Métodos Numéricos

Errores de Redondeo y Truncamiento

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

February 13, 2015

Agenda

Errores.

Exactitud y Precisión.

int $\rightarrow$ 32   long = 64
int64

- El computador tiene un límite para representar magnitudes
- Al aproximar la derivada como una diferencia finita, la solución no es exacta. ¿Es posible cuantificar el error?
- Los métodos numéricos deben ser lo suficientemente precisos para solucionar un problema en particular

int 32 $\rightarrow 0, \; 2^{32}-1$ | int $\rightarrow -2^{32}, \; 2^{32}-1$

0^+
1^-

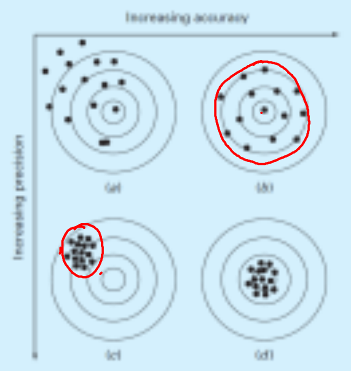
Errores.
Exactitud y Precisión.

πr^2 $\pi \approx 3{,}14168 \ldots\ldots\ldots$

- **Error de Redondeo:** Esta relacionado con el error que ocurre debido a que el computador no puede representar algunas cantidades exactamente
- **Error de Truncamiento:** Esta relacionado con la cantidad de términos que se emplean en una serie para aproximar una solución

Errores.
Exactitud y Precisión.

- Exactitud:accuracy, Precisión:precision



Cifras significativas.

65

64/63
645

60, 65, 70

09753,4 o 09753,5

00000,0
⋮
99999,9

IEEE 754

...|000

0,0000|787

0000|999

$7{,}87 \times 10^{-5}$

0,00069

Errores.
Exactitud y Precisión.

- **Error Absoluto:** Diferencia entre el valor exacto y una aproximación

$$E_t = valorverdadero - aproximacion$$

- **Error Relativo:**

$$\varepsilon_t = \frac{valorverdadero - aproximacion}{valorverdadero} \times 100$$

Errores.

Exactitud y Precisión.

- **Problema:** Se mide la longitud de un puente y un tornillo, obteniendo las medidas de 9999 y 9 cm respectivamente, las medidas verdaderas son de 10000 cm y 10 cm, el error en ambos casos es de $\boxed{\text{1 cm,}}$ ¿Cúal es el valor de los errores relativos?

Errores.
Exactitud y Precisión.

- **Solución:**

$$\varepsilon_t = \frac{valorverdadero - aproximacion}{valorverdadero} \times 100$$

$$\varepsilon_t = \frac{10000 - 9999}{10000} \times 100 = 0,01\%$$

$$\varepsilon_t = \frac{10 - 9}{10} \times 100 = 10\%$$

Errores.
Exactitud y Precisión.

- En los problemas donde no hay solución analítica, se estima el error aproximado

$$\varepsilon_a = \frac{aproximacionactual - aproximacionanterior}{aproximacionactual} \times 100$$

- El criterio de parada consiste en encontrar un error de aproximación dentro de un rango ε_s

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

$\int e^{-x^2}$

Errores.
Exactitud y Precisión.

(Scarborough, 1966)

- ¿Qué valor es adecuado para ε_s?

$$\varepsilon_s = (0.5x10^{2-n})\%$$

Donde:
n es la cantidad de cifras significativas

Errores.
Series de Taylor.

- Representación de una función por medio de una suma infinita de términos, los cuales son calculados a partir de los valores de las derivadas de la función en un punto **a**

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Cuando $a = 0$, la serie es llamada serie de Maclaurin

Errores.
Serie de Maclaurin.

- **Problema:** Desarrolle la expansion en Series de Maclaurin para e^x hasta el cuarto término y exprese la expansión como una sumatoria

$\forall n \; f^n(0) = e^0$

$$e^x = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^n(0)}{n!} x^n \longrightarrow e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$e^5 = 148.41$

$$e^5 = \frac{1}{0!} + \frac{5}{1!} + \frac{25}{2!} + \frac{125}{3!} = 39.33$$

Errores.
Serie de Maclaurin.

- **Solucion:**

$$e^x = \frac{e^0}{0!}x^0 + \frac{e^0}{1!}x^1 + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^0}{3!}x^3 \ldots$$

Expresando la expansion como una sumatoria se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Errores.

Serie de Maclaurin.

- **Problema:** Estimar e^x con $x = 0.5$ empleando la expansión en series de Maclaurin para e^x con al menos 3 cifras significativas

$$e_x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

- **Nota**: La solución exacta es $e^{0.5} = 1.648721$.

Errores.
Serie de Maclaurin.

- **Solución:**

$0.5 \times 10^{2} \times 10^{-n} = ?$

$$\boxed{\varepsilon_s = (0.5x10^{2-n})\%}$$

$$\varepsilon_s = (0.5x10^{2-3}) = 0.05\%$$

Se debe llegar a un error menor del 0.05 % para garantizar una correcta aproximación con al menos 3 cifras significativas

Errores.
Serie de Maclaurin.

- El primer estimado es $e^x = 1$
- El error absoluto para el primer estimado es:

$$\varepsilon_t = \frac{1.648721 - 1}{1.648721} \times 100 = 39.3\%$$

Errores.
Serie de Maclaurin.

- El segundo estimado es $e^x = 1 + x = 1 + 0.5 = 1.5$
- El error absoluto y el error aproximado para el segundo estimado es:

$$\varepsilon_t = \frac{1.648721 - 1.5}{1.648721} \times 100 = 9.02\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{1.5 - 1}{1.5} \times 100 = 33.3\%$$

Errores.
Serie de Maclaurin.

- El tercer estimado es
  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} = 1 + 0.5 + 0.125 = 1.625$
- El error absoluto y el error aproximado para el tercer estimado es:

$$\varepsilon_t = \frac{1.648721 - 1.625}{1.648721} \times 100 = 1.44\%$$
$$\varepsilon_a = \frac{1.625 - 1.5}{1.625} \times 100 = 7.69\%$$

Errores.
Serie de Maclaurin.

- **Instrucciones Scilab:**
  - funcionexp.sce

Errores.
Serie de Maclaurin.

Términos	Aproximación	ε_t	ε_a
1	1	39.3	
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833333	0.175	1.27
5	1.648437500	0.0172	0.158
6	1.648697917	0.00142	0.0158

Ejercicio 1. La derivada de $f(x)=\dfrac{1}{1-3x^2}$ es $f'(x)=\dfrac{6x}{(1-3x^2)^2}$

¿Que dificultades hay en evaluar la derivada para x = 0.5777. Inténtelo con aritmética de 3 y 4 dígitos significativos con corte.

$$\frac{6(0.5777)}{(1-3(0.5777)^2)^2}=\frac{3.4662}{(1-\underbrace{1.00121187}_{0,00121187})^2}=2360160,56$$

$$3) \rightarrow \frac{6\times 0.57}{(1-3(0.57)^2)^2}=5342,99986 \longrightarrow \varepsilon_r = 99.77\%$$

$$4) \frac{6\times 0.577}{(1-3(0.577)^2)^2}=2352910,793 \rightarrow \varepsilon_r = 0.37\%$$

Errores de Redondeo.

Definición.

- **Error de Redondeo**: Resultan de la limitación que tienen los computadores para representar magnitudes

Errores de Redondeo.

Conversión Decimal a Binario.

- Representar el número decimal $(173)_{10}$ en formato binario

$$
\begin{gathered}
173/2 = 86 \text{ resto} = 1 \\
86/2 = 43 \text{ resto} = 0 \\
43/2 = 21 \text{ resto} = 1 \\
21/2 = 10 \text{ resto } 1 \\
10/2 = 5 \text{ resto } 0 \\
5/2 = 2 \text{ resto } 1 \\
2/2 = 1 \text{ resto } 0
\end{gathered}
$$

$(10101101)_2$

Errores de Redondeo.

Conversión Binario a Decimal.

- Representar el número binario $(10101101)_2$ en formato decimal

$$
\begin{aligned}
(10101101)_2 \\
2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 \\
128 + 32 + 8 + 4 + 1 \\
(173)_{10}
\end{aligned}
$$

Errores de Redondeo.
Representación del Computador.

- ¿Cuántos bits son necesarios para representar el número binario $(10101101)_2$ ~ 8
- ¿Como se representa el número binario $(10101101)_2$ en un computador de 16 bits?

000010101101

Errores de Redondeo.
Representación Signo-Magnitud.

- Representación en Signo-Magnitud de $(10101101)_2$ en un computador de 16 bits

Signo	Magnitud														
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1

Errores de Redondeo.

Representación Signo-Magnitud.

- Mayor número positivo que se puede representar con 16 bits

Signo	Magnitud														
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$2^{15} - 1$$

Errores de Redondeo.
Representación Signo-Magnitud.

- Menor número negativo que se puede representar con 16 bits

Signo	Magnitud														
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$-2^{15}$$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

- Formato de representación de punto flotante

$$\pm s \times b^e$$

$$-7.53 \times 10^{-2}$$

Donde:
s es la mantisa
b es la base del sistema numérico empleado
e es el exponente

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

- **Ejemplo:** El número 0.005678 se representa como 5.678×10^{-3} (forma normalizada)
- **Nota:** Se evita el almacenamiento en memoria de ceros no significativos como en el caso de 0.005678×10^{0}

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante.

- **Problema:** Expresar en forma normalizada:
  - 0.000000000000395

3.95×10^{-14}

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

- **Solución:**
  - $0.0000000000000395 = 3.95 \times 10^{-14}$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

- **Problema:** Suponga que existe un computador que opera en base 10 y puede representar cantidades con 5 dígitos. Se emplea: un dígito para el signo, dos para la mantisa, uno para el signo del exponente y uno para el exponente.

$\pm 99 \times 10^{+9}$

$+ 01 \times 10^{-9}$

- ¿Cuál es el valor positivo más grande que se puede representar?
- ¿Cuál es el valor positivo más pequeño que se puede representar?
- ¿Qué trae más ventajas al sistema, aumentar un dígito a la mantisa ó un dígito al exponente?

0
⋮
100
⋮
120
⋮
120
1010
1000

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante.

Solución:
Representación: $s_1 d_1 .d2 \times 10^{s_0 d_0}$
Número positivo más grande: $+9.9 \times 10^{+9}$
Número positivo más pequeño: $+1.0 \times 10^{-9}$

Al aumentar un dígito a la mantisa, aumenta la precisión:
$+9.99 \times 10^{+9}$
Al aumentar un dígito al exponente, aumenta el rango:
$+9.9 \times 10^{+99}$

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante.

- **Problema:** ¿Cuál es el error de redondeo (error relativo) al expresar el número 0.03125 en el sistema con representación $s_1 d_1.d2 \times 10^{s_0 d_0}$?

$$+3.1 \times 10^{-2} \longrightarrow 0.031$$

$$Er = \frac{0.03125 - 0.031}{0.03125} \times 100 \approx 0.8\%$$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

- **Solución:**
  El número 0.03125 se representa como:
  $+3.1 \times 10^{-2}$

  El error de redondeo (error relativo) corresponde a:

$$\frac{0.03125 - 0.031}{0.03125} \times 100 = 0.8\%$$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

$1.XXXX \times 2^{e}$

- Representación de números binarios en punto flotante

1

$$\pm(1 + f) \times 2^e$$

Donde:

f es la mantisa (parte fraccionaria, el 1 no se almacena)

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante.

- **Problema:** Expresar en formato de punto flotante el número binario 1101.1

$$0 \mid 11 \mid 1011 \;\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$1.1011 \times 2^{3}$$

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante.

- **Solución:**

$$1.1011 \times 2^3$$

$$(1 + 0.1011) \times 2^3$$

1,1011

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante IEEE-754.

- Representación Punto Flotante IEEE-754

sign (s)	biased exponent (e')	mantissa (m)
1 bit	8 bit	23 bits

$$value = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^{e'-127}$$

$2^7 - 1 = 127$

$0 - 255$

$-127 - 128$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante IEEE-754.

137.42

- **Problema:** Encontrar el valor decimal que corresponde al siguiente número binario en formato IEEE-754

1	10100010	10100000000000000000000

4 | 23

100.0011

0.23 x 2 = 0.46
0.46 x 2 = 0.92
0.92 x 2 = 1.84
0.84 x 2 = 1.68

1	10100010	10100000000000000000000

$$-\ 1111111$$

$$1,1010$$

$$\underbrace{0100011}_{35}$$

$$-1,1010 \times 2^{35}$$

$$2^{35}\ 2^{34}\ 2^{33}\ 2^{32}\ 2^{31}$$

$$11010\ldots$$

$$31$$

$$5,5834 \times 10^{10}$$

137,42

2^{-2} 2^{-3} 2^{-5} 2^{-7} 2^{-8} 2^{-9} 2^{-14} 2^{-16}

1 0 0 0 1 0 0 1, 01 10 | 1 0 1 1 1 0 | 0 0 0 1 0 1

7

0 0 0 1 1

Redondeo

0.42 x 2 = 0.84
0.84 x 2 = 1.68
0.68 x 2 = 1.36
0.36 x 2 = 0.72
0.72 x 2 = 1.44
0.44 x 2 = 0.88
0.88 x 2 = 1.76
0.76 x 2 = 1.52
0.52 x 2 = 1.04
0.04 x 2 = 0.08
0.08 x 2 = 0.16
0.16 x 2 = 0.32
0.32 x 2 = 0.64
0.64 x 2 = 1.28
0.28 x 2 = 0.56
0.56 x 2 = 1.12
0.12 x 2 = 0.24
0,24 x 2 = 0.48
0.48 x 2 = 0.96

0.96 x 2 = 1.92
0.92 x 2 = 1.84

127 + 7 = 134

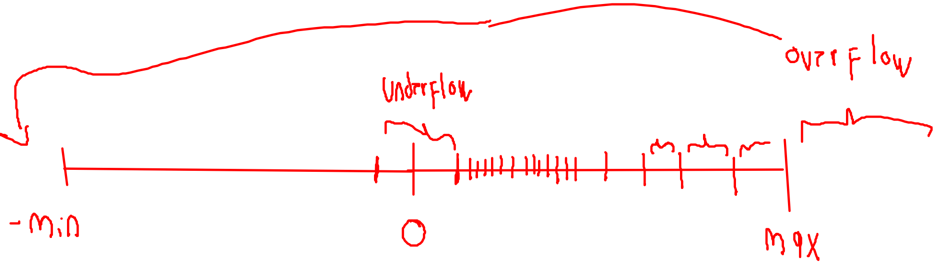
6

1 0 0 0 0 1 1 0

0 | 1 0 0 0 0 1 1 0 | 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0

0 0 0 1 0 1

3.4200000762939453125



23 bits → mantiza

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante IEEE-754.

- **Solución:**

$$value = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^{e'-127}$$
$$value = (-1)^1 \times (1.101)_2 \times 2^{(10100010)_2-127}$$
$$value = (-1)^1 \times (1.625) \times 2^{162-127}$$
$$value = (-1)^1 \times (1.625) \times 2^{35}$$
$$value = -5.5834 \times 10^{10}$$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante IEEE-754.

- ¿Cómo es posible pasar de un valor en formato decimal a un valor en formato IEEE-754?

$$-5.5834 \times 10^{10} = (-1)^1 \times (1.?)_2 \times 2^{\pm ?}$$

Tarea Opcional: Desarrolle un programa en scilab que permita realizar la conversión

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante IEEE-754.

- Biased Exponent: Es una forma que permite representar cantidades negativas sin tener un bit de signo en el exponente

$$\text{Rango posible con 8bits} : 0 \leq e' \leq 255$$
$$\text{Bias} : -127 \leq e \leq 128$$

$$\text{Rango actual} : 1 \leq e' \leq 254$$
$$\text{Bias} : -126 \leq e \leq 127$$

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante IEEE-754.

s	e’	m	Representa
0	Todos Ceros	Todos Ceros	0
1	Todos Ceros	Todos Ceros	-0
0	Todos Unos	Todos Ceros	∞
1	Todos Unos	Todos Ceros	$-\infty$
1 ó 0	Todos Unos	Diferente a Cero	NaN

La edición 1984 de IEEE-754 introdujo los números especiales.

Errores de Redondeo.
Representación Punto Flotante IEEE-754.

1, 1111111

1 signo   exp 8   e-127   23 mantisa

NaN

- **Problema:**
  - ¿Cuál es el valor positivo más grande que se puede representar con el formato IEEE-754?
  - ¿Cuál es el valor positivo más pequeño que se puede representar con el formato IEEE-754?
  - ¿Cuál es el valor del machine epsilon?

$\times 2^{127}$

$\underbrace{11}_{24}$ $\underbrace{00000000}_{104}$

Errores de Redondeo.

Representación Punto Flotante IEEE-754.

Solución:

Número positivo más grande:

$+1.1...1 \times 2^{+127} = 3.4 \times 10^{38}$

Número positivo más pequeño:

$+1.0...0 \times 2^{-126} = 1.175 \times 10^{-38}$

Machine epsilon:

$\varepsilon_{mach} = 2^{-23} = 1.19 \times 10^{-7}$

$m \times 2^0$

23

0 1111111 1, ____ 1

$2^{-1}\,2^{-2} \ldots 2^{-23}$

$2^{-2}\,2^{-3}\,2^{-4} \ldots$

2^{-3}

1 o t E → 10 000 ____

10 → 10

Errores de Redondeo.

Operaciones Aritméticas.

764,2 → 0,1
764,1

- Son operaciones que ocasionan errores de redondeo:
  - Restar cantidades pequeñas muy cercanas (*subtractive cancellation*)

$$0.7642 \times 10^3 - 0.7641 \times 10^3 = 0.0001 \times 10^3$$

  - Adicionar un número grande a uno pequeño

$$0.4000 \times 10^4 + 0.0000001 \times 10^4 = 0.4000001 \times 10^4$$

4000 + 0,001 → 4000,001

$$\underbrace{1,1001}_{4} \times 2^{3} \rightarrow 1100,100$$

$$0,0,0,1,\underbrace{0111}_{4} \times 2^{-3}$$

$$\begin{array}{r} 0,0010111 \\ \hline 1100,1010111 \end{array}$$

$$1,1001 \times 2^{3}$$

Errores de Truncamiento.

Definición.

- **Error de Truncamiento**: Resultan de usar una aproximación en lugar de una solución matemática exacta

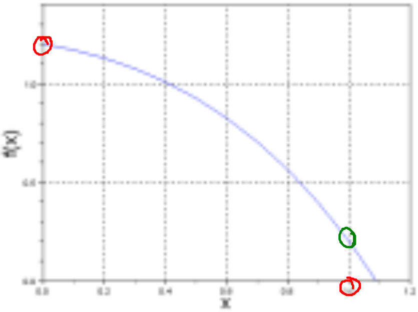
Errores de Truncamiento.
Definición.

- En la siguiente ecuación se introduce un error de truncamiento, ya se que solo se esta aproximando el valor verdadero de la derivada

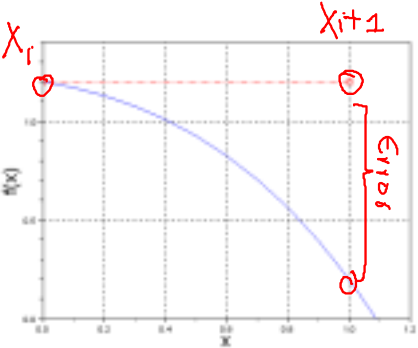
$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Errores de Truncamiento.
Series de Taylor.

- ¿Cómo estimar el valor de la función en el punto $x_{i+1}(x = 1)$ partiendo de $x_i(x = 0)$?



Errores de Truncamiento.
Series de Taylor.

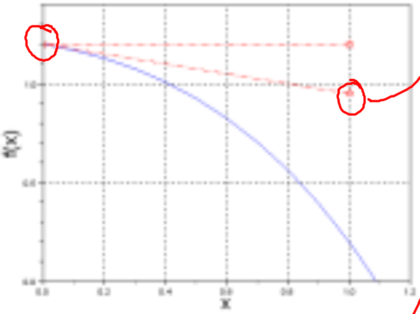


$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

Errores de Truncamiento.

Series de Taylor.

$F(x_i)$

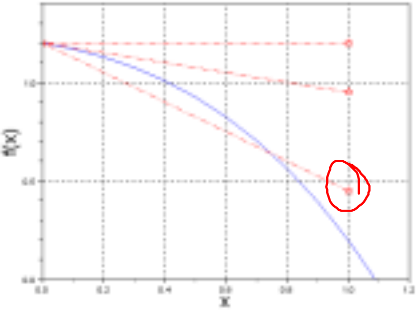


$(x_{i+1} - x_i)$

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h$$

Errores de Truncamiento.

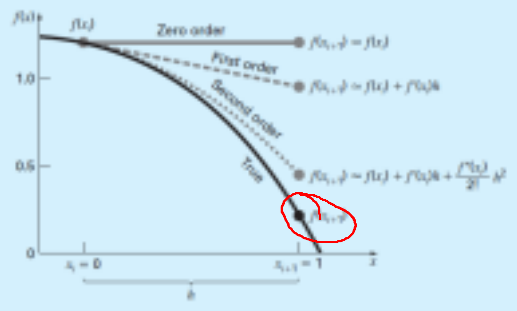
Series de Taylor.



$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$

Errores de Truncamiento.

Series de Taylor.



Aproximación de $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ en $x = 1$ en expansión de Series de Taylor

$F(0)=1{,}2$ $\quad F(1)=0{,}2$ $\quad h=1$

0) $F(1)=F(0)$ $\quad F(1)=1{,}2$ $\quad \epsilon_A=1$

1) $F(1)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}(1) \rightarrow 1.2-0.25 \rightarrow 0.95$ $\quad \epsilon_A=0.75$

2) $F(1)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}(1)+\frac{F''(0)}{2!}(1)^2=1{,}2-0{,}25-\frac{1}{2!}=0.45$ $\quad \epsilon_A=0.25$

3) $F(1)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}(1)+\frac{F''(0)}{2!}(1)^2+\frac{F'''(0)}{3!}(1)^3=1{,}2-0{,}25-0{,}5-\frac{0.9}{3!}$

≈ 0.3 $\quad \epsilon_A=0{,}1$

4) $F(1)=0.3+\frac{F''''(0)}{4!}=0.3-\frac{2{,}4}{4!}=0{,}2$ ✓

Errores de Truncamiento.
Series de Taylor.

- Expansión completa de los términos de la Serie de Taylor

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Donde:
ξ es un valor de x que esta entre x_i y x_{i+1}

Errores de Truncamiento.

Series de Taylor.

$X = 2$ $\qquad h = 1$ $\qquad F(x_{i+1}) = F(x_i) + \left[\dfrac{F'(x_i)}{1!}\right] + R_n$

- **Problema:** Utilice la expansión en series de Taylor hasta el orden 3, para predecir $f(3)$ en:

$R_n = \dfrac{150x-12}{2!} = 94$ $\qquad \varepsilon$ $\qquad x = 1.333$

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88 \leftarrow 102$$

94

Empleando como punto base $x = 1$. Encuentre el error relativo para cada aproximación

a) -62

orden 1) 8

orden 2) 77

orden 3) 102

$F'(x) = 75x^2 - 12x + 7$

$F''(x) = 150x - 12$

$F'''(x) = 150$

$F^{IV}(x) = 0$

Errores de Truncamiento.
Orden del Error.

- Orden del error de truncamiento

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Cx1

$O(1^1) \to O(1)$

$O(2^1)$

Cx2

Se puede expresar como:

$$R_n = O(h^{n+1})$$

Proporciona una idea del error en relación a la cantidad de términos que se emplean para la estimación

Errores de Truncamiento.

Residuo.

- Al emplear una cantidad finita de términos de la Serie de Taylor para estimar una función, una parte infinita de términos es truncada

Errores de Truncamiento.

Residuo.

orden 0

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + ... + \frac{f^n(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

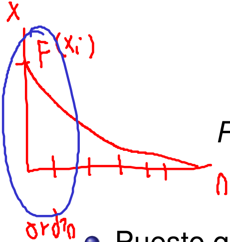
- Por ejemplo, al truncar la expansion en Series de Taylor después del término de orden cero, se tiene:

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

$$R_0 = f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + ...$$

Errores de Truncamiento.

Residuo.



$$R_0 = f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

- Puesto que los términos de menor orden son más significativos para la solución final, se suele truncar el residuo

$$R_0 \cong f'(x_i)h$$

Errores de Truncamiento.

Estimación.

- Las Series de Taylor son útiles para calcular los errores de truncamiento

Errores de Truncamiento.
Estimación.

- En el ejemplo de caida libre $v(t)$ puede expandirse en una Serie de Taylor

$$v(t_{i+1}) \cong v(t_i) + v'(t_i)(\underbrace{t_{i+1} - t_i}_{h}) + \underbrace{\frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \ldots +}_{R_1} R_n$$

Truncando después del término de la primera derivada y despejando $v'(t_i)$:

$$v(t_{i+1}) \cong v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1$$

$$\boxed{v'(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}} - \underbrace{\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i}}_{\text{Error}}$$

Errores de Truncamiento.

Estimación.

- En la formula se aprecia la aproximación junto con el error de truncamiento

$$v'(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{R_1}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\underbrace{t_i - t_{i+1}}$$

Empleando la ecuación:

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$$R_1 = \frac{F''(\epsilon) \times h^2}{2!}$$

Errores de Truncamiento.

Estimación.

Se tiene:

$$R_1 = \overbrace{\frac{v''(\xi)}{2!}}^{C}(t_{i+1} - t_i)^2$$

$$\frac{R_1}{t_{i+1} - t_i} = O(\underbrace{t_{i+1} - t_i}_{h}) \to O(h)$$

- ~~La estimación tiene un error de orden $t_{i+1} - t_i$. Al reducir el tamaño del stepsize a la mitad, se reduce el error de truncamiento a la mitad~~

El error es directamente proporcionar al h

Redondeo Vs Truncamiento.

- Como puede concluirse de los ejercicios anteriores una disminución en el valor de h disminuye el error de truncamiento, sin embargo, el disminuir h puede ocasionar que el valor de f(x) entre iteraciones sea muy cercano y produzca errores de redondeo en las operaciones aritméticas

Control de Errores I

- Evite realizar restas de cantidades muy cercanas e incurrir en errores de redondeo
- Si los resultados son de uso crítico (medicina, finanzas), asigne un par de grupos para resolver el mismo problema y compare sus resultados.
- Adquiera experiencia resolviendo ejercicios y probando las soluciones para diferentes stepsizes y diferentes métodos

Tipos de Error I

- Error humano
- Error del modelo
- Incertidumbre en los datos

Problemas I

- **Problema:** Encontrar el valor decimal que corresponde al siguiente número binario en formato IEEE-754

0	10101010	10101000000000000000000

- **Problema:** Desarrolle la expansion en Series de Maclaurin para el seno(x) y el coseno(x) y exprese cada expansión como una sumatoria

Problemas I

- **Problema:** Evalue el siguiente polinomio en $\cancel{x = 1.37}$:

$x = 3.77$

$$y = x^3 - 7x^2 + 8x - 0.35$$

y 4

Utilice aritmética de 3 cifras significativas con **corte**
(ejemplo de corte: $2.437 \Rightarrow 2.43$) Encuentre E_r

- **Problema:** Repita el punto anterior expresando y como:

$$y = ((x - 7)x + 8)x - 0.35$$

Encuentre el error relativo para ambos casos y comparelos

$$y = x^3 + 7x^2 - 8x - 0.35 \qquad x = 3.77$$

Solucion exacta 122.862933

3 C.s

$$y = 53.5 + 7(14.2) - 30.1 - 0.35$$

$$y = 53.5 + 99.4 - 30.1 - 0.35 \approx 122 \longrightarrow 0.45\%$$

4 c.s

$$y = 53.58 + \underbrace{\cancel{7(14.21)}}_{99.47} - 30.16 - 0.35 \approx 122.5 \longrightarrow 0.051\%$$

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.