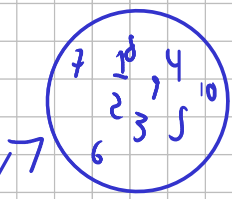
El problema *Vertex Cover*($\mathcal{VC}$)

- **Entrada:** Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y una constante $C \leq |V|$.
- **Salida:** 1 si existe un subconjunto V' de V tal que $|V'| \leq C$ y

$$\forall e = (u, v) \in E, (u \in V' \vee v \in V').$$



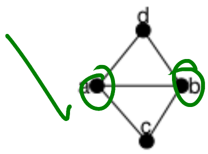
{1,7}{7,2,3} . . .

El problema *Set Cover* ($\mathcal{SC}$)

- **Entrada:** Un conjunto universal U, un conjunto de subconjuntos de U, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ (cada $S_i \subseteq U$) y una constante $\boxed{K \leq m.}$
- **Salida:** 1 si existe $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ tal que $|\mathcal{T}| \leq K$ y

$$\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = U.$$

1. **¿Entendimos $\mathcal{VC}$? [10 pts.]**
   Considere el siguiente grafo G_1:



   a) **[5 pts.]** ¿Cual es la salida de $\mathcal{VC}$ para la entrada $G_1, C_1 = 2$? Justifique cortamente su respuesta.

   Si selecciono a y b obtengo un cover de aristas

   b) **[5 pts.]** ¿Cual es la salida de $\mathcal{VC}$ para la entrada $G_1, C_1 = 1$? Justifique cortamente su respuesta.

   No puedo obtener el obtener el cover de aristas únicamente seleccionando un vértices

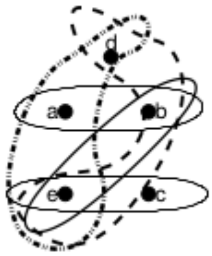
2. **Entendamos $\mathcal{SC}$ [20 pts.]** Una manera práctica de visualizar la entrada a $\mathcal{SC}$ consiste en pintar los elementos de U como puntos y los elementos de $\mathcal{S}$

como áreas que encierran cada uno de los elementos de U que ellos contienen.

Por ejemplo, si una entrada a $\mathcal{SC}$ es:

- $U_1 = \{a, b, c, d, e\}$
- $\mathcal{S}_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ donde
  - $S_1 = \{a, b\}$
  - $S_2 = \{a, d, e\}$
  - $S_3 = \{b, d, e\}$
  - $S_4 = \{c, e\}$
  - $S_5 = \{b, e\}$

Gráficamente se puede ver:



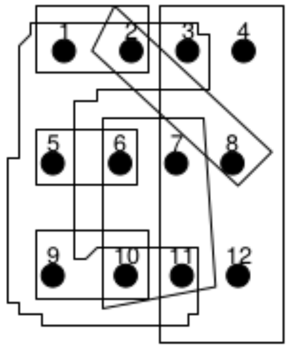
Y la entrada:

- $U_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $\mathcal{S}_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$ donde
  - $S_1 = \{1, 2, 3, 5, 9, 10, 11\}$
  - $S_2 = \{1, 2\}$
  - $S_3 = \{5, 6\}$
  - $S_4 = \{9, 10\}$
  - $S_5 = \{2, 8\}$
  - $S_6 = \{3, 4, 7, 8, 11, 12\}$
  - $S_7 = \{6, 7, 10, 11\}$

S_1, S_3, S_6

S_1, S_6, S_7

Gráficamente se puede ver:



a) **[3 pts.]** ¿Cual es la salida de $\mathcal{SC}$ para la entrada $U_1, \mathcal{S}_1, K_1 = 2$? Justifique cortamente su respuesta.

No, c o b van quedar por fuera

b) **[3 pts.]** ¿Cual es la salida de $\mathcal{SC}$ para la entrada $U_1, \mathcal{S}_1, K_1 = 4$? Justifique cortamente su respuesta.

Min 3.

c) **[3 pts.]** ¿Cual es la salida de $\mathcal{SC}$ para la entrada $U_2, \mathcal{S}_2, K_2 = 2$? Justifique cortamente su respuesta.

No

d) **[3 pts.]** ¿Cual es la salida de $\mathcal{SC}$ para la entrada $U_2, \mathcal{S}_2, K_2 = 3$? Justifique cortamente su respuesta.

Si, $|S_1, S_3, S_6|$

e) **[4 pts.]** Describa una instancia U_3, $\mathcal{S}_3$, K_3, no trivial (todo elemento debe pertenecer al menos a algún subconjunto en $\mathcal{S}_3$), de $\mathcal{SC}$, con $|U_3| = 7$ y $|\mathcal{S}_3| \geq 3$ para la que la respuesta sea positiva.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$K = 3$ $\{ \{1, 3, 5\} \{2, 4, 6\}$
$\{1, 2, 7\} \{2, 6, 7\} \}$

f) **[4 pts.]** Para el mismo $U3$ y $\mathcal{S}_3$ del ejercicio anterior, defina un K_3 tal que la respuesta para esa entrada sea negativa. Justifique cortamente su respuesta.

$K = 2$

3. **[70 pts.]** Demuestre que $\mathcal{SC}$ es NP-completo, suponiendo que $\mathcal{VC}$ lo es. Es decir:

   a) **[10 pts.]** Demuestre que $\mathcal{SC}$ es NP

1) m subconjuntos

$\{S_1, S_2, \dots S_m\}$

$\{S_1\}$ $\{S_1 S_1\}$ $\to k$

$O(2^m)$

2) Verificar en P

$\bigcup \{S_i, S_i, \dots S_k\} = U$

$Vc \leq_p Sc$

$Vc \longrightarrow Sc$

NI°C

1) **[10 pts.]** Escoja entre las cuatro reducciones siguientes la que utilizará para su demostración.

RedA $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ ← y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ donde $S_j = \{i_1, i_2\}$ si $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ para $j \in [1..m]$. También defina $K = C$.

RedB $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ donde $S_i = \{j : e_j$ es adyacente a $v_i\}$ para $i \in [1..n]$. También defina $K = C$.

RedC $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ donde $S_j = \{i_1, i_2\}$ si $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ para $j \in [1..m]$. También defina $K = n - C$.

RedD $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ donde $S_i = \{j : e_j$ es adyacente a $v_i\}$ para $i \in [1..n]$. También defina $K = n - C$.

Escojo ________________

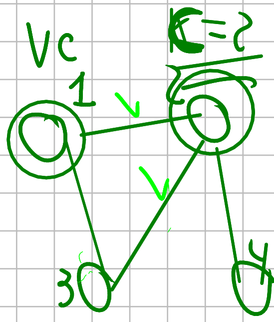
1) $VC \leq_p SC$

2) Polinomial ←

3) $I_N VC \to I_N SC$ (negativo)

4) $I_P VC \to I_P SC$ (positivo)

RedA $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \dots, n\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ donde $S_j = \{i_1, i_2\}$ si $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ para $j \in [1..m]$. También defina $K = C$.



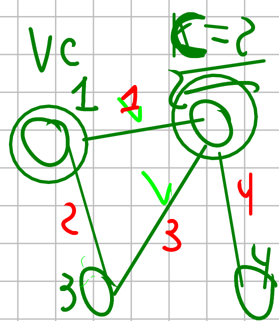
$n = 4$ $m = 4$

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ $S = \{\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\},\{2,4\}\}$

$K = C$

Red A: En VC seleccionamos Vertices y en el reducción estamos seleccionado aristas

RedB $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \dots, m\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ donde $S_i = \{j : e_j$ es adyacente a $v_i\}$ para $i \in [1..n]$. También defina $K = C$.



Cubren los vértices

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ← arista

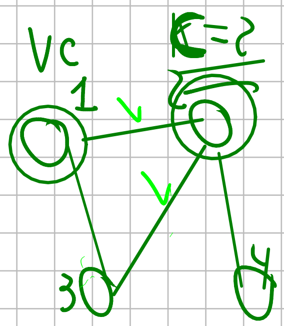
$S = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3\},\{4\}\}$

$K = C$

Mapeas las aristas y los subconjuntos se generan a partir de lo que cubren los vértices.

También defina $K = C$.

RedC $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ donde $S_j = \{i_1, i_2\}$ si $e_j = (v_{i_1}, v_{i_2})$ para $j \in [1..m]$. También defina $K = n - C$.

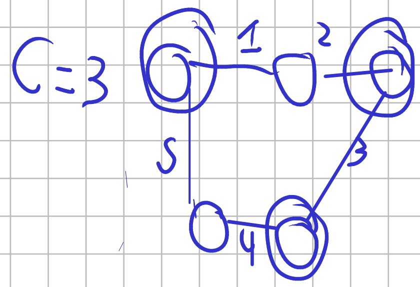


$K = 2$

⊢ REDC ⟹ REDA

También defina $K = n - C$.

RedD $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ donde $S_i = \{j : e_j$ es adyacente a $v_i\}$ para $i \in [1..n]$. También defina $K = n - C$.



$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S = \{\{1,5\}, \{2,3\}, \{4,3\}, \{5,4\}, \{1,2\}\}$

$K = 5 - 3 = 2$

Demuestre que se hace en tiempo polinomial

REDB $\quad G(V, E)$ $\quad$ n vertices, m aristas

1) $|U| = m$

2) $|S| = n$ $\qquad O(m) + O(n)$ ✓ Lineal

Supongo que el grado de los vertices es h

$h \times n$

constantes

Polinomial

También defina $K = C$.

RedB $\mathcal{VC} \preceq \mathcal{SC}$. Dado $G = (V, E)$ y C, sea $n = |V|$ y $m = |E|$. Defina $U = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ donde $S_i = \{j : e_j \text{ es adyacente a } v_i\}$ para $i \in [1..n]$. También defina $K = C$.