

Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- * Inducción matemática
- * Ejemplos

Técnicas de demostración

Inducción matemática

- Muchos teoremas establecen que $P(n)$ es verdad para todos los enteros positivos n , donde $P(n)$ es una expresión matemática

Técnicas de demostración

Inducción matemática

Una prueba por inducción matemática consiste de dos pasos

- **Paso base.** Se muestra que la proposición $P(1)$ se cumple
- **Paso inductivo.** Se supone que $P(n)$ es cierto y se intenta demostrar que $P(n+1)$ también. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $1+2+3+\dots+n$ es $n \cdot (n+1)/2$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $1+2+3+\dots+n$ es $n \cdot (n+1)/2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1 \cdot 2 / 2 = 1$$

*

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $1+2+3+\dots+n$ es $n \cdot (n+1)/2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1 \cdot 2 / 2 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\dots+n = n \cdot (n+1)/2 \quad \rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $1+2+3+\dots+n$ es $n \cdot (n+1)/2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1 \cdot 2 / 2 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1+2+3+\dots+n} & \xrightarrow{\quad} & \boxed{1+2+3+\dots+n+(n+1)} \\ \text{P}(n) & & \text{P}(n+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2} & & \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ & & \swarrow \\ & & (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \end{array}$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $1+2+3+\dots+n$ es $n \cdot (n+1)/2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1.2/2 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1+2+3+\dots+n = \boxed{n \cdot (n+1) / 2}$

$\xrightarrow{\text{inductive step}} \boxed{1+2+3+\dots+n+(n+1)}$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$

$= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right)$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $1+2+3+\dots+n$ es $n \cdot (n+1)/2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1 \cdot 2 / 2 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n = n \cdot (n+1)/2 & \quad \rightarrow \quad \underline{1+2+3+\dots+n} + (n+1) \\ & = n \cdot (n+1)/2 + (n+1) \\ & = (n+1) \cdot (n+2)/2 \\ & = P(n+1) \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

- **Paso base.** $P(0)$

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1} - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

- Paso base. $P(0)$

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1} - 1 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$

- Paso base. $P(0)$

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad 2^0+2^1+2^2+\dots+2^n+2^{n+1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$

- Paso base. $P(0)$

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1 & \quad \rightarrow \quad \frac{2^0+2^1+2^2+\dots+2^n}{} + 2^{n+1} \\ & = (2^{n+1}-1) + 2^{n+1} \\ & = 2 \cdot 2^{n+1}-1 \\ & = 2^{(n+1)+1}-1 = P(n+1) \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2 , es decir, $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2 , es decir, $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2 , es decir, $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2 \quad \rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2 , es decir, $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2 \quad \rightarrow \quad 1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2 , es decir, $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1 = 1^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2 & \quad \rightarrow \quad \underline{1+3+\dots+(2n-1)} + (2n+1) \\ & = n^2 + 2n + 1 \\ & = (n+1)^2 \\ & = P(n+1) \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- Paso base. $P(1)$

$$1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- Paso base. $P(1)$

$$1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \quad \Rightarrow \quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- Paso base. $P(1)$

$$1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} + (n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- Paso base. $P(1)$

$$1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= n(n+1)(2n+1)/6 \quad \rightarrow \quad \underline{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} + (n+1)^2 \\ &= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2 \\ &= (n+1)(2n^2+7n+6)/6 \\ &= (n+1)(2n+3)(n+2)/6 \\ &= \underline{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]} = P(n+1) \\ &\quad \quad \quad 6 \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad 1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\dots+n^3}+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3}{= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- Paso base. $P(1)$

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+\dots+n^3 &= [n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\dots+n^3}+(n+1)^3 \\ &= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3 \\ &= n^2(n+1)^2/4+(n+1)^3 \\ &= (n+1)^2[n^2/4+(n+1)] \\ &= (n+1)^2(n+2)^2/4 = [(n+1)(n+2)/2]^2 \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3) / 3 = 2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \quad \rightarrow \quad \underline{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)} + (n+1) \cdot (n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) &= n(n+1)(n+2)/3 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)/3 + (n+1) \cdot (n+2) \\ &= (n+1)(n+2) [n/3 + 1] \\ &= (n+1)(n+2)(n+3)/3 \\ &= P(n+1) \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!} + (n+1) \cdot (n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- Paso base. $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- Paso inductivo. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! &= (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! [1 + (n+1)] - 1 \\ &= (n+1)! (n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1 = P(n+1) \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n pares es $n \cdot (n+1)$,
es decir, $2+4+6+ \dots + 2n = n \cdot (n+1)$