

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Complejidad y optimización

Reducciones desde Vertex Cover

Carlos Andrés Delgado S.

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Marzo de 2017

Complejidad y optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema del Máximo Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema de partición entera (Subset Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

- 1 El problema del Máximo Clique
 - Definición
 - Demostración que Máximo Clique es NPC

- 2 El problema de partición entera (Subset Sum)
 - Introducción
 - ¿Subset Sum es NPC?

Complejidad y optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema del Máximo Clique

Definición

Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema de partición entera (Subset Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

- 1 El problema del Máximo Clique
 - Definición
 - Demostración que Máximo Clique es NPC

- 2 El problema de partición entera (Subset Sum)
 - Introducción
 - ¿Subset Sum es NPC?

Definición

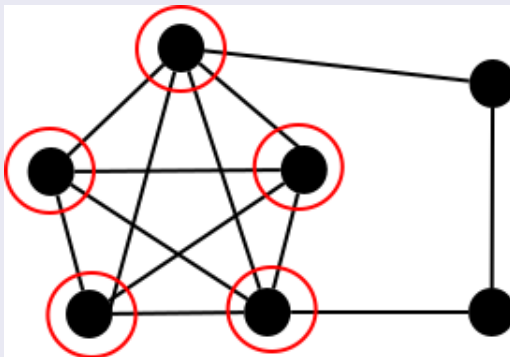
Una instancia es un grafo $G = (V, E)$ y un entero $j \leq V$

Pregunta

¿El grafo contiene un clique de j vértices, donde cada subconjunto de V de tamaño j donde cada par de vértices está conectado entre ellos?

Definición

Ejemplo, el siguiente grafo contiene un clique de tamaño 5.



¿Máximo clique es NP?

Este problema es NP debido a que se deben enumerar todos los conjuntos de tamaño 0 hasta tamaño j y verificar que cada vértice en cada subconjunto está conectado con los otros. La complejidad de la enumeración es $O(2^{|V|})$ y la complejidad de la verificación de la conexión de los vértices es polinomial.

¿Máximo Clique es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Introducción

Vamos a realizar la verificación realizando una reducción de Vertex Cover(VC) a Máximo clique.

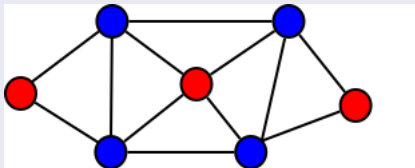
Importante

$$VC \leq_p \text{Máximo Clique}$$

¿Máximo Clique es NPC?

Procedimiento de reducción

Se toma un grafo y se encuentra su Vertex Cover. Al eliminar los vértices del cover, los vértices restantes forman un conjunto independiente, es decir vértices que no están conectados con ninguna arista.



Azul: Vertex cover, Rojo: conjunto independiente

Como se puede observar los problemas de Vertex Cover y Conjunto independiente son equivalentes.

¿Máximo Clique es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición

Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Procedimiento de reducción

Si se observa el más pequeño vertex cover de un grafo, es su máximo conjunto independiente. De acuerdo a esto el problema de encontrar el conjunto independiente de un grafo es NP Completo.

Procedimiento de reducción

En un conjunto independiente, no hay aristas. En un clique hay siempre una arista entre cada par de vértices, entonces estos grafos son **complementarios**. Entonces para transformar de conjunto independiente a clique sólo basta con crear las aristas faltantes.

¿Máximo Clique es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición

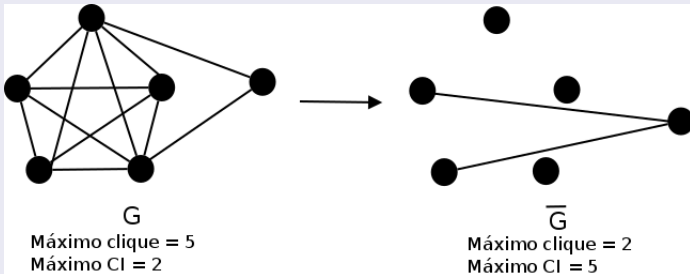
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción

¿Subset Sum es
NPC?

Procedimiento de reducción



¿Máximo Clique es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Demostración reducción

Si VC es un vertex cover en G , entonces $V - VC$ es un clique en G' . Si C es un clique en G , $V - C$ es un vertex cover en G'

Complejidad y optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema del Máximo Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema de partición entera (Subset Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

- 1 El problema del Máximo Clique
 - Definición
 - Demostración que Máximo Clique es NPC
- 2 El problema de partición entera (Subset Sum)
 - Introducción
 - ¿Subset Sum es NPC?

Partición entera

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Definición

Una instancia es un conjunto S de enteros y un entero objetivo t

Pregunta

¿Existe un subconjunto de S cuya suma sea exactamente t ?

Ejemplo

$$S = \{1, 4, 16, 64, 256, 1040, 1041, 1093, 1284, 1344\}, T = 3754$$

Su solución es:

$$S_s = \{1, 16, 256, 1040, 1093, 1284\}$$

Porque $1 + 16 + 256 + 1040 + 1093 + 1284 = 3654$

Partición entera

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

¿Partición entera es NP?

Partición entera es un problema NP, debido a que es realizar todas las enumeraciones de S y comprobar su suma, si este conjunto tiene tamaño n , es necesario realizar 2^n enumeraciones.

Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Introducción

Vamos a realizar la verificación realizando una reducción de Vertex Cover(VC) a Subset Sum.

Importante

$$VC \leq_p \text{Subset Sum}$$

Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

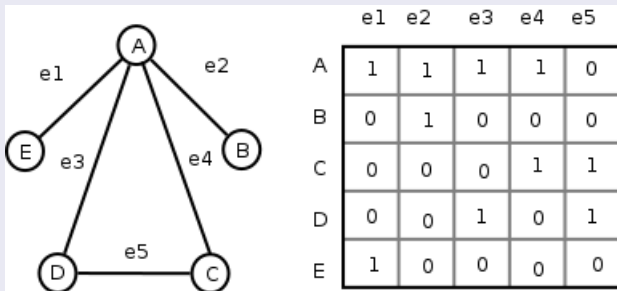
Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Procedimiento

Para este problema, se va trabajar en la representación de grafos llamada matriz de incidencia.



Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Procedimiento

De la matriz de incidencia de un grafo se analiza lo siguiente:

- ¿Cuántos 1 tiene cada columna?. Exactamente dos debido a que representa una arista
- ¿Cuántos 1 tiene cada fila?. Depende del grado de cada vértice

Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Procedimiento

En el procedimiento de reducción desde VC, se van a crear $|V| + |E|$ números desde $G(V, E)$

- 1 Para cada vertice (fila) calcular $x_i = 4^{|E|} + \sum_{j=0}^{|E|-1} b[i, j]4^j$,
por ejemplo para la fila de A tenemos 11110 entonces
tenemos $4^5 + 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4^1 + 0 * 4^0$
- 2 Para cada arista (columna) será $y_j = 4^j$
- 3 El entero objetivo t se calcula así: $x_i = k4^{|E|} + \sum_{j=0}^{|E|-1} 2 * 4^j$,
donde k es el tamaño del cover. Si se observa este
representa la suma de escoger todas las aristas (2 vértices
por arista).

Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Procedimiento

Para calcular el valor tomamos los valores calculados de cada vértice que está en el cover, los sumamos y adicionamos uno o más y_i esta suma debe dar exactamente t .

Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Ejemplo

Para el caso anterior $k = 2$ y el cover es el conjunto $\{A, C\}$.

- 1 Calculando el objetivo: $t = 2 * 4^5 + \sum_{j=0}^4 2 * 4^j = 2730$
- 2 Calculamos $x_A = 11110 = 1364$
- 3 Calculamos $x_C = 00011 = 1029$
- 4 Si realizamos la suma obtenemos $x_A + x_C = 2393$
- 5 Si se le suman los pesos de las aristas y_0, y_2, y_3, y_4 , la suma da $2393 + 4^0 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = 2730$

Subset Sum es NPC?

Complejidad y
optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema
del Máximo
Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema
de partición
entera (Subset
Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

Demostración

- 1 Cualquier solución de S contiene exactamente k vértices/números.
- 2 La base mínima de trabajo es 3 debido a que la suma de los 1 no presenta acarreo (un valor que pasa de una columna a otra)
- 3 En la reducción t representa el peso total (suma) de las aristas
- 4 Al escoger una cobertura (conjunto de vértices) su suma con una o más aristas debe dar exactamente t , es decir está cubierto.

Complejidad y optimización

Carlos Andrés
Delgado S.

El problema del Máximo Clique

Definición
Demostración
que Máximo
Clique es NPC

El problema de partición entera (Subset Sum)

Introducción
¿Subset Sum es
NPC?

