Arquitectura de computadores II

Aritmética del computador

Febrero de 2022

Representación de numéricos

0, 1 binario ←

0, 1, 2 Ternario

0, 1, 2, 3 base 4

⋮

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, base 8 ←

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 base 10 ←

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F Hex

The ASCII code

American Standard Code for Information Interchange

ASCII control characters

DEC	HEX	Simbolo ASCII	
00	00h	NULL	(carácter nulo)
01	01h	SOH	(inicio encabezado)
02	02h	STX	(inicio texto)
03	03h	ETX	(fin de texto)
04	04h	EOT	(fin transmisión)
05	05h	ENQ	(enquiry)
06	06h	ACK	(acknowledgement)
07	07h	BEL	(timbre)
08	08h	BS	(retroceso)
09	09h	HT	(tab horizontal)
10	0Ah	LF	(salto de linea)
11	0Bh	VT	(tab vertical)
12	0Ch	FF	(form feed)
13	0Dh	CR	(retorno de carro)
14	0Eh	SO	(shift Out)
15	0Fh	SI	(shift In)
16	10h	DLE	(data link escape)
17	11h	DC1	(device control 1)
18	12h	DC2	(device control 2)
19	13h	DC3	(device control 3)
20	14h	DC4	(device control 4)
21	15h	NAK	(negative acknowle.)
22	16h	SYN	(synchronous idle)
23	17h	ETB	(end of trans. block)
24	18h	CAN	(cancel)
25	19h	EM	(end of medium)
26	1Ah	SUB	(substitute)
27	1Bh	ESC	(escape)
28	1Ch	FS	(file separator)
29	1Dh	GS	(group separator)
30	1Eh	RS	(record separator)
31	1Fh	US	(unit separator)
127	20h	DEL	(delete)

ASCII printable characters

DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo
32	20h	espacio	64	40h	@	96	60h	`
33	21h	!	65	41h	A	97	61h	a
34	22h	"	66	42h	B	98	62h	b
35	23h	#	67	43h	C	99	63h	c
36	24h	$	68	44h	D	100	64h	d
37	25h	%	69	45h	E	101	65h	e
38	26h	&	70	46h	F	102	66h	f
39	27h	'	71	47h	G	103	67h	g
40	28h	(	72	48h	H	104	68h	h
41	29h	)	73	49h	I	105	69h	i
42	2Ah	*	74	4Ah	J	106	6Ah	j
43	2Bh	+	75	4Bh	K	107	6Bh	k
44	2Ch	,	76	4Ch	L	108	6Ch	l
45	2Dh	-	77	4Dh	M	109	6Dh	m
46	2Eh	.	78	4Eh	N	110	6Eh	n
47	2Fh	/	79	4Fh	O	111	6Fh	o
48	30h	0	80	50h	P	112	70h	p
49	31h	1	81	51h	Q	113	71h	q
50	32h	2	82	52h	R	114	72h	r
51	33h	3	83	53h	S	115	73h	s
52	34h	4	84	54h	T	116	74h	t
53	35h	5	85	55h	U	117	75h	u
54	36h	6	86	56h	V	118	76h	v
55	37h	7	87	57h	W	119	77h	w
56	38h	8	88	58h	X	120	78h	x
57	39h	9	89	59h	Y	121	79h	y
58	3Ah	:	90	5Ah	Z	122	7Ah	z
59	3Bh	;	91	5Bh	[	123	7Bh	{
60	3Ch	<	92	5Ch	\	124	7Ch	|
61	3Dh	=	93	5Dh	]	125	7Dh	}
62	3Eh	>	94	5Eh	^	126	7Eh	~
63	3Fh	?	95	5Fh	_			

theASCIIcode.com.ar

Extended ASCII characters

DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo	DEC	HEX	Simbolo
128	80h	Ç	160	A0h	á	192	C0h	└	224	E0h	Ó
129	81h	ü	161	A1h	í	193	C1h	┴	225	E1h	ß
130	82h	é	162	A2h	ó	194	C2h	┬	226	E2h	Ô
131	83h	â	163	A3h	ú	195	C3h	├	227	E3h	Ò
132	84h	ä	164	A4h	ñ	196	C4h	─	228	E4h	õ
133	85h	à	165	A5h	Ñ	197	C5h	┼	229	E5h	Õ
134	86h	å	166	A6h	ª	198	C6h	ã	230	E6h	µ
135	87h	ç	167	A7h	º	199	C7h	Ã	231	E7h	þ
136	88h	ê	168	A8h	¿	200	C8h	╚	232	E8h	Þ
137	89h	ë	169	A9h	®	201	C9h	╔	233	E9h	Ú
138	8Ah	è	170	AAh	¬	202	CAh	╩	234	EAh	Û
139	8Bh	ï	171	ABh	½	203	CBh	╦	235	EBh	Ù
140	8Ch	î	172	ACh	¼	204	CCh	╠	236	ECh	ý
141	8Dh	ì	173	ADh	¡	205	CDh	═	237	EDh	Ý
142	8Eh	Ä	174	AEh	«	206	CEh	╬	238	EEh	¯
143	8Fh	Å	175	AFh	»	207	CFh	¤	239	EFh	´
144	90h	É	176	B0h	░	208	D0h	ð	240	F0h	
145	91h	æ	177	B1h	▒	209	D1h	Ð	241	F1h	±
146	92h	Æ	178	B2h	▓	210	D2h	Ê	242	F2h	‗
147	93h	ô	179	B3h	│	211	D3h	Ë	243	F3h	¾
148	94h	ö	180	B4h	┤	212	D4h	È	244	F4h	¶
149	95h	ò	181	B5h	Á	213	D5h	ı	245	F5h	§
150	96h	û	182	B6h	Â	214	D6h	Í	246	F6h	÷
151	97h	ù	183	B7h	À	215	D7h	Î	247	F7h	¸
152	98h	ÿ	184	B8h	©	216	D8h	Ï	248	F8h	°
153	99h	Ö	185	B9h	╣	217	D9h	┘	249	F9h	¨
154	9Ah	Ü	186	BAh	║	218	DAh	┌	250	FAh	·
155	9Bh	ø	187	BBh	╗	219	DBh	█	251	FBh	¹
156	9Ch	£	188	BCh	╝	220	DCh	▄	252	FCh	³
157	9Dh	Ø	189	BDh	¢	221	DDh	¦	253	FDh	²
158	9Eh	×	190	BEh	¥	222	DEh	Ì	254	FEh	■
159	9Fh	ƒ	191	BFh	┐	223	DFh	▀	255	FFh	

$$5\ 9\ 5 = 5\times10^2 + 9\times10^1 + 5\times10^0$$

$10^2 \quad 10^2 \quad 10^0$

$A123_{16}$

$A\times16^3 + 16^2 +$

$2\times16^1 + 3\times16^0$

623_8

$6\times8^2 + 2\times8^1 + 3\times8^0$

1010

$2^3 + 2^1 = 10$

numero x base^{exp}

$5{,}75 \times 10^3 = 5750$

$6.23 \times 10^{-4} = 0{,}000623$

$1010_2 \times 2^2$

101000

1010×2^{-2}

$10{,}10$

$2^1\ 2^0\ 2^{-1}\ 2^{-2}$

1010,1101

$2^3 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4}$

$8 + 2 + 0.5 + 0.25 + 0.0625$

$a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

$123_8 \rightarrow 16$

$$\underbrace{1 \times 8^2}_{64} + \underbrace{2 \times 8^1}_{16} + \underbrace{3 \times 8^0}_{3} = 83$$

$235_7 = 124$

$100+20+4=124$

$2\times 7^2+3\times 7^1+5\times 7^0=2\times 49+21+5=98+21+5$

$576E_{16} = 22382$

$5\times 16^3+7\times 16^2+6\times 16^1+14\times 16^0$

$101010_2 = 42$

$$683{,}72_9 = 561{,}802$$

$$6\times9^2+8\times9^1+3\times9^0+7\times9^{-1}+2\times9^{-2}$$

$0{,}7526_{16}$ 0.4573669433593

$$7\times\frac{1}{16}+5\times\frac{1}{16^2}+2\times\frac{1}{16^3}+6\times\frac{1}{16^4}=$$

$$0{,}2101_3 = 0{,}78189$$

$\overset{2}{5}\,\overset{1}{2}\,\overset{0}{A}\,.\,\overset{-1}{F}\,\overset{-2}{2}\,\overset{-3}{3}_{16}$

9 A B C D E F

10 11 12 13 14 15

$$5 \times 16^{2} + 2 \times 16^{1} + 10 \times 16^{0} + 15 \times 16^{-1} + 2 \times 16^{-2} + 3 \times 16^{-3}$$

13D3

$5075_{10} \longrightarrow 16$

$5075 \,|\, 16$

$3 \quad 317 \,|\, 16$

$13 \quad 19 \,|\, 16$

$3 \quad 1$

1 3 13 3

1 3 D 3

$7216_{10} \longrightarrow 4$

6 5 4 3 2 1 0

1300300_4

$4^6 + 3 \times 4^5 + 3 \times 4^2$

$7216 \div 4$

0 | 1804 | 4

0 | 451 | 4

3 | 112 | 4

0 | 28 | 4

0 | 7 | 4

3 | 1

$10123_{10} \to 3$

$12456_{10} \to 8$

30250_8

$100453_{10} \to 16$

18865_{16}

$10123 \,\underline{|3}$
1 $3374 \,\underline{|3}$
2 $1124 \,\underline{|3}$
2 374

$374 \,\underline{|3}$
2 $124 \,\underline{|3}$
1 $41 \,\underline{|3}$
2 $13 \,\underline{|3}$
1 $4 \,\underline{|3}$
1 1

11121222$\underline{1}$

3AE147A

$2048{,}23_{10} \rightarrow {}_{16}$

$0{,}23 \times 16$

$\boxed{3}{,}68$

2048 | 16

0   128 | 16

0   8

$0{,}68 \times 16$

$\boxed{10}{,}88$

0.88×16

$\boxed{14}08$

0.08×16

$\boxed{1}.28$

$0.28 \times 16 = \boxed{4}48$

$0.48 \times 16 = \boxed{7}68$

$0.68 \times 16 = \boxed{10}88$

$2048.23_{10} \rightarrow {}_{16} = 800.3AE147A$

$107.42_{10} \rightarrow 2$

$0.42 \times 2 = \boxed{0}.84$

$0.84 \times 2 = \boxed{1}.68$

$0.68 \times 2 = \boxed{1}.36$

$0.36 \times 2 = \boxed{0}.72$

$0.72 \times 2 = \boxed{1}.44$

$0.44 \times 2 = \boxed{0}.88$

$0.88 \times 2 = \boxed{1}.76$

$0.76 \times 2 = \boxed{1}.52$

$0.52 \times 2 = \boxed{1}.04$

$0.04 \times 2 = 0.08$

107 | 2
1 53 | 2
1 26 | 2
0 13 | 2
1 6 | 2
0 3 | 2
1 1

110 1011

110 1011, 0110 10 111

$5072.33_{10} \longrightarrow {}_{12}$

1) $5072_{10} \longrightarrow 12$

$5072 \,\underline{|\,12}$

2) $0.33 \times 12 = \boxed{3}.96$

0.96×12

$= 1.00$

$$\boxed{101}\boxed{010}$$

52_8

$8 = 2^3$

$16 = 2^4$

$$\boxed{0010}\boxed{1010}$$

$2A_{16}$

$$1\;0\;0\;1\;0\;0\;1\;1$$

8

223_8

93_{16}

$2E_{16} \longrightarrow 2$ 101110_2

$37_8 \longrightarrow 2$ 11111_2

$37.A1_{16} \longrightarrow 2$

$37_{16} \longrightarrow 2$

$110111.\overset{A}{\boxed{1010}}\overset{1}{\boxed{0001}}$

$42.21_8 \longrightarrow 2$

100010.010001

Contenido

Unidad lógica aritmética

Definiciones

- Realiza cálculos aritméticos y lógicos
- Los elementos del computador suministra datos a la ALU
- Se basan en dispositivos lógicos digitales

Unidad lógica aritmética

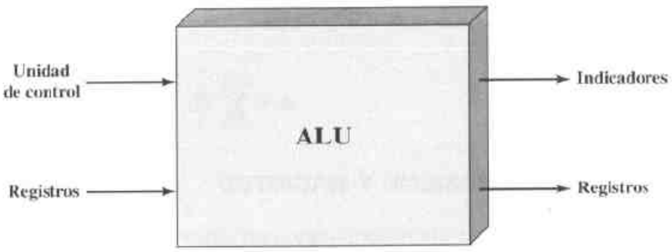


Figura 1: Entradas y salidas ALU

Contenido

Representación de enteros

Definiciones

- Cualquier número entero decimal puede representar en base binaria
- La base decimal consta de los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
- La base binaria consta de los dígitos $0, 1$

Ejemplo

$$4_{10} = 100_2$$

Representación de números reales

Definiciones

- Cualquier número real decimal se puede representar en binario
- Se debe tomar en cuenta la **coma de la base**

Ejemplo

$$10{,}025_{10} = 1010{,}01_2$$

$2^3 \, 2^2 \, 2^1 \, 2^0 , \, 2^{-1} \, 2^{-2}$

Representación de enteros

Definiciones

- Este tipo de representación sirve para que pueda ser procesada por el computador
- Si limitamos la representación a **número enteros no negativos** su representación es inmediata, si esta tiene n bits se pueden representar números desde 0 hasta $2^n - 1$

Ejemplo

Una palabra de 8 bits puede representar números entre 0 y 255 ejemplo:

$$
\begin{gathered}
00000000_2 = 0_{10} \\
00010000_2 = 16_{10} \\
10000000_2 = 128_{10} \\
11111111_2 = 255_{10}
\end{gathered}
$$

Representación de enteros

Transformación decimal a binario

- Para realizar la transformación de binario a decimal se realizan divisiones sucesivas por 2 y se toma el residuo
- Cuando se termina el proceso, el número en binario resultante es el orden inverso de los residuos

Ejemplo

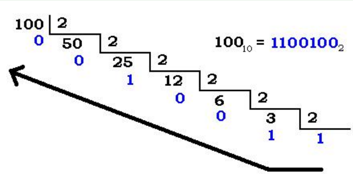


Figura 2: Conversión decimal a binario

Representación de enteros

Ejercicio en clase

Transformar de decimal a binario los siguientes números:

- 1000_{10}
- 2432_{10}
- 175_{10}

Representación de enteros

Ejercicio en clase

Respuestas:

- 1111101000_2
- 100110000000_2
- 10101111_2

Representación de enteros

Transformación binario a decimal

- Se toma en cuenta el valor de cada posición en base 2 y se multiplica por 0 o 1 según el caso
- Se suman estos valores para obtener el número en base decimal

Ejemplo

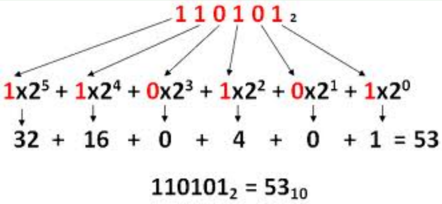


Figura 3: Conversión binario a decimal

Representación de enteros

Ejercicio en clase

Transformar de binario a decimal los siguientes números:

- 10001011_2
- 101101011011_2
- 11101000110_2

Representación de enteros

Ejercicio en clase

Respuestas:

- 139_{10}
- 2907_{10}
- 1862_{10}

Representación en suma magnitud

Definición

- Se utiliza para presentar enteros negativos y positivos
- El bit más a la izquierda (más significativo) es:
  1. 1 si el número es negativo
  2. 0 si el número es positivo
- Para esta representación se establece el tamaño de n bits, donde se utilizan $n-1$ bits para representar el número deseado
- El rango de representación en signo magnitud es $-2^{n-1}-1$ a $2^{n-1}-1$ para n bits

$1\ \boxed{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1}$

$-$ valor -2^{7-1}

$0\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\quad 2^{7-}-1$

Representación en suma magnitud

Ejemplo

Para el caso de $n = 8$ se tiene por ejemplo:

$$18_{10} = \boxed{0}0010010_2$$
$$-18_{10} = \boxed{1}0010010_2$$

Representación en suma magnitud

Limitaciones

- Existen dos representaciones del cero:
  1. $0_{10} = 00000000_2$
  2. $0_{10} = 10000000_2$

  Esto es inconveniente ya que se tiene que tomar en cuenta las dos representaciones del cero
- Debido a la limitación de la representación en signo magnitud esta no es utilizada

Representación en complemento a dos

32 int 64 long 128 long long

Definición

- Se utiliza para presentar enteros negativos y positivos
- El bit más a la izquierda (más significativo) es:
  1. 1 si el número es negativo
  2. 0 si el número es positivo
- Difiere en la forma de representar los bits restantes.
- El rango de la representación es: -2^{n-1} hasta $2^{n-1} - 1$

Representación en complemento a dos

Definición

Para calcular el complemento a dos de un número binario, se realiza el siguiente proceso:

- **Si es positivo:** Es la misma representación que signo magnitud
- **Si es negativo:** Aplique el siguiente procedimiento:
  1. Cambie 0 por 1 y 1 por 0 a un número en representación de signo magnitud, excepto el bit más significativo
  2. Sume 1 al este número

Representación en complemento a dos

Ejemplo

Transforme 4 y -4 a signo magnitud, en una representación binaria de 4 bits. compa mento A2.

1. Para 4, en signo magnitud es: 0100, por lo que su representación en complemento a dos es 0100.
2. Para -4, en signo magnitud es 1100, su complemento 1011 y lo sumamos 1, se obtiene 1100

4 bits

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

			Valor
-1	1110	→	1111
-2	1101	→	1110
-3	1100	→	1101
-4	1011	→	1100
-5	1010	→	1011
-6	1001	→	1010
-7	1000	→	1001
-8	1000		

int 32 bits Complemento A2

min -2^{31}

max $2^{31}-1$

Representación en complemento a dos

Ejercicio en clase

Transforme a complemento a dos los siguientes números decimales:

- 59_{10}
- -117_{10}
- 207_{10}

Suponga en todos los casos que se utiliza una representación de 10 bits.

0 0 0 0 1 1 1 0 1 1

0 0 0 1 1 1 0 1 0 1

1 1 1 0 0 0 1 0 1 0

1 1 1 0 0 0 1 0 1 1

0 0 1 1 0 0 1 1 1 1

Representación en complemento a dos

Ejercicio en clase

Respuestas:

- 0000111011_2
- 1110001011_2
- 0011001111_2

Enlace

Una herramienta útil: `http://www.exploringbinary.com/twos-complement-converter/`

Contenido

Aritmética con enteros

Negación

Para obtener el opuesto a un entero, se debe invertir los bits y sumarle 1.

Ejemplo

$18_{10} = 00010010_2$
Complemento bit a bit: 11101101_2 Sumandole 1:
$11101110_2 = -18_{10}$

4

0010 2 0001

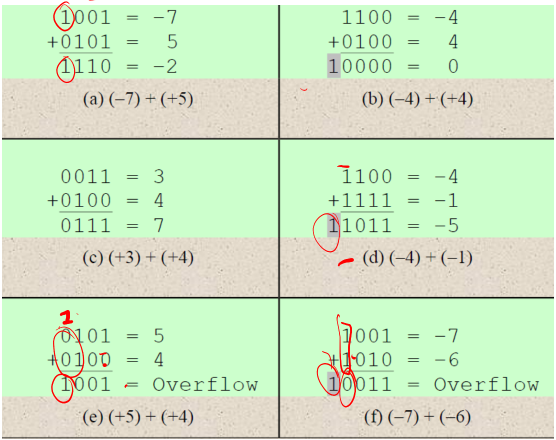
0010 ← 2

1101

1110 -2

Aritmética con enteros

La suma se realiza en la misma forma como si los números fueran enteros sin signo.



1001
01100
0100(-4

Figura 4: Suma de números en complemento a dos

Aritmética con enteros

Regla de desbordamiento

Al sumar dos números, y ambos son o bien positivos o negativos, se produce desbordamiento si y sólo si el resultado tiene signo opuesto

Regla de la resta

Para substraer un número (el substraendo) de otro (minuendo) se obtiene la negación del substraendo y se le suma al minuendo

Aritmética con enteros

0010
0111 -

+0010
1001

0010 = 2 +1001 = −7 1011 = −5	0101 = 5 +1110 = −2 10011 = 3
(a) M = 2 = 0010 S = 7 = 0111 −S = 1001	(b) M = 5 = 0101 S = 2 = 0010 −S = 1110
1011 = −5 +1110 = −2 11001 = −7	0101 = 5 +0010 = 2 0111 = 7
(c) M = −5 = 1011 S = 2 = 0010 −S = 1110	(d) M = 5 = 0101 S = −2 = 1110 −S = 0010
0111 = 7 +0111 = 7 1110 = Overflow	1010 = −6 +1100 = −4 10110 = Overflow
(e) M = 7 = 0111 S = −7 = 1001 −S = 0111	(f) M = −6 = 1010 S = 4 = 0100 −S = 1100

S- −2

Figura 5: Resta de números en complemento a dos

Aritmética con enteros

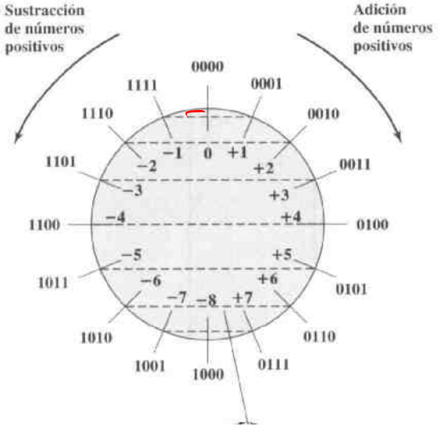


Figura 6: Representación suma y resta de números en complemento a dos

Aritmética con enteros

Multiplicación

La multiplicación es una operación compleja en hardware o software. En este caso se va discriminar la multiplicación entre enteros con y sin signo

Multiplicación enteros sin signo

Es similar a la multiplicación clásica.

Aritmética con enteros

1011	Multiplicando (11)
×1101	Multiplicador (13)
1011	Productos parciales
0000	
1011	
1011	
10001111	Producto (143)

123
12
246
123+
1476

Figura 7: Multiplicacion enteros sin signo

Aritmética con enteros

Multiplicación enteros con signo

Para los enteros con signo se utiliza la notación de complemento a dos. Debido a que esta no es sencilla se utiliza la representación de un número binario en potencias de dos:

$$\begin{aligned} 1101 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 2^3 + 2^2 + 2^0 \end{aligned}$$

Figura 8: Representación de un número como suma de potencias

Por lo que se puede realizar la multiplicación en complemento a dos como sumas de multiplicaciones parciales.

Aritmética con enteros

Multiplicación enteros con signo

11

0 1011	13
0 × 1101	

00001011	$1011 \times 1 \times 2^0$
00000000	$1011 \times 0 \times 2^1$
00101100	$1011 \times 1 \times 2^2$
01011000	$1011 \times 1 \times 2^3$
10001111	143

128 8 4 2 1

Figura 9: Ejemplo multiplicación en complemento a dos

1011
100 ×
101100

Para los num negativo (positivos)

Representación en complemento a dos

Ejercicio en clase

Realiza las siguientes multiplicaciones.

- $5_{10} * -10_{10}$
- $4_{10} * -16_{10}$
- $-15_{10} * -3_{10}$

Suponga en todos los casos que se utiliza una representación de 8 bits.

0|0000101

0|0001010

101

1010

1010

101000

110010

5

10

00110010

32 16 8 4 2 1

11001110 -50

4 x -16

100

10000

0 1000000 → 10111111

11000000 $\boxed{-64}$

-3 x -15

11

1111

11

110+

1100

11000+

101101

00101101

32 8 4 1

División

La división es una operación altamente costosa, en nuestro caso se realiza de igual forma que la división clásica.

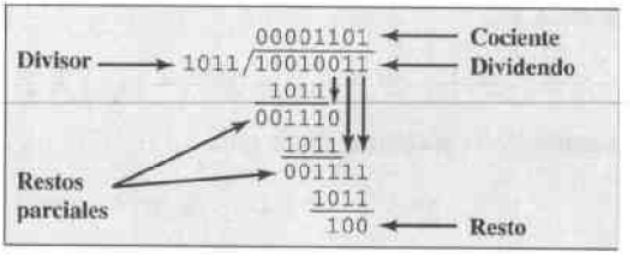


Figura 10: Ejemplo división enteros sin signo

8 bits

20   4

101

10100 | 100

$\boxed{\cdot 00000101}$

-100

10

-000

100

-100

0

10 3

1010 11

$$
\begin{array}{r}
11 \quad 3 \\
10100 \;\big)\; 11 \\
-11 \\
\hline
100 \\
-11 \\
\hline
1
\end{array}
$$

156 3

0 1 0 0 1 1 1 0 0 11

128 64 32 16 8 4 2 1

110100

32 16 4

52

$$
\begin{array}{r}
110100 \\
10011100 \;\big)\; 11 \\
-11 \\
\hline
11 \\
-11 \\
\hline
01 \\
-00 \\
\hline
11 \\
-11 \\
\hline
00 \\
-00 \\
\hline
00 \\
-00 \\
\hline
0
\end{array}
$$

10 bits

433

-15

1 1 0 1 1 0 0 0 1

256 128 64 32 16 8 4 2 1

256+128+32+16+1

433-256

430-250=180

177

177-128=49

49-32=17

11100

1111) 110110001

-1111

11000

-1111

10010

-1111

1101

28x15 = 280+140

420 +13

433 ✓

0000011100

1111100100 -28

Preguntas

¿Preguntas?

Siguiente tema:
Aritmética del computador:
Representación y aritmética en coma flotante