

# Recurrencias lineales no homogéneas

**Universidad del Valle**  
**EISC**

Septiembre 2018

## 1 Recurrencias lineales no homogéneas

## 2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

## 1 Recurrencias lineales no homogéneas

## 2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Solución a recurrencias No homogéneas

Sea  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + \boxed{F(n)}$ , donde  $F(n)$  no es nula y  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$  es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1.  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  es una r.r no homogénea donde  $F(n) = 1$

Ejemplo 2.  $a_n = a_{n-1} + 2^n$  es una r.r no homogénea donde  $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3.  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$  es una r.r no homogénea donde  $F(n) = n^2 + n + 1$

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Teorema1

Si  $\{a_n^{(p)}\}$  es una solución particular de  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$  entonces toda la solución  $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$  donde  $\{a_n^{(h)}\}$  es solución de la homogénea asociada  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ .

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Ejercicio 1

**Determinar todas las soluciones de  $a_n = 2a_{n-1} + 1$  (Hanoi) para  $a_1 = 1$  (Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es  $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$  donde  $a_n^{(h)}$  es la solución de la homogénea asociada y  $a_n^{(p)}$  es la solución polinómica.

Dada la recurrencia  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ,  $F(n) = 1$  estos son los pasos para resolverla:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n^{\leftarrow} = 2a_{n-1} + \boxed{1}^{\leftarrow}$$

$$Q_n^{(h)} = A(z)^n$$

$$r-2=0$$

$$\boxed{\bar{Q}_n^{(p)} = C}$$

$$C = 2C + 1$$

$$Q_n = Q_n^{(h)} + Q_p^{(p)}$$

$$C = -1$$

$$Q_n = A(z)^n - 1 \quad Q_0 = 1$$

$$1 = Az - 1$$

$$z = zA$$

$$A = 1$$

$$\boxed{Q_n = 2^n - 1}$$

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Ejercicio 1

- 1 Calculamos  $a_n^{(h)}$  resolviendo la ecuación homogénea asociada  $a_n = 2a_{n-1}$ , como hay un coeficiente, el de  $a_{n-1}$  la ecuación característica es  $r - 2 = 0$  por tanto la raíz  $r=2$ . Entonces  $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
- 2 Ahora resolvemos  $a_n^{(p)}$  igualando  $F(n) = 1$  con un polinomio de igual grado. entonces  $a_n^{(p)} = A$  se iguala con la constante A por que  $F(n)$  es igual a una constante 1.
- 3 El siguiente paso es el de reemplazar  $a_n^{(p)} = A$  en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos  $a_n = A$  entonces nos queda:  $A = 2A + 1$  resolvemos ésta ecuación y entonces  $A=-1$ .



# Recurrencias lineales no homogéneas

## Ejercicio 1

- 3 Entonces como  $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$  y  $a_n^{(p)} = -1$  y  $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$  por lo tanto  $a_n = \alpha 2^n - 1$  Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de  $\alpha$
- 4 Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de  $\alpha$ . Tomamos la solución general  $a_n = \alpha 2^n - 1$ , Si  $a_1 = 1$ ,  $n = 1$  entonces  $1 = \alpha 2 - 1$ , despejando  $\alpha = 1$  y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

$$Q_n = 5Q_{n-1} - 6Q_{n-2} + 7^n \quad Q_0 = 69 \quad Q_1 = 85$$

$$y^2 - 5y + 6$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$r=3, \quad r=2$$

$$Q_n^{(h)} = A(3)^n + B(2)^n$$

$$Q_n^{(p)} = C7^n$$

$$C7^n = 5C7^{n-1} - 6C7^{n-2} + 7^n$$

$$C7^n = \frac{5C}{7}7^n - \frac{6C}{7^2}7^n + 7^n$$

$$C = \frac{5C}{7} - \frac{6C}{7^2} + 1$$

$$-1 = \left( \frac{5 \times 7}{7^2} - \frac{6}{7^2} - \frac{7^2}{7^2} \right) C$$

$$-1 = \frac{-20}{7^2} C$$

$$C = \frac{7^2}{20}$$

$$Q_n = A(3)^n + B(2)^n + \frac{7^{n+2}}{20}$$

$$69 = A + B + \frac{7^2}{20}$$

$$85 = 3A + 2B + \frac{7^3}{20}$$

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de la relación de recurrencia  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$  **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**

La solución de la relación de recurrencia es  $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$  donde  $a_n^{(h)}$  (homogénea) y  $a_n^{(p)}$  (polinómica).

- 1 Calculamos  $a_n^{(h)}$  resolviendo  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  como hay dos coeficientes, el de  $a_{n-1}$  y el de  $a_{n-2}$  la ecuación característica es  $r^2 - 5r + 6 = 0$  por tanto las raíces son  $r_1 = 3$  y  $r_2 = 2$ . Entonces  $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$  **(por Teorema 1)**

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Ejercicio 2

- 2 Ahora resolvemos  $a_n^{(p)}$  igualando  $F(n) = 7^n$  con un polinomio de igual grado. Entonces  $a_n^{(p)} = C7^n$  se iguala con la constante  $C7^n$  porque  $F(n)$  es igual a la constante elevada a la  $n$ .
- 3 Reemplazamos  $a_n^{(p)} = C7^n$  en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de  $\{a_n\}$  es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
$C_1$	$A$
$n + 1$	$A_1 n + A_0$
$n^2$	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in \mathbb{Z}^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \dots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in \mathbb{R}$	$A r^n$
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in \mathbb{Z}^+, r \in \mathbb{R}$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \dots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia  $a_n = 3a_{n-1} + 2^n, a_0 = 1$

# Recurrencias lineales no homogéneas

**Dada la recurrencia**  $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$  **determine la solución para**  $a_0 = 4$

- 1 Una solución general es  $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
- 2 La solución de la homogénea:  $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
- 3 La solución polinómica:  $a_n^{(p)} = An + B$  para  $F(n) = n + 5$
- 4 Entonces por términos semejantes  
 $An + B = 2(A(n - 1) + B) + n + 5$ ,  $A = -1$  y  $B = -7$
- 5 Por lo tanto  $a_n = \alpha 2^n - n - 7$  es una **solución general** de la recurrencia.
- 6 Sea  $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ , para  $a_0 = 4$  entonces  $\alpha = 11$ . Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Teorema 2

Supongamos que  $\{a_n\}$  es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n)$ , donde  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son números reales y  $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \dots + b_1 n + b_0) S^n$  esto es cuando  $F(n)$  es un polinomio multiplicando a  $S^n$  donde  $S$  es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si  $S$  no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) S^n$$

- Cuando  $S$  es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad  $m$ , existe una solución particular de la forma

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \dots + p_1 n + p_0) S^n$$

# Recurrencias lineales no homogéneas

## Encontrar la solución general de la recurrencia

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

- 1 Una solución general es  $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
- 2 La solución de la homogénea:  $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
- 3 La solución polinómica:  $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$  para  $F(n) = 2^n + 3n$
- 4 Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B &= 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ &\quad - 6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$



# Recurrencias lineales no homogéneas

## Encontrar la solución general de la recurrencia

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

**4** Solucionando:

$$nC2^n = 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n$$

$$nC = 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$

$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$$

La solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n 2^{n+1} + 3/2 n + 21/4$$

## 1 Recurrencias lineales no homogéneas

## 2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

## Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño  $n$  en  $a$  subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño  $n/b$ , supongamos también que se requieren  $g(n)$  operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea  $T(n)$  el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño  $n$ . Entonces se tiene que  $T$  satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

# Estrategias de solución de recurrencias

## Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución
- Por iteración
- Funciones generatrices

# Cambio de variable

Sea  $T(n) = 2T(n/2) + 2$  (máximo y mínimo de una lista para  $n$  par)

1 Supongamos  $n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^k/2) + 2$$

$$T(2^k) = t_k$$

2 Por tanto la recurrencia  $t_k = 2t_{k-1} + 2$  tiene solución:

$$t_k^{(h)} = \alpha 2^k \text{ y } t_k^{(p)} = A$$

3 Entonces  $A = 2A + 2$ ;  $A = -2$  Por lo tanto la solución general es:  $t_k = \alpha 2^k - 2$

4 Como  $n = 2^k$  entonces  $T(n) = \alpha n - 2$  es decir,  $T(n)$  es  $O(n)$

**Recuerda:**  $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea  $T(n) = 5T(n/2) + 3$  y  $T(1) = 7$  para  $n$  par

**1** Supongamos  $n = 2^k$

$$T(2^k) = 5T(2^k/2) + 3$$

$$T(2^k) = t_k$$

**2** Por tanto la recurrencia  $t_k = 5t_{k-1} + 3$  tiene solución:

$$t_k^{(h)} = \alpha 5^k \text{ y } t_k^{(p)} = A$$

- 3 Entonces  $A = 5A + 3$ ;  $A = -3/4$  Por lo tanto la solución general es:  $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
- 4 Para encontrar  $\alpha$  y evaluar  $T(1)$  se obtiene la recurrencia en función de  $n$ . Como  $n = 2^k$  entonces  $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$  es decir, para  $T(1) = 7$ ,  $\alpha = 31/4$ .

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$  ( $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ ) Por lo tanto  $T(n)$  es  $O(n^{\log_2 5})$

# Cambio de variable

Sea  $T(n) = 9T(n/3) + n$

1 Supongamos  $n = 3^k$

$$T(3^k) = 9T(3^k/3) + 3^k$$

$$T(3^k) = t_k$$

2 Por tanto la recurrencia  $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$  tiene solución:

$$t_k^{(h)} = \alpha 9^k \text{ y } t_k^{(p)} = A 3^k$$

3 Entonces  $A 3^k = 3^k[3A + 1]$ ,  $A = -1/2$  Por lo tanto la solución general es:  $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$

$$t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$$

$$T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$$

4 Por lo tanto  $T(n)$  es  $O(n^2)$



# Cambio de variable

**Mostrar que**  $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$  **es**  $O(n \log n)$   
 $n = 4^k$  entonces

$$\begin{aligned}\log n &= \log 4^k \\ &= k \log_4 4 \\ \log n &= k\end{aligned}$$

La recurrencia  $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$  tiene como solución general

$$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$$

$$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$$

$$t_k^{(p)} = (Ak + B)4^k$$

$$(Ak + B)4^k = 3[(A(k-1) + B)4^{k-1}] + 4^k k$$

$$(Ak + B)4^k = 4^k(3/4[(A(k-1) + B)] + k)$$

$$Ak + B = 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k$$

**Mostrar que**  $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$  **es**  $O(n \log n)$

Entonces  $Ak = k(3/4A + 1)$ ,  $A = 4$  y  $B = -3/4A + 3/4B$ ,  
 $B = -12$

$$\begin{aligned}t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\&= \alpha 3^{\log n} + 4n \log n - 12n\end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en  $n = 70$  entonces

$$4n \log n > 12n$$

$\therefore T(n)$  **es**  $O(n \log n)$

## Cambio de variable

Solucionar  $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$  para  $T(1) = 6$

- Entonces  $n = (3/2)^k$  y  $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$  por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$  y  $A = 22 + 3A$ ,  $A = -11$
- Solución general  $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego  $\alpha = 17$  con  $T(1) = 6$

$$T(n) = 17 \cdot 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como  $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$  se dice que:  
 $T(n)$  es  $O(n^{\log_{3/2} 3})$

## Método Maestro

Sea  $T$  una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que  $n = b^k$ , donde  $k$  es un entero positivo,  $a \geq 1$ ,  $b$  es un entero mayor que 1 y  $c$  y  $d$  son números reales tales que  $c > 0$  y  $d \geq 0$ , Entonces,

$$T(n) \text{ es } \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

- **Mostrar que**  $T(n) = 9T(n/3) + n$  **es**  $O(n^2)$  **usando el método maestro.**  $a = 9$ ,  $b = 3$  y  $d = 1$

$$a > b^d, 9 > 3^1$$

$$O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$$

$$T(n) \text{ es } O(n^2)$$

- **Mostrar que**  $T(n) = T(2n/3) + 1$  **es**  $O(\log n)$  **usando el m.m**  $a = 1$ ,  $b = 3/2$  y  $d = 0$

$$a = b^d \text{ por tanto } 1 = 3/2^0$$

$$O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

$$T(n) \text{ es } O(\log n)$$

- **Mostrar que**  $T(n) = T(5n/2) + 3$  **es**  $O(n^{\log_2 5})$  **usando el m.m**  $a = 5$ ,  $b = 2$  y  $d = 0$

$$a > b^d \text{ por tanto } 5 > 2^0$$

$$O(n^{\log_2 5})$$

$$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

## Teorema

*Sea  $T$  una función creciente que satisface la relación de recurrencia*

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

*cuando  $n$  es divisible por  $b$ , donde  $a \geq 1$ ,  $b > 1$  y  $c \in \mathbb{R}^+$ .*

*Entonces*

$$T(n) \text{ es } \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & \text{si } a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > 1 \end{array} \right\}$$

*Además, cuando  $n = b^k$  y  $a \neq 1$ , donde  $k$  es un entero positivo,*

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

*donde  $C_1 = T(1) + c/(a - 1)$  y  $C_2 = -c/(a - 1)$*

Sea  $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$  para  $T(1) = 6$  mostrar que  $T(n)$  es  $O(n^{\log_{3/2} 3})$  y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea  $a > 1$ , aplicando el teorema  $T(n)$  es  $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3 - 1)$  y  $C_2 = -22/(3 - 1)$  por tanto  $C_1 = 17$  y  $C_2 = -11$ , de ahí que una solución particular de  $T(n)$  es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

**¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?**

$$T(n) = T(n/2) + 1 \text{ para } T(1) = 1$$

**Por el m.m**

$$a = 1, b = 2 \text{ y } d = 0$$

$$a = b^d \text{ por tanto } 1 = 2^0$$

$$O(n^0 \log n) = O(\log n)$$

$$T(n) \text{ es } O(\log n)$$





Kenneth H. Rosen.

*Discrete Mathematics and Its Applications.*

McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.

Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

# Gracias

Próximo tema:  
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.