Complejidad y optimización

Reducción SAT a Programación Entera

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Mayo 2019

Contenido

Universidad del Valle

Programación entera

Definición

Se tiene conjunto A de v variables enteras, un conjunto de desigualdades entre estas variables y una función $f(v)$ de variables a maximizar y un entero B.

Problema de decisión

¿Existe una asignación de enteros de v que satisfaga todas las desigualdades y $f(v) \geq B$?. **Recuerda:** Un problema de decisión tiene como respuesta **SI** o **NO**

Programación entera

Ejemplo

Una instancia del problema de programación entera es:

$$A = \{v_1, v_2\}$$
$$f(v) = 2v_2, B = 3 \qquad f(v) \geq B$$
$$v_1 \geq 1, v_2 \geq 0 \qquad \boxed{2V_2 \geq 3}$$
$$v_1 + v_2 \leq 3$$

$V_1 = 1 \qquad V_2 = 2$

¿Que valores de v_1 y v_2 satisfacen este problema?

Programación entera

Ejemplo

Una instancia del problema de programación entera es:

$$
\begin{aligned}
A &= \{v_1, v_2\} \\
f(v) &= 2v_2, B = 3 \\
v_1 &\geq 1, v_2 \geq 0 \\
v_1 + v_2 &\leq 3
\end{aligned}
$$

¿Que valores de v_1 y v_2 satisfacen este problema?.
Respuesta: $v_1 = 1$ y $v_2 = 2$

Ejemplo

Otro problema:

$|(\ )| = d$

$$
\begin{aligned}
A &= \{v_1, v_2\} \\
f(v) &= 2v_2, B = 5 \\
v_1 \geq 1&, v_2 \geq 0 \\
v_1 + v_2 &\leq 3
\end{aligned}
$$

$F(v) \geq B \quad 2v_2 \geq 5$

No hay solución, debido a que la restricción $v_1 + v_2 \leq 3$ y $v_1 \geq 1$ impiden que v_2 tome un valor mayor que 2, y debe cumplirse $f(v) \geq B$.

Programación entera

Programación entera es NP

El problema e programación entera es NP, ya que si tomamos un conjunto A de v_i variables enteras de tamaño n, se necesitará generar un conjunto de combinaciones d^n de las variables v_i para solucionar el problema, donde d son los valores posibles que puede tomar v_i.

$d \quad d \quad d \quad d \quad d \quad d \quad \ldots \quad d = O(d^n)$

Ejemplo

Supongamos que $d = 3$ y $n = 4$. Por ejemplo, los posibles valores de v_i son $\{0, 1, 2\}$, las combinatorias de los valores son $\{(0, 0, 0, 0)(0, 0, 0, 1), ..., (2, 2, 2, 2)\}$ El tamaño de ese conjunto es 3^4.

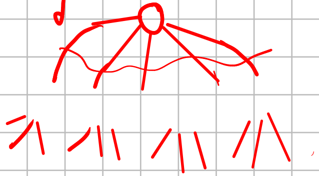
Universidad del Valle

$(V_1, V_2, \ldots V_j \ldots V_n)$

$\downarrow$

d

d



$d \cdot d$

d^3

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{array}\right\} n$$

$O(n)$

$=$

¿Puedo verificar una solución es correcta en una MTND en tiempo polinomial?

Sí, reemplazar variables

Contenido

¿Programación entera es NPC?

Demostración.

Postulado Sabemos que SAT es NP-Completo, entonces reduciremos desde una instancia de SAT a una instancia de programación entera. Denotaremos Programación Entera como **IP** *(Integer Programming)* $\square$

Importante

$$SAT \leq_p IP.$$

¿Programación entera es NPC?

Procedimiento de reducción

Se sabe que SAT, es un conjunto de v_i variables y un conjunto de clausulas c_i en forma normal conjuntiva. Para realizar la reducción se crean las siguientes restricciones:

- $0 \leq v_i \leq 1$ y $0 \leq \neg v_i \leq 1$ Ambas variables están restringidas por valores 0 y 1, equivalentes a verdadero o falso.
- $1 \leq v_i + \neg v_i \leq 1$ Si una de las variables es 1, su negado debe ser 0 y viceversa.
- Por cada clausula $c_i = \{v_i, v_j, ...v_k\}$ se crea una restricción $v_i + v_j + ... + v_k \geq 1$. Esto garantiza que si la clausula es satisfecha en SAT debe al menos existir una variable que sea verdadera.

SAT $\quad V = \{V_1, V_2, \dots V_n\}$ $\quad |V| = n$

$C \leftarrow$ clausulas $\quad |C| = m$

$0 \leq V_i \leq 1 \quad 0 \leq \overline{V_i} \leq 1$ $\quad 3n + m$

$1 \leq V_i + \overline{V_i} \leq 1$

$\{V_i, V_{i+1}, \dots V_j\} = V_i + V_{i+1} + \dots + V_j \leq 1$

¿Programación entera es NPC?

Procedimiento de reducción

Continuando:

- La función de maximización es relativamente poco importante, basta con: $f(v) = v_1$ y $B = 0$.

Como se puede observar esta reducción es en tiempo polinomial

1. Si se tienen n variables en SAT, se crean $2n$ variables y $3n$ restricciones en PI
2. Si se tienen y clausulas en SAT, se crean y restricciones en PI

Instancias positivas de SAT llevan a instancias positivas IP

$$\overbrace{\{V_i, \dots V_j\}}^{\vee} \overbrace{\{V_k \dots V_m\}}^{\vee} \dots \overbrace{\{V_p, \dots, V_q\}}^{\vee} \to F(V) \geq 0$$

$$0 \leq \bar{V_i} \leq 1$$
$$0 \leq V_i \leq 1$$

$$\underline{1}$$

$$V_k + \dots + V_m \geq 1$$

Instancias negativas de SAT llevan a instancias negativas de IP

Para que el SAT no se pueda satisfacer debe cumplirse que al menos una clausula sea Falsa, ello significa que la restrcción vi+..+vj >= 1 no se cumple.114

¿Programación entera es NPC?

Instancias positivas en SAT = instancias positivas en PI

Si todos las cláusulas en SAT son verdaderas $c_i = \{v_i, v_j, ...v_k\}$, si cumplirá $v_i + v_j + ... + v_k \geq 1$. Las restricciones $0 \leq v_i \leq 1$, $0 \leq \neg v_i \leq 1$ y $1 \leq v_i + \neg v_i \leq 1$ **siempre se cumplen** ya que v_i toma valores 0 o 1.

Instancias negativas en SAT = instancias negativas en PI

Si alguna de las clausulas $c_i = \{v_i, v_j, ...v_k\}$ no se cumple, entonces $v_i + v_j + ... + v_k \geq 1$ no se puede cumplir debido a que todas las $v_i = 0$.

¿Programación entera es NPC?

$V_i \to 0 \leq V_i \leq 1$, $0 \leq \overline{V_i} \leq 1$

$\{V_i, V_j, \ldots, V_k\} \to V_i + V_j + \cdots + V_k \geq 1$

Ejemplo

Transformar esta instancia de SAT a PI

$$C = \{v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}$$

Como se puede observar este SAT se puede satisfacer con $v_1 = V, v_2 = V, v_3 = F$

$1 \leq V_i + \overline{V_i} \leq 1$

$F(V) \geq 0$

$V_i \geq 0$

$$C = \{v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}$$

SI

$0 \le V_1 \le 1 \quad 0 \le V_2 \le 1 \quad 0 \le V_3 \le 1$

$0 \le \bar{V}_1 \le 1 \quad 0 \le \bar{V}_2 \le 1 \quad 0 \le \bar{V}_3 \le 1$

$1 \le V_1 + \bar{V}_1 \le 1 \quad 1 \le V_2 + \bar{V}_2 \le 1 \quad 1 \le V_3 + \bar{V}_3 \le 1$

$V_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 \ge 1 \quad V_2 + V_3 \ge 1$

$1 + 0 + 1 \ge 1 \quad 1 + 0 \ge 1$

$V_1 \ge 0$

$V_1 = 1 \quad \bar{V}_1 = 0$

$V_2 = 1 \quad \bar{V}_2 = 0$

$V_3 = 0 \quad \bar{V}_3 = 1$

$$\rightarrow \{V_1, V_2, V_3\} \quad \{V_1, V_2, \bar{V}_3\} \quad \{V_1\, \bar{V}_2\, V_3\} \quad \{V_1\, \bar{V}_2\, \bar{V}_3\}$$

$$\{\bar{V}_1\, V_2\, V_3\} \quad \{\bar{V}_1\, V_2\, \bar{V}_3\} \quad \{\bar{V}_1\, \bar{V}_2\, V_3\} \quad \{\bar{V}_1\, \bar{V}_2\, \bar{V}_3\}$$

$$\searrow \begin{cases} 0 \le V_1 \le 1 & 0 \le V_2 \le 1 & 0 \le V_3 \le 1 \\ 0 \le \bar{V}_1 \le 1 & 0 \le \bar{V}_2 \le 1 & 0 \le \bar{V}_3 \le 1 \end{cases}$$

$$\{ 1 \le V_1 + \bar{V}_1 \le 1 \quad 1 \le V_2 + \bar{V}_2 \le 1 \quad 1 \le V_3 + \bar{V}_3 \le 1$$

$$V_1 + V_2 + V_3 \ge 1 \quad \dots \quad \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 \ge 1$$

¿Programación entera es NPC?

Ejemplo

$$C = \{v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}$$

- Generamos las variables $\{v_1, v_2, v_3, \neg v_1, \neg v_2, \neg v_3\}$
- Se agregan las restricciones $0 \leq v_1 \leq 1, 0 \leq v_2 \leq 1, 0 \leq v_3 \leq 1, 0 \leq \neg v_1 \leq 1, 0 \leq \neg v_2 \leq 1, 0 \leq \neg v_3 \leq 1$
- Agregamos las restricciones $1 \leq v_1 + \neg v_1 \leq 1, 1 \leq v_2 + \neg v_2 \leq 1, 1 \leq v_3 + \neg v_3 \leq 1$
- Creamos las restricciones asociadas con las cláusulas $v_1 + \neg v_2 + \neg v_3 \geq 1$ y $v_2 + v_3 \geq 1$
- Finalmente $f(v) = v_1$ y $B = 0$

Si comprobamos efectivamente se cumple PI, con $v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 0, \neg v_1 = 0, \neg v_2 = 0, \neg v_3 = 0$

¿Programación entera es NPC?

Ejercicio 1

$V_1 = 0 \quad V_2 = 1, \quad V_3 = 0$

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$C = \{\{\neg v_1, \neg v_2, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{\neg v_1 . v_2\}, \{v_2, \neg v_3\}\}$$

Ejercicio 2

$V_1 = 0, V_2 = 1, V_3 = 0, V_4 = :($

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$C = \{\{\neg v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_1 . v_2\}, \{v_2, \neg v_3\}, \{v_4\}\}$$

En ambos casos piense siempre ¿Esta instancia de SAT se puede satisfacer?

Universidad del Valle

Preguntas