Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

Contenido

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$
Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$
Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

$$T(n) = 2T(n-1) + \underbrace{1}$$

$T(1) = 1$

$r - 2 = 0 \quad r = 2$

$$\boxed{T^h(n) = A2^n}$$

$F(n) = 1$

$$\boxed{T(n) = T^h(n) + T^p(n)}$$

$$\boxed{T^p(n) = B}$$

$B = 2B + 1 \quad B = -1$

$T(n) = A2^n - 1 \quad T(1) = 1$

$1 = 2A - 1 \quad A = 1$

$1 + 1 = 2A \cancel{-1+1}$

$2 = 2A \quad A = \frac{2}{2} \quad A = 1$

$T(n) = 2^n - 1 \longrightarrow O(2^n)$

$T(1) = 1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓

$T(2) = 2^2 - 1 = 3$

$T(3) = 2^3 - 1 = 7$

$$T(n) = 2T(n-1) + \underbrace{1}$$

$T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 3$

$T(3) = 2T(2) + 1 = 7$

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**

La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

$An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F + G2^n$ $n^5 + 3 \times 2^n$

Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	$A r^n$
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

Universidad del Valle

$T(n) = 4T(n-1) + 7(n-2) + 3n^2 + n$

$r^2 - 4r - 7 \qquad T(0) = 4 \qquad T(1) = 6$

$T^h(n) = A(-1.3)^n + B(5.3)^n$

$\frac{4 \pm \sqrt{16+28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2}$

$\frac{4 \pm 6.6}{2}$ — 5.3, -1.3

$T^p(n) = Cn^2 + Dn + E$

$T(n) = 4T(n-1) + 7(n-2) + 3n^2 + n$

$n^2 - 2n + 1 \qquad n^2 - 4n + 4$

$Cn^2 + Dn + E = 4C(n-1)^2 + 4D(n-1) + 4E + 7C(n-2)^2 + 7D(n-2) + 7E$
$+ 3n^2 + n$

$\cancel{Cn^2} + \cancel{Dn} + \cancel{E} = 4\cancel{Cn^2} - 8Cn + \cancel{4C} + \cancel{4Dn} - \cancel{4D} + \cancel{4E} + \cancel{7Cn^2} - 2\cancel{8Cn} + 2\cancel{8C}$
$+ \cancel{7Dn} - \cancel{14D} + \cancel{7E} + \cancel{3n^2} + \cancel{n}$

cte	$E = 4C - 4D + 4E + 28C - 14D + 7E$
n	$D = -8C + 4D - 28C + 7D + 1$
n^2	$C = 4C + 7C + 3$

$\boxed{C = -\frac{3}{10}}$

$-10D = -36\left(-\frac{3}{10}\right) + 1$

$-10D = \frac{108}{10} + \frac{10}{10}$

$-10D = \frac{118}{10}$

$\boxed{D = -\frac{118}{100} = -\frac{59}{50}}$

$-10E = -18D + 32C$

$E = \frac{-18\left(-\frac{59}{50}\right) + 32\left(-\frac{3}{10}\right)}{-10} = -\frac{291}{250}$

$\boxed{E = -\frac{291}{250}}$

$T(n) = A(-1.3)^n + B(5.3)^n + \left(-\frac{3}{10}\right)n^2 + \left(-\frac{59}{50}\right)n - \frac{291}{250}$

$4 = A + B - \frac{291}{250}$

$\frac{1291}{250} = A + B$

$6 = -1.3A + 5.3B \underbrace{- \frac{3}{10} - \frac{59}{50} - \frac{291}{250}}_{-\frac{661}{250}}$

$\frac{2161}{250} = -1.3A + 5.3B$

$\frac{1291}{250} = A + B$

$\frac{2161}{250} = -1.3A + 5.3B$

$B = \frac{1291}{250} - A$

$\frac{2161}{250} = -1.3A + 5.3\left(\frac{1291}{250}\right) - 5.3A$

$-\frac{4681.3}{250} = -6.6A$

$\boxed{A = 2.83715}$

$\frac{1291}{250} = 2.83715 + B$

$\boxed{B = 2.32685}$

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes
   $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma
$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

Encontrar la solución general de la recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B = {} & 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ & -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$
$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

1) Raices que es sol partura

$$(r-2)(r+3)$$

$$T(n) = -T(n-1) + 6T(n-2) + 5\times 2^n$$

$$r^2 + r - 6$$

$$r^2 + r - 6 \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\times 6}}{2}$$

$$T(n)^h = A(2)^n + B(-3)^n$$

$$\frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

$$T(n)^p = C n 2^n$$

$$r = 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5$$

$$F(n) = 3n^3 + 4\times 2^n + 3\times 3^n + 5^n$$

$$T^h(n) = A 2^n + B n 2^n + C n^2 2^n + D n^3 2^n + E 3^n + F n 3^n + G 5^n$$

$$T^p(n) = H n^3 + I n^2 + J n + K + L n^4 2^n + M n^2 3^n + N n 5^n$$

$(r-1)(r+7)$ $\quad r^2+7r-r-7$

$r^2+6r-7=0$

$T(n) = -6T(n-1) + 7T(n-2) + 3n + 4(-7)^n$

$T^h(n) = A(-7)^n + B(1)^n \longrightarrow A(-7)^n + B$

$T^p(n) = \boxed{Cn+D} + En(-7)^n$

$T^p(n) = Cn^2 + Dn + En(-7)^n$

$Cn^2 + Dn + En(-7)^n = -6C(n^2-2n+1) - 6D(n-1)$
$-6E(n-1)(-7)^{n-1} + 7C(n^2-4n+4) + 7D(n-2)$
$+7E(n-2)(-7)^{n-2} + 3n + 4(-7)^n$

$(-7)^{n-1}$

$\dfrac{(-7)^n}{-7}$

$-6E(n-1)(-7)^{n-1}$

$\dfrac{-6E(n-1)(-7)^n}{-7}$

cte $\quad 0 = -6C + 6D + 28C - 14D$

$n \quad D = 12C - 6D - 28C + 7D + 3$

$n^2 \quad C = -6C + 7C \qquad \boxed{C = C}$

$(-7)^n \quad 0 = -\frac{6}{7}E - \frac{14}{(-7)^2}E + 4$

$n(-7)^n \quad E = \frac{6}{7}E + \frac{7}{(7)^2}E \qquad \boxed{E = E}$

R.R no homogeneas

1) Plantear la solución homogenea

$$T(n) = a_1(r_1)^n + a_n(r_2)^n + \ldots + a_k(r_k)^n$$

2) Se plantea la solución particular
F(n) <-- Tabla
Advertencia: Tener cuidado con las multiplicidades

Truco: No pueden haber dos incong-
nitas multiplicadas por lo MISMO
o bien del mismo ORDEN

$(r-1)(r+6) \qquad r^2+6r-r-6$
$r^2+5r-6=0$

$T(n) = -5T(n-1) + 6T(n-2) + \underbrace{5\times 6^n} + 2n^2+4$

$r^2+5r-6=0 \quad \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases} \qquad T(0)=8, \quad T(1)=6$

$T^h(n) = A(1)^n + B(-6)^n$

$T^p(n) = C6^n + \underbrace{Dn^2+En+F}$

$T^p(n) = C6^n + Dn^3 + En^2 + Fn$

$C6^n + Dn^3+En^2+Fn = -5\left(\frac{C6^n}{6} + D(n-1)^3 + E(n-1)^2 + F(n-1)\right) + 6\left(\frac{C6^n}{36} + D(n-2)^3 + E(n-2)^2 + F(n-2)\right) + 5\,6^n + 2n^2+4$

$C6^n + Dn^3+En^2+Fn = -5\left(\frac{C6^n}{6} + D(n^3-3n^2+3n-1) + E(n^2-2n+1) + F(n-1)\right) + 6\left(\frac{C6^n}{36} + D(n^3-6n^2+6n-8) + E(n^2-4n+4) + F(n-2)\right) + 5\,6^n + 2n^2+4$

$6^n \,\Big|\; C = -\frac{5C}{6} + \frac{C}{6} + 5 \qquad \frac{5}{3}C = 5 \qquad \boxed{C=3}$

$n^3 \,\Big|\; D = -5D + 6D \qquad D = D$

$n^2 \,\Big|\; E = 15D - 5E - 36D + 6E + 2$

$-2 = -21D \qquad D = \frac{2}{21}$

$n \,\Big|\; F = -15D + 10E - 5F + 36D - 24E + 6F$

$0 = 21D - 14E \qquad 21D = 14E$

$\frac{21}{14} = \frac{3}{2}D = E = \frac{3}{21} = \frac{1}{7} \qquad \boxed{E = \frac{1}{7}}$

$cte \,\Big|\; 0 = 5D - 5E + 5F - 48D + 24E - 12F + 4$

$0 = -43D + 19E - 7F + 4$

$F = \frac{55}{147} \qquad F = \frac{-43D + 19E + 4}{7} \qquad D = \frac{2}{21}, \quad E = \frac{1}{7}$

$T(0) = 8$
$T(1) = 6$

$T^h(n) = A(1)^n + B(-6)^n + 3\times 6^n + \frac{2}{21}n^3 + \frac{1}{7}n^2 + \frac{55}{147}n$

$8 = A + B + 3$

$\boxed{5 = A + B}$

$(-1)\quad 6 = A - 6B + \underbrace{18 + \frac{2}{21} + \frac{1}{7} + \frac{55}{147}}_{\frac{912}{49}}$

$\boxed{-\frac{618}{49} = A - 6B}$

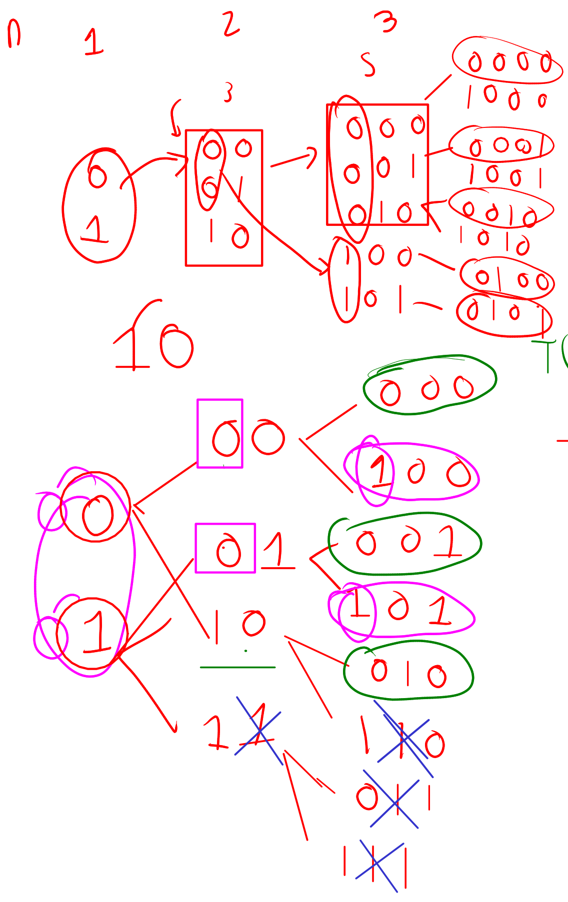
$\boxed{B = \frac{863}{343}}$

$\frac{863}{49} = 7B$

$5 - \frac{863}{343} = A \qquad A = \frac{852}{343}$

$T^h(n) = \frac{852}{343}(1)^n + \frac{863}{343}(-6)^n + 3\times 6^n + \frac{2}{21}n^3 + \frac{1}{7}n^2 + \frac{55}{147}n$

Dos 1s consecutivos



$T(n) = \underbrace{T(n-1)}_{0} + \underbrace{T(n-2)}_{1}$

2 pasos $\rightarrow$ 0

$T(n) = \overbrace{T(n-1)}^{0} + T(n-2)$

$T(n) = 2T(n-1)$

$\overbrace{T(n-1)}^{1}$

$+ \underbrace{T(n-1)}_{0}$

Contenido

Estrategias de solución de recurrencias

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

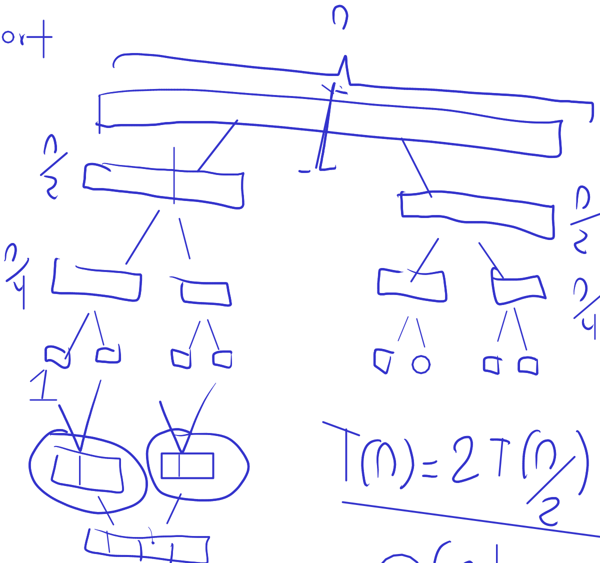
$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

$n = b^K$

Ordenar un arreglo

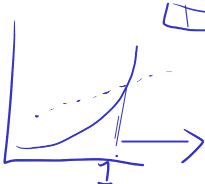
Insertion-sort $O(n^2)$

merge sort



$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$O(n \log(n))$$



Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución
- Por iteración
- Funciones generatrices

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\frac{2^k}{2} = 2^{k-1}$$

$$n = 2^k$$

$$T(2^k) = 2T\left(\frac{2^k}{2}\right) + 2^k \qquad T(1) = 4$$

$$T(2^k) = T_k$$

$$\boxed{T_k = 2T_{k-1} + 2^k} \longrightarrow \begin{array}{l} r - 2 = 0 \\ r = 2 \end{array}$$

$$T_k^h = A(2)^k$$

$$\underline{T_k^p = B_k 2^k}$$

$$B_k 2^k = \cancel{2} B(k-1) 2^{k-\cancel{1}} + 2^k$$

$$B_k 2^k = B_k 2^k - B2^k + 2^k$$

$$k2^k \Rightarrow \quad B = B \qquad \boxed{B = 1}$$

$$2^k \longrightarrow \quad 0 = -B + 1$$

$$T_k = A2^k + k2^k \qquad n = 2^k$$

$$T(n) = A2^{\log_2(n)} + \log_2(n) 2^{\log_2(n)} \qquad k = \log_2(n)$$

$$T(n) = An + n\log_2(n) \longrightarrow O(n \log_2(n))$$

$$4 = A + 0 \qquad A = 4$$

$$T(n) = 4n + n\log_2(n)$$

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 2t_{k-1} + 2$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

Cambio de variable

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1], A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Universidad del Valle

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned}\log n &= \log 4^k\\ &= k\log_4 4\\ \log n &= k\end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak+B)4^k$

$$(Ak+B)4^k = 3[(A(k-1)+B)4^{k-1}] + 4^k k$$
$$(Ak+B)4^k = 4^k(3/4[(A(k-1)+B)] + k)$$
$$Ak+B = 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k$$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \underline{\alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n} \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces $4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n\log n)$

$3^{\log(n)} = n^{\log(3)}$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 173^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que:
$T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

O(F(n))

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

Método Maestro

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = \underline{O(n^2)}$

  $O(n^{\log_b a})$

  $a < b^d$ $\quad 9 < 3^1$ ✗
  $a = b^d$ $\quad 9 = 3^1$ ✗
  $a > b^d$ $\quad 9 > 3^1$ ✓

  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$
  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$

  $1 < \left(\frac{3}{2}\right)^0$ $\quad 1 < 1$ ✗
  $1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$ ✓

  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$

- **Mostrar que** $T(n) = \underline{T5(n/2) + 3}$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $\underline{O(n^{\log_2 5})}$

  $5 < 2^0$ ✗
  $5 = 2$ ✗ $\quad 5 > 2$ ✓

  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{array} \right\}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

$$T(n) = 2T(n/2) + \log(n) \qquad \underline{T(1) = 1}$$

$$n = 2^k \qquad \log(2^k) = k$$

$$T_k = 2T_{(k-1)} + \underline{k}$$

$$r - 2 = 0 \qquad T_k^{(h)} = A(2)^k$$

$$T^p(k) = \underline{Bk + C}$$

$$Bk + C = 2Bk - 2B + 2C + k$$

$$k \,\Big|\, B = 2B + 1 \qquad B = -1$$

$$cte \,\Big|\, \begin{array}{l} C = -2B + 2C \\ -C = -2B \end{array} \qquad C = 2B \qquad C = -2$$

$$\boxed{T(k) = A(2)^k - k - 2} \qquad \begin{array}{l} n = 2^k \\ k = \log_2(n) \end{array}$$

$$T(n) = A(2)^{\log_2(n)} - \log_2(n) - 2$$

$$T(n) = 3n - \log_2(n) - 2 \longrightarrow O(n)$$

$$1 = A - 2 \qquad A = 3$$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.

Universidad del Valle