Métodos Numéricos

Integración y Derivación

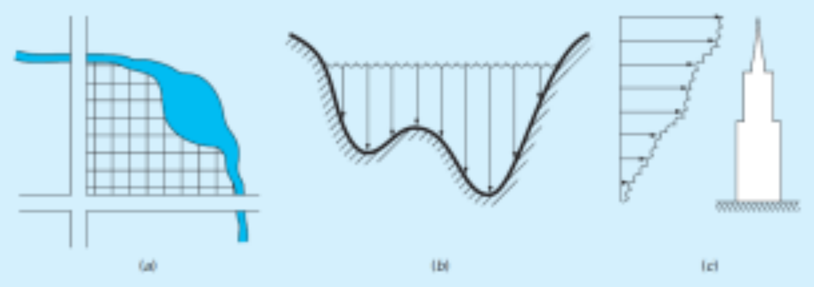
Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

May 29, 2015

Agenda

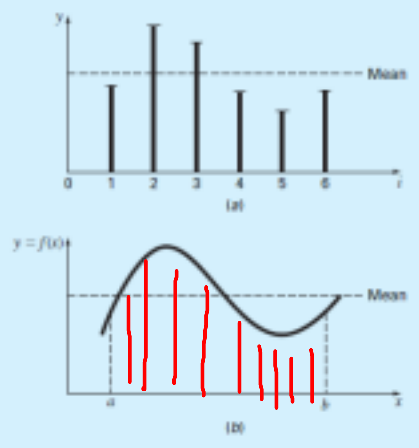
Integración y Derivación.
Introducción.



Integración y Derivación.
Introducción.

- En esta sección se trata el problema de encontrar el valor de integrales y derivadas empleando métodos numéricos (solución aproximada)
- La importancia de los métodos numéricos se hace evidente en el caso de funciones para las cuales no es posible encontrar su integral/derivada por medio de las técnicas clásicas del cálculo (solución analítica)

Integración y Derivación.
Introducción.



Integración y Derivación.
Introducción.

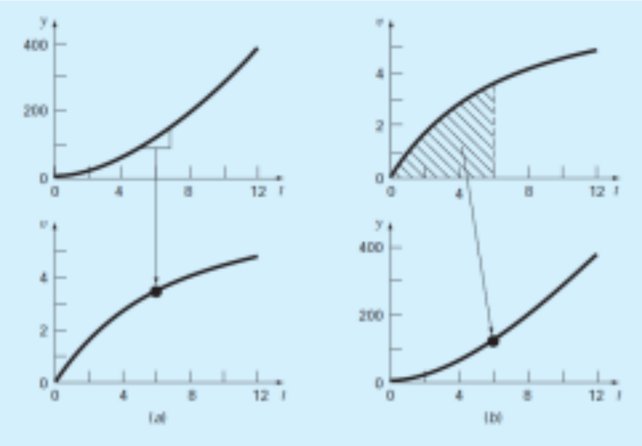
Promedio de una función discreta

$$Mean = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Promedio de una función continua

$$Mean = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Integración y Derivación.
Introducción.



Fórmulas de Newton-Cotes.
Introducción.

- Las fórmulas de Newton-Cotes son los esquemas de integración numérica mas comunes

Fórmulas de Newton-Cotes.
Introducción.

- Este método se basa en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio que sea fácil de integrar

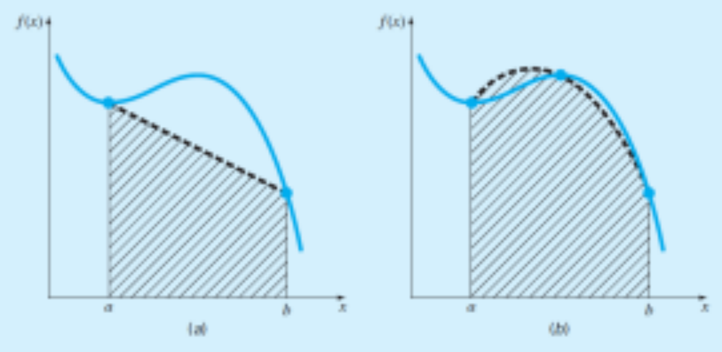
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Donde:
n es el orden del polinomio

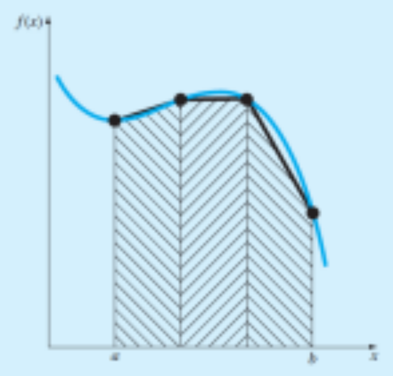
Fórmulas de Newton-Cotes.
Introducción.

- Aproximación de integral por el área bajo la curva de una línea y una parábola



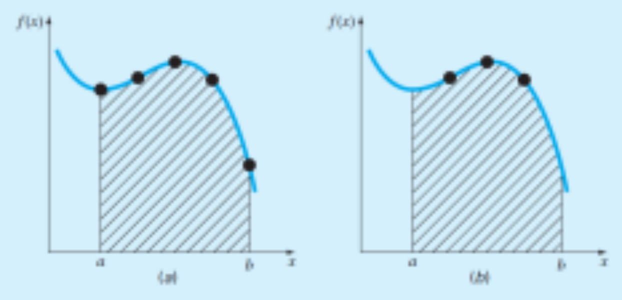
Fórmulas de Newton-Cotes.
Introducción.

- Aproximación de integral por el área bajo la curva de tres segmentos de línea

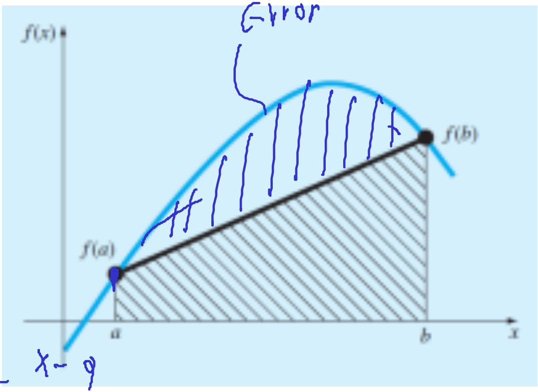


Fórmulas de Newton-Cotes.
Introducción.

- Existen fórmulas de Newton-Cotes para cuando se conocen los datos en los límites de integración y cuando no se conocen los datos en los límites de integración



Regla Trapezoidal.
Introducción.



$(a, F(a))$
$(b, F(b))$

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Regla Trapezoidal.
Introducción.

- La regla trapezoidal corresponde al caso de un polinomio de primer orden

$$I = \int_a^b f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,\mathrm{d}x$$

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Regla Trapezoidal.

Error de Truncamiento.

- El error de truncamiento al aplicar la regla trapezoidal es

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

$$E_a = -\frac{1}{12} \bar{f}''(x)(b-a)^3$$

$$f''(\xi) \approx \bar{f}''(x)$$

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Regla Trapezoidal.
Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla trapezoidal desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = \cancel{0}.2 + \cancel{2}5x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F^1(x)\,dx$$

$$\frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{x - a}{b - a} \qquad y = (F(b) - F(a))\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + F(a)$$

$$\int_a^b (F(b) - F(a))\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + F(a)\;dx$$

$$F(b) - F(a) \rightarrow (b-a)\,\frac{F(a) + F(b)}{2}$$

$$I = (b-a)\frac{F(a)+F(b)}{2} = 0.8\left(\frac{0.2+0.232}{2}\right)$$

$$\underline{I = 0,1728}$$

$$F''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3$$

$$\int_0^{0.8} F''(x) = -400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4 \Big|_0^{0.8}$$

$$= \frac{-48}{0.8} = -60$$

$$E_r = \frac{1.640533 - 0,1728}{1,640533} = 89,46\%$$

Regla Trapezoidal.
Problema.

- **Solución:**

$$I = (0.8 - 0)\frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 0.1728}{1.640533}100 = 89.5\%$$

Regla Trapezoidal.
Problema.

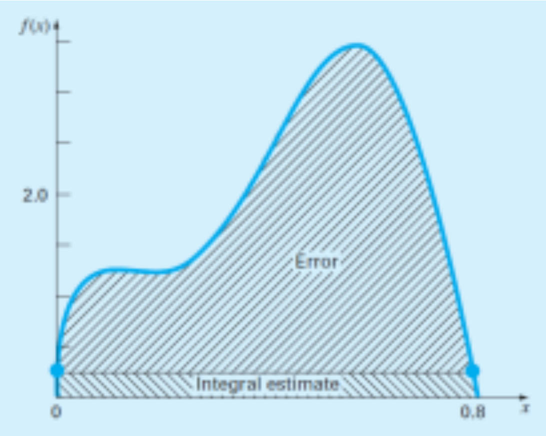
- **Solución:**

$$E_a = -\frac{1}{12}\bar{f}''(x)(b-a)^3$$

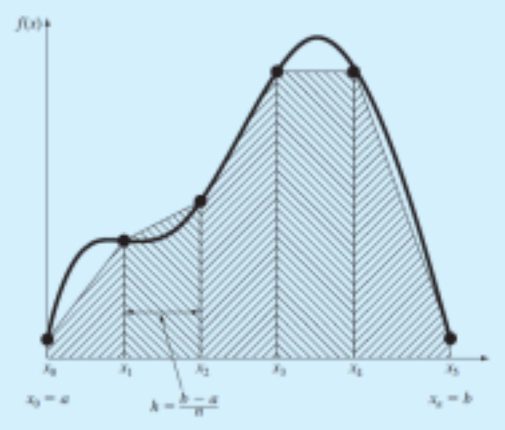
$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8}(-400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3)dx}{0.8 - 0} = -60$$

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60)(0.8)^3 = 2.56$$

Regla Trapezoidal.
Problema.



Regla Trapezoidal Compuesta.
Introducción.



Regla Trapezoidal Compuesta.
Introducción.

- Para mejorar la exactitud del método trapezoidal, se puede dividir el intervalo a, b en varios segmentos y aplicar el método a cada segmento
- Para obtener el resultado total se suman las áreas estimadas de cada segmento

Regla Trapezoidal Compuesta.
Introducción.

- La longitud de los segmentos teniendo en cuenta que se tienen n+1 puntos equidistantes $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ es

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Regla Trapezoidal Compuesta.
Introducción.

- La integración total se puede encontrar de la siguiente manera

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

Regla Trapezoidal Compuesta.

Error de Truncamiento.

- El error para la regla trapezoidal compuesta se obtiene mediante la suma de los errores individuales de cada segmento

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \approx n\bar{f}''(x)$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''(x)$$

Regla Trapezoidal Compuesta.
Problema.

x_0 x_1 x_{n-1} x_n

$h = \frac{a-b}{2} = \frac{0.8}{2} = 0.4$

$a \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad b$

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla trapezoidal compuesta con dos segmentos desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

$x_0 = 0$ $\quad$ $x_1 = 0.4$ $\quad$ $x_2 = 0.8$

$n = \#$ Segmentos

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$I = 0.8\left(\frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4}\right)$$

$$\boxed{I = 1{,}0688}$$

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b f''(x)\,dx}{b-a} \qquad E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''(x)$$

$$-\frac{0.8^3}{48} \times -60 = 0{,}64$$

Regla Trapezoidal Compuesta.
Problema.

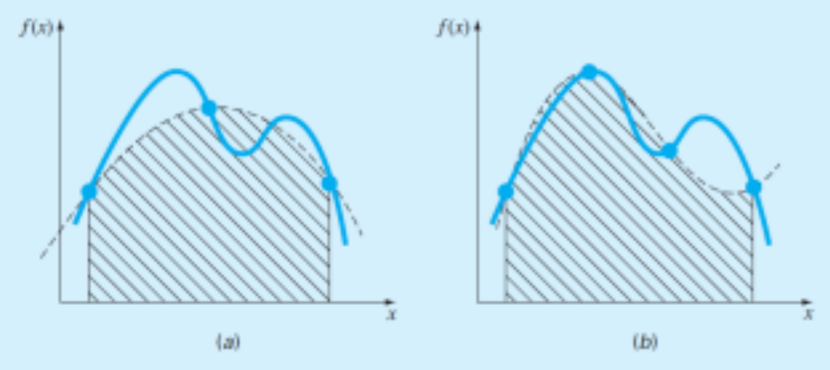
- **Solución:**

$$\text{Para n = 2 (h = 0.4)}$$
$$f(0) = 0.2, f(0.4) = 2.456, f(0.8) = 0.232$$
$$I = 0.8\frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4} = 1.0688$$
$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.0688}{1.640533}100 = 34.9\%$$
$$E_a = -\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60) = 0.64$$

Regla de Simpson.
Introducción.

- Otra forma de obtener mayor exactitud en la integral, es emplear polinomios de mayor orden para la conexión de los puntos
- Si se tienen tres puntos equidistantes es posible emplear un polinomio de segundo orden (parábola) para la integración (Simpson 1/3)
- Si se tienen cuatro puntos equidistantes es posible emplear un polinomio de tercer orden para la integración (Simpson 3/8)

Regla de Simpson.
Introducción.



Regla de Simpson.
Introducción.

- La longitud de los segmentos teniendo en cuenta que se tienen 3 puntos equidistantes (x_0, x_1, x_2) es

$$h = \frac{b - a}{2}$$

Regla de Simpson 1/3.
Introducción.

- La integración total se puede encontrar de la siguiente manera

$$I = \int_{x_0}^{x^2} [\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)]\, \mathrm{d}x$$

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

Regla de Simpson 1/3.

Error de Truncamiento.

- El error de truncamiento al aplicar la regla de Simpson 1/3 es

$$E_t = -\frac{1}{90}h^5 f^4(\xi)$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880}\bar{f}^4(x)$$

$$\bar{f}^4(x) = \frac{\int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Regla de Simpson 1/3.
Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 1/3 desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Regla de Simpson 1/3.

Problema.

- **Solución:**

$$\text{Para n = 2 (h = 0.4):}$$
$$f(0) = 0.2, f(0.4) = 2.456, f(0.8) = 0.232$$
$$I = 0.8\frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6} = 1.367467$$
$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.367467}{1.640533} = 16.6\%$$

Regla de Simpson 1/3.
Problema.

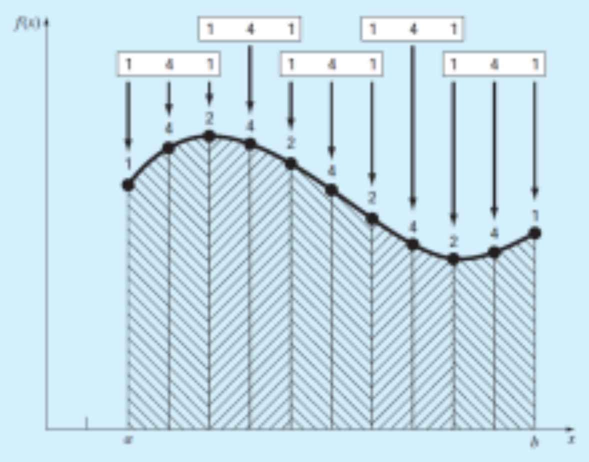
- **Solución:**

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880}\bar{f}^4(x)$$

$$\bar{f}^4(x) = \frac{\int_0^{0.8}(-21600 + 48000x)\,\mathrm{d}x}{0.8}$$

$$E_a = -\frac{0.8^5}{2880}(-2400) = 0.2730667$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.
Introducción.



Regla de Simpson 1/3 Compuesta.
Introducción.

- Para mejorar la exactitud de la regla de Simpson 1/3, se puede dividir el intervalo a, b en varios segmentos y aplicar el método a cada segmento
- Para obtener el resultado total se suman las áreas estimadas de cada segmento

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.
Introducción.

- La integración total se puede encontrar de la siguiente manera

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I = 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} + \ldots + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.
Error de Truncamiento.

- El error para la regla de Simpson 1/3 compuesta se obtiene mediante la suma de los errores individuales de cada segmento

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}(x)$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.
Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 1/3 compuesta con 4 segmentos (5 puntos) desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.
Problema.

- **Solución:**

$$f(0) = 0.2, f(0.2) = 1.288, f(0.4) = 2.456,$$
$$f(0.6) = 3.464, f(0.8) = 0.232$$
$$I = 0.8\frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12} = 1.623467$$
$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.623467}{1.640533} = 1.04\%$$
$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{180(4)^4}(-2400) = 0.017067$$

Regla de Simpson 3/8.
Introducción.

- Un polinomio de tercer orden de Lagrange se puede ajustar a cuatro puntos e integrar para obtener una aproximación de la integral de una función

Regla de Simpson 3/8.
Introducción.

- La longitud de los segmentos teniendo en cuenta que se tienen 4 puntos equidistantes (x_0, x_1, x_2, x_3) es

$$h = \frac{b-a}{3}$$

Regla de Simpson 3/8.

Introducción.

- La regla de Simpson 3/8 se aplica por medio de la siguiente ecuación

$$I = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

Regla de Simpson 3/8.
Error de Truncamiento.

- El error de truncamiento al aplicar la regla de Simpson 3/8 es

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$
$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

Regla de Simpson 3/8.
Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 3/8 desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

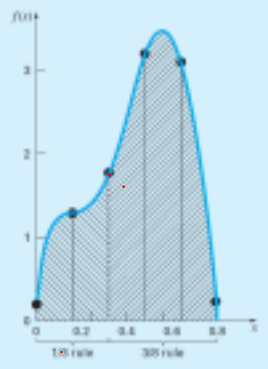
Regla de Simpson 3/8.
Problema.

- **Solución:** Simpson 3/8 requiere 4 puntos igualmente espaciados

$$f(0) = 0.2, f(0.2667) = 1.43272,$$
$$f(0.5333) = 3.487177, f(0.8) = 0.232$$
$$I = 0.8\frac{0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232}{8} = 1.51970$$

Regla de Simpson 1/3 y 3/8.
Introducción.

- Cuando el número de segmentos es impar, se pueden emplear en conjunto la regla de Simpson 1/3 y 3/8 para la estimación de la integral



Regla de Simpson 1/3 y 3/8.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 1/3 y 3/8 con 5 segmentos (6 puntos) desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Regla de Simpson 1/3 y 3/8.
Problema.

- **Solución:** Simpson 1/3 y 3/8 requiere 6 puntos igualmente espaciados

$$f(0) = 0.2, f(0.16) = 1.296919, f(0.32) = 1.743393,$$
$$f(0.48) = 3.186015, f(0.64) = 3.181929, f(0.80) = 0.232$$
$$I = 0.32\frac{0.2 + 4(1.296919) + 1.743393}{6} = 0.3803237$$
$$I = 0.48\frac{1.743393 + 3(3.186015 + 3.181929) + 0.232}{8} = 1.264754$$
$$I_{total} = 0.3803237 + 1.264754 = 1.645077$$

Integración Cerrada - Resumen

Introducción.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}$	$-(1/12)h^3 f''(\xi)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$	$-(1/90)h^5 f^{(4)}(\xi)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$	$-(3/80)h^5 f^{(4)}(\xi)$
4	5	Boole's rule	$(b-a)\dfrac{7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)h^7 f^{(6)}(\xi)$
5	6		$(b-a)\dfrac{19f(x_0)+75f(x_1)+50f(x_2)+50f(x_3)+75f(x_4)+19f(x_5)}{288}$	$-(275/12{,}096)h^7 f^{(6)}(\xi)$

Polinomio de Lagrange

Datos No Equidistantes.
Introducción.

- Para el caso de datos no equidistantes, es posible aplicar la regla trapezoidal a cada segmento

$$I = h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Fórmulas de Newton-Cotes - Integración Abierta.

Introducción.

- Las fórmulas de integración para intervalos abiertos se emplean cuando los límites se extienden mas allá del rango de los datos
- Se emplean para el análisis de integrales impropias $(-\infty, \infty)$

Integración Abierta - Resumen.

Introducción.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
2	1	Midpoint method	$(b-a)f(x_1)$	$(1/3)h^3 f''(\xi)$
3	2		$(b-a)\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$(3/4)h^3 f''(\xi)$
4	3		$(b-a)\dfrac{2f(x_1)-f(x_2)+2f(x_3)}{3}$	$(14/45)h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	4		$(b-a)\dfrac{11f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+11f(x_4)}{24}$	$(95/144)h^5 f^{(4)}(\xi)$
6	5		$(b-a)\dfrac{11f(x_1)-14f(x_2)+26f(x_3)-14f(x_4)+11f(x_5)}{20}$	$(41/140)h^7 f^{(6)}(\xi)$

Integrales Múltiples.
Introducción.

- La ecuación general para estimar el promedio de una función de dos dimensiones es:

$$\overline{f} = \frac{\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right)}{(d-c)(b-a)}$$

El numerador corresponde a una integral doble

Integrales Múltiples.
Introducción.

- El orden de integración no altera el resultado

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Integrales Múltiples.
Introducción.

- **Problema:** La temperatura de una platina rectangular esta definida por la función

$$T(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$$

Si la platina tiene de largo 8m (eje x) y de ancho 6m (eje y), encuentre la temperatura promedio
La solución analítica es 58.66667 $n = 2$

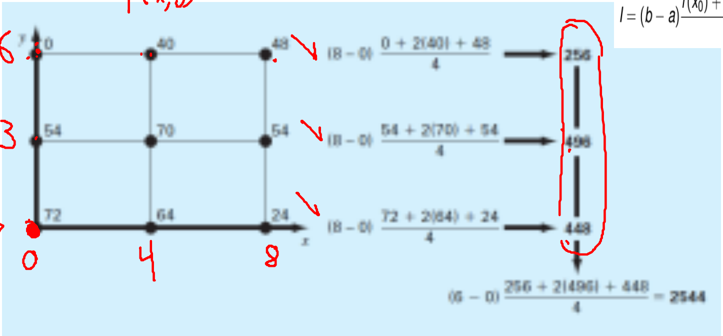
Integrales Múltiples.
Introducción.

- **Solución:** Empleando la regla trapezoidal

Compu cato

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

F(x,y)



Por y, luego x

$n = 3$

$x\ [0, 6]$

$y = [0, 12]$

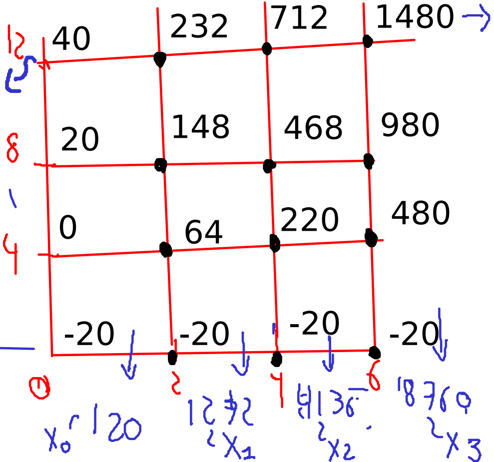
$f(x,y) = 2xy + 3x^2y + 5y - 20$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

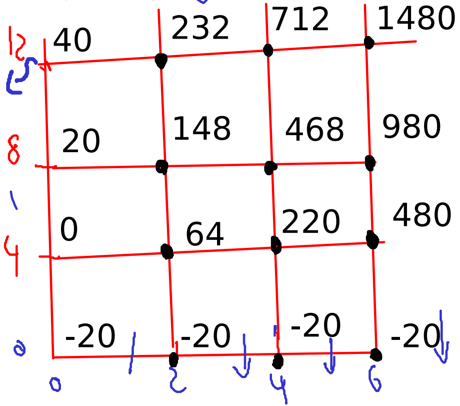
$$I = \frac{(12-0)(-20+40+40)}{6}$$

$$I = \frac{(6-0)(120+10816+8760)}{6}$$

$\boxed{I = 19696}$



Por x y luego y



$$(6-0)\left(\frac{40+1888+1480}{6}\right)$$

3408

2232

1048

-120

$$I = (12-0)\left(\frac{-120+2(2232+1048)+3408}{6}\right)$$

$$\boxed{I = 19696}$$

$$f(x,y) = 2xy + 3x^2y + 5y - 20$$

$$\int_0^{12} \left(\int_0^{6} F(x,y)\,dx \right) dy$$

$$e_{r\%} = \frac{|18864 - 19696}{18864}$$

$$e = 4,4\%$$

$$F_x(x,y) = x^2y + x^3y + 5yx - 20x \Big|_0^6$$

$$36y + 216y + 30y - 120$$

$$F_{y(x)}(x,y) = 18y^2 + 108y^2 + 15y^2 - 120y \Big|_0^{12}$$

$$1886{\cdot}4$$

Integrales Múltiples.
Introducción.

- **Solución:**

Aplicando la regla trapezoidal como se muestra en la gráfica anterior el resultado es:

$$I = \frac{2544}{6 \times 8} = 53$$

Aplicando la regla de Simpson 1/3 el resultado es:

$$I = \frac{2816}{6 \times 8} = 58.66667$$

Extrapolación de Richardson.
Introducción.

- La extrapolación de Richardson es un método para combinar dos estimaciones numéricas de una integral, para obtener una más exacta

Extrapolación de Richardson.
Introducción.

- La estimación de la integral y el error aproximado empleando el método de la regla trapezoidal compuesta se puede expresar como

estimación

paso

$$I = I(h) + E(h)$$

Error

- Si se realizan dos estimaciones de la misma integral con valores de h_1 y h_2 se tiene

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

Extrapolación de Richardson.
Introducción.

- Recordando la fórmula para el error de la regla trapezoidal compuesta

Aproximado porque suponemos que ambas segundas derivadas son iguales

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''(x)$$

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$E(h_1) \cong E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Extrapolación de Richardson.
Introducción.

- Sustituyendo y despejando $E(h_1)$

$$I \simeq I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = I(h_2) + E(h_2)$$

$$E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2))}{1 - (\frac{h_1}{h_2})^2}$$

- La estimación del error encontrada depende de la estimación de la integral y los valores de h_1 y h_2

Extrapolación de Richardson.
Introducción.

- Sustituyendo en la ecuación inicial

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

$$I = I(h_2) + \frac{1}{(\frac{h_1}{h_2})^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)]$$

- Para el caso especial donde $h_2 = h_1/2$

$$\boxed{I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)}$$

Extrapolación de Richardson.
Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando extrapolación de Richardson desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Extrapolación de Richardson.
Problema.

- **Solución:** Por medio de la regla trapezoidal se evalua la integral

Segments	**h**	**Integral**	ε_t
1	0.8	0.1728	89.5 %
2	0.4	1.0688	34.9 %
4	0.2	1.4848	9.5 %

Extrapolación de Richardson.
Problema.

- Combinando los resultados con 1 y 2 segmentos

$$I = \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$
$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.367467}{1.640533} 100 = 16.6\%$$

Extrapolación de Richardson.
Problema.

- Combinando los resultados con 2 y 4 segmentos

$$I = \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.623467}{1.640533}100 = 1.0\%$$

$I_E = 12192$

$[0;\ 12]$

$F(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 2$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

$$I = \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

$n = 2$

$x_0 = 0$

$x_1 = 6$

$x_2 = 12$

$I(h_1) = 15000$

$Er = 23\%$

$n = 4$

$x_0 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 6$

$x_3 = 9$

$x_4 = 12$

$I(h_2) = 12894$

$Er = 5{,}75\%$

$I = 12192 \quad Er = 0\%$

Extrapolación de Richardson.

Mejora de la estimación.

- Dos resultados obtenidos con orden de error $O(h^4)$ se pueden combinar para obtener una solución mas exacta con orden de error $O(h^6)$

$$I = \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$$

- Dos resultados con orden de error $O(h^6)$ se pueden combinar para obtener una solución mas exacta con orden de error $O(h^8)$

$$I = \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$$

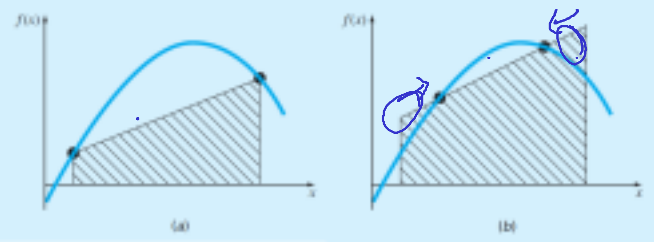
Cuadratura de Gauss.

Introducción.

- Hasta el momento los métodos estudiados realizan la integración sobre valores igualmente espaciados dentro de un intervalo [a,b]
- El método de Cuadratura de Gauss se basa en la determinación del área bajo la línea que pasa a traves de un conjunto de puntos intermedios

Cuadratura de Gauss.
Introducción.

- El conjunto de puntos intermedios se escoge de forma que se balanceen los errores positivos y negativos en la estimación de la integral



Cuadratura de Gauss.
Introducción.

- La ecuación general para la regla de cuadratura de Gauss de n puntos es la siguiente

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} \overset{C_i}{\cancel{w_i}} f(x_i)$$

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

Cuadratura de Gauss.

Introducción.

Al aplicar el método debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Una función se desea integrar en los limites [a,b]
- Los limites [a,b] son distintos a los limites expresados en la ecuación de cuadratura de Gauss [-1,1]
- Para aplicar el método se debe realizar una transformación de los limites [a,b] hacia los limites [-1,1]

Cuadratura de Gauss.
Regla Trapezoidal.

- El método de la regla trapezoidal se puede obtener a partir del método de cuadratura de Gauss
- A continuación se presenta una forma de obtener la ecuación para el método de la regla trapezoidal por medio del método de cuadratura de Gauss

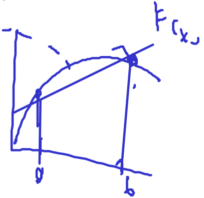
Cuadratura de Gauss.
Regla Trapezoidal.

- Teniendo en cuenta que en el método de la regla trapezoidal los limites de integración son [a,b] y que la aproximación a la función se hace a través de un polinomio de primer orden, se obtiene la siguiente ecuación

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b a_0 + a_1 x$$

$$\int_a^b a_0 + a_1 x = a_0 x\Big|_a^b + a_1 \frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$I = a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)$$



Cuadratura de Gauss.
Regla Trapezoidal.

- Partiendo del método de cuadratura de Gauss para un polinomio de primer orden se tiene

$f(x) = a_0 + a_1 x$

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$\begin{aligned} c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) &= c_0(a_0 + a_1 x_0) + c_1(a_0 + a_1 x_1) \\ &= a_0(c_0 + c_1) + a_1(c_0 x_0 + c_1 x_1) \end{aligned}$$

- En el método de la regla trapezoidal los limites de integración son [a,b], por tanto $x_0 = a$ y $x_1 = b$

$$I = a_0(c_0 + c_1) + a_1(c_0 a + c_1 b)$$

Cuadratura de Gauss.
Regla Trapezoidal.

- Igualando las ecuaciones que se obtuvieron anteriormente se tiene

$$c_0 + c_1 = b - a$$
$$c_0 a + c_1 b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

- El sistema de ecuaciones anterior posee dos ecuaciones y dos incognitas, al solucionar el sistema se tiene

$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2}$$

Cuadratura de Gauss.
Regla Trapezoidal.

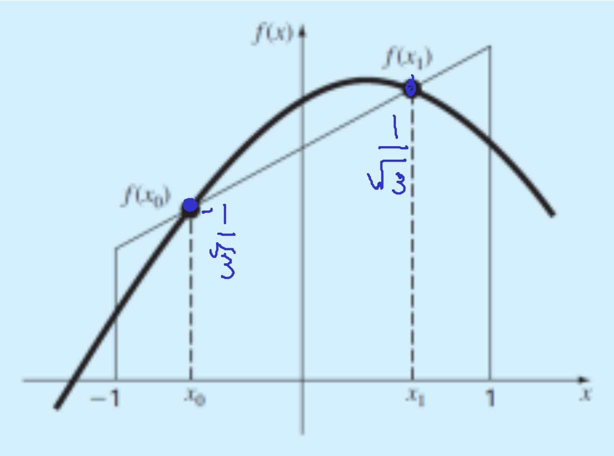
- Sustituyendo en la ecuación para la cuadratura de Gauss con los valores encontrados de c_0 y c_1 se tiene

$$I = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$

$$\boxed{I = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))}$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.



Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Para este caso a diferencia de la regla trapezoidal, los puntos intermedios x_0 y x_1 son desconocidos, por tanto se tienen cuatro incognitas: x_0, x_1, c_0, c_1

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Teniendo en cuenta que se requieren cuatro ecuaciones para solucionar el sistema, la aproximación a la función se hace a través de un polinomio de tercer orden

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\int_a^b a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0 x\Big|_a^b + a_1 \frac{x^2}{2}\Big|_a^b + a_2 \frac{x^3}{3}\Big|_a^b + a_4 \frac{x^4}{4}\Big|_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right)$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Para simplificar los calculos y llegar a una ecuación general se emplean como limites de integración [-1,1]; es decir; a = -1 y b = 1

$$
\begin{aligned}
&= a_0(b-a) + a_1(\frac{b^2-a^2}{2}) + a_2(\frac{b^3-a^3}{3}) + a_3(\frac{b^4-a^4}{4}) \\
&= a_0(1+1) + a_1(\frac{1-1}{2}) + a_2(\frac{1+1}{3}) + a_3(\frac{1-1}{4}) \\
&= a_0(2) + a_1(0) + a_2(\frac{2}{3}) + a_3(0)
\end{aligned}
$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Partiendo del método de cuadratura de Gauss para un polinomio de tercer orden se tiene

$$
\begin{aligned}
I &\cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \\
&= c_0(a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3) + c_1(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3) \\
&= a_0(c_0 + c_1) + a_1(c_0 x_0 + c_1 x_1) + a_2(c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2) + a_3(c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3)
\end{aligned}
$$

Cuadratura de Gauss.
Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Igualando las ecuaciones que se obtuvieron anteriormente

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= 2 \\ c_0 x_0 + c_1 x_1 &= 0 \\ c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 &= 0 \end{aligned}$$

- El sistema de ecuaciones tiene como solución

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773503 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Sustituyendo en la ecuación para la cuadratura de Gauss con los valores encontrados de c_0, c_1, x_0 y x_1 se tiene

$$\boxed{I = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Cuadratura de Gauss.
Limites de Integración.

- Dados los limites de integración de una función [a,b], para aplicar el método de cuadratura de gauss se deben transformar a [-1,1]
- La siguiente ecuación permite realizar la transformación de los limites de integración

$$x = m\,x_d + c$$

Donde m es una fracción de contracción y c corresponde a un desplazamiento

Cuadratura de Gauss.
Limites de Integración.

- Si el límite inferior $x = a$ corresponde a $x_d = -1$ y el límite superior $x = b$ corresponde a $x_d = 1$

$$a = m(-1) + c$$
$$b = m(1) + c$$

- Reordenando las ecuaciones

$$c - m = a$$
$$c + m = b$$

Cuadratura de Gauss.
Limites de Integración.

- El sistema de ecuaciones tiene como solución

$$c = \frac{b+a}{2} \quad m = \frac{b-a}{2}$$

- Sustituyendo en la ecuación inicial

$$x = \frac{(b-a)}{2} x_d + \frac{(b+a)}{2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2} \mathrm{d}x_d$$

Cuadratura de Gauss.
Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la fórmula de dos puntos de Gauss-Legendre desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Cuadratura de Gauss.
Problema.

- **Solución:**

Empleando las fórmulas para sustituir los límites entre -1 y +1

$$x = 0.4 + 0.4x_d$$
$$dx = 0.4dx_d$$

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)dx$$

$$\int_{-1}^{1} (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 +$$
$$675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5)0.4dx_d$$

Cuadratura de Gauss.

Problema.

$$f(x_d) = (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5)0.4$$

$$x_d = -1/\sqrt{3}, f(x_d) = 0.516741$$

$$x_d = 1/\sqrt{3}, f(x_d) = 1.305837$$

$$I = 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$$

$$\varepsilon_t = -11.1\%$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula General.

- La siguiente tabla muestra versiones de la fórmula de Gauss-Legendre para una mayor cantidad de puntos

Cuadratura de Gauss.
Fórmula General.

Points	Weighting Factors	Function Arguments	Truncation Error
1	$c_0 = 2$	$x_0 = 0.0$	$\cong f^{(2)}(\xi)$
2	$c_0 = 1$	$x_0 = -1/\sqrt{3}$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
	$c_1 = 1$	$x_1 = 1/\sqrt{3}$	
3	$c_0 = 5/9$	$x_0 = -\sqrt{3/5}$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
	$c_1 = 8/9$	$x_1 = 0.0$	
	$c_2 = 5/9$	$x_2 = \sqrt{3/5}$	
4	$c_0 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_0 = -\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
	$c_1 = (18 + \sqrt{30})/36$	$x_1 = -\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$	
	$c_2 = (18 + \sqrt{30})/36$	$x_2 = \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$	
	$c_3 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_3 = \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	
5	$c_0 = (322 - 13\sqrt{70})/900$	$x_0 = -\sqrt{245 + 14\sqrt{70}}/21$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
	$c_1 = (322 + 13\sqrt{70})/900$	$x_1 = -\sqrt{245 - 14\sqrt{70}}/21$	
	$c_2 = 128/225$	$x_2 = 0.0$	
	$c_3 = (322 + 13\sqrt{70})/900$	$x_3 = \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}/21$	
	$c_4 = (322 - 13\sqrt{70})/900$	$x_4 = \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}/21$	
6	$c_0 = 0.171324492379170$	$x_0 = -0.932469514203152$	$\cong f^{(12)}(\xi)$
	$c_1 = 0.360761573048139$	$x_1 = -0.661209386466265$	
	$c_2 = 0.467913934572691$	$x_2 = -0.238619186083197$	
	$c_3 = 0.467913934572691$	$x_3 = 0.238619186083197$	
	$c_4 = 0.360761573048131$	$x_4 = 0.661209386466265$	
	$c_5 = 0.171324492379170$	$x_5 = 0.932469514203152$	

Cuadratura de Gauss.
Problema.

$$x = \frac{(b-a)}{2}x_d + \frac{(b+a)}{2}$$
$$\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\mathrm{d}x_d$$

$$c_0 = 5/9$$
$$c_1 = 8/9$$
$$c_2 = 5/9$$

$$x_0 = -\sqrt{3/5}$$
$$x_1 = 0.0$$
$$x_2 = \sqrt{3/5}$$

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la fórmula de tres puntos de Gauss-Legendre desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

$$I = C_0 F(x_0) + c_1 F(x_1) + C_2 F(x_2)$$

Cuadratura de Gauss.
Problema.

- **Solución:**

A partir de la fórmula con los limites sustituidos y con base en la tabla general

$$f(x_d) = (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5)0.4$$

$$I = 0.5555556f(-0.7745967) + 0.8888889f(0) + 0.5555556f(0.7745967)$$

$$I = 0.2813013 + 0.8732444 + 0.4859876 = 1.640533$$

Diferencias Finitas.

Introducción.

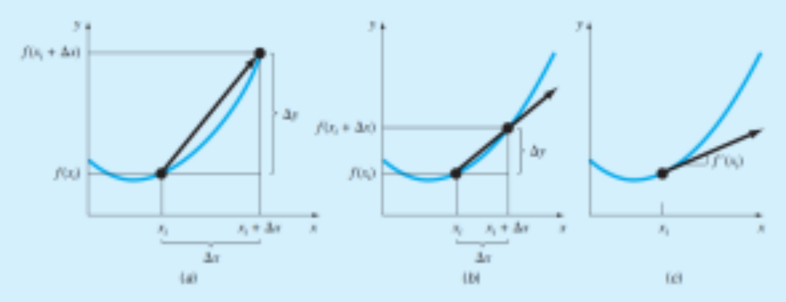
- La definición matemática de la derivada con una aproximación por diferencias es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i))}{\Delta x}$$

- Si Δx tiende a cero, la diferencia se torna en una derivada

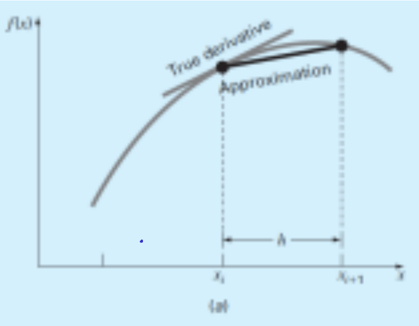
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i))}{\Delta x}$$

Diferencias Finitas.
Introducción.



Diferencias Finitas.
Diferencia hacia Adelante.

- La siguiente gráfica corresponde al tipo de diferencia finita hacia adelante



Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Adelante.

- En este tipo de diferencia finita se emplea el valor siguiente x_{i+1} y el valor actual x_i para estimar la pendiente
- La deducción de la ecuación comienza a partir de la expansión en Series de Taylor hacia adelante

Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Adelante.

- Expansión hacia adelante

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \ldots$$

- Despejando $f'(x_i)$

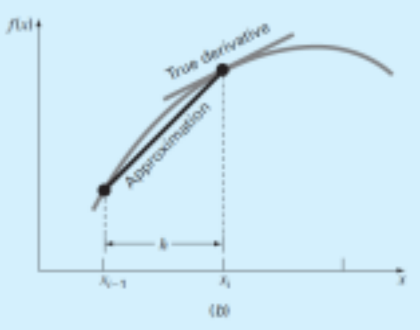
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + \ldots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Atras.

- La siguiente gráfica corresponde al tipo de diferencia finita hacia atras



Diferencias Finitas.
Diferencia hacia Atras.

- En este tipo de diferencia finita se emplea el valor anterior x_{i-1} y el valor actual x_i para estimar la pendiente
- La deducción de la ecuación comienza a partir de la expansión en Series de Taylor hacia atras

Diferencias Finitas.
Diferencia hacia Atras.

- Expansión hacia atras

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \dots$$

- Despejando $f'(x_i)$

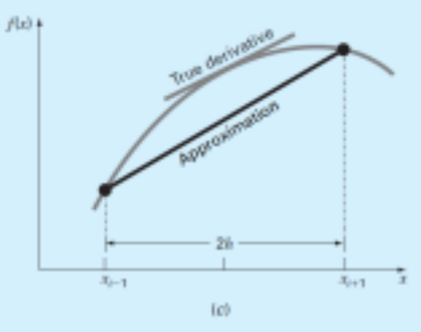
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{f''(x_i)}{2}h - \dots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

Diferencias Finitas.

Diferencia Centrada.

- La siguiente gráfica corresponde al tipo de diferencia finita centrada



Diferencias Finitas.
Diferencia Centrada.

- En este tipo de diferencia finita se emplea el valor siguiente x_{i+1} y el valor anterior x_{i-1} para estimar la pendiente
- La deducción de la ecuación comienza a partir de la resta de la expansión en Series de Taylor hacia adelante de la expansión en Series de Taylor hacia atras

Diferencias Finitas.

Diferencia Centrada.

- Expansion hacia adelante

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + ...$$

- Expansión hacia atras

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - ...$$

- Resta de expansiones

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + ...$$

Diferencias Finitas.
Diferencia Centrada.

- Despejando $f'(x_i)$

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^3(x_i)}{6}h^2 + \ldots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

Diferencias Finitas.

Problema.

- **Problema:** Emplee diferencias finitas (primer orden) hacia atras, adelante y centrada para estimar la primera derivada de la función en $x = 0.5$ usando un valor de $h = 0.25$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

El valor verdadero corresponde a $f'(0.5) = -0.9125$

Diferencias Finitas.

Problema.

- **Solución:** Se requieren los siguientes datos

$$x_{i-1} = 0.25, \;\; f(x_{i-1}) = 1.1035156$$
$$x_{i+1} = 0.75, \;\; f(x_{i+1}) = 0.6363281$$
$$x_i = 0.5, \;\; f(x_i) = 0.925$$

Diferencias Finitas.

Problema.

La diferencia hacia adelante con exactitud de $O(h)$

F(X_{i+1}) - F(X_i)

$$f'(0.5) = \frac{0.6363281 - 0.925}{0.25} = -1.155$$

$$\varepsilon_t = -26.5\%$$

La diferencia hacia atras con exactitud de $O(h)$

F(x_i) - F(X_{i-1})

$$f'(0.5) = \frac{0.925 - 1.1035156}{0.25} = -0.714$$

$$\varepsilon_t = 21.7\%$$

Diferencias Finitas.
Problema.

La diferencia centrada con exactitud de $O(h^2)$

$$f'(0.5) = \frac{0.6363281 - 1.1035156}{2(0.25)} = -0.934$$

$$\varepsilon_t = -2.4\%$$

$$F(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x - 12$$

$$F'(0.8) \qquad h = 0.1$$

$$F'(x) = 6x^2 + 12x + 3 = 16.44$$

$X_{i-1} = 0.7 \qquad F(0.7) = -6,27$

$X_{i+1} = 0.9 \qquad F(0.9) = -2,982$

$X_i = 0.8 \qquad F(0,8) = -4,736$

Adelante $\dfrac{-2.982 + 4.736}{0.1} = 17.54 \qquad E_r = 6,69\%$

Atras $\dfrac{-4.736 + 6.27}{0.1} = 15,36 \qquad E_r = 6,56\%$

Centrado $\dfrac{-2.982 + 6.27}{0.2} = 16.44 \qquad E_r = 0\%$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Adelante.

- Es posible obtener una diferencia hacia adelante para la segunda derivada
- La deducción de la ecuación parte de expresar una expansión en Series de Taylor hacia adelante para $f(x_{i+2})$ en términos de $f(x_i)$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Adelante.

- Expansión hacia adelante para $f(x_{i+2})$ en términos de $f(x_i)$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \ldots$$

- Expansión hacia adelante multiplicada por 2

$$2f(x_{i+1}) = 2f(x_i) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \ldots$$

- Resta de expansiones

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \ldots$$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Adelante.

- Despejando $f''(x_i)$

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \ldots$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Atras y Centrada.

- Un análisis similar permite obtener la diferencia finita hacia atras para la segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h^2)$$

- Un análisis similar permite obtener la diferencia finita centrada para la segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

- Es posible mejorar los resultados obtenidos por medio de diferencias finitas, introduciendo términos adicionales de la Serie de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + \ldots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h - \frac{f^3(x_i)}{6}h^2 - \ldots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

- La ecuación anterior presenta un término de segunda derivada $f''(x_i)$ que puede ser reemplazado por alguna de las ecuaciones que se plantearon para diferencias de alto orden

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.
Diferencia hacia Adelante.

- Diferencia hacia adelante para la segunda derivada

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

- Diferencia hacia adelante de alta exactitud

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

- Reemplazando

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

	Error
First Derivative	
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Atras.

First Derivative — Error

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad O(h)$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} \qquad O(h^2)$$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} \qquad O(h)$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} \qquad O(h^2)$$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3} \qquad O(h)$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3} \qquad O(h^2)$$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4} \qquad O(h)$$

$$f''''(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4} \qquad O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia Centrada.

	Error
First Derivative	
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

- **Problema:** Emplee diferencias finitas de alta exactitud (segundo orden) hacia atras, adelante y centrada para estimar la primera derivada de la función en $x = 0.5$ usando un valor de $h = 0.25$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

El valor verdadero corresponde a $f'(0.5) = -0.9125$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

- **Solución:**

Se requieren los siguientes datos:

$$
\begin{aligned}
x_{i-2} &= 0,\ f(x_{i-2}) = 1.2 \\
x_{i-1} &= 0.25,\ f(x_{i-1}) = 1.1035156 \\
x_i &= 0.5,\ f(x_i) = 0.925 \\
x_{i+1} &= 0.75,\ f(x_{i+1}) = 0.6363281 \\
x_{i+2} &= 1,\ f(x_{i+2}) = 0.2
\end{aligned}
$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

La diferencia hacia adelante con exactitud de $O(h^2)$

$F(X_{i+2})$ $F(X_i+1)$ $F(x_i)$

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.859375$$

$$\varepsilon_t = \underline{5.82\%}$$

La diferencia hacia atras con exactitud de $O(h^2)$

$F(x_i)$ $F(X_i-1)$ $F(X_{i-2})$

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.1035156) + 1.2}{2(0.25)} = -0.878125$$

$$\varepsilon_t = \underline{3.77\%}$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

La diferencia centrada con exactitud de $O(h^4)$

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.6363281) - 8(1.1035156) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125$$

$$\varepsilon_t = 0\%$$

Extrapolación de Richardson.
Introducción.

- De modo similar a la integración de Romberg, se puede deducir una ecuación para la estimación de la derivada

$$D = \frac{4}{3} D(h_2) - \frac{1}{3} D(h_1)$$
$$h_2 = h_1/2$$

- La ecuación anterior aplica para diferencias centradas con $O(h^2)$, la aplicación de la fórmula produce un resultado con $O(h^4)$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- **Problema:** Emplee extrapolación de Richardson para evaluar la primera derivada de la función en $x = 0.5$ empleando un valor de $h_1 = 0.5$ y $h_2 = 0.25$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

El valor verdadero corresponde a $f'(0.5) = -0.9125$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- **Solución:**

La primera derivada se puede estimar a partir de las diferencias centradas para $h_1 = 0.5$ y $h_2 = 0.25$

$$D(0.5) = \frac{0.2 - 1.2}{1} = -1.0$$

$$\varepsilon_t = -9.6\%$$

$$D(0.25) = \frac{0.6363281 - 1.103516}{0.5} = -0.934375$$

$$\varepsilon_t = -2.4\%$$

Extrapolación de Richardson.
Problema.

- **Solución:**

La estimación mejorada se puede determinar a partir de la fórmula de Extrapolación de Richardson

$$D = \frac{4}{3}(-0.934375) - \frac{1}{3}(-1) = -0.9125$$

$$\varepsilon_t = 0\%$$

$4x^3 + 3x^2 + 4x - 6$ $\quad F(1{,}5)$

$12x^2 + 6x + 4$

$F'(1{,}5) = 40$

$F \quad h_1 = 0.4 \qquad h = 0.2$

$7{,}35 \leftarrow X_{i-1} = 1.1 \qquad X_{i-1} = 1.3 \rightarrow 13{,}05$

$$\frac{F(x_{i+1}) - F(x_{i-1})}{2h}$$

$20{,}25 \leftarrow X_i = 1.5 \qquad X_i = 1.5 \rightarrow 20{,}25$

$39{,}86 \leftarrow X_{i+1} = 1.9 \qquad X_{i+1} = 1.7 \rightarrow 29{,}12$

$$\frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1) \qquad \frac{39.86 - 7.35}{0.8} = 40{,}6375$$

$$\frac{4}{3}\,40.175 - \frac{1}{3}\,40{,}6375 = 40 \qquad \frac{29.12 - 13.05}{0.4} = 40{,}175$$

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.