



Universidad  
del Valle

710193M  
Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

# 710193M Arquitectura de computadores II

## Aritmética del computador: Representación punto flotante

[carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co](mailto:carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co)

Carlos Andrés Delgado S.

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Febrero de 2016

- 1 Representación en punto flotante
- 2 Estándar del IEEE para punto flotante
- 3 Aritmética en punto flotante

710193M  
Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## 1 Representación en punto flotante

## 2 Estándar del IEEE para punto flotante

## 3 Aritmética en punto flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Definiciones

- En la representación complemento a dos es posible representar enteros positivos o negativos
- Sin embargo, no es posible representar números fraccionarios
- Se requiere un gran número de bits para representar números grandes

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Definiciones

- En el sistema decimal las anteriores limitaciones se superan usando notación científica:
  - 1  $10000000000 = 1 \times 10^{10}$
  - 2  $0,00000254 = 2,54 \times 10^{-6}$
- Esta representación se utiliza para correr la coma decimal, tantas potencias de 10 se le indique. Si se corre la izquierda la potencia es positiva y si se corre a la derecha es potencia negativa.

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejercicio en clase

Transforme las siguientes expresiones en notación científica:

- 15200000000
- 0,0000012445
- 0,155457878454

## Ejercicio en clase

Respuesta:

- $1,52 \times 10^{10}$
- $1,2445 \times 10^{-6}$
- $0,155457878454 \times 10^0$

## Limitaciones

Observe que no aplica para todos los casos, como es el caso de  $0,155457878454$ , no se puede acortar la representación utilizando notación científica de lo contrario se podría perder información.

## Definiciones

La técnica de notación científica se puede aplicar a los números binarios.

## Notación científica binarios

$$\pm S \times B^{\pm E} \quad (1)$$

- 1  $\pm$  Signo
- 2  $S$  Mantisa: Parte significativa
- 3  $E$  Exponente
- 4  $B$  Base, en binario es 2



710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Definiciones

- 1 Si el bit MSB (más significativo) es 0, el número es positivo y si es 1, el número es negativo
- 2 El exponente consta de 8 bits.
- 3 Se utiliza **representación sesgada**

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Representación sesgada

- 1 Es un valor que se le resta al exponente
- 2 Es denominado como **sesgo**
- 3 Tiene un valor de  $2^{k-1} - 1$ ,  $k$  es el número de bits del exponente
- 4 Por lo que en un campo de 8 bits, este comprende entre un valor en el rango -127 a +128

# Representación en punto flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante



(a) Formato

$$\begin{aligned}
 1,1010001 \times 2^{10100} &= 0 \ 10010011 \ 101000100000000000000000 = 1,6328125 \times 2^{30} \\
 -1,1010001 \times 2^{10100} &= 1 \ 10010011 \ 101000100000000000000000 = -1,6328125 \times 2^{30} \\
 1,1010001 \times 2^{-10100} &= 0 \ 01101011 \ 101000100000000000000000 = 1,6328125 \times 2^{-20} \\
 -1,1010001 \times 2^{-10100} &= 1 \ 01101011 \ 101000100000000000000000 = -1,6328125 \times 2^{-20}
 \end{aligned}$$

(b) Ejemplos

Figura 1: Formato típico de 32 bits en coma flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Observaciones

- 1 Las siguientes representaciones son equivalentes:

$$0,110 * 2^5$$

$$110 * 2^2$$

$$0,0110 * 2^6$$

Para simplificarlos cálculos se utiliza la siguiente  
representación:

$$\pm 0,1bbbb * 2^{\pm E}$$

- 2 Como se puede observar siempre tiene un 1 el el bit más a la izquierda
- 3 Este bit se puede quitar y cuando se realizan los cálculos se vuelve a colocar

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Observaciones

Por lo que este formato:

- 1 El signo se almacena en el bit más a la izquierda
- 2 El primer bit de la parte significativa siempre es 1, por lo que puede quitarse
- 3 Se suma 127 al exponente original
- 4 La base es 2

# Complemento a dos vs representación en punto flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

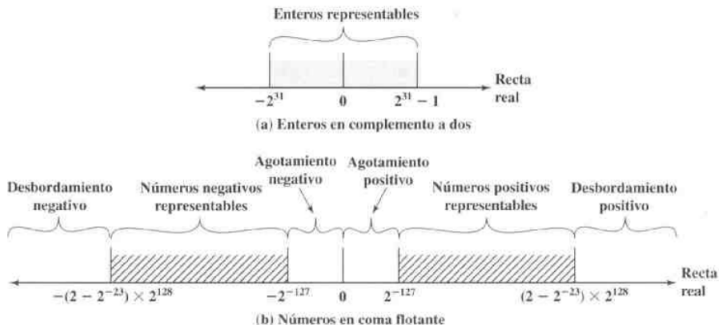


Figura 2: Comparación representación a dos vs punto flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Rango

Para el formato de representación en punto flotante se tienen los siguientes rangos:

- 1 Números negativos entre  $-(2 - 2^{23}) * 2^{128}$  y  $-2^{-127}$
- 2 Números positivos entre  $-2^{-127}$  y  $(2 - 2^{23}) * 2^{128}$

## Regiones

En la recta se pueden observar las siguientes regiones se encuentran excluidas:

- 1 **Desbordamiento negativo:** números negativos menores que:  $-(2 - 2^{23}) \times 2^{128}$
- 2 **Agotamiento negativo:** números negativos mayores que:  $-2^{-127}$
- 3 **Agotamiento positivo:** números positivos menores  $2^{-127}$
- 4 **Desbordamiento positivo:** números positivos mayores que  $(2 - 2^{23}) \times 2^{128}$
- 5 El zero



## Densidad

Se puede observar que el espaciamiento entre los números en coma flotante no es uniforme:

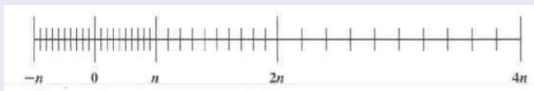


Figura 3: Densidad de los números en coma flotante

Se puede observar que existe una gran población de números cerca al origen

710193M  
Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

- 1 Representación en punto flotante
- 2 Estándar del IEEE para punto flotante**
- 3 Aritmética en punto flotante

## Formatos

- 1 **Formato simple:** 32 bits
- 2 **Formato doble:** 64 bits

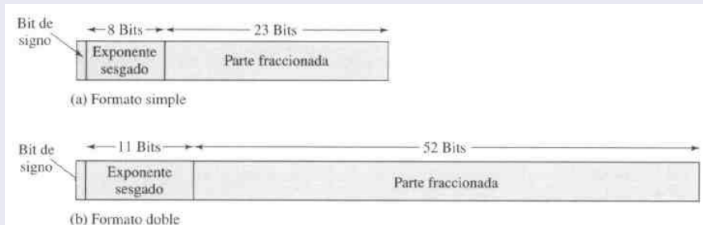


Figura 4: Formatos IEEE 754

## Formatos

- 1 **Formato simple:** 32 bits
- 2 **Formato doble:** 64 bits

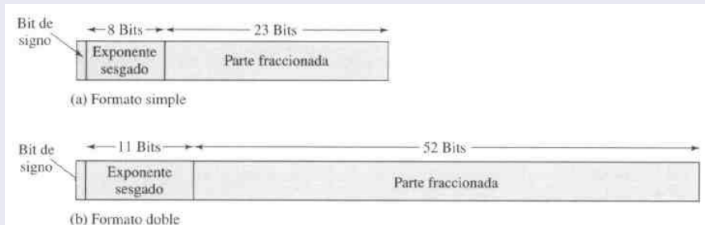


Figura 5: Formatos IEEE 754

# Estándar del IEEE para punto flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

	Precisión simple (32 bits)				Doble precisión (64bits)			
	Signo	Exponente sesgado	Parte fraccionaria	Valor	Signo	Exponente sesgado	Parte fraccionaria	Valor
Cero positivo	0	0	0	0	0	0	0	0
Cero negativo	1	0	0	-0	1	0	0	0
Más infinito	0	255 (todo unos)	0	$\infty$	0	2047 (todo unos)	0	$\infty$
Menos infinito	1	255 (todo unos)	0	$-\infty$	1	2047 (todo unos)	0	$-\infty$
NaN silencioso	0 ó 1	255 (todo unos)	$\neq 0$	NaN	0 ó 1	2047 (todo unos)	$\neq 0$	NaN
NaN indicador	0 ó 1	255 (todo unos)	$\neq 0$	NaN	0 ó 1	1047 (todo unos)	$\neq 0$	NaN
Positivo normalizado $\neq$ cero	0	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(1,f)$	0	$0 < e < 2047$	f	$2^{e-1023}(1,f)$
Negativo normalizado $\neq$ cero	1	$0 < e < 255$	f	$-2^{e-127}(1,f)$	1	$0 < e < 2047$	f	$-2^{e-1023}(1,f)$
Positivo denormalizado	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-126}(0,f)$	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-1022}(0,f)$
Negativo denormalizado	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-126}(0,f)$	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-1022}(0,f)$

Figura 6: Interpretación números en coma flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplos

Transforme al estándar IEEE 754 de 32 bits los siguientes números:

1  $10,5_{10}$

2  $17236_{10}$

3  $-127,125_{10}$

## Ejemplos

**Paso 1:** Transforme el número en binario

1  $1010,1_2$

2  $100001101010100_2$

3 (Signo negativo)  $1111111,001_2$

## Ejemplos

### Paso 2: Normalice el número

1  $1,0101_2 * (10^3)_2$

2  $1,00001101010100_2 * (10^{14})_2$

3 (Signo negativo)  $1,111111001_2 * (10^6)_2$



710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplos

**Paso 3:** Calcula el exponente, recuerda que para el caso de 32 bits, el sesgo es  $2^8 - 1$  entonces es  $127_{10} = 1111111_2$

1  $127_{10} + 3_{10} = 130_{10} = 10000010_2$

2  $127_{10} + 14_{10} = 141_{10} = 10001101_2$

3 (Signo negativo)  $127_{10} + 6_{10} = 133_{10} = 10000101_2$

## Ejemplos

**Paso 4:** Se obtiene el número en estándar IEEE 754 de 32 bits:

Signo	Exponente	Mantisa
0	10000010	<b>0101</b> 00000000000000000000000000000000
0	10001101	<b>00001101010100</b> 000000000000000000000000
1	10000101	<b>111111001</b> 00000000000000000000000000000000

Verifiquemos:

http:

//www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html

Consultado Feb 2016

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejercicio en clase

Transforme al estándar IEEE 754 de 32 bits los siguientes números:

1  $18,75_{10} = 10010,11_2$

2  $14578,5_{10} = 11100011110010,1_2$

3  $-0,625_{10} = 0,101_2$

## Ejercicio en clase

### Respuestas:

- 1 01000001100101100000000000000000<sub>2</sub>
- 2 01000110011000111100101000000000<sub>2</sub>
- 3 10111111001000000000000000000000<sub>2</sub>

## Ejercicio en clase

Ahora intenta para 64 bits, recuerda: exponente 11 bits y mantisa 53 bits.

1  $18,75_{10} = 10010,11_2$

2  $14578,5_{10} = 11100011110010,1_2$

3  $-0,625_{10} = 0,101_2$

### ¿Cuanto es el sesgo?

Recuerda es:  $2^{k-1} - 1$ , donde  $k$  es el número de bits del exponente

[illegible]

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplos

Transforme a decimal los siguientes números en el estándar IEEE 754 de 32 bits:

1 01000001001100000000000000000000<sub>2</sub>

2 11000000110100000000000000000000<sub>2</sub>

3 01000010010010000000000000000000<sub>2</sub>

## Ejemplos

### Paso 1: Reste el sesgo al exponente

1  $10000010_2 - 1111111_2$

■  $130_{10} - 127_{10}$

■  $3_{10}$

2  $10000001_2 - 1111111_2$

■  $129_{10} - 127_{10}$

■  $2_{10}$

3  $10000100_2 - 1111111_2$

■  $132_{10} - 127_{10}$

■  $5_{10}$



## Ejemplos

### Paso 2: Agregue 1. a la mantisa

1  $1,01100000000000000000000_2$

2  $1,10100000000000000000000_2$

3  $1,10010000000000000000000_2$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplos

**Paso 3:** Multiplique por 2 elevado al exponente al que se le ha restado el sesgo

1  $1,011000000000000000000000_2 * 2^3$

2  $1,101000000000000000000000_2 * 2^2$

3  $1,100100000000000000000000_2 * 2^5$

En binario, multiplicar por 2 es análogo a multiplicar por 10 en decimal, **sólo debes correr la coma tantas posiciones a la derecha o izquierda**

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplos

**Paso 4:** Convierta en decimal, tome en cuenta el bit del signo

1  $1011,00000000000000000000_2 = 11_{10}$

2  $-110,10000000000000000000_2 = -6,5_{10}$

3  $110010,000000000000000000_2 = -50_{10}$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejercicio

Transforme a decimal los siguientes números en el estándar IEEE 754 de 32 bits:

1 01000010000000101000000000000000<sub>2</sub>

2 11000001011110000000000000000000<sub>2</sub>

3 01000010110010001000000000000000<sub>2</sub>

## Ejercicio

Respuestas:

- 1  $33,25_{10}$
- 2  $-15,5_{10}$
- 3  $100,25_{10}$

710193M  
Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

1 Representación en punto flotante

2 Estándar del IEEE para punto flotante

3 Aritmética en punto flotante

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Definiciones

- Sumas y restas más complicadas que la multiplicación y división, imagine que tiene que sumar  $3 * 10^5 + 4 * 10^3$ .
- Por lo tanto, para sumas y restas es necesario ajustar el exponente.

## Sumas y restas

Se deben realizar 4 pasos:

- 1 **Comprobación de cero:** Debido a que la suma y la resta son idénticas, excepto por el cambio de signo, en el caso de restas se cambia el signo del **substraendo**
- 2 **Ajuste cifras significativas:** Ajuste el menor exponente igual al mayor exponente, realizando los corrimientos de coma necesarios:  
$$123 * 10^0 + 456 * 10^{-2} = 123 * 10^0 + 4,56 * 10^0 = 127,56 * 10^0$$
- 3 **Realice la suma respectiva, tomando en cuenta el signo de los operandos**
- 4 **Normalización,** recuerde que la mantisa tiene forma 1.*bbbb*



710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo 1

Realice la siguiente operación:

$$\begin{array}{l} \text{1} \quad 01000010100101010000000000000000_2 + \\ \quad 01000000011100000000000000000000_2 \\ \quad 74,5_{10} + 3,75_{10} \end{array}$$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo 1

### Paso 1: Comprobación de cero:

$$\begin{array}{l} \text{1} \quad 01000010100101010000000000000000_2 + \\ \quad 01000000011100000000000000000000_2 \end{array}$$

En este caso ya que los dos son positivos y se trata de una suma, no se realiza ningún cambio de signo

## Ejemplo 1

### Paso 2: Ajuste cifras significativas:

- Exponentes:  $10000101_2$ ,  $10000000_2$
- Mantisas:  
 $1,001010100000000000000000_2$ ,  $1,111000000000000000000000_2$
- La diferencia entre los exponentes es:  $101_2 = 5_{10}$  por lo que se deben correr 5 posiciones a la izquierda la segunda mantisa así:  
Mantisas:  $1,001010100000000000000000_2$ ,  
 $0,0000111100000000000000000000_2$

## Ejemplo 1

### Paso 3: Suma: Mantisas normalizadas:

$1,00101010000000000000000_2,$

$0,000011110000000000000000000_2$

- Se realiza la suma de las mantisas para obtener:  
 $1,00111001000000000000000_2$
- Como en este caso ha quedado de la forma 1,0 no es necesario cambiar el exponente.
- Por lo que el resultado es:  
 $0100001010011100100000000000000_2 = 78,25_{10}.$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo 2

Realice la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 11000001110011000000000000000000_2 - \\ \quad 01000001100011100000000000000000_2 \\ \hline -25,5_{10} - 17,75_{10} \end{array}$$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo 2

### Paso 1: Comprobación de cero:

$$\begin{array}{l} \text{1} \quad 11000001110011000000000000000000_2 + \\ \quad 110000011000111000000000000000000_2 \end{array}$$

En este caso se tiene una resta por lo que el **substraendo** se cambia de signo.

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo 2

### Paso 2: Ajuste cifras significativas:

- Exponentes:  $10000011_2, 10000011_2$
- Mantisas:  $1,1001100000000000000000_2,$   
 $1,0001110000000000000000_2$
- Como se puede observar ambos exponentes son iguales,  
por lo que no se realizan cambios en las mantisas.

## Ejemplo 2

textbfPaso 3: Suma: Mantisas:  $1,1001100000000000000000_2$ ,  
 $1,000111000000000000000000_2$

- Como son ambos negativos, se suma sin problema y se toma en cuenta que el resultado es negativo
- El resultado de la suma es:  
 $10,101101000000000000000000_2$
- Como en este caso no ha quedado de la forma 1,0 es necesario correr la coma una posición a la izquierda, **que es equivalente a sumar 1 al exponente** y la mantisa ahora es:  $1,010110100000000000000000_2$
- Por lo que el nuevo exponente es:  $10000100_2$
- El resultado total es:  
 $11000010001011010000000000000000_2 = -43,25_{10}$ .



710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Multiplicación y división

- Para el caso de multiplicación, se suman los exponentes, pero a uno de ellos se le debe restar el sesgo, de lo contrario lo está sumando 2 veces. En el caso de la división se realiza la resta y se le suma el sesgo.
- Las mantisas se multiplican o dividen segundo el caso
- Considere los signos y aplique la **ley de los signos** según el caso

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo

Realice las siguientes multiplicaciones y divisiones:

$$\begin{array}{l} \text{1} \quad 01000001100000000000000000000000_2 + \\ \quad 01000000001000000000000000000000_2 \\ \quad 16_{10} * 2,5_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{2} \quad 01000001100000000000000000000000_2 - \\ \quad 01000000100000000000000000000000_2 \\ \quad 16_{10}/4_{10} \end{array}$$



## Aritmética en punto flotante

## Ejemplo

Ajuste exponentes:

$$\begin{aligned} & \text{1} \quad 01000001100000000000000000000000_2 + \\ & \quad 01000000001000000000000000000000_2 \\ & \quad 10000011_2 + 10000000_2 - 1111111_2 = 10000100_2 \end{aligned}$$

2  $01000001100000000000000000000000_2 -$   
 $01000000100000000000000000000000_2$   
 $10000011_2 - 10000001_2 + 1111111_2 = 10000001_2$

## Ejemplo

### Ajuste mantisas:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{1} \quad 01000001100000000000000000000000_2 + \\
 & \quad 01000000001000000000000000000000_2 \\
 & \quad 1,000000000000000000000000_2 * \\
 & \quad 1,010000000000000000000000 = \\
 & \quad 1,010000000000000000000000_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{2} \quad 01000001100000000000000000000000_2 - \\
 & \quad 01000000100000000000000000000000_2 \\
 & \quad 1,000000000000000000000000_2 / 1,000000000000000000000000 = \\
 & \quad 1,000000000000000000000000_2
 \end{aligned}$$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

## Ejemplo

Uniendo resultados:

$$1 \quad 01000010001000000000000000000000_2 = 40_{10}$$

$$2 \quad 01000000100000000000000000000000_2 = 4_{10}$$

710193M

Arquitectura  
de  
computadores  
II

Carlos Andrés  
Delgado S.

Representación  
en punto  
flotante

Estándar del  
IEEE para  
punto flotante

Aritmética en  
punto flotante

¿Preguntas?

Siguiente clase:  
Repertorio de Instrucciones:  
Características y funciones