Primer examen parcial - Matemáticas discretas II
Duración 2 horas

Carlos Andres Delgado S, Msc
carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

02 de Abril de 2022

Importante: Recuerde que es imprescindible mostrar el procedimiento realizado, sólo mostrar respuestas sin su respectivo soporte no será tomado en cuenta para la calificación.

1. [**25 puntos**] Resuelva la R.R $T(n) = 5T(n-1) + 4T(n-2) + 12 - 2^n + 8*(4^n)$, con $T(0) = 10$, $T(1) = 20$. Indique
   a) (5 puntos) Ecuación característica(EC) y solución general homogénea
   b) (10 puntos) Forma de la solución particular, con sus constantes calculadas
   c) (10 puntos) Calculo de la solución total considerando las condiciones iniciales.
2. [**25 puntos**] Resuelva la siguiente ecuación mediante método de cambio de variable $T(n) = 6T(\frac{n}{3}) - 9T(\frac{n}{9}) + 2n$,$T(1) = 3, T(3) = 9$.
   a) (5 puntos) Ecuación característica(EC) y solución general homogénea en términos de k
   b) (10 puntos) Forma de la solución particular, con sus constantes calculadas en términos de k
   c) (10 puntos) Solución total en términos de n. Calculo de la solución total considerando las condiciones iniciales.
3. [**25 puntos**] ¿Cuantas palabras de tamaño 6,7 y 8 se pueden realizar con las letras de la palabra **TOALLITA** ?. Deje expresadas las combinatorias o permutaciones que va calculando como sumas o multiplicaciones según sea el caso. Esta es la evidencia de presentación de este punto.
4. [**25 puntos**] En la Universidad del Valle se utiliza un sistema de 8 caracteres alfanuméricos para etiquetar los diferentes bienes disponibles, bajo las siguientes reglas:
   - El primer debe ser un número par
   - Los siguientes dos deben ser letras en mayúsculas en el alfabeto inglés.
   - El cuarto puede ser una vocal o un número
   - Los siguientes pueden ser caracteres alfanuméricos.

   Ejemplos: 2BA1AF45, 2BAU45645. ¿Cuantas posibles etiquetas se tienen?. Deje expresadas las combinatorias o permutaciones que va calculando como sumas o multiplicaciones según sea el caso. Esta es la evidencia de presentación de este punto.

1. **[25 puntos]** Resuelva la R.R $T(n) = 5T(n-1) + 4T(n-2) + 12 - 2^n + 8 * (4^n)$, con $T(0) = 10$, $T(1) = 20$. Indique

   a) (5 puntos) Ecuación característica(EC) y solución general homogénea

   b) (10 puntos) Forma de la solución particular, con sus constantes calculadas

   c) (10 puntos) Calculo de la solución total considerando las condiciones iniciales.

$r^2 - 5r - 4 = 0$

$\frac{5 \pm \sqrt{25+16}}{2}$ $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$

$T(n)^h = A\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^n + B\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)^n$

$T^p(n) = C + D2^n + E4^n$

$C + D2^n + E4^n = 5\left(C + \frac{D2^n}{2} + \frac{E4^n}{4}\right) + 4\left(C + \frac{D2^n}{4} + \frac{E4^n}{16}\right) + 12 - 2^n + 8 \times 4^n$

2^n | $D = \frac{5D}{2} + D - 1$ $\quad -\frac{5}{2}D = -1$ $\quad \boxed{D = 2/5}$

4^n | $E = \frac{20}{16}E + \frac{4}{16}E + 8$ $\quad$ ($\frac{5}{4}$) $\quad E = \frac{24}{16}E + 8$ $\quad \frac{2}{2}E = \frac{3}{2}E + 8$

$-\frac{1}{2}E = 8$ $\quad \boxed{E = -16}$

ctes | $C = 5C + 4C + 12$ $\quad -8C = 12$ $\quad C = -\frac{12}{8}$

$\boxed{C = -3/2}$

$$T(n)^h = A\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)^n + B\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)^n - \frac{3}{2} + \frac{2}{5}2^n - 16 \times 4^n$$

$$10 = A + B - \frac{3}{2} + \frac{2}{5} - 16$$

$$20 = \left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right)A + \left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right)B - \frac{3}{2} + \frac{4}{5} - 64$$

[16.19714526 10.90285474]

$$\underbrace{\quad}_{A} \quad \underbrace{\quad}_{B}$$

2. **[25 puntos]** Resuelva la siguiente ecuación mediante método de cambio de variable $T(n) = 6T(\frac{n}{3}) - 9T(\frac{n}{9}) + 2n, T(1) = 3, T(3) = 9$.

   a) (5 puntos) Ecuación característica(EC) y solución general homogénea en términos de k

   b) (10 puntos) Forma de la solución particular, con sus constantes calculadas en términos de k

   c) (10 puntos) Solución total en términos de n. Calculo de la solución total considerando las condiciones iniciales.

$n = 3^k$

$$T(k) = 6T(k-1) - 9T(k-2) + 2 \times 3^k$$

$$r^2 - 6r + 9 \quad \begin{cases} r = 3 \\ r = 3 \end{cases}$$

$$T^h(k) = A3^k + Bk3^k \qquad T^p(k) = ck^2 3^k$$

$$ck^2 \times 3^k = 6\underbrace{(k-1)^2 3^k}_{3} c - 9\underbrace{(k-2)^2}_{9} 3^k c$$

$$c \cancel{k^2} 3^k = c2(\cancel{k}^2 - 2\cancel{k} + 1)3^k - (\cancel{k}^2 - 4\cancel{k} + 4)3^k c + 2 \times 3^k$$

$$\begin{array}{l|lll}
k^2 3^k & c = 2c - c & c = c \checkmark & \\
k 3^k & 0 = -4c + 4c & 0 = 0 \checkmark & \\
3^k & 0 = 2c - 4c + 2 & 2c = 2 & \boxed{c = 1}
\end{array}$$

$$\boxed{T(k) = A3^k + Bk3^k + k^2 3^k}$$

$n = 3^k$

$k = \log_3(n)$

$$T(k) = A3^{\log_3(n)} + B\log_3(n) \times 3^{\log_3(n)} + (\log_3(n))^2 \times 3^{\log_3(n)}$$

$$T(n) = An + B\log_3(n) \times n + (\log_3(n))^2 \times n$$

$T(1) = 3$

$T(3) = 9$

$$\boxed{3 = A}$$

$$9 = 3A + B \times 3 + 3$$

$$6 = 9 + 3B \qquad -3 = 3B \qquad \boxed{B = -1}$$

3. **[25 puntos]** ¿Cuantas palabras de tamaño 6,7 y 8 se pueden realizar con las letras de la palabra **TOALLITA** ?. Deje expresadas las combinatorias o permutaciones que va calculando como sumas o multiplicaciones según sea el caso. Esta es la evidencia de presentación de este punto.

$T=2 \quad A=2 \quad L=2 \quad O, I.$

2) $\dfrac{8!}{2!2!2!}$

2) $C(3,1)\dfrac{7!}{2!2!} \quad C(2,1)\times\dfrac{7!}{2!2!2!}$

6) $C(3,1)\times\dfrac{6!}{2!2!}+\dfrac{6!}{2!}+\dfrac{6!}{2!}+\dfrac{6!}{2!}+\dfrac{6!}{2!2!2!}$

TA TL AL

$+\underbrace{C(2,1)}_{O,I}\times\underbrace{C(3,1)}_{T,A,L}\dfrac{6!}{2!2!}$

. **[25 puntos]** En la Universidad del Valle se utiliza un sistema de 8 caracteres alfanuméricos para etiquetar los diferentes bienes disponibles, bajo las siguientes reglas:

- El primer debe ser un número par
- Los siguientes dos deben ser letras en mayúsculas en el alfabeto inglés.
- El cuarto puede ser una vocal o un número
- Los siguientes pueden ser caracteres alfanuméricos.

Ejemplos: 2BA1AF45, 2BAU45645. ¿Cuantas posibles etiquetas se tienen?. Deje expresadas las combinatorias o permutaciones que va calculando como sumas o multiplicaciones según sea el caso. Esta es la evidencia de presentación de este punto.

$$\boxed{5\times 26^2\times 20\times 62^4}$$