

# Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

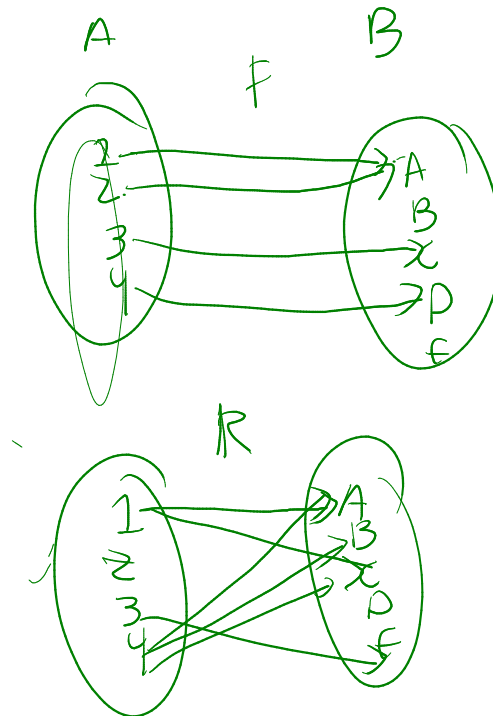
`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- \* Definición de relación
- \* Propiedades de relaciones
- \* Representaciones de una relación

# Relaciones de equivalencia

## Relación binaria

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos, una relación de  $A$  en  $B$  es un subconjunto de  $A \times B$



# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y  $B=\{-1,-2,-3\}$ , se presentan a continuación algunas relaciones:

- $R_1=\{(2,-1), (3,-2), (1,-1)\}$
- $R_2=\{(1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$
- $R_3=\{(1,-2), (1,-3), (2,-2), (2,-3), (3,-2), (3,-3)\}$
- $R_4=\{(3,-1)\}$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y  $B=\{-1,-2,-3\}$ , se presentan a continuación algunas relaciones:

- $R_1=\{(2,-1), (3,-2), (1,-1)\}$
- $R_2=\{(1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$
- $R_3=\{(1,-2), (1,-3), (2,-2), (2,-3), (3,-2), (3,-3)\}$
- $R_4=\{(3,-1)\}$

Cada relación es un subconjunto de  $A \times B = \{(1,-1), (1,-2), (1,-3), (2,-1), (2,-2), (2,-3), (3,-1), (3,-2), (3,-3), (4,-1), (4,-2), (4,-3)\}$

# Relaciones de equivalencia

---

## Relación en $A$

Una relación definida en un conjunto  $A$  es una relación de  $A$  en  $A$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4,5\}$  se presentan algunas relaciones de  $A$  en  $A$ :

- $R_1=\{(4,2), (1,3), (1,5)\}$
- $R_2=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$
- $R_3=\{(1,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $R_4=\{(2,1), (3,2), (4,3)\}$

**$A \times A =$**   $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5),$   
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),$   
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5),$   
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5),$   
 $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

# Relaciones de equivalencia

Sea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  <sup>Próximo</sup> muestre las siguientes relaciones:

•  $R_1 = \{(a, b) | a < b\}$   $\{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4) (3, 4)\}$

•  $R_2 = \{(a, b) | a = b\}$   $\{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4)\}$

•  $R_3 = \{(a, b) | a = b + 1\}$   $\{(2, 1), (3, 2) (4, 3)\}$

•  $R_4 = \{(a, b) | a \text{ divide } b\}$   $\{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4)\}$

•  $R_5 = \{(a, b) | a + b \leq 3\}$   $\{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 4)\}$

$\{(1, 1) (1, 2) (2, 1)\}$



# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(a,b) | a < b\}$
- $R_2 = \{(a,b) | a = b\}$
- $R_3 = \{(a,b) | a = b + 1\}$
- $R_4 = \{(a,b) | a \text{ divide } b\}$
- $R_5 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),$   
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4),$   
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4),$   
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$$\begin{aligned} A \times A = & \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$  muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(a, b) \mid a > 0 \wedge b < 0\}$
- $R_2 = \{(a, b) \mid a = -b\}$
- $R_3 = \{(a, b) \mid a + b < 2\}$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$  muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(1, -2), (1, -1), (2, -2), (2, -1), (3, -2), (3, -1), (4, -2), (4, -1)\}$
- $R_2 = \{(-2, 2), (2, -2), (-1, 1), (1, -1)\}$
- $R_3 = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 1), (-1, 2), (1, -2), (1, -1), (2, -2), (2, -1), (3, -2)\}$

# Relaciones de equivalencia

---

## Propiedades de las relaciones

- Reflexiva
- Simétrica
- Antisimétrica
- Transitiva

# Relaciones de equivalencia

---

## Reflexiva

- Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  se llama reflexiva si  $(a,a) \in R$  para cada elemento  $a \in A$

# Relaciones de equivalencia

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

•  $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,3), (2,4), (4,4)\}$  ✓

•  $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  No

•  $R_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$  No

•  $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$  SI

•  $R_5 = \{(1,2)\}$  No

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,3), (2,4), (4,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
- $R_5 = \{(1,2)\}$
- **$R_1$  y  $R_4$  son reflexivas**



# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3\}$  indique si las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,2)\}$  No
- $R_2 = \{(1,3), (3,1), (2,3), (2,1)\}$  No
- $R_3 = \{(\underline{1,1}), (1,3), (\underline{2,2}), (\underline{2,1}), (\underline{3,3})\}$  Si

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3\}$  indique si las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,2)\}$  **no**, falta  $(3,3)$
- $R_2 = \{(1,3), (3,1), (2,3), (2,1)\}$  **no**, faltan  $(1,1), (2,2), (3,3)$
- $R_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$  **si**

# Relaciones de equivalencia

- Sea  $A = \mathbb{Z}^+$  indique si las relaciones son reflexivas:

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\} \quad (9 = 6) \quad \underline{a \mid b} \quad 0 \mid 0 \times \quad \underline{No}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a \leq b\} \quad \underline{a \leq b} \checkmark \quad \underline{SI}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a > b\} \quad a > b \quad \underline{NO}$$

$(1, 1)$   $\underline{\underline{=}}$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sea  $A = \mathbb{Z}^+$  indique si las relaciones son reflexivas:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$  **si**, ya que  $a \mid a$   $0 \mid 0$

$R_2 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$  **si**, ya que  $a \leq a$

$R_3 = \{(a, b) \mid a > b\}$  **no**, ya que no se cumple  $a > a$

# Relaciones de equivalencia

---

## Simétrica

- Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  se llama simétrica si cuando  $(a,b) \in R$  entonces  $(b,a)$  también

# Relaciones de equivalencia

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,1), (2,4), (4,1), (4,2)\}$  Si
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  Si
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,3), (4,3)\}$  No
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3), (2,1)\}$  No
- $R_5 = \{(1,2)\}$  No

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,1), (2,4), (4,1), (4,2)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,3), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3), (2,1)\}$
- $R_5 = \{(1,2)\}$
- **$R_1$  y  $R_2$  son simétricas**

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3\}$  indique si las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$  *Si*
- $R_2 = \{(1,3), (1,2), (3,1), (2,3), (3,2)\}$  *No*
- $R_3 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,1)\}$  *No*



# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3\}$  indique si las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$  **si**
- $R_2 = \{(1,3), (1,2), (3,1), (2,3), (3,2)\}$  **no**, falta  $(2,1)$
- $R_3 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,1)\}$  **no**, falta  $(3,1)$

# Relaciones de equivalencia

- Sea  $A = \mathbb{Z}^+$  indique si las relaciones son simétricas:

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\} \quad 9 \mid 6 \rightarrow 6 \nmid 9 \quad \text{No}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a \leq b\} \quad \checkmark \quad 4 \mid 8 \rightarrow 8 \nmid 4$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a > b\} \quad (3, 8) \rightarrow (8, 3) \quad \text{No}$$

$$(5, 2) \rightarrow (2, 5) \quad \text{No}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sea  $A=\mathbb{Z}^+$  indique si las relaciones son simétricas:

$R_1=\{(a,b)|a \text{ divide } b\}$  **no**,  $1|3$  pero  $3 \nmid 1$

$R_2=\{(a,b)|a \leq b\}$  **no**,  $2 \leq 3$  pero no se cumple que  $3 \leq 2$

$R_3=\{(a,b)|a > b\}$  **no**,  $6 > 1$  pero no se cumple que  $1 > 6$

# Relaciones de equivalencia

---

## Antisimétrica

- Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  se llama antisimétrica si cuando  $(a,b) \in R$  entonces  $(b,a)$  no
- No se consideran los casos  $(a,a)$

# Relaciones de equivalencia

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4)\}$  SI
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  SI
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (4,4)\}$  NO
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3)\}$  SI
- $R_5 = \{(1,2)\}$  SI

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (4,4)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3)\}$
- $R_5 = \{(1,2)\}$
- **$R_1, R_2, R_4$  y  $R_5$  son antisimétricas**

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3\}$  indique si las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}$  Sí
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$  No
- $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  Sí

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3\}$  indique si las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}$  **si**
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$  **no**, (1,2) y (2,1)
- $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  **si**



# Relaciones de equivalencia

---

- Sea  $A = \mathbb{Z}^+$  indique si las relaciones son antisimétricas:

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\} \quad a \mid b \quad a \neq b \quad b \mid a \quad \text{SI}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a \leq b\} \quad \text{SI}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a > b\} \quad \text{SI}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sea  $A=\mathbb{Z}^+$  indique si las relaciones son antisimétricas:

$$R_1=\{(a,b)|a \text{ divide } b\} \text{ si}$$

$$R_2=\{(a,b)|a\leq b\} \text{ si}$$

$$R_3=\{(a,b)|a>b\} \text{ si}$$

# Relaciones de equivalencia

---

## Transitiva

- Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  se llama transitiva si cuando  $(a,b) \in R$  y  $(b,c) \in R$  entonces  $(a,c)$  también

# Relaciones de equivalencia

$$(a,b) (b,c) \rightarrow (a,c)$$

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:

•  $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (3,1), (1,4), (1,2), (3,4), (3,2)\}$  (3,3)

•  $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$  SI

•  $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (1,1)\}$  SI

$(2,2)$	$(3,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$
$(2,3)$	$(3,2)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$
$(2,1)$	$(3,3)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,1)$		$(3,1)$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (3,1), (1,4), (1,2), (3,4), (3,2)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (1,1)\}$
- $R_2$  y  $R_3$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique si las siguientes relaciones son transitivas:

•  $R_4 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (3,3), (1,3), (4,1)\}$

$(1,1)$

NO

•  $R_5 = \{(1,2)\}$

$S_r$

$(1,3)$

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  indique si las siguientes relaciones son transitivas:

- $R_4 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (3,3), (1,3), (4,1)\}$  **no**, están  $(1,4)$  y  $(4,1)$ , por lo tanto, debería estar  $(1,1)$
- $R_5 = \{(1,2)\}$  **si**

# Relaciones de equivalencia

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_3 = \{(2,4), (4,2)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$	NO	NO	NO	SI
$R_2$	SI	SI	NO	SI
$R_3$	NO	SI	NO	NO



# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_3 = \{(2,4), (4,2)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$	NO	NO	NO	SI
$R_2$	SI	SI	NO	SI
$R_3$	NO	SI	NO	NO

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_6 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_4$				
$R_5$				
$R_6$				

# Relaciones de equivalencia

---

Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_6 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_4$	NO	NO	SI	NO
$R_5$	SI	SI	SI	SI
$R_6$	NO	NO	NO	NO

# Relaciones de equivalencia

---

Dadas las siguientes relaciones definidas sobre los números enteros, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(a,b) | a+b=0\}$
- $R_2 = \{(a,b) | a \neq b\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$				
$R_2$				

# Relaciones de equivalencia

---

Dadas las siguientes relaciones definidas sobre los números enteros, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(a,b) | a+b=0\}$
- $R_2 = \{(a,b) | a \neq b\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$	NO	SI	NO	NO
$R_2$	NO	SI	NO	NO



# Relaciones de equivalencia

---

## Representación de relaciones

- Matricial
- Grafos

# Relaciones de equivalencia

---

- Sean  $A=\{a_1,a_2,a_3\}$  y  $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ ,  $R$  se define de la siguiente manera:

$$R=\{(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_3),(a_3,b_4)\}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sean  $A=\{a_1, a_2, a_3\}$  y  $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ,  $R$  se define de la siguiente manera:

$$R=\{(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_4)\}$$

- La representación matricial de  $R$  es:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



# Relaciones de equivalencia

---

- Sean  $A=\{1,2,3\}$  y  $B=\{1,2\}$ ,  $R$  se define de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

- Muestre la representación matricial de  $R$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sean  $A=\{1,2,3\}$  y  $B=\{1,2\}$ ,  $R$  se define de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

- La representación matricial de  $R$  es:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y  $R$  definida de  $A$  en  $A$  de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1)\}$$

- Muestre la representación matricial de  $R$

# Relaciones de equivalencia

---

- Sea  $A=\{1,2,3,4\}$  y  $R$  definida de  $A$  en  $A$  de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1)\}$$

- La representación matricial de  $R$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- Muestre la relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$  representada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- Muestre la relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$  representada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

**No es reflexiva porque  $(3,3) \notin R$**



# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

**La relación es reflexiva**

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

**La relación es reflexiva**

Una relación  $R$  es **reflexiva** si la matriz  $M_R$  tiene solo 1's en su diagonal

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

**La relación es simétrica**

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

**La relación no es simétrica ya que  $(1,3) \in R$  y  $(3,1) \notin R$**

# Relaciones de equivalencia

---

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es simétrica**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no es simétrica**



# Relaciones de equivalencia

---

- Compare la matriz con su transpuesta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es simétrica**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no es simétrica**

# Relaciones de equivalencia

---

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es**  
**simétrica**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no**  
**es simétrica**

# Relaciones de equivalencia

---

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es** simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no** es simétrica

Una relación  $R$  es **simétrica** si  
la matriz  $M$  es igual a  $M^T$

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

**La relación es antisimétrica**

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica



# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

**La relación no es antisimétrica ya que  $(2,4) \in R$  y  $(4,2) \notin R$**

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

**La relación no es antisimétrica ya que  $(2,4) \in R$  y  $(4,2) \notin R$**

Una relación  $R$  es antisimétrica si en la matriz  $M$  se cumple que si  $m_{ij}=1$  entonces  $m_{ji}=0$

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es transitiva

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $R=\{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ , **no es transitiva** ya que:

$(1,2) \in R$  y  $(2,3) \in R$  pero  $(1,3) \notin R$

$(2,3) \in R$  y  $(3,1) \in R$  pero  $(2,1) \notin R$

$(3,1) \in R$  y  $(1,2) \in R$  pero  $(3,2) \notin R$

# Relaciones de equivalencia

---

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva

# Relaciones de equivalencia

---

- Es reflexiva ya que en su diagonal hay solo 1's
- No es simétrica ya que  $M \neq M^T$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- No es antisimétrica ya que  $(1,3) \in R$  y  $(3,1) \in R$
- Es transitiva

# Relaciones de equivalencia

---

› Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva

# Relaciones de equivalencia

---

- Es reflexiva ya que en su diagonal hay solo 1's
- No es simétrica ya que  $M \neq M^T$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Es antisimétrica ya que si  $(a,b) \in R$  entonces  $(b,a) \notin R$
- No es transitiva.  $(1,2) \in M$  y  $(2,3) \in M$  pero  $(1,3) \notin M$



# Relaciones de equivalencia

---

## Representación de relaciones

- Matricial
- Grafos

# Relaciones de equivalencia

---

## Representación usando grafos

- $R=\{(a,b),(b,c),(c,a),(d,b),(d,c)\}$  definida sobre  $A=\{a,b,c,d\}$

• Nodos

→ Aristas

# Relaciones de equivalencia

---

## Representación usando grafos

- $R=\{(a,b),(b,c),(c,a),(d,b),(d,c)\}$  definida sobre  $A=\{a,b,c,d\}$

• Nodos

→ Aristas

Cada elemento de **A** es un nodo  
Cada elemento de **R** es una arista

# Relaciones de equivalencia

---

## Representación usando grafos

- $R=\{(a,b),(b,c),(c,a),(d,b),(d,c)\}$  definida sobre  $A=\{a,b,c,d\}$

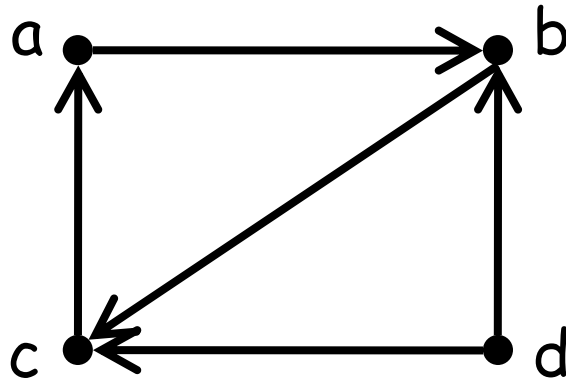


# Relaciones de equivalencia

---

## Representación usando grafos

- $R = \{(a,b), (b,c), (c,a), (d,b), (d,c)\}$  definida sobre  $A = \{a,b,c,d\}$



# Relaciones de equivalencia

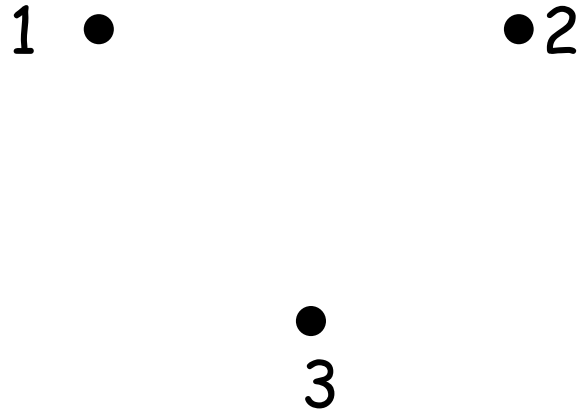
---

Represente  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3\}$

# Relaciones de equivalencia

---

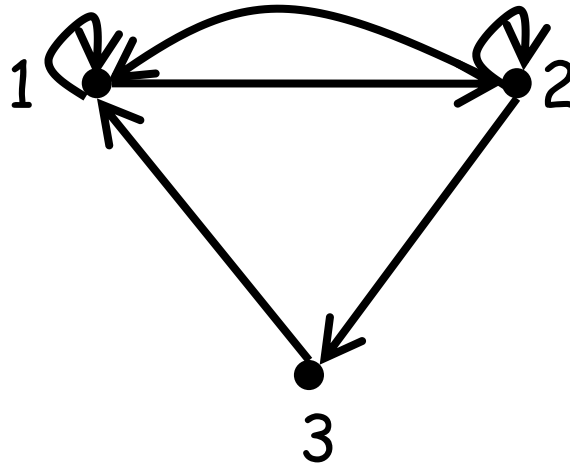
Represente  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3\}$



# Relaciones de equivalencia

---

Represente  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3\}$





# Relaciones de equivalencia

---

Represente  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3), (2,4),(3,1),(3,3), (3,4),(4,1),(4,4)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

# Relaciones de equivalencia

---

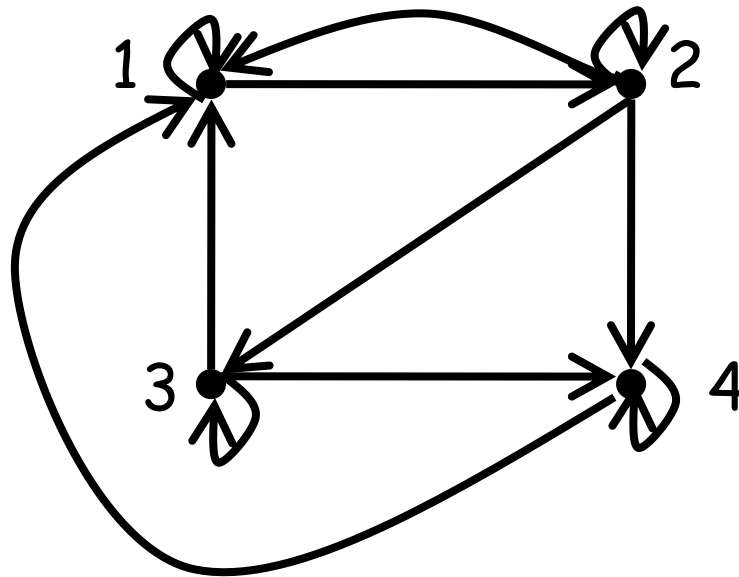
Represente  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3), (2,4),(3,1),(3,3), (3,4),(4,1),(4,4)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$



# Relaciones de equivalencia

---

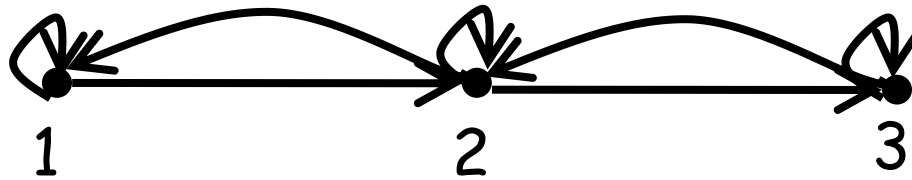
Represente  $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$  definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$



# Relaciones de equivalencia

---

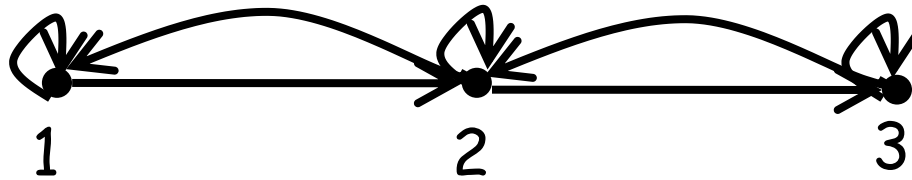
Muestre la relación que representa el siguiente grafo:



# Relaciones de equivalencia

---

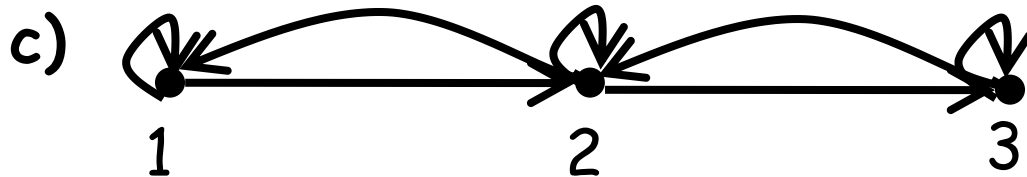
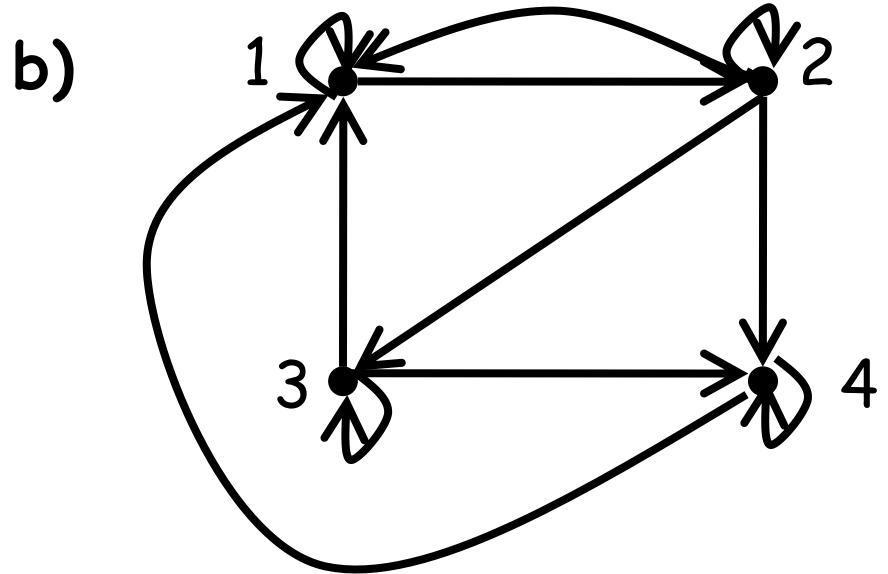
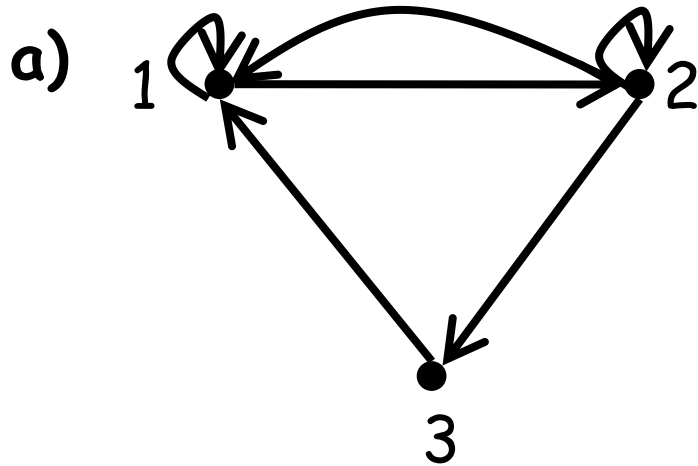
Muestre la relación que representa el siguiente grafo:



$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

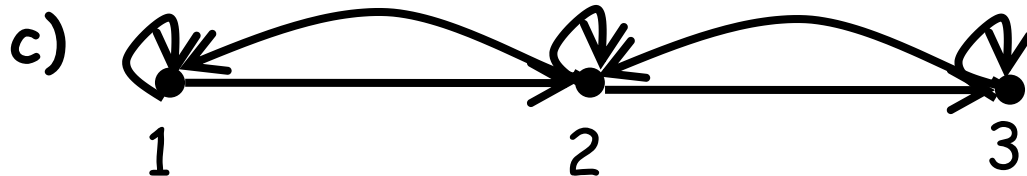
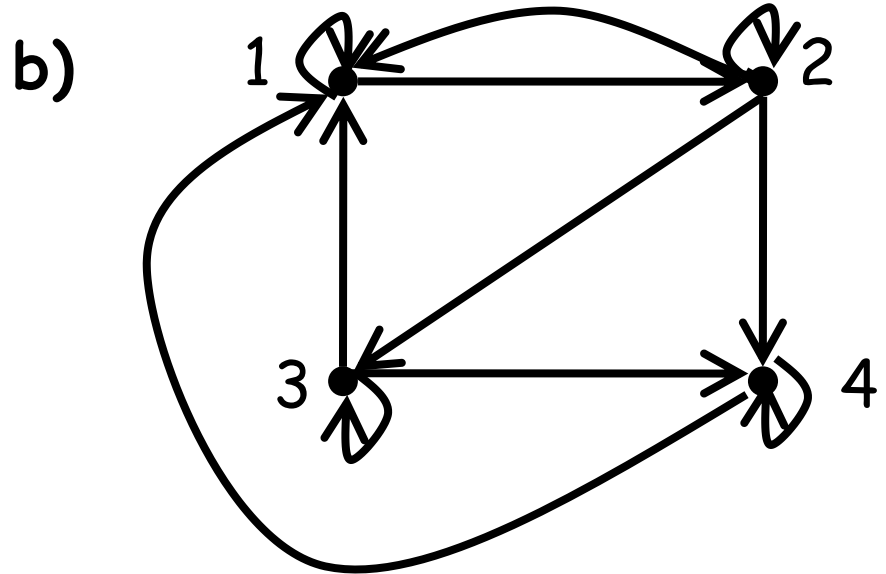
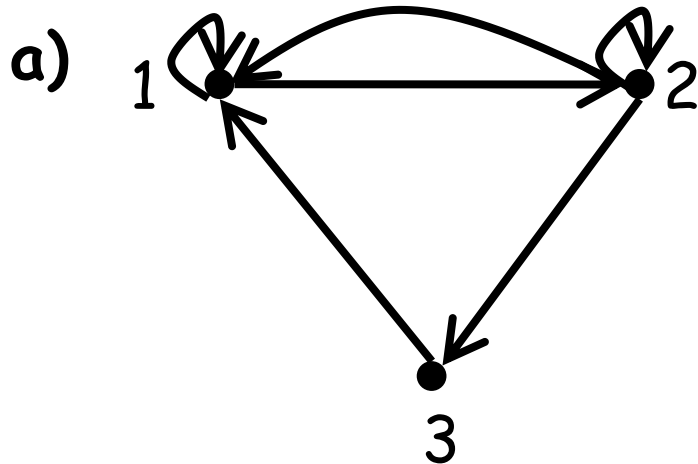
# Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:



# Relaciones de equivalencia

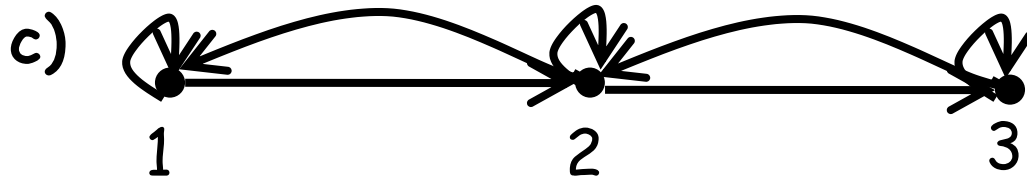
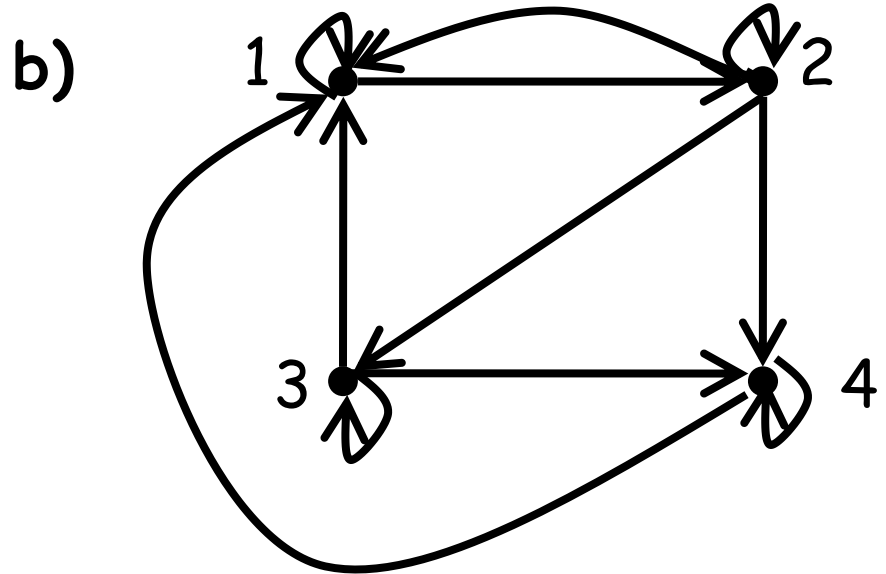
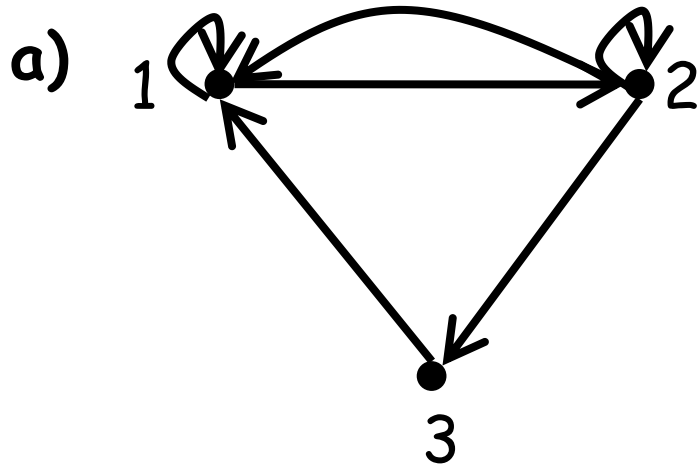
Indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:



Una relación es **reflexiva** si cada nodo tiene una arista que sale y llega al mismo nodo

# Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

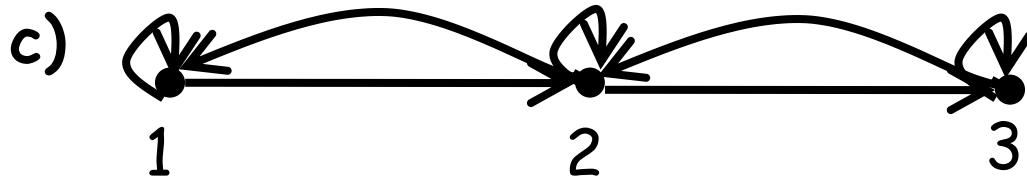
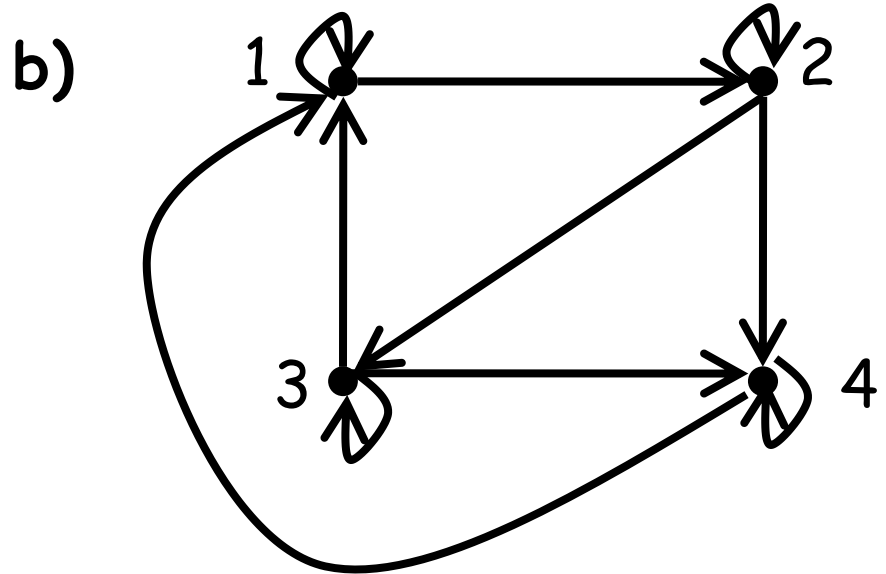
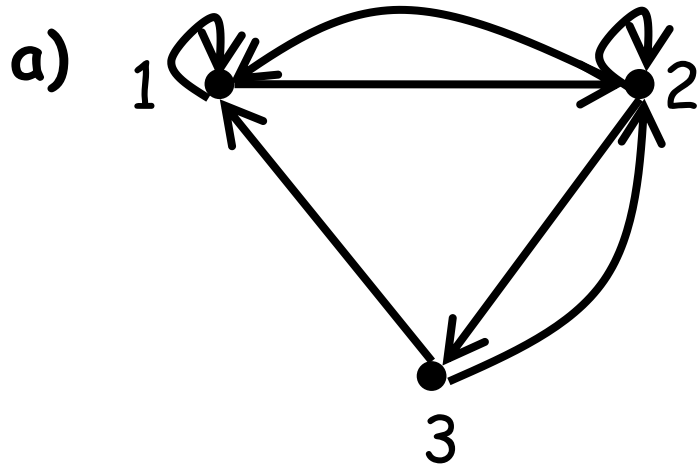


Las relaciones representadas en b y c son reflexivas



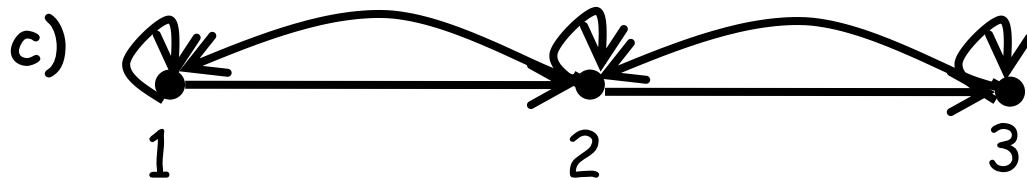
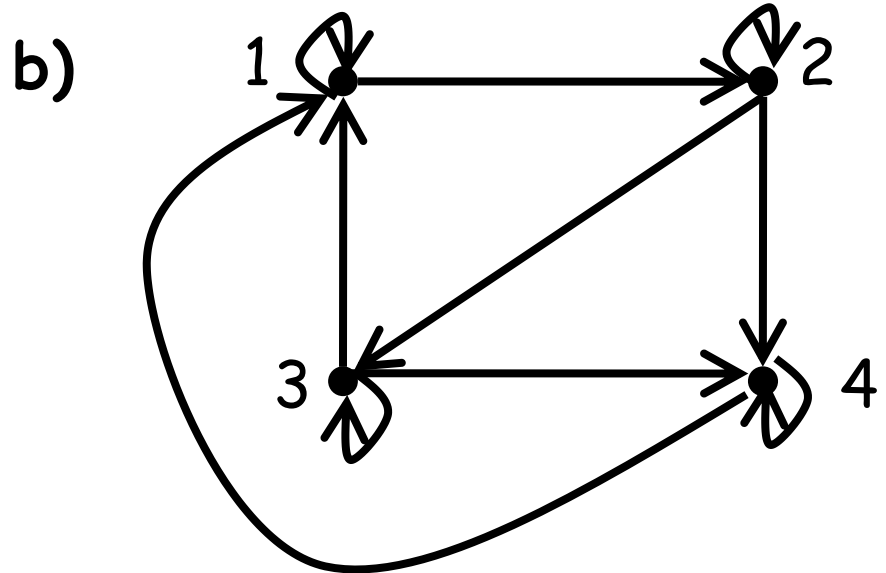
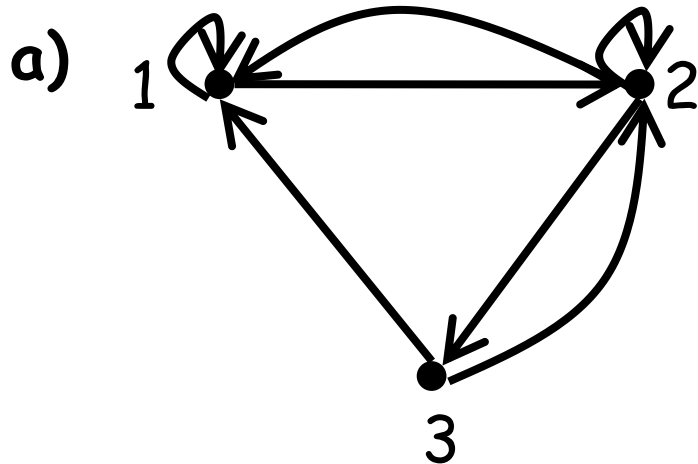
# Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:



# Relaciones de equivalencia

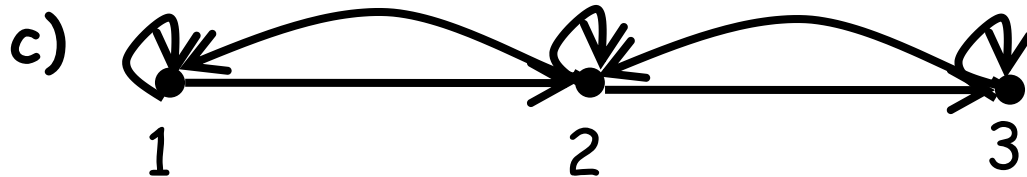
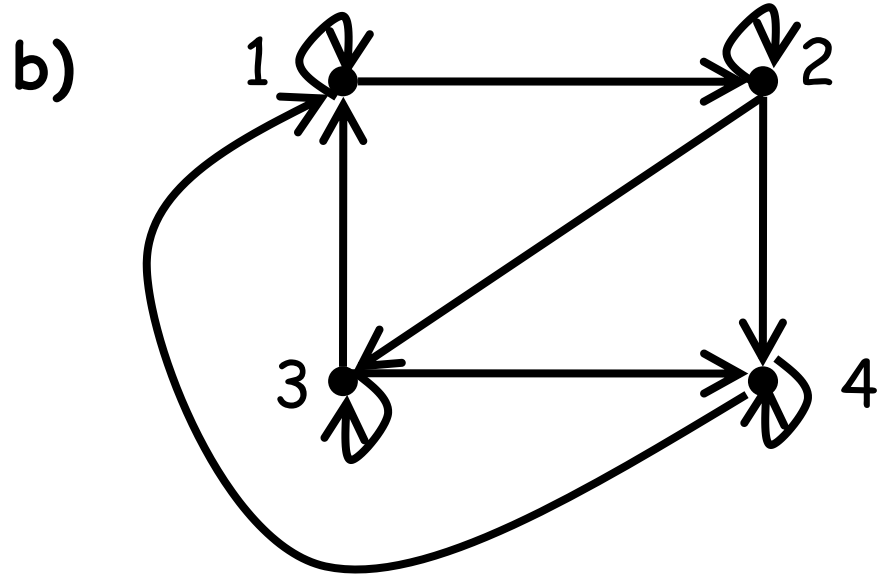
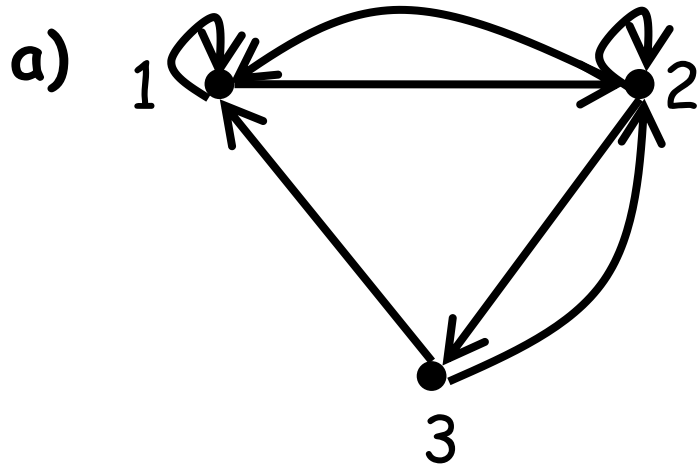
Indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:



Una relación es simétrica si por cada arista del nodo  $i$  al  $j$ , hay otra de  $j$  a  $i$

# Relaciones de equivalencia

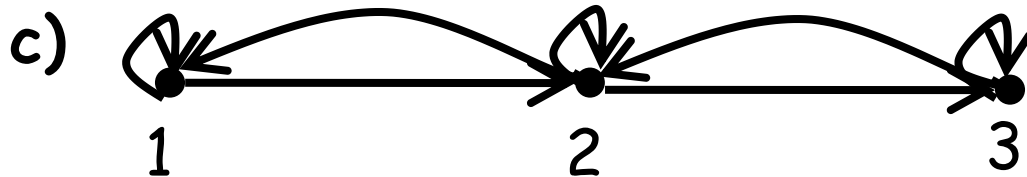
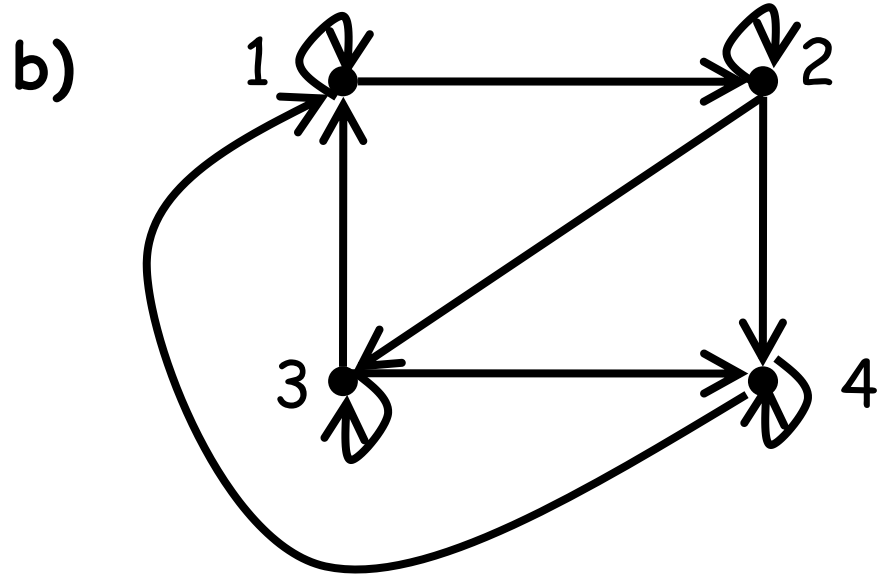
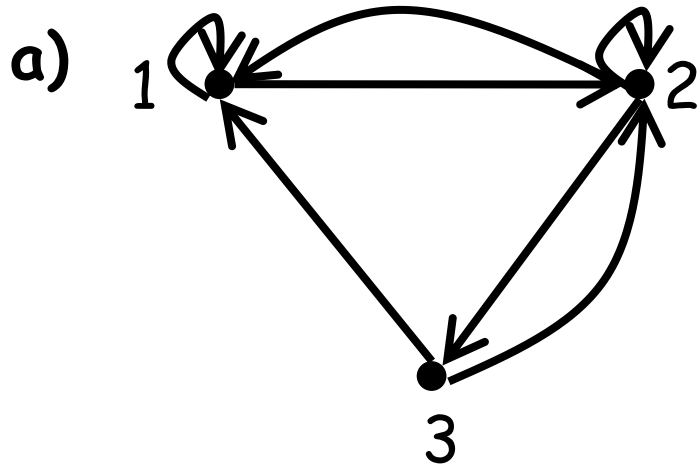
Indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:



La relación representada en c es simétrica

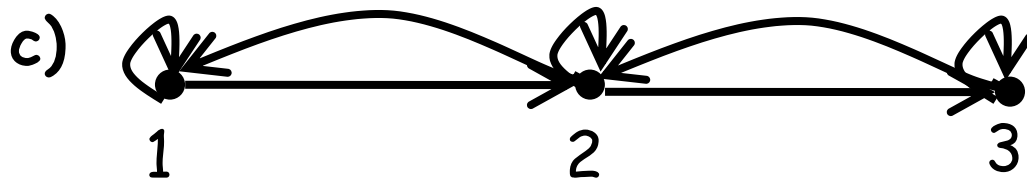
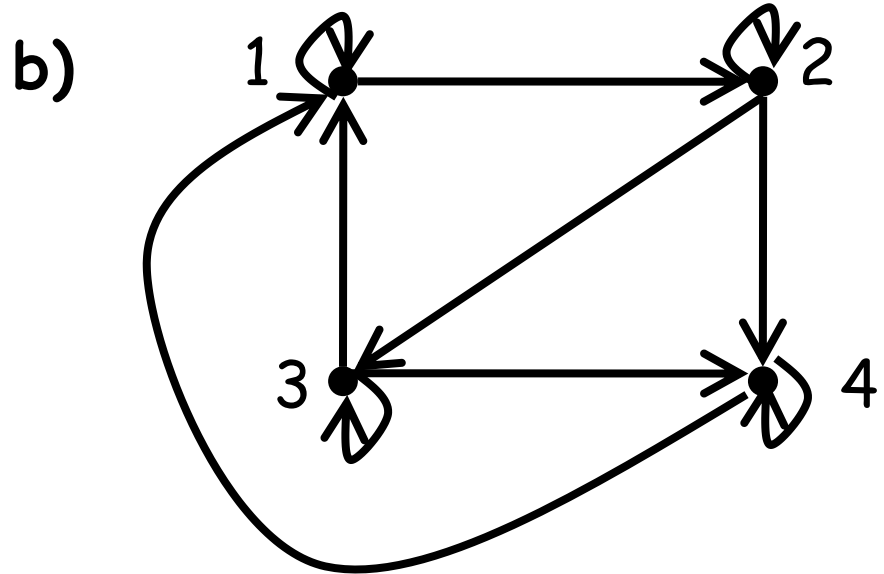
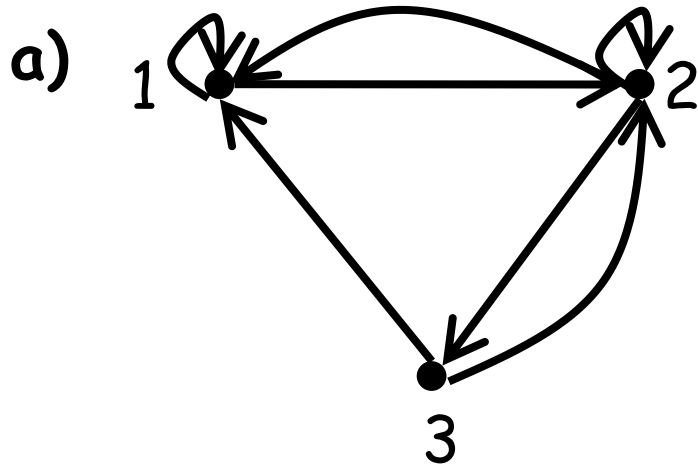
# Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:



# Relaciones de equivalencia

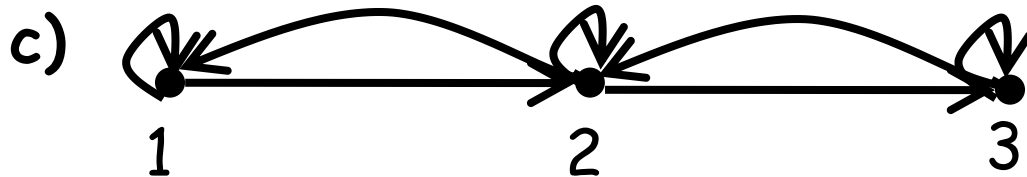
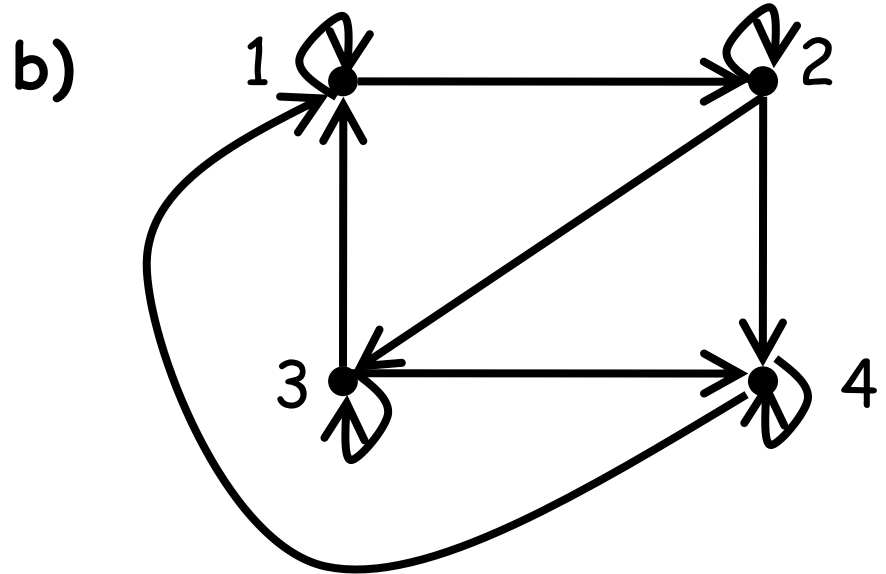
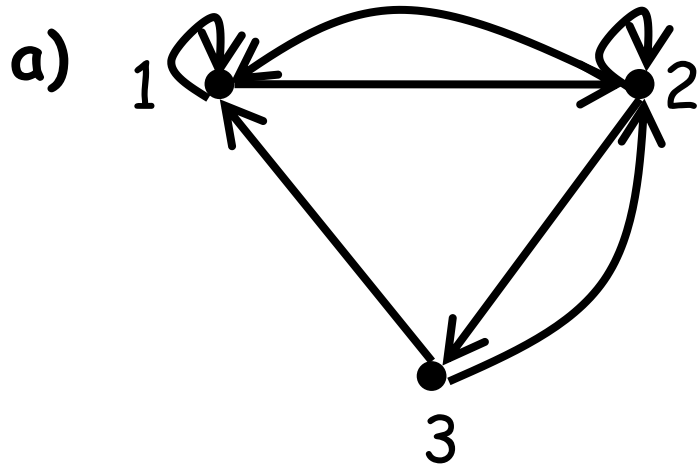
Indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:



Una relación es antisimétrica si cuando hay una arista del nodo  $i$  al  $j$ , no hay otra de  $j$  a  $i$

# Relaciones de equivalencia

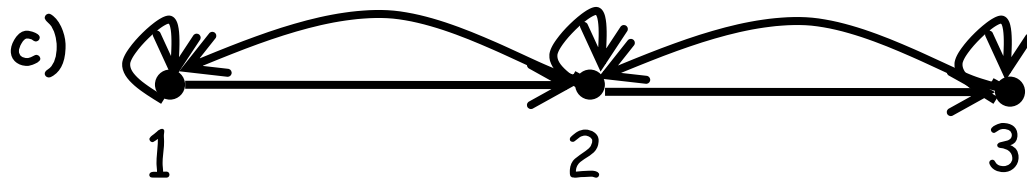
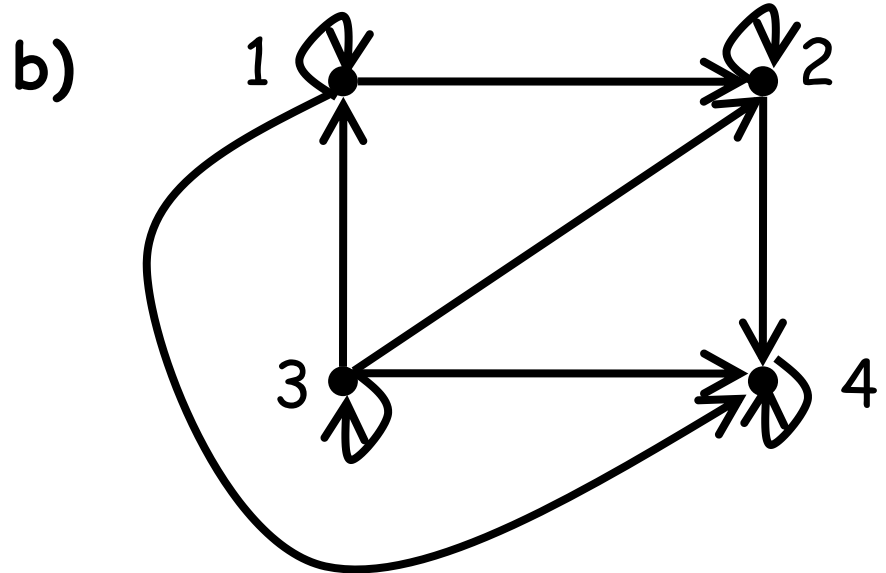
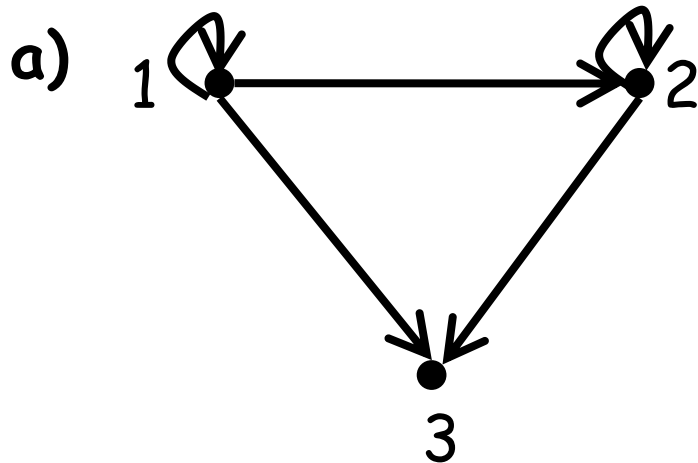
Indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:



La relación representada en b es antisimétrica

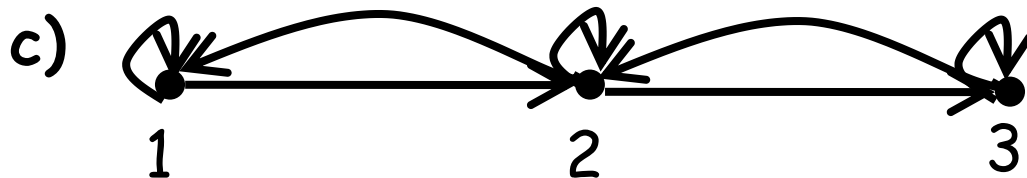
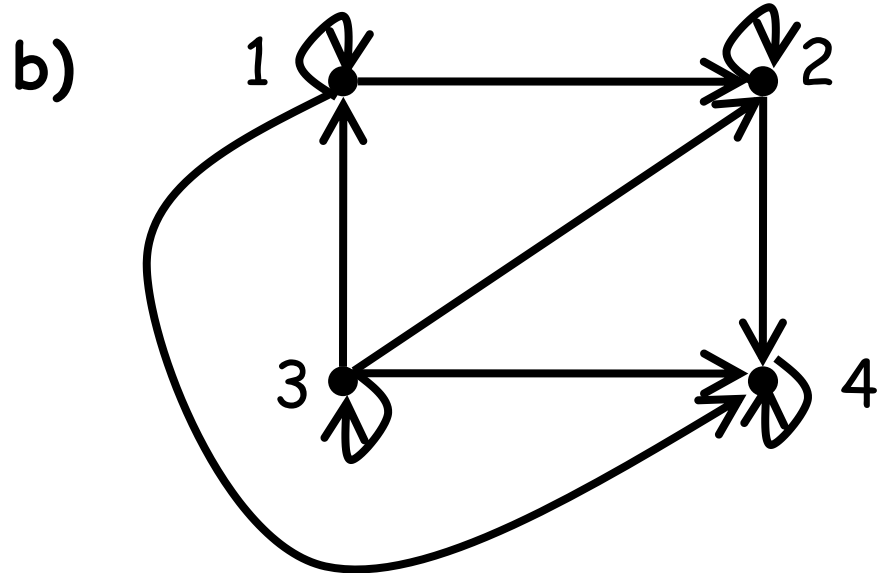
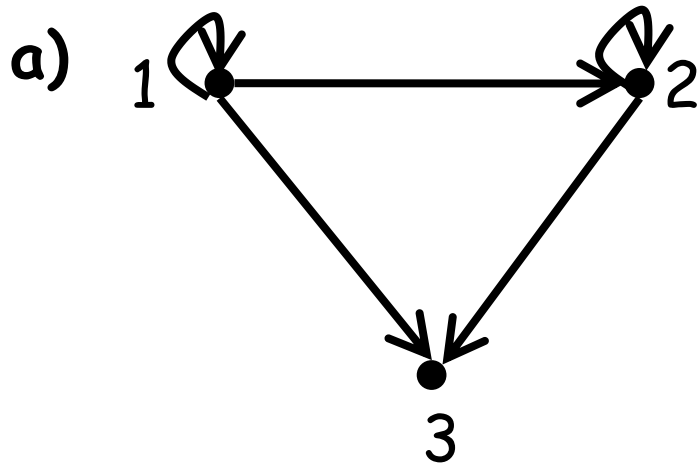
# Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:



# Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:

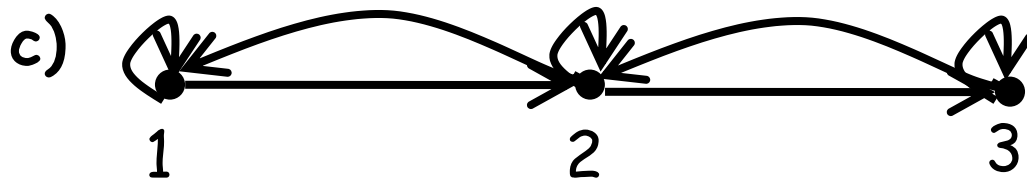
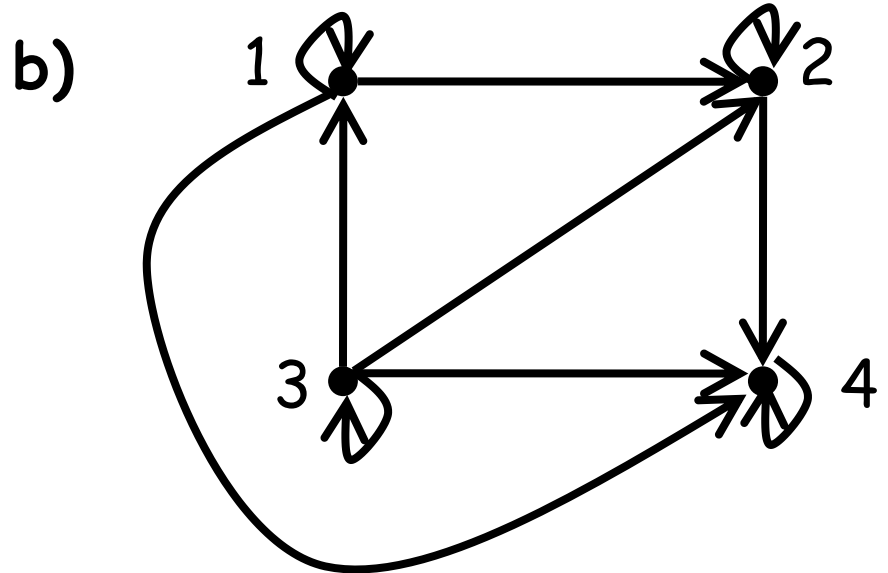
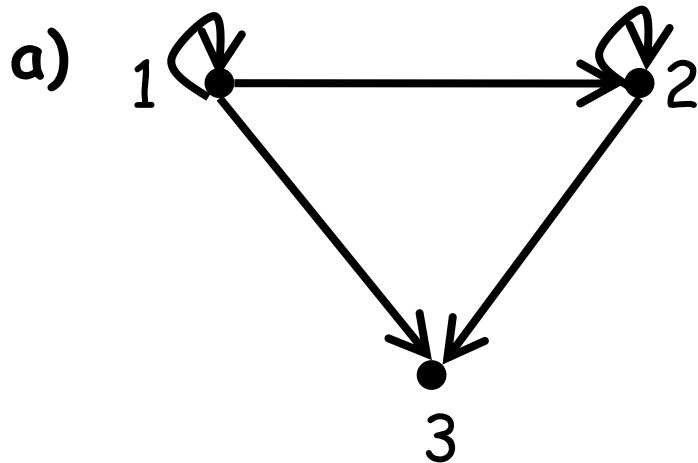


Una relación es transitiva si cuando hay una arista del nodo  $i$  al  $j$ , otra de  $j$  a  $k$ , entonces hay una arista de  $i$  a  $k$



# Relaciones de equivalencia

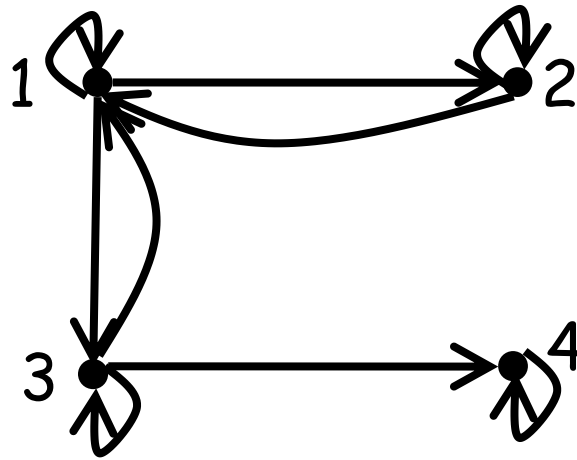
Indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:



Las relaciones representadas en a y b son transitivas

# Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$



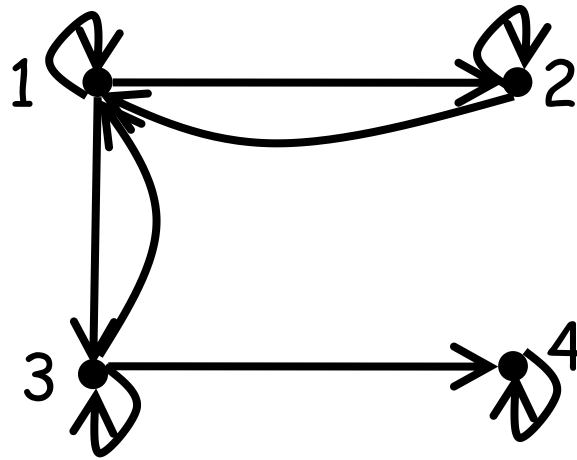
- Complete la siguiente tabla de propiedades:

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$				

- Representéla en forma matricial

# Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$



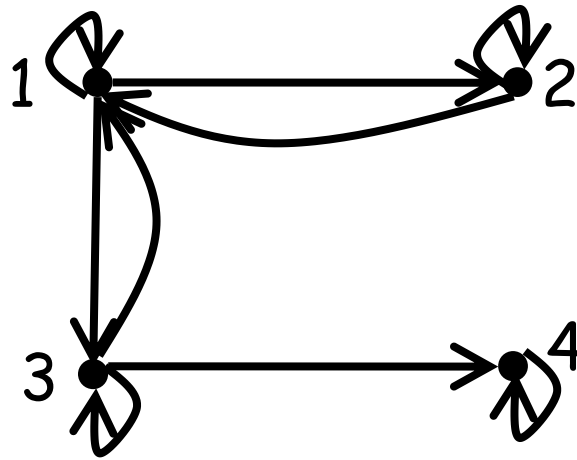
- Complete la siguiente tabla de propiedades:

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$	SI	NO	NO	NO

- Representéla en forma matricial

# Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

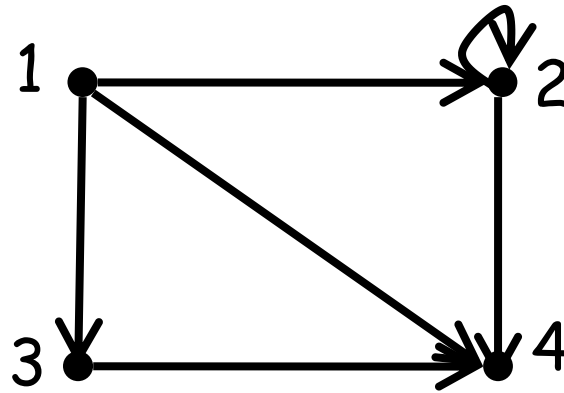


- Representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Relaciones de equivalencia

>> Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$



- Complete la siguiente tabla de propiedades:

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
$R_1$				

- Representémtela en forma matricial