Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

Contenido

Recurrencias lineales no homogéneas

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + \boxed{F(n)}$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$

Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

$\{T(n) = A r_1^n + B r_2^n + \cdots + \cdots$

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

$r = 2$

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

$a_n = A$

$A = 2A + 1$

$\boxed{A = -1}$

Universidad del Valle

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**
La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Forma de las soluciones particulares

$n+1$
$n+3$
$n^2+2n+\dots$

	$F(n)$	$a_n^{(p)}$
	C_1	A
Pol 1	n	$A_1 n + A_0$
Pol 2	n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
Pol t	$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
	$r^n, r \in R$	$A r^n$
x	$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
	$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
	$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
x	$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
	$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

Universidad del Valle

$T(n) = 4T(n-1) - 4T(n-2) + n^2+2$ — pol ordm 2

$T(0) = 8$

$T(1) = 12$

$T(n) = T_n^h + T_n^p$

$T^h(n) = 4T(n-1) - 4T(n-2)$

$r^2 - 4r + 4$

$r_1 = 2$

$r_2 = 2$

$$\boxed{T^h(n) = A\,2^n + B\,n\,2^n}$$

$T^p(n) = Cn^2 + Dn + E$

$n^2 - 2n + 1$

$(n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$

$Cn^2 + \cancel{Dn} + \cancel{E} = 4C(\cancel{n^2} - 2n + \cancel{1}) + 4D(\cancel{n} - 1) + 4E$

$-4C(\cancel{n^2} - \cancel{4n} + \cancel{4}) - 4D(\cancel{n} - 2) - 4E$

$n^2 + 2$

$n2^n$

2^n

n^2: $C = 4C - 4C + 1 \quad \boxed{C = 1}$

n: $D = -8C + \cancel{4D} + 16C - \cancel{4D} \quad D = 8C \quad \boxed{D = 8}$

cte: $E = 4C - 4D + \cancel{4E} - 16C + 8D - \cancel{4E} + 2$

$E = -12C + 4D + 2$

$E = -12 + 32 + 2 \qquad E = 22$

$T(n) = A(2)^n + B\,n\,2^n + n^2 + 8n + 22$

$T(0) = 8$

$T(1) = 12$

n	
0	$8 = A + 22 \qquad A = -14$
1	$12 = 2A + 2B + 1 + 8 + 22$
	$12 = -28 + 2B + 31$

$40 = 2B + 31 \rightarrow B = \frac{9}{2} \quad 4.5 = B$

$$\boxed{T(n) = -14 \times 2^n + 4.5\,n\,2^n + n^2 + 8n + 22}$$

$$\boxed{n^2 + 2^n = An^2 + Bn + D + E\,2^n}$$

raiz

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

$T(n) = -2T(n-1) + 35T(n-2) + n^2+3$

$T(0)=4$
$T(1)=15$

$r^2+2r-35=0$ E.C

$n^d = c_1 n^d + c_2 n^{d-1} + \dots + c_{d+1}$

pol n grado

$n^2 = c_1 n^2 + c_2 n + c_3 = T(n)$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+4\times 35}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4(36)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\times 6}{2}$$

$$\frac{-2\pm 12}{2} = -1 \pm 6 \quad \begin{cases} -7 \\ 5 \end{cases}$$

$$\boxed{T^h_{(n)} = A(-7)^n + B\,5^n}$$

$$Cn^2 + Dn^2 + E = T^p_{(n)}$$

$$Cn^2 + Dn + E = -2(C(n-1)^2 + D(n-1) + E) + 35(C(n-2)^2 + D(n-2) + E)$$
$$+n^2+3$$

$n^2 - 4n + 4$

$$\cancel{Cn^2} + \cancel{Dn} + \cancel{E} = -2C(\cancel{n^2} - 2n + \cancel{1}) - 2D(\cancel{n} - 1) - 2E$$
$$+35\cancel{C}n^2 - 140Cn + 140C + 35Dn - 70D + 35E$$
$$+n^2+3$$

n^2 | $C = -2C + 35C + \boxed{1}$

n | $D = 4C - 2D - 140C + 35D$

cte | $E = -2C + 2D - 2E + 140C - 70D + 35E + 3$

array([-0.03125 , -0.1328125 , -0.24121094])

$T(n) = A(-7)^n + B5^n + -0.03125n^2 - 0.1328125n - 0.24121094$

n
0 | $4 = A + B - 0.24121094$
1 | $15 = -7A + 5B - 0.03125 - 0.1328125 - 0.24121094$

[0.48339844 3.7578125]

$T(3) = 0.0000001$

$T(4) = (-7)^4 \times 0.000001 + (5)^4 \times 0.000001$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma
$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$ Pol m gr

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \boxed{\beta 2^n}$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = \boxed{nC2^n} + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$

   pol grado 1
4. Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B = {} & 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ & -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$

$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

$r_1 = 2$

$r_2 = 2$

$F(n) = 2^n + n^2$ pol grado 2

$$\boxed{T^{(h)}_{(n)} = A2^n + Bn2^n}$$ Sol homogénea

$$T^{p}_{(n)} = \underbrace{Cn^2 + Dn + E}_{\text{pol grado } 2} + Fn^2 2^n$$

$n^m 2^n$

$\boxed{\text{mult}_p \ 2}$

$r = 1^n$ contenido polinomio

$F(n) = n + 2$

$T^{(h)}(n) = AS^n + \boxed{B} 1^n$

$T^{(p)} = (Cn + \boxed{D})n = Cn^2 + Dn$

S^n

n

cte

3 ecuaciones

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 5^n + 3$

$1^n = 1$ n discreto

$r^2 - 2r + 1 = 0 \longrightarrow r_1 = 1, \; r_2 = 1$

$\boxed{T^h(n) = A + Bn}$

$T(0) = 4$

$T(1) = 8$

$T_p(n) = C5^n + Dn^2$

$n^2 - 2n + 1$

$n^2 - 4n + 4$

$$C5^n + Dn^2 = \frac{2C5^n}{5} + 2D(n-1)^2 - \frac{C5^n}{25} - D(n-2)^2 + 5^n + 3$$

$$\cancel{C5^n} + \cancel{Dn^2} = \frac{2}{5}\cancel{C5^n} + \cancel{2Dn^2} - \cancel{4Dn} + 2D - \frac{1}{25}\cancel{C5^n} - \cancel{Dn^2} + \cancel{4Dn} - 4D + \cancel{5^n} + 3$$

$25 - 9 = 16$

$5^n \;\Big|\; \frac{25C}{25} = \frac{10}{25}C - \frac{1}{25}C + 1$ $\qquad \frac{16}{25}C = 1$ $\qquad \boxed{C = \frac{25}{16}}$

$n^2 \;\Big|\; D = 2D - D$ $\qquad \boxed{D = D}$ ✓

$n \;\Big|\; 0 = -4D + 4D$ $\qquad \boxed{0 = 0}$ ✓

cte $\Big|\; 0 = 2D - 4D + 3$ $\qquad \boxed{D = 3/2}$

$A = 2.4375$

$B = -3.75$

$= A + Bn + \frac{25}{16}5^n + \frac{3}{2}n^2.$

$$\boxed{\begin{aligned} 4 &= A + \frac{25}{16} \\ 8 &= A + B + \frac{25}{16}5 + \frac{3}{2} \end{aligned}}$$

$T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2) + n + 3^n + 5^n$

$r^2 - 4r + 3 = 0$ $r=1$ $r=3$

$T^h(n) = A + B(3)^n$

$T(0) = 10$

$T(1) = 20$

$T^p(n) = n(Cn + D) + En3^n + F5^n$

$\cancel{Cn^2} + \cancel{Dn} + \cancel{En}3^n + F5^n = 4(\cancel{Cn^2} - \cancel{2Cn} + \cancel{C}) + 4D(\cancel{n} - \cancel{1}) + 4E(\cancel{n}-1)\frac{3^n}{3} + \frac{4F5^n}{5}$

$-3(\cancel{Cn^2} - \cancel{4Cn} + \cancel{4C}) - 3D(\cancel{n} - \cancel{1}) - 3E(\cancel{n}-2)\frac{3^n}{9} - \frac{3F5^n}{25}$

$+ \cancel{n} + \cancel{3^n} + \cancel{5^n}$

$2S - 17 = 8$

5^n	$F = \frac{4}{5}F - \frac{3}{25}F + 1$ $\quad \frac{8}{25}F = 1$ $\quad \boxed{F = \frac{25}{8}}$
$n3^n$	$E = \frac{4}{3}E - \frac{3}{9}E$ $\quad E = \frac{9}{9}E$ $\quad \boxed{E = E}$ ✓
3^n	$0 = -\frac{4}{3}E + \frac{6}{9}E + 1$ $\quad 0 = -\frac{6}{9}E + 1$ $\quad \boxed{E = \frac{9}{6}}$
n^2	$C = 4C - 3C$ $\quad \boxed{C = C}$ ✓
n	$D = -8C + 4D + 12C - 3D + 1$ $\quad \boxed{1 = -3C - D}$
cte	$0 = 4C - 4D - 12C + 3D$ $\quad * \boxed{0 = -8C + D}$

$D = 8C$ $\quad \boxed{D = -\frac{8}{11}}$ $\quad \boxed{1 = -11C}$ $\quad \boxed{C = -\frac{1}{11}}$

$T(n) = A + B3^n - \frac{1}{11}n^2 - \frac{8}{11}n + \frac{9}{6}n3^n + \frac{25}{8}5^n$

$$\boxed{\begin{aligned} T(0) &= 10 = A + B + \frac{25}{8} \\ T(1) &= 20 = A + 3B - \frac{1}{11} - \frac{8}{11} + \frac{27}{6} + \frac{125}{8} \end{aligned}}$$

Contenido

Estrategias de solución de recurrencias

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = \underline{aT(n/b)} + g(n)$$

$T(n) = 2T(n/2)$

Estrategias de solución de recurrencias

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución FADA
- Por iteración FADA
- Funciones generatrices X

Cambio de variable

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 \\ \boxed{T(2^k) = t_k} \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = \underline{2t_{k-1} + 2}$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $\boxed{t_k = \alpha 2^k - 2}$ $n = 2^k$ $k = \log_2(n)$
4. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

$2^{\log_2(n)} = n^{\log_2(2)} = n$

Cambio de variable

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

   2^{k-1}

$$
\begin{aligned}
T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\
T(2^k) &= t_k
\end{aligned}
$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución:
   $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

$k = \log_2(n) \qquad \alpha 5^{\log_2(n)} = \alpha n^{\log_2(5)}$

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$\boxed{T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4}$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$T(3^k) = 9T(3^k/3) + 3^k$$
$$T(3^k) = t_k$$

$9^k = (3^k)^2$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1]$, $A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ **es** $O(n \log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned} \log n &= \log 4^k \\ &= k \log_4 4 \\ \log n &= k \end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak + B)4^k$

$$\begin{aligned} (Ak + B)4^k &= 3[(A(k-1) + B)4^{k-1}] + 4^k k \\ (Ak + B)4^k &= 4^k(3/4[(A(k-1) + B)] + k) \\ Ak + B &= 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n\log n)$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = (17)3^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que:
$T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

$T(\frac{n}{6}\frac{2}{3})$

6^k

$$T(n) = 5T(n/2) + n^2 \qquad T(1) = 10$$

$$n = 2^k$$

$$T(2^k) = 5T(2^{k-1}) + (2^k)^2$$

$$\boxed{T(k) = 5T(k-1) + 4^k}$$

$$r = 5$$

$$T_k^{(h)} = A5^k$$

$$T^{(p)} = B4^k$$

$$B4^k = \frac{5}{4}B4^k + 4^k \qquad \frac{4}{4}B = \frac{5}{4}B + 1 \qquad -\frac{1}{4}B = 1$$

$$B = -4$$

RP

$$T_k = A5^k - 4 \times 4^k \qquad n = 2^k \qquad k = \log_2(n)$$

$$T(n) = A5^{\log_2(n)} - 4 \times 4^{\log_2(n)}$$

$$T(n) = An^{\log_2(5)} - 4n^{\log_2(4)} = \boxed{An^{\log_2(5)} - 4n^2}$$

$$10 = A1^{\log_2(5)} - 4 \qquad 10 = A - 4 \qquad A = 14$$

$$\boxed{T(n) = 14n^{\log_2(5)} - 4n^2}$$

$$T(n) = 3T(n/3) + 4T(n/9) + 2$$

$T(1) = 8$

$T(3) = 18$

$$3 \to 9$$

$$b \to b^2 \to b^3 \to b^4$$

$$T(3^k) = 3T(3^{k-1}) + 4T(3^{k-2}) + 2$$

$$\boxed{T(k) = 3T(k-1) + 4T(k-2) + 2} \to RR$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \qquad \boxed{T_k^h = A(-1)^k + B(4)^k} \quad RR$$

$$T_k^p = C$$

$$C = 3C + 4C + 2$$

$$-6C = 2 \qquad \boxed{C = -2/6 = -1/3}$$

$$T_k = A(-1)^k + B(4)^k - \frac{1}{3} \qquad n = 3^k$$

$$k = \log_3(n)$$

$$T(n) = A(-1)^{\log_3(n)} + B\,4^{\log_3(n)} - \frac{1}{3}$$

Fallo

$$8 = A + B - 1/3$$

$$18 = -A + 4B - 1/3$$

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

$T(n) = 8T(n/4) + 3n^2$

$a=8$ $b=4$ $c=3$ $d=2$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

8 4^2

$8 < 4^2$

$O(n^2)$

Universidad del Valle

Método Maestro

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$

  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  n^0
  $a = b^d$ por tanto $1 = (3/2)^0$
  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$

  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$

- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $O(n^{\log_2 5})$

  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Universidad del Valle

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{array} \right\}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

Método Maestro

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d}) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

$T(n) = aT(n/b) + cn^d$

$5T(\frac{n}{2}) + n^2$.

$a = 5 \quad b = 2 \quad c = 1 \quad d = 2$

1) $5 < 2^2$ ✗

2) $5 = 2^2$ ✗

3) $5 > 2^2$ ✓

$\underline{O(n^{\log_2 5})}$

$n^{\log_2 5} > \cancel{n^2}$

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$

$T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n$ — Cambio variable / Maestro

$A6^k \approx A6^{\log_3(n)}$

$1 - 2$

$An^{\log_3(6)}$

$k = \log_3(n)$ $\quad n = 3^k$

$T(3^k) = 6T\left(\frac{3^k}{3}\right) + 3 \times 3^k$

$$\boxed{T_k = 6T_{k-1} + 3 \times 3^k}$$

$T_k^h = A6^k$

$T_k^p = B3^k$

$B3^k = \frac{6B3^k}{3} + 3 \times 3^k$

$B = 2B + 3$

$-B = 3$

$B = -3$

$T_k = A6^k - 3 \times 3^k$

$T(n) = A6^{\log_3(n)} - 3 \times 3^{\log_3(n)}$

$T(n) = An^{\log_3(6)} - 3 \times n^{\log_3(3)}$

$T(n) = An^{\log_3(6)} - 3n$

$1 \;\; + \;\; 2$

$n \; - \; n^2$

$$\boxed{O(n^{\log_3(6)})}$$

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

$T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + 3n$ ✓

$a = 6 \quad b = 3 \quad c = 3 \quad d = 1$

$6 < 3^1$ ✗

$6 = 3^1$ ✗

$6 > 3^1$ ✓

$$\boxed{O(n^{\log_3 6})}$$

$1 > \; \; < 2$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.