Matemáticas Discretas II

Oscar Bedoya

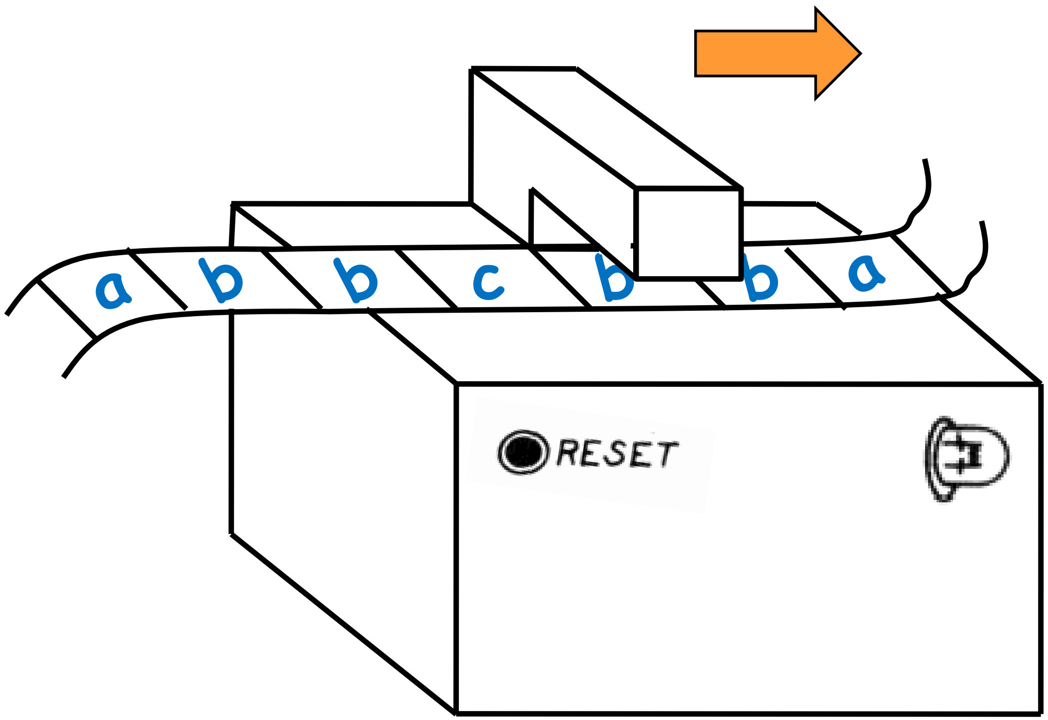
oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

- Alfabetos, palabras y lenguajes
- Operadores sobre palabras y lenguajes
- Lenguajes regulares
- Expresiones regulares

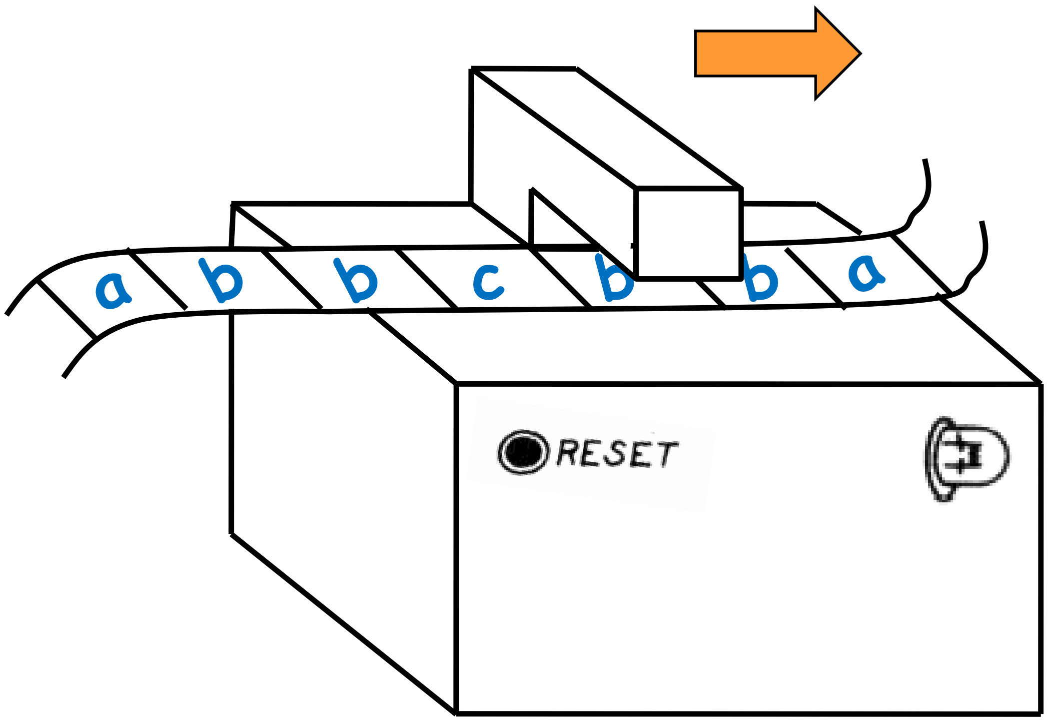
Lenguajes regulares

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta$, $\vert\alpha\vert \leq \vert\beta\vert$
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes regulares



Lenguajes regulares



El **alfabeto** es el **conjunto de símbolos** que podrán aparecer en la entrada de la máquina

Lenguajes regulares

Alfabeto

- Un alfabeto es cualquier conjunto de símbolos no vacío

$$\Sigma=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma=\{a,b\}$$

Lenguajes regulares

Alfabeto

- Un alfabeto es cualquier conjunto de símbolos no vacío

$$\Sigma=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma=\{a,b\}$$

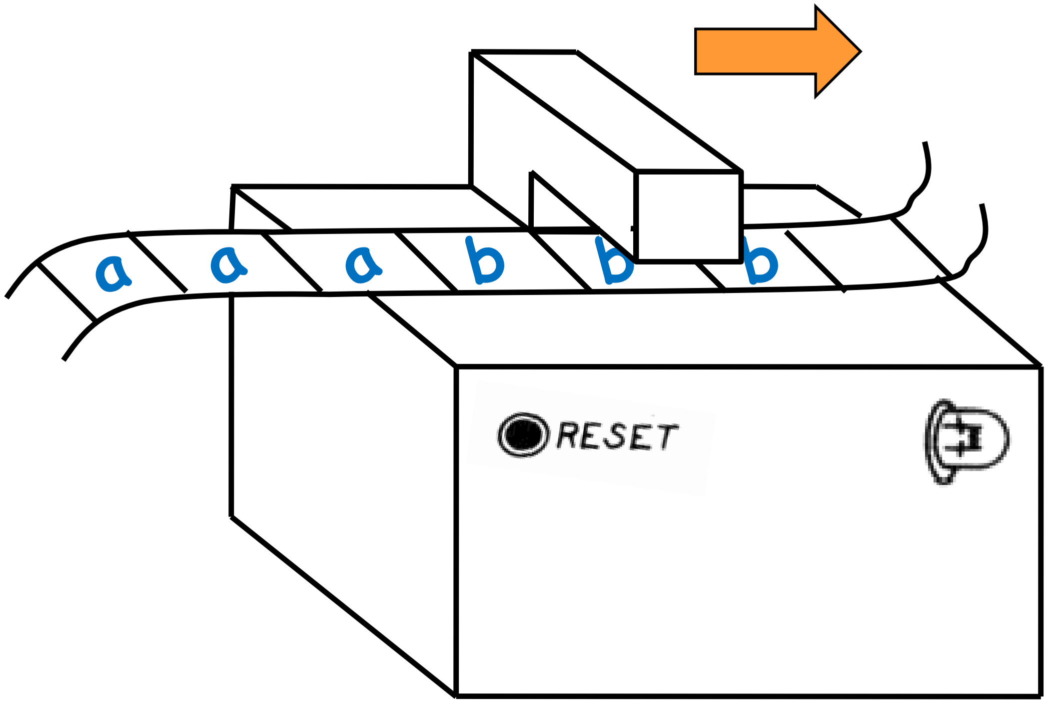
- **Alfabeto latino**:

$\Sigma=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$

- **Alfabeto griego**:

$$\Sigma=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\ldots,\Psi,\Omega\}$$

Lenguajes regulares



Las **palabras** o **cadenas** son secuencias finitas de símbolos

Lenguajes regulares

- Dado el alfabeto usado en español:

Σ={a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}

se pueden crear palabras:

colina

puente

dardo

fdkfjk

La noción de palabra no tiene asociada semántica

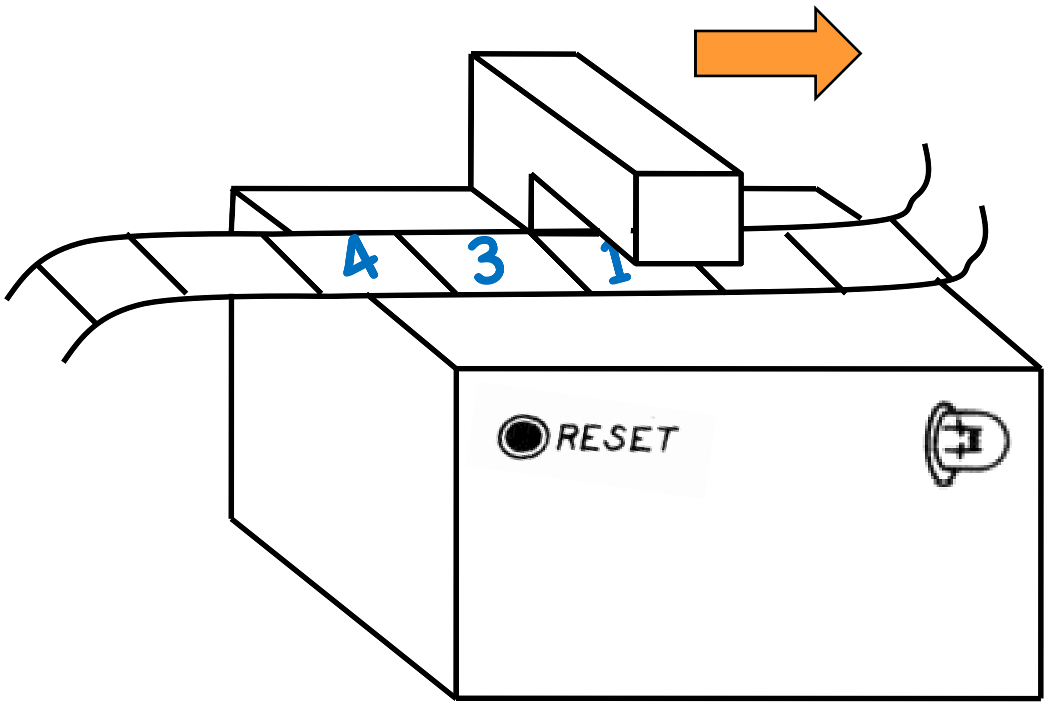
Lenguajes regulares

Cadena o palabra

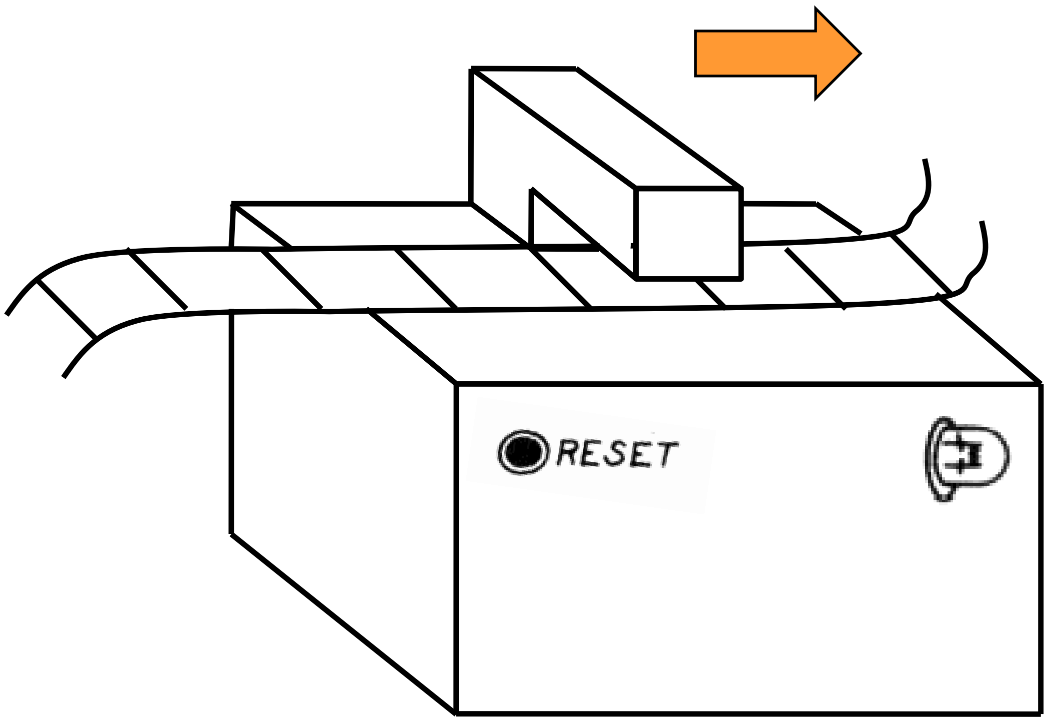
- Una palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto

  - Si Σ={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, entonces 431, 021, ε, son palabras de Σ
  - Si Σ={a,b}, entonces ab, ba, aaab, ε, son palabras de Σ

Lenguajes regulares

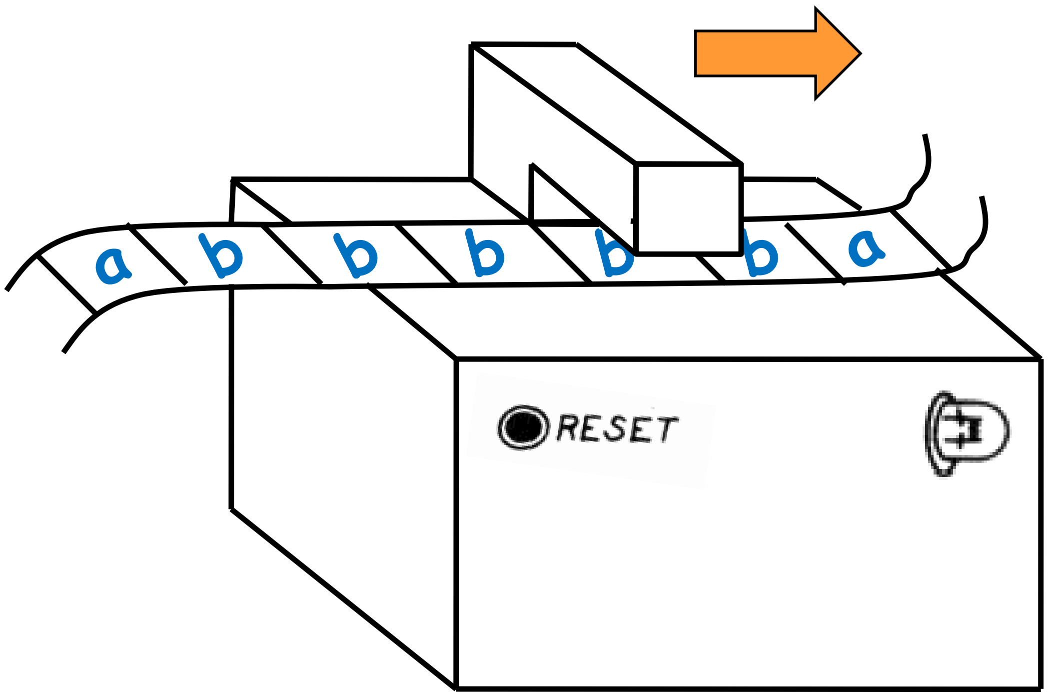


Lenguajes regulares



La **cadena vacía** ε representa una palabra que tiene 0 símbolos, esto es, una cinta vacía

Lenguajes regulares



Una máquina **acepta** un conjunto de palabras específico que se puede generar a partir de un alfabeto

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$

  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre Σ={a,b}
  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos {aaa, aab, ..., bbb}
  - L_2: conjunto de palabras que tienen al menos una a

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$

    - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos

    - L_2: conjunto de palabras que tienen al menos una a

    - L_3: conjunto de palabras que tienen un número par de símbolos

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$

  - L_1: conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos

  - L_2: conjunto de palabras que tienen al menos una a

  - L_3: conjunto de palabras que tienen un número par de símbolos

  - L_4: conjunto de todas las posibles palabras

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Se denota como Σ^* y se conoce también como **cerradura**
- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Se denota como Σ^* y se conoce también como **cerradura**
- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
- Muestre el lenguaje universal Σ^* para los siguientes alfabetos:
    - $\Sigma = \{a,b,c\}$
    - $\Sigma = \{1\}$

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
  - Para $\Sigma=\{a,b,c\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ...\}$
  - Para $\Sigma=\{1\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111,...\}$

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

$\varepsilon \in \Sigma^*$ $\quad$ Si

- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
  - Para $\Sigma=\{a,b,c\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \ldots\}$
  - Para $\Sigma=\{1\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111,\ldots\}$

ε siempre está en Σ^* porque la cadena vacía se puede obtener de cualquier alfabeto

Para cualquier alfabeto Σ, se tiene que Σ^* es infinito ya que Σ no puede ser vacío

Lenguajes regulares

Lenguaje

• Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^*, es decir, $L \subseteq \Sigma^*$

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

concatenar

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

$\cdot$ es el operador concatenación

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $(aab)^3$

$aab(aab)^2$

$aab\ aab\ (aab)^1$

$aab\ aab\ aab\ \varepsilon$

$aab\ aab\ aab$

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $(aab)^3 = aab \cdot (aab)^2$

$= aab \cdot aab \cdot aab^1$

$= aab \cdot aab \cdot aab \cdot aab^0$

$= aab \cdot aab \cdot aab \cdot \varepsilon = aabaabaab$

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, \text{ si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Muestre
  - $a^3 \cdot (aba)^2$ a a a a b a a b a
  - $(ab)^2 \cdot (ba)^3$ a b a b b a b a b a

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

  $a^1 \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^n b^n \mid n\geq 1\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^nb^n \mid n\geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

  $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

  $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^nb^n \mid n\geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

- $\Sigma=\{0,1\}$,

  $L=\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, 1001,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma=\{a\}$,

 $L=\{a, aa, aaa, aaaa,\ldots\}=\{a^n \mid n\geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma=\{a,b\}$,

 $L=\{ab, aabb, aaabbb,\ldots\}=\{a^n b^n \mid n\geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

- $\Sigma=\{0,1\}$,

 $L=\{\varepsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, 1001,\ldots\}=\{w\in\{0,1\}^* \mid$ tienen la misma cantidad de 0's que 1's$\}$, cadenas con igual cantidad de 0's que 1's

Longitud de una cadena

- Sea x una cadena que pertenece a un lenguaje L, su longitud se denota por |x| y se define como:

$$|x| = \begin{cases} 0, \text{ si } x=\varepsilon \\ n, \text{ si } x=a_1a_2\ldots a_n \end{cases}$$

Lenguajes regulares

Longitud de una cadena

- Sea x una cadena que pertenece a un lenguaje L, su longitud se denota por |x| y se define como:

$$|x| = \begin{cases} 0, \text{ si } x=\varepsilon \\ n, \text{ si } x=a_1 a_2 \ldots a_n \end{cases}$$

- $|\varepsilon|=0$
- $|ababaa|=6$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a, ab, ac\}$, $B=\{b, b^2\}$
- $A \cdot B$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B = \{ab, abb, acb, ab^2, abb^2, acb^2\} = \{ab, ab^2, acb, ab^2, ab^3, acb^2\}$

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a,ab,ac\}$, $B=\{b,b^2\}$
- $A \cdot B=\{ab,abb,acb,ab^2,abb^2,acb^2\}=\{ab,ab^2,acb,ab^2,ab^3,acb^2\}$

$$=\{ab,ab^2,acb,ab^3,acb^2\}$$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A=\{a,ab,ac\}$, $B=\{b,b^2\}$
- $A \cdot B=\{ab,abb,acb,ab^2,abb^2,acb^2\}=\{ab,ab^2,acb,ab^2,ab^3,acb^2\}$
- $B \cdot A=?$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ, la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B = \{ab, abb, acb, ab^2, abb^2, acb^2\} = \{ab, ab^2, acb, ab^2, ab^3, acb^2\}$
- $B \cdot A = \{ba, bab, bac, b^2a, b^2ab, b^2ac\}$

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

$A^3 = A \cdot A \cdot A = \{ab,b\}\{ab,b\}\{ab,b\}$

$= \{ab,b\}\{abab,bab,abb,bb\}$

$= \{ababab,abbab,ababb,abbb,babab,bbab,babb,bbb\}$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, \text{ si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

Cadenas formadas usando 3 concatenaciones sobre A

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

$A^3 = A \cdot A \cdot A = \{ab,b\}\{ab,b\}\{ab,b\}$

$= \{ab,b\}\{abab,bab,abb,bb\}$

$= \{ababab,abbab,ababb,abbb,babab,bbab,babb,bbb\}$

Lenguajes regulares

Dado $A=\{ab,ca,ad\}$,

¿**abcaab** $\in A^3$? Sí

¿**adca** $\in A^2$? Sí

¿**caba** $\in A^2$? No

¿**abcaaa** $\in A^3$? No

¿**adcaab** $\in A^3$? Sí

Lenguajes regulares

Dado A={ab, c, ac},

¿**accab** $\in A^3$? Si

¿**abacca** $\in A^3$? No

¿**abcc** $\in A^3$? Si

¿**abcba** $\in A^3$? No

Lenguajes regulares

Dado $A=\{a,b,ab\}$ calcule

- $A^0 \cup A^1 \cup A^2$

Lenguajes regulares

Dado A={a,b,ab} calcule

- $A^0 \cup A^1 \cup A^2$

- $A^0 = \{\varepsilon\}$

- $A^1 = A = \{a,b,ab\}$

- $A^2 = A \cdot A = \{aa,ab,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\}$

Por lo tanto $A^0 \cup A^1 \cup A^2 = \{\varepsilon,a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\}$

Cerradura de Kleene

• La cerradura de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias, se denota por A^*

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- La cerradura de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias, se denota por A^*

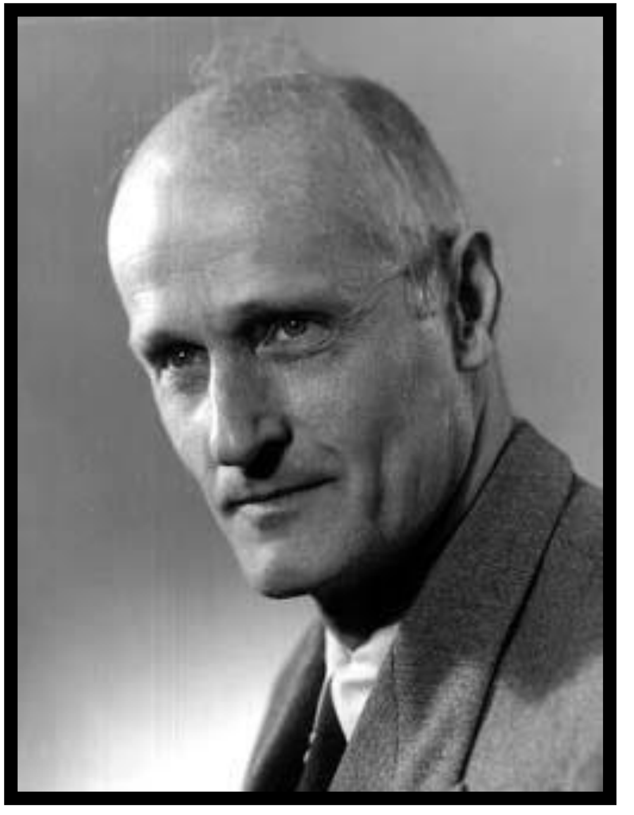
$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

- También se conoce como **cerradura estrella**
- A^* es el conjunto de posibles concatenaciones sobre A

Lenguajes regulares

Stephen Kleene

- Creador de las expresiones regulares
- Enunció la cerradura de Kleene, A*



(1909 - 1994)

Cerradura de Kleene

- Calcule A^* para $A=\{a, ab\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

$A^0=\{\varepsilon\}$

$A^1=\{a,ab\}$

$A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

. . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,...\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

  $A^0=\{\varepsilon\}$

  $A^1=\{a,ab\}$

  $A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

  . . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,...\}$

¿**ababab** $\in A^*$? Si

¿**abbbbb** $\in A^*$? No

¿**abaaaaaa** $\in A^*$? Si

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

$A^0=\{\varepsilon\}$

$A^1=\{a,ab\}$

$A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

. . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,\ldots\}$

lenguaje   Alfabeto

- ¿Qué relación tiene A^* con Σ^*?
- Calcule Σ^* sobre $\Sigma=\{a,b\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A=\{a, ab\}$

  $A^0=\{\varepsilon\}$

  $A^1=\{a,ab\}$

  $A^2=\{aa,aab, aba,abab\}$

  . . .

$A^*=\{\varepsilon,a,aa,ab,aab,aba,abab,...\}$

$\Sigma^*=\{\varepsilon,a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,...\}$

$A \subseteq \Sigma^*$

$A^* \subseteq \Sigma^*$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene A^* y Cerradura Σ^*

- Σ^* se define sobre el alfabeto y corresponde a todas las cadenas que se pueden crear sobre un alfabeto Σ
- A^* se define sobre un lenguaje A y consiste en todas las concatenaciones posibles

Cerradura de Kleene A^* y Cerradura Σ^*

- Σ^* se define sobre el alfabeto y corresponde a todas las cadenas que se pueden crear sobre un alfabeto Σ
- A^* se define sobre un lenguaje A y consiste en todas las concatenaciones posibles

$A=\{a, ab\}$ está definido sobre $\Sigma=\{a,b\}$

$A^* = \{\varepsilon,a,ab,aa,aab,aba,abab,\ldots\}$

$\Sigma^* = \{\varepsilon,a,b,aa,bb,ab,ba, aaa,aab,aba, \ldots\}$

- **En general se cumple que $A^* \subseteq \Sigma^*$**

Cerradura positiva de Kleene A^+

- La cerradura positiva de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias sin incluir $A^0=\{\varepsilon\}$,

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$$

Cerrada positiva Σ^+

- Es el conjunto de palabras que se pueden formar sobre Σ sin incluir la cadena vacía

Lenguajes regulares

Si

- Sea A={a,b,ab}, muestre A* y A⁺. Indique si abba∈A*, bbaa∈A*
- Sea A={a,aa,ac} y B={b,ba}, muestre A·B, B·A y B*

$A^* = \{\in, a, b, ab, aa, aab, abab, \ldots\}$

$A^+ = \{a, b, ab, aa, aab, abab, \ldots\}$

$A \cdot B = \{ab, aba, aab, aaba, acb, aba\}$

$B \cdot A = \{ba, baa, bac, baaa, bac\}$

$B^* = \{\in, b, ba, bb, bba, bab, baba, \ldots\}$

- **Sea A={a,b,ab}, muestre A^* y A^+**

$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

$\quad = \{\varepsilon\} \cup \{a,b,ab\} \cup \{aa,ab,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\} \cup \ldots$

$\quad = \{\varepsilon,a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab,\ldots\}$

$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

$\quad = \{a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab,\ldots\}$

- **Sea A={a,aa,ac} y B={b,ba}, muestre A·B, B·A y B***

$A\cdot B=\{ab,aba,aab,aaba,acb,acba\}$

$B\cdot A=\{ba,\cancel{baa},bac,baa,baaa,baac\}$

$B^*=\{\varepsilon,b,ba,bba,bab,bbba,babb,\ \ldots\}$

Lenguajes regulares

- Muestre cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes. Indique si la cadena vacía ε pertenece a los lenguajes y exprese de forma general (en palabras) el tipo de cadenas que pertenecen a cada uno.
  - $L_1=\{w_1cw_2 \mid |w_1|=|w_2|$ donde $w_1,w_2 \in \Sigma^*$ con $\Sigma=\{a,b\}\}$
  - $L_2=\{a^nb^m \mid n \neq m, n,m \geq 0\}$
  - $L_3=\{a^nb^{2n}c^n \mid n \geq 1\}$

- $L_1=\{w_1cw_2 \mid |w_1|=|w_2|$ donde $w_1,w_2 \in \Sigma^*$ con $\Sigma=\{a,b\}\}$

aca, acb,bca,abbbabcaaaaaa

En general, cadenas que tienen una c en el medio, tal que las subcadenas a sus lados tienen la misma longitud. $\varepsilon \notin L_1$

- $L_2=\{a^nb^m \mid n \neq m,\ n,m \geq 0\}$

abb,aab,aabbb,aaabb

En general, cadenas que tienen distinta cantidad de a's que b's donde están a la izquierda las a's de las b's. $\varepsilon \notin L_2$

- $L_3=\{a^nb^{2n}c^n \mid n \geq 0\}$

abbc, aabbbbcc, aaabbbbbbccc

En general, cadenas que tienen el doble de b's que a's y que c's donde aparecen de izquierda a derecha las a's, b's y luego c's. $\varepsilon \in L_3$

Lenguajes regulares

- Exprese de manera formal los siguientes lenguajes:

  - L_1 es el conjunto de cadenas del lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b,c\}$ que empiezan por a y terminan en a

  - L_2 es el conjunto de cadenas que tienen longitud par definidas sobre el lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b\}$

- **L_1 es el conjunto de cadenas del lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b,c\}$ que empiezan por a y terminan en a**

$L_1=\{aw_1a \mid w_1 \in \Sigma^* \text{ con } \Sigma=\{a,b,c\}\}$

- **L_2 es el conjunto de cadenas que tienen longitud par definidas sobre el lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b\}$**

$L_2=\{w_i \mid |w_i|=2k, \text{ donde existe } k\geq 1, w_i \in \Sigma^* \text{ con } \Sigma=\{a,b\}\}$

$\Sigma=\{a,b\}$

$L_3=\{ baw_1bw_2b \mid |w_1|=|w_2|, w_1 \in \Sigma^*, w_2 \in \Sigma^* \}$

Lenguaje de las palabras que comienza en ba seguidas en de una cadena w1 de a,b seguidas de b seguidas con la misma longitud de w1 terminadas en b

ba bb

babbbbab

babbbbab No

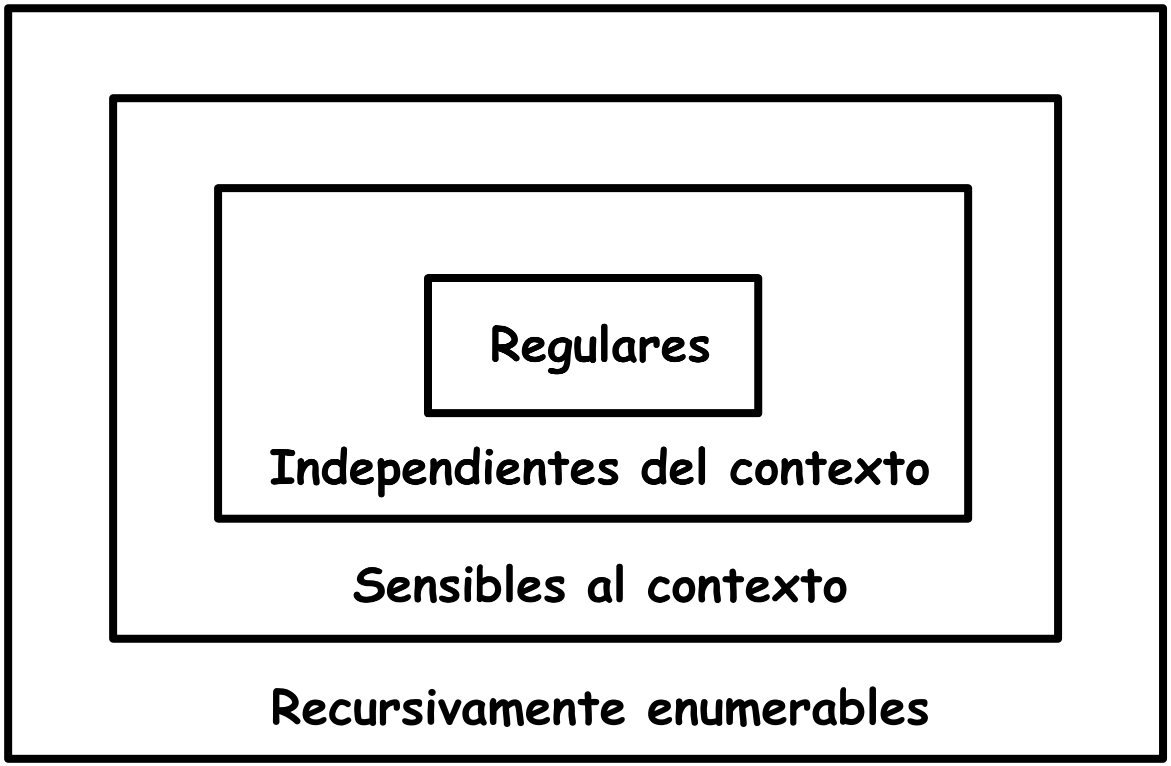
Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta$, $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Lenguajes Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes regulares

Jerarquía de Chomsky



Lenguajes regulares

Noam Chomsky

- Definió las gramáticas independientes del contexto
- Creador de la jerarquía de Chomsky. 1956
- Definió la forma normal de Chomsky. 1979

(1928 -)

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado un alfabeto Σ, los lenguajes regulares **sobre tal alfabeto** se definen recursivamente como:

- $\varnothing$ es un lenguaje regular
- $\{\varepsilon\}$ es un lenguaje regular
- Para todo símbolo $a \in \Sigma$, $\{a\}$ es un lenguaje regular
- Si A y B son lenguajes regulares, entonces

  $A \cup B$, $A \cdot B$ y A^* son lenguajes regulares
- Ningún otro lenguaje es regular

Lenguajes regulares

Dado Σ={a,b}, las siguientes afirmaciones son correctas:

- $\emptyset$ y $\{\varepsilon\}$ son lenguajes regulares
- {a} y {b} son lenguajes regulares
- {a,b} es regular porque es la unión de {a} y {b}
- {ab} es regular porque es la concatenación de {a} y {b}
- {a,ab,b} es regular porque es la unión de dos lenguajes regulares
- $\{a^n | n \geq 0\}$ es regular
- $\{a^m b^n | m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$ es regular
- $\{(ab)^n | n \geq 0\}$ es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$ $\quad a^0 \cup a^1 \cup a^2 \cup \ldots a^n$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ $\quad$ Si Regulare
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$ $\quad$ Si
- $\{a,bc\}^*$ $\quad \epsilon \cup \{a, bc\} \cup \{a, ab, bca\} \ldots$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$ $\quad$ Si
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ $\quad \underbrace{aaaaa}_{5}\,\underbrace{bbbbb}_{5}$ $\quad$ NO
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$ $\quad$ Si
- $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$ $\quad$ NO

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a,bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, no es regular
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$, no es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a,bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, no es regular
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$, no es regular

- $\{a^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$
- $\{b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, b, bb, bbb, \ldots\}$

$aab \in \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\} \cdot \{\varepsilon, b, bb, bb, \ldots\}$

pero no cumple $a^n b^n$

ab, abb,

$a^n b^n$

$a^n = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$

$b^{2n} = \{\varepsilon, bb, bbbb, \}$

abbb

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje L={abc,ab,a}$^+$

$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$

$L^+ = \{abc, ab, a, abcabc, abab, abca, ababc, abab, aba,$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,...\}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,...\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

$\{abc,ab,a\}^*=\{\varepsilon,abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

$\{abc,ab,a\}^*=\{\varepsilon,abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a\}^*\cdot\{abc,ab,a\}$

- En general se cumple que $A^+=A^*\cdot A$

$A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$

Lenguajes regulares

Indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- Si • $\{ab^na \mid n \geq 0\}$ ←
- No • $\{a^nb^mc^{n+m} \mid n,m \geq 0\}$
- No • $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$
- Si • $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w| = 2k, \text{ para } k \geq 0\}$

$b^n = \{\epsilon, b, bb, bbb \ldots\}$ aa abba

$a^n = \{\epsilon, \boxed{a}, aa, \ldots\}\ n \geq 0$

$b^m = \{\epsilon, \boxed{b}, bb, bbb\}\ m \geq 0 \quad m, n \geq 0$

$c^{n+m} = \{\epsilon, c, cc, ccc, \boxed{cccc}\}\ m+n \geq 0$

$\boxed{\boxed{a}\boxed{b}\boxed{cccc}} \in a^nb^mc^{n+m}$

$a^n\ b^m\ c^{n+m}$

abcbb

$\{\epsilon, aa, ab, ba, bb, \ldots$

aaab, aaba, aabb, aaaa

Lenguajes regulares

Indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{ab^na \mid n \geq 0\}$
- $\{a^nb^mc^{n+m} \mid n,m \geq 0\}$
- $\{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$
- $\{w \in \{a,b\}^* \mid \ |w| = 2k, \text{ para } k \geq 0\}$

  $\{aa, ab, ba, bb\}^*$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*$ $= \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ $\{\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$ $\{\epsilon, b, bb, bbb, \ldots, ab, abb,$
- $\{a, bc\}^*$ $\{\epsilon, a, bc, abc, bca, \ldots$
- $\{abc, ab, a\}^+$ $\{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \ldots$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\}$ $\{ab, ac, aab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\}$ $\{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$ $\{\epsilon, a, ab, b, bb,$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$ $\{\epsilon, a, b, c, abbbcc\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*$ $\quad \{\epsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ $\quad$ ¿$ab \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$? $\quad \{\epsilon, b, bb, bbb, \}$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$ $\quad$ ¿$bbb \in \{a\}^* \cdot \{b\}^*$?, ¿$baa \in \{a\}^* \cdot \{b\}^*$?
- $\{a,bc\}^*$ $\quad$ ¿$bcbca \in \{a,bc\}^*$?, ¿$baaa \in \{a,bc\}^*$?
- $\{abc,ab,a\}^+$
- $\{a\} \cdot \{b,c,ab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$

ϵ

$= \{\epsilon, a, aa, aab, b, bb, bbb\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,aaaa,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cup\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots\}\cup\{\varepsilon,b,bb,bbb,\ldots\}=\{\varepsilon,a,b,aa,bb,aaa,bbb,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cdot\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots,ab,aab,aaab,\ldots,b,b,bbb,\ldots\}$
- $\{a,bc\}^*=\{\varepsilon,a,bc,aa,abc,bca,bcba,aaa,\ldots\}$
- $\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$
- $\{a\}\cdot\{b,c,ab\}=\{ab,ac,aab\}$
- $\{(ab)^i|i\geq 0\}=\{\varepsilon,ab,abab,ababab,\ldots\}$
- $\{a^nb^m|n\geq 0,\ m\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,ab,aab,abb,aaab,\ldots\}$
- $\{a^lb^mc^n|l\geq 0,m\geq 0,n\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,c,ab,bc,abc,aa,aab,aac,\ldots\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,aaaa,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cup\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots\}\cup\{\varepsilon,b,bb,bbb,\ldots\}=\{\varepsilon,a,b,aa,bb,aaa,bbb,\ldots\}$
- $\{a\}^*\cdot\{b\}^*=\{\varepsilon,a,aa,aaa,\ldots,ab,aab,aaab,\ldots,b,b,bbb,\ldots\}$
- $\{a,bc\}^*=\{\varepsilon,a,bc,aa,abc,bca,bcba,aaa,\ldots\}$
- $\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,\ldots\}$
- $\{a\}\cdot\{b,c,ab\}=\{ab,ac,aab\}$
- $\{(ab)^i \mid i\geq 0\}=\{\varepsilon,ab,abab,ababab,\ldots\}$
- $\{a^n b^m \mid n\geq 0,\ m\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,ab,aab,abb,aaab,\ldots\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l\geq 0,m\geq 0,n\geq 0\}=\{\varepsilon,a,b,c,ab,bc,abc,aa,aab,aac,\ldots\}$

Note que el orden importa y que pueden haber cualquier cantidad de a's o de b's

Lenguajes regulares

Discuta la pertenencia de las siguientes cadenas dado $L=\{a,bc\}^* \cup \{ad,d\}^*$

$L_1 \quad L_2$

- ¿**bcabc** $\in$ L? Si
- ¿**aabcad** $\in$ L? No
- ¿**adbc** $\in$ L? No
- ¿**adad** $\in$ L? Si
- ¿**adddd** $\in$ L? Si

$\{a, bc\}^* = \{\epsilon, a, abc, bca, bcbc,$

$\{ad, d\} = \{\epsilon, ad, d, adad, add, dad, dd$

$= \{\epsilon, a, abc, bca, bcbc, \ldots,$

$ad, d, adad, add, dad, dd\}$

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* \cup \{b\}^*$$

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$\mathbf{L = \{a\}^* \cup \{b\}^*}$$

Cadenas que tienen a's o b's. Estos símbolos no aparecen mezclados

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$\mathbf{L = \{a\}^* \cdot \{b\}^*}$$

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* . \{b\}^*$$

Cadenas que tienen cero o más a's seguidas de cero o más b's

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

$$A = \{\underline{b}\}^* \cdot \{\underline{a}\} \cdot \{\underline{b}\}^*$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado Σ={a,b}, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

$$A = \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*$$

- Desarrolle el lenguaje

$A = \{ a, ba, ab, bab, bbab, \ldots$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b

$$b\{a \cup b\}^*$$

Lenguajes regulares

Dado Σ={a,b}, defina el lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b

$$B = \{b\} \cdot \{\{a\} \cup \{b\}\}^*$$

Lenguajes regulares

Dado Σ={a,b}, defina el lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba

$C = \{a \cup b\}^* \, ba \, \{a \cup b\}^*$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba

$$C = \{\{a\}\cup\{b\}\}^{*}\cdot\{ba\}\cdot\{\{a\}\cup\{b\}\}^{*}$$

Lenguajes regulares

Expresión regular

Una expresión regular es una forma simplificada de representar un lenguaje regular

Lenguaje regular	Expresión regular
{ab}	ab
$\{a\}^*$	a^*
$\{a\}^+$	a^+
$\{a\} \cup \{b\}$	$a \cup b$

Expresión regular

Algunas expresiones regulares:

- b^*
- $b(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^* ba (a \cup b)^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que comienzan con b y terminan con a

$b(a \cup b)^* a$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que comienzan con b y terminan con a

$$b(a\cup b)^*a$$

Lenguajes regulares

• Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre Σ={a,b} que tienen exactamente dos a's

$b^*ab^*ab^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen exactamente dos a's

  b*ab*ab*

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen un número par de a's

$$b^*(ab^*a)^*b^*$$

Lenguajes regulares

• Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre Σ={a,b} que tienen un número par de a's

b*(ab*ab*)*

b*(ab*a)*b*

Lenguajes regulares

• Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre Σ={a,b} que tienen longitud par

$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$

Lenguajes regulares

• Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud par

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre Σ={a,b} que tienen longitud impar

$$(a \cup b)(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

$$a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* a \cup (aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* b$$

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*(a \cup b)$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud impar

$$a(aa\cup ab\cup ba\cup bb)^* \cup b(aa\cup ab\cup ba\cup bb)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen al menos una b

$$(a \cup b)^* b (a \cup b)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen al menos una b

$$a^*b(a \cup b)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b,c\}$ que no contienen la subcadena ac

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b,c\}$ que no contienen la subcadena ac

$$(b \cup c)^*(a \cup bc^*)^*$$

a b c

bca

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el penúltimo símbolo es una a

$(a \cup b)^* a (a \cup b)$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el penúltimo símbolo es una a

$$(a\cup b)^*a(a\cup b)$$

Lenguajes regulares

• Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el antepenúltimo símbolo es una a

$$(a \cup b)^* a (a \cup b)(a \cup b)$$

$$(a \cup b)^* a (aa \cup ab \cup ba \cup bb)$$

$$aabba\boxed{bb}$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el antepenúltimo símbolo es una a

$$(a\cup b)^*a(a\cup b)(a\cup b)$$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$
6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$
9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^* (r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$
16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $\underline{r \cup s = s \cup r}$
2. $r \cup \varnothing = r = \varnothing \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$
6. $r \cdot \varnothing = \varnothing \cdot r = \varnothing$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$
9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$
10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$
16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$

$\boxed{\{a\} \cup \{bc\} = \{bc\} \cup \{a\} = \{a, bc\}}$

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$
2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$
3. $r \cup r = r$
4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$
5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$
6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$
7. $(rs)t = r(st)$
8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$
9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$
10. $\underline{(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*}$
11. $r(sr)^* = (rs)^* r$
12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$
13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$
14. $s(r \cup \varepsilon)^*(r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$
15. $rr^* = r^* r$
16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$