Métodos Numéricos

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

June 22, 2015

Agenda

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Introducción.

- En esta sección se presentan los métodos para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$0 = xy' + y + c$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Introducción.

- Los métodos a tratar presentan la forma general (*phi* es llamada función de incremento):

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

- La pendiente estimada por ϕ se emplea para encontrar a partir de un valor actual y_i, un valor siguiente y_{i+1}, sobre una distancia h

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Introducción.

- Si la fórmula se aplica intervalo por intervalo a lo largo de una trayectoria, se le llama método de un paso o métodos de Runge-Kutta. En los métodos de un paso el valor de la función de incremento se obtiene a partir de un solo punto
- Si se emplean varios puntos para estimar el valor siguiente, el método se llama método de múltiples pasos

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Método de Euler.

- La primera derivada proporciona una estimación de la pendiente en t_i. El término $f(t_i, y_i)$ es la ecuación diferencial evaluada en t_i y y_i

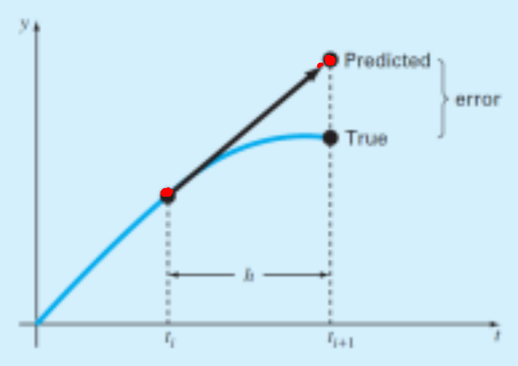
$$\phi = f(t_i, y_i)$$

- La estimación de la pendiente se reemplaza en:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Método de Euler.



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Método de Euler.

- **Problema:** Emplee el método de Euler para integrar la función desde t=0 hasta t=4 con un stepsize de 1. La condición inicial es t=0, y=2.

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y \rightarrow y' - 0.5y = 4e^{0.8t}$$

$$N(y) - P(t)y = \phi(t)$$

- La solución analítica es:

$$y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8t} - e^{-0.5t}) + 2e^{-0.5t}$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Método de Euler.

- **Solución:**

Pto ant F(Pto ant) h

$$\frac{dy}{dt} = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

Para el primer paso

$t = 1$

$$y(1) = y(0) + f(0,2)(1)$$
$$f(0,2) = 4e^{0} - 0.5(2) = 3$$
$$y(1) = 2 + 3(1) = 5\cancel{6}$$

Para el segundo paso

$t = 2$

$$y(2) = y(1) + f(1,5)(1)$$
$$f(1,5) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.40216$$
$$y(2) = 5 + 6.40216 = 11.40216$$

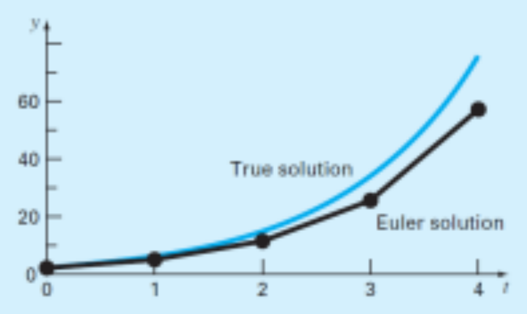
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Método de Euler.

- **Solución:**

t	y_{true}	y_{Euler}	$\lvert \varepsilon_t \rvert$ (%)
0	2.00000	2.00000	
1	6.19463	5.00000	19.28
2	14.84392	11.40216	23.19
3	33.67717	25.51321	24.24
4	75.33896	56.84931	24.54

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Método de Euler.

- **Solución:**



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Estabilidad del Método de Euler.

- **Problema Propuesto:** Solucione la ecuación diferencial a través del método de Euler. Concluya acerca de la estabilidad de la solución en relación con el valor del stepsize

$$\frac{dy}{dt} = -ay$$

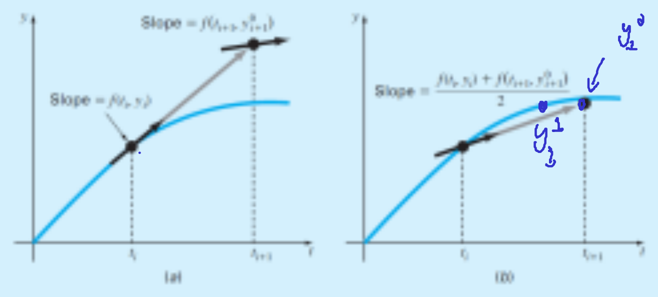
Mejoras al Método Euler
Introducción

- En el método de Euler, la pendiente en el comienzo del intervalo se asume igual a lo largo de todo el intervalo
- En esta sección se presentan dos modificaciones para corregir este error

Mejoras al Método Euler

Método de Heun

- Una mejora a la estimación de la pendiente se consigue encontrando una pendiente al comienzo y otra al final del intervalo



Mejoras al Método Euler

Método de Heun

- Ecuación del predictor

$$y_i' = f(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h$$

Predecir la pendiente
en ti+1

Mejoras al Método Euler
Método de Heun

- Ecuación del corrector

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

$$y'_{i+1} = f(t_{i+1}, y^0_{i+1})$$

$$\overline{y}' = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y^0_{i+1})}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} h$$

Iteraciones del corrector

$$\mathbf{y^j_{i+1}} = y^m + \frac{f(t_i, y^m_i) + f(t_{i+1}, \mathbf{y^{j-1}_{i+1}})}{2} h$$

Mejoras al Método Euler
Método de Heun

- Criterio de error para la convergencia del corrector

$$\varepsilon_a = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| x100$$

Por su relación directa con la regla trapezoidal el error de truncamiento es:

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(h)^3$$

Mejoras al Método Euler
Método de Heun

- **Problema:** Use el método de Heun para integrar la función desde $t = 0$ hasta $t = 4$ con stepsize de 1. La condición inicial en $t = 0$ es $y = 2$. Emplee un criterio de parada de 0.00001% para terminar las iteraciones del corrector

$$y^{'} = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

Mejoras al Método Euler
Método de Heun

- **Solución:**

La derivada en $(t_0, y_0) = (0, 2)$

$$y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$$
$$y_0' = 4e^{0} - 0.5(2) = 3$$

Mejoras al Método Euler

Método de Heun

- **Solución:**

Con el valor de la pendiente calculado anteriormente se emplea la ecuación del predictor

$$y_0' = f(t_0, y_0)$$
$$y_1^0 = y_1 + f(t_0, y_0)h$$
$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

Mejoras al Método Euler
Método de Heun

- **Solución:**

Con el valor de la predicción para y_1^0 se calcula la pendiente y_1'

$$\begin{aligned} y_1' &= f(t_1, y_1^0) \\ y_1' &= 4e^{0.8t_1} - 0.5y_1^0 \\ y_1' &= 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164 \end{aligned}$$

Mejoras al Método Euler
Método de Heun

- **Solución:**

Con el valor de las pendientes en t_0 y t_1, se obtiene un promedio y se aplica el corrector

$$\overline{y}' = \frac{3 + 6.402164}{2} = 4.701082$$

$$y_1^1 = 2 + 4.701082(1) = 6.701082$$

Mejoras al Método Euler

Método de Heun

- **Solución:**

La estimación puede ser mejorada realizando mas iteraciones del corrector

F(2,0)

$y_0 \quad y_0^1$

$$\mathbf{y_{i+1}^{j}} = y^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f(t_{i+1}, \mathbf{y_{i+1}^{j-1}})}{2}h$$

$$y_1^2 = 2 + \frac{3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701082)}{2}1 = 6.275811$$

$y_0 \quad y_0^1$

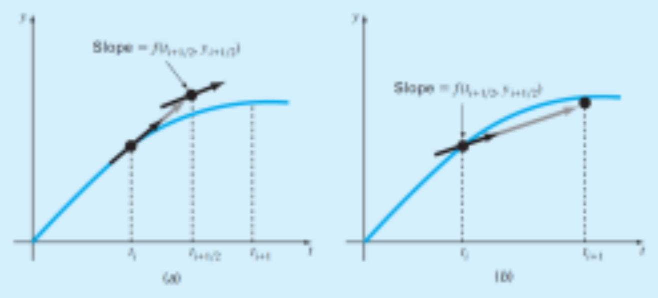
$$y_1^3 = 2 + \frac{3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.275811)}{2}1 = 6.382129$$

$$y_1^4 = 2 + \frac{3 + (4e^{0.8(1)} - 0.5(6.38\cdots)}{2}1$$

Mejoras al Método Euler

Método del Punto Medio

- Otra mejora a la estimación de la pendiente se consigue encontrando una pendiente en el punto medio del intervalo



Mejoras al Método Euler

Método del Punto Medio

- Ecuación del predictor

$$y_{i+1/2} = y_i + f(t_i, y_i)\frac{h}{2}$$
$$y'_{i+1/2} = f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

Mejoras al Método Euler
Método del Punto Medio

- Ecuación del corrector

$$\mathbf{y_{i+1}} = y_i + f(t_{i+1/2}, \mathbf{y_{i+1/2}})h$$

No se puede iterar el corrector.
Este método tiene relación directa con las fórmulas de integración de Newton-Cotes para intervalos abiertos

$y' = 2t - 2y \qquad t=0 \quad y=3 \quad h=1$

$$y_i' = f(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h$$

$\not{o}h$

$$y_{i+1}' = f(t_{i+1}, y_{i+1}^0)$$
$$\bar{y}' = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$$

$$\mathbf{y_{i+1}^j} = y^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f(t_{i+1}, \mathbf{y_{i+1}^{j-1}})}{2}h$$

$y_0' = -6$

$y_1^0 = 3 - 6(1) = -3$

$y_1^{0\,\prime} = 8 \qquad \bar{y}' = \frac{-6+8}{2} = 1$

$y_{1+1}^1 = 3 + 1(1) = 4$

$y_{1+2}^2 = 3 + \frac{-6 + -6}{2}(1) = -3$

$y_{i+1}^3 = 3 + \frac{-6+8}{2}(1) = 4$

Métodos de Runge-Kutta
Introducción

- Estos métodos logran la exactitud de las series de taylor sin requerir el cálculo de derivadas de alto orden
- La forma generalizada es:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \phi h}$$

ϕ es llamada la función de incremento y corresponde a una pendiente sobre el intervalo

Métodos de Runge-Kutta
Introducción

- La forma general de la función de incremento ϕ es:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$

Donde **a** son constantes y **k** (p y q son constantes):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- La ecuación del método de Runge-Kutta de segundo orden es:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

Donde k_1 y k_2 son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- Los valores a_1, a_2, p_1 y q_{11} son estimados igualando la ecuación de segundo orden de Runge-Kutta a una serie de Taylor de segundo orden

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se tienen 3 ecuaciones y 4 incognitas. Se debe asumir un valor para una de las incognitas

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- Especificando un valor para a_2

$$a_1 = 1 - a_2$$
$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Se pueden escoger una cantidad infinita de valores para a_2, por esto existe una cantidad infinita de métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- A continuación se presentan tres versiones del método de Runge-Kutta de segundo orden que resultan de emplear valores de $1/2$, 1 y $2/3$ para a_2

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- **Método de Heun sin Iteración** Al sustituir con $a_2 = 1/2$ se tiene $a_1 = 1/2$ y $p_1 = q_{11} = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

Donde k_1 y k_2:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + h, y_i + k_1 h) \end{aligned}$$

Note que k_1 es la pendiente al comienzo del intervalo y k_2 es la pendiente al final del intervalo

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- **Método del Punto Medio**

Al sustituir con $a_2 = 1$ se tiene $a_1 = 0$ y $p_1 = q_{11} = 1/2$

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

Donde k_1 y k_2:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

Métodos de Runge-Kutta
Segundo Orden

- **Método de Ralston**

Al sustituir con $a_2 = 2/3$ se tiene $a_1 = 1/3$ y $p_1 = q_{11} = 3/4$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$

Donde k_1 y k_2:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h)$$

Con este método se obtiene el menor error de truncamiento

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- Los métodos de Runge-Kutta mas usados son los de cuarto orden
- Existen infinitas versiones al igual que para los métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- La forma mas comunmente usada es:

yi+1 = y1 + f(a1k1+a2k2+...+anKn)h

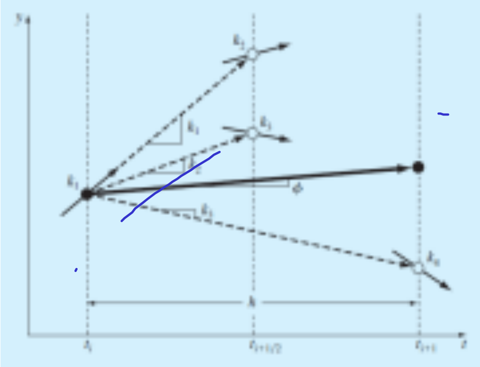
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + k_3 h) \end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- Gráfico de las pendientes en el método de cuarto orden de Runge-Kutta



Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- **Problema:** Use el método clásico de cuarto orden de Runge-Kutta para integrar la función desde $t = 0$ hasta $t = 1$ con un stepsize de 1 y $y(0) = 2$

$$y^{'} = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

La solución analítica es 6.194631

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- **Solución:**

Calculando la pendiente en el comienzo con $t_0 = 0$ y $y_0 = 2$

$$k_1 = f(t_0, y_0)$$
$$k_1 = f(0, 2) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3$$

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- **Solución:**

El valor de k_1 se emplea para calcular el valor de y y la pendiente en el punto medio

$$y(0+1/2) = y_0 + k_1 \frac{h}{2}$$
$$y(0.5) = 2 + 3(0.5) = 3.5$$
$$k_2 = f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1 h)$$
$$k_2 = f(0.5, 3.5) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.5) = 4.217299$$

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- **Solución:**

El valor de k_2 se emplea para calcular otro valor de y y de pendiente en el punto medio

$$y(0+1/2) = y_0 + k_2\frac{h}{2}$$
$$y(0.5) = 2 + 4.217299(0.5) = 4.1086649$$
$$k_3 = f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2 h)$$
$$k_3 = f(0.5, 4.108649) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(4.108649) = 3.912974$$

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- **Solución:**

El valor de k_3 se emplea para calcular el valor de y y la pendiente en el final del intervalo

$$y(1.0) = y_0 + k_3 h$$

$$y(1.0) = 2 + 3.912974(1.0) = 5.912974$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + k_3 h)$$

$$k_4 = f(1.0, 5.912974) = 4e^{0.8(1.0)} - 0.5(5.912974) = 5.945677$$

Métodos de Runge-Kutta
Cuarto Orden

- **Solución:**

Finalmente las cuatro estimaciones de pendientes se combinan para obtener una pendiente promedio.

$$\phi = \frac{1}{6}[3 + 2(4.217299) + 2(3.912974) + 5.945677] = 4.2037$$

La pendiente promedio se emplea para hacer una predicción en el final del intervalo

$$y(1.0) = 2 + 4.201037(1.0) = 6.201037$$

Métodos de Runge-Kutta
Quinto Orden

- Existen métodos de Runge-Kutta de quinto orden y superior.
- El costo computacional aumenta y se consideran por este motivo menos eficientes
- Un ejemplo es la ecuación de Butcher:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

Métodos de Runge-Kutta
Quinto Orden

Los valores para k son:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h)$$

$$k_4 = f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h)$$

$$k_5 = f(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h)$$

$$k_6 = f(t_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h)$$

$$y' = F(t, y)$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

Runge-Kutta $\longrightarrow \phi \rightarrow F(t_{i+1}, a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n)$

Heun $\leftarrow$ Euler

Sistemas de Ecuaciones
Introducción

- Existen problemas en ingeniería que requieren la solución de sistemas de n ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

Para la solución se requieren n condiciones iniciales

Sistemas de Ecuaciones

Introducción

- Los métodos vistos para una ecuación se pueden extender a sistemas de múltiples ecuaciones.
- El procedimiento para solucionar un sistema de ecuaciones implica aplicar las técnicas vistas para cada ecuación diferencial en cada paso

Sistemas de Ecuaciones
Introducción

- Un ejemplo es el cálculo de la velocidad y posición en el problema de caída libre

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

Si la plataforma de lanzamiento es estacionaria, las condiciones iniciales serían $x(0) = v(0) = 0$

Sistemas de Ecuaciones
Introducción

- Las soluciones analíticas para la velocidad y posición son:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}\,t\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{c_d} \ln\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}\,t\right)\right]$$

Sistemas de Ecuaciones

Método de Euler

- **Problema** Encuentre la velocidad y posición para el problema de caída libre empleando el método de Euler. Asuma que en $t = 0$, $x = v = 0$ e integre hasta t=10s con un stepsize de 2s. Utilice los siguientes valores $g = 9.81 m/s^2$, $m = 58.1 kg$ y $cd = 0.25 kg/m$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Euler

- **Solución**

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

Las ODEs pueden ser usadas para estimar las pendientes en $t = 0s$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dv}{dt} = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(0)^2 = 9.81$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Euler

- **Solución**

$$y_0' = f(t_0, y_0)$$
$$y_2 = y_0 + f(t_0, y_0)h$$

El método de Euler se emplea para estimar los valores en $t = 2$

$$x(2) = 0 + 0(2) = 0$$
$$v(2) = 0 + 9.81(2) = 19.62$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Euler

- **Solución**

$$\frac{dx}{dt} = v$$
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2$$

Las ODEs pueden ser usadas para estimar las pendientes en $t = 2s$

$$\frac{dx}{dt} = 19.62$$
$$\frac{dv}{dt} = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(19.62)^2 = 8.39684$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Euler

- **Solución**

$$y_2' = f(t_2, y_2)$$
$$y_4 = y_2 + f(t_2, y_2)h$$

El proceso se repite para estimar los valores en $t = 4$

$$x(4) = 0 + 19.62(2) = 39.24$$
$$v(4) = 19.62 + (8.39684)2 = 36.41368$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Euler

- **Solución**

t	x_{true}	v_{true}	x_{Euler}	v_{Euler}	$\varepsilon_t(x)$	$\varepsilon_t(v)$
0	0	0	0	0		
2	19.1663	18.7292	0	19.6200	100.00%	4.76%
4	71.9304	33.1118	39.2400	36.4137	45.45%	9.97%
6	147.9462	42.0762	112.0674	46.2983	24.25%	10.03%
8	237.5104	46.9575	204.6640	50.1802	13.83%	6.86%
10	334.1782	49.4214	305.0244	51.3123	8.72%	3.83%

Sistemas de Ecuaciones

Método de Runge-Kutta

- **Problema** Encuentre la velocidad y posición para el problema de caída libre empleando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Asuma que en $t = 0$, $x = v = 0$ e integre hasta t=10s con un stepsize de 2s. Utilice los siguientes valores $g = 9.81 m/s^2$, $m = 58.1 kg$ y $cd = 0.25 kg/m$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Runge-Kutta

- **Solución**

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x, v) = \underline{v}$$

$$\frac{dv}{dt} = f_2(t, x, v) = \underline{g - \frac{c_d}{m} v^2}$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Runge-Kutta

$g_2 = 1$

- **Solución**

Encontrando las pendientes en el inicio y los valores de x y v en el punto medio

$$k_{1,1} = f_1(0,0,0) = 0$$

$$k_{1,2} = f_2(0,0,0) = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(0)^2 = 9.81$$

$$x(1) = x(0) + k_{1,1}\frac{h}{2} = 0 + 0\frac{2}{2} = 0$$

$$v(1) = v(0) + k_{1,2}\frac{h}{2} = 0 + 9.81\frac{2}{2} = 9.81$$

Sistemas de Ecuaciones

Método de Runge-Kutta

- **Solución**

Encontrando el primer conjunto de pendientes en el punto medio y el segundo conjunto de predicciones en el punto medio

$$\underline{k_{2,1}} = f_1(1, 0, 9.81) = 9.8100$$

$$\underline{k_{2,2}} = f_2(1, 0, 9.81) = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(9.81)^2 = 9.4567$$

$$x(1) = x(0) + k_{2,1}\frac{h}{2} = 0 + 9.8100\frac{2}{2} = 9.8100$$

$$v(1) = v(0) + k_{2,2}\frac{h}{2} = 0 + 9.4567\frac{2}{2} = 9.4567$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Runge-Kutta

- **Solución**

Encontrando el segundo conjunto de pendientes en el punto medio y las predicciones en el final del intervalo

$$k_{3,1} = f_1(1, 9.8100, 9.4567) = 9.4567$$
$$k_{3,2} = f_2(1, 9.8100, 9.4567) = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(9.4567)^2 = 9.4817$$
$$x(2) = x(0) + k_{3,1}h = 0 + 9.4567(2) = 18.9134$$
$$v(2) = v(0) + k_{3,2}h = 0 + 9.4817(2) = 18.9634$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Runge-Kutta

- **Solución**

Encontrando las pendientes en el final del intervalo

$$k_{4,1} = f_1(2, 18.9134, 18.9634) = 18.9634$$

$$k_{4,2} = f_2(2, 18.9134, 18.9634) = 9.81 - \frac{0.25}{68.1}(18.9634)^2 = 8.4898$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Runge-Kutta

- **Solución**

Los valores de *k* se emplean para estimar los valores en el final del intervalo

$$x(2) = 0 + \frac{1}{6}\left[0 + 2(9.8100 + 9.4567) + 18.9634\right]2 = 19.1656$$

$$v(2) = 0 + \frac{1}{6}\left[9.8100 + 2(9.4567 + 9.4817) + 8.4898\right]2 = 18.7256$$

Sistemas de Ecuaciones
Método de Runge-Kutta

- **Solución**

t	x_{true}	v_{true}	x_{RK4}	v_{RK4}	$\varepsilon_t\,(x)$	$\varepsilon_t\,(v)$
0	0	0	0	0		
2	19.1663	18.7292	19.1656	18.7256	0.004%	0.019%
4	71.9304	33.1118	71.9311	33.0995	0.001%	0.037%
6	147.9462	42.0762	147.9521	42.0547	0.004%	0.051%
8	237.5104	46.9575	237.5104	46.9345	0.000%	0.049%
10	334.1782	49.4214	334.1626	49.4027	0.005%	0.038%

Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- Las ecuaciones de segundo orden u orden superior se pueden re-expresar como un sistema de ecuaciones

Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- **Problema** Dadas la condiciones iniciales, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ solucione la ecuación diferencial desde t=0 hasta t=4 con un tamaño de paso de 0.1 empleando el método de RK de cuarto orden.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

Nota: Grafique la solución aproximada y la solución exacta $y = cos(2t)$

Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- **Solución**

Las ecuación de segundo orden se puede re-expresar como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t, y, z) = z$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(t, y, z) = -4y$$

Ecuaciones de Orden Superior
Método de Runge-Kutta

- **Solución** Encontrando las pendientes en el inicio y los valores de y y z en el punto medio

$$
\begin{aligned}
k_{1,1} &= f_1(0,1,0) = 0 \\
k_{1,2} &= f_2(0,1,0) = -4(1) = -4 \\
y(0.05) &= y(0) + k_{1,1}\frac{h}{2} = 1 + 0(0.05) = 1 \\
z(0.05) &= z(0) + k_{1,2}\frac{h}{2} = 0 - 4(0.05) = -0.2
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Orden Superior
Método de Runge-Kutta

- **Solución** Encontrando el primer conjunto de pendientes en el punto medio y el segundo conjunto de predicciones en el punto medio

$$
\begin{aligned}
k_{2,1} &= f_1(0.05, 1, -0.2) = -0.2 \\
k_{2,2} &= f_2(0.05, 1, -0.2) = -4(1) = -4 \\
y(0.05) = y(0) + k_{2,1}\frac{h}{2} &= 1 - 0.2(0.05) = 0.99 \\
z(0.05) = z(0) + k_{2,2}\frac{h}{2} &= 0 - 4(0.05) = -0.2
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- **Solución** Encontrando el segundo conjunto de pendientes en el punto medio y las predicciones en el final del intervalo

$$
\begin{aligned}
k_{3,1} &= f_1(0.05, 0.99, -0.2) = -0.2 \\
k_{3,2} &= f_2(0.05, 0.99, -0.2) = -4(0.99) = -3.96 \\
y(0,1) &= y(0) + k_{3,1}h = 1 - 0.2(0.1) = 0.98 \\
z(0,1) &= z(0) + k_{3,2}h = 0 - 3.96(0.1) = -0.396
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- **Solución** Encontrando las pendientes en el final del intervalo

$$\begin{aligned} k_{4,1} &= f_1(0.1, 0.98, -0.396) = -0.396 \\ k_{4,2} &= f_2(0.1, 0.98, -0.396) = -4(0.98) = -3.92 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Orden Superior
Método de Runge-Kutta

- **Solución**

Finalmente las estimaciones de pendientes se combinan para obtener las pendientes promedio

$$\phi_1 = \frac{1}{6}[0 + 2(-0.2 - 0.2) - 0.396] = -0.1993$$
$$\phi_2 = \frac{1}{6}[-4 + 2(-4 - 3.96) - 3.92] = -3.9733$$

Las pendientes promedio se emplean para hacer una predicción en el final del intervalo

$$y(0.1) = 1 + (-0.1933)(0.1) = 0.98007$$
$$z(0.1) = 0 + (-3.9733)(0.1) = -0.39733$$

Ecuaciones de Orden Superior
Método de Runge-Kutta

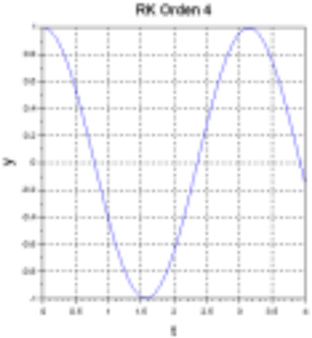
- **Resultados**

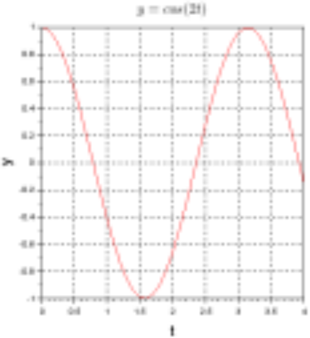
t	y aproximada	z	y analítica
0	1	0	1
0.1	0.9800667	-0.3973333	0.9800666
0.2	0.9210622	-0.7788263	0.9210610
0.3	0.8253390	-1.1292704	0.853356
0.4	0.6967130	-1.434695	0.6967067
0.5	0.5403122	-1.682924	0.5403023

Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- **Gráfica**





Ecuaciones de Orden Superior

Método de Runge-Kutta

- **Problema Propuesto:** Dadas las condiciones iniciales y(0)=2 y z(0)=4 solucione el sistema de ecuaciones desde t=0 hasta t=0.4 con un tamaño de paso de 0.1 empleando el método de RK de cuarto orden.

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 5e^{-t}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{yz^2}{2}$$

Emplee el script **rk4sys.sci** para verificar el calculo correcto paso a paso de cada una de las pendientes.

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Forma General**

Ecuación Runge-Kutta de segundo orden:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

Donde k_1 y k_2 son:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Serie de Taylor:**

Tres primeros términos de la serie de Taylor (con $h = t_{i+1} - t_i$):

$$y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_i,y_i} h + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t_i,y_i} h^2 + O(h^3)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), y(0) = y_0$$

$y' = f(t,y)$

La serie de Taylor se reescribe asi:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i,y_i)h + \frac{1}{2!}f'(t_i,y_i)h^2 + O(h^3)$$

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Serie de Taylor:**

Serie de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2!}f'(t_i, y_i)h^2 + O(h^3)$$

Reemplazando $f'(t, y)$ en la serie de Taylor

$$f'(t, y) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_i, y_i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_i, y_i} \times \frac{dy}{dt}\right)h^2 + O(h^3)$$

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Serie de Taylor:**

Continuamos desarrollando la expresión anterior

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2!}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_i,y_i} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_i,y_i} \times \frac{dy}{dt}\right) h^2 + O(h^3)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_i,y_i} h^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_i,y_i} f(t_i, y_i)h^2 + O(h^3)$$

Esta ecuación se igualará mas adelante a la ecuación de segundo orden de Runge-Kutta después de haber reexpresado k_1 y k_2

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Reexpresando k_1 y k_2:**

El termino k_2 se puede reescribir como una serie de Taylor de dos variables (primeros tres términos):

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_2 = f(t_i, y_i) + p_1 h \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t_i, y_i} + q_{11} k_1 h \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{t_i, y_i} + O(h^2)$$

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Reexpresando k_1 y k_2:**

Reemplazando en la ecuación $y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$ con las expresiones desarrolladas para k_1 y k_2

$$a_1k_1h = a_1f(t_i, y_i)h$$

$$a_2k_2h = a_2\left(f(t_i, y_i) + p_1h\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t_i,y_i} + q_{11}k_1h\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{t_i,y_i} + O(h^2)\right)h$$

$$a_2k_2h = a_2f(t_i, y_i)h + a_2p_1h^2\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t_i,y_i} + a_2q_{11}k_1h^2\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{t_i,y_i} + O(h^3)$$

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Reexpresando k_1 y k_2:**

La ecuación resultante es:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 + a_2)f(t_i, y_i)h + a_2 p_1 h^2 \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t_i,y_i} + a_2 q_{11} k_1 h^2 \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{t_i,y_i} + O(h^3)$$

Ahora procedemos a igualar esta ecuación con la serie de Taylor desarrollada

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Obteniendo coeficientes a_1, a_2, p_1 y q_{11}:**

Forma general con k_1 y k_2

$$y_{i+1} = y_i +$$
$$(a_1 + a_2)f(t_i, y_i)h + a_2 p_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t_i, y_i} + a_2 q_{11} k_1 h^2 \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{t_i, y_i} + O(h^3)$$

Serie de Taylor

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{t_i, y_i} h^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{t_i, y_i} f(t_i, y_i)h^2 + O(h^3)$$

Métodos de Runge-Kutta
Demostración Ecuación de Segundo Orden

- **Obteniendo coeficientes a_1, a_2, p_1 y q_{11}:**

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_2 q_{11} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.