Segundo examen parcial
Análisis y diseño de algoritmos

Carlos Andres Delgado S, Msc cadelgado1@usbcali.edu.co

28 de abril 2022

1. Dado el siguiente algoritmo:

```
def algoritmo(n):
    a = 0
    s = 0
    while a <= n:
        s += 2*n
        a+=1

    return s
```

$a = n+1$

$(0,0) \to (1, 2n) \to (2, 2n+2n) \to (3, 6n)$

$\to \dots \to \boxed{(n+1, (n+1)\,2n)}$

Indicar

   a) (5 puntos) Forma del estado, estado inicial (a, S) $(0, 0)$
   b) (15 puntos) Transformación de estado y estado final $(a, S) \to (a+1, S+2n)$
   c) (20 puntos) Invariante de ciclo y su demostración

$Inv = (a, 2an)$

2. Dada la función $f(n) = n^2 + 2n$ indicar:

   a) (10 puntos) Explicar claramente si $f(n)$ es $O(n)$
   b) (10 puntos) Explicar claramente si $f(n)$ es $\Theta(n^2)$

1) Estado inicial
$a = 0$
$S = 0$

3. Resolver por método de expansión o de árboles:

   a) (20 puntos) $T(n) = 4T(\frac{n}{8}) + n$, $T(1) = 1$
   b) (20 puntos) $T(n) = 3T(\frac{n}{6}(+4$, $T(1) = 1$

   Mostrar claramente cada uno de los pasos realizados

2) Estado final
$a = n+1$
$S = (n+1)\,2n$

Ayudas

3) Transformo

(a, S) — $a = a+1$ — $(a+1, 2(a+1)n)$ $(a, 2an+2n)$

(a, S) — $S = S+2n$ — $(a+1, 2an+2n)$

Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{(n+1)} - a}{r-1} \quad \texttt{Si } r \neq 1$$

2. Dada la función $f(n) = n^2 + 2n$ indicar:

   a) (10 puntos) Explicar claramente si $f(n)$ es $O(n)$ F

   b) (10 puntos) Explicar claramente si $f(n)$ es $\Theta(n^2)$

1) $n^2 + 2n \leq C \times n$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} \leq C \frac{n}{n^2}$

$\lim_{n \to \infty} 1 + \cancel{\frac{2}{n}} \leq \cancel{\frac{C}{n}}$

$\boxed{1 \leq 0}$ Falso

2) $n^2 + 2n$ es $\Theta(n^2)$

$O(n^2)$

$n^2 + 2n \leq C \times n^2$

$\lim_{n \to \infty} \cancel{\frac{n^2}{n^2}} + \cancel{\frac{2n}{n^2}} \leq C \cancel{\frac{n^2}{n^2}}$

$1 \leq C$

$\boxed{C > 1}$

$\Omega(n^2)$

$n^2 + 2n \geq C \times n^2$

$\vdots$

$\boxed{C < 1}$

$\boxed{C \geq 0}$

k

1) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{8}\right) + n \qquad T(1) = 1$

2) $T(n) = 4\left(4T\left(\frac{n}{8^2}\right) + \frac{n}{8}\right) + n$

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3) $T(n) = 4\left(4\left(4T\left(\frac{n}{8^3}\right) + \frac{n}{8^2}\right) + \frac{n}{8}\right) + n$

$T(n) = 4^3 T\left(\frac{n}{8^3}\right) + \frac{4^2}{8^2}n + \frac{4}{8}n + \left(\frac{4}{8}\right)^0 n$

$(\frac{1}{2})^2 \qquad \frac{1}{2}$

$T(n) = 4^k T\left(\boxed{\frac{n}{8^k}}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i n$

$1 = \frac{n}{8^k}$

$k = \log_8(n)$

$T(n) = n^{\log_8(4)} + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_8(n)} - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) n$

$$\boxed{T(n) = n^{\log_8(4)} - 2n\left(n^{\log_8\left(\frac{1}{2}\right)} - 1\right)}$$

1) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{6}\right) + 4$

2) $T(n) = 3\left(3T\left(\frac{n}{6^2}\right) + 4\right) + 4$

3) $T(n) = 3\left(3\left(3T\left(\frac{n}{6^3}\right) + 4\right) + 4\right) + 4$

$T(n) = 3^3 T\left(\frac{n}{6^3}\right) + 3^2 \times 4 + 3 \times 4 + 3^0 \times 4$ $\quad k = \log_6(n)$

$$T(n) = 3^k T\left(\frac{n}{6^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} 4 \times 3^k$$

$T(n) = 3^{\log_6(n)} + \sum_{i=0}^{\log_6(n)-1} 4 \times 3^k$ $\quad T(n) = n^{\log_6(3)} + \frac{4 \times 3^{\log_6(n)} - 4}{3 - 1}$

$$T(n) = n^{\log_6(3)} + 2\left(n^{\log_6(3)} - 1\right)$$