Complejidad y Optimización

Programación Entera y Mixta

Carlos Alberto Ramirez Restrepo

Programa de Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación,
home page: http://eisc.univalle.edu.co/
carlos.a.ramirez@correounivalle.edu.co

Plan

Generalidades

Branch and Bound

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- En la programación lineal entera o mixta se tiene que todas o varias de las variables están restringidas a tomar sólo valores enteros.
- De esta manera, una vez aplicado el método simplex (o algún otro método) la solución obtenida no necesariamente será entero.
- Una alternativa es redondear la solución óptima no entera (continua) obtenida.
- No obstante, por lo general esto NO conduce a la solución óptima entera.

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- En la programación lineal entera o mixta se tiene que todas o varias de las variables están restringidas a tomar sólo valores enteros.
- De esta manera, una vez aplicado el método simplex (o algún otro método) la solución obtenida no necesariamente será entero.
- Una alternativa es redondear la solución óptima no entera (continua) obtenida.
- No obstante, por lo general esto NO conduce a la solución óptima entera.

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- En la programación lineal entera o mixta se tiene que todas o varias de las variables están restringidas a tomar sólo valores enteros.
- De esta manera, una vez aplicado el método simplex (o algún otro método) la solución obtenida no necesariamente será entero.
- Una alternativa es redondear la solución óptima no entera (continua) obtenida.
- No obstante, por lo general esto NO conduce a la solución óptima entera.

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- En la programación lineal entera o mixta se tiene que todas o varias de las variables están restringidas a tomar sólo valores enteros.
- De esta manera, una vez aplicado el método simplex (o algún otro método) la solución obtenida no necesariamente será entero.
- Una alternativa es redondear la solución óptima no entera (continua) obtenida.
- No obstante, por lo general esto NO conduce a la solución óptima entera.

Programación Entera y Mixta

Generalidades

Considere nuevamente el problema de las pinturas, para el cuál se planteó el siguiente modelo:

Maximizar

$$3x_e + 2x_i$$

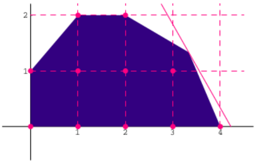
sujeto a

$$\begin{aligned} x_e + 2x_i &\leq 6 \\ 2x_e + x_i &\leq 8 \\ -x_e + x_i &\leq 1 \\ x_i &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Generalidades

El anterior problema puede ser representado gráficamente así:

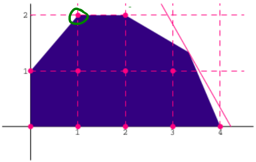


La solución continua a este problema es $x_e = 10/3$, $x_i = 4/3$ y el valor de la función objetivo es $z = 38/3$.

Programación Entera y Mixta

Generalidades

El anterior problema puede ser representado gráficamente así:

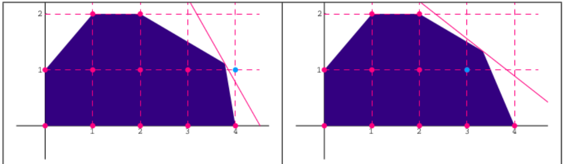


La solución continua a este problema es $x_e = 10/3$, $x_i = 4/3$ y el valor de la función objetivo es $z = 38/3$.

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- Si se redondea la solución, se obtendrían 4 alternativas de solución:
  - $x_e = 3,\ x_i = 1$
  - $x_e = 4,\ x_i = 1$
  - $x_e = 3,\ x_i = 2$
  - $x_e = 4,\ x_i = 2$
- No obstante, con estas soluciones se pierde la factibilidad o la optimidad.



se pierde la factibilidad | se pierde optimidad

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- La complejidad de envontrar soluciones óptimas enteras es alta.
- Para solucionar problema de programación entera se utiliza el método *branch and bound* (ramificar y acotar).

Programación Entera y Mixta

Generalidades

- La complejidad de envontrar soluciones óptimas enteras es alta.
- Para solucionar problema de programación entera se utiliza el método *branch and bound* (ramificar y acotar).

Plan

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- El algoritmo *branch and bound* aplica iterativamente el método simplex.
- La idea de este algoritmo es dividir el problema succesivamente en subproblemas, aplicando en cada uno una restricción adicional con el fin de forzar el simplex a tomar soluciones enteras.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- El algoritmo *branch and bound* aplica iterativamente el método simplex.
- La idea de este algoritmo es dividir el problema succesivamente en subproblemas, aplicando en cada uno una restricción adicional con el fin de forzar el simplex a tomar soluciones enteras.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

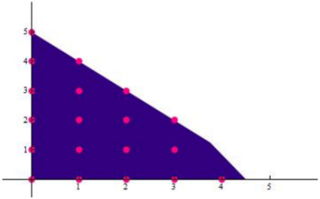
Considere el siguiente problema:

Maximizar

$$5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteros} \end{aligned}$$



Se utilizará el término PL0 para referenciar este problema.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

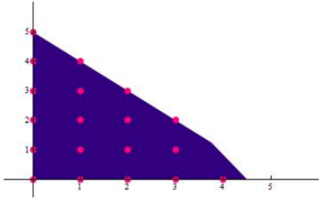
Considere el siguiente problema:

Maximizar

$$5x_1 + 4x_2$$

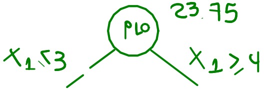
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y enteros} \end{aligned}$$



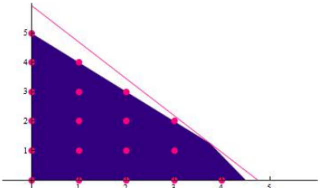
Se utilizará el término PL0 para referenciar este problema.

Programación Entera y Mixta



Branch and Bound

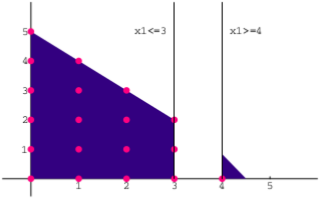
- **Solucion de PL0:** $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.25$, $z = 23.75$.
- Claramente, esta solución es no entera. Por consiguiente, es necesario ramificar.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Se selecciona una variable que no cumpla la restricción de ser entera.
- Por ejemplo, se escoge x_1 que es denominada la variable de ramificación.
- En la solución continua encontrada, se tiene que $x_1 = 3.75$.
- Puesto que debe cumplirse que x_1 sea entera, luego se tiene que $x_1 \leq 3$ o $x_1 \geq 4$.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Se generan dos problemas, agregando al problema anterior una de las restricciones anteriores:

Problema PL1

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema PL2

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Se generan dos problemas, agregando al problema anterior una de las restricciones anteriores:

Problema PL1

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema PL2

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Se generan dos problemas, agregando al problema anterior una de las restricciones anteriores:

Problema PL1

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema PL2

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

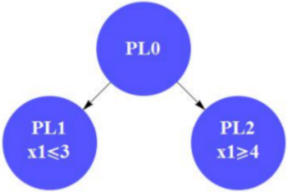
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

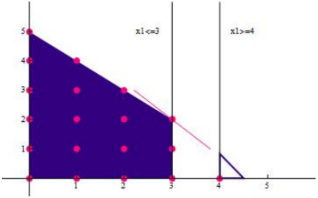
- Problemas pendientes a resolver: {PL1, PL2}.
- Se escoge y resuelve uno de los problemas, por ejemplo PL1.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

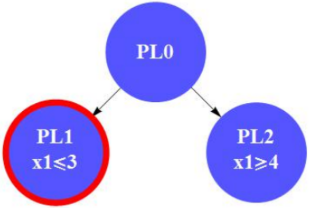
- **Solucion de PL1:** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 23$.
- Se llegó a una solución óptima de PL1 que es entera.
- No tiene sentido buscar más en PL1.
- Esta solución es candidata para solución óptima entera y se debe almacenar.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

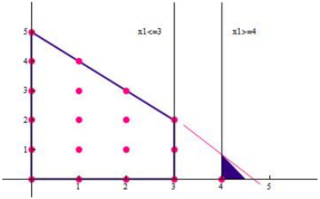
- Problemas pendientes a resolver: {PL2}.
- Se resuelve el problema PL2.

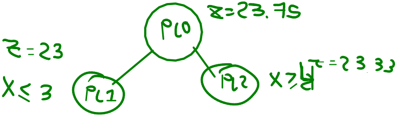


Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- **Solucion de PL2:** $x_1 = 4$, $x_2 = 5/6$, $z = 23.33$.
- Dado que el valor de x_2 no es entero, la solución no es entera.

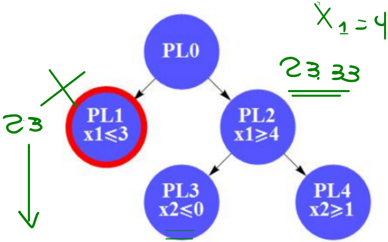




Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Es necesario ramificar x_2 en PL2.
- De esta manera, se generan 2 nuevos problemas agregando a PL2 la restricción $x_2 \leq 0$ (PL3) y la restricción $x_2 \geq 1$ (PL4) respectivamente.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Los problemas PL3 y PL4 son como sigue:

Problema PL3

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema PL4

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Los problemas PL3 y PL4 son como sigue:

Problema PL3

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema PL4

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Los problemas PL3 y PL4 son como sigue:

Problema PL3

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema PL4

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

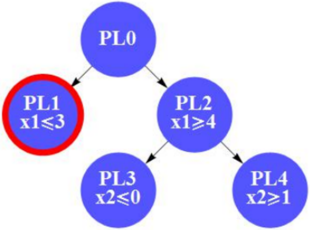
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

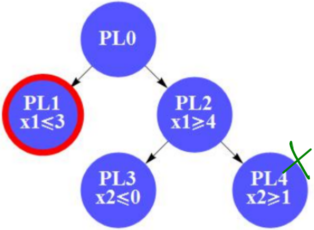
- Problemas pendientes a resolver: {PL3, PL4}.
- Se resuelve el problema PL4.
- PL4 tiene la restricción $x_2 \geq 1$, la cual no es satisfactible considerando las otras restricciones.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

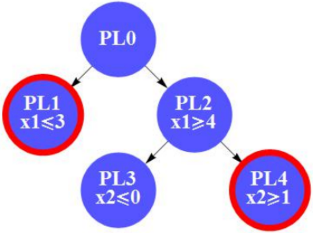
- Problemas pendientes a resolver: {PL3, PL4}.
- Se resuelve el problema PL4.
- PL4 tiene la restricción $x_2 \geq 1$, la cual no es satisfactible considerando las otras restricciones.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

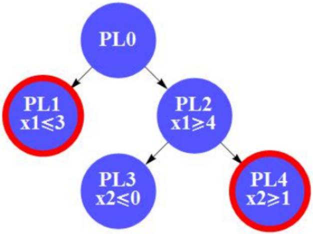
- Problemas pendientes a resolver: {PL3, PL4}.
- Se resuelve el problema PL4.
- PL4 tiene la restricción $x_2 \geq 1$, la cual no es satisfactible considerando las otras restricciones.
- En consecuencia, el problema PL4 no tiene solución y está agotado.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

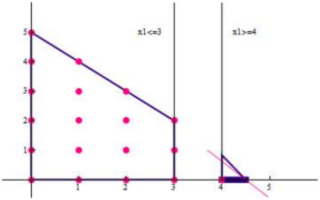
- Problemas pendientes a resolver: {PL3}.
- Se resuelve el problema PL3.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

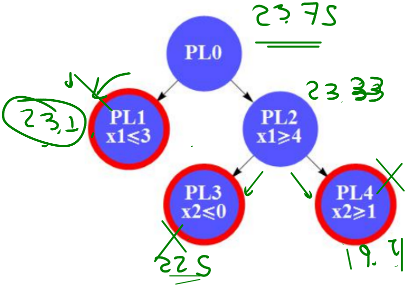
- **Solucion de PL3:** $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 22.5$.
- Esta solución no es entera.
- Sin embargo, el problema está agotado puesto que una solución entera tendrá un valor de $z \leq 22.5$, que es menor que el mejor valor encontrado 23.
- En consecuencia, no se ramifica.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Dado que no hay problemas pendietes, el algoritmo finaliza.
- El algoritmo retorna el mejor candidato en la búsqueda, que fue encontrado en el problema PL1 correspondiente a la solución óptima entera $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $z = 23$.



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

El siguiente es el algoritmo *branch and bound*:

```
BRANCH-AND-BOUND(PL)
max_value = -inf
best_sol = null
L = {PL} //stack
while !is_empty(L)
   current = L.first
   sol = SIMPLEX(current)
   if sol == null or sol.value < max_value or is_integer(sol) then
      if is_integer(sol) and sol.value > max_value then
         max_value = sol.value
         best_sol = sol
   else
      Let PL' and Pl'' new problems with one additional constraint
      L.add(PL')
      L.add(PL'')
return best_sol
```

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Por lo general, el algoritmo *branch and bound* es muy costoso, ya que requiere la solución de un problema PL en cada hoja del arból.
- Es posible acelerarlo, si en lugar de la optimización se aplica una reoptimización en el problema nuevo, es decir:
  - se conoce la solución (y su última tabla simplex)
  - se agrega la nueva restricción
  - se actualiza la solución óptima.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Por lo general, el algoritmo *branch and bound* es muy costoso, ya que requiere la solución de un problema PL en cada hoja del arból.
- Es posible acelerarlo, si en lugar de la optimización se aplica una reoptimización en el problema nuevo, es decir:
  - se conoce la solución (y su última tabla simplex)
  - se agrega la nueva restricción
  - se actualiza la solución óptima.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Por lo general, el algoritmo *branch and bound* es muy costoso, ya que requiere la solución de un problema PL en cada hoja del arból.
- Es posible acelerarlo, si en lugar de la optimización se aplica una reoptimización en el problema nuevo, es decir:
  - se conoce la solución (y su última tabla simplex)
  - se agrega la nueva restricción
  - se actualiza la solución óptima.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Por lo general, el algoritmo *branch and bound* es muy costoso, ya que requiere la solución de un problema PL en cada hoja del arból.
- Es posible acelerarlo, si en lugar de la optimización se aplica una reoptimización en el problema nuevo, es decir:
  - se conoce la solución (y su última tabla simplex)
  - se agrega la nueva restricción
  - se actualiza la solución óptima.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Por lo general, el algoritmo *branch and bound* es muy costoso, ya que requiere la solución de un problema PL en cada hoja del arból.
- Es posible acelerarlo, si en lugar de la optimización se aplica una reoptimización en el problema nuevo, es decir:
    - se conoce la solución (y su última tabla simplex)
    - se agrega la nueva restricción
    - se actualiza la solución óptima.

Programación Entera y Mixta

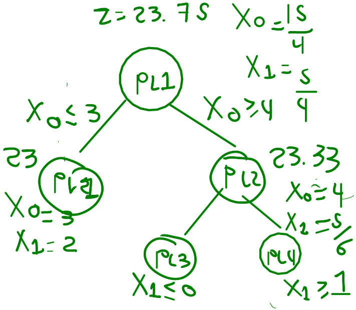
Branch and Bound

En el ejemplo anterior:

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

De esta manera, al aplicar simplex tenemos:

Var. Básicas	z	x1	x2	s1	s2	RHS	
z	1	-5	-4	0	0	0	-
s_1	0	1	1	1	0	5	$5/1 = 5$ entra x_1
s_2	0	10	6	0	1	45	$45/10 = 4.5$ sale s_2
z	1	0	-1	0	0.5	22.5	-
s_1	0	0	0.4	1	-0.1	0.5	$0.5/0.4 = 1.25$ entra x_2
x_1	0	1	0.6	0	0.1	4.5	$4.5/0.6 = 7.5$ sale s_1
z	1	0	0	2.5	0.25	23.75	
x_2	0	0	1	2.5	-0.25	1.25	
x_1	0	1	0	-1.5	0.25	3.75	solución óptima

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Dado que la solución no es entera, entonces se ramifica en 2 problemas nuevos, agregando las restricciones $x1 \leq 3$ (PL1) y $x1 \geq 4$ (PL2).
- Si se decide continuar con PL1: Se expresa la nueva restricción $x_1 \leq 3$ en términos de las variables no básicas usando $x_1 - 1.5s_1 + 0.25s_2 = 3.75$, es decir $1.5s_1 - 0.25s_2 + 3.75 \leq 3$ o con una nueva variable de holgura s_3:

$$1.5s_1 - 0.25s_2 + s_3 = -0,75$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Dado que la solución no es entera, entonces se ramifica en 2 problemas nuevos, agregando las restricciones $x1 \leq 3$ (PL1) y $x1 \geq 4$ (PL2).
- Si se decide continuar con PL1: Se expresa la nueva restricción $x_1 \leq 3$ en términos de las variables no básicas usando $x_1 - 1.5s_1 + 0.25s_2 = 3.75$, es decir $1.5s_1 - 0.25s_2 + 3.75 \leq 3$ o con una nueva variable de holgura s_3:

$$1.5s_1 - 0.25s_2 + s_3 = -0,75$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Agregando esta nueva restricción al tablero final y aplicando el método simplex se obtiene:

Var. Básicas	z	x1	x2	s1	s2	s3	RHS	
z	1	0	0	2.5	0.25	0	23.75	
x_2	0	0	1	2.5	-0.25	0	1.25	
x_1	0	1	0	-1.5	0.25	0	3.75	entra s_2
s_3	0	0	0	1.5	-0.25	1	-0.75	sale s_3
z	1	0	0	4	0	1	23	
x_2	0	0	1	1	0	-1	2	
x_1	0	1	0	0	0	1	3	
s_3	0	0	0	-6	1	-4	3	sol. opt. entera

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

- Si se decide continuar con PL2: Se expresa la nueva restricción $x_1 \geq 4$ en términos de las variables no básicas usando $x_1 - 1.5s_1 + 0.25s_2 = 3.75$, es decir $1.5s_1 - 0.25s_2 + 3.75 \geq 4$ o con una nueva variable de holgura s_3:

$$1.5s_1 - 0.25s_2 - s_3 = 0,25$$

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Agregando esta nueva restricción al tablero final y aplicando el método simplex se obtiene:

Var. Básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	
z	1	0	0	2.5	0.25	0	23.75	
x_2	0	0	1	2.5	-0.25	0	1.25	
x_1	0	1	0	-1.5	0.25	0	3.75	entra s_1
s_3	0	0	0	1.5	-0.25	1	-0.75	sale s_3
z	1	0	0	0	2/3	5/3	23.33	
x_2	0	0	1	0	1/6	5/3	5/6	
x_1	0	1	0	0	0	-1	4	
s_3	0	0	0	1	-1/6	-2/3	1/6	sol. opt. no entera

Dado que la solución no es entera, se debe repetir el procedimiento anterior hasta hallar una solución entera.

Programación Entera y Mixta

Branch and Bound

Agregando esta nueva restricción al tablero final y aplicando el método simplex se obtiene:

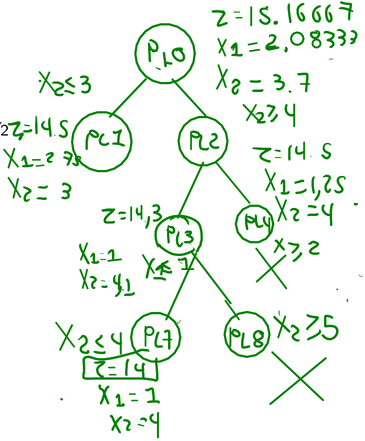
Var. Básicas	**z**	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	**RHS**	
z	1	0	0	2.5	0.25	0	23.75	
x_2	0	0	1	2.5	-0.25	0	1.25	
x_1	0	1	0	-1.5	0.25	0	3.75	entra s_1
s_3	0	0	0	1.5	-0.25	1	-0.75	sale s_3
z	1	0	0	0	2/3	5/3	23.33	
x_2	0	0	1	0	1/6	5/3	5/6	
x_1	0	1	0	0	0	-1	4	
s_3	0	0	0	1	-1/6	-2/3	1/6	sol. opt. no entera

Dado que la solución no es entera, se debe repetir el procedimiento anterior hasta hallar una solución entera.

Programación Entera y Mixta

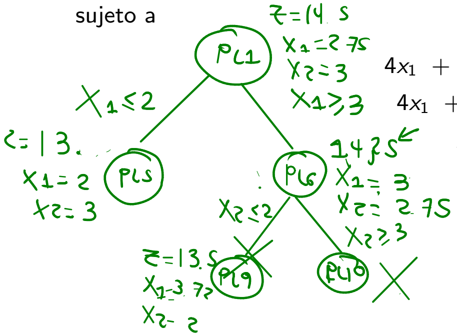
Branch and Bound: Ejercicio

$$max\ z = 2x_1 + 3x_2$$



sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 10x_2 &\leq 45 \\ 4x_1 + 4x_2 &\leq 23 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Preguntas

?