Matemáticas discretas II

Lenguajes y gramáticas

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Carlos Andrés Delgado S.
Raúl E Gutierrez de Piñerez R.

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Marzo 2018

Universidad del Valle

Universidad del Valle

Contenido

El alfabeto

Un alfabeto es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman **símbolos**.

- Sea $\Sigma = \{a, b\}$ el alfabeto que consta de los símbolos a y b. Las siguientes son cadenas sobre Σ: *aba, abaabaaa, aaaab*.
- El *alfabeto binario* $\Sigma = \{0, 1\}$ son las cadenas sobre Σ que se definen como secuencias finitas de ceros y unos.
- Las cadenas son *secuencias ordenadas* y finitas de símbolos. Por ejemplo, $w = aaab \neq w_1 = baaa$.
- Sea $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ el alfabeto del idioma castellano.
- El alfabeto utilizado por muchos lenguajes de programación.
- Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ entonces podemos formar todas las cadenas sobre Σ incluyendo la cadena vacía.

Universidad del Valle

Notación de alfabetos, cadenas y lenguajes

Notación usada en la teoría de lenguajes	
Σ, Γ	denotan alfabetos.
Σ^*	denota el conjunto de todas las cadenas que se pueden formar con los símbolos del alfabeto Σ.
$a, b, c, d, e, \ldots$	denotan símbolos de un alfabeto.
$u, v, w, x, y, z, \ldots$ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	denotan cadenas, es decir, sucesiones finitas de símbolos de un alfabeto.
ϵ	denota la cadena vacía, es decir, la única cadena que no tiene símbolos.
$A, B, C, \ldots, L, M, N, \ldots$	denotan lenguajes (definidos más adelante).

- Si bien un alfabeto Σ es un conjunto finito, Σ^* es siempre un conjunto infinito (enumerable).
- Hay que distinguir entre los siguientes cuatro objetos, que son diferentes entre sí: $\emptyset, \epsilon, \{\emptyset\}, \{\epsilon\}$

Alfabetos

Operaciones con alfabetos

Si Σ es un alfabeto, $\sigma \in \Sigma$ denota que σ es un símbolo de Σ, por tanto, si

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

se puede decir que $0 \in \Sigma$

Un alfabeto es simplemente un conjunto finito no vacío que cumple las siguientes propiedades, Dados Σ_1 y Σ_2 alfabetos

- Entonces $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ también es un alfabeto.
- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2, \Sigma_1 - \Sigma_2$ y $\Sigma_2 - \Sigma_1$ también son alfabetos.

Conjunto Universal

El conjunto de todas las cadenas sobre un alfabeto Σ, incluyendo la cadena vacía, se denota por Σ^*

- Sea $\Sigma = \{0, 1\}$
  $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 100, 010, 110, \ldots\}$
- Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces
  $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, abc, baa, \ldots\}$
- Sea $\Sigma = \{a, b\}$, entonces
  $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, baa, \ldots\}$

Concatenación de cadenas

$\Sigma = \{a, b\}$ $w = abaab$ $u = \epsilon$

Cadenas

Dado un alfabeto Σ y dos cadenas $u, v \in \Sigma^*$, la concatenación de u y v se denota como $u \cdot v$ o simplemente uv y se define así:

1. Si $v = \epsilon$, entonces $u \cdot \epsilon = \epsilon \cdot u = u$, es decir, la concatenación de cualquier cadena u con la cadena vacía, a izquierda o derecha, es igual a u.
2. Si $u = a_1 a_2 \dots a_n$, $v = b_1 b_2 \dots b_m$, entonces

$$u \cdot v = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$$

   Es decir, $u \cdot v$ es la cadena formada de escribir los símbolos de u y a continuación los símbolos de v.

$U \cdot V \neq V \cdot U$

Universidad del Valle

Potencia de una cadena

Dada $w \in \Sigma^*$ y $n \in \mathbb{N}$, se define w^n de la siguiente forma

$$w^n = \begin{cases} \epsilon & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{uu\ldots u}_{n-veces} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Potencia de una cadena de manera recursiva

La potencia de una cadena se define como $w \in \Sigma^*$ para $n \in \mathbb{N}$

$$w^n = \begin{cases} \epsilon, & \text{si } n = 0 \\ ww^{n-1}, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea una cadena $w = acc$ sobre $\Sigma = \{a, c\}$ entonces podemos obtener $w^3 = ww^2 = wwww^0 = accaccacc\epsilon = (acc)^3$

w= aac

Universidad del Valle

Inversa de una cadena

Longitud de una cadena

La longitud de una cadena $w \in \Sigma^*$ se denota $|w|$ y se define como el número de símbolos de w (contando los símbolos repetidos), es decir:

$$|w| = \begin{cases} 0, & \text{si } w = \varepsilon \\ n, & \text{si } w = a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases}$$

$|aba| = 3$, $|baaa| = 4$

Reflexión o inversa de una cadena

La reflexión o inversa de una cadena $w \in \Sigma^*$ se denota como w^I y se define así:

$$w^I = \begin{cases} \epsilon, & \text{si } w = \varepsilon \\ a_n \ldots a_2 a_1, & \text{si } w = a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases}$$

Universidad del Valle

Inversa de una cadena de manera recursiva

La Inversa de una cadena Sea $u \in \Sigma^*$ entonces u^{-1} es la inversa.

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \varepsilon \\ y^I a & \text{si } w = ay, a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

- Sea x='able' entonces obtener x^I

(roma)'
(oma)'r
(ma)' or
(a)' mor
(e)' amor = amor

$$\begin{aligned} x^I = (able)^I &= (ble)^I a \\ &= (le)^I ba \\ &= (e)^I lba \\ &= (\varepsilon)^I elba \\ &= \varepsilon elba \\ &= elba \end{aligned}$$

- Sea la concatenación de las cadenas "ab" y "cd" que forma "abcd" sobre un alfabeto. Sabemos que $(abcd)^I = dcba$, por tanto $dcba = (cd)^I(ab)^I$. Por lo tanto, si w e y son cadenas y si $x = wy$, entonces $x^I = (wy)^I = y^I w^I$
- En general, $(x^I)^I = x$, para demostrar, suponga que $x = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Universidad del Valle

Sufijos y prefijos

prefijo

$U = \underline{X}\ V\ y$ sufijo

$X \neq V$

Cadena

Definición formal: Una cadena v es una subcadena o subpalabra de u si existen x, y tales que $u = xvy$. Nótese que x o y pueden ser ϵ y por lo tanto, la cadena vacía es una subcadena de cualquier cadena.

- Un *prefijo* de u es una cadena v tal que $u = vw$ para alguna cadena $w \in \Sigma^*$. Se dice que v es un **prefijo propio** si $v \neq u$.
- Un *sufijo* de u es una cadena de v tal que $u = wv$ para alguna cadena $w \in \Sigma^*$. Se dice que v es un **sufijo propio** si $v \neq u$.

palabra

XV

$y = \epsilon$

$X = \{p, pa, pal, \ldots\}$

Universidad del Valle

Ejemplo de cadenas que son sufijos y prefijos

Sea $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ y $u = bcbaadb$

Prefijos de u

ϵ
b
bc
bcb
$bcba$
$bcbaa$
$bcbaad$
$bcbaadb$

Sufijos de u

ϵ
b
db
adb
$aadb$
$baadb$
$cbaadb$
$bcbaadb$

Operación binaria

Una **operación binaria** en un conjunto A es una función $f : A \times A \to A$, esta deberá satisfacer las siguientes propiedades:

1. La operación binaria deberá estar definida para cada par ordenado de A, es decir, f asigna a **UN** elemento $f(a, b)$ de A a cada par ordenado (a, b) de elementos de A.
2. Como una operación binaria es una función, sólo un elemento de A se asigna a cada par (a, b).

a
- Sea $A = Z$, se define $a * b$ como $a + b$. Entonces, $*$ es una operación binaria en Z.

b
- Sea $A = Z^+$, se define $a * b$ como $a - b$. Entonces $*$ no es una operación binaria ya que no asigna un elemento de A a cualquier par ordenado de elementos de A.

NO

Universidad del Valle

Concatenación de cadenas como una operación binaria

Concatenación

La **operación de la concatenación** $\cdot$ es una **operación binaria** entre cadenas de un alfabeto Σ, esto es:

$$\cdot : \overset{u}{\Sigma^*} \times \overset{v}{\Sigma^*} \to \Sigma^*$$

Sean $u, v \in \Sigma^*$ y se denota por $u \cdot v$ o simplemente uv.

$$| uv | = | u | + | v |$$

- Dado el alfabeto Σ y dos cadena $w, u \in \Sigma^*$
  - Entonces $w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w = w$.
  - Si $u = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, $w = b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$, entonces,

    $$u \cdot w = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$$

    Por tanto $| u \cdot w | = n + m$
- La concatenación de cadenas es asociativa. Es decir, si $u, v, w \in \Sigma^*$, entonces:

  $$(uv)w = u(vw)$$

Semigrupo

Sea $(\Sigma^*, \cdot)$ es un **semigrupo** el cual es un conjunto no vacío Σ^* junto con una operación binaria asociativa $\cdot$ definida en Σ^*.

- El conjunto $P(S)$, donde S es un conjunto, junto con la operación de la unión $(P(S), \cup)$ es un semigrupo y es también un semigrupo conmutativo.

  $$* : P(S) \times P(S) \to P(S)$$

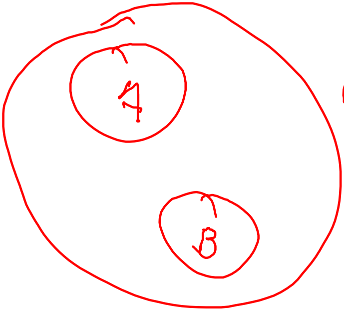
  Sea $S = \{a, b\}$ entonces $\{a, b\} \cup (\emptyset \cup \{b\}) = (\{a, b\} \cup \emptyset) \cup \{b\}$
- El semigrupo $(\Sigma^*, \cdot)$ no es un semigrupo cunmutativo porque para $u, w \in \Sigma^*$ no se cumple que $u \cdot w = w \cdot u$.
- Sea $w = ac$, $w_1 = ab$ y $w_2 = bb$ tal que $w, w_1, w_2 \in \Sigma^*$ entonces

$W_1 W_2$

$W_2 W_1$

$$\begin{aligned} w(w_1 w_2) &= (ww_1)w_2 \\ ac(abbb) &= (acab)bb \\ acabbb &= acabbb \end{aligned}$$

U



$A \cup B \in U$

$B \cup A$

Monoide

Monoide

Un **monoide** es un semigrupo $(S, *)$ que tiene idéntico.

- El semigrupo $P(S)$ con la operación de la unión tiene como idéntico a $\emptyset$ ya que
$$\emptyset * A = \emptyset \cup A = A = A \cup \emptyset$$
- Sea $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ un **monoide** con las siguientes propiedades:
  1. Es una operación binaria, es decir la concatenación es cerrada. $\forall x, y \in \Sigma^*$, entonces $x \cdot y \in \Sigma^*$.
  2. La concatenación es un semigrupo $(\Sigma^*, \cdot)$ y por tanto $\cdot$ es asociativa $\forall x, y, z \in \Sigma^*$, $(xy)z = x(yz)$
  3. La cadena vacía ϵ es la idéntica para la concatenación: $\forall x \in \Sigma^*$, $\epsilon \cdot x = x \cdot \epsilon = x$

Universidad del Valle

Alfabeto: Conjunto de símbolos finito (No vacio)

$$\Sigma$$

Conjunto universal: Palabras que se pueden formar con los símbolos de un alfabeto. Este conjunto es infinito (enumerable) y contiene la cadena vacía.

Concatenación. (Asociativa pero no conmutativa)

Operación binaria: Recibe dos argumento que perte necen a un conjunto/alfabeto y el resultado pertenece al mismo conjunto/alfabeto

Potencia de una cadena

$$u^n = \begin{cases} \epsilon & n = 0 \\ \underbrace{uuuu}_{n \text{ veces}} & n \geq 1 \end{cases}$$

ϵ — Cadena vacía

$\emptyset$ — Lenguaje vacío

$\{\emptyset\}$ — Lenguaje que contiene un lenguaje vacío

$\{\epsilon\}$ — Lenguaje que contiene cadena vacía

Semigrupos

Una operación binaria, la cual su comutación tambien pertecen al conjunto. Operaciones como la Unión y la concatenación. (No vacio)

Monoide

Es un semigruo cuya comutación es identica. Tenemos a la unión pero no a la concatenación.

Lenguaje

Un *lenguaje* es un conjunto de palabras o cadenas. Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^* y si $L = \Sigma^*$ es el lenguaje de todas las cadenas sobre Σ.

- Sea $L = \emptyset$ el lenguaje vacío
- $\emptyset \subseteq L \subseteq \Sigma^*$

- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{a, aba, aca\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{a, aa, aaa\} = \{a^n : n \geq 1\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{\epsilon, aa, aba, ab^2a, ab^3a\} = \{ab^na : n \geq 0\} \cup \{\epsilon\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{w \in \Sigma^*: w$ no contiene el símbolo $c\}$. Por ejemplo, $abbaab \in L$ pero $abbcaa \notin L$.
- Sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ el lenguaje de las cadenas que tienen igual número de ceros, unos y dos's en cualquier orden.

Operaciones entre lenguajes

- Operaciones entre lenguajes; Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ operaciones de conjuntos.
- Las operaciones lingüísticas son la concatenación, potencia, inverso y clausura.
- Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces,

$$A \cup B = \{x | x : x \in A \quad o \quad x \in B\}$$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
$\{a, ab\} \cup \{ab, aab, aaabb\} = \{a, ab, aab, aaabb\}$

Operaciones entre lenguajes

- Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces,

$$A \cap B = \{x | x : x \in A \quad y \quad x \in B\}$$

$\{a, ab\} \cap \{ab, aab\} = \{ab\}$
$\{a, aab\} \cap \{a, ab, aab, aaabb\} = \{a, aab\}$
$\{\epsilon\} \cap \{a, ab, aab, aaabb\} = \emptyset$

- Complemento en Σ^*:

$$\sim A = \{x \in \Sigma^* | x \notin A\}$$
$$\sim A = \Sigma^* - A$$

$A =\{$ Cadenas de longitud par$\}$ sobre $\Sigma = \{a, b\}$, entonces
$\sim A$=$\{$cadenas de longitud impar$\}$.

- Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces,

  $$A - B = \{x | x : x \in A \quad y \quad x \notin B\}$$

  Sea B: El lenguaje de todas las cadenas de ceros de cualquier longitud.
  Entonces:
  Sea $A = \{0, 1\}^*$ y $B = \{0\}^*$ entonces
  $A - B = \{0, 1\}^* - \{0\}^* = 0^*1(0 \cup 1)^*$
  $A - B$ es el lenguaje de todas las cadenas de unos y ceros con almenos un uno.

Lenguaje Universal

Si $\Sigma \neq \emptyset$, entonces Σ^* es el conjunto de todas las cadenas sobre Σ. Se le llama **lenguaje universal.**

- Σ^* es un conjunto infinito de cadenas de longitud finita sobre Σ.

Teorema

Sean A y B dos lenguajes sobre el alfabeto Σ. Entonces $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

$\Rightarrow$) Suponiendo que $A = B$, entonces si $x \in A$, como $A = B$ entonces $x \in B$ por tanto $A \subseteq B$ de la misma forma si $x \in B$ entonces como $A = B$ entonces $x \in A$ por lo tanto $B \subseteq A$.
$\Leftarrow$) Se demuestra que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

Universidad del Valle

- Sea el lenguaje del conjunto de cadenas con igual número de ceros y unos.
$$L_1 = \{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1001, 000111, \ldots\}$$
y sea
$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \subset L_1 \subset \{0,1\}^*$$
- La concatenación de lenguajes de dos lenguajes *A y B* sobre Σ, notada por *A.B* o simplemente *AB*.
- $AB = \{uv : u \in A, v \in B\}$
- $A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot A = \emptyset$

$$A \cdot \emptyset = \{uw : u \in A, w \in \emptyset\} = \emptyset$$

Universidad del Valle

$A = \{a, ab, bb\}$ $\Sigma = \{a, b\}$

$B = \{aa, ab\}$ $A . B$

$A = \{aaa, aab, abaa, abab, bbaa, bbab\}$

- $A \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot A = A$

$$A \cdot \{\epsilon\} = \{uw : u \in A, w \in \{\epsilon\}\} = \{u : u \in A\} = A$$

- Las propiedad distributiva generalizada de la concatenación con respecto a la unión.

$$A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)$$

A, B, C

$A \cdot (B \cup C)$

$(A \cdot B \cup A \cdot C)$

$A \cdot \emptyset$

$\downarrow$

$\emptyset$

$$\begin{aligned}
x \in A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i \quad &\Longleftrightarrow \quad x = u \cdot v, u \in A, v \in \bigcup_{i \in I} B_i \\
&\Longleftrightarrow \quad x = u \cdot v, u \in A, v \in B_j, \\
\exists j \in I \quad & \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in A \cdot B_j, \exists j \in I \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)
\end{aligned}$$

Universidad del Valle

Lenguajes

- Ejemplo. Sean $A = \{ab\}$, $B_1 = \{a, b\}$, y $B_2 = \{abb, b\}$

$$A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)$$

$$\begin{aligned}
A \cdot \bigcup_{i \in I = 2} B_i &= A \cdot (B_1 \cup B_2) \\
A \cdot \bigcup_{i \in I = 2} B_i &= \{ab\} \cdot (\{a, b\} \cup \{abb, b\}) \\
\{ab\} \cdot (\{a, b\} \cup \{abb, b\}) &= (\{ab\} \cdot (\{a, b\}) \cup (\{ab\} \cdot \{abb, b\})
\end{aligned}$$

- De igual forma se puede demostrar que:

$$\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cdot A = \bigcup_{i \in I} (B_i \cdot A)$$

Universidad del Valle

La concatenación no es distributiva con respecto a la intersección, es decir, no se cumple que $A \cdot (B \cap C) = A \cdot B \cap A \cdot C$. Contraejemplo: Sea $A = \{a, \epsilon\}$, $B = \{\epsilon\}$, $C = \{a\}$ se tiene:

$$A \cdot (B \cap C) = \{a, \epsilon\} \cdot \emptyset = \emptyset$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A \cdot B \cap A \cdot C &= \{a, \epsilon\} \cdot \{\epsilon\} \cap \{a, \epsilon\} \cdot \{a\} \\ &= \{a, \epsilon\} \cap \{ a^2, a\} = a \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Potencia del lenguaje

Potencia del lenguaje Dado un lenguaje A sobre Σ y ($A \subseteq \Sigma^*$) y $n \in \mathbb{N}$, se define

$$A^n = \begin{cases} \{\epsilon\}, & \text{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea $A = \{ab\}$ sobre un alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, entonces:
$A^0 = \{\epsilon\}$
$A^1 = A = \{ ab\}$
$A^2 = A \cdot A^1 = \{ abab\}$
$A^3 = A \cdot A^2 = \{ ababab\}$

$$A = \{a, bb\}$$

$$A^0 = \{\varepsilon\}$$

$$A^1 = \{a, bb\}$$

$$A^2 = A.A^1 = \{aa, abb, bba, bbbb\}$$

$$A^3 = A.A^2 = \{aaa, aabb, abba, abbbb, bbaa, bbabb, bbbba, bbbbbb\}$$

Cerradura de Kleene

Def. formal de Cerradura de Kleene

La cerradura de Kleene de un lenguaje $A \subseteq \Sigma^*$ es la unión de las potencias: se denota por A^*

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n$$

- `Observación:` A^* se puede describir de la siguiente manera:

  $$A^* = \{u_1 u_2 \ldots u_n : u_i \in A, n \geq 0\}$$

  Es el conjunto de todas las concatenaciones de la cadena A, incluyendo ϵ
- la cerradura positiva se denota por A^+

$$A^+ = \bigcup_{i \geq 1} A^i = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots \cup A^n$$

Universidad del Valle

$$A = \{aa, a\}^* = \{\epsilon, aa, a, aaa, aaaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, \ldots\}$$

$$A^* = \{A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \ldots A^n\}$$

$$A^0 = \{\epsilon\} \qquad A^1 = \{aa, a\}$$

$$A^2 = A \times A^1 = \{aaaa, aaa, aa\}$$

$$A^3 = A \times A^2 =$$

$L = \{\epsilon, a\}$ $\quad L^* = \{\epsilon, a, aa, \ldots$

$L^+ = \{\epsilon, a, aa, \ldots$

- Observe que $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$ y $A^* = A^+$ si y solamente si $\epsilon \in A$
- $A^+ = A^* \cdot A = A \cdot A^*$

$$
\begin{aligned}
A \cdot A^* &= A \cdot (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots) \\
&= (A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots) \\
&= A^+
\end{aligned}
$$

$A \cdot A^n = A^{n+1}$

Se demuestra lo mismo que $A^+ = A^* \cdot A$

$L = \{a, b\} \rightarrow L^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab \ldots$

$L^* \cdot L = \{a, b, aa, ab, \ldots\}$

Cerradura de Kleene

$A = \{a, b\}$ $\quad A^* = \{\varepsilon, a, b, aa \ldots$

$b \quad aa \to baa$

$A^* \cdot A^* = A^*$

1. $\Rightarrow$), Sea un $x \in A^* \cdot A^*$, entonces $x = u \cdot v$, con $u \in A^*$ y $v \in A^*$ Por tanto $x = u \cdot v$, con $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, $u_i \in A$, $n \geq 0$ y $v = v_1 v_2 \ldots v_m$, $v_i \in A$, $m \geq 0$ De donde

$$x = u \cdot v = u_1 u_2 \ldots u_n \cdot v_1 v_2 \ldots v_m$$

   con $u_i \in A$, $v_i \in A$, por lo tanto x, es una concatenación de $n + m$ cadenas de A, así que $x \in A^*$.

2. $\Leftarrow$) Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $x = x \cdot \varepsilon \in A^* \cdot A^*$. Esto prueba la igualdad de los conjuntos $A^* \cdot A^*$ y A^*.

Universidad del Valle

Cerradura de Kleene

$L^{+} = \bigcup \{ L^1, L^2, L^3, L^n \}$ $\quad L = \{a, b\}$ $\quad L^1$

$L^{+} = \{a, b, aa, ab, \ldots$

$L^{+} L^{+} = \{aa, ab, aaa, aab, \ldots$

- $(A^*)^n = A^*$, para todo $n \geq 1$
- $(A^*)^* = A^*$
- $A^+ \cdot A^+ \subseteq A^+$

  Contraejemplo de $A^+ \cdot A^+ = A^+$. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} A^+ &= (A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots) \\ &= \{a\} \cup \{aa\} \cup \{aaa \ldots\} \\ &= \{a^n : n \geq 1\} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A^+ \cdot A^+ &= \{a, a^2, a^3, \ldots\} \cdot \{a, a^2, a^3, \ldots\} \\ &= \{a^2, a^3, \ldots\} \\ &= \{a^n : n \geq 2\} \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Cerradura de Kleene

- $(A^*)^+ = A^*$

$$\begin{aligned} (A^*)^+ &= (A^*)^1 \cup (A^*)^2 \cup (A^*)^3 \cup \ldots \\ &= A^* \cup A^* \cup A^* \ldots \\ &= A^* \end{aligned}$$

- $(A^+)^* = A^*$

$$\begin{aligned} (A^+)^* &= (A^+)^0 \cup (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup \ldots \\ &= \{\epsilon\} \cup A^+ \cup A^+A^+ \cup \ldots \\ &= A^* \cup \text{(conjuntos contenidos en } A^+\text{)} \\ &= A^* \end{aligned}$$

- $(A^+)^+ = A^+$

$$\begin{aligned} (A^+)^+ &= (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup (A^+)^3 \cup \ldots \\ &= (A^+)^1 \cup \text{(conjuntos contenidos en } A^+\text{)} \\ &= A^+ \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Operaciones claves

Operaciones claves en los lenguajes:

- $A^* \subseteq \Sigma^*$ $A^+ \subseteq \Sigma^+$
- $A^+ \subseteq A^*$
- $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^+$
- $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$
- $\emptyset^n = \emptyset$, $n \geq 1$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ $\emptyset^+ = \emptyset$

Universidad del Valle

Inverso de un lenguaje

Sea A sobre Σ, se define A^I como:

$$A^I = \{u^I : u \in A\}$$

Sean A y B lenguajes sobre Σ tal que $(A, B \subseteq \Sigma^*)$

- $(A.B)^I = B^I.A^I$

$$\begin{aligned}
x \in (A \cdot B)^I \quad &\Longleftrightarrow \quad x = u^I, \text{donde, } u \in A \cdot B \\
&\Longleftrightarrow \quad x = u^I, \text{ donde, } u = vw,\ v \in A,\ w \in B \\
&\Longleftrightarrow \quad x = (vw)^I, \text{ donde, } v \in A,\ w \in B \\
&\Longleftrightarrow \quad x = w^I v^I, \text{ donde, } v \in A,\ w \in B \\
&\Longleftrightarrow \quad x = B^I A^I
\end{aligned}$$

Universidad del Valle

Propiedades del inverso de un lenguaje

Sean A y B lenguajes sobre Σ tal que $(A, B \subseteq \Sigma^*)$

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$
- $(A^I)^I = A$
- $(A^*)^I = (A^I)^*$
- $(A^+)^I = (A^I)^+$

Lenguajes regulares

Los lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ se definen recursivamente como:

- $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ y $\{a\}$, $a \in \Sigma$ son lenguajes regulares.
- si A y B son lenguajes regulares, también lo son:

$$A \cup B \text{ (Unión)}$$
$$A \cdot B \text{ (Concatenación)}$$
$$A^{*} \text{ (Cerradura de Kleene)}$$

`Ejemplo 1.` Dado $\Sigma = \{a, b\}$ el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a: $A = \{b\}^{*} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^{*}$ {a, ba, bab, bba, ...}

`Ejemplo 2.` Lenguaje de todas las cadenas que comienzan con b:
$B = \{b\} \cdot \{(a \cup b)\}^{*} \rightarrow$ {b, bab, baba...

`Ejemplo 3.` Lenguaje de todas las cadenas que contienen la cadena *ba*:
$C = \{(a \cup b)\}^{*} \cdot \{ba\} \cdot \{(a \cup b)\}^{*}$

Alfabeto {a, b}

1) Cadenas que inician con ab

$$\{ab\}.\{a \cup b\}^*$$

2) Cadenas que inician con b y terminan a con a

$$b\{a \cup b\}^*a$$

3) Cadenas que inician con b, seguidas de una o más a y que terminan en bbbb

$$b\{a\}^+bbbb$$

4) Palabras que inician en a o en b, seguidas de una o más b, que terminan en cero o más a

$$(a \cup b)b^{+}a^{*}$$

5) Palabras que inician en aa o bb, seguidas de una o más bb que terminan en aa o aba

$$(aa \cup bb)(bb)^{+}(aa \cup aba)$$

Propiedades de clausura

Teorema

Si L, L_1 y L_2 son lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ, también lo son:

1. $L_1 \cup L_2$
2. $L_1 L_2$
3. L^+
4. $\overline{L} = \Sigma^* - L$
5. L^*
6. $L_1 \cap L_2$
7. $L_1 - L_2$
8. $L_1 \triangle L_2$

Son los elementos que estan en L1, o estan en L2, pero no en ambos

Observación

Un sublenguaje (subconjunto) de un lenguaje regular no es necesariamente regular, es decir, la familia de los lenguajes regulares no es cerrada para subconjuntos.

Propiedades de clausura

Observación

- *Un lenguaje regular puede contener sublenguajes No-regulares. Sea* $L = \{a^n b^n\}$ *es un sublenguaje del lenguaje regular* $a^* b^*$
- *Todo lenguaje finito es regular y la unión finita de lenguajes regulares es regular.*
- *La unión infinita de lenguajes no necesariamente es regular.*

$$L = \{a^n b^n : n \geq 1\} = \bigcup_{i \geq 1} \{a^i b^i\}$$

Donde cada $\{a^i b^i\}$ *regular, pero L No lo es.*

Universidad del Valle

Definición formal de expresiones regulares

Las expresiones regulares sobre un alfabeto Σ se definen recursivamente como:

$aab^* \neq (aab)^*$

- $\emptyset$, ϵ y a, $a \in \Sigma$ son expresiones regulares.
- si A y B son expresiones regulares, también lo son:

$$A \cup B \text{ (Unión)}$$
$$A \cdot B \text{ (Concatenación)}$$
$$A^* \text{(Cerradura de Kleene)}$$

- Son expresiones regulares aab^*, ab^+, $(aaba^*)^+$
- Sea el conjunto $\{\epsilon, aa, aba, ab^2a, ab^3a, ab^4a, ...\}$ entonces $\{\epsilon\} \cup ab^*a$ es una expresión regular.
- Expresión regular de todas las cadenas impares sobre $\Sigma = \{a, b\}$

$$a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

pares $(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$

Universidad del Valle

Expresiones regulares

Teorema

Sean r, s y t expresiones regulares sobre Σ, entonces:

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r\varepsilon = r = \varepsilon r$
6. $r\emptyset = \emptyset = \emptyset r$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$ y $(r \cup s)t = rt \cup st$
9. $r^* = r^{**} = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^* = r^*(r \cup \varepsilon) = (r \cup \varepsilon)r^* = \varepsilon \cup rr^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^* = (r^* s)^* r^* = r^*(sr^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$

$$r(sr)^* = (rs)^* r$$

$$\downarrow$$

$$r\left((sr)^0 \cup (sr)^1 \cup (sr)^2 \cup \ldots\right)$$

$$\left(r(sr)^0 \cup r(sr)^1 \cup r(sr)^2 \ldots\right)$$

$$\left(r \cup (rs)r \cup r(sr)(sr) \ldots\right)$$

$$\left(r \cup (rs)r \cup (rs)(rs)r\right.$$

$$\left(\epsilon r \cup (rs)^1 r \cup (rs)^2 r \ldots\right.$$

$$(sr)^* r$$

Ejemplos expresiones regulares

Ejemplo 1. Muestre que si $r = s^* t$ implica que $r = sr \cup t$

$$
\begin{aligned}
r = s^* t \quad &= \quad (\varepsilon \cup s^+)t \text{ ya que } s^* = \varepsilon \cup s^+ \\
&= \quad (\varepsilon \cup ss^*)t \\
&= \quad \varepsilon t \cup s \underbrace{s^* t}_{r} \\
&= \quad t \cup sr \\
&= \quad sr \cup t
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2. Probar que $(b \cup aa^* b) \cup (b \cup aa^* b)(a \cup ba^* b)^* (a \cup ba^* b)$ y $a^* b(a \cup ba^* b)^*$ son equivalentes.

$$r = s^* t \longrightarrow r = sr \cup t$$

$$r = (\epsilon \cup s^+) t$$

$$r = (\epsilon \cup s \cdot s^*) t$$

$$r = t\epsilon \cup s \cdot s^* t$$

$$r = t \cup s \cdot r$$

$$\boxed{r = sr \cup t}$$

Ejemplo 3. ¿Las siguientes expresiones regulares representan el mismo lenguaje?

$$(a^*b)^* \quad \text{y} \quad \epsilon \cup (a \cup b)^* b$$

Ejemplo 4. Demostrar que $r(sr)^* = (rs)^* r$

$\Rightarrow$) Sea $w \in r(sr)^*$, entonces

$w = r_0(s_1 r_1)(s_2 r_2) \ldots (s_n r_n)$, para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} w &= r_0(s_1 r_1)(s_2 r_2) \ldots (s_n r_n) \\ w &= (r_0 s_1)(r_1 s_2)(r_2 s_3) \ldots (r_{n-1} s_n) r_n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r(sr)^* \subseteq (rs)^* r$

$\Leftarrow$)

Sea $w \in (rs)^* r$, entonces

$w = (r_0 s_0)(r_1 s_1) \ldots (r_{n-1} s_{n-1}) r_n$, para $n \geq 0$

$$(a^*b)^* \rightarrow \epsilon \cup (a \cup b)^* b$$

$$(((\epsilon \cup a^+) b)^*$$

$$(b \cup a^+ b)^*$$

$$(b \cup a a^* b)^*$$

$$(b \cup a a^* b)^*$$

$$\epsilon \cup (b \cup a a^* b)^+$$

$$\epsilon \cup (b \cup a a^* b)^+$$

$$\epsilon \cup (b (\epsilon \cup a a^*))^+$$

$$\epsilon \cup (b a^*)^+$$

$$(b a^*)^*$$

$$\epsilon \cup b (a \cup b)^*$$

$$\boxed{\epsilon \cup (a \cup b)^* b}$$

Encontrar las expresiones regulares de los siguientes lenguajes

Ejemplo 5. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que comienzan con b y terminan con a.

$$b(a \cup b)^* a$$

Ejemplo 6. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen exactamente dos a's

$$b^* ab^* ab^*$$

Ejemplo 7. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de símbolos (palabras de longitud par)

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Ejemplo 8. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen un número impar de símbolos (palabras de longitud impar)

$$a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Ejemplo 9. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de a's.

$$b^*(ab^*a)^*b^*$$

Ejemplo 10. Sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ lenguaje de todas las cadenas que tienen exactamente dos ceros:

$$1^*01^*01^*$$

Ejemplo 11. Sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ lenguaje de todas las cadenas cuyo penúltimo símbolo, de izquierda a derecha, es un 0.

$$(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)$$

Expresiones regulares en la computación

- Las expresiones regulares sirven para la construcción de analizadores léxicos.
- `http://regexpal.com/` es un testeador de expresiones regulares en java.

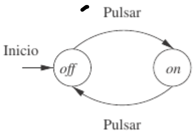
```
'[A-Z][a-z]*[ ][A-Z][A-Z]'
```

Representa palabras que comienzan por una letra mayúscula seguida de un espacio en blanco y de dos letras mayúsculas. Ejemplo, reconocería `Ithaca NY`. Por ejemplo, `Palo Alto CA` no la reconocería.

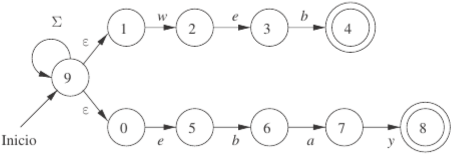
Contenido

Universidad del Valle

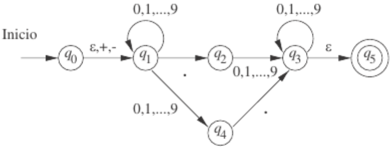
Introducción a los autómatas finitos



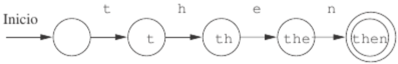
A.F de un interruptor



Uso de transiciones-ε para ayudar a reconocer palabras clave.

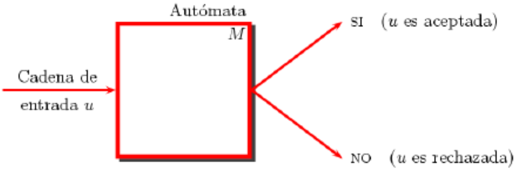


Un AFN-ε que acepta números decimales.

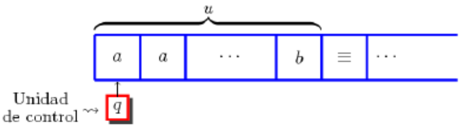


Reconocimiento de la palabra then

Son máquinas abstractas que procesan cadenas, las cuales son aceptadas o rechazadas.



El autómata posee **unidad de control** que inicialmente escanea o lee la casilla desde el extremo izquierdo de la cinta. Tiene unos estados o configuraciones internas.



Universidad del Valle

Sea un autómata $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$

Q conjunto de estados

Σ Alfabeto

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1

$$\delta(q_0, a) = q_0 \qquad \delta(q_0, b) = q_1$$
$$\delta(q_1, a) = q_1 \qquad \delta(q_1, b) = q_2$$
$$\delta(q_2, a) = q_1 \qquad \delta(q_2, b) = q_1.$$

$F = \{q_0, q_2\}$ estados de aceptación.

q_0 Estado inicial

T Conjunto estados finales

$T \subseteq Q$

1. $u = aabab$.

En

u:

a	a	b	a	b	$\equiv$	$\cdots$
q_0	q_0	q_0	q_1	q_1	q_2	

u es aceptada.

2. $v = aababa$.

v:

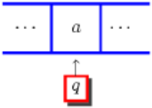
a	a	b	a	b	a	$\equiv$	$\cdots$
q_0	q_0	q_0	q_1	q_1	q_2	q_1	

v es rechazada.

Universidad del Valle

Lenguaje aceptado por un autómata

Caso especial: la cadena λ es la cadena de entrada.



Dado un autómata M, el **lenguaje aceptado o reconocido** por M se denota $L(M)$ y se define por

$$\boxed{L(M) := \{u \in \Sigma^* : M \text{ termina el procesamiento de la cadena de entrada } u \text{ en un estado } q \in F\}.}$$

Autómatas finitos (FSAs: Finite State-Automata)

Los autómatas finitos se dividen en autómatas finitos deterministas (AFD) (es función) y en autómatas finitos no deterministas (AFN)(es una relación).

Autómata finito determinista

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$ un AFD entonces:

- Σ: es el alfabeto de entrada.
- Q: es el conjunto de estados
- q_0:Estado inicial
- T: Conjunto de estados finales.
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ determina un único estado siguiente para el par $\delta(q_i, \gamma)$ correspondiente al estado actual y la entrada.

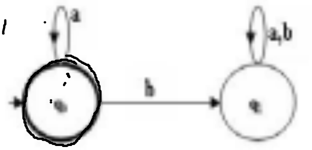
Un AFD puede ser representado por un grafo dirigido y etiquetado.

Universidad del Valle

Ejemplos autómatas finitos deterministas

Ejemplo 1. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $L = a^* = \{\varepsilon, a, a^2, a^3, \ldots\}$

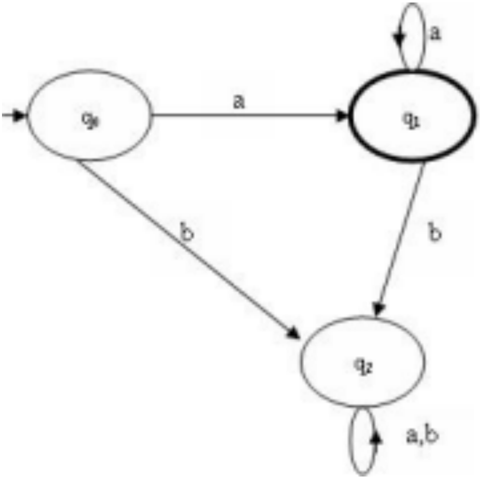
δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_1



$\delta(q_0, a) = q_0 \quad \delta(q_0, b) = q_1$

$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_1$

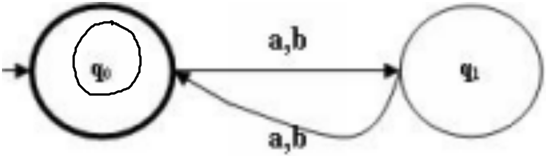
Ejemplo 2. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $L = a^+ = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$



Universidad del Valle

Ejemplos autómatas finitos deterministas

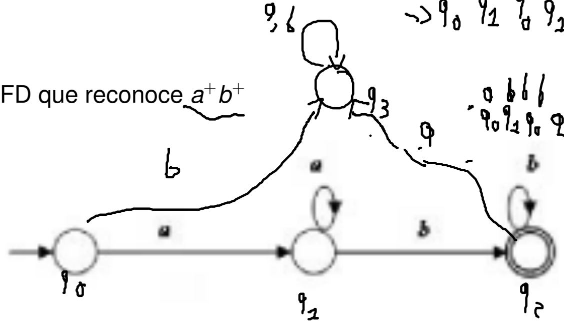
Ejemplo 3. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que tienen un número par de símbolos



a b a b b

→ q_0 q_1 q_0 q_1 q_0 q_1

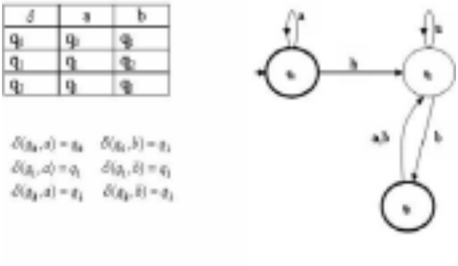
Ejemplo 4. AFD que reconoce a^+b^+



a b b b

q_0 q_1 q_0 q_1 q_0

Ejemplo 5. El diagrama y tabla de transición en cierta forma determinan si es un autómata finito determinista o no determinista.
Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
q_0 : estado inicial
$T = \{q_0, q_2\}$ estados finales o de aceptación.



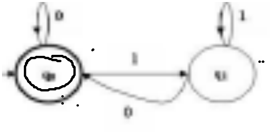
δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1

Es importante anotar que en la tabla de transición por cada pareja (q_i, γ) hay un sólo estado q_j por eso δ es una función de transición.
el lenguaje que reconoce este AFD es:

$$a^*(b(a + ba + bb)^*b) + a^*$$

Ahora como el estado inicial es un estado final este AFD reconoce ε

Ejemplo 6. Diseñar el AF sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que reconozca en binario el lenguaje de todos los múltiplos de 2.



1010
q_0 q_1 q_0 q_1 q_0

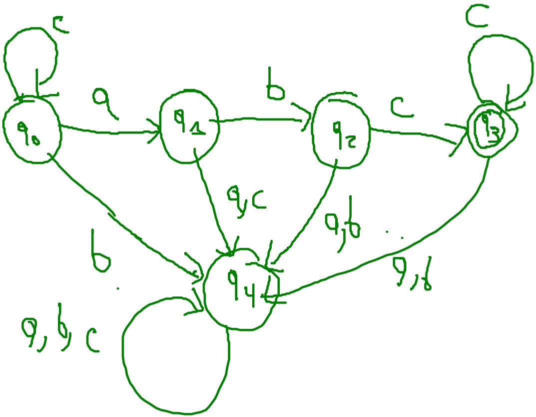
1011
q_0 q_1 q_0 q_1 q_1

Binario	Decimal
0	0
10	2
100	4
110	6
1000	8
1010	10
1100	12
1110	14
⋮	⋮

Diseñar un automata para reconocer la cadena sobre el alfabeto (a,b,c)

(c*)ab(c+)

a bc

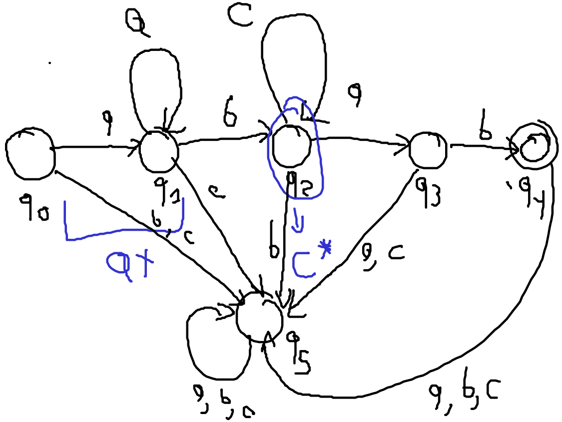


1) Mirar cadena más pequeña reconocida
2) Tratar las cerraduras
3) Mirar los casos de NO aceptación

$(a)^+ b(c)^* ab$

$\Sigma = a, b, c$

abab

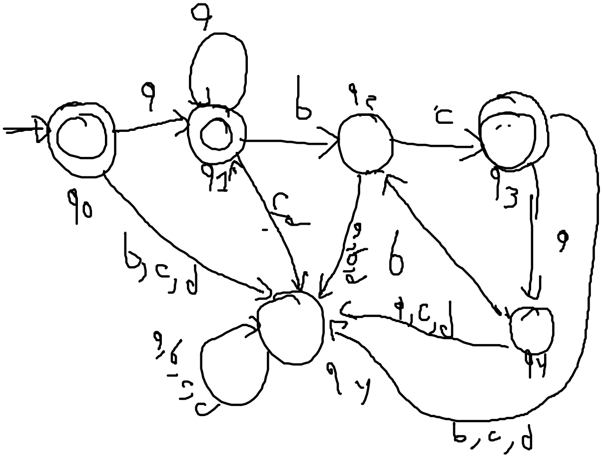


$\Sigma = \{a, b, c, d\}$ AFD

$L = a^* \cup (abc)^*$

$\downarrow$

ϵ



$\Sigma = \{a, b\}$

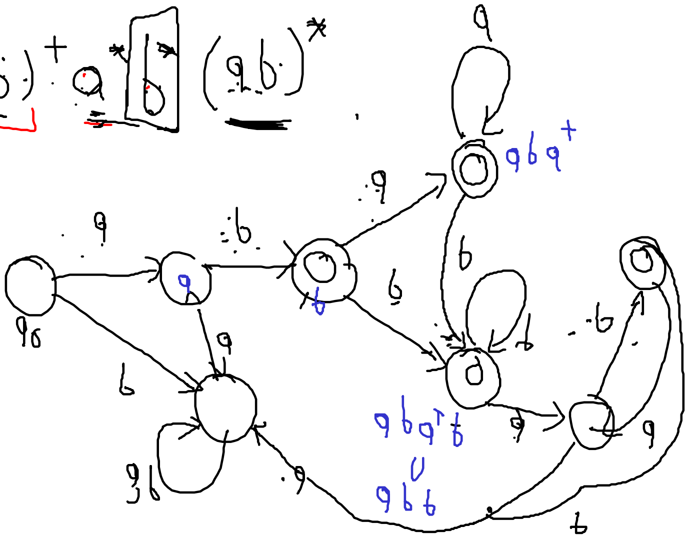
$(ab)^+ a^* \boxed{b} (ab)^*$

ab

aba

abab

abbb

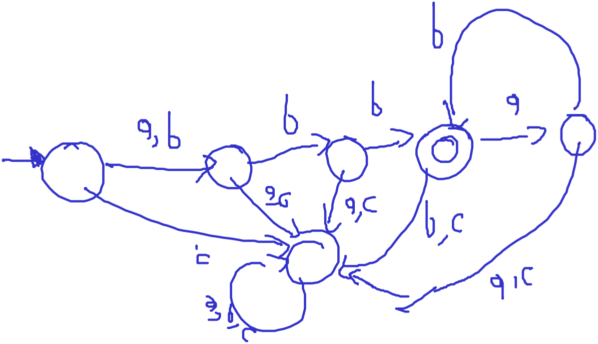


$\Sigma = \{a, b, c\}$

$(a \cup b)\, bb\, (ab)^*$

abb

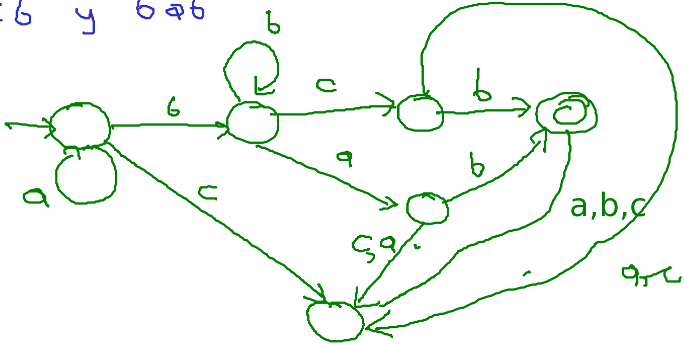
bbb



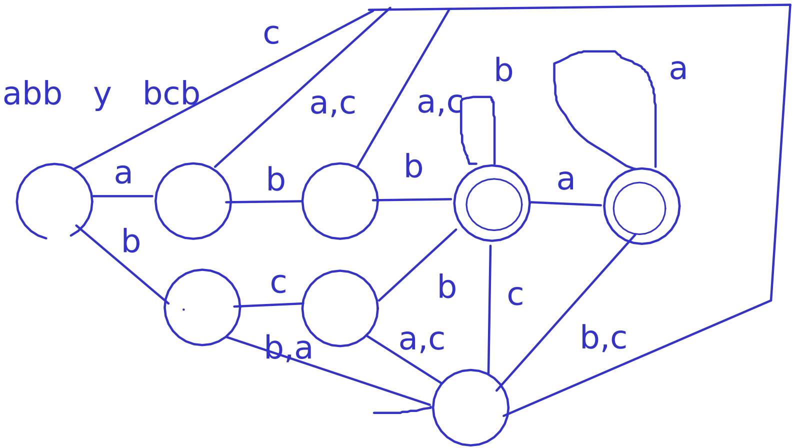
$a^* b^+ (c \cup a) b$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

bcb y bab



(ab U bc)b+a*



Autómatas finitos No determinísticos

Autómatas finitos No determinísticos

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ un AFN entonces:

- Σ: es el alfabeto de entrada.
- Q: es el conjunto de estados
- q_0:Estado inicial
- T: Conjunto de estados finales.
- $\triangle$: es una relación tal que:

$$(Q \times \Sigma) \rightarrow 2^Q$$

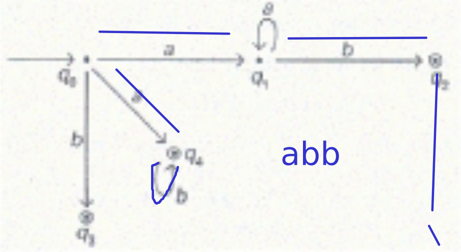
Donde 2^Q denota el conjunto potencia de Q o el conjunto de todos los subconjuntos de Q.

$$2^Q = \{A | A \subseteq Q\}$$

Universidad del Valle

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 1. Diseñar el AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje regular $a^* b \cup ab^*$

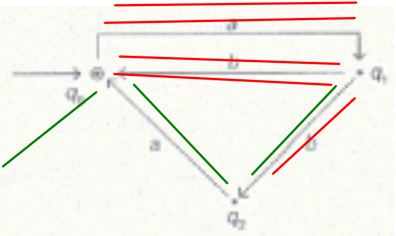


Δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{q_4\}$

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 2. Diseñar el AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $(ab \cup aba)^*$

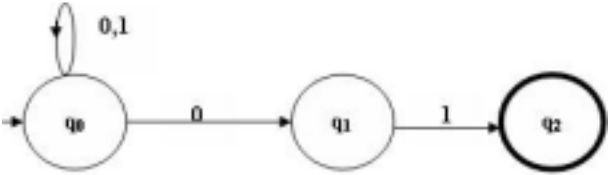
Δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\emptyset$



abab ... abaab

Universidad del Valle

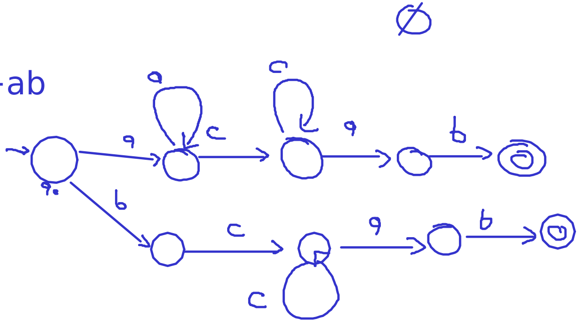
Ejemplo 3. Diseñar el AF sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que terminan en 01



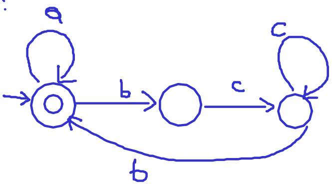
Δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

AFND

(a+ U b)c+ab



$(a \cup bc^+b)^*$

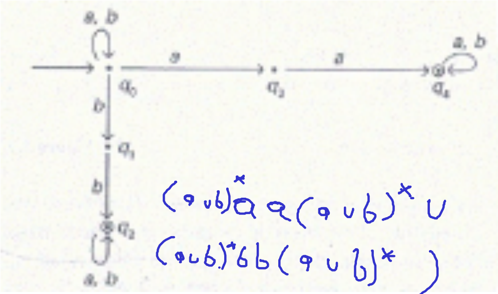


abcb

$(a \cup b)^* = \{\epsilon, a, b, ab, ba, \ldots\ldots\}$

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 4. Obtener la expresión regular del siguiente AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$.



$(a \cup b)^* a a (a \cup b)^* \cup$

$(a \cup b)^* b b (a \cup b)^*$

Δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

$(a \cup b)^*(aa \cup bb)(a \cup b)^*$

Universidad del Valle

Teorema

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ un AFN. Entonces existe un AFD $M' = (Q', \Sigma', q_0', T', \delta)$ tal que $L(M) = L(M')$.

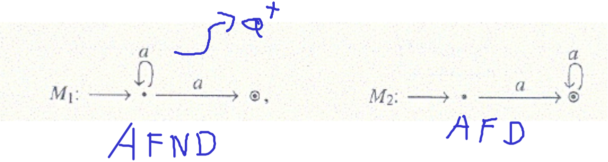
- *El conjunto q_0 se corresponde con q_0'*
- *El conjunto de estados finales T' de Q' se corresponde con los conjuntos de estados de Q que contienen un estado de T*
- *El conjunto de estados de Q' se corresponde con el conjunto de estados de Q que se vaya formando mediante el análisis de una cadena sobre M*

Equivalencia entre autómatas

Autómatas equivalentes

Dos AFD son equivalentes M_1 y M_2 son equivalentes si $L(M_1) = L(M_2)$.

Sean M_1 y M_2 sobre el alfabeto $\sum = \{a\}$,

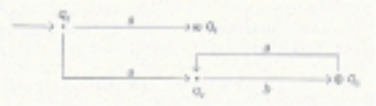


$L(M_1) = L(M_2) = a^+$

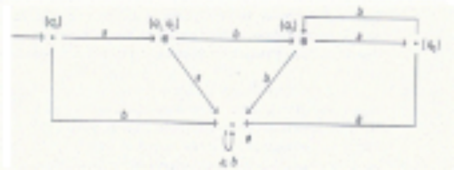
Ejemplos equivalencia de AFN y AFD

Ejemplo 1. Consideremos el AFN M que acepta $a \cup (ab)^+$

AFND



AFD



Para este AFN se tiene:

$$\triangle(q_0, a) = \{q_1, q_2\} \qquad \triangle(q_0, b) = \emptyset$$

$$\triangle(\{q_1, q_2\}, a) = \emptyset \qquad \triangle(\{q_1, q_2\}, b) = \{q_3\}$$

$$\triangle(\emptyset, b) = \triangle(\emptyset, b) = \emptyset \qquad \triangle(q_3, a) = \{q_2\}$$

$$\triangle(q_3, b) = \emptyset \qquad \triangle(q_2, a) = \emptyset$$

$$\triangle(q_2, b) = \{q_3\}$$

Entonces se verifica que la regla de transición es una función. Por tanto, $M' = (Q', \Sigma', q_0', T', \delta)$ donde:

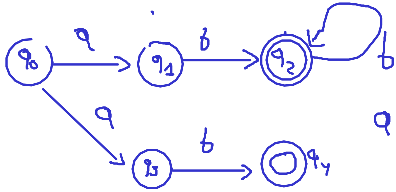
$$\begin{aligned} Q' &= \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}\} \\ \Sigma' &= \Sigma \\ s' &= \{q_0\} \\ T' &= \{\{q_3\}, \{q_1, q_2\}\} \end{aligned}$$

y δ viene dada por la siguiente tabla:

δ	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$

Universidad del Valle

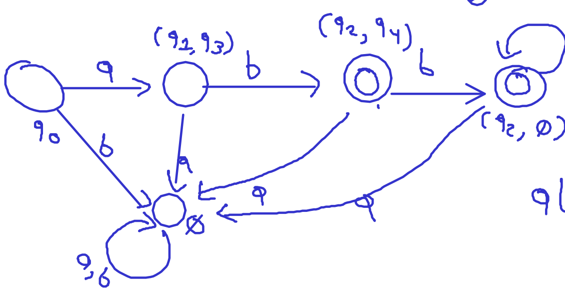
AFND



$a b^+ \cup ab$

Q	a	b
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	q_2
q_3	$\emptyset$	q_4
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Q	a	b
q_0	(q_1, q_3)	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	q_2
(q_1, q_3)	$\emptyset$	(q_2, q_4)
(q_2, q_4)	$\emptyset$	$(q_2, \emptyset)$
$(q_2, \emptyset)$	$\emptyset$	$(q_2, \emptyset)$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



$a b^+ \cup ab$

De acuerdo a las siguientes tablas de transición de estados, dibuje el AFN equivalente y haga la conversión a AFD, indique la expresión del lenguaje reconocido

q	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$

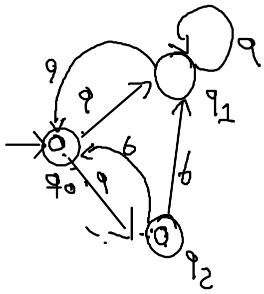
$T = \{q_0, q_2\}$

q	a	b
q_0	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$

$T = \{q_1, q_3\}$

q	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0, q_1\}$

$T = \{q_0, q_2\}$



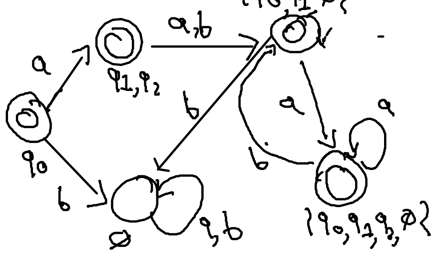
$\epsilon \cup aa^+ \cup a \cup (ab)^+ \cup (aba)^+ \cup (aba^+)^+$

$a^+ = \{a^1 \cup a^2 \cup a^3 \cup \ldots\}$

$aa^+ \cup a \cup (ab)^* \cup (aba)^* \cup (aba^+)^*$

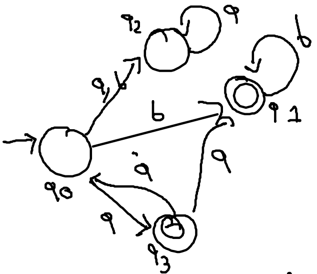
$aa^+ \cup a \cup (ab)^* \cup (aba^+)^*$

q	a	b
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, \emptyset\}$	$\{q_0, q_1, \emptyset\}$
$\{q_0, q_1, \emptyset\}$	$\{q_0, q_1, q_2, \emptyset\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1, q_2, \emptyset\}$	$\{q_0, q_1, q_2, \emptyset\}$	$\{q_0, q_1, \emptyset\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



q	a	b
q_0	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_0, q_1\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$T = \{q_1, q_3\}$



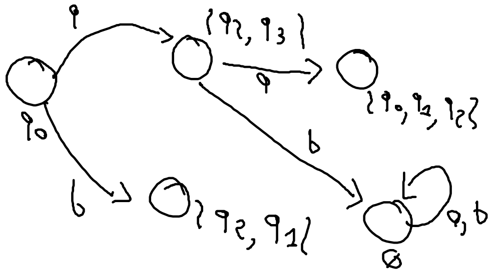
$b^+ \cup a \cup aab^* \cup (aa)^+ \cup (aa)^+ b^*$

$a^+ = \{a^1 \cup a^2 \cup a^3 \ldots\}$

$b^+ \cup a \cup aab^* \cup (aa)^+ \cup (aa)^+ b^*$

$b^+ \cup a \cup (aa)^+ b^*$

q	a	b
q_0	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_1\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_2, q_1\}$	$\{q_2, \emptyset\}$	$\{q_1, \emptyset\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3, \emptyset\}$	$\{q_1, q_2, \emptyset\}$
$\{q_2, \emptyset\}$	$\{q_2, \emptyset\}$	$\emptyset$
$\{q_1, \emptyset\}$	$\emptyset$	$\{q_1, \emptyset\}$
$\{q_2, q_3, \emptyset\}$	$\{q_0, q_1, q_2, \emptyset\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2, \emptyset\}$	$\{q_2, \emptyset\}$	$\{q_1, \emptyset\}$
$\{q_0, q_1, q_2, \emptyset\}$	$\{q_2, q_3, \emptyset\}$	$\{q_1, q_2, \emptyset\}$

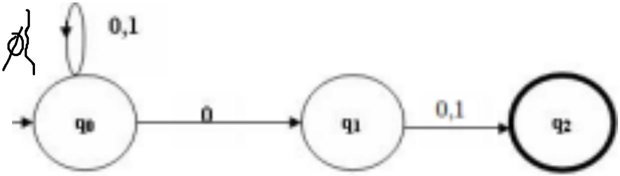


Completar

- **Ejemplo 2.** Consideremos el AFN M que acepta $(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)$

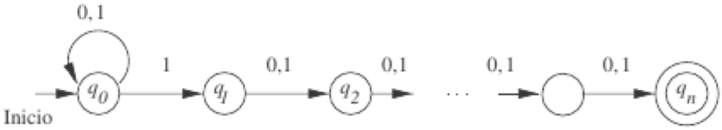
$\{q_0, q_1, q_2, \emptyset\}$

2^4



2^n

- **Caso desfavorable para la construcción de subconjuntos**



Este AFN no tiene un AFD equivalente con menos de 2^n estados.

Crecimiento exponencial del número de estados para el AFD.

Intersección entre lenguajes regulares

Teorema

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo es $L_1 \cap L_2$.

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$ donde: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, q_1, T_1, \delta_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, q_2, T_2, \delta_2)$ Entonces construimos:

$$M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, (q_1, q_2), T_1 \times T_2, \delta)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta : Q_1 \times Q_2 \times \Sigma &\rightarrow Q_1 \times Q_2 \\ \delta((q_i, q_j), a) &= (\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a)) \end{aligned}$$

Esta función satisface:

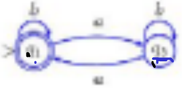
$$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$$

Universidad del Valle

Ejemplo intersección de lenguajes

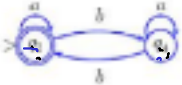
Ejemplo. Construir el AFD que acepte el lenguaje L de todas las palabras sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen un número par de a's y un número par de b's.

par a L1



$(b^* a b^* a)^*$

par b L2



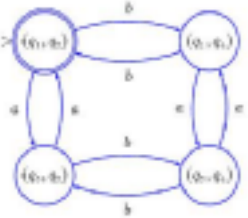
$(a^* b a^* b)^*$

Entonces el lenguaje $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ tiene cuatro estados:
$Q_1 \times Q_2 = \{(q_1, q_2), (q_1, q_4), (q_3, q_2), (q_3, q_2)\}$
$T_1 \times T_2 = \{(q_1, q_2)\}$

Ejemplo intersección de lenguajes

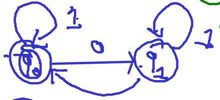
Entonces δ se define como:

$$
\begin{aligned}
\delta((q_1,q_2),a) &= (\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_2,a)) = (q_3,q_2)\\
\delta((q_1,q_2),b) &= (\delta_1(q_1,b),\delta_2(q_2,b)) = (q_1,q_4)\\
\delta((q_1,q_4),a) &= (\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_4,a)) = (q_3,q_4)\\
\delta((q_1,q_4),b) &= (\delta_1(q_1,b),\delta_2(q_4,b)) = (q_1,q_2)\\
\delta((q_3,q_2),a) &= (\delta_1(q_3,a),\delta_2(q_2,a)) = (q_1,q_2)\\
\delta((q_3,q_2),b) &= (\delta_1(q_3,b),\delta_2(q_2,b)) = (q_3,q_4)\\
\delta((q_3,q_4),a) &= (\delta_1(q_3,a),\delta_2(q_4,a)) = (q_1,q_4)\\
\delta((q_3,q_4),b) &= (\delta_1(q_3,b),\delta_2(q_4,b)) = (q_3,q_2)
\end{aligned}
$$

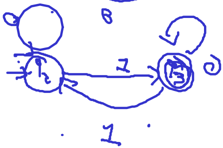


Automata que acepta cadenas binarias
con un númro par de 0 e impar de 1
y

L_1

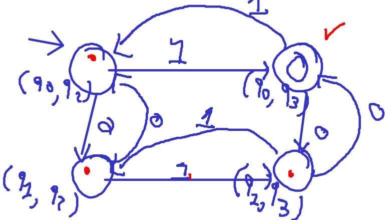


L_2



$$Q_{L_1} \times Q_{L_2} = \{(q_0, q_2), (q_0, q_3), (q_1, q_2)(q_1, q_3)\}$$

$$T = \{(q_0, q_3)\}$$



Autómatas con ε-transiciones

`Autómatas con ε-transiciones`: Un autómata con ε-transiciones es un AFN $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ en el que la relación de transición está definida así:

$\triangle : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \longrightarrow 2^Q$

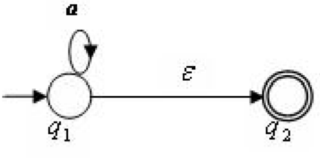
La ε-transición permite al autómata cambiar internamente de estado sin consumir el símbolo leído sobre la cinta.

Donde 2^Q denota el conjunto potencia de Q o el conjunto de todos los subconjuntos de Q.

$$2^Q = \{A | A \subseteq Q\}$$

Universidad del Valle

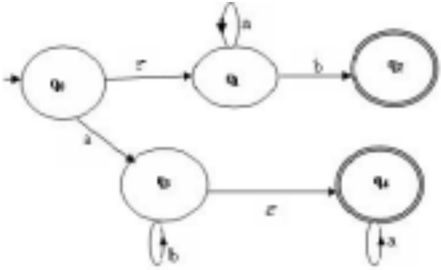
Ejemplo 1. Se puede representar el lenguaje de la expresión regular a^* sin necesidad de colocar el estado inicial como estado final.



$\triangle$	a	b	ϵ
q_1	q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Ejemplos

Ejemplo 2. Sea el siguiente AFN-ε



a*b U ab*a*

La ε-transición en el AFN permite que se reconozcan cadenas como:

w=aaab

w=abbbbaaa

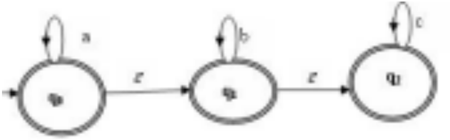
w=a

w=b

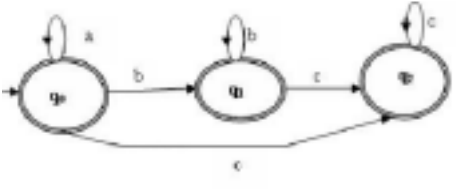
Expresión regular del autómata

$a^* b \cup ab^* a^*$

Ejemplo 3. Construir un AFN-ε que reconozca sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$, el lenguaje $L = a^*b^*c^*$



El siguiente AFN reconoce el mismo lenguaje que reconoce el AFN-ε anterior.



Teorema de Kleene

Teorema

`Teorema de Kleene`. *Un lenguaje regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-ε)*

- Construcción de autómatas finitos a partir de expresiones regulares.
- Construcción de expresiones regulares a partir de autómatas:
  1. Lema de Arden (Ecuaciones de Lenguaje)
  2. Conversión de AFN a expresiones regulares por eliminación de estados.

Autómatas finitos y lenguajes regulares

Teorema

Dado un AFN-ε $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$, se puede construir un AFN M' equivalente a M, es decir $L(M) = L(M')$.

Teorema

Un lenguaje regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-ε)

Teorema

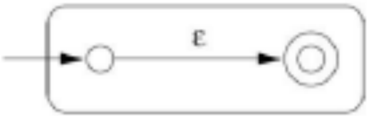
Para toda expresión regular R se puede construir un AFN-ϵ M tal que $L(R) = L(M)$.

Paso Básico

- EL autómata

acepta el lenguaje vacío $\emptyset$

- EL autómata



acepta el lenguaje $\{\epsilon\}$

- EL autómata

acepta el lenguaje $\{a\}$

PASO INDUCTIVO

1. Existe un autómata que acepta $R \cup S$

Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, T_2, \triangle_2)$ para el nuevo $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ tenemos que:

1. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
2. En T se agrega un estado s' si y sólo si

$$\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s_2)\} \cup \{(T_1, \epsilon, s'), (T_2, \epsilon, s')\}$$

   s' es un estado final NUEVO.

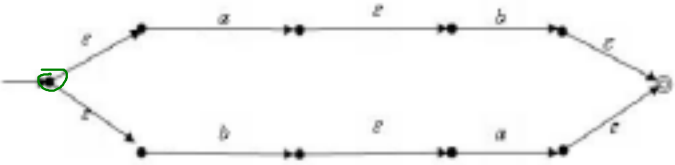
3. $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\} \cup \{s'\}$ donde s es el nuevo estado inicial.

L1 L2

Por ejemplo se construye $ab \cup ba$.

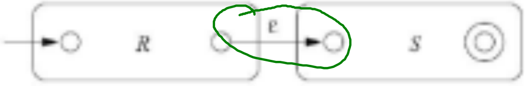
L1

L2



Ejemplo. Sobre $\Sigma = \{a, b\}$ el lenguaje de todas las palabras sobre Σ que tienen un n

2. Autómata que acepta $R \cdot S$



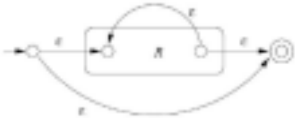
Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, T_2, \triangle_2)$ para el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ que acepta $L(M_1) \cdot L(M_2)$ tenemos que:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $s_1 = s$
3. $T = T_2$

$$\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s2)$$

3. Autómata que reconoce R^*

$R^* = \{ \underset{\epsilon}{R^0} \cup R^1 \cup R^2 \ldots \}$



Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ entonces el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ que acepta $L(M) = (L(M_1))^*$ viene dado por

1. $Q = Q_1 \cup \{s\} \cup \{s'\}$, donde s' es un nuevo estado final.
2. $T = \{s'\}$
3. $\triangle = \triangle_1 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s')\} \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s') \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s_1)$

Ecuaciones de lenguaje

Ecuacion del lenguaje

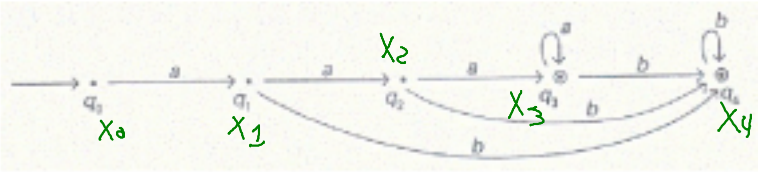
Sea Σ un alfabeto y sean E y A subconjuntos de Σ^*, entonces la ecuación del lenguaje $X = E \cup A \cdot X$ admite la solición $X = A^* \cdot E$ cualquier otra solución Y deberá contener $A \cdot X$, además $\epsilon \notin A$, $X = A^* \cdot E$ es la única solución.

$$X = E \cup AX$$
$$X = E \cup A(E \cup AX)$$
$$X = E \cup AE \cup A^2X$$
$$X = E \cup AE \cup A^2E \cup A^3X$$
$$X = E \cup AE \cup A^2E \cup A^3E \cdots A^nE$$

$$\boxed{X = A^*E}$$

Universidad del Valle

Ejemplo 1. Encontrar la expresión del siguiente ~~AFD~~. AFN



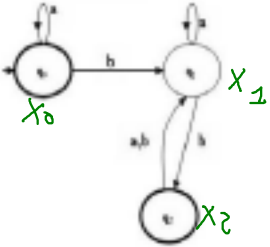
Entones el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax_1 \\
x_1 &= ax_2 + bx_4 \\
x_2 &= ax_3 + bx_4 \\
x_3 &= ax_3 + bx_4 + \epsilon \\
x_4 &= bx_4 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2. Encontrar la expresión regular del siguiente AFD usando el lema del Arden:

$X_0 = aX_0 + bX_1 + \epsilon$
$X_1 = aX_1 + bX_2$
$X_2 = (a \cup b)X_1 + \epsilon.$

Sistema



El siguiente es el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax_0 + bx_1 + \epsilon \\
x_1 &= ax_1 + bx_2 \\
x_2 &= (a \cup b)x_1 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Universidad del Valle

Ajustar X0

Teorema

Sean $n \geq 2$ considere el sistema de ecuaciones cuyas incognitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dado por:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= E_1 \cup A_{11}x_1 \cup A_{12}x_2 \cup \ldots \cup A_{1,n}x_n \\
x_2 &= E_2 \cup A_{21}x_1 \cup A_{22}x_2 \cup \ldots \cup A_{2,n}x_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= E_{n-1} \cup A_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup A_{(n-1),n}x_n \\
x_n &= E_n \cup A_{n1}x_1 \cup A_{n2}x_2 \cup \ldots \cup A_{n,n}x_n
\end{aligned}
$$

$X_0 = aX_0 + bX_1 + \epsilon$

Entonces el sistema tiene una única solución:

$X_1 = aX_1 + bX_2$

- *En $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \epsilon \notin A_i$*

$X_2 = (a \cup b)X_1 + \epsilon$

Ecuaciones de lenguaje

- Entonces el nuevo sistema se obtiene hasta $n-1$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11}x_1 \cup \widehat{A}_{12}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{1,(n-1)}x_{n-1} \\
x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21}x_1 \cup \widehat{A}_{22}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{2,(n-1)}x_{n-1} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \widehat{E}_{n-1} \cup \widehat{A}_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{(n-1),(n-1)}x_{n-1}
\end{aligned}$$

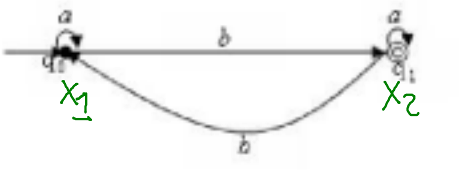
Entonces $\widehat{E}_i$ y $\widehat{A}_{ij}$ se definen como:

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_i &= E_i \cup (A_{in}A_{nn}^{*}E_n), \quad i = 1, \ldots, n-1 \\
\widehat{A}_{ij} &= A_{ij} \cup (A_{in}A_{nn}^{*}A_{nj}), \quad \forall_{i,j} = 1, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

Donde:

$$E_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad q_i \notin F \\ \epsilon & \text{si} \quad q_i \in F \end{cases}$$

Ejemplo 1. Obtener la expresión regular del siguiente AFD usando ecuaciones del lenguaje y la solución única.



El sistema de ecuaciones inicial es:

$$x_1 = ax_1 + bx_2$$
$$x_2 = bx_1 + ax_2 + \epsilon$$

$X_2 = \underset{\downarrow \atop b}{A_{21}} X_1 + \underset{\downarrow \atop \phi}{A_{22}} X_2 + \underset{\downarrow \atop \epsilon}{E_2}$

$X_1 = \underset{\downarrow \atop \phi}{A_{11}} X_1 + \underset{b}{A_{12}} X_2 + \underset{\emptyset}{E_1}$

$$\hat{E}_1 = E_1 \cup (A_{12} A_{22}^* E_2)$$

$$\hat{E}_1 = \emptyset \cup (b\varphi^* \epsilon) \longrightarrow b\varphi^*$$

$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} \cup (\underset{A_{12}}{A_{in}} A_{nn}^* \underset{A_{21}}{A_{nj}}) \quad i,j \quad 1 \ldots n-1$$

$$\hat{A}_{11} = \varphi \cup (b\varphi^* b)$$

$$X_1 = b\varphi^* \cup \varphi \cup (b\varphi^* b) X_1$$

$$X_1 = E \cup r X \rightarrow X_1 = r^* E$$

$$X_1 = (\varphi \cup (b\varphi^* b))^* (b\varphi^*)$$

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Se aplica el teorema de solución de ecuaciones:

$$x_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{A}_{11} x_1$$

Se obtiene $\widehat{E}_1$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_1 &= E_1 + (A_{12} A_{22}^* E_2) \\
\widehat{E}_1 &= \emptyset + (b \cdot a^* \cdot \epsilon) \\
\widehat{E}_1 &= ba^*
\end{aligned}$$

Se obtiene $\widehat{A}_{11}$

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{11} &= A_{11} + (A_{12} A_{22}^* A_{21}) \\
\widehat{A}_{11} &= a + (b \cdot a^* \cdot b) \\
\widehat{A}_{11} &= a + ba^* b
\end{aligned}$$

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Reemplazando $\widehat{E}_1$ y $\widehat{A}_{11}$ en x_1

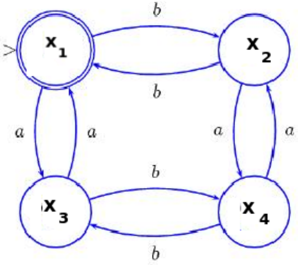
$$x_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{A}_{11} x_1$$
$$x_1 = ba^* + (a + ba^* b) x_1$$

Aplicando solución única se tiene:

$$x_1 = (a + ba^* b)^* ba^*$$

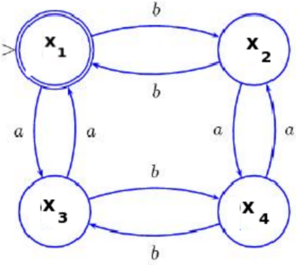
Universidad del Valle

Sistema de ecuaciones por reducción de variables



$$\begin{aligned} x_1 &= ax_3 + bx_2 + \varepsilon \\ x_2 &= ax_4 + bx_1 \\ x_3 &= ax_1 + bx_4 \\ x_4 &= ax_2 + bx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11} x_1 \cup \widehat{A}_{12} x_2 \cup \widehat{A}_{13} x_3 \\ x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21} x_1 \cup \widehat{A}_{22} x_2 \cup \widehat{A}_{23} x_3 \\ x_3 &= \widehat{E}_3 \cup \widehat{A}_{31} x_1 \cup \widehat{A}_{32} x_2 \cup \widehat{A}_{33} x_3 \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
x_1 &= E_1 \cup A_{11}x_1 \cup A_{12}x_2 \cup \ldots \cup A_{1,n}x_n \\
x_2 &= E_2 \cup A_{21}x_1 \cup A_{22}x_2 \cup \ldots \cup A_{2,n}x_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= E_{n-1} \cup A_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup A_{(n-1),n}x_n \\
x_n &= E_n \cup A_{n1}x_1 \cup A_{n2}x_2 \cup \ldots \cup A_{n,n}x_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11}x_1 \cup \widehat{A}_{12}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{1,(n-1)}x_{n-1} \\
x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21}x_1 \cup \widehat{A}_{22}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{2,(n-1)}x_{n-1} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \widehat{E}_{n-1} \cup \widehat{A}_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{(n-1),(n-1)}x_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{E}_i &= E_i \cup (A_{in}A_{nn}^{*}E_n), \quad i = 1, \ldots, n-1 \\
\widehat{A}_{ij} &= A_{ij} \cup (A_{in}A_{nn}^{*}A_{nj}), \quad \forall i,j = 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

$$
E_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad q_i \notin F \\ \epsilon & \text{si} \quad q_i \in F \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= bX_2 + aX_3 + \epsilon \\
X_2 &= bX_1 + aX_4 \\
X_3 &= aX_1 + bX_4 \\
X_4 &= aX_2 + bX_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \emptyset X_1 + bX_2 + aX_3 + \emptyset X_4 + \epsilon \\
X_2 &= bX_1 + \emptyset X_2 + \emptyset X_3 + aX_4 + \emptyset \\
X_3 &= aX_1 + \emptyset X_2 + \emptyset X_3 + bX_4 + \emptyset \\
X_4 &= \emptyset X_1 + aX_2 + bX_3 + \emptyset X_4 + \emptyset
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{E}_1 &= \epsilon \cup \emptyset \\
\widehat{E}_2 &= \emptyset \cup \emptyset \rightarrow \emptyset
\end{aligned}
$$

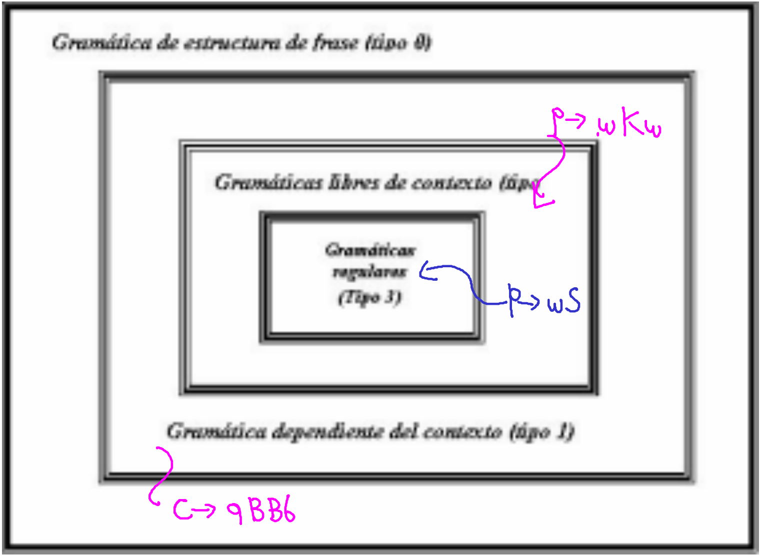
Completarla

Contenido

Universidad del Valle

LENGUAJES Y GRAMATICAS

Según Chomsky los tipos de gramáticas se clasifican así:



Universidad del Valle

Gramáticas Regulares (Tipo 3)

Una gramática regular G es una 4-tupla $G = (N, \Sigma, S, P)$ que consiste de un conjunto N de no terminales, un alfabeto Σ, un símbolo inicial S y de un conjunto de producciones P. Las reglas son de la forma $A \to w$, donde $A \in N$ y w es una cadena sobre $\Sigma \cup N$ que satisface lo siguiente:

1. w contiene un no terminal como máximo.
2. Si w contiene un no terminal, entonces es el símbolo que está en el extremo derecho de w.
3. El conjunto de reglas P se define así:

$$P \subseteq N \times \Sigma^*(N \cup \epsilon) \quad o \quad P \subseteq N \times (N \cup \epsilon)\Sigma^*$$

Definición de gramática regular por la derecha

Gramáticas regulares

Sobre

$$G = (N, \Sigma, S, P) \longrightarrow$$ Producción inicial

Una gramática es regular por la derecha si sus producciones son de la forma:

$$\left(\left\{ \begin{array}{ll} A \longrightarrow wB, & w \in \sum^*, B \in N \\ \cancel{A} \, B \longrightarrow \varepsilon & \end{array} \right\}\right)$$

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera a^*, donde $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A\}$

$P : S \to aA \mid \varepsilon$ $\quad \varepsilon \mid a \mid aa \longrightarrow a^*$

$A \to aS \mid \varepsilon$

Ejemplo. Sea la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$ que genera el lenguaje de la expresión regular $(a \cup b)^*$

$\Sigma = \{a, b\}$

$N = \{S, A\}$ $\quad \varepsilon \mid a \mid b \mid ababb$

$P : S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon$

ababb

Universidad del Valle

Gramáticas regulares

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera $(a \cup b)^+$, donde Σ={a,b}, N={S,A }

$P : S \rightarrow aS \mid bS \mid a \mid b$

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera $a^+ b^+$, donde Σ={a,b}, N={S,A }

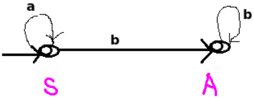
$P : S \rightarrow aS \mid aA$

$A \rightarrow bA \mid b$ B $B \rightarrow \epsilon$

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera $a^* b^*$, donde Σ={a,b}, N={S,A }

$P : S \rightarrow aS \mid bA \mid \varepsilon$

$A \rightarrow bA \mid \varepsilon$



Gramática regular para las cadenas binarias que inician en 1 y terminan en 0

$$S \rightarrow 1A$$
$$A \rightarrow 0B \mid 1A \mid 0A$$
$$B \rightarrow \epsilon$$

Cadenas binarias que inician en 10, contienen 010 y terminan en 11, de cualquier longitud

$101011 \cup 10.(0 \cup 1)^{*}.010(0 \cup 1)^{*}.11$

S A B C D E

101011

1001011

S A F B C D E

$S \rightarrow 1A$

$1 \leftarrow A \rightarrow 0B \mid 0F$

$10 \mid 100 \leftarrow B \rightarrow 1C \mid 0G \mid 1G$

$101 \mid 1001 \leftarrow C \rightarrow 0D \mid 0H \mid 1H$

$1010 \mid 10010 \leftarrow D \rightarrow 1E$

$E \rightarrow 1$

$10 \leftarrow F \rightarrow 0B$

$G \rightarrow 1G \mid 0G \mid 0B$

$H \rightarrow 1H \mid 0H \mid 1E$

Gramáticas independientes del contexto

Gramáticas tipo 2

Una gramática independiente del contexto $G = (N, \Sigma, S, P)$ consiste de un conjunto N de no terminales, un alfabeto Σ, un símbolo inicial S y de un conjunto de producciones P.

Definición

Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática independiente del contexto. El lenguaje generado por G (o el lenguaje de G) denotado por $L(G)$, es el conjunto de todas las cadenas de terminales que se derivan del estado inicial S. en otras palabras:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* / S \Rightarrow^* w\}$$

$$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$$

Universidad del Valle

Ejemplo de gramática tipo 2

Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática con $\Sigma = \{0, 1\}$ el conjunto $N = \{S\}$ y P el conjunto de producciones:

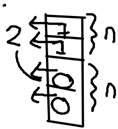
0011

$L = \{ 0^n 1^n \} \; n \geq 1$

$$S \longrightarrow 0S1$$
$$S \longrightarrow \varepsilon$$

$0S1$

$01 \mid 00S11$



Ejemplo. Una GIC que genera el lenguaje de los palíndromes sobre $\Sigma = \{a, b\}$

$$S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

Centro

aab a baa

Ejemplo. Una GIC que genera el siguiente lenguaje sobre $\Sigma = \{a, b\}$ Sea

$$L = \{a^n b^m | n \leq m \leq 2n\}$$

$$S \longrightarrow aSb \mid aSbb \mid \varepsilon$$

Cadenas binarias con número igual de ceros y unos

Universidad del Valle

$a^n b^{2n}$ $n \geq 0$

Automata de pila

Simbolo a la vez

GIC

$S \rightarrow aAb \mid \epsilon$

$A \rightarrow Sb$

$aAb \rightarrow aSbb \rightarrow aaAbbb \rightarrow aaSbbbb \rightarrow aabbbb$

GIC

$\underbrace{a^n}\ \underbrace{b^{3n}}$ $n \geq 1$

$a^n b^n c^{2n} \neq$ GIC

$S \rightarrow aAb \mid \epsilon$

$A \rightarrow Bb$

$B \rightarrow Sb$

aAb

$aBbb$

$aSbbb$

GICs especiales

1. El lenguaje de todas las cadenas de paréntesis anidados y equilibrados, por ejemplo:
   (())(()), entonces la gramática sería:

   $$S \longrightarrow (S)S \mid \varepsilon$$

2. Sea $T = \{0, 1, (,), +, *, \emptyset, \varepsilon\}$. T es el conjunto de símbolos usados para definir el lenguaje de las expresiones regulares sobre $\Sigma = \{0, 1\}$. Se puede diseñar un GIC que genere las expresiones regulares.

   $$S \longrightarrow S + S \mid SS \mid S^* \mid (S) \mid 0 \mid 1 \mid \emptyset \mid \varepsilon$$

Gramática dependiente del contexto (GDC)

Sea una 4-tupla $G = (N, \Sigma, S, P)$ que consiste de un conjunto N de no terminales, un alfabeto Σ, un símbolo inicial S y de un conjunto de producciones P.

- N es el alfabeto de símbolos no terminales
- Σ al alfabeto tal que $N \cap \Sigma = \emptyset$
- $S \in N$ es el símbolo inicial
- P es el conjunto de reglas de producciones de la forma $\alpha \to \beta$, donde $\alpha \in (N \cup \Sigma)^+$ y $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$, es decir

$$P \subset (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$$

Gramáticas no restringidas (Gramáticas de tipo 0 y 1)

Ejemplo Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática con $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ el conjunto $N = \{S, A, B\}$ y P el conjunto de producciones:

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow 0SAB \mid \varepsilon \\
BA &\longrightarrow AB \\
0A &\longrightarrow 01 \\
1A &\longrightarrow 11 \\
1B &\longrightarrow 12 \\
2B &\longrightarrow 22
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow 0SAB \\
&00SABAB \\
&00ABAB \\
&00AABB \\
&001ABB \\
&0011BB \\
&00112B \\
&001122
\end{aligned}
$$

El lenguaje que genera esta gramática dependiente del contexto es:

$$L(G) = \{0^n 1^n 2^n / n = 0, 1, 2, ...\}$$

Sea w=001122 una cadena que puede ser reconocida por la gramática y que además pertenece al lenguaje.

$a^n b^n c^{2n}$ $n \geq 0$ GDC

$S \to aSAB \mid \epsilon$

$a^n b^n c^n$

$\boxed{BA \to AB.}$ $\underbrace{A}_{b}\underbrace{B}_{cc}$

$aA \to ab$

$bA \to bb$

$bB \to bcc$

$cB \to ccc$

$S \to aSAB$

$S \to aAB$

$S \to abB$

$S \to abcc$

$S \to aSAB$

$S \to aaSABAB$

$S \to aaaSABABAB$

$S \to aaaABABAB$

$S \to aaaAABABB \to aaaAAABBB$

$aaabAABBB$

$aaabbABBB$

$aaabb\boxed{bB}BB$

$aaabbbc\boxed{cB}B$

$aaabbbccc\boxed{cB}$

$aaabbbcccccc$

Tipos de gramáticas

Tipos de gramáticas		
Tipo	Transiciones	Restricciones en la producciones $w_1 \to w_2$
0		Sin restricciones
1		$l(w_1) \leq l(w_2)$, o $w_2 = \varepsilon$
2	$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$	$w_1 = A$, siendo A un símbolo no terminal
3	$P \subseteq N \times \Sigma^*(N \cup \varepsilon)$ o $P \subseteq N \times (N \cup \varepsilon)\Sigma^*$	$w_1 = A$ y $w_2 = aB$ o $w_1 = a$ siendo $A, B \in N$ y $a \in T$ o $S \to \varepsilon$

pP → . .
sP → sPP. . s
P → sRs
P → sR

- la familia de los lenguajes de tipo i contiene a la familia de tipo $i + 1$.
- $GR \subseteq GIC \subseteq GDC \subseteq GEF$

Gramática	Lenguaje	Máquina
Tipo 0: Gramática sin restricciones	Recursivamente enumerables / sin restricciones	Máquina de Turing (MT)
Tipo 1: Gramática sensible del contexto	Dependiente del contexto	Autómata Linealmente Acotado (ALA
Tipo 2: Gramática de contexto libre	Independiente del contexto	Autómata de Pila (AP
Tipo 3: Gramática Regular	Regular	Autómata finito (AF)

Universidad del Valle

Arboles de derivación

Ambigüedad

Una gramática se dice que es `ambigua` si hay dos o más árboles de derivación distintos para la misma cadena. una gramática en la cual, para toda cadena *w*, todas las derivaciones de *w* tienen el mismo árbol de derivación, es no `ambigua`.

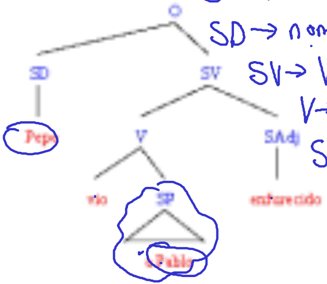
O → SD SV

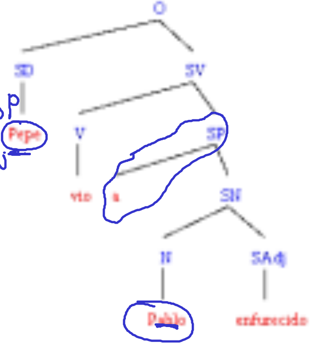
SD → nombre

SV → V Sadj

V → Verb SP

SAdj → adj





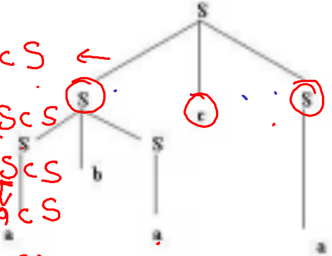
Ejemplo 2. Consideremos la siguiente gramática:

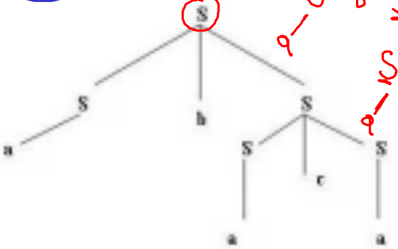
$S \longrightarrow SbS \mid ScS \mid a$ → tipo 1 GDC

y se la cadena $w = abaca$ y sus derivaciones:

- $S \Rightarrow SbS \Rightarrow SbScS \Rightarrow SbSca \Rightarrow abaca$

ScS
SbScS
abScS
abacS
abaca





S
S b S
a
S c S
a a

- $S \Rightarrow ScS \Rightarrow SbScS \Rightarrow abScS \Rightarrow abacS \Rightarrow abaca$

Ambigua

Forma de Backus-Naur

La forma de Backus-Naur se emplea para especificar reglas sintácticas de muchos lenguajes de programación y de lenguaje natural: En lugar de utilizar el símbolo $\longrightarrow$ usamos ::= y colocamos los símbolos no terminales entre $<>$.

La forma BNF se usa frecuentemente para especificar la sintaxis de lenguajes de programación, como Java y LISP; lenguajes de bases de datos, como SQL, y lenguajes de marcado como XML.

C ⟶ V "class" N

<clase> ::= <visibilidad> "class" <nombre>

<visibilidad> := "public" | "private" | "protected"

<nombre> ::= <letra>$^+$

<letra> := a | b | c | d ... | z | A | B ... | Z

Universidad del Valle

Ejemplo 1. sea la siguiente GIC:

$O \longrightarrow SN \quad SV$

$SN \longrightarrow articulo \quad sustantivo$

$SV \longrightarrow verbo \quad sustantivo$

$articulo \longrightarrow el$

$verbo \longrightarrow come$

$sustantivo \longrightarrow perro \mid salchicha$

La forma Backus-Naur es:

$< O >::=< SN >< SV >$

$< SN >::=< articulo >< sustantivo >$

$< SV >::=< verbo >< sustantivo >$

$< articulo >::= el$

$< verbo >::= come$

$< sustantivo >::= perro \mid salchicha$

O := <SN><SV>

O := el salchicha come perro

La forma de Backus-Naur

Ejemplo 2. Sea la siguiente gramática:
$A \longrightarrow Aa \mid a \mid AB$
La forma Backus-Naur es:
$< A >::=< A > a \mid a \mid< A >< B >$
Ejemplo 3. La producción de enteros son signo en notación decimal. (Un **entero con signo** es un natural precedido por un signo más o un signo menos). La forma Backus-Naur para la gramática que produce los enteros con signo es:
$<\texttt{ entero con signo }>::=<\texttt{signo}><\texttt{entero}>$
$<\texttt{signo }>::= + \mid -$
$<\texttt{ entero }>::=<\texttt{ dígito}>\mid<\texttt{ dígito }><\texttt{ entero}>$
$<\texttt{ dígito }> ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

Contenido

Universidad del Valle

Introducción

- Su nombre se debe a Alan Mathinson Turing. Quien introdujo el concepto en 1936
- Es un autómata que se puede representar como un dispositivo mecánico
- Se tiene una cinta infinita divida en celdas
- Contiene un cabezal de escritura/lectura que se mueve sobre la cinta, avanzando una celda cada vez

Introducción

El movimiento de la máquina de Turing depende del símbolo explorado como la cabeza y el estado actual de la máquina, el resultado puede ser:

- Cambio de estado
- Imprime un símbolo en la cinta, reemplazando el símbolo leido
- Se mueve la cabeza de la cinta a la izquierda o derecha o se para

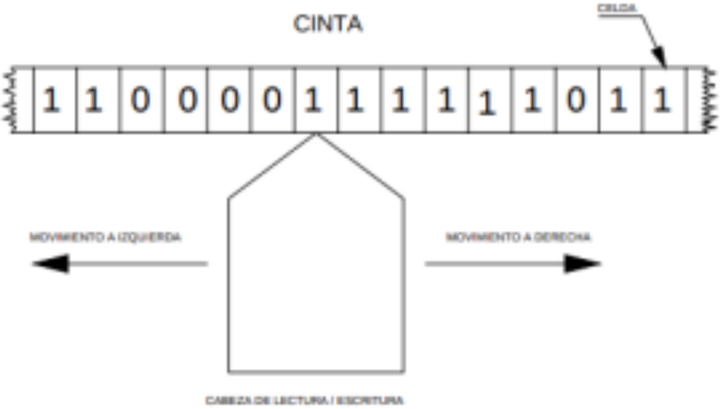
Definición

Formalmente, una máquina de Turing es un autómata, el cual esta formando por una quintupla de la forma $MT = (E, S, Q, f, g)$, sin embargo suele utilizarse la siguiente denotación:

$$MT = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_o, B, F)$$

- Q es un conjunto de estados
- Γ conjunto de símbolos permitidos en la cinta
- $B \in \Gamma$ símbolo blanco
- $\Sigma \in \Gamma$ conjunto de símbolos de entrada
- δ Función de movimiento (Derecha (D), izquierda (I), Parar (S))
- $q_o \in Q$ Estado inicial
- $F \subset Q$ Conjunto estados finales

Máquinas de Turing



Universidad del Valle

Definición

El lenguaje aceptado por una máquina de Turing, lo denotaremos como L(MT). Inicialmente una MT está situada a la izquierda de la cadena a reconocer y su estado inicial es q_0. La MT es capaz de reconocer a un lenguaje L si para una palabra dada, la máquina termina en un estado de aceptación.

Ejemplo

Diseñar una máquina de Turing que reconozca el Lenguaje $L = \{0^n1^n, n \geq 1\}$. La cinta contendrá 0^n1^n con ambos lados rodeados de blancos. El algoritmo de reconocimiento será asi:

- La cabeza se mueve al 0 más a la izquierda
- Este es reemplazado por X
- La cabeza se mueva el 1 más a la izquierda
- Es es reemplazado por Y
- Después se mueva la izquierda hasta encontrar el X y se mueve uno a la derecha, repitiendo el ciclo

Universidad del Valle

0 0 0 0 .... 1 1 1 1 .....

X 0 0 0 ..... Y 1 1 1 ...

X X 0 0 ... Y Y

X X X X Y Y X Y 1

Y

X $\rightarrow$ Y

Ejemplo

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Gamma = (0, 1, X, Y, B)$
- $\Sigma = (0, 1)$
- $F = \{q_4\}$ Conjunto estados finales

Máquinas de Turing

Ejemplo

La función δ es de la siguiente forma:

0

0 1

1

δ	0	1	X	Y	B
q_0	q_1,X,D	-	-	q_3,Y,D	-
q_1	q_1,0,D	q_2,Y,I	-	q_1,Y,D	-
q_2	q_2,0,I	-	q_0,X,D	q_2,Y,I	-
q_3	-	-	-	q_3,Y,D	q_4,B,D
q_4	S	S	S	S	S

Los guiones (-) significan estados imposibles. La máquina primero escribe, luego cambia de estado y por último se mueve.

Máquinas de Turing

Ejemplo

$q_0\,0011 \rightarrow Xq_1 011 \rightarrow X0q_1 11 \rightarrow Xq_2 0Y1 \rightarrow q_2\, X0Y1 \rightarrow Xq_0 0Y1 \rightarrow XXq_1 Y1$
$\rightarrow XXYq_1 1 \rightarrow XXq_2 YY \rightarrow Xq_2 XYY \rightarrow XXq_0 YY \rightarrow XXYq_3\, Y \rightarrow XXYYq_3 \rightarrow$
$XXYYBq_4 \rightarrow S$

Universidad del Valle

Máquinas de Turing

$\{1, 2, \ldots n\} \to S_i \quad \sum S_i = k$

Computabilidad

La máquinas de Turing proveen un marco teórico para definir los problemas computacionales. Los problemas estudiandos a través de la máquina de Turing son los problemas de decisión, los cuales tiene como respuesta **si** o **no**.

Decibilidad

Si un problema se puede solucionar con una máquina de Turing es solucionable o decidible. En caso contrario, es no solucionable o no decidible.

Decibilidad

El problema de la parada, se considera un problmea no decidible o no solucionable, este consiste en:

- La entrada es una máquina de Turing MT' codificada en la cinta de entrada
- Así mismo, se tiene en la cinta una entrada X para esa máquina de Turing
- El objetivo es diseñar un algoritmo en la (MT) de tal forma se pueda determinar que para la entrada X la máquina MT' encuentre la solución en tiempo finito

Clases de problemas

Tenemos dos clases de problemas de decisión AFD

- Clase P, el cual se puede solucionar en tiempo **polinomial** en una MT determinista. Son conocidos como problemas tratables.
- Clase NP, el cual se puede solución en tiempo **polinomial** en una MT no determinista. Son conocidos como problemas no-tratables.

AFN

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 13. Modeling Computation.

Universidad del Valle