Matemáticas discretas II

Lenguajes y gramáticas

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Carlos Andrés Delgado S.
Raúl E Gutierrez de Piñerez R.

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Abril 2017

Contenido

El alfabeto

Un alfabeto es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman **símbolos**.

- Sea $\Sigma = \{a, b\}$ el alfabeto que consta de los símbolos a y b. Las siguientes son cadenas sobre Σ: *aba, abaabaaa, aaaab*.
- El *alfabeto binario* $\Sigma = \{0, 1\}$ son las cadenas sobre Σ que se definen como secuencias finitas de ceros y unos.
- Las cadenas son *secuencias ordenadas* y finitas de símbolos. Por ejemplo, $w = aaab \neq w_1 = baaa$.
- Sea $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ el alfabeto del idioma castellano.
- El alfabeto utilizado por muchos lenguajes de programación.
- Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ entonces podemos formar todas las cadenas sobre Σ incluyendo la cadena vacía.

Notación de alfabetos, cadenas y lenguajes

Notación usada en la teoría de lenguajes

Σ, Γ	denotan alfabetos.
Σ^*	denota el conjunto de todas las cadenas que se pueden formar con los símbolos del alfabeto Σ.
$a, b, c, d, e, \ldots$	denotan símbolos de un alfabeto.
$u, v, w, x, y, z, \ldots$ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	denotan cadenas, es decir, sucesiones finitas de símbolos de un alfabeto.
ϵ	denota la cadena vacía, es decir, la única cadena que no tiene símbolos.
$A, B, C, \ldots, L, M, N, \ldots$	denotan lenguajes (definidos más adelante).

- Si bien un alfabeto Σ es un conjunto finito, Σ^* es siempre un conjunto infinito (enumerable).
- Hay que distinguir entre los siguientes cuatro objetos, que son diferentes entre sí: $\emptyset, \epsilon, \{\emptyset\}, \{\epsilon\}$ Cadena vacía

Conjunto vacío Conjunto

Alfabetos

Operaciones con alfabetos

Si Σ es un alfabeto, $\sigma \in \Sigma$ denota que σ es un símbolo de Σ, por tanto, si

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

se puede decir que $0 \in \Sigma$

Un alfabeto es simplemente un conjunto finito no vacío que cumple las siguientes propiedades, Dados Σ_1 y Σ_2 alfabetos

- Entonces $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ también es un alfabeto.
- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2, \Sigma_1 - \Sigma_2$ y $\Sigma_2 - \Sigma_1$ también son alfabetos.

$\Sigma_1 = \{a, b, c\}$

$\Sigma_2 = \{1, a, 2, b, c\}$

$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{1, 2, a, b, c\}$

$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{a, b, c\}$

$\Sigma_1 - \Sigma_2 = \{ \varnothing \} \Rightarrow (\Sigma_1 - \Sigma_2)^* = \epsilon$

$\Sigma_2 - \Sigma_1 = \{1, 2\}$

Conjunto Universal

El conjunto de todas las cadenas sobre un alfabeto Σ, incluyendo la cadena vacía, se denota por Σ^*

- Sea $\Sigma = \{0, 1\}$
  $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 100, 010, 110, \ldots\}$
- Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces
  $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, abc, baa, \ldots\}$
- Sea $\Sigma = \{a, b\}$, entonces
  $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, baa, \ldots\}$

Concatenación de cadenas

Cadenas

Dado un alfabeto Σ y dos cadenas $u, v \in \Sigma^*$, la concatenación de u y v se denota como $u \cdot v$ o simplemente uv y se define así:

1. Si $v = \epsilon$, entonces $u \cdot \epsilon = \epsilon \cdot u = u$, es decir, la concatenación de cualquier cadena u con la cadena vacía, a izquierda o derecha, es igual a u.
2. Si $u = a_1 a_2 \dots a_n$, $v = b_1 b_2 \dots b_m$, entonces

$$u \cdot v = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$$

   Es decir, $u \cdot v$ es la cadena formada de escribir los símbolos de u y a continuación los símbolos de v.

Potencia de una cadena

Dada $w \in \Sigma^*$ y $n \in \mathbb{N}$, se define w^n de la siguiente forma

$$w^n = \begin{cases} \epsilon & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{uu \ldots u}_{n-veces} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Potencia de una cadena de manera recursiva

La potencia de una cadena se define como $w \in \Sigma^*$ para $n \in \mathbb{N}$

$$w^n = \begin{cases} \epsilon, & \text{si } n = 0 \\ ww^{n-1}, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea una cadena $w = acc$ sobre $\Sigma = \{a, c\}$ entonces podemos obtener $w^3 = ww^2 = wwww^0 = accaccacc\epsilon = (acc)^3$

Inversa de una cadena

Longitud de una cadena

La longitud de una cadena $w \in \Sigma^*$ se denota $|w|$ y se define como el número de símbolos de w (contando los símbolos repetidos), es decir:

$$|w| = \begin{cases} 0, & \text{si } w = \varepsilon \\ n, & \text{si } w = a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases}$$

$|aba| = 3$, $|baaa| = 4$

Reflexión o inversa de una cadena

La reflexión o inversa de una cadena $w \in \Sigma^*$ se denota como w^I y se define así:

$$w^I = \begin{cases} \epsilon, & \text{si } w = \varepsilon \\ a_n \ldots a_2 a_1, & \text{si } w = a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases}$$

Inversa de una cadena de manera recursiva

La Inversa de una cadena Sea $u \in \Sigma^*$ entonces u^{-1} es la inversa.

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \varepsilon \\ y^I a & \text{si } w = ay, a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

- Sea x='able' entonces obtener x^I

$$\begin{aligned} x^I = (able)^I &= (ble)^I a \\ &= (le)^I ba \\ &= (e)^I lba \\ &= (\varepsilon)^I elba \\ &= \varepsilon elba \\ &= elba \end{aligned}$$

- Sea la concatenación de las cadenas “ab” y “cd” que forma “abcd” sobre un alfabeto. Sabemos que $(abcd)^I = dcba$, por tanto $dcba = (cd)^I(ab)^I$. Por lo tanto, si w e y son cadenas y si $x = wy$, entonces $x^I = (wy)^I = y^I w^I$
- En general, $(x^I)^I = x$, para demostrar, suponga que $x = a_1 a_2 \ldots a_n$.

$\underbrace{perro}_{y}\underbrace{\epsilon}_{a}$

$\underbrace{erro}_{y}\ \underbrace{p\epsilon}_{a}$

$\underbrace{rro}_{y}\ \underbrace{ep\epsilon}_{a}$

$\underbrace{ro}_{y}\ \underbrace{rep\epsilon}_{a}$

$\underbrace{o}_{y}\ \underbrace{rrep\epsilon}_{a}$

$\underbrace{orrep\epsilon}_{a}$

$\to \epsilon orrep$

$\boxed{orrep}$

Sufijos y prefijos

Cadena

Definición formal: Una cadena v es una subcadena o subpalabra de u si existen x, y tales que $u = xvy$. Nótese que x o y pueden ser ϵ y por lo tanto, la cadena vacía es una subcadena de cualquier cadena.

- Un *prefijo* de u es una cadena v tal que $u = vw$ para alguna cadena $w \in \Sigma^*$. Se dice que v es un **prefijo propio** si $v \neq u$.
- Un *sufijo* de u es una cadena de v tal que $u = wv$ para alguna cadena $w \in \Sigma^*$. Se dice que v es un **sufijo propio** si $v \neq u$.

Ejemplo de cadenas que son sufijos y prefijos

Sea $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ y $u = bcbaadb$

Prefijos de u

ϵ
b
bc
bcb
$bcba$
$bcbaa$
$bcbaad$
$bcbaadb$

Sufijos de u

ϵ
b
db
adb
$aadb$
$baadb$
$cbaadb$
$bcbaadb$

La concatenación como una operación binaria

Operación binaria

Una **operación binaria** en un conjunto A es una función $f : A \times A \to A$, esta deberá satisfacer las siguientes propiedades:

1. La operación binaria deberá estar definida para cada par ordenado de A, es decir, f asigna a **UN** elemento $f(a, b)$ de A a cada par ordenado (a, b) de elementos de A.
2. Como una operación binaria es una función, sólo un elemento de A se asigna a cada par (a, b).

- Sea $A = Z$, se define $a * b$ como $a + b$. Entonces, $*$ es una operación binaria en Z.
- Sea $A = Z^+$, se define $a * b$ como $a - b$. Entonces $*$ no es una operación binaria ya que no asigna un elemento de A a cualquier par ordenado de elementos de A.

Concatenación de cadenas como una operación binaria

Concatenación

La **operación de la concatenación** $\cdot$ es una **operación binaria** entre cadenas de un alfabeto Σ, esto es:

$$\cdot : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$$

Sean $u, v \in \Sigma^*$ y se denota por $u \cdot v$ o simplemente uv.

$$\mid uv \mid = \mid u \mid + \mid v \mid$$

- Dado el alfabeto Σ y dos cadena $w, u \in \Sigma^*$
  - Entonces $w \cdot \epsilon = \epsilon \cdot w = w$.
  - Si $u = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, $w = b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$, entonces,

    $$u \cdot w = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$$

    Por tanto $\mid u \cdot w \mid = n + m$
- La concatenación de cadenas es asociativa. Es decir, si $u, v, w \in \Sigma^*$, entonces:

  $$(uv)w = u(vw)$$

Semigrupos

Semigrupo

Sea $(\Sigma^*, \cdot)$ es un **semigrupo** el cual es un conjunto no vacío Σ^* junto con una operación binaria asociativa $\cdot$ definida en Σ^*.

- El conjunto $P(S)$, donde S es un conjunto, junto con la operación de la unión $(P(S), \cup)$ es un semigrupo y es también un semigrupo conmutativo.

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $* : P(S) \times P(S) \to P(S)$

  Sea $S = \{a, b\}$ entonces $\{a, b\} \cup (\emptyset \cup \{b\}) = (\{a, b\} \cup \emptyset) \cup \{b\}$

- El semigrupo $(\Sigma^*, \cdot)$ no es un semigrupo cunmutativo porque para $u, w \in \Sigma^*$ no se cumple que $u \cdot w = w \cdot u$.
- Sea $w = ac$, $w_1 = ab$ y $w_2 = bb$ tal que $w, w_1, w_2 \in \Sigma^*$ entonces

$$\begin{aligned} w(w_1 w_2) &= (ww_1)w_2 \\ ac(abbb) &= (acab)bb \\ acabbb &= acabbb \end{aligned}$$

Monoide

Monoide

Un **monoide** es un semigrupo $(S, *)$ que tiene idéntico.

- El semigrupo $P(S)$ con la operación de la unión tiene como idéntico a $\emptyset$ ya que
$$\emptyset * A = \emptyset \cup A = A = A \cup \emptyset$$
- Sea $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ un **monoide** con las siguientes propiedades:
  1. Es una operación binaria, es decir la concatenación es cerrada. $\forall x, y \in \Sigma^*$, entonces $x \cdot y \in \Sigma^*$.
  2. La concatenación es un semigrupo $(\Sigma^*, \cdot)$ y por tanto $\cdot$ es asociativa $\forall x, y, z \in \Sigma^*$, $(xy)z = x(yz)$
  3. La cadena vacía ϵ es la idéntica para la concatenación: $\forall x \in \Sigma^*$, $\epsilon \cdot x = x \cdot \epsilon = x$

Lenguajes

Lenguaje

Un *lenguaje* es un conjunto de palabras o cadenas. Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^* y si $L = \Sigma^*$ es el lenguaje de todas las cadenas sobre Σ.

- Sea $L = \emptyset$ el lenguaje vacío
- $\emptyset \subseteq L \subseteq \Sigma^*$

- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{a, aba, aca\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{a, aa, aaa\} = \{a^n : n \geq 1\}$ $n \leq 3$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{\epsilon, aa, aba, ab^2a, ab^3a\} = \{ab^na : n \geq 0\} \cup \{\epsilon\}$ $n \leq 3$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$. $L = \{w \in \Sigma^* : w$ no contiene el símbolo $c\}$. Por ejemplo, $abbaab \in L$ pero $abbcaa \notin L$.
- Sobre $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ el lenguaje de las cadenas que tienen igual número de ceros, unos y dos's en cualquier orden.

$010122 \in L$ $\quad$ $001 \notin L$

Operaciones entre lenguajes

- Operaciones entre lenguajes; Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ operaciones de conjuntos.
- Las operaciones lingüísticas son la concatenación, potencia, inverso y clausura.
- Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces,

$$A \cup B = \{x | \cancel{x} : x \in A \quad o \quad x \in B\}$$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
$\{a, ab\} \cup \{ab, aab, aaabb\} = \{a, ab, aab, aaabb\}$

Operaciones entre lenguajes

- Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces,

$$A \cap B = \{x | x : x \in A \quad y \quad x \in B\}$$

$\{a, ab\} \cap \{ab, aab\} = \{ab\}$
$\{a, aab\} \cap \{a, ab, aab, aaabb\} = \{a, aab\}$
$\{\epsilon\} \cap \{a, ab, aab, aaabb\} = \emptyset$

- Complemento en Σ^*:

$$\sim A \quad = \quad \{x \in \Sigma^* | x \notin A\}$$
$$\sim A \quad = \Sigma^* - A$$

$A =$\{ Cadenas de longitud par\} sobre $\Sigma = \{a, b\}$, entonces $\sim A$=\{cadenas de longitud impar\}.

Operaciones entre lenguajes

- Sean A, B lenguajes sobre Σ entonces,

  $$A - B = \{x | x : x \in A \quad y \quad x \notin B\}$$

  Sea B: El lenguaje de todas las cadenas de ceros de cualquier longitud. Entonces:
  Sea $A = \{0,1\}^*$ y $B = \{0\}^*$ entonces
  $A - B = \{0,1\}^* - \{0\}^* = 0^*1(0 \cup 1)^*$
  $A - B$ es el lenguaje de todas las cadenas de unos y ceros con almenos un uno.

Lenguajes

Lenguaje Universal

Si $\Sigma \neq \emptyset$, entonces Σ^* es el conjunto de todas las cadenas sobre Σ. Se le llama **lenguaje universal.**

- Σ^* es un conjunto infinito de cadenas de longitud finita sobre Σ.

Teorema

Sean A y B dos lenguajes sobre el alfabeto Σ. Entonces $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

$\Rightarrow$) Suponiendo que $A = B$, entonces si $x \in A$, como $A = B$ entonces $x \in B$ por tanto $A \subseteq B$ de la misma forma si $x \in B$ entonces como $A = B$ entonces $x \in A$ por lo tanto $B \subseteq A$.
$\Leftarrow$) Se demuestra que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.

Lenguajes

- Sea el lenguaje del conjunto de cadenas con igual número de ceros y unos.

$$L_1 = \{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1001, 000111, \ldots\}$$

y sea

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\} \subset L_1 \subset \{0,1\}^*$$

- La concatenación de lenguajes de dos lenguajes *A y B* sobre Σ, notada por *A.B* o simplemente *AB*.
- $AB = \{uv : u \in A, v \in B\}$
- $A \cdot \emptyset = \emptyset \cdot A = \emptyset$

$A = \{a, ab, abb\}$
$B = \{aa, ab, aaa\}$

$\forall u \in A$

$$A \cdot \emptyset = \{uw : u \in A, w \in \emptyset\} = \emptyset$$

$\forall v \in B$

$\boxed{AB = \{aaa, aab, aaaa, abaa, abab, abbaa, abaaa, abbab, abbaaa\}}$

① Lenguaje vacío → concatenación equ mult 0.

Lenguajes

Lenguaje que contiene cadena vacía

$\{\epsilon\} \neq \emptyset$

- $A \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot A = A$

$$A \cdot \{\epsilon\} = \{uw : u \in A, w \in \{\epsilon\}\} = \{u : u \in A\} = A$$

- Las propiedad distributiva generalizada de la concatenación con respecto a la unión.

$$A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)$$

$$\begin{aligned}
x \in A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i &\iff x = u \cdot v, u \in A, v \in \bigcup_{i \in I} B_i \\
&\iff x = u \cdot v, u \in A, v \in B_j, \\
&\quad \exists j \in I \\
&\iff x \in A \cdot B_j, \exists j \in I \\
&\iff x \in \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)
\end{aligned}$$

$A \cup B \cup C \cup D$

$(A \cup B) \cup (C \cup D)$

$A \cup (B \cup C) \cup D$

$ABCD$

$(AB)(CD) = A(BC)D$

Lenguajes

- Ejemplo. Sean $A = \{ab\}$, $B_1 = \{a, b\}$, y $B_2 = \{abb, b\}$

$$A \cdot \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cdot B_i)$$

$$\begin{aligned} A \cdot \bigcup_{i \in I = 2} B_i &= A \cdot (B_1 \cup B_2) \\ A \cdot \bigcup_{i \in I = 2} B_i &= \{ab\} \cdot (\{a, b\} \cup \{abb, b\}) \\ \{ab\} \cdot (\{a, b\} \cup \{abb, b\}) &= (\{ab\} \cdot (\{a, b\}) \cup (\{ab\} \cdot \{abb, b\}) \end{aligned}$$

- De igual forma se puede demostrar que:

$$\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cdot A = \bigcup_{i \in I} (B_i \cdot A)$$

La concatenación no es distributiva con respecto a la intersección, es decir, no se cumple que $A \cdot (B \cap C) = A \cdot B \cap A \cdot C$. Contraejemplo: Sea $A = \{a, \epsilon\}$, $B = \{\epsilon\}$, $C = \{a\}$ se tiene:

$$A \cdot (B \cap C) = \{a, \epsilon\} \cdot \emptyset = \emptyset$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A \cdot B \cap A \cdot C &= \{a, \epsilon\} \cdot \{\epsilon\} \cap \{a, \epsilon\} \cdot \{a\} \\ &= \{a, \epsilon\} \cap \{a^2, a\} = a \end{aligned}$$

$\neq$

Lenguajes

Potencia del lenguaje

Potencia del lenguaje Dado un lenguaje A sobre Σ y $(A \subseteq \Sigma^*)$ y $n \in \mathbb{N}$, se define

$$A^n = \begin{cases} \{\epsilon\}, & \text{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo. Sea $A = \{ab\}$ sobre un alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, entonces:

$A^0 = \{\epsilon\}$
$A^1 = A = \{ab\}$
$A^2 = A \cdot A^1 = \{abab\}$
$A^3 = A \cdot A^2 = \{ababab\}$

$\emptyset^n = \emptyset$

$A = \{a, b\}$

$A^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

$A^* = \{\epsilon, a, b, aa, aaa, aaaa, ab, \ldots\}$

Cerradura de Kleene

Def. formal de Cerradura de Kleene

La cerradura de Kleene de un lenguaje $A \subseteq \Sigma^*$ es la unión de las potencias: se denota por A^*

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n$$

- `Observación:` A^* se puede describir de la siguiente manera:

  $$A^* = \{u_1 u_2 \ldots u_n : u_i \in A, n \geq 0\}$$

  Es el conjunto de todas las concatenaciones de la cadena A, incluyendo ϵ
- la cerradura positiva se denota por A^+

$$A^+ = \bigcup_{i \geq 1} A^i = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots \cup A^n$$

$$A^* = A^0 \cup A^+$$

Cerradura de Kleene

- Observe que $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$ y $A^* = A^+$ si y solamente si $\epsilon \in A$
- $A^+ = A^* \cdot A = A \cdot A^*$

$$
\begin{aligned}
A \cdot A^* &= A \cdot (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots) \\
&= (A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots) \\
&= A^+
\end{aligned}
$$

Se demuestra lo mismo que $A^+ = A^* \cdot A$

Cerradura de Kleene

$A^* \cdot A^* = A^*$

1. $\Rightarrow$), Sea un $x \in A^* \cdot A^*$, entonces $x = u \cdot v$, con $u \in A^*$ y $v \in A^*$ Por tanto $x = u \cdot v$, con $u = u_1 u_2 \ldots u_n$, $u_i \in A$, $n \geq 0$ y $v = v_1 v_2 \ldots v_m$, $v_i \in A$, $m \geq 0$ De donde

$$x = u \cdot v = u_1 u_2 \ldots u_n \cdot v_1 v_2 \ldots v_m$$

   con $u_i \in A$, $v_i \in A$, por lo tanto x, es una concatenación de $n + m$ cadenas de A, así que $x \in A^*$.

2. $\Leftarrow$) Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $x = x \cdot \varepsilon \in A^* \cdot A^*$. Esto prueba la igualdad de los conjuntos $A^* \cdot A^*$ y A^*.

Cerradura de Kleene

$A = \{a\} \to A^+ = \{a, aa, aaa, \ldots\}$

$A^+A^+ = \{aa, aaa, aaaa \ldots\}$

- $(A^*)^n = A^*$, para todo $n \geq 1$
- $(A^*)^* = A^*$
- $A^+ \cdot A^+ \subseteq A^+$

  Contraejemplo de $A^+ \cdot A^+ = A^+$. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a\}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
A^+ &= (A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots) \\
&= \{a\} \cup \{aa\} \cup \{aaa \ldots\} \\
&= \{a^n : n \geq 1\}
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
A^+ \cdot A^+ &= \{a, a^2, a^3, \ldots\} \cdot \{a, a^2, a^3, \ldots\} \\
&= \{a^2, a^3, \ldots\} \\
&= \{a^n : n \geq 2\}
\end{aligned}
$$

Cerradura de Kleene

- $(A^*)^+ = A^*$

$$\begin{aligned}(A^*)^+ &= (A^*)^1 \cup (A^*)^2 \cup (A^*)^3 \cup \ldots \\ &= A^* \cup A^* \cup A^* \ldots \\ &= A^*\end{aligned}$$

- $(A^+)^* = A^*$

$$\begin{aligned}(A^+)^* &= (A^+)^0 \cup (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup \ldots \\ &= \{\epsilon\} \cup A^+ \cup A^+A^+ \cup \ldots \\ &= A^* \cup \text{(conjuntos contenidos en } A^+\text{)} \\ &= A^*\end{aligned}$$

- $(A^+)^+ = A^+$

$$\begin{aligned}(A^+)^+ &= (A^+)^1 \cup (A^+)^2 \cup (A^+)^3 \cup \ldots \\ &= (A^+)^1 \cup \text{(conjuntos contenidos en } A^+\text{)} \\ &= A^+\end{aligned}$$

Operaciones claves

Propiedades

~~Operaciones~~ claves en los lenguajes:

- $A^* \subseteq \Sigma^* \qquad A^+ \subseteq \Sigma^+$

  $A^+ \subseteq A^* \subseteq \Sigma^*$
- $A^+ \subseteq A^*$
- $\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^+$
- $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$
- $\emptyset^n = \emptyset$, $n \geq 1$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\} \qquad \emptyset^+ = \emptyset$

Inverso de un lenguaje

Inverso de un lenguaje

Sea A sobre Σ, se define A^I como:

$$A^I = \{u^I : u \in A\}$$

Sean A y B lenguajes sobre Σ tal que $(A, B \subseteq \Sigma^*)$

- $(A.B)^I = B^I.A^I$

$$\begin{aligned}
x \in (A \cdot B)^I &\iff x = u^I, \text{donde, } u \in A \cdot B \\
&\iff x = u^I, \text{ donde, } u = vw,\ v \in A,\ w \in B \\
&\iff x = (vw)^I, \text{ donde, } v \in A,\ w \in B \\
&\iff x = w^I v^I, \text{ donde, } v \in A,\ w \in B \\
&\iff x = B^I A^I
\end{aligned}$$

$A = \{aa, ab\}$ $B = \{a, b\}$ $\therefore A' = \{aa, ba\}$ $B' = \{a, b\}$

$(AB)^I = \{aaa, baa, aba, bba\} \leftarrow B'A' = \{aaa, aba, baa, bba\}$

Propiedades del inverso de un lenguaje

Sean A y B lenguajes sobre Σ tal que $(A, B \subseteq \Sigma^*)$

- $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- $(A \cap B)^I = A^I \cap B^I$
- $(A^I)^I = A$
- $(A^*)^I = (A^I)^*$
- $(A^+)^I = (A^I)^+$

Lenguajes regulares

Los lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ se definen recursivamente como:

- $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ y $\{a\}$, $a \in \Sigma$ son lenguajes regulares.
- si A y B son lenguajes regulares, también lo son:

$$A \cup B \text{ (Unión)}$$
$$A \cdot B \text{ (Concatenación)}$$
$$A^* \text{(Cerradura de Kleene)}$$

`Ejemplo 1.` Dado $\Sigma = \{a, b\}$ el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a: $A = \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*$

`Ejemplo 2.` Lenguaje de todas las cadenas que comienzan con b: $B = \{b\} \cdot \{(a \cup b)\}^*$

`Ejemplo 3.` Lenguaje de todas las cadenas que contienen la cadena *ba*: $C = \{(a \cup b)\}^* \cdot \{ba\} \cdot \{(a \cup b)\}^*$

Propiedades de clausura

Teorema

Si L, L_1 y L_2 son lenguajes regulares sobre un alfabeto Σ, también lo son:

1. $L_1 \cup L_2$
2. $L_1 L_2$
3. L^+
4. $\overline{L} = \Sigma^* - L$
5. L^*
6. $L_1 \cap L_2$
7. $L_1 - L_2$
8. $L_1 \triangle L_2$ $\rightarrow$ $L_1L_2 \cup L_2L_1$

Observación

Un sublenguaje (subconjunto) de un lenguaje regular no es necesariamente regular, es decir, la familia de los lenguajes regulares no es cerrada para subconjuntos.

Observación

- *Un lenguaje regular puede contener sublenguajes No-regulares. Sea* $L = \{a^n b^n\}$ *es un sublenguaje del lenguaje regular* $a^* b^*$
- *Todo lenguaje finito es regular y la unión finita de lenguajes regulares es regular.*
- *La unión infinita de lenguajes no necesariamente es regular.*

$$L = \{a^n b^n : n \geq 1\} = \bigcup_{i \geq 1} \{a^i b^i\}$$

Donde cada $\{a^i b^i\}$ *regular, pero L No lo es.*

Definición formal de expresiones regulares

Las expresiones regulares sobre un alfabeto Σ se definen recursivamente como:

- $\emptyset$, ϵ y a, $a \in \Sigma$ son expresiones regulares.
- si A y B son expresiones regulares, también lo son:

$$A \cup B \text{ (Unión)}$$
$$A \cdot B \text{ (Concatenación)}$$
$$A^* \text{(Cerradura de Kleene)}$$

- Son expresiones regulares aab^*, ab^+, $(aaba^*)^+$
- Sea el conjunto $\{\epsilon, aa, aba, ab^2a, ab^3a, ab^4a, ...\}$ entonces $\{\epsilon\} \cup ab^*a$ es una expresión regular.
- Expresión regular de todas las cadenas impares sobre $\Sigma = \{a, b\}$

$$\underline{a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*} \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

a a a b

a b a a a

Expresiones regulares

Teorema

Sean r, s y t expresiones regulares sobre Σ, entonces:

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r\varepsilon = r = \varepsilon r$
6. $r\emptyset = \emptyset = \emptyset r$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$ y $(r \cup s)t = rt \cup st$
9. $r^* = r^{**} = r^*r^* = (\varepsilon \cup r)^* = r^*(r \cup \varepsilon) = (r \cup \varepsilon)r^* = \varepsilon \cup rr^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^*s^*)^* = (r^*s)^*r^* = r^*(sr^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^*r$
12. $(r^*s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^*s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^*r$

Ejemplos expresiones regulares

Ejemplo 1. Muestre que si $r = s^* t$ implica que $r = sr \cup t$

$$\begin{aligned} r = s^* t &= (\varepsilon \cup s^+)t \text{ ya que } s^* = \varepsilon \cup s^+ \\ &= (\varepsilon \cup ss^*)t \\ &= \varepsilon t \cup s \underbrace{s^* t}_{r} \\ &= t \cup sr \\ &= sr \cup t \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Probar que $(b \cup aa^* b) \cup (b \cup aa^* b)(a \cup ba^* b)^*(a \cup ba^* b)$ y $a^* b(a \cup ba^* b)^*$ son equivalentes.

$$(b \cup aa^*b) \cup (b \cup aa^*b)(a \cup ba^*b)^*(a \cup ba^*b)$$

$$= \underline{a^*b}\ \underline{(a \cup ba^*b)^*}$$

$$(b \cup a^*ab) \cup (b \cup a^*ab)(a \cup a^*bb)^*(a \cup a^*bb)$$

$$(a^*ab \cup b) \cup (a^*ab \cup b)(a \cup a^*bb)(a \cup a^*bb)^*$$

$$b\underbrace{(a^*a \cup \epsilon)}_{a^+} \cup b(a^*a \cup \epsilon)\underbrace{(a \cup a^*bb)}_{r}\underbrace{(a \cup a^*bb)^*}_{r^*}$$

$$ba^* \cup (ba^*)(a \cup a^*bb)^+$$

$$ba^*(\epsilon \cup (a \cup a^*bb)^+)$$

$$ba^*(a \cup a^*bb)^*$$

$$a^*b(a \cup ba^*b)$$

Ejemplos expresiones regulares

Ejemplo 3. ¿Las siguientes expresiones regulares representan el mismo lenguaje?

$$(a^*b)^* \quad \text{y} \quad \epsilon \cup (a \cup b)^* b$$

Ejemplo 4. Demostrar que $r(sr)^* = (rs)^* r$

$\Rightarrow$) Sea $w \in r(sr)^*$, entonces
$w = r_0(s_1 r_1)(s_2 r_2)\ldots(s_n r_n)$, para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} w &= r_0(s_1 r_1)(s_2 r_2)\ldots(s_n r_n) \\ w &= (r_0 s_1)(r_1 s_2)(r_2 s_3)\ldots(r_{n-1} s_n) r_n \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r(sr)^* \subseteq (rs)^* r$

$\Leftarrow$)

Sea $w \in (rs)^* r$, entonces
$w = (r_0 s_0)(r_1 s_1)\ldots(r_{n-1} s_{n-1}) r_n$, para $n \geq 0$

Encontrar las expresiones regulares de los siguientes lenguajes

Ejemplo 5. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que comienzan con b y terminan con a.

$$b(a \cup b)^* a$$

Ejemplo 6. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen exactamente dos a's

$$b^* ab^* ab^*$$

Ejercicios resueltos de expresiones regulares

Ejemplo 7. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de símbolos (palabras de longitud par)

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Ejemplo 8. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen un número impar de símbolos (palabras de longitud impar)

$$a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Ejemplo 9. $\Sigma = \{a, b\}$ Lenguaje de todas las palabras que tienen un número par de a's.

$$b^*(ab^*a)^*b^*$$

$\#a > 0 \longrightarrow b^*(ab^*a)^+b^*$

Ejercicios resueltos de expresiones regulares

Ejemplo 10. Sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ lenguaje de todas las cadenas que tienen exactamente dos ceros:

$$1^*01^*01^*$$

Ejemplo 11. Sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ lenguaje de todas las cadenas cuyo penúltimo símbolo, de izquierda a derecha, es un 0.

$$(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)$$

Expresiones regulares en la computación

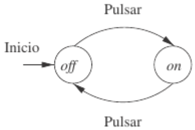
- Las expresiones regulares sirven para la construcción de analizadores léxicos.
- `http://regexpal.com/` es un testeador de expresiones regulares en java.

```
'[A-Z][a-z]*[ ][A-Z][A-Z]'
```

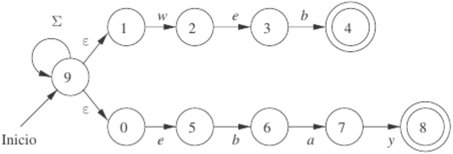
Representa palabras que comienzan por una letra mayúscula seguida de un espacio en blanco y de dos letras mayúsculas. Ejemplo, reconocería `Ithaca NY`. Por ejemplo, `Palo Alto CA` no la reconocería.

Contenido

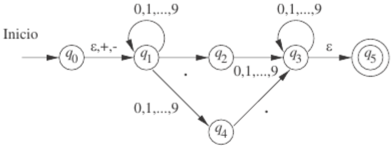
Ajuste



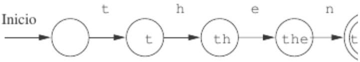
A.F de un interruptor



Uso de transiciones-ε para ayudar a reconocer palabras clave.



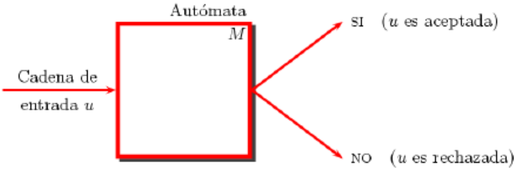
Un AFN-ε que acepta números decimales.



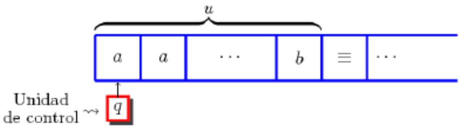
Reconocimiento de la palabra then

Autómatas finitos

Son máquinas abstractas que procesan cadenas, las cuales son aceptadas o rechazadas.



El autómata posee **unidad de control** que inicialmente escanea o lee la casilla desde el extremo izquierdo de la cinta. Tiene unos estados o configuraciones internas.



Función de transición

Sea un autómata $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$

$a\,b\,a\,a\,a\,b\,a \doteq$

$q_0 q_0 q_1 q_1 q_1 q_2 q_1 \leftarrow$ rechazada

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1

$\delta(q_0, a) = q_0 \qquad \delta(q_0, b) = q_1$

$\delta(q_1, a) = q_1 \qquad \delta(q_1, b) = q_2$

$\delta(q_2, a) = q_1 \qquad \delta(q_2, b) = q_1.$

$T = \{q_0, q_2\}$, estados de aceptación.

1. $u = aabab$.

$q_0 \quad q_0 \quad q_0 \quad q_1 \quad q_1 \quad q_2$

$\overbrace{a\ a\ b\ a\ b}^{u}$

a	a	b	a	b	$\equiv$	$\cdots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
q_0	q_0	q_0	q_1	q_1	q_2	

u es aceptada.

2. $v = aababa$.

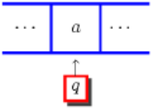
$\overbrace{a\ a\ b\ a\ b\ a}^{v}$

a	a	b	a	b	a	$\equiv$	$\cdots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
q_0	q_0	q_0	q_1	q_1	q_2	q_1	

v es rechazada.

Lenguaje aceptado por un autómata

Caso especial: la cadena λ es la cadena de entrada.



Dado un autómata M, el **lenguaje aceptado o reconocido** por M se denota $L(M)$ y se define por

$$\boxed{\begin{array}{rcl} L(M) & := & \{u \in \Sigma^* : M \text{ termina el procesamiento de la cadena} \\ & & \text{de entrada } u \text{ en un estado } q \in F\}. \end{array}}$$

Autómatas finitos (FSAs: Finite State-Automata)

Los autómatas finitos se dividen en autómatas finitos deterministas (AFD) (es función) y en autómatas finitos no deterministas (AFN)(es una relación).

Autómata finito determinista

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$ un AFD entonces:

- Σ: es el alfabeto de entrada.
- Q: es el conjunto de estados
- q_0:Estado inicial
- T: Conjunto de estados finales.
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ determina un único estado siguiente para el par $\delta(q_i, \gamma)$ correspondiente al estado actual y la entrada.

Un AFD puede ser representado por un grafo dirigido y etiquetado.

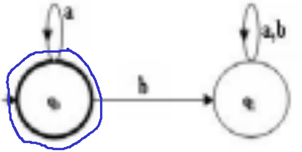
Ejemplos autómatas finitos deterministas

Ejemplo 1. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $L = a^* = \{\varepsilon, a, a^2, a^3, \ldots\}$

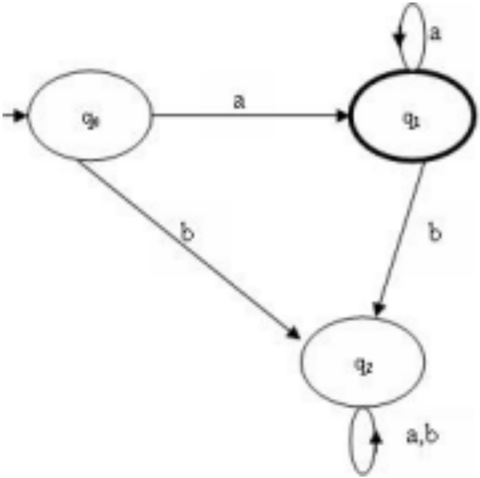
δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_1

$\delta(q_0, a) = q_0 \quad \delta(q_0, b) = q_1$

$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_1$

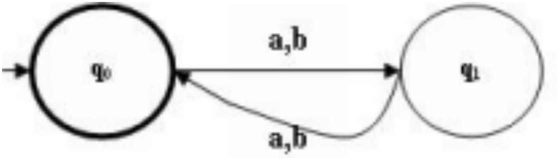


Ejemplo 2. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $L = a^+ = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$

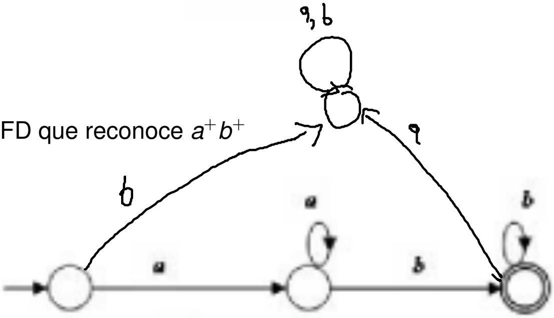


Ejemplos autómatas finitos deterministas

Ejemplo 3. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que tienen un número par de símbolos



Ejemplo 4. AFD que reconoce a^+b^+



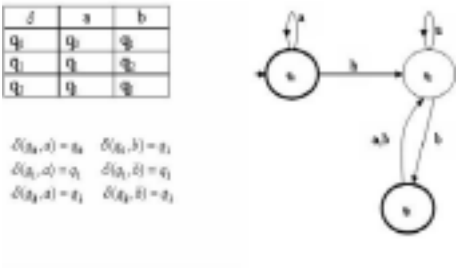
Ejemplos autómatas finitos deterministas

Ejemplo 5. El diagrama y tabla de transición en cierta forma determinan si es un autómata finito determinista o no determinista.

Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

q_0 : estado inicial

$T = \{q_0, q_2\}$ estados finales o de aceptación.



Es importante anotar que en la tabla de transición por cada pareja (q_i, γ) hay un sólo estado q_j por eso δ es una función de transición.

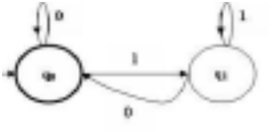
el lenguaje que reconoce este AFD es:

$$a^*(b(a + ba + bb)^*b) + a^*$$

Ahora como el estado inicial es un estado final este AFD reconoce ε

Ejemplos autómatas finitos deterministas

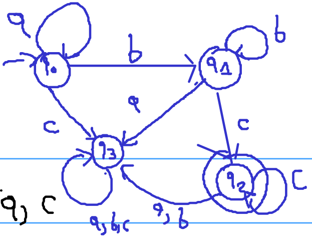
Ejemplo 6. Diseñar el AF sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que reconozca en binario el lenguaje de todos los múltiplos de 2.



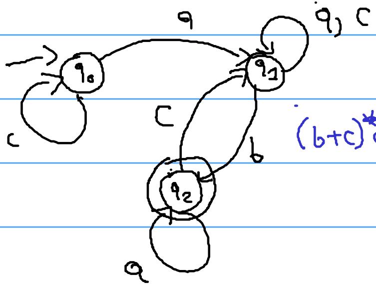
Binario	Decimal
0	0
10	2
100	4
110	6
1000	8
1010	10
1100	12
1110	14
⋮	⋮

$\Sigma = \{a\ b\ c\}$

1) $a^* b b^* c^+$



2)



$(b+c)^* a (a+c)^* b (a^* + (c(a+c)^* b)^*)$

Autómatas finitos No determinísticos

Autómatas finitos No determinísticos

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ un AFN entonces:

- Σ: es el alfabeto de entrada.
- Q: es el conjunto de estados
- q_0:Estado inicial
- T: Conjunto de estados finales.
- $\triangle$: es una relación tal que:

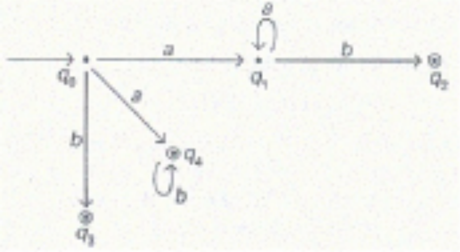
$$(Q \times \Sigma) \rightarrow 2^Q$$

Donde 2^Q denota el conjunto potencia de Q o el conjunto de todos los subconjuntos de Q.

$$2^Q = \{A | A \subseteq Q\}$$

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 1. Diseñar el AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje regular $a^*b \cup ab^*$



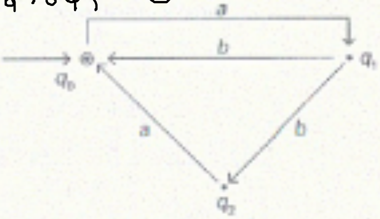
Δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{q_4\}$

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 2. Diseñar el AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $(ab \cup aba)^*$

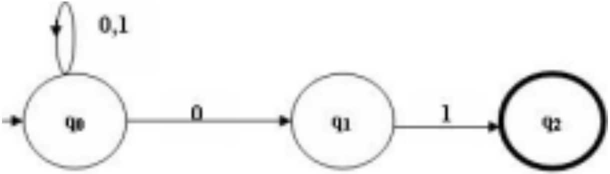
$\{\varepsilon, ab, aba, abab, abaaba, \ldots\}$

Δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\emptyset$



Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

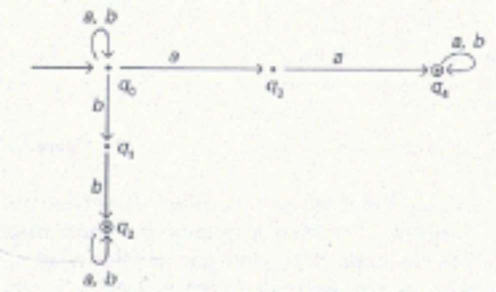
Ejemplo 3. Diseñar el AF sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que terminan en 01



Δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

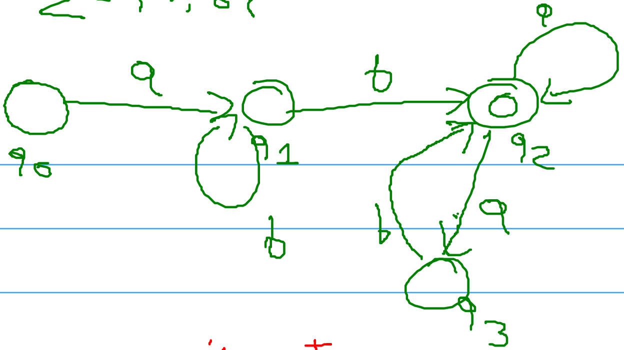
Ejemplo 4. Obetener la expresión regular del siguiente AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$.



Δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

$(a^* b^*)^* (aa \cup bb)(a^* b^*)^*$

$\Sigma = \{a, b\}$



$a(b)^+(a^* \cup (ab)^*)^*$

Equivalencia de AFN y AFD

Teorema

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ un AFN. Entonces existe un AFD $M' = (Q', \Sigma', q_0', T', \delta)$ tal que $L(M) = L(M')$.

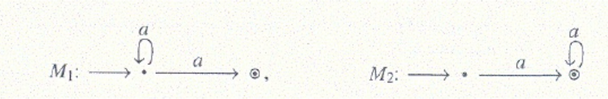
- *El conjunto q_0 se corresponde con q_0'*
- *El conjunto de estados finales T' de Q' se corresponde con los conjuntos de estados de Q que contienen un estado de T*
- *El conjunto de estados de Q' se corresponde con el conjunto de estados de Q que se vaya formando mediante el análisis de una cadena sobre M*

Equivalencia entre autómatas

Autómatas equivalentes

Dos AFD son equivalentes M_1 y M_2 son equivalentes si $L(M_1) = L(M_2)$.

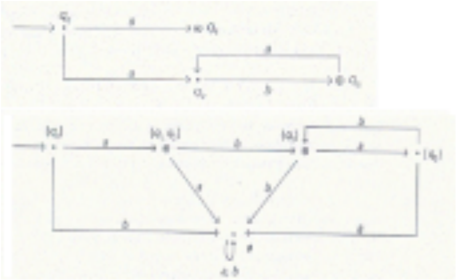
Sean M_1 y M_2 sobre el alfabeto $\sum = \{a\}$,



$L(M_1) = L(M_2) = a^*$

Ejemplos equivalencia de AFN y AFD

Ejemplo 1. Consideremos el AFN M que acepta $a \cup (ab)^+$



Para este AFN se tiene:

$$\triangle(q_0, a) = \{q_1, q_2\} \qquad \triangle(q_0, b) = \emptyset$$

$$\triangle(\{q_1, q_2\}, a) = \emptyset \qquad \triangle(\{q_1, q_2\}, b) = \{q_3\}$$

$$\triangle(\emptyset, b) = \triangle(\emptyset, b) = \emptyset \qquad \triangle(q_3, a) = \{q_2\}$$

$$\triangle(q_3, b) = \emptyset \qquad \triangle(q_2, a) = \emptyset$$

$$\triangle(q_2, b) = \{q_3\}$$

Entonces se verifica que la regla de transición es una función. Por tanto, $M' = (Q', \Sigma', q_0', T', \delta)$ donde:

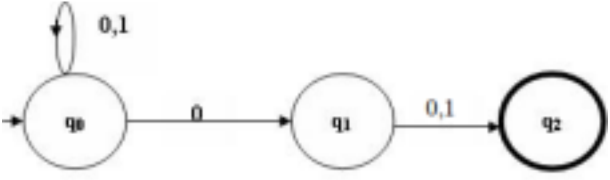
$$\begin{aligned} Q' &= \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}\} \\ \Sigma' &= \Sigma \\ s' &= \{q_0\} \\ T' &= \{\{q_3\}, \{q_1, q_2\}\} \end{aligned}$$

y δ viene dada por la siguiente tabla:

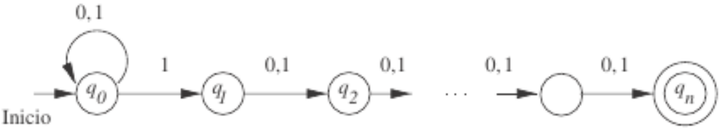
δ	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$

Ejemplos equivalencia de AFN y AFD

- **Ejemplo 2.** Consideremos el AFN M que acepta $(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)$



- **Caso desfavorable para la construcción de subconjuntos**



Este AFN no tiene un AFD equivalente con menos de 2^n estados.

Crecimiento exponencial del número de estados para el AFD.

$\Delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

$\Delta(q_0, 1) = \{q_0\}$

$\Delta(q_1, 0) = \{q_2\}$

$\Delta(q_1, 1) = \{q_2\}$

$\Delta(q_2, 0) = \emptyset$

$\Delta(q_2, 1) = \emptyset$

$\Delta(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\vdots$

$\Delta(\{q_0, q_1\}, 1) = \{q_0, q_2\}$

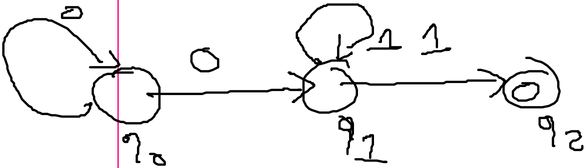
$\vdots$

$\Delta(\{q_0, q_2\}, 0) = \{q_0, q_1\}$

$\vdots$

$\Delta(\{q_0, q_2\}, 1) = \{q_0, q_2\}$

$\vdots$



AFN

$0^+ 1^+$

$\Delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

$\Delta(q_0, 1) = \emptyset$

$\Delta(q_1, 0) = \emptyset$

$\Delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$

$\Delta(q_2, 0) = \emptyset$

$\Delta(q_2, 1) = \emptyset$

$\Delta(\{q_0, q_1\}, 0) = \{\emptyset, q_0, q_1\}$

$\Delta(\{q_0, q_1\}, 1) = \{\emptyset, q_1, q_2\}$

$\Delta(\{q_1, q_2\}, 0) = \emptyset$

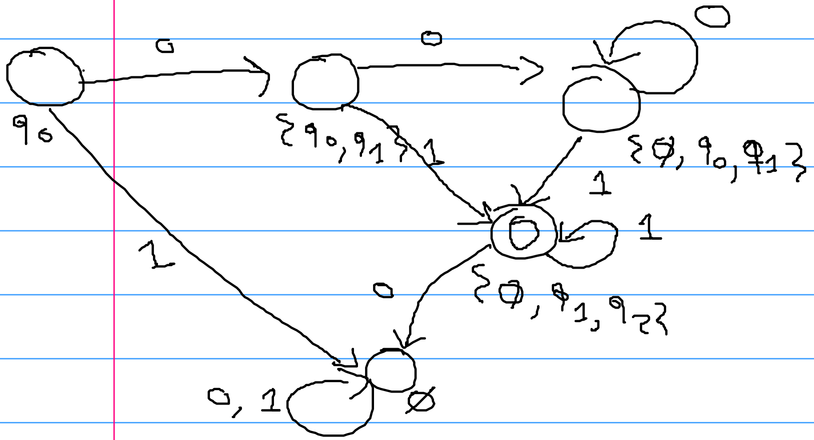
$\Delta(\{q_1, q_2\}, 1) = \{\emptyset, q_1, q_2\}$

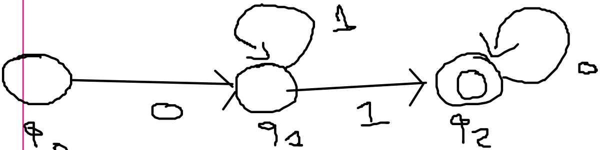
$\Delta(\{\emptyset, q_0, q_1\}, 0) = \{\emptyset, q_0, q_1\}$

$\Delta(\{\emptyset, q_0, q_1\}, 1) = \{\emptyset, q_1, q_2\}$

$\Delta(\{\emptyset, q_1, q_2\}, 0) = \emptyset$

$\Delta(\{\emptyset, q_1, q_2\}, 1) = \{\emptyset, q_1, q_2\}$





$$0\,1^{+}\,0^{*}$$

$\Delta(q_0, 0) = \{q_1\}$

$\Delta(q_0, 1) = \emptyset$

$\Delta(q_1, 0) = \emptyset$

$\Delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$

$\Delta(q_2, 0) = \{q_2\}$

$\Delta(q_2, 1) = \emptyset$

$\Delta(\emptyset, 0) = \emptyset$

$\Delta(\emptyset, 1) = \emptyset$

$\Delta(\{q_1, q_2\}, 0) = \{\emptyset, q_2\}$

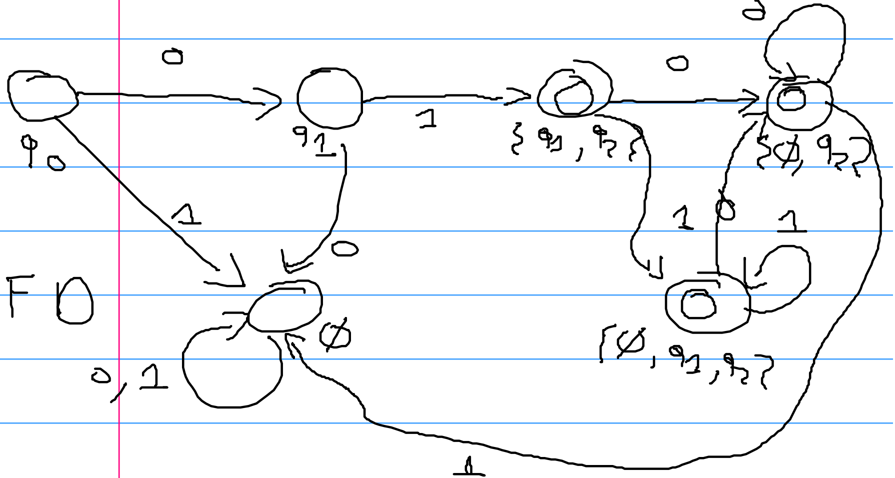
$\Delta(\{q_1, q_2\}, 1) = \{\emptyset, q_1, q_2\}$

$\Delta(\{\emptyset, q_2\}, 0) = \{\emptyset, q_2\}$

$\Delta(\{\emptyset, q_2\}, 1) = \emptyset$

$$\Delta(\{\emptyset, q_1, q_2\}, 0) = \{\emptyset, q_2\}$$

$$\Delta(\{\emptyset, q_1, q_2\}, 1) = \{\emptyset, q_1, q_2\}$$



AFD

Intersección entre lenguajes regulares

Teorema

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo es $L_1 \cap L_2$.

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$ donde: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, q_1, T_1, \delta_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, q_2, T_2, \delta_2)$ Entonces construimos:

$$M = (\underline{Q_1 \times Q_2}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \underline{(q_1, q_2)}, \underline{T_1 \times T_2}, \delta)$$

donde

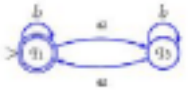
$$\begin{aligned} \delta : Q_1 \times Q_2 \times \Sigma &\rightarrow Q_1 \times Q_2 \\ \delta((q_i, q_j), a) &= (\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a)) \end{aligned}$$

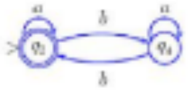
Esta función satisface:

$$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$$

Ejemplo intersección de lenguajes

Ejemplo. Construir el AFD que acepte el lenguaje L de todas las palabras sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen un número par de a's y un número par de b's.



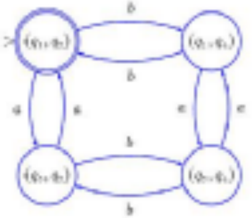


Entonces el lenguaje $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ tiene cuatro estados:
$Q_1 \times Q_2 = \{(q_1, q_2), (q_1, q_4), (q_3, q_2), (q_3, q_4)\}$
$T_1 \times T_2 = \{(q_1, q_2)\}$

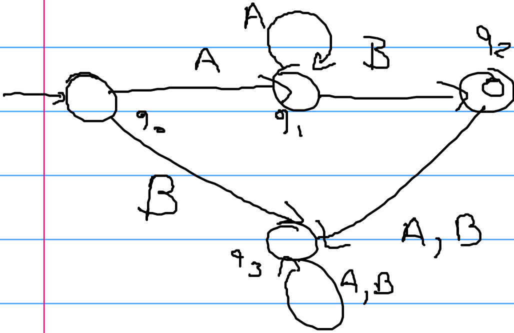
Ejemplo intersección de lenguajes

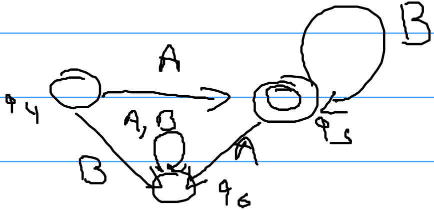
Entonces δ se define como:

$$
\begin{aligned}
\delta((q_1, q_2), a) &= (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) = (q_3, q_2) \\
\delta((q_1, q_2), b) &= (\delta_1(q_1, b), \delta_2(q_2, b)) = (q_1, q_4) \\
\delta((q_1, q_4), a) &= (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_4, a)) = (q_3, q_4) \\
\delta((q_1, q_4), b) &= (\delta_1(q_1, b), \delta_2(q_4, b)) = (q_1, q_2) \\
\delta((q_3, q_2), a) &= (\delta_1(q_3, a), \delta_2(q_2, a)) = (q_1, q_2) \\
\delta((q_3, q_2), b) &= (\delta_1(q_3, b), \delta_2(q_2, b)) = (q_3, q_4) \\
\delta((q_3, q_4), a) &= (\delta_1(q_3, a), \delta_2(q_4, a)) = (q_1, q_4) \\
\delta((q_3, q_4), b) &= (\delta_1(q_3, b), \delta_2(q_4, b)) = (q_3, q_2)
\end{aligned}
$$



$A^+B \cap AB^*$





(q_0, q_4)

(q_0, q_5)

(q_0, q_6)

(q_1, q_4)

(q_1, q_5)

(q_1, q_6)

(q_2, q_4)

(q_2, q_5)

(q_2, q_6)

(q_3, q_4)

(q_3, q_5)

(q_3, q_6)

T

(q_2, q_5)

$\delta((q_0, q_4), A) = (q_1, q_5)$

$\delta((q_0, q_4), B) = (q_3, q_6)$

(q_0, q_5)

(q_0, q_6)

Toerema de Kleene

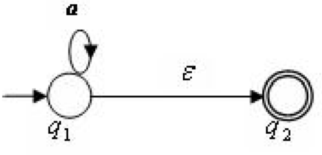
Autómatas con ε-transiciones

`Autómatas con ε-transiciones`: Un autómata con ε-transiciones es un AFN $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ en el que la relación de transición está definida así:
$\triangle : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \longrightarrow 2^Q$
La ε-transición permite al autómata cambiar internamente de estado sin consumir el símbolo leído sobre la cinta.
Donde 2^Q denota el conjunto potencia de Q o el conjunto de todos los subconjuntos de Q.

$$2^Q = \{A | A \subseteq Q\}$$

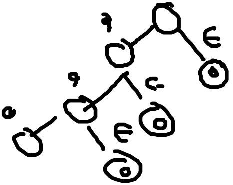
Ejemplos

Ejemplo 1. Se puede representar el lenguaje de la expresión regular $\underbrace{a^*}$ sin necesidad de colocar el estado inicial como estado final.



$\triangle$	a	b	ϵ
q_1	q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

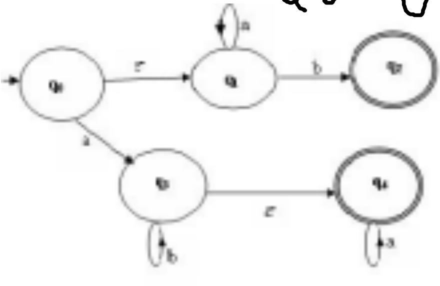
$a^* = \{\epsilon, a, aa, \ldots\}$



Ejemplos

Ejemplo 2. Sea el siguiente AFN-ε

$a^* b \quad \cup\, a b^* a^*$



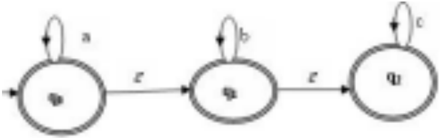
La ε-transición en el AFN permite que se reconozcan cadenas como:
w=aaab
w=abbbbaaa
w=a
w=b

Expresión regular del autómata

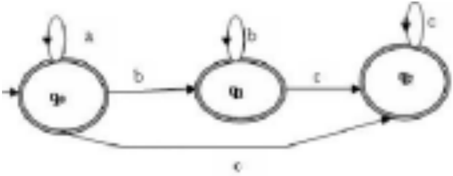
$a^* b \cup ab^* a^*$

Ejemplos

Ejemplo 3. Construir un AFN-ε que reconozca sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$, el lenguaje $L = a^*b^*c^*$



El siguiente AFN reconoce el mismo lenguaje que reconoce el AFN-ε anterior.



Teorema de Kleene

Teorema

`Teorema de Kleene`. *Un lenguaje regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-ε)*

- Construcción de autómatas finitos a partir de expresiones regulares.
- Construcción de expresiones regulares a partir de autómatas:
  1. Lema de Arden (Ecuaciones de Lenguaje)
  2. Conversión de AFN a expresiones regulares por eliminación de estados.

Autómatas finitos y lenguajes regulares

Teorema

Dado un AFN-ε $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$, se puede construir un AFN M' equivalente a M, es decir $L(M) = L(M')$.

Teorema

Un lenguaje regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-ε)

Autómatas finitos y lenguajes regulares

Teorema

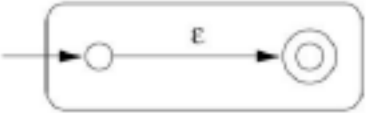
Para toda expresión regular R se puede construir un AFN-ϵ M tal que $L(R) = L(M)$.

Paso Básico

- EL autómata

acepta el lenguaje vacío $\emptyset$

- EL autómata



acepta el lenguaje $\{\epsilon\}$

- EL autómata

acepta el lenguaje $\{a\}$

PASO INDUCTIVO

1. Existe un autómata que acepta $R \cup S$

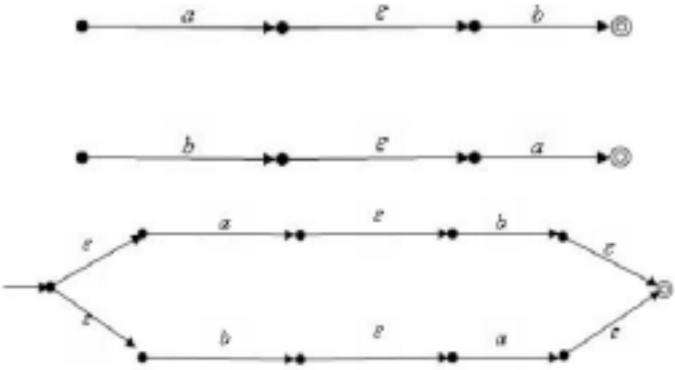
Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, T_2, \triangle_2)$ para el nuevo $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ tenemos que:

1. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
2. En T se agrega un estado s' si y sólo si

$$\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s_2)\} \cup \{(T_1, \epsilon, s'), (T_2, \epsilon, s')\}$$

   s' es un estado final NUEVO.
3. $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\} \cup \{s'\}$ donde s es el nuevo estado inicial.

Por ejemplo se construye $ab \cup ba$.



Ejemplo. Sobre $\Sigma = \{a, b\}$ el lenguaje de todas las palabras sobre Σ que tienen un n

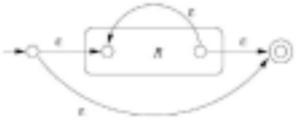
2. Autómata que acepta $R \cdot S$

Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, T_2, \triangle_2)$ para el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ que acepta $L(M_1) \cdot L(M_2)$ tenemos que:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $s_1 = s$
3. $T = T_2$

$$\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s2)$$

3. Autómata que reconoce R^*



Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ entonces el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ que acepta $L(M) = (L(M_1))^*$ viene dado por

1. $Q = Q_1 \cup \{s\} \cup \{s'\}$, donde s' es un nuevo estado final.
2. $T = \{s'\}$
3. $\triangle = \triangle_1 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s')\} \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s') \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s_1)$

Ecuaciones de lenguaje

Ecuacion del lenguaje

Sea Σ un alfabeto y sean E y A subconjuntos de Σ^*, entonces la ecuación del lenguaje $X = E \cup \underline{A \cdot X}$ admite la solición $X = A^* \cdot E$ cualquier otra solución Y deberá contener $A \cdot X$, además $\epsilon \notin A$, $\underline{X = A^* \cdot E}$ es la única solución.

$$X = AX$$
$$X = A(AX)$$
$$X = A(A(AX))$$
$$\ldots$$
$$X = A^*$$

$$X = E \cup A \cdot X$$
$$X = E \cup A(E \cup A \cdot X)$$
$$X = E \cup A(E \cup A(E \cup AX))$$
$$\vdots$$
$$X = E \cup A^* \cdot E$$

Ejemplos ecuaciones de lenguaje

Ejemplo 1. Encontrar la expresión del siguiente AFD.

$x_0 = a x_1$

$x_1 = a x_2 + b x_4$

Entones el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax_1 \\
x_1 &= ax_2 + bx_4 \\
x_2 &= ax_3 + bx_4 \\
x_3 &= ax_3 + bx_4 + \epsilon \\
x_4 &= bx_4 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Ejemplos ecuaciones de lenguaje

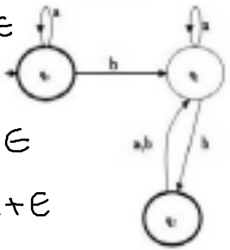
Ejemplo 2. Encontrar la expresión regular del siguiente AFD usando el lema del Arden:

$X_0 = aX_0 + bX_1 + \epsilon$

$X_1 = aX_1 + bX_2$

$X_2 = aX_1 + bX_1 + \epsilon$

$X_2 = (a \cup b) X_1 + \epsilon$



El siguiente es el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax_0 + bx_1 + \epsilon \\
x_1 &= ax_1 + bx_2 \\
x_2 &= (a \cup b)x_1 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de lenguaje

Teorema

Sean $n \geq 2$ considere el sistema de ecuaciones cuyas incognitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dado por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= E_1 \cup A_{11}x_1 \cup A_{12}x_2 \cup \ldots \cup A_{1,n}x_n \\
x_2 &= E_2 \cup A_{21}x_1 \cup A_{22}x_2 \cup \ldots \cup A_{2,n}x_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= E_{n-1} \cup A_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup A_{(n-1),n}x_n \\
x_n &= E_n \cup A_{n1}x_1 \cup A_{n2}x_2 \cup \ldots \cup A_{n,n}x_n
\end{aligned}$$

Entonces el sistema tiene una única solución:

- *En $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\epsilon \notin A_i$*

Ecuaciones de lenguaje

- Entonces el nuevo sistema se obtiene hasta $n-1$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11}x_1 \cup \widehat{A}_{12}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{1,(n-1)}x_{n-1} \\
x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21}x_1 \cup \widehat{A}_{22}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{2,(n-1)}x_{n-1} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \widehat{E}_{n-1} \cup \widehat{A}_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{(n-1),(n-1)}x_{n-1}
\end{aligned}$$

Entonces $\widehat{E}_i$ y $\widehat{A}_{ij}$ se definen como:

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_i &= E_i \cup (A_{in}A_{nn}^{*}E_n), \quad i = 1, \ldots, n-1 \\
\widehat{A}_{ij} &= A_{ij} \cup (A_{in}A_{nn}^{*}A_{nj}), \quad \forall_{i,j} = 1, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

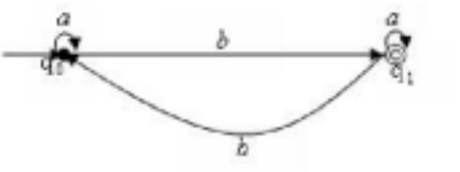
Donde:

$$E_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad q_i \notin F \\ \epsilon & \text{si} \quad q_i \in F \end{cases}$$

Carlos Andrés Delgado S.
Raúl E Gutierrez de Piñerez R.

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Ejemplo 1. Obtener la expresión regular del siguiente AFD usando ecuaciones del lenguaje y la solución única.



El sistema de ecuaciones inicial es:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_1 + bx_2 \\ x_2 &= bx_1 + ax_2 + \epsilon \end{aligned}$$

$+ = \cup$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= E_1 \cup A_{11}x_1 \cup A_{12}x_2 \cup \ldots \cup A_{1,n}x_n \\
x_2 &= E_2 \cup A_{21}x_1 \cup A_{22}x_2 \cup \ldots \cup A_{2,n}x_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= E_{n-1} \cup A_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup A_{(n-1),n}x_n \\
x_n &= E_n \cup A_{n1}x_1 \cup A_{n2}x_2 \cup \ldots \cup A_{n,n}x_n
\end{aligned}
$$

$\cup \to +$

$X_1 = a x_1 + b x_2$

$X_2 = b x_1 + a x_2 + \epsilon$

$E_1 = \emptyset \quad A_{11} = a \quad A_{12} = b$

$E_2 = \epsilon \quad A_{21} = b \quad A_{22} = a$

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Se aplica el teorema de solución de ecuaciones:

$$x_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{A}_{11} x_1$$

Se obtiene $\widehat{E}_1$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_1 &= E_1 + (A_{12} A_{22}^* E_2) \\
\widehat{E}_1 &= \emptyset + (b \cdot a^* \cdot \epsilon) \\
\widehat{E}_1 &= ba^*
\end{aligned}$$

Se obtiene $\widehat{A}_{11}$

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{11} &= A_{11} + (A_{12} A_{22}^* A_{21}) \\
\widehat{A}_{11} &= a + (b \cdot a^* \cdot b) \\
\widehat{A}_{11} &= a + ba^* b
\end{aligned}$$

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Reemplazando $\widehat{E}_1$ y $\widehat{A}_{11}$ en x_1

$$x_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{A}_{11} x_1$$
$$x_1 = ba^* + (a + ba^* b) x_1$$

Aplicando solución única se tiene:

$$x_1 = (a + ba^* b)^* ba^*$$

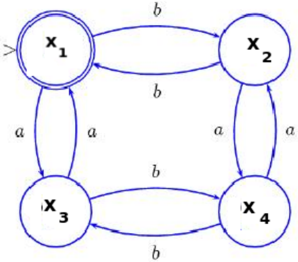
$X = A^* E$

$X = E + AX$

$E = ba^*$ $A = (a + ba^* b)$

$(a + ba^* b)^* ba^*$

Sistema de ecuaciones por reducción de variables



$$
\begin{aligned}
x_1 &= ax_3 + bx_2 + \varepsilon \\
x_2 &= ax_4 + bx_1 \\
x_3 &= ax_1 + bx_4 \\
x_4 &= ax_2 + bx_3
\end{aligned}
$$

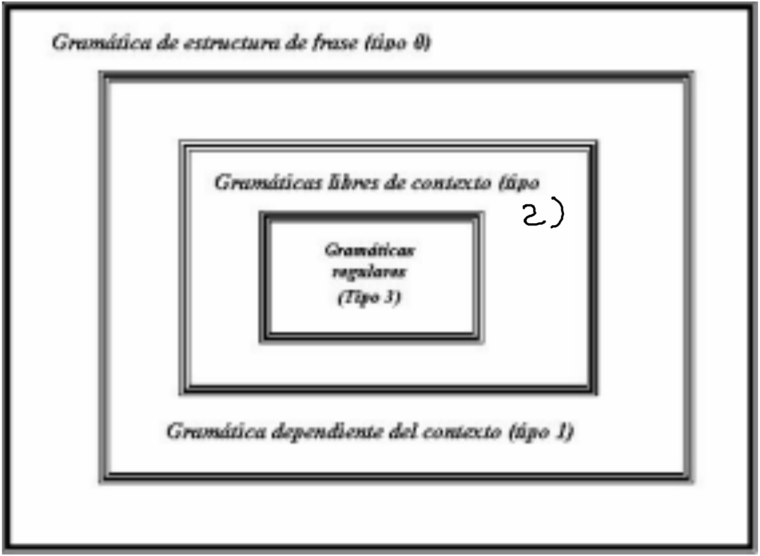
$E_1 = \varepsilon$
$E_2 = \emptyset$
$E_3 = \emptyset$
$E_4 = \emptyset$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11} x_1 \cup \widehat{A}_{12} x_2 \cup \widehat{A}_{13} x_3 \\
x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21} x_1 \cup \widehat{A}_{22} x_2 \cup \widehat{A}_{23} x_3 \\
x_3 &= \widehat{E}_3 \cup \widehat{A}_{31} x_1 \cup \widehat{A}_{32} x_2 \cup \widehat{A}_{33} x_3
\end{aligned}
$$

Contenido

LENGUAJES Y GRAMATICAS

Según Chomsky los tipos de gramáticas se clasifican así:



Gramáticas Regulares (Tipo 3)

Una gramática regular G es una 4-tupla $G = (N, \Sigma, S, P)$ que consiste de un conjunto N de no terminales, un alfabeto Σ, un símbolo inicial S y de un conjunto de producciones P. Las reglas son de la forma $A \to w$, donde $A \in N$ y w es una cadena sobre $\Sigma \cup N$ que satisface lo siguiente:

1. w contiene un no terminal como máximo.
2. Si w contiene un no terminal, entonces es el símbolo que está en el extremo derecho de w.
3. El conjunto de reglas P se define así:

$$P \subseteq N \times \Sigma^*(N \cup \epsilon) \quad o \quad P \subseteq N \times (N \cup \epsilon)\Sigma^*$$

Definición de gramática regular por la derecha

Gramáticas regulares

Sobre

$$G = (N, \Sigma, S, P)$$

Una gramática es regular por la derecha si sus producciones son de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A \longrightarrow wB, & w \in \Sigma^*, B \in N \\ A \longrightarrow \varepsilon & \end{array} \right\}$$

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera a^*, donde $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A\}$

$P : S \rightarrow aA \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aA$ | ε

ε, a, aaA

Ejemplo. Sea la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$ que genera el lenguaje de la expresión regular $(a \cup b)^*$

$\Sigma = \{a, b\}$

$N = \{S, A\}$

ε, ab

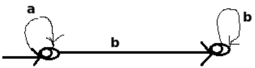
$P : S \longrightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon$

Gramáticas regulares

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera $(a \cup b)^+$, donde Σ={a,b}, N={S,A }
$P : S \rightarrow aS \mid bS \mid a \mid b$

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera a^+b^+, donde Σ={a,b}, N={S,A }
$P : S \rightarrow aS \mid aA$
$A \rightarrow bA \mid b$

Ejemplo Considere la siguiente gramática regular $G = (N, \Sigma, S, P)$, que genera a^*b^*, donde Σ={a,b}, N={S,A }
$P : S \rightarrow aS \mid bA \mid \varepsilon$
$A \rightarrow bA \mid \varepsilon$



$a^* b (a \cup b)^*$ S

P: $A \to aA \mid bB$

$B \to aB \mid bB \mid \varepsilon$

$(ab)^* (a \cup b)^+ bb$

P: $A \to aB \mid aC \mid bC$ $C \to aC \mid bC \mid bD$

$B \to bA$ $D \to b$

$(abcd)^+ \, a \, bd \, (bd)^*$

S:

$A \to aB$	$E \to aF$
$B \to bC$	$F \to bG$
$C \to cD$	$G \to dH$
$D \to dA \mid dE$	$H \to bI \mid \varepsilon$
	$I \to dH$

abcd abd $\to$ $A \to B \to C \to D$

$A \leftarrow G \leftarrow F \leftarrow E$

aB

Terminal

No terminal

Gramáticas independientes del contexto

Gramáticas tipo 2

Una gramática independiente del contexto $G = (N, \Sigma, S, P)$ consiste de un conjunto N de no terminales, un alfabeto Σ, un símbolo inicial S y de un conjunto de producciones P.

Definición

Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática independiente del contexto. El lenguaje generado por G (o el lenguaje de G) denotado por $L(G)$, es el conjunto de todas las cadenas de terminales que se derivan del estado inicial S. en otras palabras:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* / S \Rightarrow^* w\}$$

$$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$$

Ejemplo de gramática tipo 2

Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática con $\Sigma = \{0, 1\}$ el conjunto $N = \{S\}$ y P el conjunto de producciones:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow 0S1 \\ S &\longrightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Ejemplo. Una GIC que genera el lenguaje de los palíndromes sobre $\Sigma = \{a, b\}$

$$S \longrightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

Ejemplo. Una GIC que genera el siguiente lenguaje sobre $\Sigma = \{a, b\}$ Sea

$$L = \{a^n b^m | n \leq m \leq 2n\}$$

$$S \longrightarrow aSb \mid aSbb \mid \varepsilon$$

GICs especiales

1. El lenguaje de todas las cadenas de paréntesis anidados y equilibrados, por ejemplo:
   (())(()), entonces la gramática sería:

$$S \longrightarrow (S)S \mid \varepsilon$$

2. Sea $T = \{0, 1, (,), +, *, \emptyset, \varepsilon\}$. T es el conjunto de símbolos usados para definir el lenguaje de las expresiones regulares sobre $\Sigma = \{0, 1\}$. Se puede diseñar un GIC que genere las expresiones regulares.

$$S \longrightarrow S + S \mid SS \mid S^* \mid (S) \mid 0 \mid 1 \mid \emptyset \mid \varepsilon$$

Gramáticas no restringidas

Gramaticas tipo 1

Sea una 4-tupla $G = (N, \Sigma, S, P)$ que consiste de un conjunto N de no terminales, un alfabeto Σ, un símbolo inicial S y de un conjunto de producciones P.

- N es el alfabeto de símbolos no terminales
- Σ al alfabeto tal que $N \cap \Sigma = \emptyset$
- $S \in N$ es el símbolo inicial
- P es el conjunto de reglas de producciones de la forma $\alpha \to \beta$, donde $\alpha \in (N \cup \Sigma)^+$ y $\beta \in (N \cup \Sigma)^*$, es decir

$$P \subset (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$$

Gramáticas no restringidas (Gramáticas de tipo 0 y 1)

Ejemplo Sea $G = (N, \Sigma, S, P)$ una gramática con $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ el conjunto $N = \{S, A, B\}$ y P el conjunto de producciones:

$$
\begin{aligned}
S &\longrightarrow 0SAB \mid \varepsilon \\
BA &\longrightarrow AB \\
0A &\longrightarrow 01 \\
1A &\longrightarrow 11 \\
1B &\longrightarrow 12 \\
2B &\longrightarrow 22
\end{aligned}
$$

$S \rightarrow 0SAB$
00SABAB
00ABAB
00AABB
001ABB
0011BB
00112B
001122

El lenguaje que genera esta gramática dependiente del contexto es:

$$L(G) = \{0^n 1^n 2^n / n = 0, 1, 2, ...\}$$

Sea w=001122 una cadena que puede ser reconocida por la gramática y que además pertenece al lenguaje.

Tipos de gramáticas

P: a AB

P: a S b

P: a S

Tipos de gramáticas		
Tipo	Transiciones	Restricciones en la producciones $w_1 \to w_2$
0		Sin restricciones
1		$l(w_1) \leq l(w_2)$ o $w_2 = \varepsilon$
2	$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^*$	$w_1 = A$, siendo A un símbolo no terminal
3	$P \subseteq N \times \Sigma^*(N \cup \varepsilon)$ o $P \subseteq N \times (N \cup \varepsilon)\Sigma^*$	$w_1 = A$ y $w_2 = aB$ o $w_2 = a$ siendo $A, B \in N$ y $a \in T$ o $S \to \varepsilon$

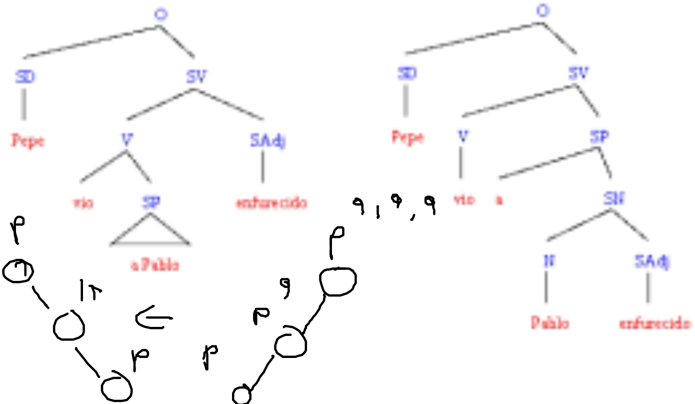
- la familia de los lenguajes de tipo i contiene a la familia de tipo $i+1$.
- $GR \subseteq GIC \subseteq GDC \subseteq GEF$

Gramática	Lenguaje	Máquina
Tipo 0: Gramática sin restricciones	Recursivamente enumerables / sin restricciones	Máquina de Turing (MT)
Tipo 1: Gramática sensible del contexto	Dependiente del contexto	Autómata Linealmente Acotado (ALA
Tipo 2: Gramática de contexto libre	Independiente del contexto	Autómata de Pila (AP
Tipo 3: Gramática Regular	Regular	Autómata finito (AF)

Arboles de derivación

Ambigüedad

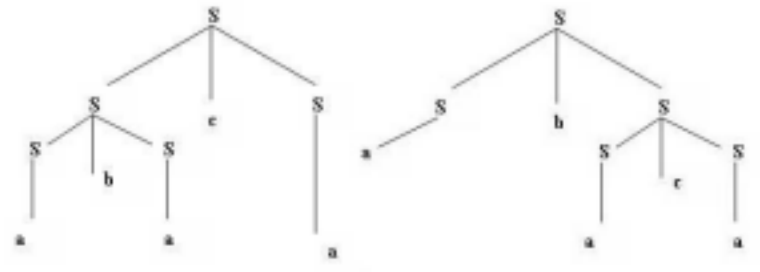
Una gramática se dice que es `ambigua` si hay dos o más árboles de derivación distintos para la misma cadena. una gramática en la cual, para toda cadena *w*, todas las derivaciones de *w* tienen el mismo árbol de derivación, es no `ambigua`.



Ejemplos arboles de derivación

Ejemplo 2. Consideremos la siguiente gramática:
$S \longrightarrow SbS \mid ScS \mid a$
y se la cadena $w = abaca$ y sus derivaciones:

- $S \Rightarrow SbS \Rightarrow SbScS \Rightarrow SbSca \Rightarrow abaca$



- $S \Rightarrow ScS \Rightarrow SbScS \Rightarrow abScS \Rightarrow abacS \Rightarrow abaca$

La forma de Backus-Naur

Forma de Backus-Naur

La forma de Backus-Naur se emplea para especificar reglas sintácticas de muchos lenguajes de programación y de lenguaje natural: En lugar de utilizar el símbolo $\longrightarrow$ usamos ::= y colocamos los símbolos no terminales entre $<>$.

La forma BNF se usa frecuentemente para especificar la sintaxis de lenguajes de programación, como Java y LISP; lenguajes de bases de datos, como SQL, y lenguajes de marcado como XML.

$$A \longrightarrow 9B$$

$$\langle A \rangle ::= 9\langle B \rangle \leftarrow A ::= 9B$$

La forma de Backus-Naur

Ejemplo 1. sea la siguiente GIC:

$O \longrightarrow SN \quad SV$

$SN \longrightarrow articulo \quad sustantivo$

$SV \longrightarrow verbo \quad sustantivo$

$articulo \longrightarrow el$

$verbo \longrightarrow come$

$sustantivo \longrightarrow perro \mid salchicha$

La forma Backus-Naur es:

$< O >::=< SN >< SV >$

$< SN >::=< articulo >< sustantivo >$

$< SV >::=< verbo >< sustantivo >$

$< articulo >::= el$

$< verbo >::= come$

$< sustantivo >::= perro \mid salchicha$

La forma de Backus-Naur

Ejemplo 2. Sea la siguiente gramática:

$A \longrightarrow Aa \mid a \mid AB$

La forma Backus-Naur es:

$< A >::=< A > a \mid a \mid < A >< B >$

Ejemplo 3. La producción de enteros son signo en notación decimal. (Un **entero con signo** es un natural precedido por un signo más o un signo menos). La forma Backus-Naur para la gramática que produce los enteros con signo es:

$< \texttt{entero con signo} >::=<\texttt{signo}><\texttt{entero}>$

$<\texttt{signo} >::= + \mid -$

$< \texttt{entero} >::=< \texttt{dígito}> \mid < \texttt{dígito} >< \texttt{entero}>$

$< \texttt{dígito} > ::= 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$