Complejidad y Optimización

Robinson Duque, M.Eng, Ph.D

Universidad del Valle

robinson.duque@correounivalle.edu.co

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación

Overview

Programación Lineal- Introducción

- Programación lineal (LP) es el término utilizado para definir una amplia gama de problemas de optimización
- la función objetivo que se debe minimizar o maximizar es lineal en las variables desconocidas
- las restricciones son una combinación de igualdades y desigualdades lineales

Programación Lineal- Introducción

- los problemas de LP ocurren en muchas situaciones económicas de la vida real donde los beneficios deben maximizarse o los costos deben minimizarse con límites de restricción de recursos
- estudiaremos el método símplex para solucionar problemas de LP, sin embargo, *nos enfocaremos principalmente en el modelado de problemas* debido a que se vuelve necesario el uso de computadoras incluso para un pequeño número de variables
- comúnmente utilizado en problemas que involucran decisiones de dieta, transporte, producción y manufactura, combinación de productos, análisis de límites de ingeniería en diseño, programación de aerolíneas, etc.

Programación Lineal- Forma general

La forma general de un problema de programación lineal tiene una función objetivo y un conjunto de restricciones:

```
maximize    c1x1 + c2x2 + c3x3 + ... + cnxn
subject to  :

% Restricciones LE (i = 1...l)
ai1x1 + ai2x2 + ai3x3 + ... + ainxn <= bi

% Restricciones GE (j = l+1...l+r)
aj1x1 + aj2x2 + aj3x3 + ... + ajnxn >= bj

% Restricciones EQ (k = l+r+1...l+r+q)
ak1x1 + ak2x2 + ak3x3 + ... + aknxn = bk

x1 >= 0, x2 >= 0, ..., xn >= 0  % Restricciones de no
    negatividad
```

Math form:

$$\text{maximize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

subject to :

% Restricciones LE $(i = 1 \dots l)$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

% Restricciones GE $(j = l + 1 \dots l + r)$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn}x_n \geq b_j$$

% Restricciones EQ $(k = l + r + 1 \dots l + r + q)$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ % Restricciones de no negatividad

Programación Lineal- Forma general

- El número de restricciones es $m = l + r + q$
- c_j y a_{ij} son coeficientes constantes
- b_j son constantes reales fijas, los cuales están ajustados a valores no negativos
- x_j son variables de decisión
- los límites de i y j son: $i = 1...m$ equivalente al número de restricciones; $j = 1...n$ equivalente al número de variables

Los problemas LP son problemas **convexos**, lo que implica que un máximo local es de hecho un máximo global.

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Una empresa que fabrica computadores de mesa y notebook desea saber cuántos computadores debe producir para maximizar sus ganancias:

- Cada computador (de mesa o notebook) requiere de un chip de procesamiento. La empresa cuenta con 10.000 chips.
- Cada computador requiere memoria. La memoria viene en chips de 16MB, un notebook requiere 1 chip (16MB), mientras un computador de mesa requiere de 2 chips (32MB). Se cuenta con un inventario de 15.000 chips.
- Cada computador requiere tiempo de ensamblaje, un notebook toma 4 minutos y uno de mesa toma 3 minutos. Se tienen 25.000 minutos de ensamblaje disponibles.
- Cada notebook genera $750 de ganancia y uno de mesa genera $1000.

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Algunas preguntas:

- ¿Cuántos computadores de cada tipo se deben producir para maximizar las ganancias?
- ¿Cuál el la ganancia máxima que se puede obtener?

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelamiento: escribir el problema en lenguaje de programación lineal. Definir las variables de decisión, el objetivo y las restricciones:

- **Variables de decisión:** a diferencia de valores del problemas que nos son dados o que pueden ser calculados simplemente de lo que nos proveen, las variables representan valores desconocidos.

  En este caso las variables son el número de notebooks y el número de computadores de mesa y las representaremos con x_1 y x_2 respectivamente.

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelamiento: escribir el problema en lenguaje de programación lineal. Definir las variables de decisión, el objetivo y las restricciones:

- **Función objetivo:** cada LP tiene una función objetivo a maximizar o minimizar. El objetivo debe ser lineal respecto a las variables de decisión, lo cual significa que debe ser una suma de constantes que multiplican las variables de decisión (e.g., $3x_1 + 2x_2$); $(x_1 x_2)$ no es lineal.

  En este caso nuestro objetivo es maximizar las ganancias y sabemos que cada notebook genera \$750 de ganancia y uno de mesa genera \$1000. Por lo tanto tendremos que:

$$750x_1 + 1000x_2$$

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelamiento: escribir el problema en lenguaje de programación lineal. Definir las variables de decisión, el objetivo y las restricciones:

- **Restricciones:** en este problema tenemos 4 tipos de restricciones: chips de procesamiento, memoria, tiempo de ensamblaje, no negatividad. Las restricciones deben ser lineales (e.g., $3x_1 + 2x_2 \geq 5$ es una restricción lineal); ($x_1 x_2 \leq 3$ o $x_1^2 \geq 7$) no son lineales.

  Chips disponibles: $x_1 + x_2 \leq 10000$
  Memoria disponible: $x_1 + 2x_2 \leq 15000$
  Ensamblaje: $4x_1 + 3x_2 \leq 25000$
  No negatividad: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{maximize} & f = 750x_1 + 1000x_2 \\
\texttt{subject to} & x_1 + x_2 \leq 10000 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 15000 \\
& 4x_1 + 3x_2 \leq 25000 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Programación Lineal- Ejemplo Introductorio

Implementación en MiniZinc

```
var int: x_1;   % Variable entera sin cota superior
var int: x_2;   % Variable entera sin cota superior

constraint x_1 + x_2 <= 10000;
constraint x_1 + 2*x_2 <= 15000;
constraint 4*x_1 + 3*x_2 <= 25000;
constraint x_1 >= 0;
constraint x_2 >= 0;

solve maximize 750*x_1 + 1000*x_2;

output ["x_1=", show(x_1),"\n x_2=",show(x_2)];
```

Solución: $x_1 = 1000$ y $x_2 = 7000$

Solución de LPs de dos variables

Para modelos con dos variables es posible resolver el problema sin una computadora. Se debe dibujar la región factible Ω y determinar cómo se optimiza el objetivo en esa región.

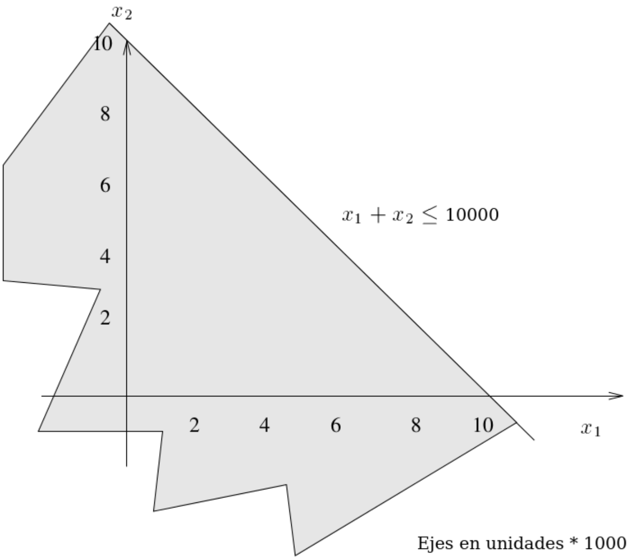
Recordemos que los LPs son problemas convexos, lo que implica que un máximo local es de hecho un máximo global. Las restricciones definen una región factible que puede ser:

- acotada
- no acotada
- inconsistente (en cuyo caso, no existe una solución)

Solución de LPs de dos variables

- Podemos representar un modelo con dos variables etiquetando los ejes de un gráfico con cada una de las variables.
- La gráfica completa representa las posibles decisiones.
- Las restricciones están representadas por líneas en el gráfico, con la región factible situada en un lado de la línea. La siguiente figura ilustra esto con la restricción $x_1 + x_2 \leq 10000$.
- Se deben hallar los interceptos con los ejes x_1, x_2. Para esto se utiliza $x_1 + x_2 = 10000$ y se evalúa con $x_1 = 0$ para hallar el intercepto sobre x_2; de igual forma se procede para hallar el intercepto sobre x_1.
- Se evalúa el lado factibe de la restricción $x_1 + x_2 \leq 10000$ igualando x_1 y x_2 a cero.

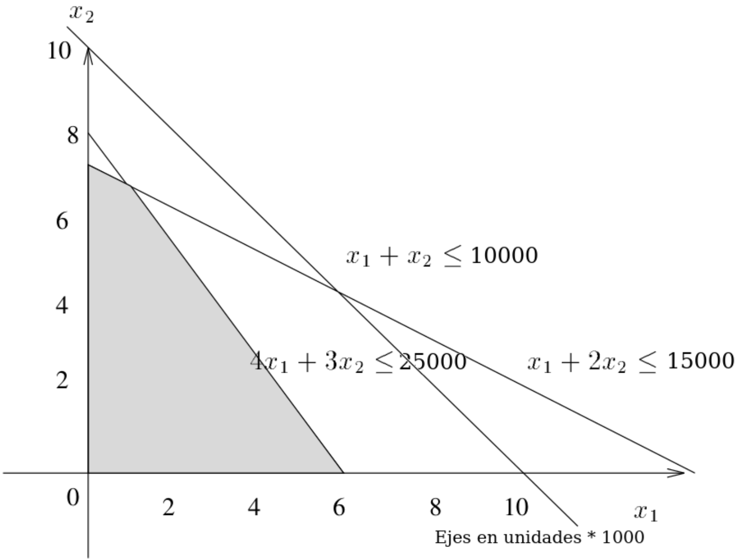
Solución de LPs de dos variables



Solución de LPs de dos variables

- Podemos continuar este proceso y agregar todas las restricciones.
- Dado que cada restricción debe ser satisfecha, la región factible resultante es la intersección de la región factible para cada restricción. Esto se muestra en la siguiente figura.

Solución de LPs de dos variables



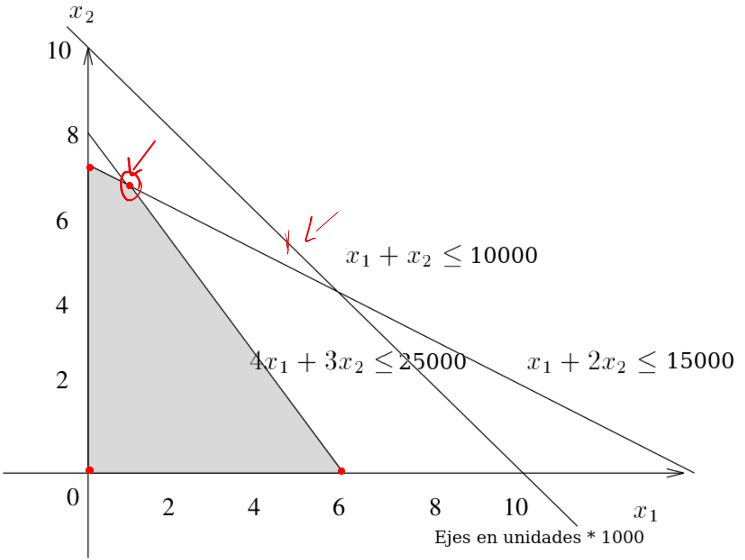
Solución de LPs de dos variables

- Tenga en cuenta que solo graficar el modelo nos da información que no teníamos antes. Parece que la restricción de Chip ($x_1 + x_2 \leq 10000$) juega poco papel en este modelo. Esta restricción está dominada por otras restricciones.

Ahora, ¿cómo podemos encontrar la solución óptima?

- Se deben encontrar los valores de los puntos de intersección en la región factible y evaluar la función objetivo.

Solución de LPs de dos variables



Solución de LPs de dos variables

- Existe un punto en (0,0).
- Hallar el intercepto de $x_1 + 2x_2 \leq 15000$ sobre el eje x_2. Entonces, si $x_1 + 2x_2 = 15000$ y $x_1 = 0$, se tiene que $x_2 = 7500$. Por consiguiente el intercepto está en $(0, 7500)$.
- Hallar el intercepto de $4x_1 + 3x_2 \leq 25000$ sobre el eje x_1. Entonces, si $4x_1 + 3x_2 = 25000$ y $x_2 = 0$, se tiene que $x_1 = 7500$. Por consiguiente el intercepto está en $(6250, 0)$.
- Hallar el intercepto entre $x_1 + 2x_2 = 15000$ y $4x_1 + 3x_2 = 25000$, para esto se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene (1000,7000).

Al evaluar los puntos con la función:

maximize $\quad f = 750x_1 + 1000x_2$

Se obtiene la solución óptima para $x_1 = 1000, x_2 = 7000$.

Ejercicio 1

Se requiere mezclar dos tipos de alimentos X y Y para alimentar ganado. Cada porción requiere de por lo menos 60 gramos de proteina y por lo menos 30 gramos de grasa. Un paquete de X cuesta \$80 y contiene 15 gramos de de proteina y 10 gramos de grasa; Un paquete de Y cuesta \$50 y contiene 20 gramos de proteina y 5 gramos de grasa.

¿Cuánto de cada tipo X y Y se debe usar para minimizar el costo de la producción de alimento?

- Modele el problema como un LP
- Encuentre la solución óptima utilizando el método presentado para dos variables
- *Implemente la solución en MiniZinc y verifique su resultado

Ejercicio 1

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 80X + 50Y \\
\texttt{subject to} & 15X + 20Y \geq 60 \\
 & 10X + 5Y \geq 30 \\
 & X \geq 0 \\
 & Y \geq 0
\end{array}
$$

Ejercicio 1

Implementación en MiniZinc:

```
var float: X;
var float: Y;
var float: C;

constraint 15*X + 20*Y >= 60;
constraint 10*X + 5*Y >= 30;
constraint X>=0;
constraint Y>=0;
constraint C=80*X+50*Y;
solve minimize C;
output ["X=", show(X), "\n Y=", show(Y), "\n C=",
    show(C)];
```

Solución: X=2.4, Y=1.2, C=252.0

LPs de dos o más variables- Generalidades

Los modelos de programación lineal se encuentran en casi todos los campos de las empresas y usualmente los modelos requieren más de dos variables. Recordemos que los problemas LP pueden contener variables que tomen valores continuos.

En las siguientes secciones introduciremos una serie de problemas, y mostraremos cómo modelarlos mediante la elección adecuada de las variables de decisión, el objetivo y las restricciones.

En todos los casos, describiremos el problema y daremos un modelo. Más adelante abordaremos la forma de solucionar estos modelos mediante el uso del método Simplex.

Ejemplo: Problema de la Dieta

Los datos de contenido nutricional de un grupo de alimentos y la necesidad semanal de un adulto se presentan en la tabla que se muestra a continuación. **Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales (i.e., 550g de proteina, 600g de grasa, 2000g de carbohidratos).**

	Food		Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	X_1	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	X_2	–	90%	–	0.5
3	Cheese	X_3	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	X_4	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	X_5	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)		550	600	2000	

$X_1 \rightarrow$ Pan, $X_2 \rightarrow$ Mantequilla, $X_3 \rightarrow$ Queso, $X_4 \rightarrow$ Cereal

$X_5 \rightarrow$ Dietetico

FO

$$\min \; 0{,}25X_1 + 0{,}5X_2 + 1{,}2X_3 + 0{,}6X_4 + 1{,}5X_5$$

Sa

$$0{,}08X_1 + 0{,}25X_3 + 0{,}12X_4 + 0{,}08X_5 \geq 550$$

$$0.01X_1 + 0.9X_2 + 0.36X_3 + 0.03X_4 \geq 600$$

$$0.55X_1 + 0.75X_4 + 0.5X_5 \geq 2000$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales...**¿Qué variables de decisión se deben usar?**

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales...**¿Qué variables de decisión se deben usar?**

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

Determine el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales...**¿Qué variables de decisión se deben usar?**

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?
- R:/ El número de gramos de cada uno de los alimentos

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0{,}08x_1 + 0{,}25x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 \geq 550$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0{,}08x_1 + 0{,}25x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 \geq 550$
- $0{,}01x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}36x_3 + 0{,}03x_4 \geq 600$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0{,}08x_1 + 0{,}25x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 \geq 550$
- $0{,}01x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}36x_3 + 0{,}03x_4 \geq 600$
- $0{,}55x_1 + 0{,}75x_4 + 0{,}5x_5 \geq 2000$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Qué restricciones se deben cumplir?

- $0{,}08x_1 + 0{,}25x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 \geq 550$
- $0{,}01x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}36x_3 + 0{,}03x_4 \geq 600$
- $0{,}55x_1 + 0{,}75x_4 + 0{,}5x_5 \geq 2000$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: determinar el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales...

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: determinar el costo semanal más bajo para cumplir con los requerimientos mínimos semanales...

- **Minimizar** $0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 0{,}6x_4 + 1{,}5x_5$

Ejemplo: Problema de la Dieta

	Food	Proteins	Fats	Carbohydrates	Cost $ per 100g
1	Bread	8%	1%	55%	0.25
2	Butter	–	90%	–	0.5
3	Cheese	25%	36%	–	1.2
4	Cereal	12%	3%	75%	0.6
5	Diet Bar	8%	–	50%	1.5
	Weekly requirement (g)	550	600	2000	

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 0{,}6x_4 + 1{,}5x_5 \\
\texttt{subject to} & 0{,}08x_1 + 0{,}25x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 \geq 550 \\
& 0{,}01x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}36x_3 + 0{,}03x_4 \geq 600 \\
& 0{,}55x_1 + 0{,}75x_4 + 0{,}5x_5 \geq 2000 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Ejemplo: Problema de la Dieta

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 0{,}6x_4 + 1{,}5x_5 \\
\texttt{subject to} & 0{,}08x_1 + 0{,}25x_3 + 0{,}12x_4 + 0{,}08x_5 \geq 550 \\
 & 0{,}01x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}36x_3 + 0{,}03x_4 \geq 600 \\
 & 0{,}55x_1 + 0{,}75x_4 + 0{,}5x_5 \geq 2000 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el costo mínimo para producir la dieta.

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Un fabricante de aleaciones planea producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar cinco aleaciones disponibles. La composición y los precios de estas aleaciones se muestran en la tabla a continuación:

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \leftarrow$ Almaciones

$$\min \; 6X_1 + 10X_2 + 18X_3 + 24X_4 + 30X_5$$

$X_1 \leq 300 \quad X_2 \leq 400 \quad X_3 \leq 200 \quad X_4 \leq 700 \quad X_5 \leq 450$

$$\begin{cases} 0.25(0{,}10X_1 + 0{,}15X_2 + 0{,}20X_3 + 0{,}30X_4 + 0{,}40X_5) + \\ 0.75(0{,}90X_1 + 0{,}85X_2 + 0{,}80X_3 + 0{,}70X_4 + 0{,}60X_5) = 1000 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0 \quad X_4 \geq 0 \quad X_5 \geq 0$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué variables de decisión se deben usar?

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué variables de decisión se deben usar?

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué variables de decisión se deben usar?

- x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
- ¿Qué representan estas variables?
- R:/ el número de kg de cada una de las aleaciones disponibles fundidas y mezcladas para formar la cantidad necesaria de la aleación requerida

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 250$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 250$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 250$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$
- $x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Qué restricciones se deben cumplir? Recuerde: producir 1000kg de una aleación con un 25 % en peso de un metal A y un 75 % en peso de un metal B al combinar las 5 aleaciones

- $0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 250$
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000$
- $x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: minimizar el costo de la producción...

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

¿Cuál es la función objetivo? Recuerde: minimizar el costo de la producción...

- **Minimizar** $6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Alloy	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
Available quantity kg	300	400	200	700	450
Price $/kg	6	10	18	24	30

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5 \\
\texttt{subject to} & 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 250 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000 \\
 & x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Ejemplo: Fabricación de Aleaciones

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5 \\
\texttt{subject to} & 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 250 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000 \\
 & x_1 \leq 300, x_2 \leq 400, x_3 \leq 200, x_4 \leq 700, x_5 \leq 450 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el costo mínimo para producir la aleación.

Problema de refinería

Una refinería utiliza dos aceites crudos diferentes, un crudo ligero cuesta \$40 por barril y un crudo pesado cuesta \$30 por barril, para producir gasolina, combustible para calefacción, combustible para aviones y lubricante de petróleo. El rendimiento de estos tipos de crudo por barril se da en la siguiente tabla:

	Gasoline	Heating oil	Jet fuel	Lube oil
Light crude oil	0.4	0.2	0.3	0.1
Heavy crude oil	0.3	0.45	0.1	0.05

La demanda es de 8 millones de barriles de gasolina, 6 millones de barriles de combustible para calefacción, 7 millones de barriles de combustible para aviones y 3 millones de barriles de aceite lubricante. Escribir un modelo que permita determinar las cantidades de crudo ligero y crudo pesado que se comprará por un costo mínimo.

$X_1 \rightarrow$ Crudo ligero $\quad X_2 \rightarrow$ Crudo pesado

$$\min \; 40X_1 + 30X_2$$

$$0.4X_1 + 0.3X_2 \geq 8\times10^6$$

$$0.2X_1 + 0.45X_2 \geq 6\times10^6$$

$$0.3X_1 + 0.7X_2 \geq 7\times10^6$$

$$0.1X_1 + 0.05X_2 \geq 3\times10^6$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

Problema de refinería

	Gasoline	Heating oil	Jet fuel	Lube oil
Light crude oil	0.4	0.2	0.3	0.1
Heavy crude oil	0.3	0.45	0.1	0.05

Sean x_1 y x_2 los millones de barriles de crudo ligero y pesado comprados, respectivamente. Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 40x_1 + 30x_2 \\
\texttt{subject to} & 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \geq 8 \\
 & 0{,}2x_1 + 0{,}45x_2 \geq 6 \\
 & 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \geq 7 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 \geq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Problema de refinería

Modelo final:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = 40x_1 + 30x_2 \\
\texttt{subject to} & 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 \geq 8 \\
 & 0{,}2x_1 + 0{,}45x_2 \geq 6 \\
 & 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \geq 7 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 \geq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el costo de los barriles de crudo.

Problema de agricultura

Un agricultor de vegetales tiene la opción de producir tomates, pimientos verdes o pepinos en su granja de 200 acres. Un total de 500 días-hombre de trabajo están disponibles. En la tabla se muestran los rendimientos y los días-hombre de trabajo por acre:

	Yield $/ acre	Labor man-days/acre
Tomatoes	450	6
Green Peppers	360	7
Cucumbers	400	5

Suponiendo que los costos de los fertilizantes son los mismos para cada producto, determine la combinación óptima de cultivos.

Problema de agricultura

	Yield $/ acre	Labor man-days/acre
Tomatoes	450	6
Green Peppers	360	7
Cucumbers	400	5

Sean x_1, x_2 y x_3 los acres de tierra para tomates, pimientos verdes y pepinos respectivamente. El problema del LP puede ser declarado como:

```
maximize     f = 450x1 + 360x2 + 400x3
subject to   x1 + x2 + x3 <= 200
             6x1 + 7x2 + 5x3 <= 500
             x1 >= 0, x2 >= 0, x3 >= 0
```

$$\begin{aligned}
\texttt{maximize} \quad & f = 450x_1 + 360x_2 + 400x_3 \\
\texttt{subject to} \quad & x1 + x2 + x3 \leq 200 \\
& 6x1 + 7x2 + 5x3 \leq 500 \\
& x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3 \geq 0
\end{aligned}$$

Problema de agricultura

Modelo final:

$$\begin{array}{ll} \texttt{maximize} & f = 450x_1 + 360x_2 + 400x_3 \\ \texttt{subject to} & x1 + x2 + x3 \leq 200 \\ & 6x1 + 7x2 + 5x3 \leq 500 \\ & x1 \geq 0, x2 \geq 0, x3 \geq 0 \end{array}$$

Actividad en casa

Implementar el modelo en MiniZinc, encontrar el valor de cada variable x_i y el rendimiento de los cultivos.

Problema de cortes

Una fábrica de papel hace rollos jumbo de 1m de ancho. Recibieron un pedido de 200 carretes 260mm de ancho, 400 carretes de 180mm de ancho, y 300 carretes 300mm de ancho. Los rollos deben ser cortados del rollo jumbo. Las combinaciones de cuchillas de corte son tales que se debe incluir un carrete de 300 mm de ancho en cada corte. Determine el número total de carretes jumbo y combinaciones de corte para minimizar el recorte sobrante.

Combination	Number of 300 mm	Number of 260 mm	Number of 180 mm	Trim mm
1	3	0	0	100
2	2	1	0	140
3	2	0	2	40
4	1	2	1	0
5	1	1	2	80
6	1	0	3	160

Problema de cortes

Combination	Number of 300 mm	Number of 260 mm	Number of 180 mm	Trim mm
1	3	0	0	100
2	2	1	0	140
3	2	0	2	40
4	1	2	1	0
5	1	1	2	80
6	1	0	3	160

Sean x_1 a x_6 el número de carretes jumbo por cada combinación.
Formulación basada en el número mínimo:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{minimize} & f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\texttt{subject to} & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 300 \\
& x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 200 \\
& 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 \geq 400 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Problema de cortes

Sean x_1 a x_9 el número de carretes jumbo por cada combinación. Formulación basada en el mínimo desperdicio:

```
minimize
```

$$f = 100x_1 + 140x_2 + 40x_3 + 80x_5 + 160x_6 + 300x_7 + 260x_8 + 180x_9$$

`subject to`

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 = 300 \\ & x_2 + 2x_4 + x_5 - x_8 = 200 \\ & 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - x_9 = 400 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, \\ & x_8 \geq 0, x_9 \geq 0 \end{aligned}$$

Fin de la Presentación

¿Preguntas?

References I