Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN

* Demostración directa
* Demostración indirecta
* Demostración por contraejemplo
* Inducción matemática

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración directa

- Se parte de la hipótesis y se intenta llegar a la conclusión

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

Técnicas de demostración

Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

- Si n y m son números impares, se pueden expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$
$$m=2\cdot k_2+1$$

- La suma n+m será:

$$\begin{aligned} n + m &= (2\cdot k_1+1) + (2\cdot k_2+1) \\ &= 2\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + 2 \\ &= 2\cdot(k_1 + k_2 + 1) \\ &= \boxed{2\cdot k_3} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n+m debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

$n = 2k_1 + 1$

$3(2k_1 + 1) + 2$

$6k_1 + 3 + 2 = 6k_1 + 2 + 1 + 2$

$2(\underbrace{3k_1 + 1 + 1}_{k_2}) + 1$

$\boxed{2k_2 + 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2\cdot k_1+1) + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 3 + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 4 + 1 \\ &= 2(3\cdot k_1 + 2) + 1 \\ &= \underline{2\cdot k_2 + 1} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, 3n+2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

$$\boxed{n = 2k_1 + 1}$$

$$(2k_1 + 1)^2$$

$$= 4k_1^2 + 4k_1 + 1$$

$$2(\underbrace{2k_1^2 + 2k_1}_{k_2}) + 1$$

$$\boxed{2k_2 + 1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1{}^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1{}^2 + 2k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

$$\boxed{n = 2k_1 + 1}$$

1
1 2 1
→ 1 3 3 1

$$(2k_1 + 1)^3 + 5$$

$$8k_1^3 + 3(2k_1)^2 \times 1 + 3 \times 2k_1 \times 1^2 + 1^3 + 5$$

$$8k_1^3 + 12k_1^2 + 6k_1 + \underbrace{1 + 5}_{6}$$

$$2(\underbrace{4k_1^3 + 6k_1^2 + 3k_1 + 3}_{k_2})$$

$$\boxed{2k_2} \leftarrow \text{Par}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^3+5 se tiene:

$$\begin{aligned} n^3 &= (2\cdot k_1+1)^3+5 \\ &= (2\cdot k_1)^3 + 3\cdot(2k_1)^2\cdot 1 + 3\cdot 2k_1\cdot 1^2 + 1^3 + 5 \\ &= 8\cdot k_1^3 + 12\cdot k_1^2 + 6\cdot k_1 + 6 \\ &= 2(4\cdot k_1^3 + 6\cdot k_1^2 + 3\cdot k_1 + 3) \\ &= 2\cdot k_2 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^3+5 debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

$n = 2k_1 \qquad m = 2k_2 + 1$

$2k_2 + 1 - 4k_1$

$2(\underbrace{k_2 - 2k_1}) + 1$

$\boxed{2k_3 + 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

- Si n es par y m es impar, se pueden expresar de la forma:

  $n=2\cdot k_1$

  $m=2\cdot k_2+1$

- Al calcular m-2n se tiene:

$$\begin{aligned} m-2n &= (2\cdot k_2+1)-2(2\cdot k_1) \\ &= 2\cdot k_2 + 1 - 4k_1 \\ &= 2(k_2 - 2\cdot k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, m-2n debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ es impar

$2k_1+1$ $\quad$ $2k_2$

$$(2k_1+1)^2 + 2(k_1+1)2k_2 + 4k_2^2$$

$$4k_1^2 + 4k_1 + 1^2 + 4k_1k_2 + 4k_2 + 4k_2^2$$

$$2(\underbrace{2k_1^2 + 2k_1 + 2k_1k_2 + 2k_2 + 2k_2^2}) + 1$$

$$\boxed{2k_3+1}$$

Técnicas de demostración

p

Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ es impar

q

- Si n es impar y n es par, se pueden expresar de la forma:

$$m=2\cdot k_1+1$$

$$n=2\cdot k_2$$

- Al calcular $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} m^2+2\cdot m\cdot n+n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2+2(2\cdot k_1+1)(2\cdot k_2)+(2\cdot k_2)^2 \\ &= 4\cdot k_1^2 + 4\cdot k_1 + 1 + 8\cdot k_1\cdot k_2 + 4\cdot k_2 + 4\cdot k_2^2 \\ &= 2(2\cdot k_1^2 + 2\cdot k_1 + 4\cdot k_1\cdot k_2 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_2^2) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ debe ser un número impar

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración indirecta

- Utiliza la contrapositiva de $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$
- Toma como hipótesis $\neg q$ e intenta llegar a la conclusión $\neg p$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 3n+2 es par"

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 3n+2 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2\cdot k_1) + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 2 \\ &= 2(3\cdot k_1 + 1) \\ &= 2\cdot k_2 \text{ , es decir, } 3n+2 \text{ es par} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

$$p \longrightarrow q$$

$$\neg q \longrightarrow \neg p$$

Si n es impar entonces n^2 es impar

$$(2k_1+1)^2 = 4k_1^2 + 2k_1 + 1$$

$$2k_2 + 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que “si n es impar, entonces n^2 es impar”

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1{}^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 4(k_1{}^2 + k_1) + 1 \\ &= 4\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } n^2 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

p q

Si n es impar entonces 7n-4 es impar

$7(2K_1+1)-4$

$14K_1+7-4$

$14K_1+2+1$

$2(7K_1+1)+1$

$\boxed{2K_2+1}$

$p \rightarrow q$

$\parallel$

$\neg q \rightarrow \neg p$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que “si n es impar, entonces 7n-4 es impar“

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces 7n-4 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

  $n=2\cdot k_1+1$

- Al calcular 7n-4 se tiene:

$$
\begin{aligned}
7n-4 &= 7(2\cdot k_1+1) - 4 \\
&= 14\cdot k_1 + 7 - 4 \\
&= 14\cdot k_1 + 3 \\
&= 14\cdot k_1 + 2 + 1 \\
&= 2(7\cdot k_1 + 1) + 1 \\
&= 2\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } 7n-4 \text{ es impar}
\end{aligned}
$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

Si n es par entonces 5n - 6 es par

$$5(2k_1) - 6$$

$$10k_1 - 6$$

$$2(5k_1 - 3) = \boxed{2k_2}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que “si n es par, entonces 5n-6 es par”

Técnicas de demostración

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 5n-6 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

  $n=2 \cdot k_1$

- Al calcular 5n-6 se tiene:

$$
\begin{aligned}
5n-6 &= 5(2 \cdot k_1) - 6 \\
&= 10 \cdot k_1 - 6 \\
&= 2(5 \cdot k_1 - 3) \\
&= 2 \cdot k_2, \text{ es decir, } 5n-6 \text{ es par}
\end{aligned}
$$

Demuestre que si nm es par, entonces n es par y m impar

Contrapositiva -(n es par y m impar) entonces nm es impar

Si n es impar o m es par entonces nm es impar

1). n es impar m par

$$\boxed{\begin{aligned} n &= 2K_1 + 1 \\ m &= 2K_2 \end{aligned}}$$

$$(2K_1+1)2K_2 = 4K_1K_2 + 2K_2$$

$$2K_3$$

2) n es impar m es impar

$$(2K_1+1)(2K_2+1)$$

$$\underbrace{4K_1K_2 + 2K_1 + 2K_2}_{} + 1$$

$$\boxed{2K_3+1}$$

Si 2n+3m es par, entonces n es impar y m es par.

Si n es par o m es impar entonces $2n+3m$ es impar

1) n par, m impar, $2n+3m$ es impar

$$2(2k_1) + 3(2k_2+1)$$

$$\underbrace{4k_1 + 6k_2 + 2} + 1$$

$$\boxed{2k_3 + 1}$$

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración por contraejemplo

- Se muestra un caso donde no se cumple una expresión cuantificada universalmente

*

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n

Técnicas de demostración

- **Todos los primos son impares**

  2 es un contraejemplo ya que es par y primo

- **Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo**

  n=7 es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no

- **n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos nx**

  n=40 es un contraejemplo ya que $40^2+40+41= 1681$ no es primo (es divisible entre 41)

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n
- $\forall x\ x^2 \geq x$ $\quad 0.8^2 \geq 0.8$ X
- $\forall x \forall y\ (x+y=x-y)$ $\quad 1+2=1-2$ X
- $\forall x \forall y\ (\ (x>0 \wedge y>0) \rightarrow x-y>0\ )$

$x = 1$

$y = 2$

$x-y>0$

$1-2>0$ X

Técnicas de demostración

1) Demuestre **q** a partir de las siguientes sentencias:

1. $p \vee \neg t$
2. $\neg s \vee w$
3. $t \wedge \neg r$
4. $p \rightarrow \neg w$
5. $\neg q \rightarrow s$

2) Demuestre de forma directa que si n y m son impares, entonces $(n^2+m^2)/2$ es impar

$n = 2K_1 + 1 \qquad m = 2K_2 + 1$

$$\frac{4K_1^2 + 4K_1 + 1 + 4K_2^2 + 4K_2 + 1}{2} = \frac{\cancel{2}(2K_1^2 + 2K_1 + 1 + 2K_2^2 + 2K_2)}{\cancel{2}} = \underbrace{2(K_1^2 + K_1 + K_2^2 + K_2) + 1}_{\boxed{2K_3+1}}$$

Técnicas de demostración

3) Demuestre de forma indirecta que si n^2+2m es par, entonces n y m son pares

4) Demuestre por contradicción que la siguiente afirmación no es correcta "2^n+1 es un número primo para todos los enteros no negativos n"

$2^3+1=9$

3)

Si n es impar o m es impar entonces n^2+2m es impar

$(2k_1+1)^2+2(2k_2+1)$

$4k_1^2+4k_1+1+4k_2+2$

$2(2k_1^2+2k_1+2k_2+1)+1$

$\boxed{2k_3+1}$