

Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

`http://eisc.univalle.edu.co/~oscarbed/MD/`

- Lógica
- Conjuntos
- Funciones
- Sucesiones y sumatorias
- Notación O

PARCIAL1. Viernes 9 de Abril

- * Definición de sucesión
- * Progresión aritmética
- * Progresión geométrica
- * Sumatorias

Sucesiones y Sumatorias

Indique el número que falta en cada una de las siguientes listas de términos:

$$\bullet 0, 1, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{5}, \underline{8}, \underline{13}, ? \quad 21$$

$$\bullet 3, 7, 11, 15, 19, ? \quad 23$$

$$\bullet 2, 6, 18, 54, 162, ? \quad 8100 + 648 = 8748$$

$$\bullet 1, 2, 6, 42, 1806, ?$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 2 & 6 & 42 & 1806 \\ \hline 3 & 7 & 43 & 1807 \end{array}$$

Sucesiones y Sumatorias

Indique el número que falta en cada una de las siguientes listas de términos:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21**
- 3, 7, 11, 15, 19, **23**
- 2, 6, 18, 54, 162, **486**
- 1, 2, 6, 42, 1806, **3263442**

Sucesiones y Sumatorias

Indique el número que falta en cada una de las siguientes listas de términos:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21**. $8+13=21$
- 3, 7, 11, 15, 19, **23**. $19+4=23$
- 2, 6, 18, 54, 162, **486**. $162 \cdot 3=486$
- 1, 2, 6, 42, 1806, **3263442**. $1806 \cdot 1807=3263442$

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

• 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n = ?$

• 3, 7, 11, 15, 19, 23

• 2, 6, 18, 54, 162, 486

• 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442

$$Q_9 = Q_7 + Q_8$$

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

• 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, donde $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$

• 3, 7, 11, 15, 19, 23 $a_n = a_{n-1} + 4$, $a_1 = 3$

• 2, 6, 18, 54, 162, 486 $a_n = a_{n-1} \times 3$, $a_1 = 2$

• 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442 $a_n = (a_{n-1})(a_{n-1} + 1)$
 $a_1 = 1$

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, donde $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$
- 3, 7, 11, 15, 19, 23. $a_n = a_{n-1} + 4$, donde $a_1 = 3$
- 2, 6, 18, 54, 162, 486. $a_n = a_{n-1} \cdot 3$, donde $a_1 = 2$
- 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442. $a_n = a_{n-1} \cdot (a_{n-1} + 1)$, donde $a_1 = 1$

Sucesiones y Sumatorias

Las siguientes son sucesiones:

- $\{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ donde } a_1 = 0, a_2 = 1\}$
- $\{a_n = a_{n-1} + 4, \text{ donde } a_1 = 3\}$
- $\{a_n = a_{n-1} \cdot 3, \text{ donde } a_1 = 2\}$
- $\{a_n = a_{n-1} \cdot (a_{n-1} + 1), \text{ donde } a_1 = 1\}$

Sucesiones y Sumatorias

Las siguientes son sucesiones:

- $\{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ donde } a_1 = 0, a_2 = 1\}$

Lista de elementos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

- $\{a_n = a_{n-1} + 4, \text{ donde } a_1 = 3\}$

Lista de elementos 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

- $\{a_n = a_{n-1} \cdot 3, \text{ donde } a_1 = 2\}$

Lista de elementos: 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...

- $\{a_n = a_{n-1} \cdot (a_{n-1} + 1), \text{ donde } a_1 = 1\}$

Lista de elementos: 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442, ...

Sucesiones y Sumatorias

Indique la sucesión para cada una de las siguientes listas de elementos:

- $1, 2, 2, 4, 8, 32, 256$ q_1, q_2, \dots, q_n
 $q_n = (q_{n-1})(q_{n-2}) \quad q_1 = 1$
- $2, -2, 2, -2, 2$
 $q_n = (q_{n-1})(-1)^{(n-1)} \quad q_1 = 2$
- $5, 8, 11, 14, 17$
 $q_n = (q_{n-1}) + 3 \quad q_1 = 5$

Sucesiones y Sumatorias

Indique la sucesión para cada una de las siguientes listas de elementos:

- 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256. $\{a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \text{ donde } a_1=1, a_2=2\}$
- 2, -2, 2, -2, 2. $\{a_n = a_{n-1} \cdot (-1), \text{ donde } a_1=2\}$
- 5, 8, 11, 14, 17. $\{a_n = a_{n-1} + 3, \text{ donde } a_1=5\}$

Sucesiones y Sumatorias

Muestre la lista de elementos de las siguientes sucesiones dada por a_1, a_2, a_3, a_4

$$\bullet \{a_n = 1/n\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$\bullet \{a_n = 3 \cdot 2^n\} = \{6, 12, 24, 48\}$$

$$\bullet \{a_n = -1 + 4 \cdot n\} = \{3, 7, 11, 15\}$$

Sucesiones y Sumatorias

Muestre la lista de elementos de las siguientes sucesiones dada por a_1, a_2, a_3, a_4

- $\{a_n=1/n\}$. 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, ...
- $\{a_n=3 \cdot 2^n\}$. 6, 12, 24, 48, ...
- $\{a_n=-1 + 4 \cdot n\}$. 3, 7, 11, 15, ...

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 6, 18, 54, 162, 486,...

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n=2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 6, 18, 54, 162, 486,...

$$a_1=6$$

$$a_2=18$$

$$a_3=54$$

$$a_4=162$$

$$a_5=486$$

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 6, 18, 54, 162, 486,...

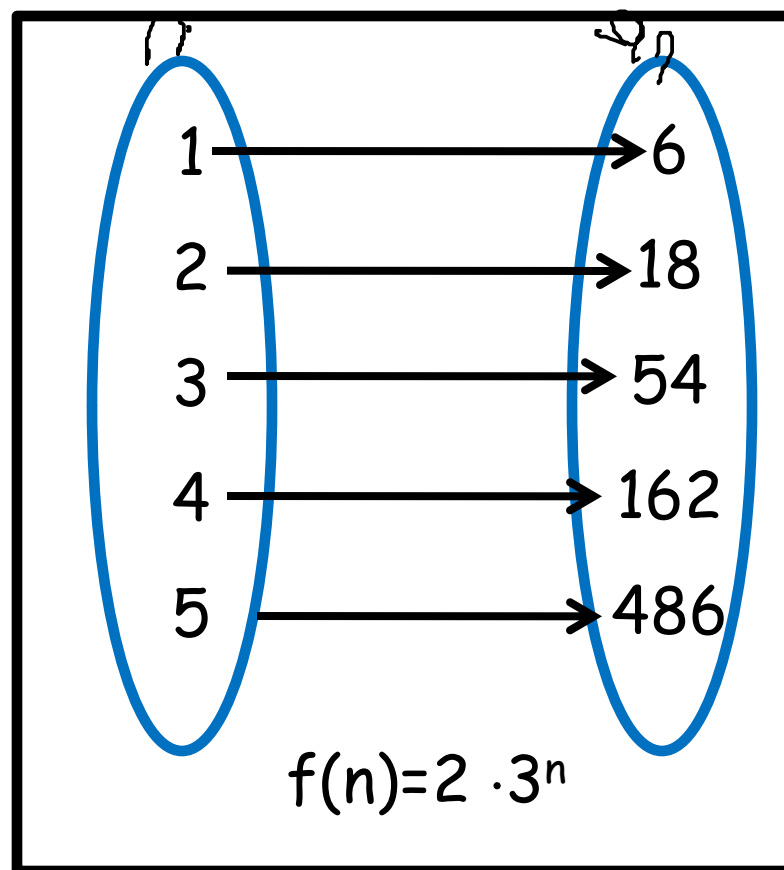
$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 18$$

$$a_3 = 54$$

$$a_4 = 162$$

$$a_5 = 486$$



Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 2, 6, 18, 54, 162, ...

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 2, 6, 18, 54, 162, ...

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 18$$

$$a_3 = 54$$

$$a_4 = 162$$

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 2, 6, 18, 54, 162, ...

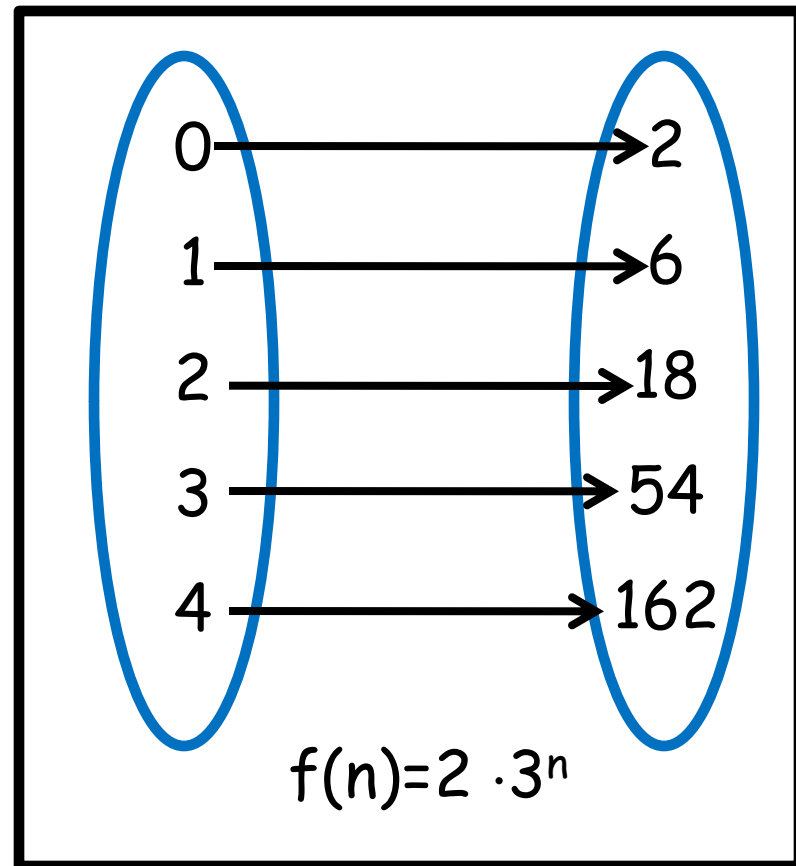
$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 18$$

$$a_3 = 54$$

$$a_4 = 162$$



Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 18, 54, 162, 486, ...

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 18, 54, 162, 486, ...

$$a_2 = 18$$

$$a_3 = 54$$

$$a_4 = 162$$

$$a_5 = 486$$

Sucesiones y Sumatorias

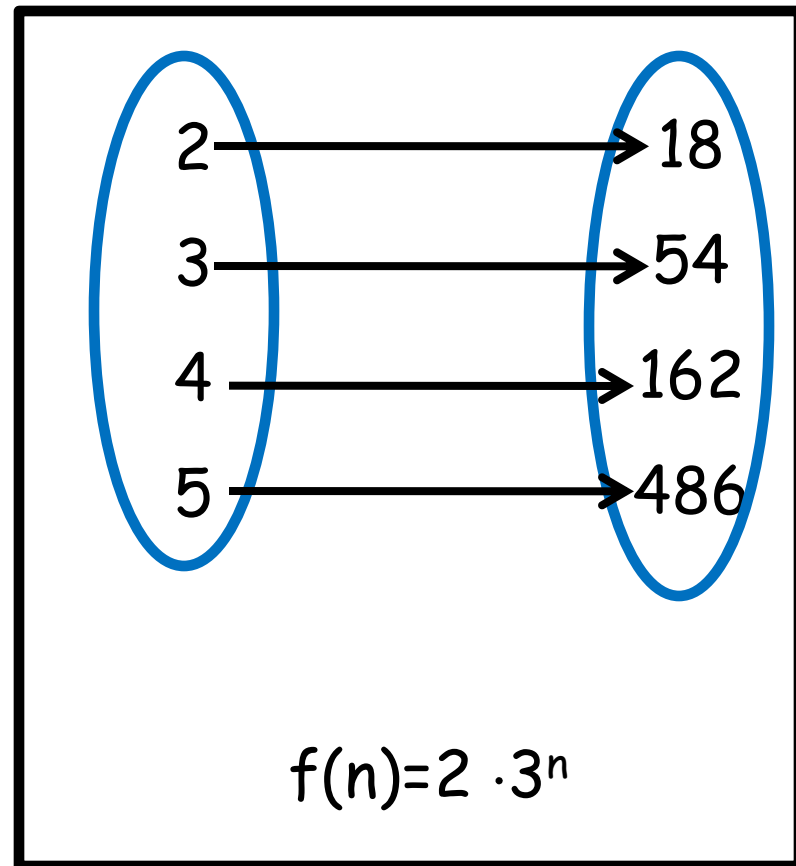
Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 18, 54, 162, 486, ...

$$a_2 = 18$$

$$a_3 = 54$$

$$a_4 = 162$$

$$a_5 = 486$$



Sucesiones y Sumatorias

Definición de sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función de un subconjunto de los enteros a los términos de $\{a_n\}$

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ? 65 $q_n = q_{n-1} + 6$
- -1, 4, 9, 14, 19, 24, ? $q_n = q_{n-1} + 5$ $q_1 = -1$ $q_1 = 5$
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, ? $q_n = q_{n-1} - 2$ $q_1 = 4$

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, $59+6=65$
- -1, 4, 9, 14, 19, 24, $24+5=29$
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, $-8+(-2)=-10$

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

Sucesiones y Sumatorias

• 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

$$11 - 5 = 6$$

$$17 - 11 = 6$$

$$23 - 17 = 6$$

$$29 - 23 = 6$$

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

$$11 - 5 = 6$$

$$17 - 11 = 6$$

$$23 - 17 = 6$$

$$29 - 23 = 6$$

- 5, 5+6, (5+6)+6, (5+6+6)+6, (5+6+6+6)+6, ...

q_1 q_2

q_3

q_4

q_5

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

$$11-5=6$$

$$17-11=6$$

$$23-17=6$$

$$29-23=6$$

- 5, 5+6, 5+6+6, 5+6+6+6, 5+6+6+6+6, ...

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

$$11 - 5 = 6$$

$$17 - 11 = 6$$

$$23 - 17 = 6$$

$$29 - 23 = 6$$

- 5, 5+6, 5+6+6, 5+6+6+6, 5+6+6+6+6, ...

- $5 + \underbrace{0}_{a_0} \cdot 6, 5 + \underbrace{1}_{a_1} \cdot 6, 5 + \underbrace{2}_{a_2} \cdot 6, 5 + \underbrace{3}_{a_3} \cdot 6, 5 + \underbrace{4}_{a_4} \cdot 6, \dots$

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

$$11-5=6$$

$$17-11=6$$

$$23-17=6$$

$$29-23=6$$

- 5, 5+6, 5+6+6, 5+6+6+6, 5+6+6+6+6, ...

- 5+0·6, 5+1·6, 5+2·6, 5+3·6, 5+4·6, ...

- $a_n = 5 + n \cdot 6$

q_d

Sucesiones y Sumatorias

Progresión aritmética

Es una sucesión de la forma

$$t, t+d, t+2d, t+3d, t+4d, \dots \quad t + n d$$

donde el término inicial t y la diferencia d son números reales

Sucesiones y Sumatorias

Progresión aritmética

Es una sucesión de la forma

$$t, t+d, t+2d, t+3d, t+4d, \dots$$

donde el **término inicial** t y la **diferencia** d son números reales

- La progresión aritmética se puede expresar como

$$\{a_n = t + n \cdot d\}$$



$a_0 \dots a_n$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

• $-1, 4, 9, 14, 19, 24, \dots$ $a_n = -1 + 5n$

• $4, 7, 10, 13, 16, 20, 23, 26, \dots$ No

• $4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, \dots$ $a_n = 4 - 2n$

• $3, 6, 12, 24, 48, \dots$ No



Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- -1, 4, 9, 14, 19, 24, ... $\{a_n = -1 + n \cdot 5\}$
- 4, 7, 10, 13, 16, 20, 23, 26, **no es progresión aritmética**
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, ...
- 3, 6, 12, 24, 48, ...

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- -1, 4, 9, 14, 19, 24, ... $\{a_n = -1 + n \cdot 5\}$
- 4, 7, 10, 13, 16, 20, 23, 26, **no es progresión aritmética**
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, $\{a_n = 4 + n \cdot (-2)\}$
- 3, 6, 12, 24, 48, **no es progresión aritmética**

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

• 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... $a_n = 2 + 2n$

• 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... ?

• 3, 1, -1, -3, -5, -7, ... $a_n = 3 - 2n$

• 1/2, 3/2, 5/2, 5/1, 9/2, 11/2, ...
 1 2.5

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, $\{a_n = 2 + n \cdot 2\}$
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... **no es progresión aritmética**
- 3, 1, -1, -3, -5, -7, ...
- $1/2, 3/2, 5/2, 5/1, 9/2, 11/2$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, $\{a_n = 2 + n \cdot 2\}$
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... **no es progresión aritmética**
- 3, 1, -1, -3, -5, -7, ... $\{a_n = 3 + n \cdot (-2)\}$
- $1/2, 3/2, 5/2, 5/1, 9/2, 11/2$. **no es progresión aritmética**

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

• 4, 8, 16, 32, 64, ? 256 $q_n = 2(q_{n-1})$ $q_0 = 4$

• 10, 50, 250, 1250, 6250, ? $q_n = 5(q_{n-1})$ $q_0 = 10$

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 4, 8, 16, 32, 64, $64 \times 2 = 128$
- 10, 50, 250, 1250, 6250, $6250 \times 5 = 31250$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$Q_n = 2 Q_{n-1} \quad Q_0 = 4$$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$8/4=2$$

$$16/8=2$$

$$32/16=2$$

$$64/32=2$$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$8/4=2$$

$$16/8=2$$

$$32/16=2$$

$$64/32=2$$

- 4, $4 \cdot 2$, $(4 \cdot 2) \cdot 2$, $(4 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2$, $(4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$8/4=2$$

$$16/8=2$$

$$32/16=2$$

$$64/32=2$$

- 4, 4·2, 4·2·2, 4·2·2·2, 4·2·2·2·2

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$8/4=2$$

$$16/8=2$$

$$32/16=2$$

$$64/32=2$$

- 4, 4·2, 4·2·2, 4·2·2·2, 4·2·2·2·2

- $4 \cdot 2^0, 4 \cdot 2^1, 4 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4$

$$Q_n = 4 \cdot 2^n$$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

$$8/4=2$$

$$16/8=2$$

$$32/16=2$$

$$64/32=2$$

- 4, 4·2, 4·2·2, 4·2·2·2, 4·2·2·2·2

- $4 \cdot 2^0, 4 \cdot 2^1, 4 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4$

- $\{a_n = 4 \cdot 2^n\}$

Sucesiones y Sumatorias

Progresión geométrica

Es una sucesión de la forma

$$t, t \cdot r, t \cdot r^2, t \cdot r^3, t \cdot r^4, \dots$$

donde el **término inicial** t y la **razón** r son números reales

Sucesiones y Sumatorias

Progresión geométrica

Es una sucesión de la forma

$$t, t \cdot r, t \cdot r^2, t \cdot r^3, t \cdot r^4, \dots$$

donde el **término inicial** t y la **razón** r son números reales

- La progresión geométrica se puede expresar como

$$\{a_n = t \cdot r^n\}$$

$$a_0 \dots a_n$$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 10, 50, 250, 1250, 6250, ... $a_n = 10 \times 5^n$
- 3, 6, 12, 25, 50, 100, 200, ... No
- 1, 6, 8, 12, 25, ... No
- 2, 2/3, 2/9, 2/27, 2/81, ... $a_n = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 10, 50, 250, 1250, 6250, ... $\{a_n = 10 \cdot 5^n\}$
- 3, 6, 12, 25, 50, 100, 200, ... **no es progresión geométrica**
- 1, 6, 8, 12, 25, ...
- 2, $2/3$, $2/9$, $2/27$, $2/81$, ...

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 10, 50, 250, 1250, 6250, ... $\{a_n = 10 \cdot 5^n\}$
- 3, 6, 12, 25, 50, 100, 200, ... **no es progresión geométrica**
- 1, 6, 8, 12, 25, **no es progresión geométrica**
- 2, $2/3$, $2/9$, $2/27$, $2/81$, ... $\{a_n = 2 \cdot (1/3)^n\}$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

• 5, 10, 20, 40, ... $a_n = 5 \times 2^n$

• -4, -2, 0, 2, 4, 6, ... No

• 3, -3, 3, -3, ... $a_n = 3 \times (-1)^n$

• $1/2, 1/6, 1/12, 1/18, \dots$ No

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 5, 10, 20, 40, $\{a_n = 5 \cdot 2^n\}$
- -4, -2, 0, 2, 4, 6, **no es progresión geométrica**
- 3, -3, 3, -3, ...
- $1/2, 1/6, 1/12, 1/18, \dots$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 5, 10, 20, 40, $\{a_n = 5 \cdot 2^n\}$
- -4, -2, 0, 2, 4, 6, **no es progresión geométrica**
- 3, -3, 3, -3, $\{a_n = 3 \cdot (-1)^n\}$
- $1/2, 1/6, 1/12, 1/18, \dots$ **no es progresión geométrica**

Sucesiones y Sumatorias

- Dadas las siguientes sucesiones indique cuáles son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas
- Expresa las progresiones aritméticas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$ y las geométricas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

Sucesión	Progresión aritmética	Progresión geométrica	No es ni progresión aritmética ni geométrica
-3, -7, -11, -15, -19, ...	$a_n = -3 + n(-4)$		
-2, -7/3, -8/3, -3, -10/3, ...	$a_n = -2 + n(-1/3)$		
3, 12, 48, 192, 768, ...		$a_n = 3 \times 4^n$	

Sucesiones y Sumatorias

Sumatorias

Sucesiones y Sumatorias

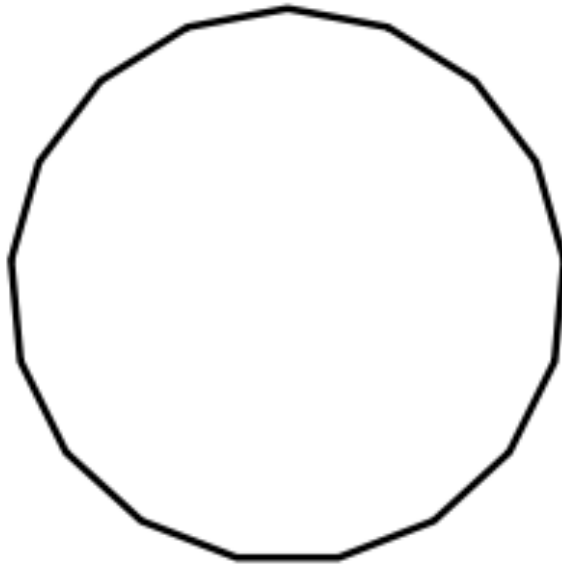
Carl Friedrich Gauss

- Contribuyó a la teoría de números, estadística, astronomía y óptica
- Encontró la fórmula para la sumatoria de 1 a n en una asignación de clase de primaria
- Inventó la aritmética modular
- Descubrió la construcción de un heptadecágono



1777- 1855

Sucesiones y Sumatorias



Heptadecágono

Sucesiones y Sumatorias



Johann Bartels
1769- 1836

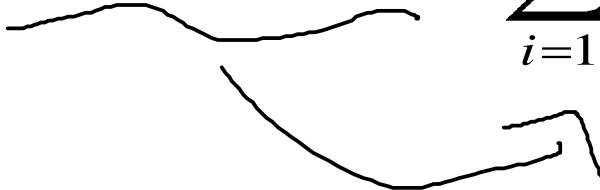
Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\dots+100$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\dots+100 = \sum_{i=1}^{100} i$$
Hand-drawn lines connecting the terms of the sequence to the summation symbol. A horizontal line underlines the first five terms (1+2+3+4+5). A curved line starts from the middle of this underline and points towards the summation symbol. Another horizontal line underlines the last term (100), and a short vertical line connects it to the summation symbol.

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\dots+100=\sum_{i=1}^{100} i$$

donde la variable i se conoce como el **índice** de la sumatoria y toma los valores **enteros** entre el límite inferior y superior

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\dots+100=\sum_{i=1}^{100} i = 5050$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{i} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1, \overline{8333}$$

$$\text{c) } \sum_{i=4}^8 (-1)^i = \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1} + 1 = 1$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{i} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$\text{c) } \sum_{i=4}^8 (-1)^i = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^4 1 = \underset{k=1}{1} + \underset{k=2}{1} + \underset{k=3}{1} + \underset{k=4}{1} = 4$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^3 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$$

$$\text{c) } \sum_{j=5}^9 (j-2) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$$

$$\text{d) } \sum_{k=2}^5 2 \cdot k = 4 + 6 + 8 + 10 = 28$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^4 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^3 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$$

$$\text{c) } \sum_{j=5}^9 (j - 2) = (5-2) + (6-2) + (7-2) + (8-2) + (9-2) = 25$$

$$\text{d) } \sum_{k=2}^5 2 \cdot k = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 28$$

Sucesiones y Sumatorias

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

Sucesiones y Sumatorias

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sucesiones y Sumatorias

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet 1+2+3+4+5+\dots+100 = \sum_{k=1}^{100} k = ?$$

$$\frac{100(101)}{2} = 5050$$

Sucesiones y Sumatorias

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet 1+2+3+4+5+\dots+100 = \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n c = c \cdot n$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, \text{ si } r \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n ar^k = (n + 1)a, \text{ si } r = 1$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j$

$\sum_{i=0}^n ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} = \frac{3 \times 5^9 - 3}{4}$

b) $\sum_{i=1}^{50} i^2$

$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{50(51)(101)}{6}$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j = \frac{3 \cdot 5^9 - 3}{5 - 1} = 1464843$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50(51)(101)}{6} = 42925$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j = \frac{3 \cdot 5^9 - 3}{5 - 1} = 1464843$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50(51)(101)}{6} = 42925$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^5 k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25(36)}{4}$$

$$\text{d) } \sum_{j=1}^5 (j + j^2) = \sum_{j=1}^5 j + \sum_{j=1}^5 j^2 = \frac{5(6)}{2} + \frac{5(6)(11)}{6}$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^{100} 3 = 300$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j = \frac{3 \cdot 5^9 - 3}{5 - 1} = 1464843$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50(51)(101)}{6} = 42925$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^5 k^3 = \frac{5^2(6)^2}{4} = 225$$

$$\text{d) } \sum_{j=1}^5 (j + j^2) = \sum_{j=1}^5 j + \sum_{j=1}^5 j^2 = \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 70$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^{100} 3 = 3 \cdot 100 = 300$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2$ $\sum_{i=1}^n i^2 \dots 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

b) $\sum_{j=1}^8 3 \cdot (5)^j$ $\rightarrow 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

c) $\sum_{k=3}^5 k^3$ $\sum_{i=2}^n i^2 \doteq \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 \doteq \frac{50(51)}{2} = 1$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 3(s)^j \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} 3r^j \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} 3s^j$$

$$\underbrace{3(s) + 3(s)^2 \dots}_{\dots} \quad 3(s)^0 + 3(s)^1 + 3(s)^2 \dots$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 3(s)^j = \sum_{j=0}^{\infty} 3(s)^j - 3(s)^0$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} 3(s)^j = \frac{3(s)^9 - 3}{4} = 3$$

$$\sum_{k=3}^5 k^3 \rightarrow \sum_{k=1}^5 k^3$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 \rightarrow \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3}$$

$$\sum_{k=3}^5 k^3 = \underbrace{\sum_{k=1}^5 k^3}_{\dots} - 1^3 - 2^3$$

$$\sum_{k=3}^5 k^3 = \frac{5^2(6)^2}{4} - 1^3 - 2^3$$

$$\sum_{i=200}^{2000} i \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{2000} i$$

$$200 + 201 + \dots + 2000$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2000$$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + 2000}_{199}$$

$$2000$$

$$\sum_{i=200}^{2000} i$$

$$2000$$

$$\sum_{i=1}^{2000} i$$

$$199 \sum_{i=1}^{199} i$$

$$\sum_{i=200}^{2000} i =$$

$$\frac{(2000)(2001)}{2} -$$

$$\frac{(199)(200)}{2}$$

$$10000$$

$$\sum_{i=450} 3 \times 4^i$$

$$\longrightarrow$$

$$10000$$

$$\sum_{i=0} 3 \times 4^i$$

$$449$$

$$\sum_{i=0} 3 \times 4^i$$

$$\frac{3 \times 4^{10001} - 3}{3}$$

$$- \frac{3 \times 4^{450} - 3}{3}$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$$

$$\text{b) } \sum_{j=1}^8 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$$

$$\text{c) } \sum_{k=3}^5 k^3 = \sum_{k=1}^5 k^3 - 1^3 - 2^3 = 225 - 1 - 8 = 216$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$$

$$\text{b) } \sum_{j=1}^8 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$$

$$\text{c) } \sum_{k=3}^5 k^3 = \sum_{k=1}^5 k^3 - 1^3 - 2^3 = 225 - 1 - 8 = 216$$

$$\text{d) } \sum_{k=3}^{10} 7 \cdot (-3)^k$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$$

$$\text{b) } \sum_{j=1}^8 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^8 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$$

$$\text{c) } \sum_{k=3}^5 k^3 = \sum_{k=1}^5 k^3 - 1^3 - 2^3 = 225 - 1 - 8 = 216$$

$$\text{d) } \sum_{k=3}^{10} 7 \cdot (-3)^k = 310009 - (49) = 309960$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{10} k \quad 1+2+3+\dots$$

$$a) \sum_{k=-2}^{10} k$$

$$-2 + -1 + 0 + 1 + 2 \dots$$

$$\sum_{k=-2}^{10} k = \sum_{k=1}^{10} k + (-2) + (-1) + 0$$

$$b) \sum_{k=-3}^{20} k^2$$

$$\sum_{k=-2}^{10} k = \frac{10(11)}{2} - 3$$

$$c) \sum_{k=-2}^{15} k^3$$

$$\sum_{k=1}^{20} k^2 + (0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{20(21)(41)}{6} + 14$$

$$\sum_{k=1}^{15} k^3 + (0)^3 + (-1)^3 + (-2)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{15^2 \times 16^2}{4} = 9$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\text{a) } \sum_{k=-2}^{10} k = (-2) + (-1) + (0) + \sum_{k=1}^{10} k = -3 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 52$$

$$\text{b) } \sum_{k=-3}^{20} k^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + \sum_{k=1}^{20} k^2 = 2884$$

$$\text{c) } \sum_{k=-2}^{15} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + \sum_{k=1}^{15} k^3 = 14391$$

Sucesiones y Sumatorias

- **Calcule las siguientes sumatorias.**

Muestre el procedimiento realizado

$$\bullet \sum_{k=3}^{16} 5 \cdot (-2)^k = \sum_{k=0}^{16} 5(-2)^k - \sum_{k=0}^2 5(-2)^k$$

$$\bullet \sum_{k=-3}^{15} k^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2 + (0)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2$$

$$\sum_{i=1}^{100} 2i \rightarrow 2 \sum_{i=1}^{100} i$$

$$\sum_{i=1}^{100} (i + 2) = \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} 2$$

Sucesiones y Sumatorias

Sumas sobre conjuntos

$$\sum_{S \in \{0, 2, 4\}} s$$

$$P = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 22\}$$

$$\sum_{j \in P} j \rightarrow 61 \quad \sum_{j \in P} 2j = 122$$

Sucesiones y Sumatorias

Sumas sobre conjuntos

Representa la suma de los valores de s para todos los miembros del conjunto $\{0,2,4\}$

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$$

Sucesiones y Sumatorias

Sumas sobre conjuntos

Representa la suma de los valores de s para todos los miembros del conjunto $\{0,2,4\}$

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Sucesiones y Sumatorias

Dado $S=\{1,3,5,7\}$, indique cuáles son los valores de las siguiente sumas:

$$\text{a) } \sum_{j \in S} j = 16$$

$$\text{b) } \sum_{j \in S} j^2 = 84$$

$$\text{c) } \sum_{j \in S} 1 = 4$$

Sucesiones y Sumatorias

Dado $S=\{1,3,5,7\}$, indique cuáles son los valores de las siguiente sumas:

$$\text{a) } \sum_{j \in S} j = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\text{b) } \sum_{j \in S} j^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 84$$

$$\text{c) } \sum_{j \in S} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 3 = \sum_{i=1}^n (3n) \\ = 3n^2$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$$

i \ j	1	2	3	4	5	...	n
1	1	2	3	4	5	...	n
2	2	4	6	8	10	...	2n
3	3	6	9	12	15	...	3n
4	4	8	12	16	20	...	4n
5	5	10	15	20	25	...	5n
...
n	n	2n	3n	4n	5n	...	n^2

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n 2k = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n n = n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^i$$

	i	j			
	1	2	3	...	n
0	1^0	2^0	3^0	...	n^0
1	1^1	2^1	3^1	...	n^1
2	1^2	2^2	3^2	...	n^2
3	1^3	2^3	3^3	...	n^3
...					
n	1^n	2^n	3^n	...	n^n

$$\sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \dots$$

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \dots$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n j^2$$

j	1	0	1	2	3	...	n	
0	0	0	0	0	0	...	0	$\rightarrow \sum_{k=0}^n 0$
1	0	1	4	9	...	n^2		$\rightarrow \sum_{k=1}^n k^2$
2	0	2	8	18	...	$2n^2$		$\rightarrow \sum_{k=1}^n 2k^2$
3	0	3	12	27	...	$3n^2$		$\rightarrow \sum_{k=1}^n 3k^2$
...								
n	0	n	4n	9n	...	n^3		$\rightarrow \sum_{k=1}^n nk^2$

$\sum_{k=1}^n k$
 $\sum_{k=1}^n 4k$
 $\sum_{k=1}^n 9k$
 $\sum_{k=1}^n n^2 k$

$$\sum_{k=1}^n k$$

$$\sum_{k=1}^n 4k$$

$$\sum_{k=1}^n 9k$$

$$\sum_{k=1}^n n^2 k$$

$$\sum_{k=1}^n c k^2 = c \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n k \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\sum_{i=-3}^n \sum_{j=4}^n 3j + i^2 j \rightarrow \sum_{i=-3}^n \sum_{j=4}^n 3j + \sum_{i=-3}^n \sum_{j=4}^n i^2 j$$

i \ j	1	2	3	4	5	...	n
-3	3	6	9	12	15		3n
-2	3	6	9		12	15	3n
-1							
0							
1							
n	3	6	9	12	15		3n

$\sum_{k=4}^n 3k$
 $\sum_{k=4}^n 3k$
 $\sum_{k=4}^n 3k$
 $\sum_{k=4}^n 3k$

$\sum_{k=-3}^n 3$
 $\sum_{k=-3}^n 6$
 $\sum_{k=-3}^n 12$
 $\sum_{k=-3}^n 3n$

$\sum_{k=-3}^n 12 \rightarrow 12n + 4(12)$
 $\sum_{k=-3}^n 12 \rightarrow 12n + 4(12)$
 $\sum_{k=-3}^n 12 \rightarrow 12n + 4(12)$

$\sum_{k=3}^n (3n(n+1) - 18)$
 $n(3n(n+1) - 18)$
 $+4(3n(n+1) - 18)$

$12, 15, \dots, 18, \dots, 3n$
 $4, 5, \dots, 6, \dots, n$

$\sum_{p=4}^n (3pn + 4p) = \sum_{p=4}^n 3pn + \sum_{p=4}^n 4p$

$3n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - 3n(1+2+3) + 4n^2 - 12n$

$3n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = 18n + 4n^2 - 12n$

$$\sum_{i=-3}^n \sum_{j=4}^n i^2 j$$

i \ j	1	2	3	4	5	6	...	n
-3	9	18	27	36	45	54		9n
-2	4	8	12	16	20	24		4n
-1	1	2	3	4	5	6		n
0	0	0	0	0	0	0		0n
1	1	2	3	4	5	6		n
n	n^2	2n^2	3n^2					nn^2

$\sum_{p=4}^n 9p$
 $\sum_{p=4}^n 4p$
 $\sum_{p=4}^n 4p$
 $\sum_{p=4}^n 4p$

$\sum_{p=4}^n cp = \frac{cn(n+1)}{2} = c(3n+1)$

$nn^2 \sim \sum_{p=4}^n np^2$

f	c
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
...	...
n	n^2

$\sum_{f=-3}^n \left(\frac{f^2 n(n+1)}{2} - f^2(3n+1) \right)$

$\frac{n(n+1)}{2} \sum_{f=-3}^n f^2 - \sum_{f=-3}^n 6f^2$

$\left(\frac{n(n+1)}{2} - 6 \right) \sum_{f=-3}^n f^2$

$\left(\frac{n(n+1)}{2} - 6 \right) \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2) \right)$

$$\sum_{i=5}^n \sum_{j=2}^n 3^i$$

$$\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (i+2j)$$

j \ i	0	1	2	3	4	...	n
0	0	2	4	6	8		2n
1	x	3	5	7	9		2n+1
2	x	x	6	8	10		2n+2
3	x	x	x	9	11		2n+3
...							
n							2n+n

$$\sum_{i=0}^n 2i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n 2i + 2(0)$$

$$\frac{2(n+1)n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n 2i+1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (2i+1) = 2(0)$$

$$\sum_{i=1}^n 2i$$

$$\sum_{i=2}^n 2i+2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (2i+2) = 2(1)$$

$$\sum_{i=3}^n 2i+3 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=2}^n (2i+3) = 2(1) - 2(2)$$

$$\sum_{i=n}^n 2i+n \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (2i+n) = \sum_{i=1}^{n-1} (2i+n)$$

$$n \cdot n(n+1) + n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n C = cn$$

$$\sum_{i=0}^n n(n+1) + \sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i 2i$$

$$n(n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i 2i$$