Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Ecuaciones de recurrencia

Recurrencias

Método de iteración

Método maestro*

Método de sustitución

Recurrencias

Método de iteración

Expandir la recurrencia y expresarla como una suma de términos que dependen de n y de las condiciones iniciales

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$, $T(1) = \Theta(1)$ y n par

Expandir la recurrencia 2 veces

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

Recurrencias

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

$$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$$

$$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$$

$$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a $T(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a $T(1)$, esto es, cuando $(n/4^i)=1$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16 \;+ 3T(n/64)\,))$

$n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2 \;+ 3^3T(n/4^3)$

$n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}T(1)$

$\frac{n}{4^i} = 1$

$i = \log_4(n)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a T(1), esto es, cuando $(n/4^i)=1$

Recurrencias

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

$$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$$

$$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$$

$$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$$

$$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}T(1)$$

Después de iterar, se debe tratar de expresar como una sumatoria con forma cerrada conocida

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4\rfloor)$

$n + 3\ (\ n/4\rfloor + 3T(n/16\rfloor))$

$n + 3\ (\ n/4\rfloor + 3(n/16\rfloor\ + 3T(n/64\rfloor)\ ))$

$n + 3{*}n/4\rfloor + 3^2{*}n/4^2\rfloor\ + 3^3(n/4^3\rfloor) + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\leq\ n + 3n/4 + 3^2n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2\ \ + 3^3(n/4^3) + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\leq\ n + 3n/4 + 3^2n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i n\right) + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$$

$$= n\left(\frac{(3/4)^{(\log_4 n)} - 1}{(3/4) - 1}\right) + n^{\log_4 3} = n * 4(1 - (3/4)^{(\log_4 n)}) + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$= O(n)$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$ 1

$T(n/2) = 2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1$

$T(n) = 2\left(2T\left(n/2^2\right) + 1\right) + 1$

$T(n) = 2^2 \boxed{T\left(n/2^2\right)} + 2 + 1$ 2

$T(n) = 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + 2 + 1$

$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2 + 2 + 1$ 3

$T(n) = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^0$

$1 = \frac{n}{2^k}$ $k = \log_2(n)$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} T(1) + 2^{\log_2(n)-1} + 2^{\log_2(n)-2} + \dots + 2^1 + 2^0$$

$$T(n) = n^{\log_2(2)} \Theta(1) + \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

$$T(n) = n\,\Theta(1) + \frac{2^{\log_2(n)-1+1} - 1}{2-1}$$

$$T(n) = n\,\overbrace{\Theta(1)}^{c} + n - 1 = O(n)$$

$$cn + n - 1$$

Lineal

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1, T(1)= \Theta(1)$

* $T(n) = 2T(n/2) + n, T(1)= \Theta(1)$

$$T(n) = 2T(n/2) + n \qquad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n$$

$$T(n) = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2n$$

$$T(n) = 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + 2n$$

$$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3n$$

$$\vdots$$

$$T(n) = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn$$

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$$k = \log_2(n)$$

$$2^{\log_2(n)} T(1) + \log_2(n)\, n$$

$$n\,\Theta(1) + n\log_2(n)$$

$$\boxed{O(n\log_2(n))}$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1, T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n, T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1, T(1)= \Theta(1)$ ←

$O(\log_2(n))$

$T(n) = T(n/2^2) + 1 + 1$

$T(n) = T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2$

$T(n) = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1 + 2$

$T(n) = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3$

$\vdots$

$T(n) = T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k$

$\frac{n}{2^k} = 1$

$k = \log_2(n)$

$\Theta(1) + \log_2(n)$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1,\ T(1)= \Theta(1)$

Demuestre que $T(n) = T(n/2\rfloor) + n$, es $\Omega(n\log n)$

$k=1$ $$T(n) = 4\boxed{T(n/2)} + 2n$$

$$T(n) = 4\left(4T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{2n}{2}\right) + 2n$$

$k=2$ $$\boxed{T(n) = 4^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 4n + 2n}$$

$$T(n) = 4^2\left(4T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2\left(\frac{n}{2^2}\right)\right) + 4n + 2n$$

$k=3$ $$T(n) = 4^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 8n + 4n + 2n$$

$$T(n) = 4^3\left(4T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 2\left(\frac{n}{2^3}\right)\right) + 8n + 4n + 2n$$

$$T(n) = 4^4 T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 16n + 8n + 4n + 2n$$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(1) = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

k	1	2	3	4
	$2n$	$4n$	$8n$	$16n$

$$T(n) = 4^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=1}^{k} 2^i n$$

cte

$k=1$	$k=2$	$k=3$
$2n$	$2n+4n$	$2n+4n+8n$

$$T(n) = 4^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \frac{n2^{k+1} - n}{2-1} - 2^0 n$$

$$T(n) = 4^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + n2^{k+1} - n - n \qquad \frac{n}{2^k} = 1 \qquad k = \log_2(n)$$

$$T(n) = 4^{\log_2(n)} T(1) + n2^{\log_2(n)+1} - 2n$$

$$T(n) = n^{\log_2(4)}(1) + 2n \times 2^{\log_2(n)} - 2n$$

$$T(n) = n^2 + 2n \times n^{\log_2(2)} - 2n$$

$$\boxed{T(n) = 3n^2 - 2n}$$

Recurrencias

Iteración con árboles de recursión

$T(1) = 1$

$T(n) = 2T(n/2) + n^2$

Recurrencias

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

n^2

$T(n/2)$ $T(n/2)$

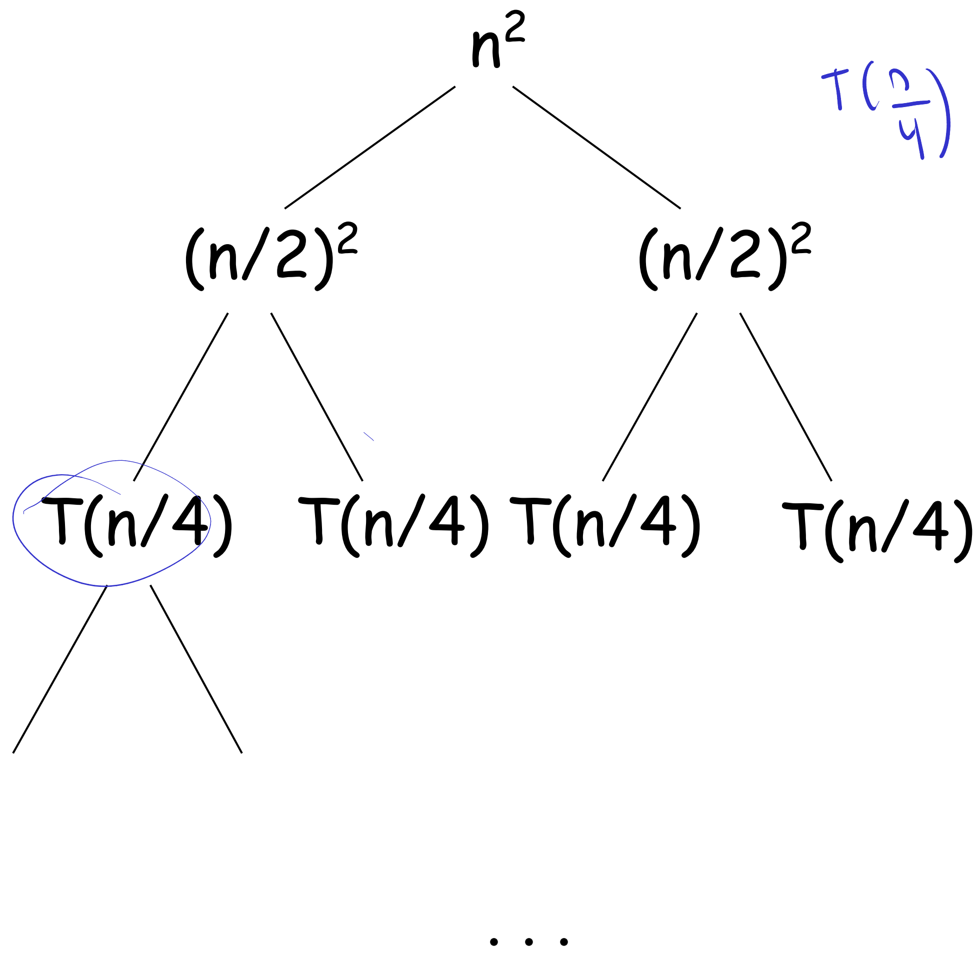
$\left(\frac{n}{2}\right)^2$

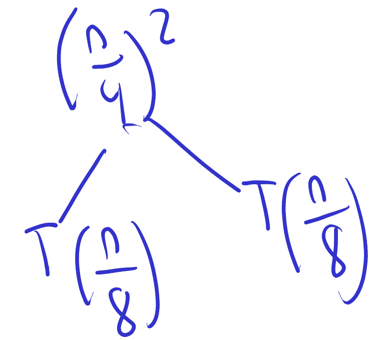
$T\left(\frac{n}{2^2}\right)$ $T\left(\frac{n}{2^2}\right)$

Recurrencias

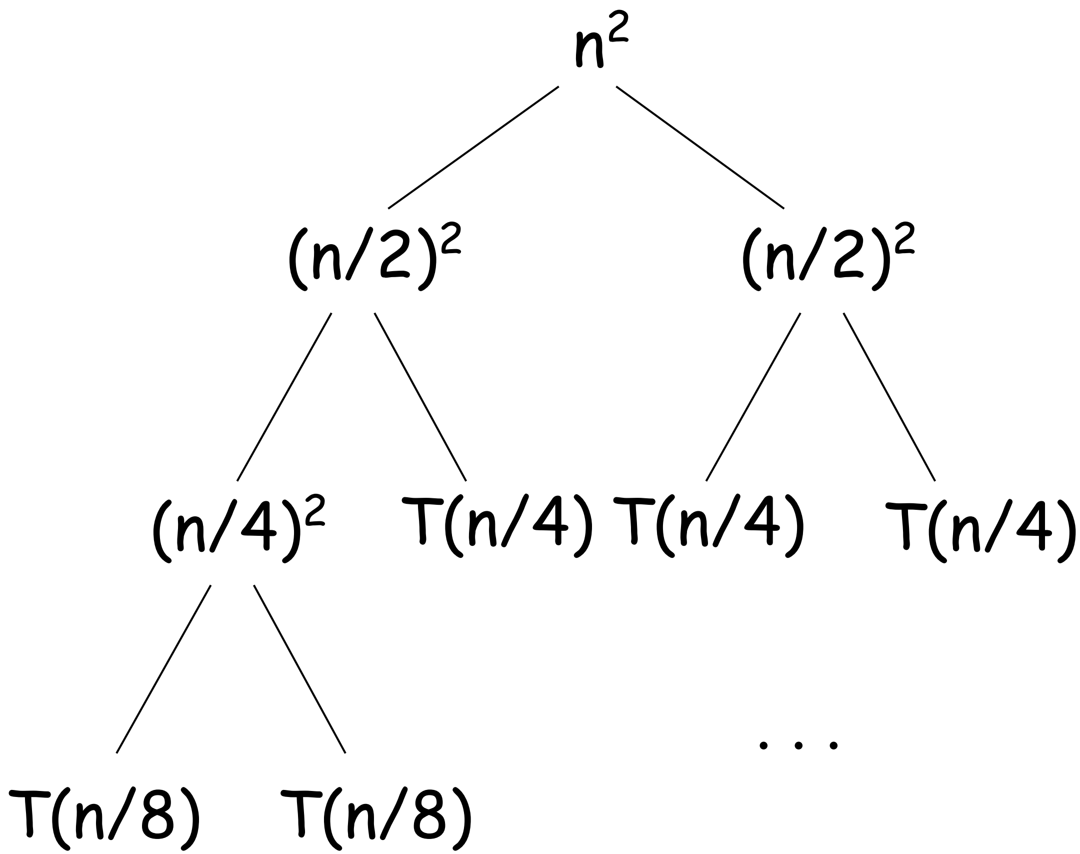
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2$$





Recurrencias



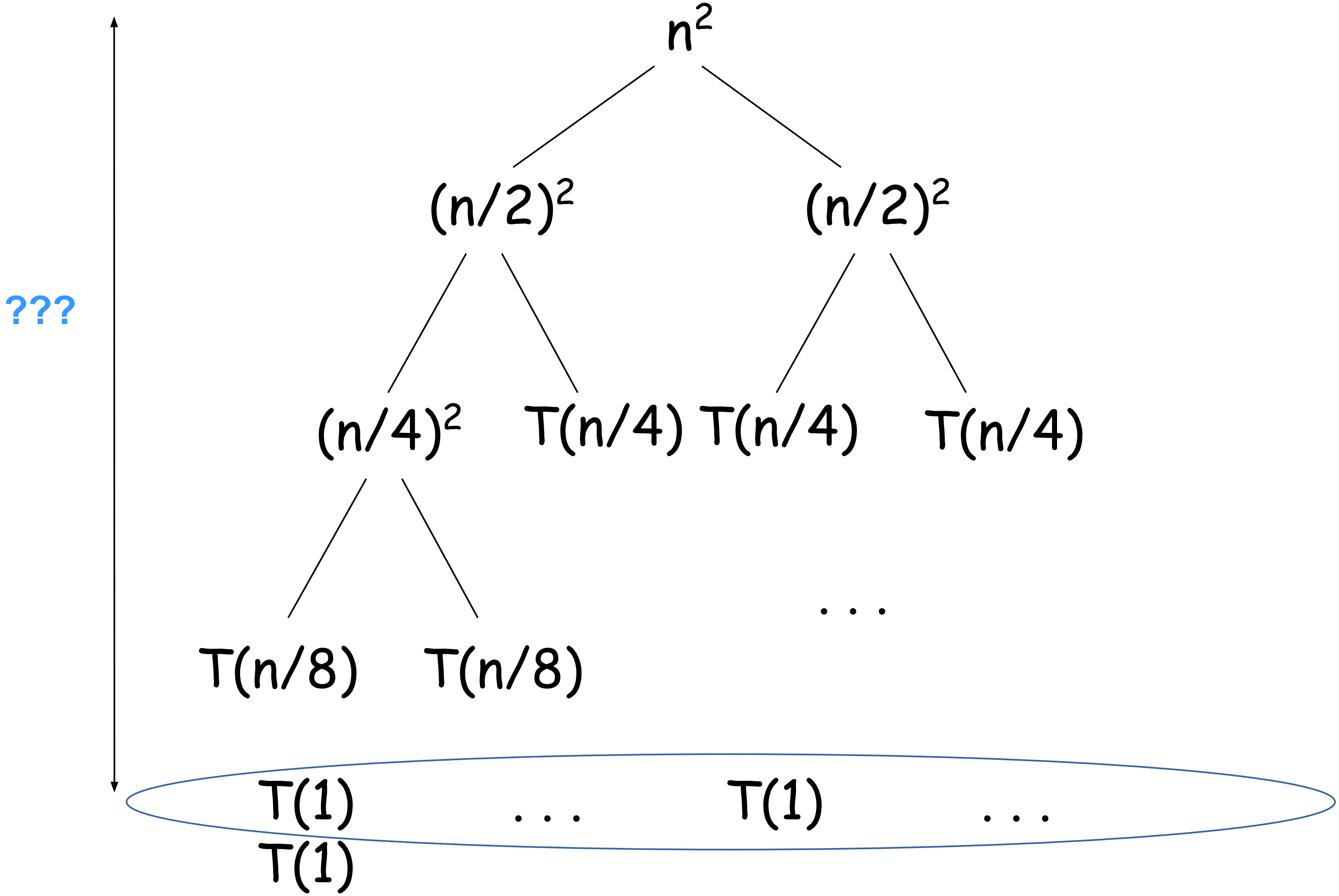
n^2

$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$

$4\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$

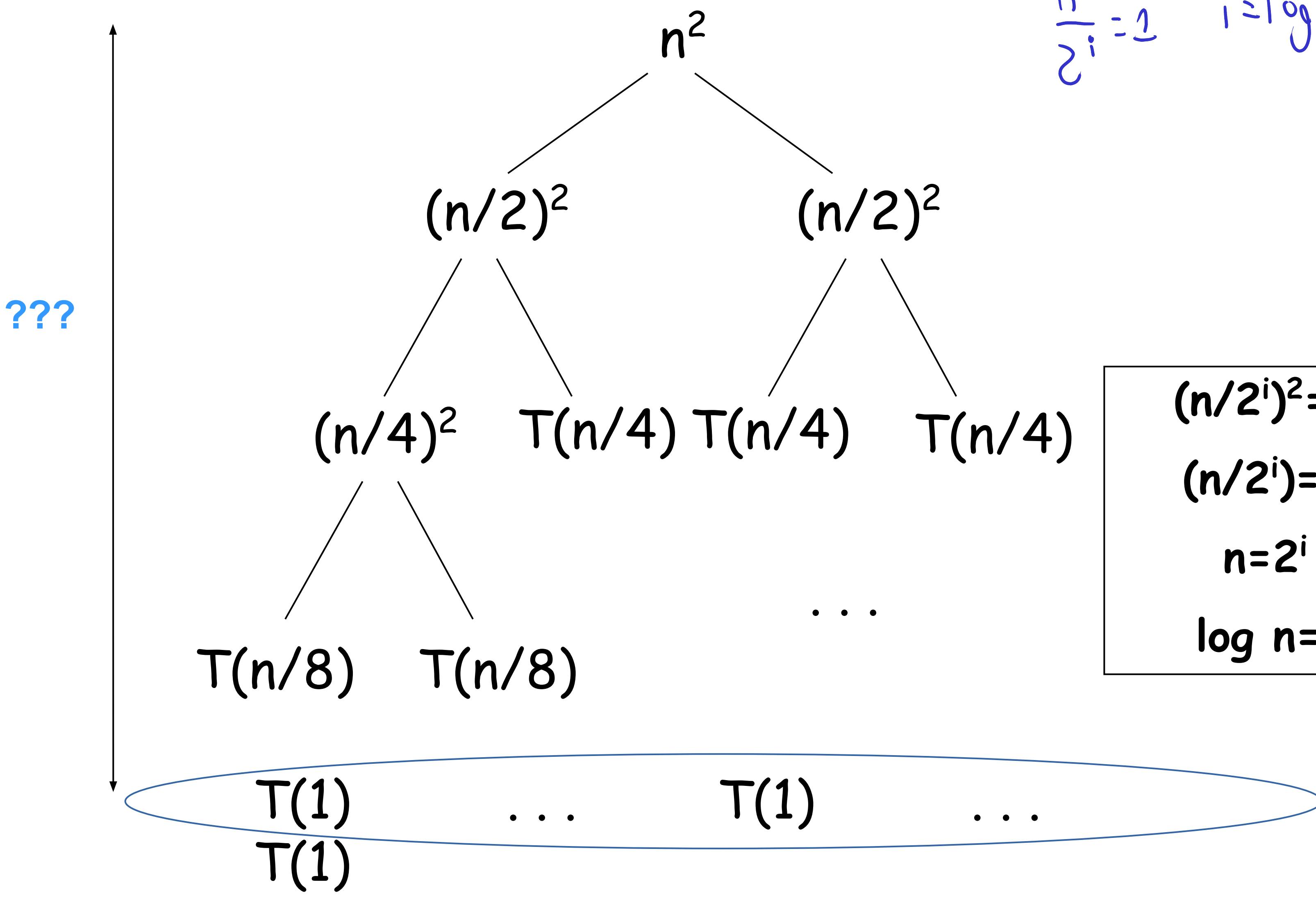
$8\left(\frac{n}{8}\right)^2 = \frac{n^2}{8}$

Recurrencias



Recurrencias

$\frac{n}{2^i} = 1 \quad i = \log(n)$



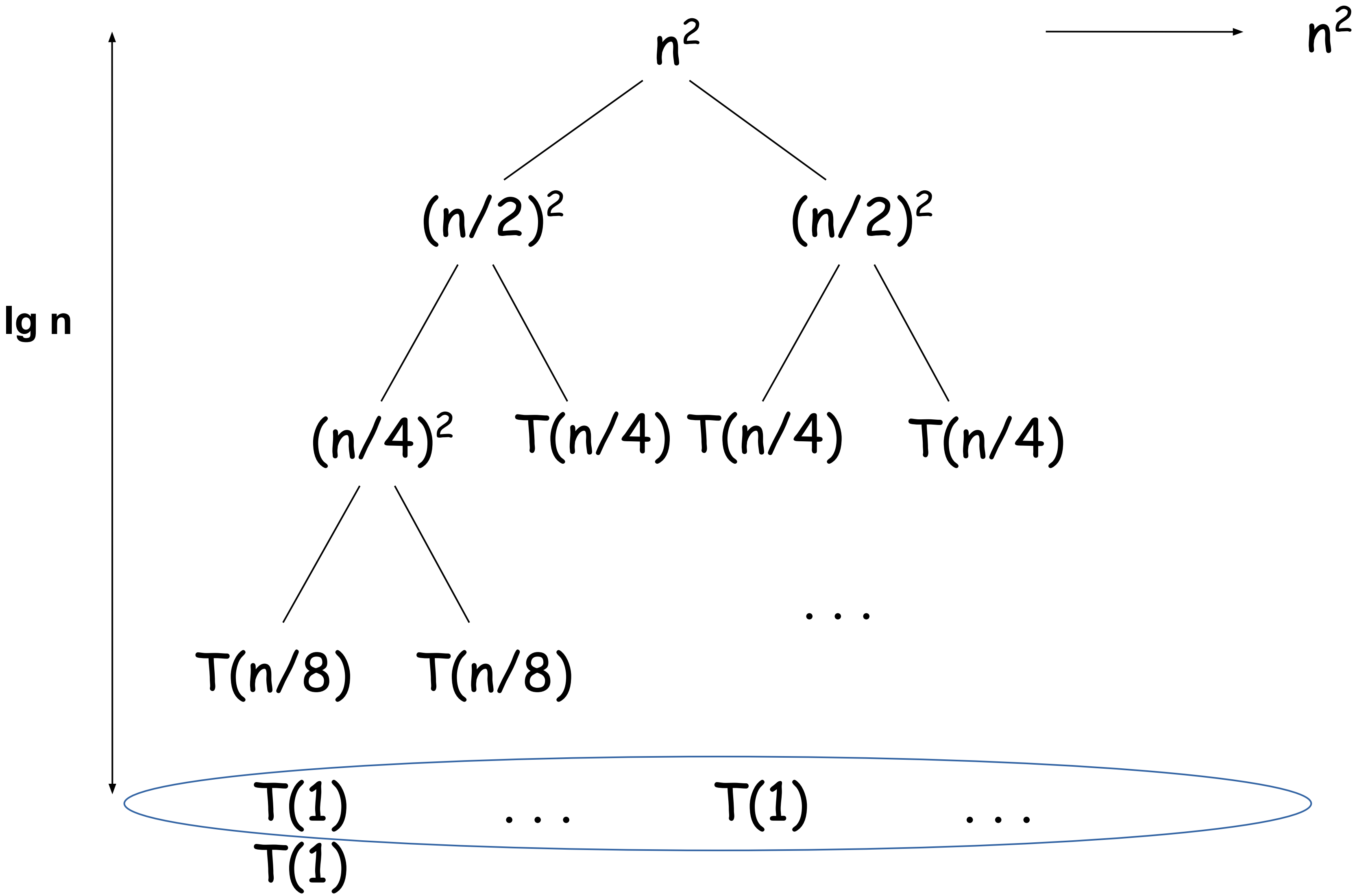
$(n/2^i)^2 = 1$

$(n/2^i) = 1$

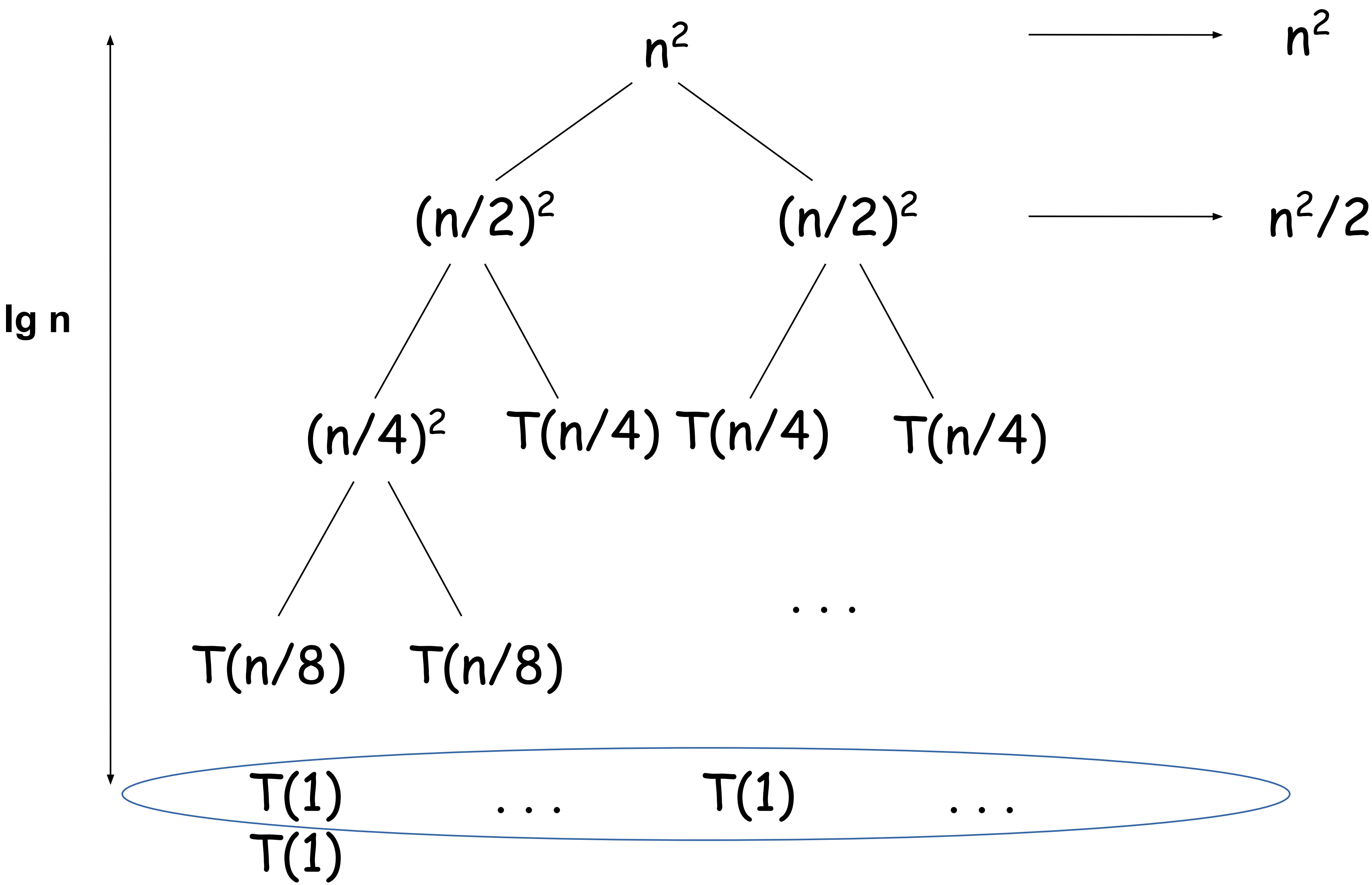
$n = 2^i$

$\log n = i$

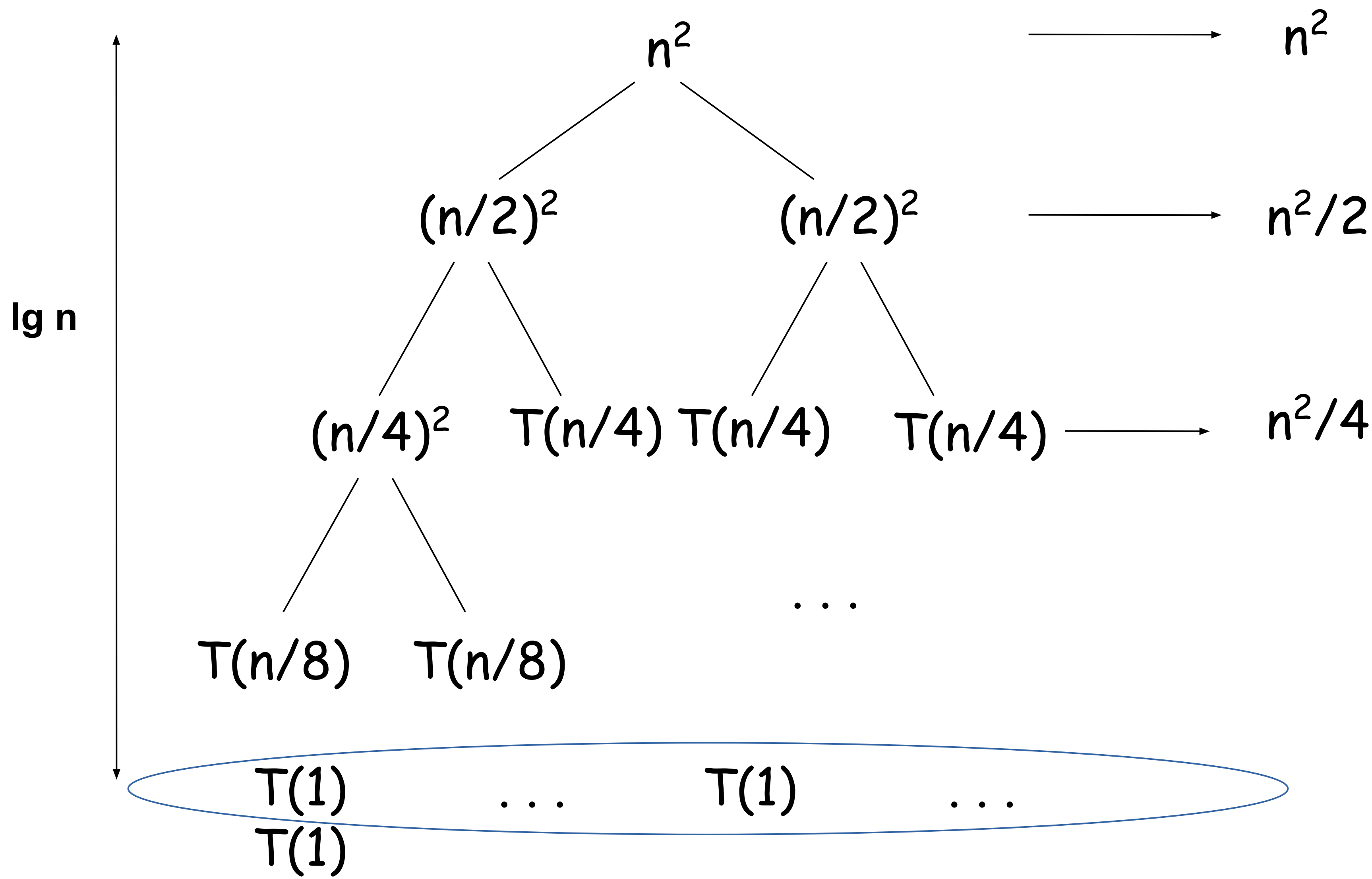
Recurrencias



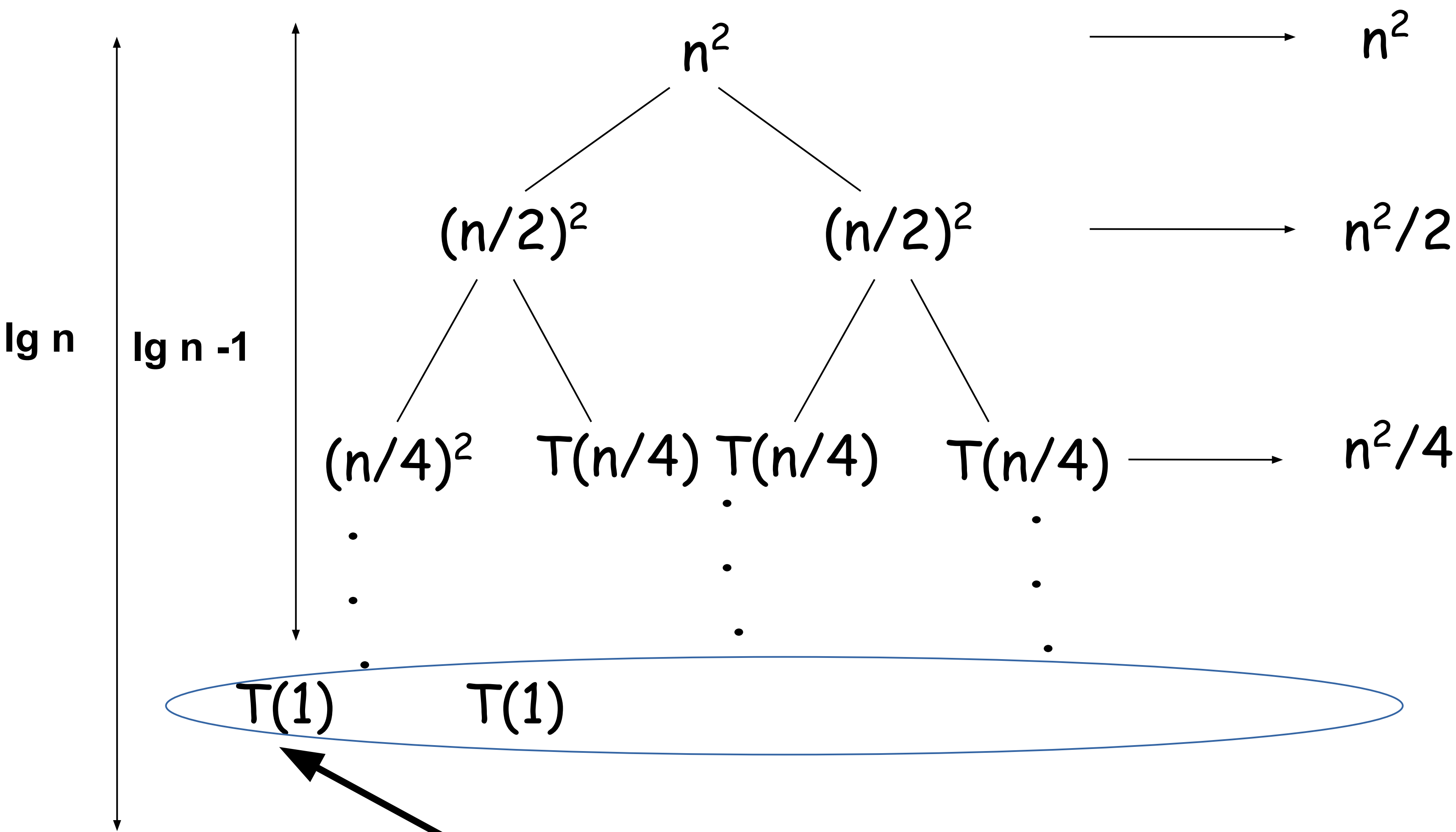
Recurrencias



Recurrencias

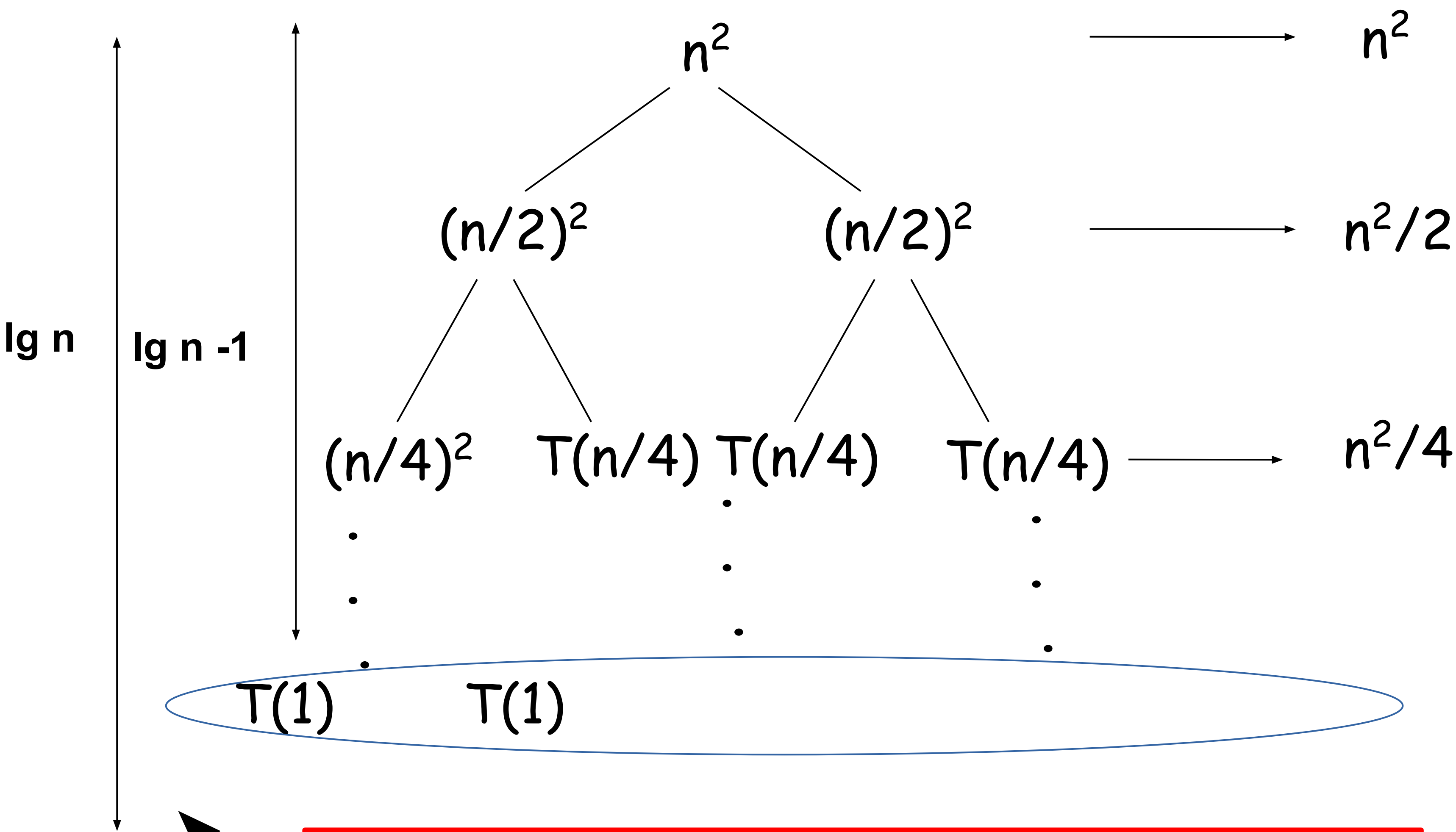


Recurrencias



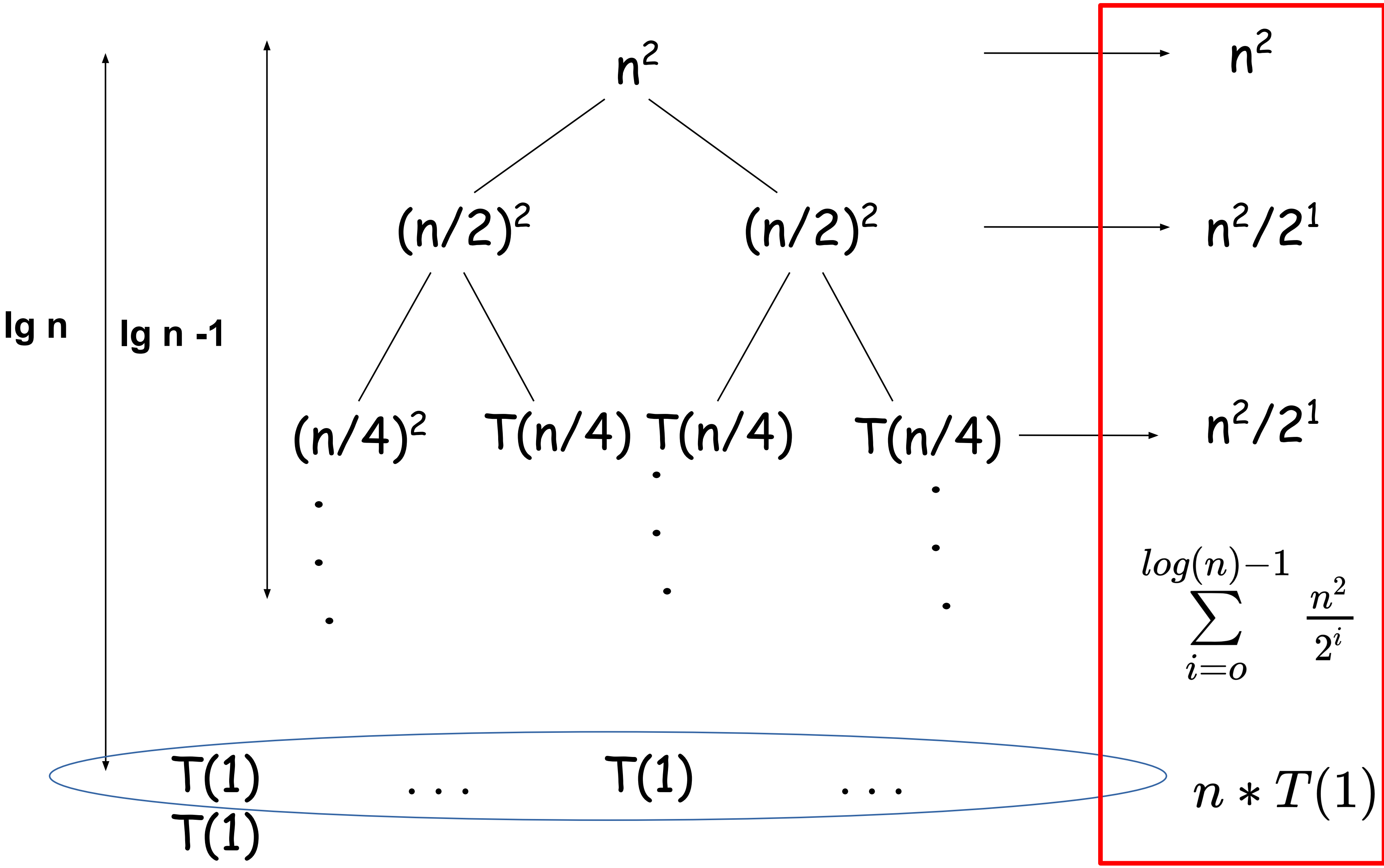
¿Cuantas hojas $T(1)$ tenemos?

Recurrencias



Si recuerda en un árbol m-ario se tienen máximo m^h. En este caso al ser arbol binario m=2, tenemos $2^{\log(n)}$ hojas. Por lo tanto se

Recurrencias



Recurrencias

$$T(n) = n * T(1) + \sum_{i=o}^{log(n)-1} \frac{n^2}{2^i}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{0.5^{log(n)} - 1}{0.5 - 1}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{n^{log(0.5)} - 1}{-0.5}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{n^{-1} - 1}{-0.5}$$

$$T(n) = n * c - \frac{n}{0.5} + \frac{n^2}{0.5} = O(n^2)$$

Recurrencias

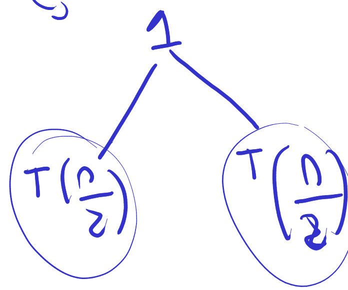
Resuelva construyendo el árbol

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

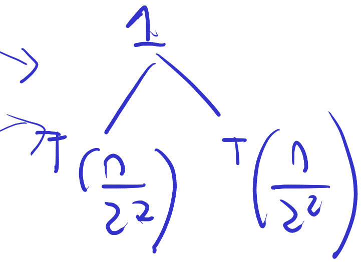
$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1) = \Theta(1)$

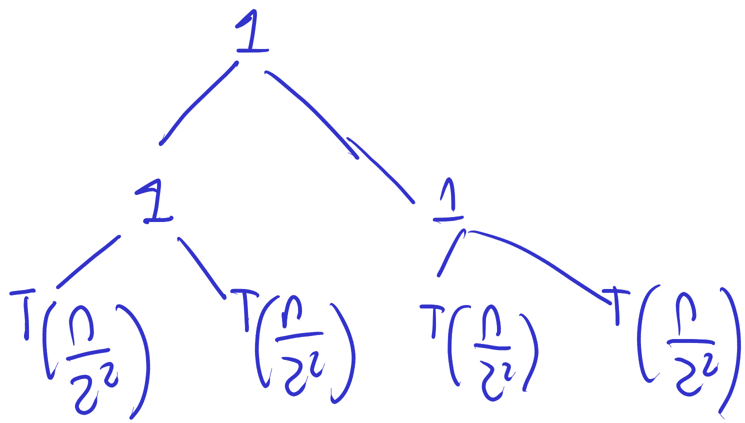
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$\Rightarrow$

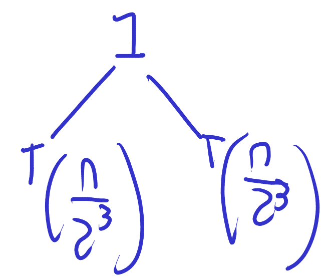


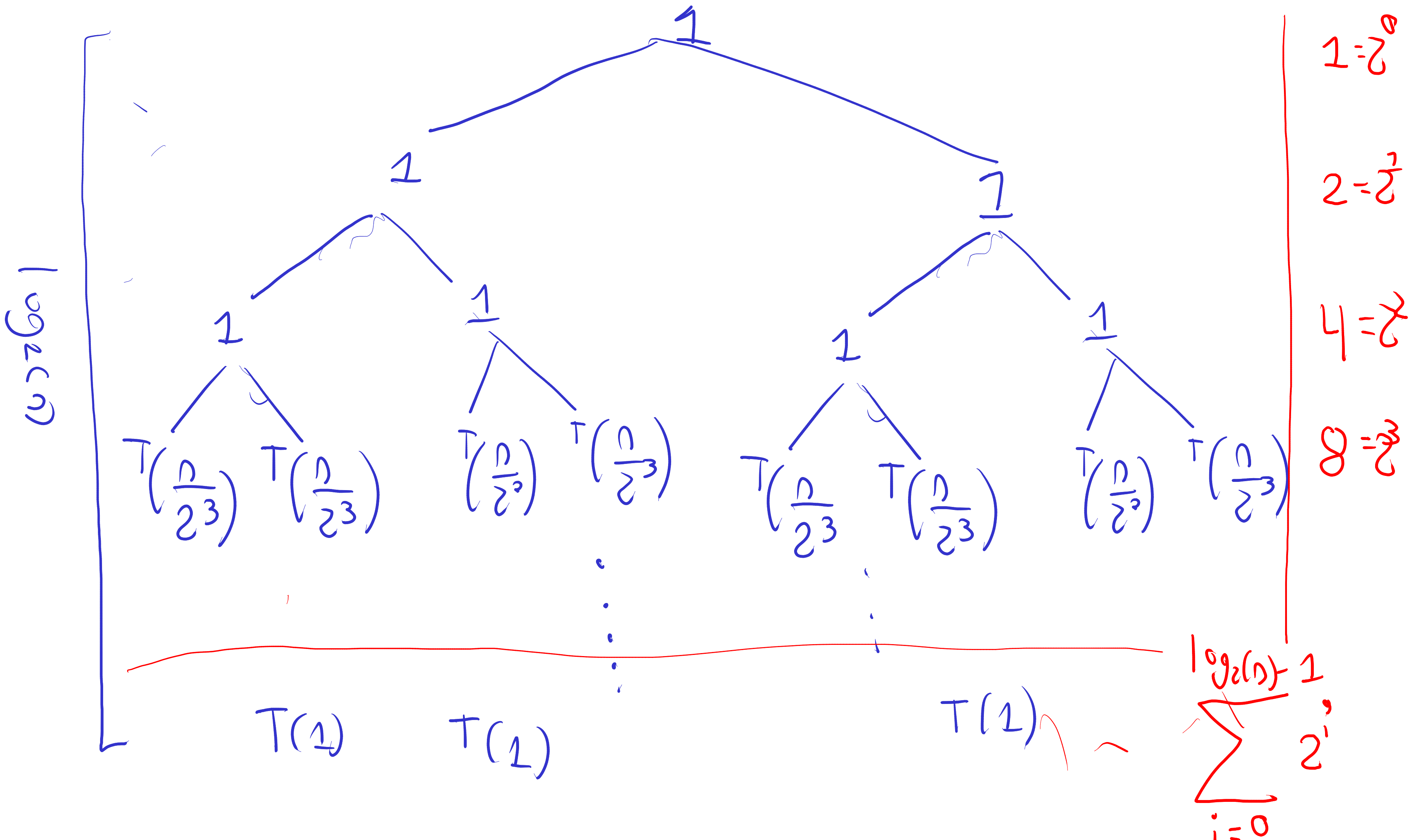
$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1$$





$$T\left(\frac{n}{2^2}\right) = 2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1$$





$$\frac{n}{2^i} = 1 \qquad i = \log_2(n)$$

m^h $\quad 2^{\log(n)} \times T(1)$ $\quad nT(1)$

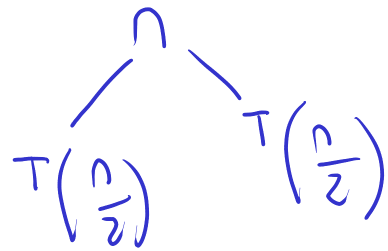
$$T(n) = nT(1) + \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i$$

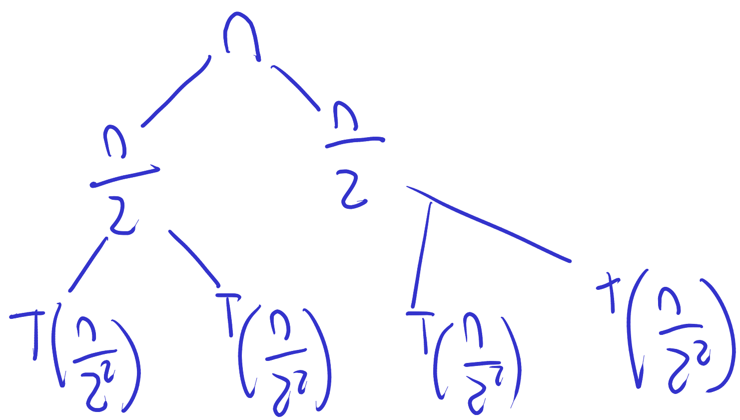
$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

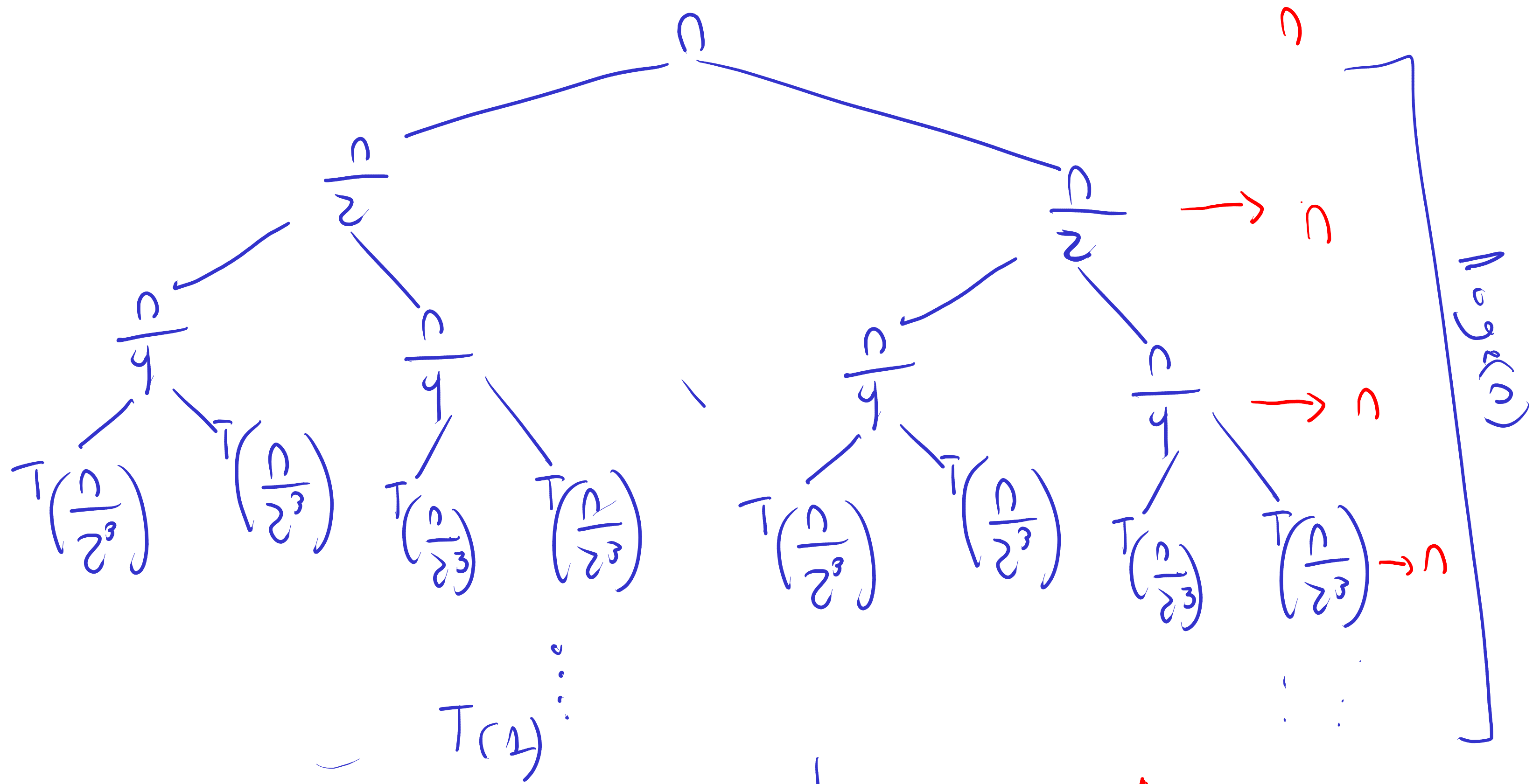
$$T(n) = n + \frac{2^{\log_2(n)} - 1}{2-1}$$

$$\boxed{T(n) = 2n - 1}$$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ $\qquad$ $T(1) = \underline{1}$







$$\frac{n}{2^i} = 1 \qquad i = \log_2(n)$$

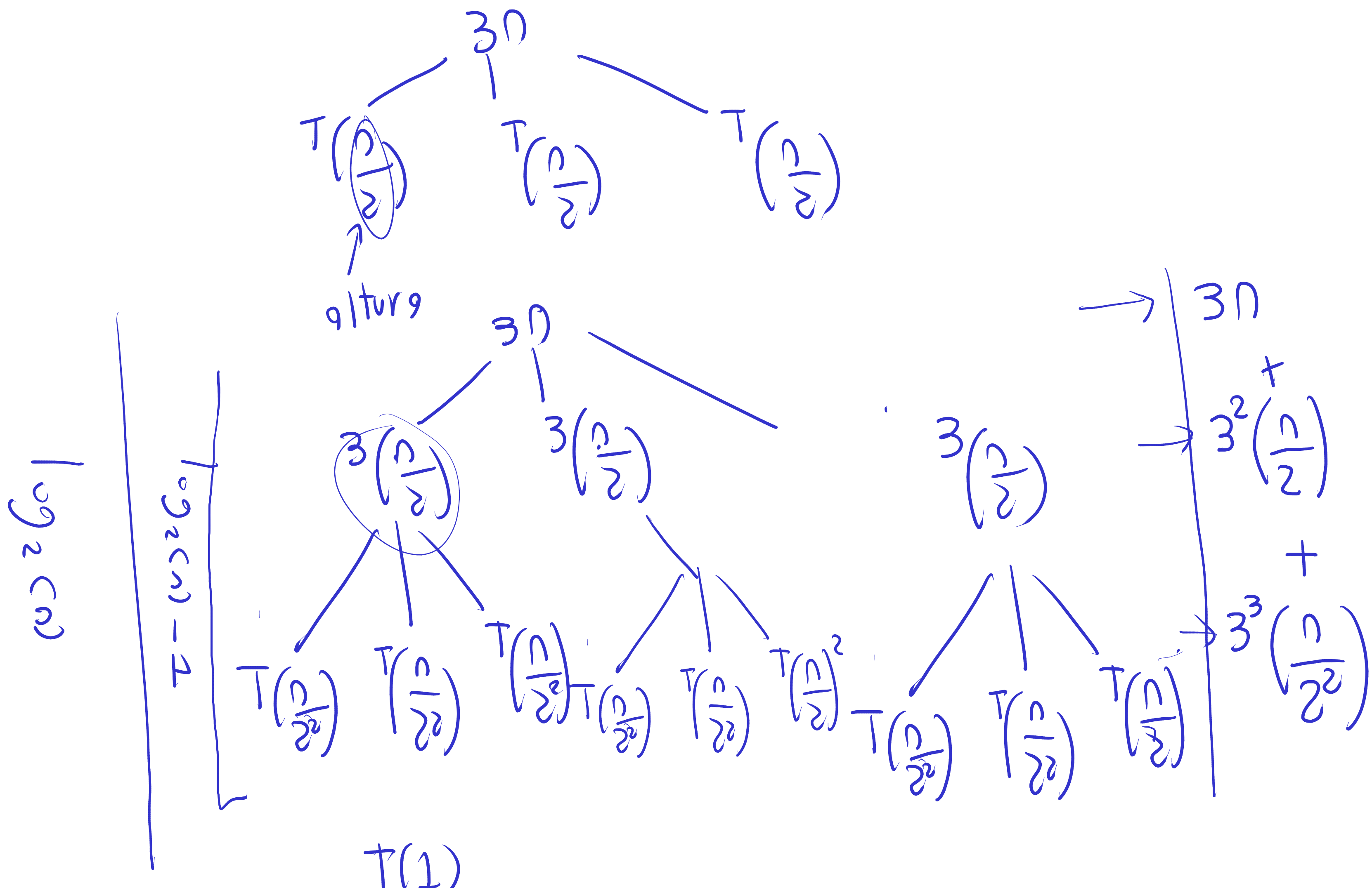
h   0 . 1 . 2 $\log_2(n)-1$

$n \quad \underbrace{n \; \ldots \; n \; \ldots \; n}_{\log_2(n) \times n}$

$$2^{\log_2(n)} T(1) = n\,T(1)$$

$$T(n) = n\,T(1) + n\log_2(n)$$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n \qquad T(1) = \Theta(1) = 1$



$$T(1) \qquad \frac{n}{2^i} = 1 \qquad \boxed{i = \log_2(n)}$$

$$3n + 3^2\left(\frac{n}{2}\right) + 3^3\left(\frac{n}{2^2}\right) + 3^4\left(\frac{n}{2^3}\right) + \dots +$$

$$3\left(\frac{3^0}{2^0}n + \frac{3}{2}n + \frac{3^2}{2^2}n + \frac{3^3}{2^3}n + \frac{3^4}{2^4}n + \dots + \frac{3^{\log_2(n)-1}}{2^{\log_2(n)-1}}\right)$$

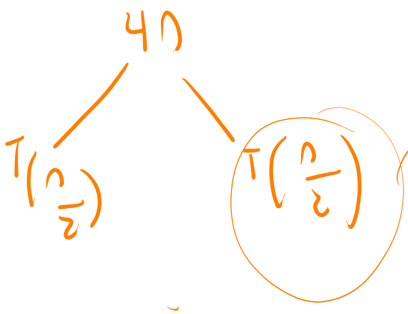
$$3n\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i + nT(1)$$

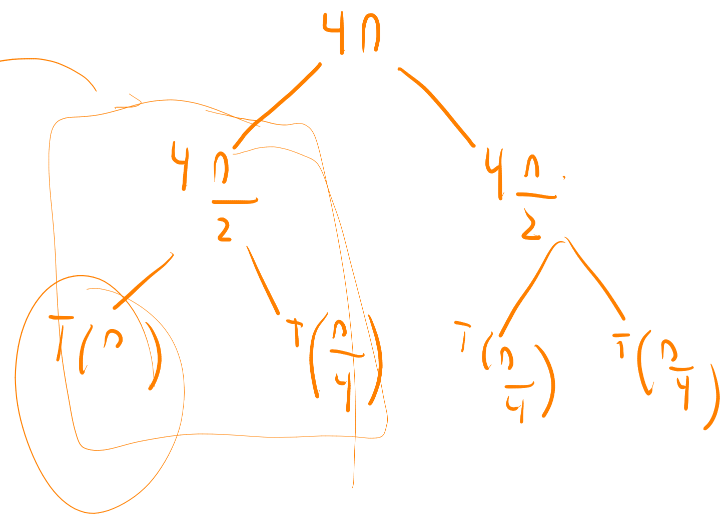
$$3n\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2(n)} - 1}{3/2 - 1}\right) + n = 3n\left(\frac{n^{\log_2\left(\frac{3}{2}\right)} - 1}{3/2 - 1}\right) + n$$

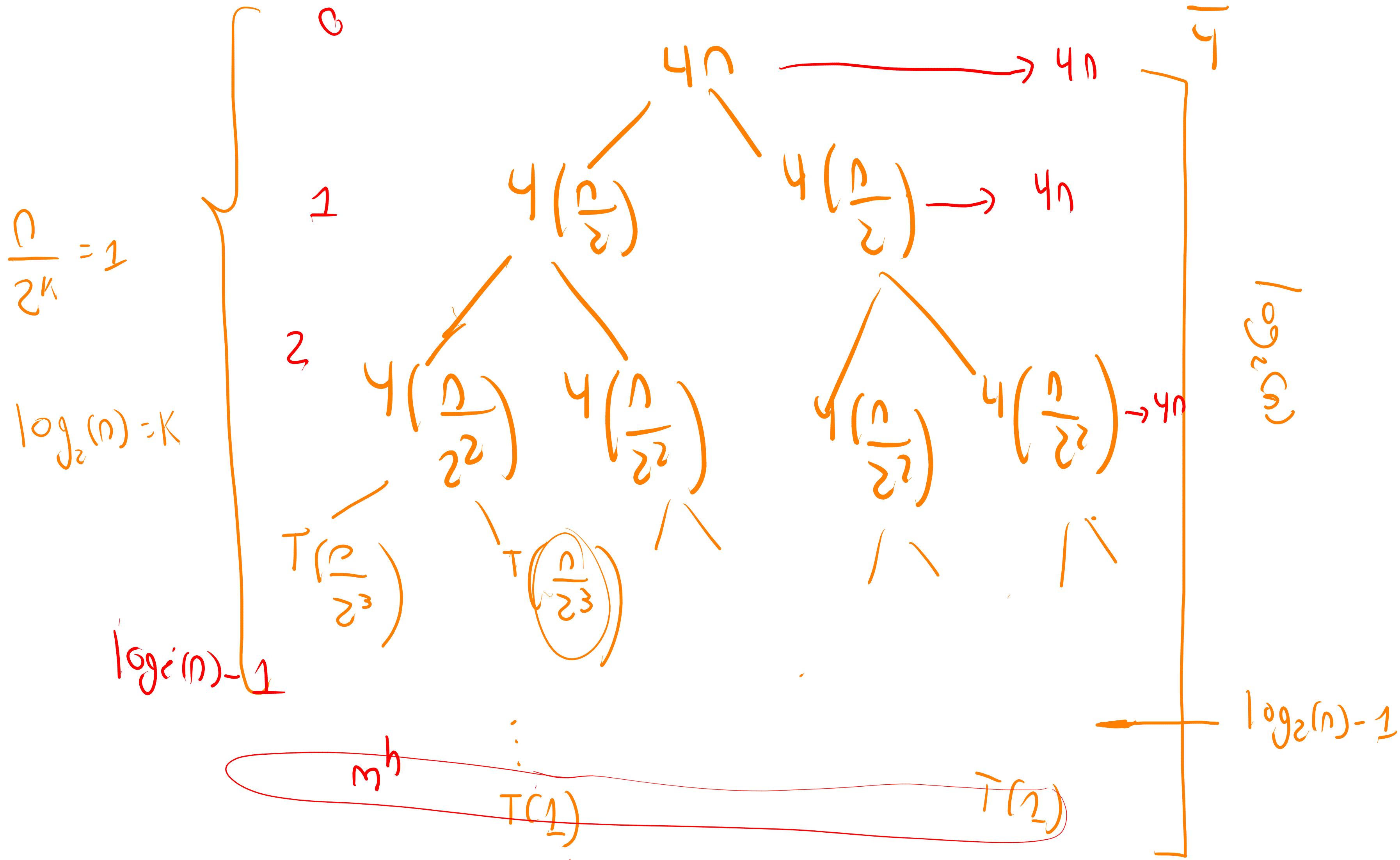
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 4n$$

$$T(1) = \Theta(1) = 1$$

Método de árbol







$$T(n) = (\log_2(n))4n + 2^{\log_2(n)}T(1)$$

$$T(n) = (\log_2(n))4n + nT(1)$$

Recurrencias

Resuelva la recurrencia $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$

Indique una cota superior y una inferior

Recurrencias

Método maestro

Permite resolver recurrencias de la forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \text{ donde } a \geq 1,\ b > 1$$

Recurrencias

Dado T(n) = aT(n/b) + f(n), donde a≥1, b>1, se puede acotar asintóticamente como sigue:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$

2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$

Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon > 0$

3. $T(n) = \Theta(f(n))$

Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ si a*f(n/b) ≤c*f(n)

para algun c<1

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$a = 9$ $b = 3$ $F(n) = n$

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = n$$

$n^{\log_b a}$

$n^{\log_3 9} = n^2$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $n = O(n^{2-\varepsilon})$?

$\varepsilon > 0$

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $n = O(n^{2-\varepsilon})$?

Si $\varepsilon = 1$ se cumple que $n = O(n)$, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Recurrencias

$T(n) = T(2n/3) + 1$

$a = 1$ $b = \frac{3}{2}$

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = 1$$

1)

$a\,T\left(\frac{n}{b}\right)$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $1 = O(n^{0-\varepsilon})$?

No existe $\varepsilon > 0$

Recurrencias

T(n) = T(2n/3) + 1

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \text{vs} \quad f(n) = 1$$

Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$?

$1 = \Theta(n^0)$

Es $1 = \Theta(1)$?

Si, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta(1 * \lg n) = \Theta(\lg n)$$

Recurrencias

$T(n) = \overset{a}{3}\, T(n/\underset{b}{4}) + \underset{F(n)}{n\lg n}$

n
$n\log(n)$
n^2

$$n^{\log_4 3} = n^{0.793} \quad \text{vs} \quad f(n) = n\lg n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$? $\quad$ $n\log(n)$ es $O(n^{0.793-\varepsilon})$

Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$? $\quad$ $n\log(n)$ es $\Theta(n^{0.793})$

Es $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$? $\quad$ $n\log(n)$ es $\Omega(n^{0.793+\varepsilon})$

Si, y además, $af(n/b) \le cf(n)$

$3(n/4)\lg(n/4) \le cn\lg n$

$3(n/4)\lg n - 3(n/4)*2 \le cn\lg n$

$\Theta(n\log(n))$

$(3/4)n\lg n \le cn\lg n \rightarrow c=3/4$ y se concluye que $T(n) = \Theta(n\lg n)$

$c < 1$

Recurrencias

$T(n) = 2T(n/2) + n\lg n$

Muestre que no se puede resolver por el método maestro

Recurrencias

$n^{\log_b a}$

Resuelva usando método del maestro

$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ $\quad \boxed{\varepsilon > 0}$

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

1) Si $f(n)$ es $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2) Si $f(n)$ es $\Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log(n))$

3) Si $f(n)$ es $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

y $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \times f(n)$ $\quad c < 1$

$$T(n) = 4\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$a = 4$

$b = 2$

$F(n) = n$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$$

1) n es $O(n^{2-\epsilon})$ $\epsilon = 1$

n es $O(n)$ Sí

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + F(n) \qquad \boxed{\varepsilon > 0}$$

1) Si $F(n)$ es $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2) Si $F(n)$ es $\Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log(n))$

3) Si $F(n)$ es $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(F(n))$

y $a F\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \times F(n)$ $c < 1$

$$T(n) = 4\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad n^{\log_b a} = n^2$$

1) n^2 es $O(n^{2-\epsilon})$ No

2) n^2 es $\Theta(n^2)$ Sí

$$T(n) = \Theta(n^2 \log(n))$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$$

$$n^{\log_2 4} = n^2$$

1) n^3 es $O(n^{2-\epsilon})$ X

2) n^3 es $\Theta(n^2)$ X

3) n^3 es $\Omega(n^{2+\epsilon})$

n^3 es $\Omega(n^3)$ Si

$$4\left(\frac{n}{2}\right)^3 \leq c \times n^3$$

$$\frac{\cancel{n^3}}{2} \leq c \times \cancel{n^3}$$

$$c \leq \frac{1}{2}$$

Si < 1

$$T(n) = \Theta(n^3)$$

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + F(n)$$

$$\boxed{\varepsilon > 0}$$

1) Si $F(n)$ es $O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \to T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2) Si $F(n)$ es $\Theta(n^{\log_b a}) \to T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log(n))$

3) Si $F(n)$ es $\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) \to T(n) = \Theta(F(n))$

y $a F\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \times F(n)$ $\quad c < 1$

Formulas solución método del maestro

Recuerde la forma $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(log(n) * n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ y existe un $c < 1$ tal que $af(\frac{n}{b}) <= cf(n)$ entonces $T(n) = \Theta(f(n))$.

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{9}\right) + 8n$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{9}\right) + 8n^3$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{9}\right) + 8n^2$

Formulas solución método del maestro

Recuerde la forma $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(log(n) * n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ y existe un $c < 1$ tal que $af(\frac{n}{b}) <= cf(n)$ entonces $T(n) = \Theta(f(n))$.

$T(n) = 3T(\frac{n}{9}) + 8n$ $\quad a = 3$ $\quad b = 9$ $\quad n^{\log_b a} = n^{\log_9 3} = n^{0.5} = \sqrt{n}$

1) $8n$ es $O(n^{0.5-\epsilon})$ ✗

2) $8n$ es $\Theta(n^{0.5})$ ✗

3) $8n$ es $\Omega(n^{0.5+\epsilon})$ $\quad \epsilon = 0.5$ ✓

$3 \times \cancel{8} \frac{\cancel{n}}{9} \leq c\cancel{8}\cancel{n}$

$c \geq \frac{3}{9}$ ✓

Formulas solución método del maestro

Recuerde la forma $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(log(n) * n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ y existe un $c < 1$ tal que $af(\frac{n}{b}) <= cf(n)$ entonces $T(n) = \Theta(f(n))$.

$\Theta(n^2)$

$T(n) = 3T(\frac{n}{9}) + 8n^2$

$n^{0.5}$

1) $8n^2$ es $O(n^{0.5-\epsilon})$ X

2) $8n^2$ es $\Theta(n^{0.5})$ X

3) $8n^2$ es $\Omega(n^{0.5+\epsilon})$ $\epsilon = 0.5$ ✓

$3 \times 8(\frac{n}{9})^2 \leq c \times 8n^2$

$c \geq \frac{3}{81}$

Formulas solución método del maestro

Recuerde la forma $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(log(n) * n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ y existe un $c < 1$ tal que $af(\frac{n}{b}) <= cf(n)$ entonces $T(n) = \Theta(f(n))$.

$T(n) = 3T(\frac{n}{9}) + 8n^3$

$n^{0.5}$

$T(n) = \Theta(n^3)$

3) $8n^3$ es $\Omega(n^{0.5+\epsilon})$ $\epsilon = 0.5$ ✓

$3 \times \cancel{8} \times (\frac{n}{9})^3 \leq c \times n^3 \cancel{8}$

$c \geq \frac{3}{243}$

Recurrencias

Método de sustitución

Suponer la forma de la solución y probar por inducción matemática

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Suponer que la solución es de la forma $T(n)=O(n\lg n)$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Se supone que se cumple para $n/2$ y se prueba para n

Hipotesis inductiva: $T(n/2) \leq cn/2\lg(n/2)$

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n,\ T(1)=1$

Probar que $T(n) \le cn\lg n$.

Hipótesis inductiva: $T(n/2) \le cn/2\lg(n/2)$

Paso inductivo:

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le 2(cn/2\lg(n/2)) + n \\
&\le cn\lg(n/2) + n \\
&= cn\lg(n) - cn + n, \text{ para } c \ge 1, \text{ haga } c=1 \\
&\le cn\lg n
\end{aligned}
$$

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Paso base: si $c=1$, probar que $T(1)=1$ se cumple

$T(1) \leq 1*1\lg 1$?

$1 \leq 0$?

No, se debe escoger otro valor para c

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn \lg n$.

Paso base: si $c=2$, probar que $T(1)=1$ se cumple

$T(1) \leq 2*1 \lg 1$?

$1 \leq 0$?

No, se puede variar k.

Para esto, se calcula $T(2)$ y se toma como valor inicial

Recurrencias

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

$T(2)=2T(0)+2=4$

Paso base: si $c=1$, probar que $T(2)=4$ se cumple

$T(2) \leq 1*2\lg 2$?

$4 \leq 2$?

No, se puede variar c.

Recurrencias

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

$T(2)=2T(0)+2=4$

Paso base: si $c=3$, probar que $T(2)=4$ se cumple

$T(2) \leq 3*2\lg 2$?

$4 \leq 6$?

Si, se termina la demostración

Recurrencias

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1$, $T(1)=O(1)$, $T(2) = O(1)$

Suponer que la solución es de la forma $T(n)=O(2^n)$

Probar que $T(n)\leq c2^n$.

Se supone que se cumple para $n-1$ y se $n-2$ prueba para n

Hipotesis inductiva: $T(n-1) \leq c2^{(n-1)}$ y $T(n-2) \leq c2^{(n-2)}$

Recurrencias

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1,\ T(1)=O(1),\ T(2) = O(1)$

Ahora se debe probar que: $T(n) \leq c2^n$

$$T(1) \leq c2^1 \rightarrow 1 \leq 2*c$$

$$T(2) \leq c2^2 \rightarrow 1 \leq 4*c$$

$$T(3) \leq c2^3 \rightarrow 2 \leq 8*c$$

$$T(4) \leq c2^4 \rightarrow 3 \leq 16*c$$

$$T(5) \leq c2^5 \rightarrow 5 \leq 32*c$$

$$T(6) \leq c2^6 \rightarrow 8 \leq 64*c$$

$$T(7) \leq c2^7 \rightarrow 13 \leq 128*c$$

$$T(8) \leq c2^8 \rightarrow 21 \leq 256*c$$

Con $c = 1$, se cumple.

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 4

Gracias

Próximo tema:

Divide y vencerás