_0 \cup bA_2 \cup \varepsilon = aA_0 \cup bb^*aA_1 \cup \varepsilon = aA_0 \cup b^+a((b^+a)^*aA_0) \cup \varepsilon$$
$$= aA_0 \cup b^+a(b^+a)^*aA_0 \cup \varepsilon$$
$$= aA_0 \cup (b^+a)^+aA_0 \cup \varepsilon$$
$$= (a \cup (b^+a)^+a)A_0 \cup \varepsilon$$
$$= (a \cup (b^+a)^+a)^*$$

## Lema del bombeo

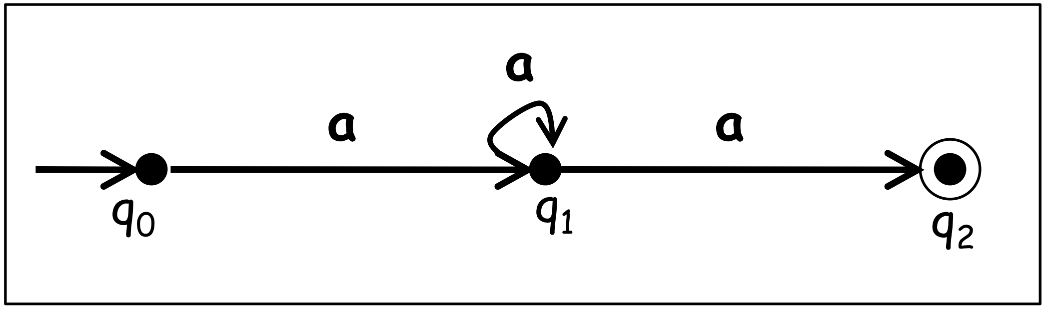
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados



# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

• Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

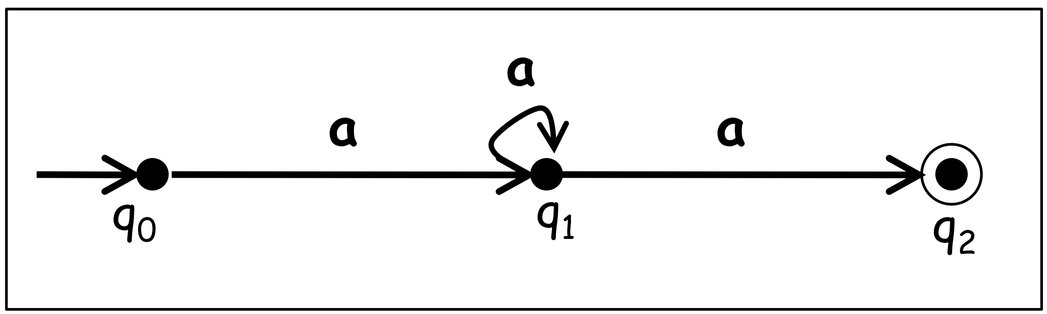



• Si L es infinito se pueden encontrar cadenas cuya longitud es mayor que n

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

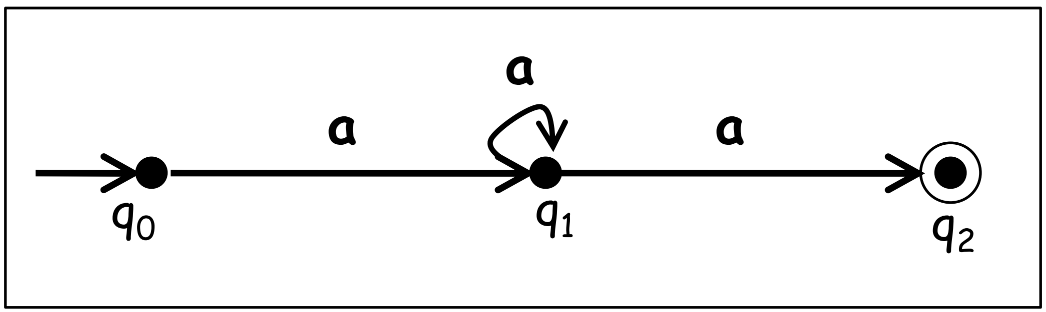
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




¿Cómo hace un autómata que tiene 3 estados para generar cadenas de longitud 100?

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados



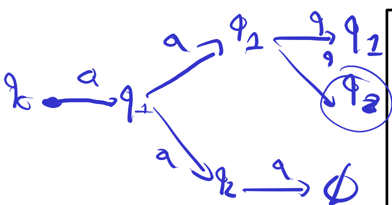

Si es un lenguaje regular infinito debe existir un ciclo en el autómata

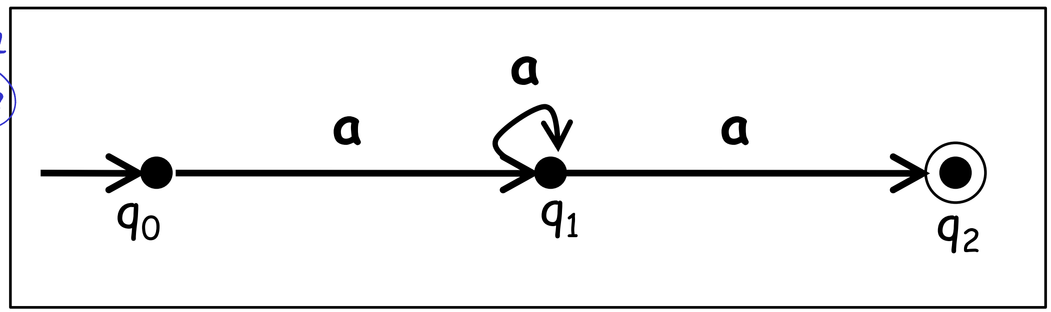
# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

aaa

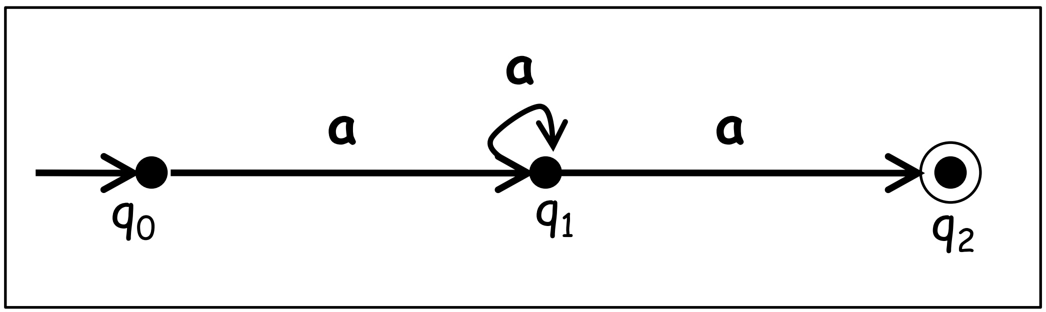





- Suponga que $w=a_1a_2 \ldots a_{n+1}$ es una cadena de longitud n+1 que pertenece a L. Al hacer el recorrido por M, se debe **pasar por un mismo estado más de una vez**, es decir, debe existir un ciclo

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

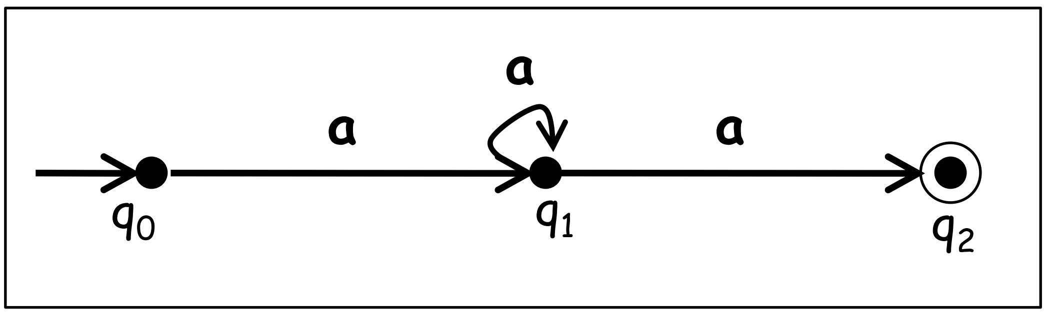



- Suponga que **w=aaa**

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

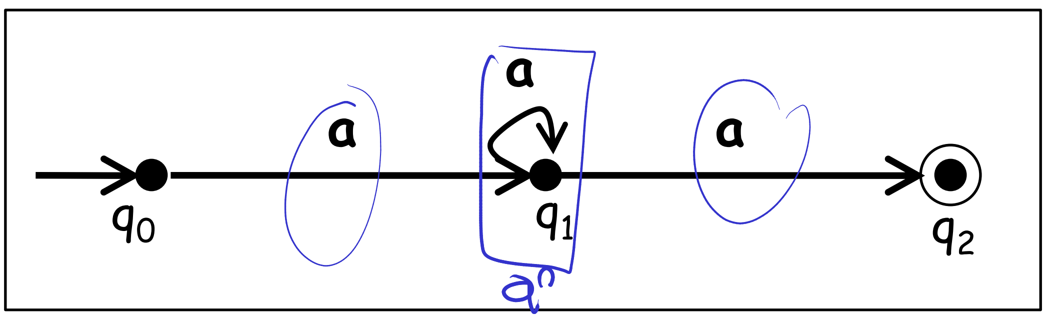
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




**w=a(a)a**

## Lema del bombeo

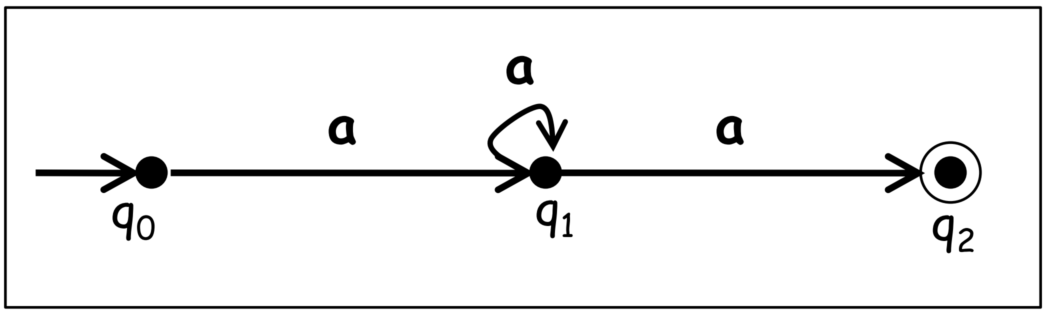
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




**$w=a(a)^2a$**

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

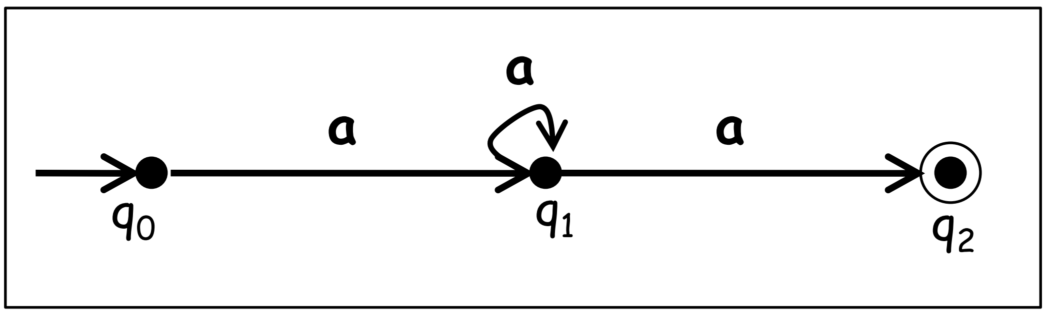



**$w=a(a)^3a$**

$q_0$ $q_1$ $q_2$

## Lema del bombeo

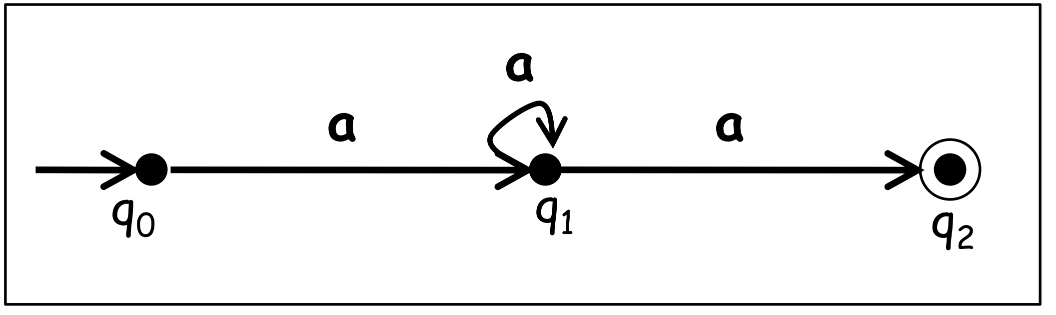
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




$w = a(a)^{100}a$

## Lema del bombeo

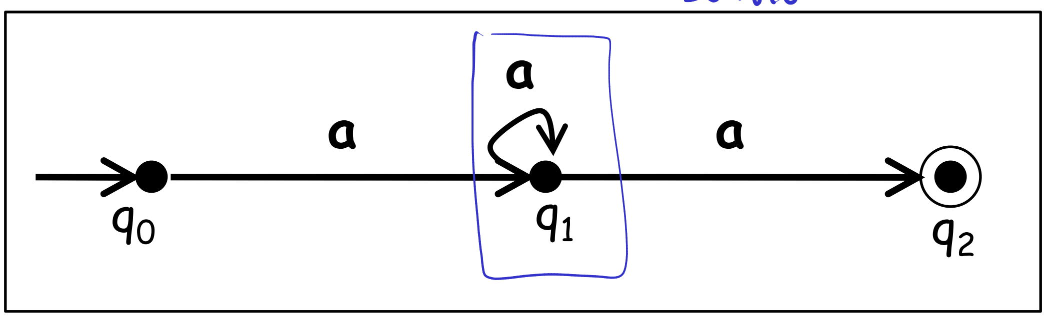
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




$$w=a(a)^0a=a\cdot\varepsilon\cdot a=aa$$

## Lema del bombeo

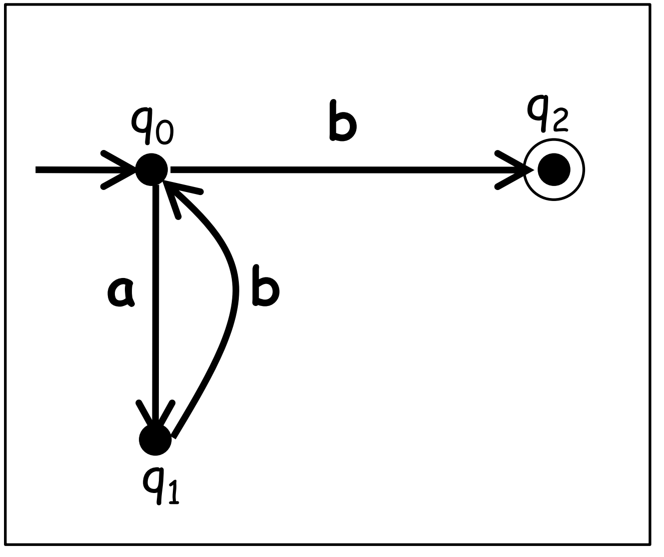
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados


El lema del bombeo establece que cada palabra de longitud mayor o igual a n de un lenguaje regular debe tener una parte que se puede "bombear" 0, 1, 2 o más veces y el resultado sigue perteneciendo al lenguaje

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

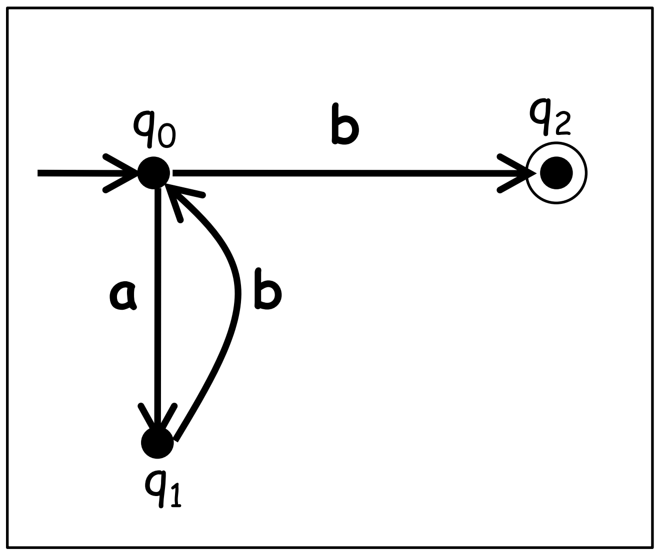



**L={b,abb,ababb,...}**

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

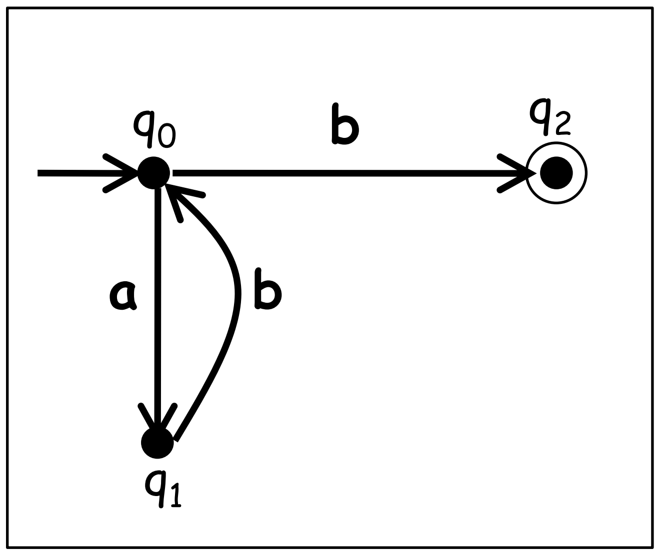
• Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




¿Cómo hace este autómata que tiene 3 estados para generar cadenas de longitud 100?

## Lema del bombeo

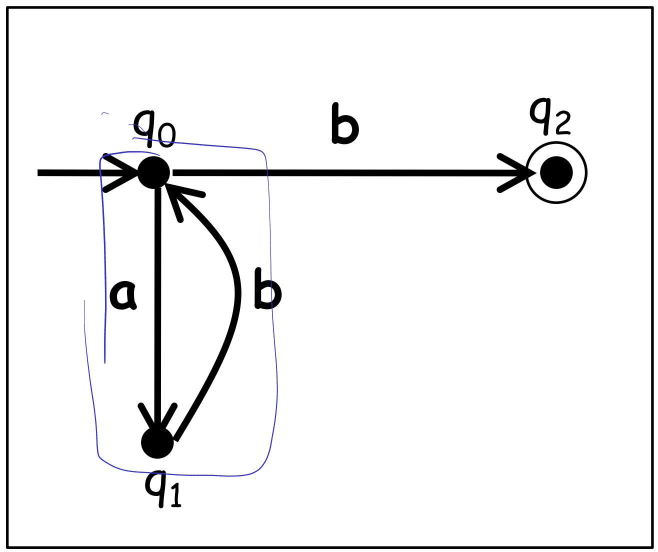
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




Si es un lenguaje regular infinito debe existir un ciclo en el autómata

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados



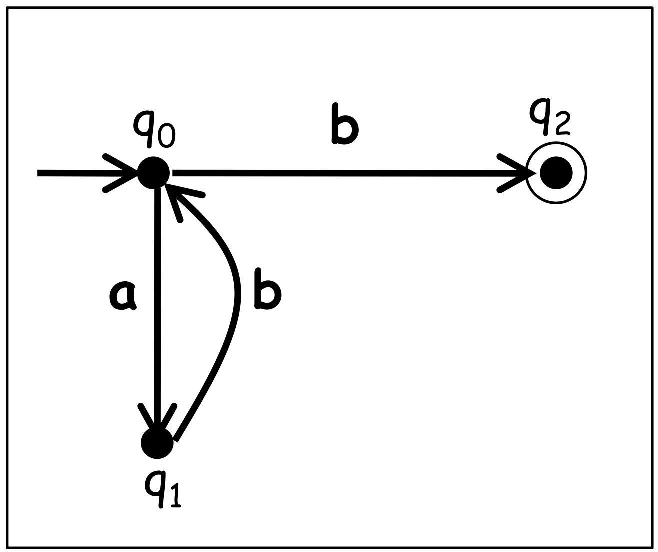

**w=abb**

$q_0 \longleftrightarrow q_0$

$(ab)^n a$

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

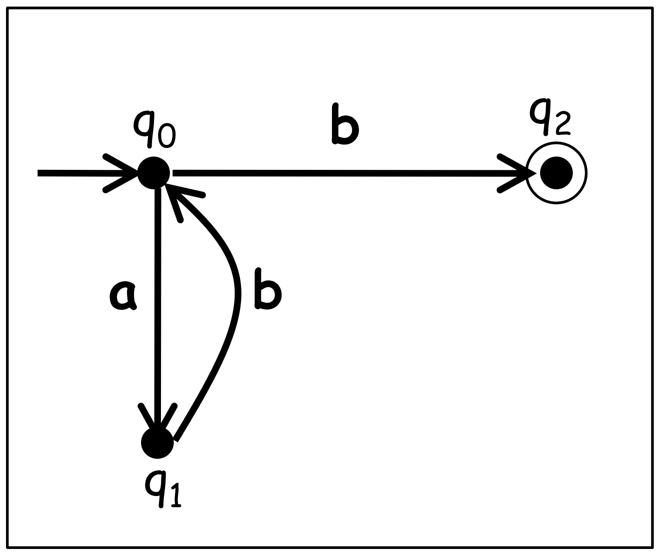



**w=(ab)b**

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

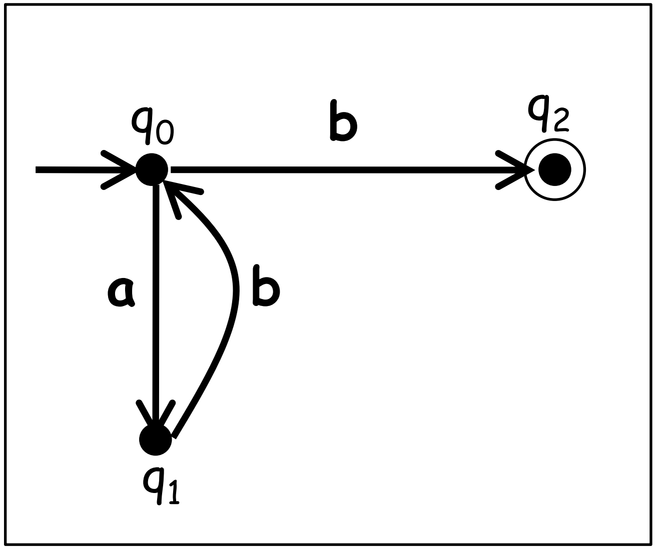
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




**w=(ab)²b**

## Lema del bombeo

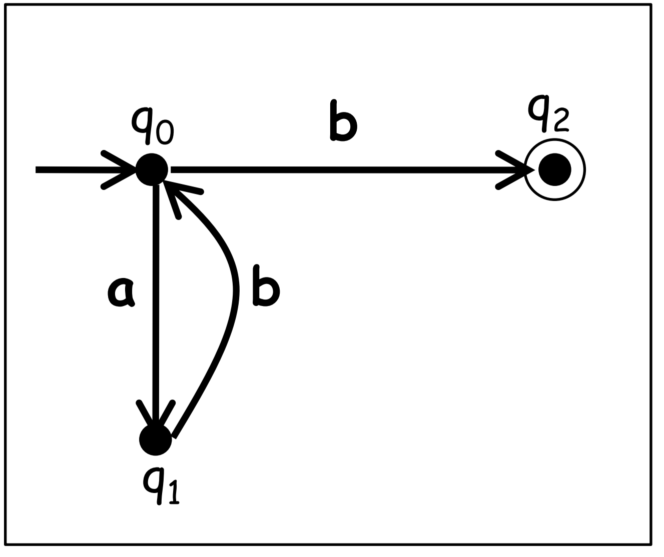
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados




$w=(ab)^3b$

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

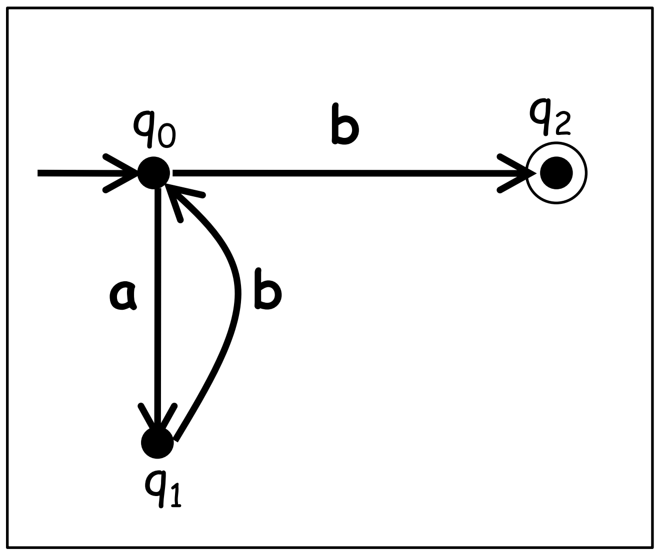



$w=(ab)^{100}b$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

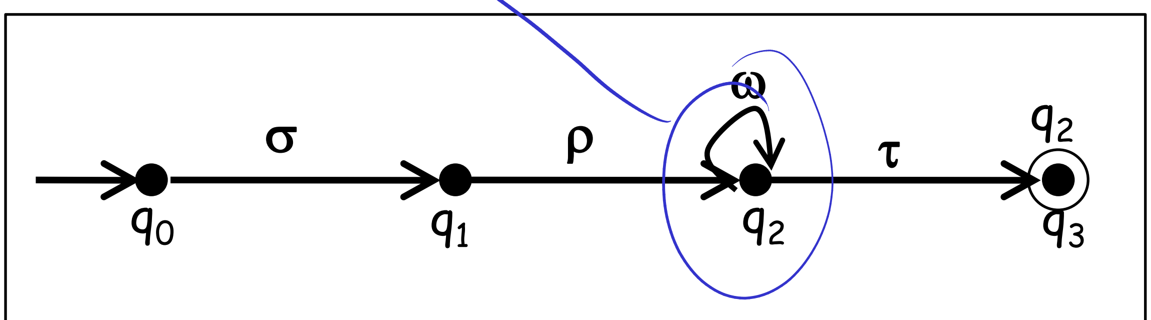



$$w=(ab)^0b=\varepsilon\cdot b=b$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- L es regular infinito
- Debe tener cadenas de longitud mayor a n, la cantidad de estados
- Ya que cada transición consume un símbolo y se tienen cadenas de longitud mayor a n, debe existir un ciclo en el autómata
- Si una cadena $\sigma\rho\omega\tau$ pertenece a L, se puede bombear una parte de la cadena y el resultado, $\sigma\rho\omega^{i}\tau$, también pertenece a L, para $i \geq 0$



## Lema del bombeo

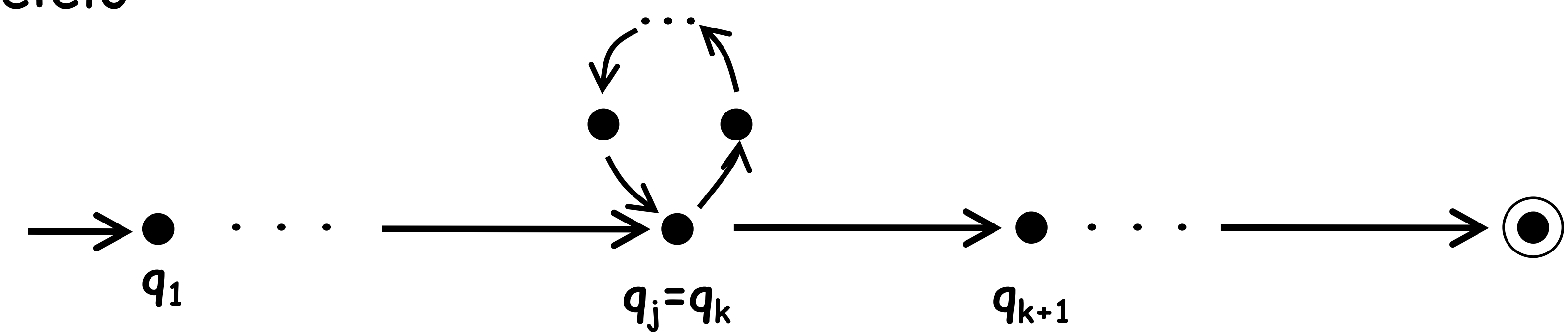
- Suponga que L es regular infinito y que es aceptado por un AFD M que tiene n estados

- Si L es infinito se pueden encontrar cadenas cuya longitud es mayor que n

- Suponga que $w=a_1a_2...a_{n+1}$ es una cadena de longitud n+1 que pertenece a L. Al hacer el recorrido por M, se debe pasar por un mismo estado más de una vez, es decir, debe existir un ciclo

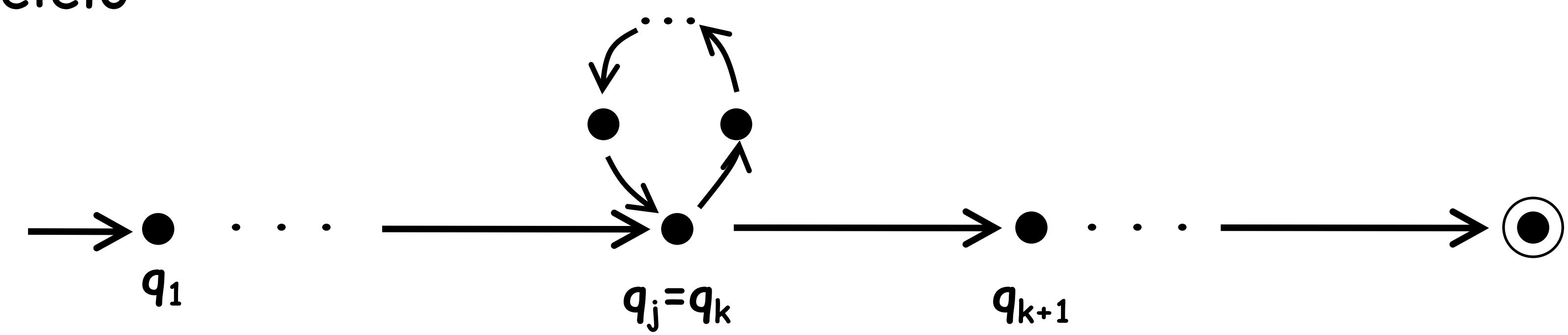
# Lenguajes regulares

- Suponga que $w=a_1a_2...a_{n+1}$ es una cadena de longitud n+1 que pertenece a L. Al hacer el recorrido por M, se debe pasar por un mismo estado más de una vez, es decir, debe existir un ciclo



# Lenguajes regulares

- Suponga que $w=a_1a_2\ldots a_{n+1}$ es una cadena de longitud n+1 que pertenece a L. Al hacer el recorrido por M, se debe pasar por un mismo estado más de una vez, es decir, debe existir un ciclo



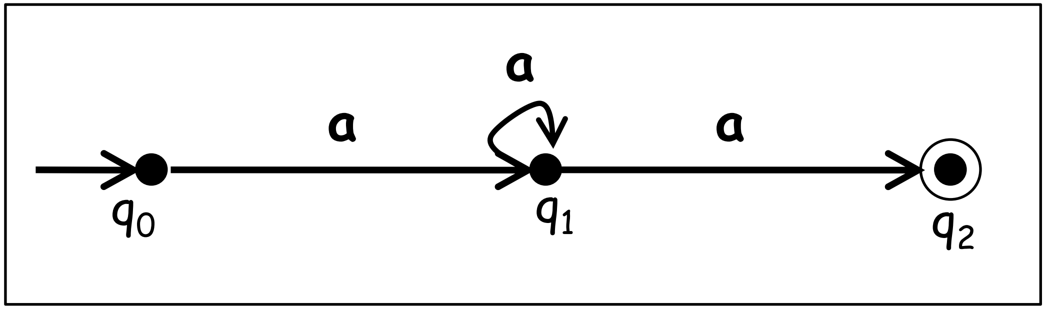

- Se puede dar vueltas en el ciclo tantas veces como se quiera, por lo tanto, $a_1\ldots a_j(a_{j+1}\ldots a_k)^m a_{k+1}\ldots a_{n+1}$ estará en L para todo $m\geq 0$

## Lema del bombeo

- Sea L un lenguaje regular infinito. Hay una constante n de forma que, si w es una cadena de L cuya longitud es mayor o igual a n, se tiene que $w=uvx$, siendo $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$

## Lema del bombeo

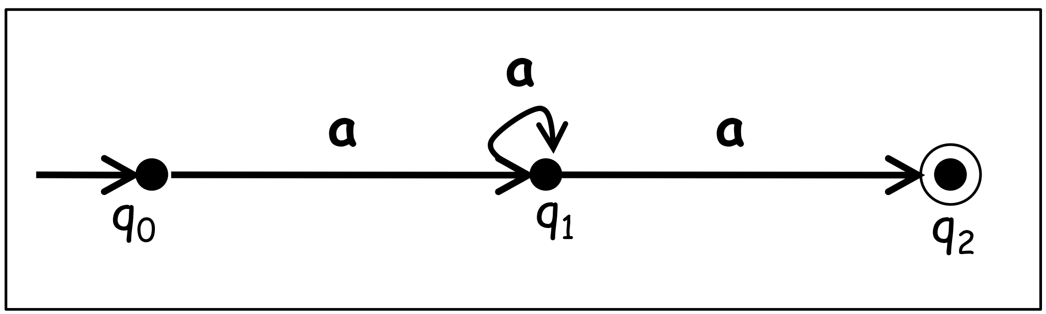
- Sea L un lenguaje regular infinito. Hay una constante n de forma que, si w es una cadena de L cuya longitud es mayor o igual a n, se tiene que w=uvx, siendo $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$




**w=aaa**

## Lema del bombeo

- Sea L un lenguaje regular infinito. Hay una constante n de forma que, si w es una cadena de L cuya longitud es mayor o igual a n, se tiene que w=uvx, siendo $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$




**w=aaa**

**u v x**

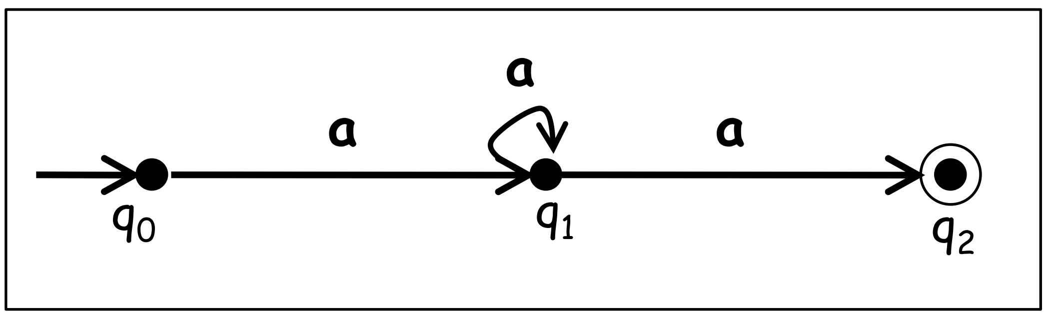
$a\,a^4\,a$

$a\,a^{10}\,a$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Sea L un lenguaje regular infinito. Hay una constante n de forma que, si w es una cadena de L cuya longitud es mayor o igual a n, se tiene que w=uvx, siendo $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$

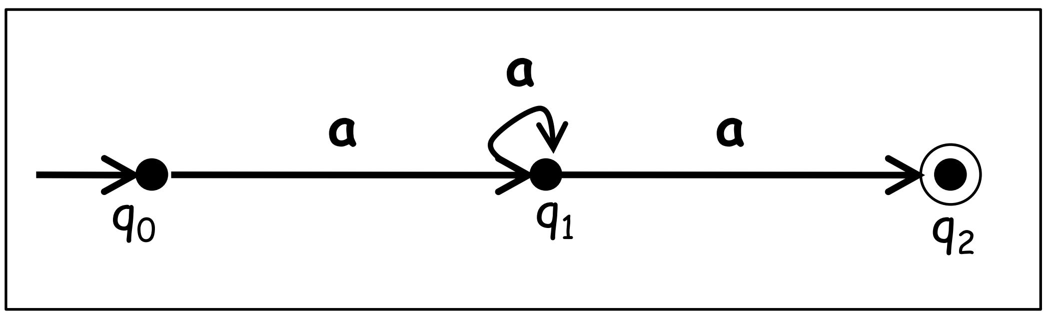



**w=aaa** ➡ **w=a(aa)a** debe pertenecer al lenguaje

**u v x**      **u $v^2$ x**

## Lema del bombeo

- Sea L un lenguaje regular infinito. Hay una constante n de forma que, si w es una cadena de L cuya longitud es mayor o igual a n, se tiene que w=uvx, siendo $uv^ix \in L$ para todo $i \geq 0$, con $|v| \geq 1$ y $|uv| \leq n$

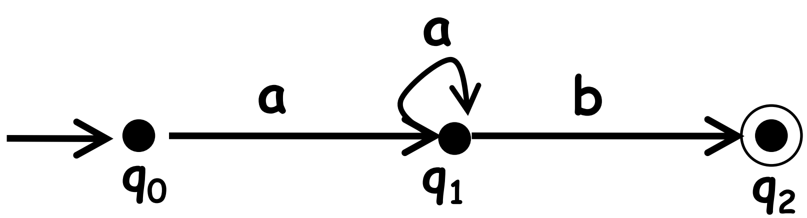



**w=aaa** $\Rightarrow$ **w=a** ε **a** debe pertenecer al lenguaje

**u v x**      **u** $\mathbf{v^0}$ **x**

## Lema del bombeo

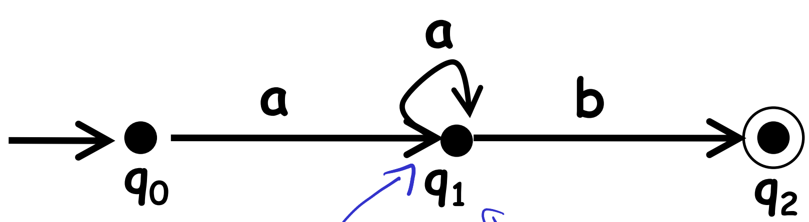
- Considere el lenguaje regular representado por $a^{+}b$ y el autómata




w=**aab** es una cadena de L

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por $a^+b$ y el autómata




$w = a\,a\,b$ es una cadena de L

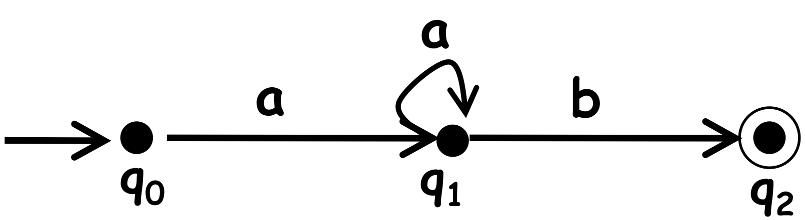
$u$ $v$ $x$

$a\boxed{a^{10}}b$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por $a^+b$ y el autómata




**w=a a b** es una cadena de L

**u v x**

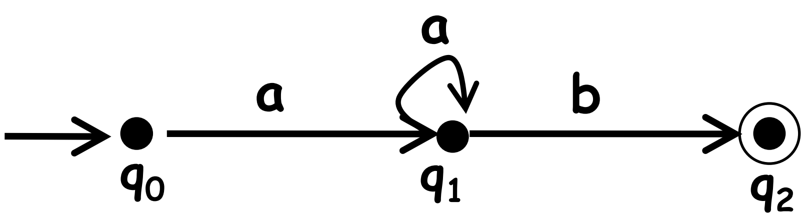
**w=a $a^2$ b** también es una cadena de L

**u $v^2$ x**

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

- Considere el lenguaje regular representado por $a^+b$ y el autómata




**w=a a b** es una cadena de L

**u v x**

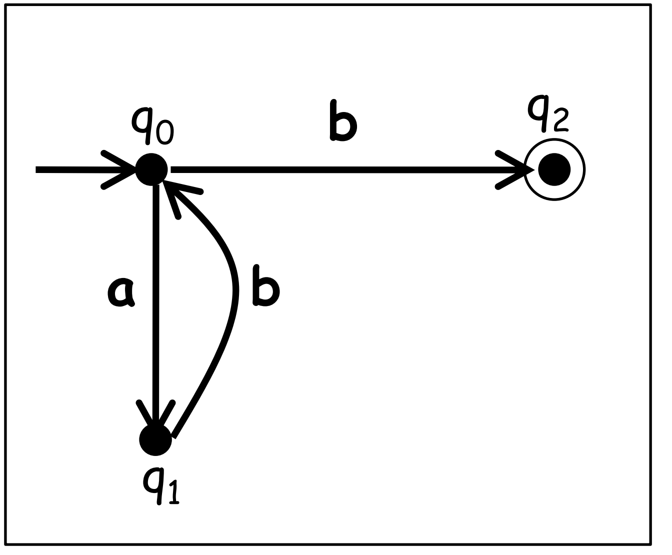
**w=a** $\varepsilon$ **b** también es una cadena de L

**u** $v^0$ **x**

# Lenguajes regulares

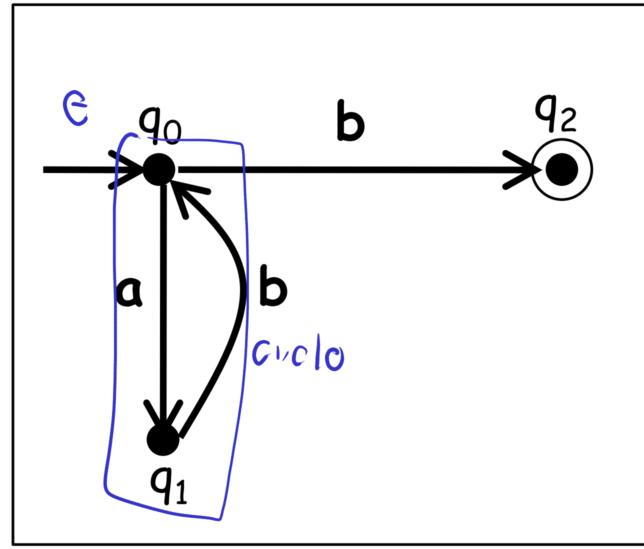
## Lema del bombeo

**w=a b b** es una cadena de L



## Lema del bombeo

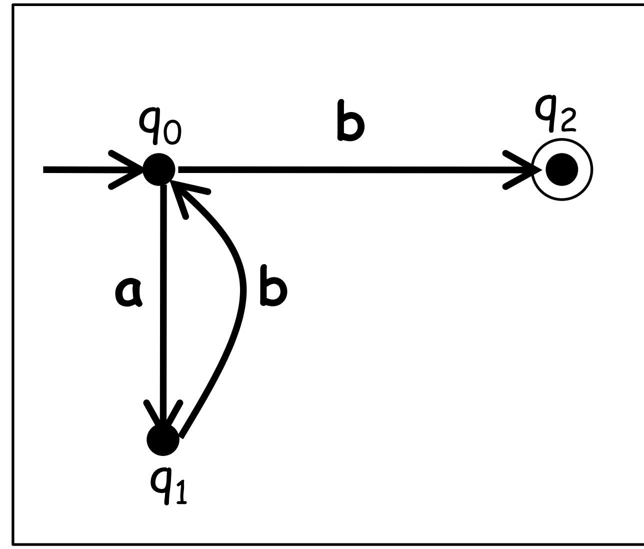
$w=\underset{u}{\varepsilon}\ \underset{v}{ab}\ \underset{x}{b}$ es una cadena de L



## Lema del bombeo

$w=\underset{u}{\underset{\uparrow}{\varepsilon}}\ \underset{v}{\underset{\uparrow}{\overline{a\,b}}}\ \underset{x}{\underset{\uparrow}{b}}$ es una cadena de L

$w=\underset{u}{\underset{\uparrow}{\varepsilon}}\ \underset{v^2}{\underset{\uparrow}{\overline{(ab)^2}}}\ \underset{x}{\underset{\uparrow}{b}}$ pertenece a L



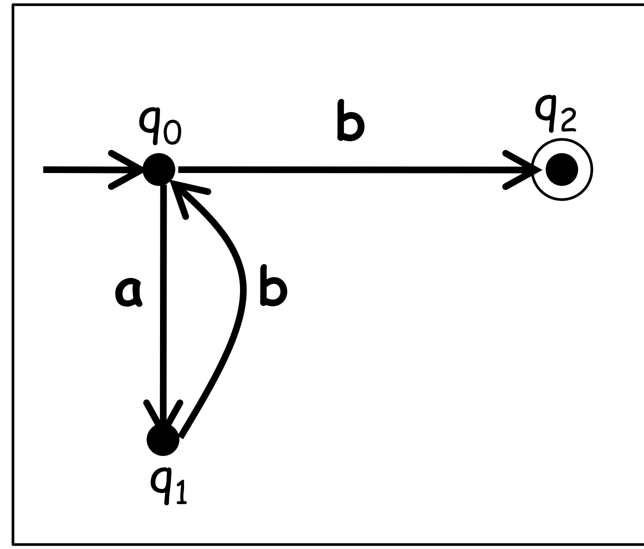
# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

$w = \underbrace{\varepsilon}_{u}\ \underbrace{a\,b}_{v}\ \underbrace{b}_{x}$ es una cadena de L

$w = \underbrace{\varepsilon}_{u}\ \underbrace{(ab)^2}_{v^2}\ \underbrace{b}_{x}$ pertenece a L

$w = \underbrace{\varepsilon}_{u}\ \ \underbrace{\varepsilon}_{v^0}\ \ \underbrace{b}_{x}$ pertenece a L



# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{aa^{m}a \mid m \geq 0\}}$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{aa^ma|\ m\geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=aa^na$$

- Expresar w de la forma **w=uvx** de tal forma que $\mathbf{uv^ix}$ también pertenezca al lenguaje. v es la parte que se puede bombear

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{aa^{m}a \mid m\geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underset{u}{a}\,\underset{v}{a^{1}}\,\underset{x}{\underline{a^{n-1}a}}$$

$a^n$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{aa^ma \mid m\geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underbrace{a}_{u}\,\underbrace{a^1}_{v}\,\underbrace{a^{n-1}a}_{x} \Rightarrow w=\underbrace{a}_{u}\,\underbrace{\varepsilon}_{v^0}\,\underbrace{a^{n-1}a}_{x}$$

$$\Rightarrow w=\underbrace{a}_{u}\,\underbrace{a^2}_{v^2}\,\underbrace{a^{n-1}a}_{x}$$

$$\Rightarrow w=uv^ix \in L \text{ para } i\geq 0$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{aa^{m}a \mid m \geq 0\}}$

• Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a\underbrace{a^{n-1}a}_{a^n}$$

• Expresar w de la forma **w=uvx** de tal forma que $\mathbf{uv^{i}x}$ también pertenezca al lenguaje. v es la parte que se puede bombear

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **L={aa$^m$a| m≥0}**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$w = aa^{n-1}a$

$$\begin{array}{ccc} a & a^{n-1} & a \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{x} \end{array}$$

$a^{n+1}$

Bombear

$$\begin{array}{ccc} a & a^{n-1} & a \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & x \end{array}$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{aa^ma \mid m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a\overbrace{\underline{aaa...aaa}}^{n-1}a$$

**u** **v** **x**

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{aa^{m}a \mid m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underset{\mathbf{u}}{a}\,\underset{\mathbf{v}}{a^{n-1}}\,\underset{\mathbf{x}}{a}$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{aa^m a \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$w = \underset{u}{a}\,\underset{v}{a^{n-1}}\,\underset{x}{a}$

$\Rightarrow$ $w = \underset{u}{a}\,\underset{v^0}{\varepsilon}\,\underset{x}{a}$

$\Rightarrow$ $w = \underset{u}{a}\,\underset{v^2}{a^{2n-2}}\,\underset{x}{a}$

$\Rightarrow$ $w = uv^i x \in L$ para $i \geq 0$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **L={(ab)$^m$b| m≥0}**

$(ab)^m b$ $\quad$ $n$

$(ab)^n b = \epsilon \ \boxed{ab} \ (ab)^{n-1}$

$\epsilon \to u$, $ab \to v$, $(ab)^{n-1} \to x$

$\epsilon \ (ab)^2 (ab)^{n-1} \in L$

$\epsilon \ \underbrace{\boxed{(ab)^i}}_{\text{Bombeo}} (ab)^{n-1} \in L$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{(ab)^m b \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=(ab)^n b$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{(ab)^m b \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w = \underset{u}{\varepsilon}\,\underset{v}{(ab)^1}\,\underset{x}{\underline{(ab)^{n-1}b}}$$

$$\Rightarrow \; w = \underset{u}{\varepsilon}\;\underset{v^0}{\varepsilon}\;\underset{x}{(ab)^{n-1}b}$$

$$\Rightarrow \; w = \underset{u}{\varepsilon}\,\underset{v^2}{(ab)^2}\,\underset{x}{(ab)^{n-1}b}$$

$$\Rightarrow \; w = uv^i x \in L \text{ para } i \geq 0$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{(ab)^m b \mid m\geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underbrace{(ab)^1}_{\mathbf{u}}\underbrace{(ab)^1}_{\mathbf{v}}\underbrace{(ab)^{n-2}b}_{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow\quad w=\underbrace{(ab)^1}_{\mathbf{u}}\ \underbrace{\varepsilon}_{\mathbf{v^0}}\ \underbrace{(ab)^{n-2}b}_{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow\quad w=\underbrace{(ab)^1}_{\mathbf{u}}\underbrace{(ab)^2}_{\mathbf{v^2}}\underbrace{(ab)^{n-2}b}_{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow\quad w=uv^ix \in L \text{ para } i\geq 0$$

## Lema del bombeo

• El lema del bombeo es una propiedad que debe estar presente en todo lenguaje regular. Si un lenguaje no cumple el lema, no es regular

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^m b^m \mid m \geq 0\}}$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{a^m b^m | \ m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a^n b^n$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^m b^m \mid m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underbrace{\varepsilon}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{a^n}_{\mathbf{v}}\,\underbrace{b^n}_{\mathbf{x}}$$

y se tiene que

$$w=\underbrace{\varepsilon}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{a^{2n}}_{\mathbf{v^2}}\,\underbrace{b^n}_{\mathbf{x}} \text{ no es una cadena de L}$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{a^m b^m \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$\underline{w=a^n b^n}$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{a^m b^m \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{u}}}{a^r}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}}}{a^s}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{x}}}{b^n} \qquad \text{donde } r+s=n$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^m b^m \mid m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underset{\mathbf{u}}{\underset{\uparrow}{a^r}}\,\underset{\mathbf{v}}{\underset{\uparrow}{a^s}}\,\underset{\mathbf{x}}{\underset{\uparrow}{b^n}} \qquad \text{donde } r+s=n$$

y se tiene que

$$w=\underset{\mathbf{u}}{\underset{\uparrow}{a^r}}\,\underset{\mathbf{v^2}}{\underset{\uparrow}{a^{2s}}}\,\underset{\mathbf{x}}{\underset{\uparrow}{b^n}} \text{ no es una cadena de L}$$

$r+2s \neq n$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}}$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a^n b^{2n}$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w = \varepsilon \; a^n \; b^{2n}$$

$$\underset{\mathbf{u}}{\varepsilon} \quad \underset{\mathbf{v}}{a^n} \quad \underset{\mathbf{x}}{b^{2n}}$$

y se tiene que

$w = \varepsilon \; a^{2n} \; b^{2n}$ no es una cadena de L

$$\underset{\mathbf{u}}{\varepsilon} \quad \underset{\mathbf{v^2}}{a^{2n}} \quad \underset{\mathbf{x}}{b^{2n}}$$

# Lenguajes regulares

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{a^m b^{2m} \mid m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w = a^r\, a^s\, b^{2n} \quad \text{donde } r+s=n$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \boxed{\mathbf{u}} & \mathbf{v} & \boxed{\mathbf{x}} \end{array}$$

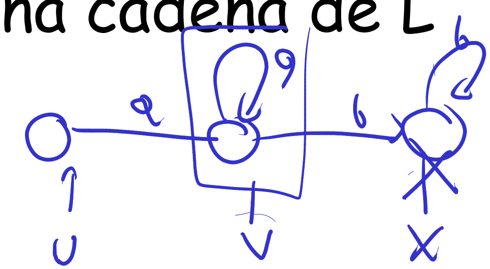
$a^n b^n$

u v x

y se tiene que

$$w = a^r\, a^{2s}\, b^{2n} \text{ no es una cadena de L}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{u} & \mathbf{v^2} & \mathbf{x} \end{array}$$



## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^nbc^m | n,m \geq 0\}}$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^nbc^m | n,m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a^n bc^m$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^nbc^m | n,m\geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$w=\varepsilon\ a^n\ bc^m$

$\mathbf{u}\quad \mathbf{v}\quad \mathbf{x}$

$w=\varepsilon\ \varepsilon\ bc^m$

$\mathbf{u}\ \mathbf{v}^0\ \mathbf{x}$

$w=\varepsilon\ a^{2n}\ bc^m$

$\mathbf{u}\quad \mathbf{v}^2\quad \mathbf{x}$

$w=uv^ix \in L$ para $i\geq 0$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{a^n bc^m | n,m \geq 0\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a^n bc^m$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^n bc^m | n,m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$\underbrace{w=a^{n-1}}_{\mathbf{u}}\ \underbrace{a^1}_{\mathbf{v}}\ \underbrace{bc^m}_{\mathbf{x}}$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{a^n bc^m \mid n,m \geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underset{\mathbf{u}}{\underset{\uparrow}{a^{n-1}}}\ \underset{\mathbf{v}}{\underset{\uparrow}{a^{1}}}\ \underset{\mathbf{x}}{\underset{\uparrow}{bc^{m}}} \Rightarrow w=\underset{\mathbf{u}}{\underset{\uparrow}{a^{n-1}}}\ \underset{\mathbf{v^0}}{\underset{\uparrow}{\varepsilon}}\ \underset{\mathbf{x}}{\underset{\uparrow}{bc^{m}}}$$

$$\Rightarrow w=\underset{\mathbf{u}}{\underset{\uparrow}{a^{n-1}}}\ \underset{\mathbf{v^2}}{\underset{\uparrow}{a^{2}}}\ \underset{\mathbf{x}}{\underset{\uparrow}{bc^{m}}}$$

$$\Rightarrow w=uv^ix \in L \text{ para } i \geq 0$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **L={abcd$^m$|m≥0}**

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje $\mathbf{L=\{abcd^m \mid m\geq 0\}}$

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underbrace{\underline{abc}}_{\mathbf{u}}\underbrace{d^1}_{\mathbf{v}}\underbrace{d^{n-1}}_{\mathbf{x}} \Rightarrow w=\underbrace{abc}_{\mathbf{u}}\ \underbrace{\varepsilon}_{\mathbf{v}^0}\ \underbrace{d^{n-1}}_{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow w=\underbrace{abc}_{\mathbf{u}}\underbrace{d^2}_{\mathbf{v}^2}\underbrace{d^{n-1}}_{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow w=uv^ix \in L \text{ para } i\geq 0$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **L={w| w$\in${a,b}* y w es palíndroma}**

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **$L=\{w|\ w\in\{a,b\}^*$ y $w$ es palíndroma$\}$**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=a^nba^n$$

## Lema del bombeo

Analice el lenguaje **L={w| w∈{a,b}* y w es palíndroma}**

- Se toma una cadena w de longitud mayor o igual a n, donde n se conoce como la constante del lema

$$w=\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{u}}}{a^r}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{v}}}{a^s}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{x}}}{ba^n} \qquad \text{donde } r+s=n$$

y se tiene que

$$w=\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{u}}}{a^r}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{v}^2}}{a^{2s}}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{x}}}{ba^n} \text{ no es una cadena de L}$$

# Lenguajes regulares

| Tipo | Lenguajes | Tipo de máquina | Normas para la gramática |
|---|---|---|---|
| 0 | Recursivamente enumerables | Máquina de Turing | No restringida |
| 1 | Sensibles al contexto | Autómata lineal acotado | $\alpha \to \beta$, $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$ |
| 2 | Independientes del contexto | Autómata de pila | $A \to \gamma$ |
| 3 | Regulares | Autómata finito | $A \to aB$<br>$A \to a$ |

# Lenguajes regulares

| Tipo | Lenguajes | Tipo de máquina | Normas para la gramática |
|---|---|---|---|
| 0 | Recursivamente enumerables | Máquina de Turing | No restringida |
| 1 | Sensibles al contexto | Autómata lineal acotado | $\alpha \to \beta$, $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$ |
| 2 | Independientes del contexto | Autómata de pila | $A \to \gamma$ |
| 3 | Regulares | Autómata finito | $A \to aB$<br>$A \to a$ |

**Gramática regular**

# Lenguajes regulares

**Gramáticas**

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

- S, A y B son símbolos no terminales, e indican que deben ser sustituidos según las producciones
- a y b son símbolos terminales que pertenecen a un alfabeto $\Sigma$

# Lenguajes regulares

**Gramáticas**

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

Las gramáticas generan cadenas

# Lenguajes regulares

**Gramáticas**

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

Las gramáticas generan cadenas
$S \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaa$

La cadena **aaa** es generada por la gramática

$S \rightarrow bB \rightarrow bbB \rightarrow bbb$

# Lenguajes regulares

**Gramáticas**

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

$S \rightarrow aA \rightarrow \mathbf{aa}$

$S \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaaA \rightarrow \mathbf{aaaa}$

$S \rightarrow bB \rightarrow \underline{\mathbf{bb}}$

# Lenguajes regulares

## Gramáticas

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow aA \mid a$

$B \rightarrow bB \mid b$

¿La cadena **ab** se puede generar por la gramática? X

$S \rightarrow aA$

$aA$

$a$

# Lenguajes regulares

## Gramáticas

$S \rightarrow aAb \mid bBa$

$A \rightarrow aAb \mid \varepsilon$

$B \rightarrow bBa \mid \varepsilon$

Indique cuáles de las siguientes cadenas se pueden generar por la gramática:

- ab $S \rightarrow aAb \rightarrow ab$ ✓
- aabb $S \rightarrow a\boxed{A}b \rightarrow aaAbb \rightarrow aabb$ ✓
- bbaa $S \rightarrow b\boxed{B}a \rightarrow b\boxed{bBa}a \rightarrow bbaa$ ✓
- abb $S \rightarrow aAb \rightarrow aaAbb$ ✗ ; $ab$
- bbba

$S \rightarrow bBa \rightarrow bbBaa \rightarrow bbaa$ ✗ ; $bbbBaaa$ ✗ ; $ba$ ✗

# Lenguajes regulares

**Gramáticas**

$S \rightarrow abS \mid \varepsilon$

Indique cuáles de las siguientes cadenas se pueden generar por la gramática:

- $\varepsilon$
- abab
- aaab
- abb

# Lenguajes regulares

**Gramáticas**

$S \rightarrow aE$

$E \rightarrow A|B$

$A \rightarrow aA|b$

$B \rightarrow aB|b$

La cadena **aaab** se puede generar así:
$S \rightarrow aE \rightarrow aA \rightarrow aaA \rightarrow aaaA \rightarrow aaab$

Se utiliza la notación $S \xrightarrow{*} w$ para indicar que la cadena w se **puede generar** a partir de S en 0 o más etapas

# Lenguajes regulares

## Gramáticas regulares

- Considere el lenguaje regular $a(a^*\cup b^*)b$. Una forma de expresar las cadenas aceptadas por el lenguaje, es por medio de las producciones

## Gramáticas regulares

E

• Considere el lenguaje regular $a(a^* \cup b^*)b$. Una forma de expresar las cadenas aceptadas por el lenguaje, es por medio de las producciones

$A \mid B$

$a^*b \quad b^*b$

$S \rightarrow aE$

$E \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aA \mid b$

$B \rightarrow bB \mid b$

# Lenguajes regulares

Una **gramática regular** se define como un conjunto de 4 elementos, $G=(\Sigma,N,S,P)$ donde:

- $\Sigma$ es el alfabeto
- N son los símbolos no terminales
- S es el símbolo inicial
- P es la colección de reglas de sustitución o producciones

$$
\begin{cases}
S \rightarrow a\boxed{E} \\
E \rightarrow A|B \\
A \rightarrow aA|b \\
B \rightarrow bB|b
\end{cases}
$$

# Lenguajes regulares

Una **gramática regular** se define como un conjunto de 4 elementos, $G=(\Sigma,N,S,P)$ donde:

- $\Sigma$ es el alfabeto
- N son los símbolos no terminales
- S es el símbolo inicial
- P es la colección de reglas de sustitución o producciones de la forma $A \rightarrow w$, donde $A \in N$ y $w \in (\Sigma \cup N)^*$ que satisface:

  1. w contiene un no terminal como máximo

  2. Si w contiene un no terminal, entonces es el símbolo que está en el extremo derecho de w

# Lenguajes regulares

Las siguientes gramáticas no son regulares:

$S \to AB$

$A \to aA \mid a$

$B \to bB \mid b$

$S \to aAb$

$A \to cA \mid c$

no terminal

$S \to aA$

$aSb \to aA$

$bAa \to b \mid c$

# Lenguajes regulares

Considere la siguiente gramática regular:

- $\Sigma=\{a,b\}$
- $N=\{S,A\}$
- $S$ es el símbolo inicial
- P: $\mathbf{S \rightarrow bA}$

  $\mathbf{A \rightarrow aaA \mid b}$

# Lenguajes regulares

Considere la siguiente gramática regular:

- $\Sigma=\{a,b\}$
- N={S,A}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→bA**

  **A→aaA|b**

bb,baab,baaaab, baaaaaab,...

# Lenguajes regulares

Considere la siguiente gramática regular:

- $\Sigma=\{a,b\}$
- N={S,A}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→bA**

  **A→aaA|b**

El lenguaje aceptado por la gramática, L(G), contiene las cadenas de la forma b(aa)*b

# Lenguajes regulares

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma$={a,b}
- N={S}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→aS|b**

# Lenguajes regulares

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma$={a,b}
- N={S}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→aS|b**

El lenguaje aceptado por la gramática, L(G), contiene las cadenas de la forma a*b

# Lenguajes regulares

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma=\{a,b\}$
- $N=\{S,B\}$
- S es el símbolo inicial
- P: **S→aS|B**

  **B→bB|ε**

# Lenguajes regulares

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma$={a,b}
- N={S,B}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→aS|B**

  **B→bB|$\varepsilon$**

El lenguaje aceptado por la gramática, L(G), contiene las cadenas de la forma a*b*

# Lenguajes regulares

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma$={a,b}
- N={S,A}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→abS|A**

  **A→a|b**

# Lenguajes regulares

Indique la expresión regular asociada a la siguiente gramática:

- $\Sigma$={a,b}
- N={S,A}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→abS|A**

  **A→a|b**

El lenguaje aceptado por la gramática, L(G), contiene las cadenas de la forma $(ab)^*(a \cup b)$

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca $(ab)^+$

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca $(ab)^+$

- $\Sigma=\{a,b\}$
- $N=\{S\}$
- S es el símbolo inicial
- P: $\mathbf{S \rightarrow abS|ab}$

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por $(a \cup b)a^*(a \cup b)$

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por $(a \cup b)a^*(a \cup b)$

- $\Sigma=\{a,b\}$
- $N=\{S,A,B\}$
- $S$ es el símbolo inicial
- P: **S→aA|bA**

  **A→aA|a|b**

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por $(a \cup b)^*a(a \cup b)^*$

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por $(a \cup b)^* a (a \cup b)^*$

- $\Sigma=\{a,b\}$
- $N=\{S,A,B\}$
- $S$ es el símbolo inicial
- P: **$S \rightarrow aS|bS|aA$**

  **$A \rightarrow aA|bA|\varepsilon$**

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por $(ab)^+(a \cup b)^*$

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por $(ab)^+(a \cup b)^*$

- $\Sigma=\{a,b\}$
- $N=\{S,A\}$
- $S$ es el símbolo inicial
- P: **S→abS|abA**

  **A→aA|bA|ε**

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por a*b*c*

# Lenguajes regulares

Diseñe una gramática regular que reconozca el lenguaje dado por a*b*c*

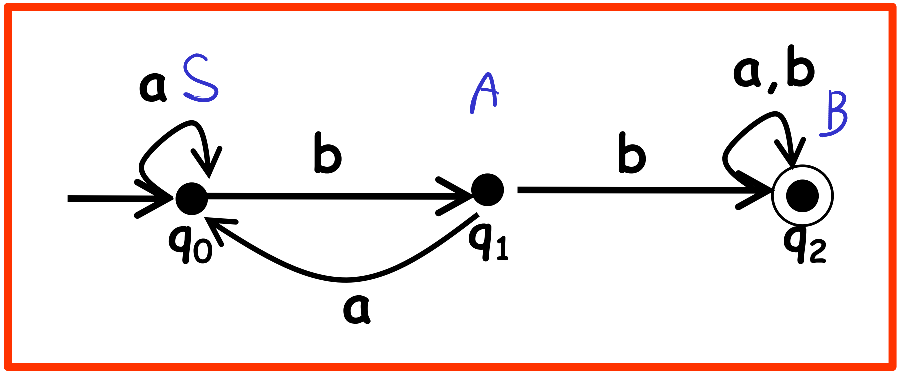
- $\Sigma$={a,b,c}
- N={S,B,C}
- S es el símbolo inicial
- P: **S→aS|bB|cC|ε**

  **B→bB|cC|ε**

  **C→cC|ε**

# Lenguajes regulares

**Teorema**. Dado un autómata M, existe una gramática G tal que L(M)=L(G)




$S \to aS \mid bA$

$A \to aS \mid bB$

$B \to aB \mid bB \mid \varepsilon$

**Autómata M** **Gramática G**

# Lenguajes regulares

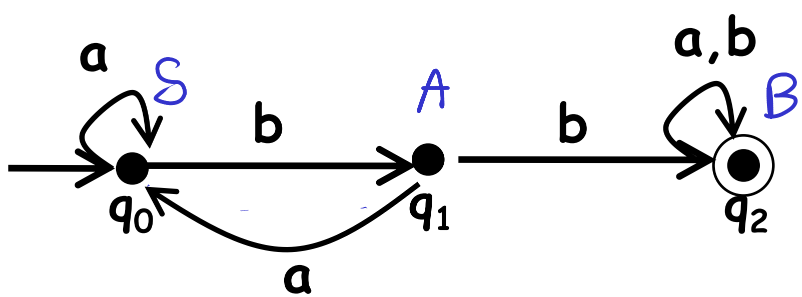
**Teorema**. Dado un autómata M, existe una gramática G tal que L(M)=L(G)

Las producciones se obtienen tomando a los estados del autómata como no terminales y los símbolos del alfabeto como terminales

# Lenguajes regulares

**Teorema**. Dado un autómata M, existe una gramática G tal que L(M)=L(G)

Las producciones se obtienen tomando a los estados del autómata como no terminales y los símbolos del alfabeto como terminales



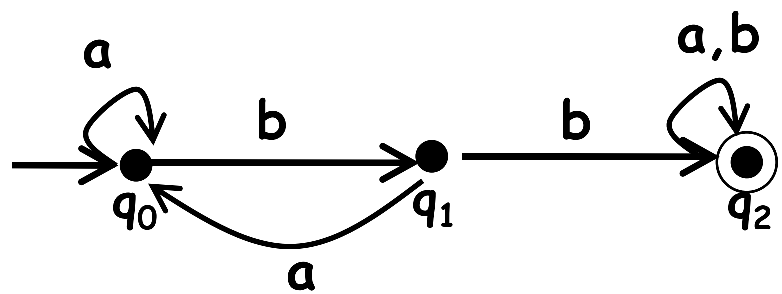

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow aS \mid bB$

$B \rightarrow aB \mid bB \mid \epsilon$

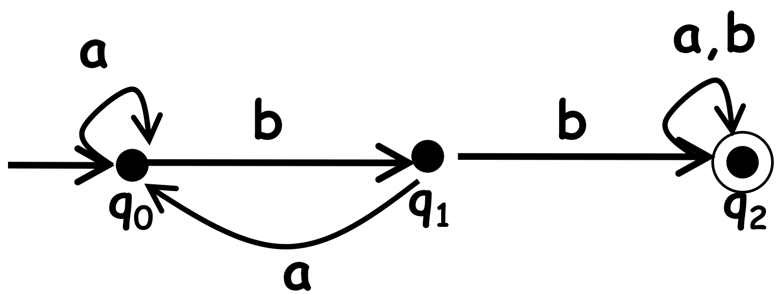
# Lenguajes regulares

**Teorema**. Dado un autómata M, existe una gramática G tal que L(M)=L(G)



# Lenguajes regulares

**Teorema**. Dado un autómata M, existe una gramática G tal que L(M)=L(G)

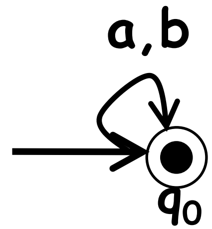



El autómata M induce la gramática regular:

| | |
|---|---|
| $q_0 \rightarrow aq_0 \mid bq_1$ | $S \rightarrow aS \mid bA$ |
| $q_1 \rightarrow aq_0 \mid bq_2$ | $A \rightarrow aS \mid bB$ |
| $q_2 \rightarrow aq_2 \mid bq_2 \mid \varepsilon$ | $B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$ |

# Lenguajes regulares

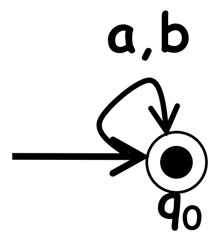
- Autómata que reconoce $(a\cup b)^*$




$S \to aS \mid bS \mid \epsilon$

# Lenguajes regulares

- Autómata que reconoce $(a \cup b)^*$

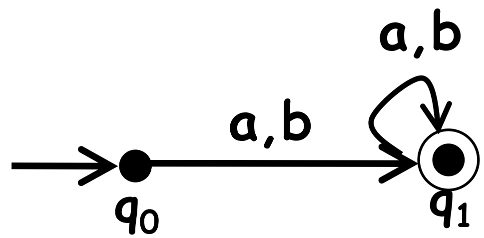



- El autómata M induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_0|bq_0|\varepsilon \quad \Rightarrow \quad S \rightarrow aS|bS|\varepsilon$$

# Lenguajes regulares

- Autómata que reconoce $(a \cup b)^+$

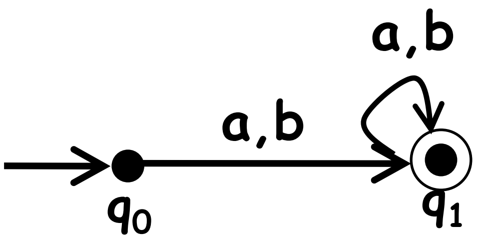



$S \to aA \mid bA$

$A \to aA \mid bB \mid \epsilon$

# Lenguajes regulares

- Autómata que reconoce $(a \cup b)^+$



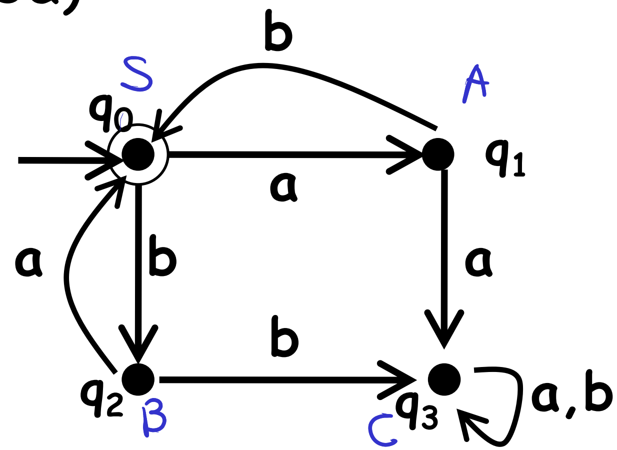

- El autómata M induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_1 \qquad S \rightarrow aA | bA$$

$$q_1 \rightarrow aq_1 | bq_1 | \varepsilon \qquad A \rightarrow aA | bA | \varepsilon$$

# Lenguajes regulares

• Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce $(ab \cup ba)^*$




$S \to aA \mid bB \mid \epsilon$

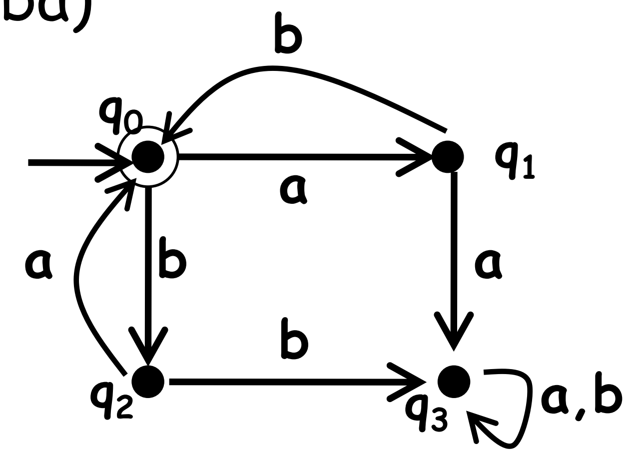
$A \to bS \mid aC$

$B \to aS \mid bC$

$C \to aC \mid bC$

# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce $(ab \cup ba)^*$




- El autómata M induce la gramática regular:

$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_2 | \varepsilon$

$q_1 \rightarrow bq_0 | aq_3$

$q_2 \rightarrow aq_0 | bq_3$

$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$

$S \rightarrow aA | bB | \varepsilon$

$A \rightarrow bS | aC$

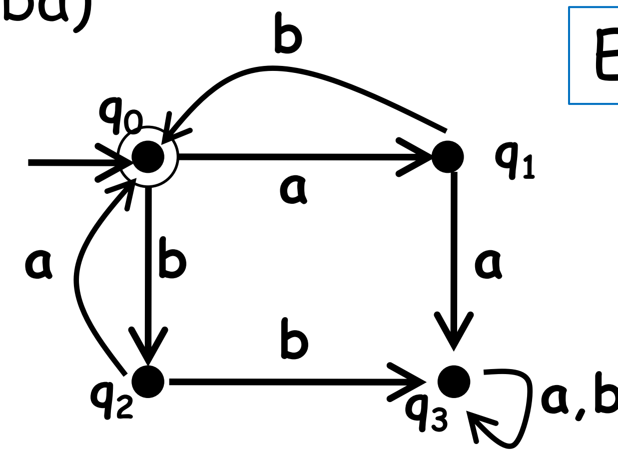
$B \rightarrow aS | bC$

$C \rightarrow aC | bC$

# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce $(ab \cup ba)^*$

Evalúe la cadena **aab**




- El autómata M induce la gramática regular:

$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_2 | \varepsilon$

$q_1 \rightarrow bq_0 | aq_3$

$q_2 \rightarrow aq_0 | bq_3$

$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$

$S \rightarrow aA | bB | \varepsilon$

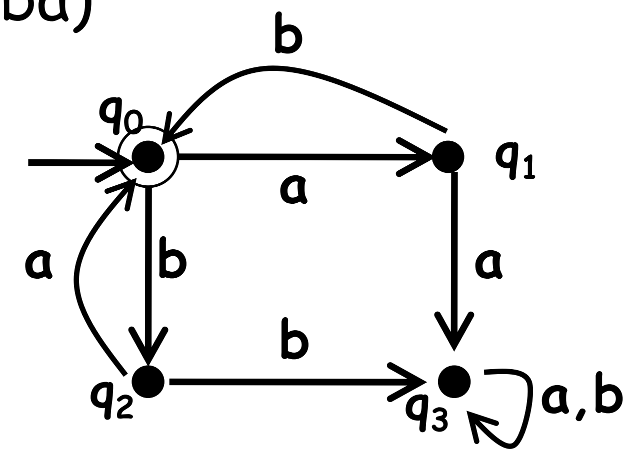
$A \rightarrow bS | aC$

$B \rightarrow aS | bC$

$C \rightarrow aC | bC$

# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce $(ab \cup ba)^*$




La cadena **aab** no se genera por la gramática

- El autómata M induce la gramática regular:

$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_2 | \varepsilon$

$q_1 \rightarrow bq_0 | aq_3$

$q_2 \rightarrow aq_0 | bq_3$

$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3$

$S \rightarrow aA | bB | \varepsilon$

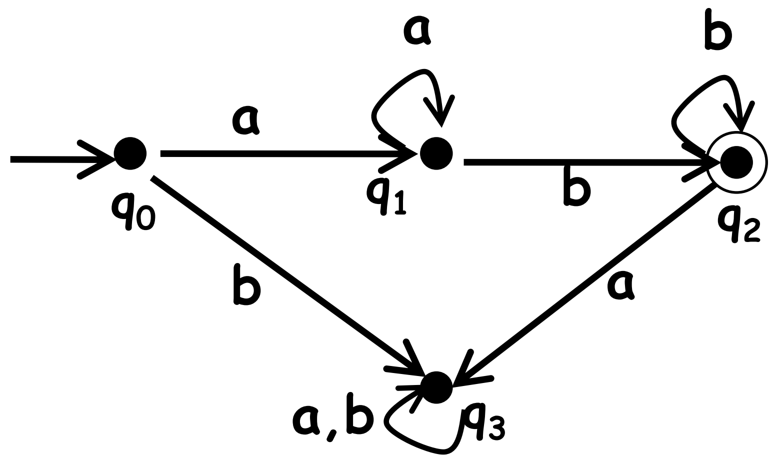
$A \rightarrow bS | aC$

$B \rightarrow aS | bC$

$C \rightarrow aC | bC$

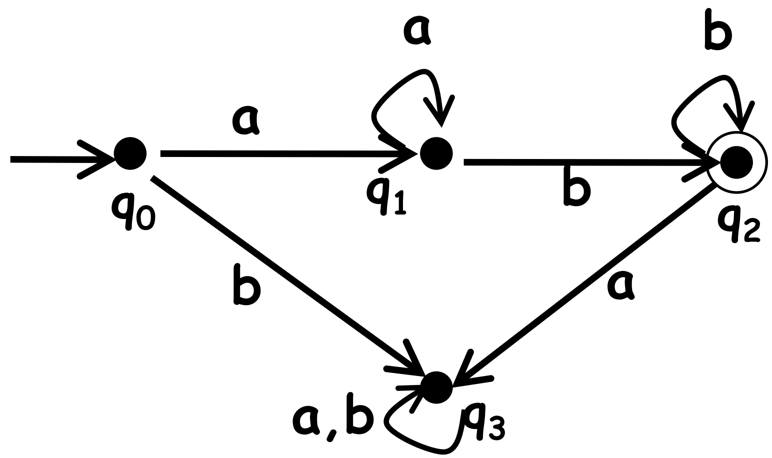
# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce $a^+b^+$



# Lenguajes regulares

- Muestre la gramática regular para el siguiente autómata que reconoce $a^+b^+$




- El autómata M induce la gramática regular:

$$q_0 \rightarrow aq_1 | bq_3 \qquad S \rightarrow aA | bC$$

$$q_1 \rightarrow aq_1 | bq_2 \qquad A \rightarrow aA | bB$$

$$q_2 \rightarrow bq_2 | \varepsilon | aq_3 \qquad B \rightarrow bB | \varepsilon | aC$$

$$q_3 \rightarrow aq_3 | bq_3 \qquad C \rightarrow aC | bC$$

# Lenguajes regulares

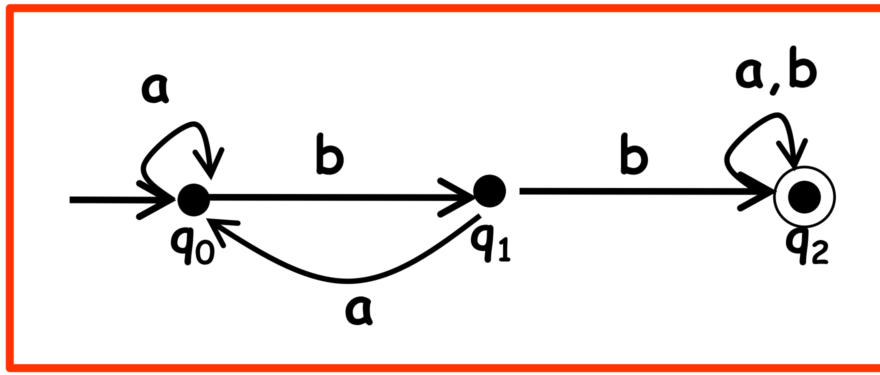
**Teorema**. Dada una gramática regular G, existe un autómata M, tal que L(M)=L(G)

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow aS \mid bB$

$B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$

**Gramática G**




**Autómata M**

# Lenguajes regulares

**Teorema**. Dada una gramática regular G, existe un autómata M, tal que L(M)=L(G)

La construcción del autómata se realiza utilizando las producciones teniendo en cuenta que los símbolos no terminales corresponden con estados y los terminales con transiciones

# Lenguajes regulares

**Teorema**. Dada una gramática regular G, existe un autómata M, tal que L(M)=L(G)

La construcción del autómata se realiza utilizando las producciones teniendo en cuenta que los símbolos no terminales corresponden con estados y los terminales con transiciones

$$S \rightarrow aS \mid bA$$

$$A \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow aB \mid bB$$

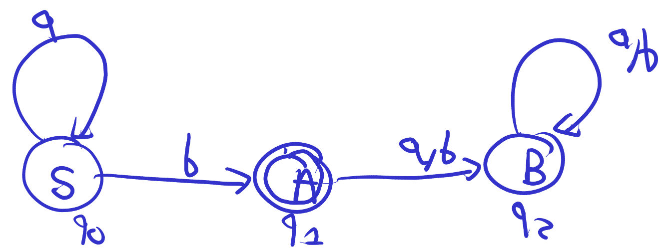
# Lenguajes regulares

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

S→aS|bA

A→aB|bB|ε

B→aB|bB




$a^*b$

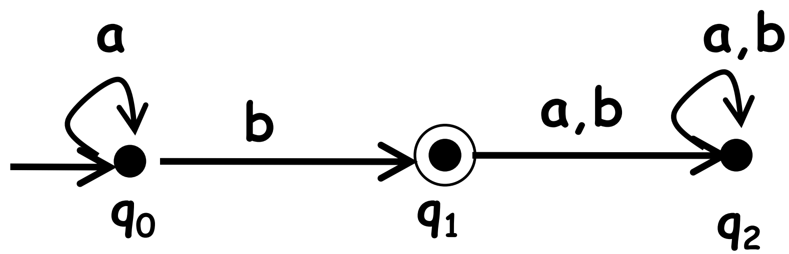
# Lenguajes regulares

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$S \rightarrow aS \mid bA$

$A \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$

$B \rightarrow aB \mid bB$



# Lenguajes regulares

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$S \rightarrow aB|bA|\varepsilon$

$A \rightarrow abaS$

$B \rightarrow babS$

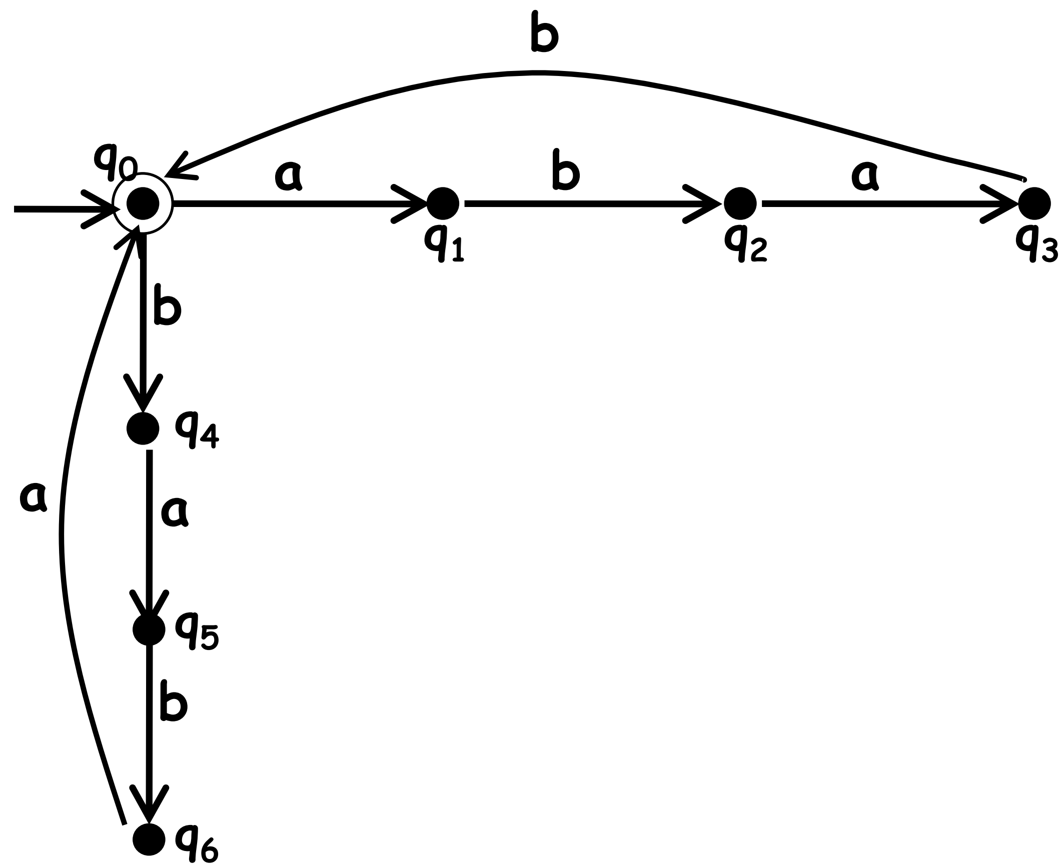
# Lenguajes regulares

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$S \rightarrow aB \mid bA \mid \varepsilon$

$A \rightarrow abaS$

$B \rightarrow babS$



# Lenguajes regulares

Diseñar el autómata para la siguiente gramática:

$S \rightarrow aA | \varepsilon$

$A \rightarrow abA | baB | \varepsilon$

$B \rightarrow aB | bA$

# Lenguajes regulares

## Forma Backus-Naur (BNF)

Se utiliza para especificar reglas sintácticas de muchos lenguajes de programación, en lugar de utilizar -> usamos ::= y colocamos los símbolos terminales entre < >

| | |
|---|---|
| $S \rightarrow aA \mid bB$ | <S>::=a<A> \| b<B> |
| $A \rightarrow aA \mid a$ | <A>::=a<A> \| a |
| $B \rightarrow bB \mid b$ | <B>::=b<B> \| b |