Universidad del Valle

Algoritmos MonteCarlo

750098M Simulación computacional

Contenido

Introducción

"Inocente hasta que se demuestre lo contrario"

- Comprobar si una hipótesis es verdadera o falsa
- Se comprueban instancias, retornando verdadero si no existe una contradicción y falso si la hipótesis es falsa
- Análisis basado en probabilidad. Tiene razón con probabilidad p y no la tiene con probabilidad 1 - p
- Se reduce probabilidad de error si se aumenta número de iteraciones

Son dos vectores iguales?

```
Algoritmo MonteCarlo:
Seleccionar aleatoriamente un componente i
Si vector1(i) = vector2(i) devolver: Son iguales
    Sino Devolver: Son diferentes
```

- Si el algoritmo devuelve SON IGUALES, puede ser que este sea cierto o que coinciden por casualidad en este componente

- Si el algoritmo devuelve SON DIFERENTES, este resultado es acertado: vector1(i) != vector2(i), los vectores son diferentes con certeza

Son dos vectores iguales?

Repetir el algoritmo puede aumentar la confiabilidad en que la respuesta sea correcta

- p es igual a la probabilidad de que la respuesta sea correcta

  $q = 1 - p$ es igual a la probabilidad de error en **1** ensayo

- $q^n = (1 - p)^n$ es la probabilidad de equivocación después de n iteraciones (aumento de probabilidad estocástica)

- Aumentamos considerablemente la probabilidad de que la respuesta SON IGUALES sea correcta, pero no llegamos a tener certeza

10000

$1 \rightarrow \frac{1}{10000} \rightarrow 0{,}01\%$

$$1 - \frac{1}{10000} = 0{,}999$$

$$\left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{10} = 0{,}999000459$$

$$100 \rightarrow \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{100} = 0{,}99004$$

$$1000 \quad \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{1000} = 0{,}90$$

Definición

- Un algoritmo MonteCarlo es p-correcto, si la respuesta es verdadera con probabilidad p, independiente de la estancia de entrada
- A veces se permite que p depende del tamaño del input, pero nunca dependerá de sus datos específicos

Verificación de la multiplicación de matrices

Dadas las matrices (nxn) A,B y C, se quiere verificar C = AB

Algoritmos determinísticos	Algoritmo MonteCarlo
La multiplicación matricial tradicional requiere n^3 operaciones, es decir el algoritmo es de $O(n^3)$ Los mejores algoritmos determinísticos de multiplicación de matrices son de $O(n^{2.37})$	La multiplicación puede llegar a ser $O(n^2)$ Implicar asumir riesgo de que no sea verdad Sin embargo, se puede controlar el error

Algoritmo de Freivalds

Principio del algoritmo

Se suman arbitrariamente algunas filas de la matriz AB y las mismas filas de la matriz C y se comparan los resultados.
Si las sumas son iguales, el algoritmo devuelve: SON IGUALES; sino, devuelve NO SON IGUALES

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 96 & 68 & 69 & 69 \\ 24 & 56 & 18 & 52 \\ 58 & 95 & 71 & 92 \\ 90 & 107 & 81 & 141 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 96 & 68 & 69 & 69 \\ 24 & 56 & 18 & 52 \\ 58 & 95 & 71 & 92 \\ 90 & 107 & 81 & 142 \end{bmatrix}$$

15 4 163

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$X = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$

XAB $\qquad$ $X\underbrace{(AB)}$ $O(n^3)$

$(XA)B$

$XA = [8 \ 10 \ 7 \ 5]$

$XAB = [154 \ 103 \ \cdots]$

Ejemplo

$$AB = \begin{matrix} 96 & 68 & 69 & 69 \\ 24 & 56 & 18 & 52 \\ 58 & 95 & 71 & 92 \\ 90 & 107 & 81 & 141 \end{matrix} \qquad C = \begin{matrix} 96 & 68 & 69 & 69 \\ 24 & 56 & 18 & 52 \\ 58 & 95 & 71 & 92 \\ 90 & 107 & 81 & 142 \end{matrix}$$

Suma de las filas 1 y 2:
Para AB: [110, 124, 87, 121];
para C : [110, 124, 87, 121].
~~Respuesta: SON IGUALES~~

Suma de las filas 1,3 y 4:
Para AB: [244, 270, 221, 302];
para C : [244, 270, 221, 301].
Respuesta: NO SON IGUALES

Ejemplo

$$AB = \begin{bmatrix} 96 & 68 & 69 & 69 \\ 24 & 56 & 18 & 52 \\ 58 & 95 & 71 & 92 \\ 90 & 107 & 81 & 141 \end{bmatrix}$$

Suma de las filas 1 y 2:
X:[1,1,0,0]
X(AB)[110, 124, 87, 121].

Suma de las filas 1,3 y 4:
X:[1,0,1,1]
X(AB): [244, 270, 221, 301].

Algoritmo de Freivalds

La multiplicación requiere menos operaciones si en vez de X(AB) se evalúa (XA)B

Para X(AB)	Para (XA)B
La multiplicación de 2 matrices (n x n): $O(n^3)$ La multiplicación de 1 vector (1 x n) con una matriz (n x n): $O(n^2)$ X(AB) es de $O(n^3)$	2 multiplicaciones de 1 vector (1 x n) con una matriz (n x n): $O(n^2)$ (XA) B es de $O(n^2)$

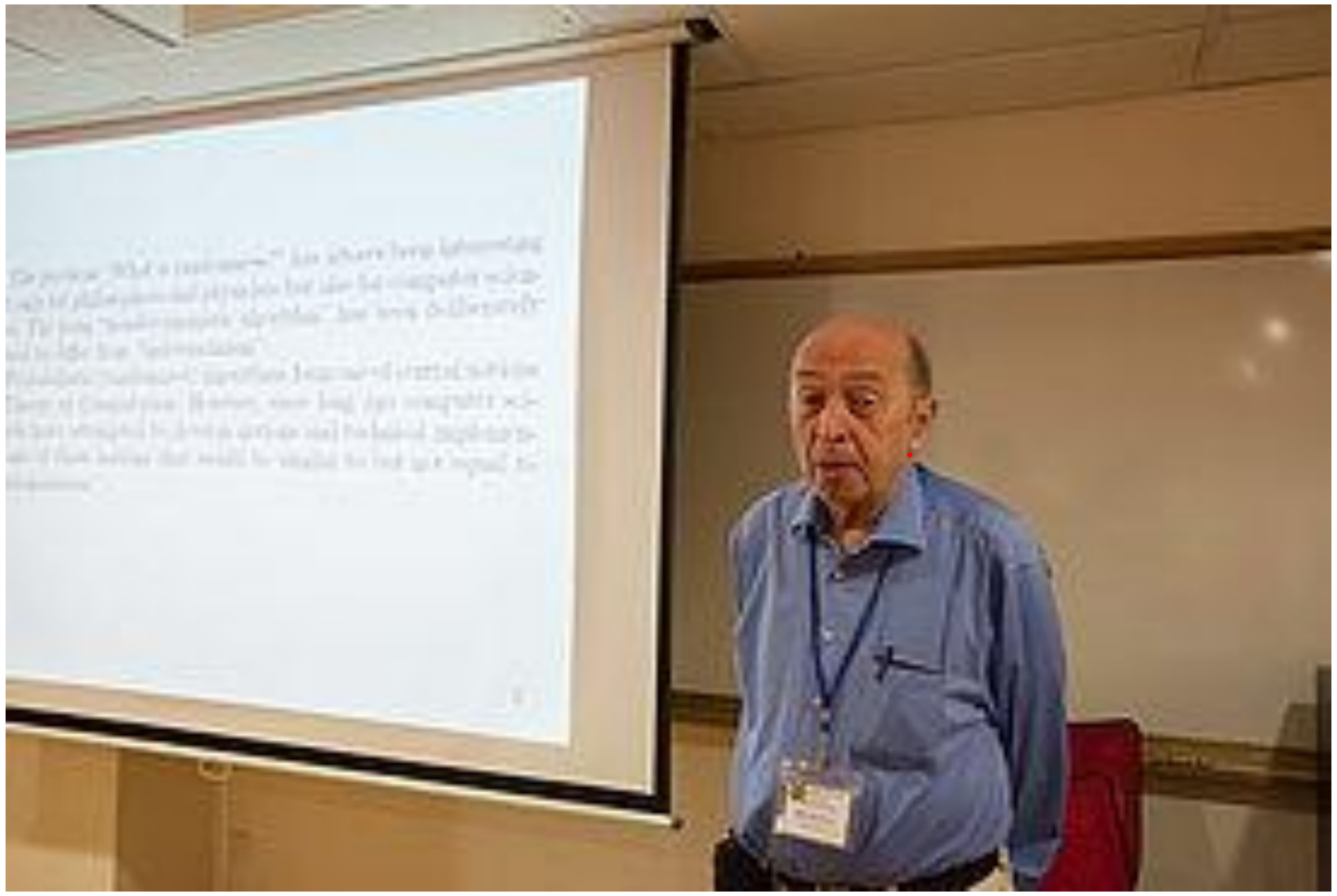
Algoritmo de Freivalds

Algoritmo Freivalds(A,B,C,n):

Generar vector binario X en (1,n)

Si (XA)B = XC devolver VERDADERO

Sino Devolver: Son diferentes



Rūsiņš Mārtiņš Freivalds

(10 November 1942 – 4 January 2016)

Isaac Asmov --> Robot

Julio Verne --> Ciencia ficción

Algoritmo de Freivalds

Se ha seleccionado aleatoriamente X binario y se encontró XAB = XC

Analicemos las instancias AB /= C

En este caso existe una fila i tal que A_i /= C_i

Se define el vector X' como

$$X'_j = \begin{cases} X_j & \text{si } j \neq i \\ 1 - X_j & \text{si } j = i \end{cases}$$

Para X' tenemos

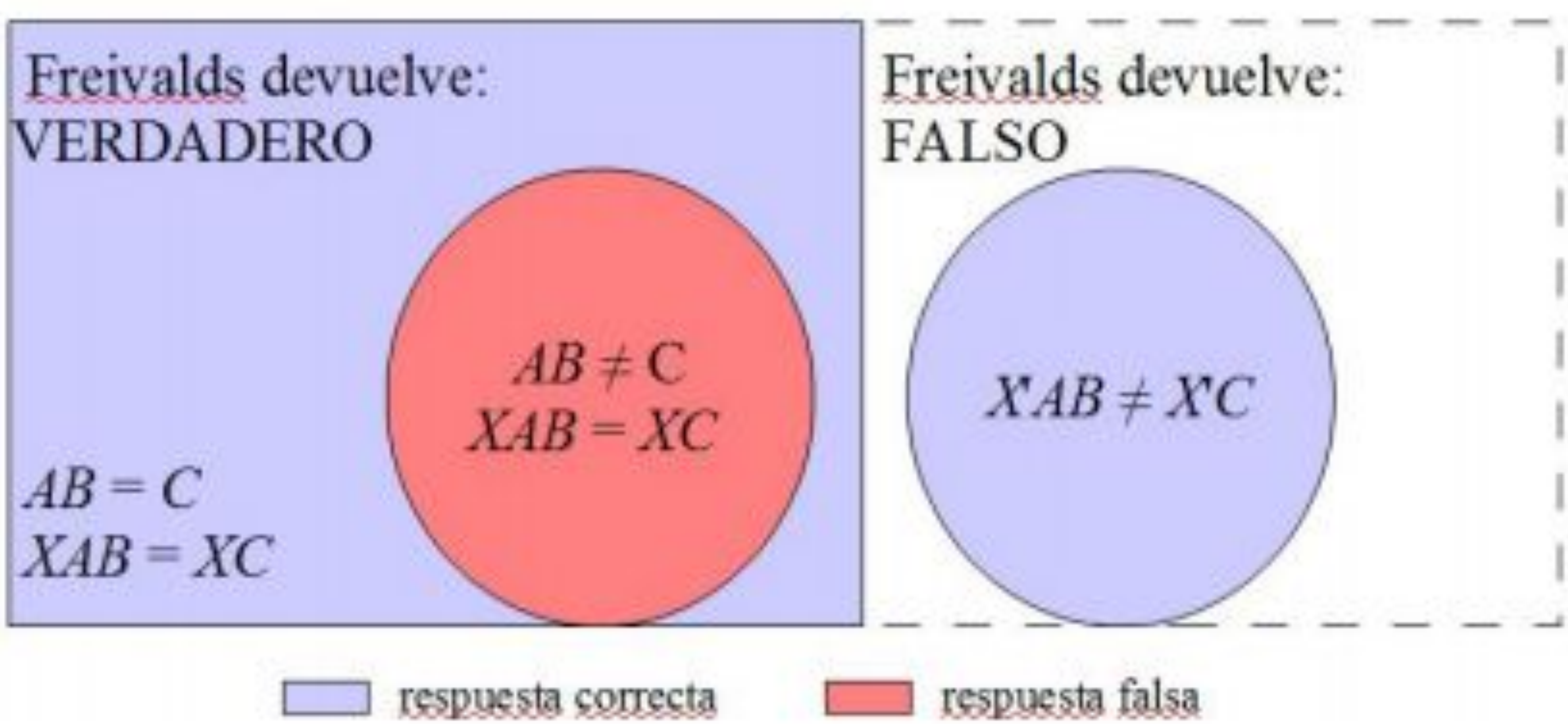
X'AB = XAB +- AB_i /= XAB = XC

Es decir Freivalds daría FALSO

Algoritmo de Freivalds

Es decir, Freivalds devuelve VERDADERO en la mitad de los casos donde AB /= C, y siempre si AB = C.

Entonces Freivalds es ½ - correcto



Iteraciones

$p = 0.2$

$F = 0.8$

```
Algoritmo RepetirFreivalds(A,B,C,n):
Repetir k veces
Si Freivalds(A,B,C,n) = FALSO
    Devolver FALSO
    Salir
Devolver VERDADERO
```

La probabilidad de error en una llamada de Freivalds es ½. Diferentes llamadas son estadísticamente independientes, por eso las probabilidades de error se multiplican. Después de k llamadas, la probabilidad de error es por ende $(1/2)^k$.
En consecuencia RepetirFreivalds es $1 - (½)^k$ - correcto, un valor que converge a 1.

Tolerancia para el error

Para garantizar que la probabilidad de error quede por debajo de una tolerancia ε dada, se puede determinar el número adecuado de iteraciones k:

El tiempo de ejecución en este caso es de

p^k

$$\epsilon \leq (1/2)^k \implies k >= \log_2 (1/\epsilon)$$

El tiempo de ejecución es:

$$O\left(n^2 \log_2 (1/\epsilon)\right)$$

Limitaciones

El algoritmo de Freivalds significa un ahorro en el número de multiplicaciones sólo si las matrices son muy grandes:
si la probabilidad p de que el resultado sea correcto debe ser 0.99 o mayor, RepetirFreivalds debe usar por o menos 7 iteraciones.
Es más rápido que la comprobación si:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 0.99$$

$$7 * 2 * n^2 <= n^3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 0.01$$

Es decir que

$$k = \frac{\log_2(0.01)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} = 6.64$$

$$k \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(0{,}01)$$

$$n >= 14$$

Primaldad

Hay un algoritmo importante de criptografía, que es muy difícil de decodificar. Este algoritmo tiene la especialidad que:

- El quien quiere recibir el mensaje manda información públicamente que sirve para codificar el mensaje.
- Conserva privado la información para de codificar.
- La persona que manda el mensaje lo codifica y lo manda públicamente.

Primaldad

El algoritmo está basado en el producto de dos números primos grandes.

- La persona que quiere recibir el mensaje necesita encontrar dos primos muy grandes

- Una persona que no tiene la información para decodificar, tendrá que probar con muchos productos de primos hasta poder romper el código.

Comprobación

Ejemplo: Desarrollar un algoritmo MonteCarlo basado en el

Teorema menor de Fermat:

Sea n un número primo. Entonces para cualquier a entero tal que $1 \leq a \leq n - 1$

Se tiene:

$$a^{n-1} \bmod n = 1$$

Ejemplo

$n = 5$	
$a = 1$	$a^{n-1} \bmod n = 1^4 \bmod 5 = 1 \bmod 5 = 1$
$a = 2$	$a^{n-1} \bmod n = 2^4 \bmod 5 = 16 \bmod 5 = 1$
$a = 3$	$a^{n-1} \bmod n = 3^4 \bmod 5 = 81 \bmod 5 = 1$
$a = 4$	$a^{n-1} \bmod n = 4^4 \bmod 5 = 256 \bmod 5 = 1$

¿Cómo se podría diseñar un algoritmo MonteCarlo basado en este Teorema?

Algoritmo MonteCarlo

Se usa la negación.

Teorema:
Sea n un entero. Si n es primo, entonces se tiene para cada $a \in [2, n-1]$

$$a^{n-1} \bmod n = 1$$

Negación:
Sea n un entero. Si existe $a \in [2, n-1]$ tal que

$$a^{n-1} \bmod n \;/\!= 1$$

entonces n no es primo

Algoritmo MonteCarlo

Algoritmo Fermant(n):

Generar aleatorio $a \in [2, n - 1]$
Evaluar a^{n-1} mod n:
Si a^{n-1} mod n /= 1 devolver “no es primo”
Sino devolver “n es primo”

Sea n el entero a comprobar

(el algoritmo verifica la proposición ”n es primo”)

Ejemplo

$n = 15$

a	a^{n-1}	a^{n-1} mod n
9	22 876 792 454 961	6
8	4 398 046 511 104	4
12	1 283 918 464 548 864	9
6	78 364 164 096	6
12	1 283 918 464 548 864	9
10	100 000 000 000 000	10
2	16 384	4
9	22 876 792 454 961	6
14	11 112 006 825 558 016	1
12	1 283 918 464 548 864	9

$n = 17$

a	a^{n-1}	a^{n-1} mod n
9	1 853 020 188 851 841	1
8	281 474 976 710 656	1
12	184 884 258 895 036 416	1
6	2 821 109 907 456	1
12	184 884 258 895 036 416	1
10	10 000 000 000 000 000	1
2	65 536	1
9	1 853 020 188 851 841	1
14	2 177 953 337 809 371 136	1
12	184 884 258 895 036 416	1

Si el algoritmo devuelve ”no es primo” tiene razón y para.

Si el algoritmo devuelve ”es primo” puede ser equivocado. Se repite.

Cuanto se detiene?

Falsos testigos

Falsos testigos para la primaldad de n son aleatorios a $\in [2, n-1]$ tal que $a^{n-1} \bmod n = 1$.
La mayoría de los no-primos tiene pocos falsos testigos.
Sin embargo: hay números no-primos con muchos falsos testigos: producen muchas veces el resultado ”1”, aunque no son primos.
Cuantitativamente: para cada p existen infinitos números tal que la probabilidad de detectar que no son primos es menor que p.

Es decir: El algoritmo Fermat no es p-correcto para ningún p. **¡No funciona la idea de MonteCarlo!**

Extensión del teorema de Fermat

Teorema: Sea n entero. Si n es primo representado en la forma $n = 2^s t + 1$, entonces para cada $a \in [2, n - 2]$ se tiene:

$$a^t \bmod n = 1 \quad \text{ó } a^{2^i t} \bmod n = n - 1 \text{ para un } i \text{ tal que } 0 \leq i < s$$

Negación:
Sea n entero impar de la forma a $a = 2^s t + 1$,.
si existe $a \in [2, n - 2]$ tal que :

$$a^t \bmod n \neq 1 \quad \text{y } a^{2^i t} \bmod n = n - 1 \text{ para cada } i \text{ tal que } 0 \leq i < s,$$

entonces n no es primo

Ejemplo

Ejemplo: *n* primo

$n=13=2^2\,3+1,$
$s=2,\ t=3$

a	$a^t \bmod n$	$a^{2t} \bmod n$
2	8	12
3	1	
4	12	
5	8	12
6	8	12
7	5	12
8	5	12
9	1	
10	12	
11	5	12

Ejemplo: *n* no primo

$n=21=2^2\,5+1,$
$s=2,\ t=5$

a	$a^t \bmod n$	$a^{2t} \bmod n$
2	11	16
3	12	18
4	16	4
5	17	16
6	6	15
7	7	7
8	8	1
9	18	9
10	19	4
11	2	4
12	3	9
13	13	1
14	14	7
15	15	15
16	4	16
17	5	4
18	9	18
19	10	16

Algoritmo MillerRabin

AlgoritmoMillerRabin(n)

- encontrar s, t tal que $n = 2^s t + 1$.
- generar aleatorio $a \in [2, n-2]$.
- si $a^t \bmod n = 1$ ó $a^{2^i t} \bmod n = n - 1$ para un i tal que $0 \le i < s$: devolver "n es primo "
  sino: devolver "n no es primo "

Si el algoritmo devuelve ”n es primo ”, puede ser equivocado
Si se devuelve ”n no es primo ” es cierto que así es.

Algoritmo MillerRabin

La extensión del teorema de Fermat es más fuerte.

Hay menos falsos testigos.

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right)^k = 0,05$$

$$k \log\left(\frac{1}{4}\right) = \log(0.05)$$

$$K = 2.16$$

$$K = 3$$

Consecuencia: Se puede mostrar que el algoritmo Miller-Rabin es ¾ - correcto.

Dado que Miller-Rabin es 3/4- correcto, la aplicación repetida aumenta la probabilidad de obtener la respuesta correcta.

Después de k iteraciones, la probabilidad de obtener la respuesta correcta es $p = 1 - (1/4)\ k$; es decir: se puede controlar el error.

Para una tolerancia del error de $\in$, se debe repetir por lo menos $k = 1/2 \log_2 1/\in$ veces.

Conclusiones

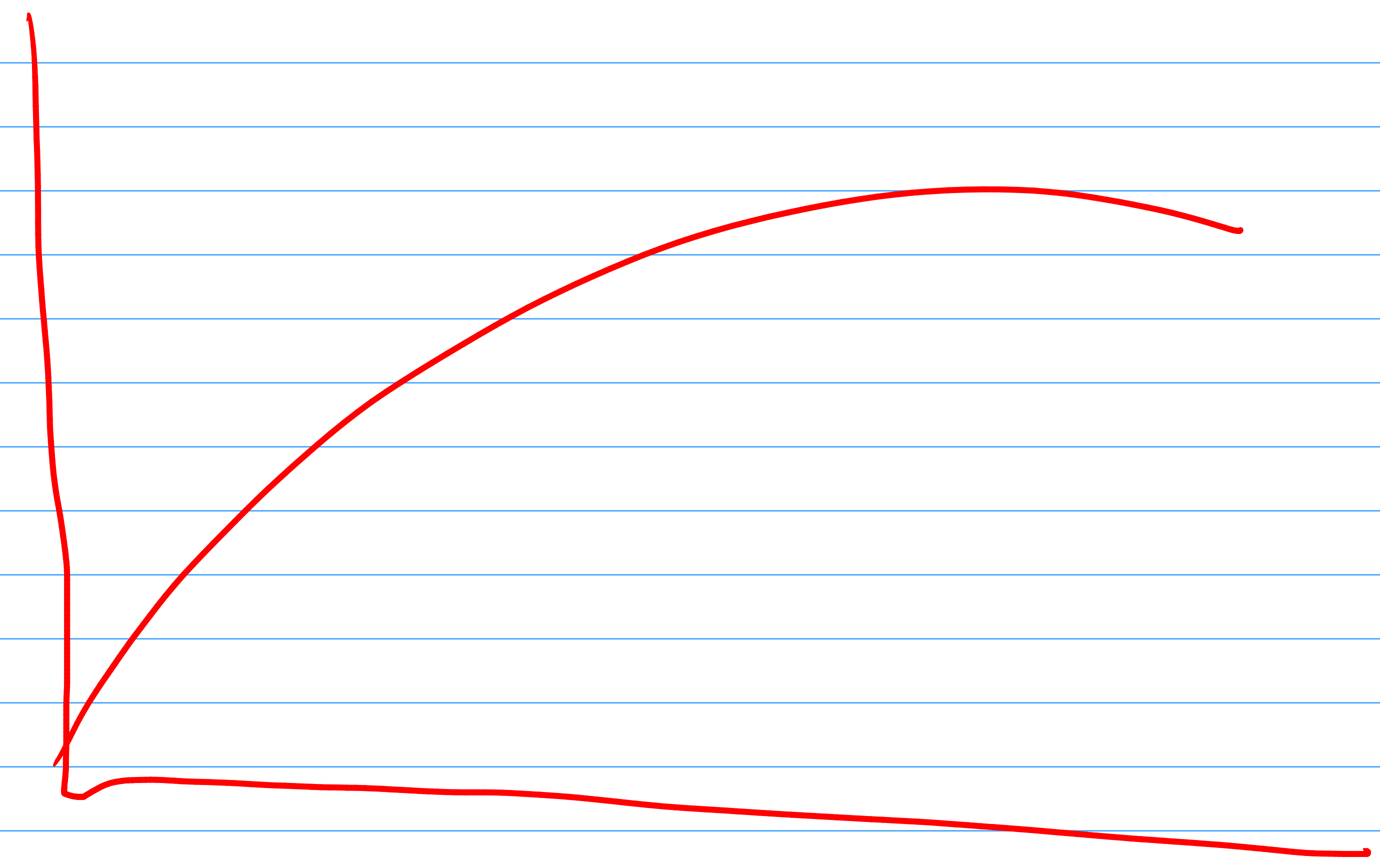
Los algoritmos MonteCarlo sirven para validar una proposición o hipótesis

Un algoritmo MonteCarlo está seguro, si la proposición es falsa; en esta caso devuelve la respuesta correcta .

No está seguro, si no ha podido encontrar la contradicción a la proposición; en este caso devuelve verdadero, que puede o no ser correcto.

Para que funcione el algoritmo, se debe asegurar que es p−correcto para una probabilidad p.

Si es p−correcto, se puede ampliar la ventaja estocástica y aplicar el algoritmo tantas veces que el error sea no pequeño como se necesite.



$F(x) = x^2$

x							
F(x)							

$p = \frac{1}{3}$ correcto

$P_{exito} = 98\%$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)^K = 0{,}02$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^K = 0{,}02 \longrightarrow K \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log(0{,}02)$$

$$K = \frac{\log(0{,}02)}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} = 9{,}64 = 10$$