Universidad del Valle

Primer examen parcial
Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Carlos Andres Delgado S, Msc

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

27 de octubre 2022

1. Complejidad computacional e iterativa [50 puntos]

Para el siguiente algoritmo:

```
//Suponga n par
int algoritmo1(int n){
    int a = 0;
    int i = 0;
    while(i<=n){
        i=i+1;
        int j = 0;
        int t = 0;
        while(j<=2*n){
            t=t+2;
            j=j+2;
        }
        a = a+t;
    }
    return a;
}
```

1

1

$n+2$

$n+1$

$n+1$

$n+1$

$\left(\frac{2n+2}{2}+1\right)(n+1) = (n+2)(n+1)$

$(n+1)^2$

$(n+1)^2$

$(n+1)$

$O(n^2)$

9

$n=2$

$0, 2, 4, 6 \quad \frac{4+2}{2}+1 = 4$ ✓

$n=4$

$0, 2, 4, 6, 8, 10 \quad \frac{8+2}{2}+1 = 6$ ✓

1. **(20 puntos)** Calcule la complejidad total del algoritmo. Muestre el procedimiento línea por línea. Finalmente, indique la complejidad total en términos de $O(f(n))$ siendo $f(n)$ la cota más pequeña posible.

2. **(15 puntos)** Para el ciclo interno
   - **(5 puntos)** Forma de estado, estado inicial, transformación de estados y estado final
   - **(10 puntos)** Invariante de ciclo y su demostración

3. **(15 puntos)** Para el ciclo externo
   - **(5 puntos)** Forma de estado, estado inicial, transformación de estados y estado final
   - **(10 puntos)** Invariante de ciclo y su demostración

Interno

(j,t) $\qquad$ $(0,0)$

$(j,t) \rightarrow (j+2, t+2)$ Transformacion

$(0,0) \Rightarrow (2,2) \rightarrow (4,4) \rightarrow \dots \rightarrow (2n,2n) \rightarrow (2n+2, 2n+2)$

Invariante (j,j)

Demostracion

$(j,t) \xrightarrow{j:=j+2} (j+2, j+2)$

$(j,t) \xrightarrow{t:=t+2} (j+2, t+2)$ $\quad t=j$

$(j+2, j+2)$

Externo

$a = a + 2n+2$

Estado (i,a)

Transformacion

$(0,0) \rightarrow (1, 0+2n+2) \rightarrow (2, 0+2(2n+2))$

Invariante $(i, i(2n+2))$

Demostracion

$(i,a) \xrightarrow{i:=i+1} (i+1, (i+1)\,2n+2)$

$(i,a) \xrightarrow{a:=a+2n+2} (i+1, i(2n+2)+2n+2)$

$(i+1)(2n+2)$

2. Relaciones de recurrencia [20 puntos]

Dada la siguiente R.R

$$T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{3}, T(1) = O(1)$$

$T(n) = 3^i T(\frac{n}{3^i}) + 3^{i-1}\frac{n}{3^i} + \frac{3^{i-2}}{3^{i-2}} \dots$

$T(n) = 3^{\log_3(n)} T(n) + \sum_{i=0}^{\log_3(n)-1} \frac{n}{3}$

$T(n) = n + \log(n)\frac{n}{3}$

$O(n \log(n))$

1. (15 puntos) Resuelva la RR con arboles o el método de expansión.
2. (5 puntos) Solucione con el metódo del maestro y compare la cota con la solución obtenida en el punto 1, explique si estas coinciden.

Segundo caso $\frac{n}{3}$ es $\Theta(n^{\log_3 3})$ ✓

$\Theta(n^{\log_3 3}\log(n)) = \Theta(n \log(n))$

3. Estructuras de datos[30 puntos]

Dada un lista enlazada bidimensional (matriz) estime la complejidad del siguiente algoritmo:

```
/*
 *random retorna un número aleatorio entre 0 y 1
 *ListaEnlazada es una clase que nos provee una lista enlazada
*/
int algoritmo2(int n){
    ListaEnlazada matriz = new ListaEnlazada();
    //Creación de la matriz
    for int i=0; i<n; i++){
        matriz.insert(new ListaEnlazada());
        for(int j=0; j<n; j++){
            matriz[i].insert(random());
        }

    }
    //Recorrido de la matriz
    for(int i=0; i<n; i++){
        for(int j=0; j<coln j++){
            suma += matriz[i][j];
        }
    }

    return suma;
}
```

Doble	Simple
1	1
$n+1$	$n+1$
n	$1+2+3\dots = \frac{n(n+1)}{2}$
$n(n+1)$	$n(n+1)$
n^2	$n^2(\frac{n(n+1)}{2}) \leftarrow n^4$
$n+1$	$n+1$
$n(n+1)$	$n(n+1)$
$n(\frac{n(n+1)}{2})$	$n(\frac{n(n+1)}{2})$
1	

$1+2+3+4+ \dots +n \leftarrow$ Costo indexar

Pista Una lista enlazada bidimensional, es una lista enlazada cuyos elementos son listas enlazadas de números.

1. (15 puntos) Estime la complejidad de este algoritmo si matriz es una lista doblemente enlazada
2. (15 puntos) Estime la complejidad de este algoritmo si matriz es una lista simplemente enlazada

Ayudas

Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{(n+1)} - a}{r-1} \text{ Si } r \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} ar^k = (n+1)a \text{ Si } r = 1$$

Potencias y logaritmos

- $a^{log_b(n)} = n^{log_b(a)}$
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- $\frac{a^i}{b^i} = (\frac{a}{b})^i$
- $log_a(b) = \frac{log_c(a)}{log_c(b)}$

Formulas solución método del maestro

Aplica para R.R de la forma $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(log(n) * n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$
  y existe un $c < 1$ tal que $af(\frac{n}{b}) <= cf(n)$ entonces $T(n) = \Theta(f(n))$.