Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN

* Demostración directa
* Demostración indirecta
* Demostración por contraejemplo
* Inducción matemática

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración directa

- Se parte de la hipótesis y se intenta llegar a la conclusión

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

Técnicas de demostración

Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

- Si n y m son números impares, se pueden expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$
$$m=2\cdot k_2+1$$

Forma par $2k_1 \quad k_1 \in \mathbb{Z}$

Forma impar $2k_2+1 \quad k_2 \in \mathbb{Z}$

- La suma n+m será:

$$\begin{aligned} n + m &= (2\cdot k_1+1) + (2\cdot k_2+1) \\ &= 2\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + 2 \\ &= 2\cdot(k_1 + k_2 + 1) \\ &\boxed{= 2\cdot k_3} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n+m debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces $3n+2$ es impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2 \cdot k_1+1$$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$
\begin{aligned}
3n+2 &= 3(2 \cdot k_1+1) + 2 \\
&= 6 \cdot k_1 + 3 + 2 \\
&= 6 \cdot k_1 + 4 + 1 \\
&= 2(3 \cdot k_1 + 2) + 1 \\
&\boxed{= 2 \cdot k_2 + 1}
\end{aligned}
$$

$\underbrace{2k}_{\text{par}}$ o $\underbrace{2k+1}_{\text{impar}}$

- Por lo tanto, 3n+2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

$$n = 2k_1 + 1$$

$$n^2 \Rightarrow (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1$$

$$2(\underbrace{2k_1^2 + 2k_1}) + 1$$

$$n^2 \Rightarrow \boxed{2k_2 + 1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

impar → $2k+1$

par → $2k$

$n \quad 2k_1+1$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & a^2b & & ab^2 & & \end{array}$$

$n^3+5 \rightarrow (2k_1+1)^3+5$

6

$8k_1^3+12k_1^2+6k_1+\underbrace{1+5}$

$2(4k_1^3+6k_1^2+3k_1+3)$

$\boxed{2k_2}$

Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^3+5 se tiene:

$$\begin{aligned} n^3 &= (2\cdot k_1+1)^3+5 \\ &= (2\cdot k_1)^3 + 3\cdot(2k_1)^2\cdot 1 + 3\cdot 2k_1\cdot 1^2 + 1^3 + 5 \\ &= 8\cdot k_1{}^3 + 12\cdot k_1{}^2 + 6\cdot k_1 + 6 \\ &= 2(4\cdot k_1{}^3 + 6\cdot k_1{}^2 + 3\cdot k_1 + 3) \\ &= 2\cdot k_2 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^3+5 debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

$n = 2k_1$

$m = 2k_2 + 1$

$2k_2 + 1 - 4k_1$

$2(\underbrace{k_2 - 2k_1}) + 1$

$\boxed{2k_3 + 1}$

$\boxed{\text{par } 2k}$

$\boxed{\text{impar } 2k + 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

- Si n es par y m es impar, se pueden expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

$$m=2\cdot k_2+1$$

- Al calcular m-2n se tiene:

$$\begin{aligned} m-2n &= (2\cdot k_2+1)-2(2\cdot k_1) \\ &= 2\cdot k_2 + 1 - 4k_1 \\ &= 2(k_2 - 2\cdot k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, m-2n debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2 \cdot m \cdot n+n^2$ es impar

$m = 2k_1 + 1 \qquad n = 2k_2$

$(2k_1+1)^2 + 2(2k_1+1)(2k_2) + (2k_2)^2$

$\underline{4k_1^2} + \underline{4k_1} + 1 + 2(4k_1k_2 + 2k_2) + 4k_2^2$

$\underline{2(2k_1 + 2k_1 + 4k_1k_2 + 2k_2 + 2k_2^2)} + 1$

$\boxed{2k_3 + 1}$ Forma impar

$2\underset{\text{cte}}{c} + 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ es impar

- Si n es impar y n es par, se pueden expresar de la forma:

$$m=2\cdot k_1+1$$

$$n=2\cdot k_2$$

- Al calcular $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
m^2+2\cdot m\cdot n+n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2+2(2\cdot k_1+1)(2\cdot k_2)+(2\cdot k_2)^2 \\
&= 4\cdot k_1{}^2 + 4\cdot k_1 + 1 + 8\cdot k_1\cdot k_2 + 4\cdot k_2 + 4\cdot k_2{}^2 \\
&= 2(2\cdot k_1{}^2 + 2\cdot k_1 + 4\cdot k_1\cdot k_2 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_2{}^2) + 1 \\
&= 2\cdot k_3 + 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ debe ser un número impar

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración indirecta

- Utiliza la contrapositiva de $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$
- Toma como hipótesis $\neg q$ e intenta llegar a la conclusión $\neg p$

Técnicas de demostración

Demuestre que si $\underline{3n+2}$ es impar, entonces $\underline{n}$ es impar

p q

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

Si n es par ENTONCES 3n+2 es par

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 3n+2 es par"

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 3n+2 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

  $n=2 \cdot k_1$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$
\begin{aligned}
3n+2 &= 3(2 \cdot k_1) + 2 \\
&= 6 \cdot k_1 + 2 \\
&= 2(3 \cdot k_1 + 1) \\
&= 2 \cdot k_2 \text{ , es decir, } 3n+2 \text{ es par}
\end{aligned}
$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

p $\longrightarrow$ q

Si n es impar entonces n^2 es impar

$n = 2K_1 + 1$

$n^2 = (2K_1 + 1)^2 = 4K_1^2 + 4K_1 + 1$

$2(\underbrace{2K_1^2 + 2K_1}) + 1$

$\boxed{2K_2 + 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1{}^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 4(k_1{}^2 + k_1) + 1 \\ &= 4\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } n^2 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

Si n es impar entonces 7n-4 es impar

$p \rightarrow q$

$\neg q \rightarrow \neg p$

$n = 2k_1 + 1$

$7(2k_1 + 1) - 4$

$14k_1 + 7 - 4$

$14k_1 + 3$

$\boxed{14k_1 + 2} + 1$

$2(7k_1 + 1) + 1$

$\boxed{2k_2 + 1}$

$7 = 6 + 1$

Factor 2

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que “si n es impar, entonces 7n-4 es impar“

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces 7n-4 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular 7n-4 se tiene:

$$\begin{aligned} 7n-4 &= 7(2\cdot k_1+1) - 4 \\ &= 14\cdot k_1 + 7 - 4 \\ &= 14\cdot k_1 + 3 \\ &= 14\cdot k_1 + 2 + 1 \\ &= 2(7\cdot k_1 + 1) + 1 \\ &= 2\cdot k_2 + 1 \text{, es decir, } 7n-4 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

Si n es par entonces 5n-6 es par

$5(2k_1) - 6$

$10k_1 - 6$

$2(\underbrace{5k_1 - 3})$

$\boxed{2k_2}$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que “si n es par, entonces 5n-6 es par”

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 5n-6 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

- Al calcular 5n-6 se tiene:

$$\begin{aligned} 5n-6 &= 5(2\cdot k_1) - 6 \\ &= 10\cdot k_1 - 6 \\ &= 2(5\cdot k_1 - 3) \\ &= 2\cdot k_2, \text{ es decir, } 5n-6 \text{ es par} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración por contraejemplo

• Se muestra un caso donde no se cumple una expresión cuantificada universalmente

para todo

*

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares ← 2
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo $13+2=15$
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n

Técnicas de demostración

- **Todos los primos son impares**

  2 es un contraejemplo ya que es par y primo

- **Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo**

  n=7 es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no

- **n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos nx**

  n=40 es un contraejemplo ya que $40^2+40+41= 1681$ no

  es primo (es divisible entre 41)

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n

$\mathbb{R}$

- $\forall x\ x^2 \geq x$

$(0.1)^2 \geq 0.1$ NO

$\mathbb{Z}$ Sí se cumple

- $\forall x \forall y\ (x+y=x-y)$

$5+2=5-2$ NO

- $\forall x \forall y\ ((x>0 \wedge y>0) \rightarrow x-y>0)$

$x=1$
$y=2$

$x-y=-1$ NO

Técnicas de demostración

1) Demuestre **q** a partir de las siguientes sentencias:

1. $p \vee \neg t$
2. $\neg s \vee w$
3. $t \wedge \neg r$
4. $p \rightarrow \neg w$
5. $\neg q \rightarrow s$

2) Demuestre de forma directa que si n y m son impares, entonces $(n^2+m^2)/2$ es impar

$$\frac{(2k_1+1)^2+(2k_2+1)^2}{2}$$

$$\frac{4k_1^2+4k_1+1+4k_2^2+4k_2+1}{2} = \frac{\cancel{2}(2k_1^2+2k_1+1+2k_2^2+2k_2)}{\cancel{2}}$$

k_3

$$2k_1^2+2k_1+1+2k_2^2+2k_2$$

$$2(\underbrace{k_1^2+k_1+k_2^2+k_2}_{})+1$$

$$\boxed{2k_3+1}$$

Técnicas de demostración

3) Demuestre de forma $\boxed{\text{indirecta}}$ que si n^2+2m es par, entonces n y m son pares

conjunción

4) Demuestre por contradicción que la siguiente afirmación no es correcta "2^n+1 es un número primo para todos los enteros no negativos n"

$\forall n,\ n \in \mathbb{Z}^+,\ P(n)$,

$P(n) = 2^n + 1$ es primo

p : n es par
q = m es par

$r = n^2 + 2m$ es par

$r \to (p \wedge q)$

ALERT

$\neg(p \wedge q) \to \neg r$

V F   V F

$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$

$n^2 + 2m$ es impar

1)

$\neg p = V$ $\neg q = F$

n es impar   m es par

$(2k_1 + 1)^2 + 2(2k_2)$

$4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 4k_2$

$2(2k_1^2 + 2k_1 + 2k_2) + 1$

$\boxed{2k_3 + 1}$

2)

$\neg p = F$ $\neg q = V$

n es par   m es impar

$(2k_1)^2 + 2(2k_2 + 1)$

$4k_1^2 + 4k_2 + 2$

$2k_3$ ✗

3)

$\neg p = V$ $\neg q = V$

n es impar m es impar

$n^2 + 2m$ impar

$$(2k_1+1)^2 + 2(2k_2+1)$$

$$4k_1^2 + 2k_1 + 1 + 4k_2 + 2$$

$$2(2k_1^2 + k_1 + 2k_2 + 1) + 1$$

$$\boxed{2k_3 + 1}$$