Primer exámen Opcional - Matemáticas discretas II
Duración 3 horas

Carlos Andres Delgado S, Msc *

12 de Julio de 2019

Importante: Debe explicar el procedimiento realizado en cada uno de los puntos, no se considera válido únicamente mostrar la respuesta.

1. [**20 puntos**] De las cadenas hexadecimales (0 - F) de tamaño 20 indique:
   - ¿Cuantas exactamente tienen cinco dígitos F?
   - ¿Cuantas tienen al menos cuatro dígitos 4?
   - ¿Cuantas sólo tienen dígitos pares?. **Pista**: Los pares son 0,2,4,6,8,A,C,E.
2. [**10 puntos**] Un colegio desea conocer cuantas calificaciones puede impartir, para garantizar que al menos tres estudiantes de un grupo de 60 saquen la misma nota.
3. [**20 puntos**] Indique el número de cadenas de longitud de 8,9 y 10 que se pueden formar con las letras de:

   CUCARACHON

   Muestre su solución claramente.
4. [**20 puntos**] Resuelva la R.R $T(n) = 2T(n-1)-T(n-2)+n+3+3*2^n, T(0) = 4, T(1) = 16$
5. [**20 puntos**] Resuelva la R.R $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) - 4T(\frac{n}{4}) + 5n - 2$ y explique si su solución es $O(nlog(n))$
6. [**10 puntos**] Resuelva la R.R $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + 2n^2$ con el método del maestro.

Ayudas

Conceptos básicos

Ecuación cuadrática de $ax^2 + bx + c$:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Principio de Palomar

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

Tenemos N palomas para k nidos.

Combinatoria y permutación

Permutación:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

Combinatoria:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (3)$$

* carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Permutación con objetos indistinguibles:

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!} \tag{4}$$

Combinatoria con repetición:

$$C(n + r - 1, r) \tag{5}$$

Forma solución particular

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$

Cuadro 1: Forma de la solución particular dado f(n)

Método del maestro

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

¡Éxitos!