Complejidad y optimización

NP Completitud I: SAT y 3-SAT

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Mayo 2019

Contenido

Problemas NPC

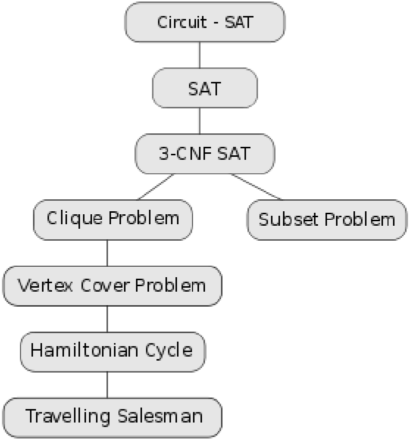
Definición

Un problema de decisión NP es considerado NP completo (NPC) si y sólo si, este puede puede ser reducido a otro dado problema NPC.

Demostración NPC

- El primer problema en ser demostrado como NPC fue el problema SAT. Stephen Cook (1971).
- Se han realizado otras demostraciones de problemas NPC, la más relevante son los 21 problemas NPC de Richard Karp (1972)

Problemas NPC



21 problemas NPC

Reducidos desde SAT

- $0 - 1$ Programación entera
- Clique

Definiciones

- El problema de programación entera consiste en maximizar o minimizar una expresión, sujeta a unas restricciones.
- El problema de clique, consiste en encontrar en un grafo con un conjunto de vértices con dos a dos adyacentes.

Universidad del Valle

21 problemas NPC

Reducidos desde Clique

- Set packing
- Vertex cover

Definiciones

- El problema de Set packing, consta de un universo U de elementos y S subconjuntos. Se pregunta si es posible tener k pares $\{U, S\}$ de elementos distintos.
- El problema de vertex cover, consiste en encontrar un grupo de vértices tal que todas las aristas están cubiertas.

21 problemas NPC

Reducidos desde Vertex cover

- Set covering
- Feedback node set
- Feedback arc set
- Directed Hamilton circuit

U

$\bigcup \underline{S_i} = U$

S_1

S_2

S_n

$S_i \subseteq U$

Definiciones

- El problema Set Covering, se tiene un universo de elementos U y unos conjuntos S, se requiere encontrar un conjunto de S cuya unión sea igual a U.
- El problema Feedback node/arc set consiste en remover un conjunto de vértices/aristas tal que se obtiene un grafo sin ciclos.

21 problemas NPC

Directed Hamilton circuit

El problema de circuito Hamiltoniano, consiste en encontrar un grupo de vértices en un grafo dirigido tal que si este se recorre, se visita cada arista una sola vez.

Reducidos desde Directed Hamilton circuit

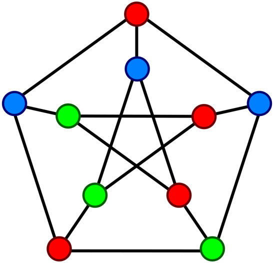
- Undirected Hamilton circuit

Universidad del Valle

21 problemas NPC

Reducidos desde 3SAT

- Coloreo de grafos



Instancia del problema de coloreo de grafos.

21 problemas NPC

Reducidos desde 3SAT/Coloreo de grafos

- Clique cover
- Exact cover

Definiciones

- El problema Clique cover, consiste encontrar los vértices de un grafo que permiten obtener k cliques.
- El problema del exact cover un problema de Set packing más restringido, donde cada elemento de U sólo puede estar en un conjunto S

21 problemas NPC

Reducidos desde Exact Cover

- Problema de la mochila
- Steiner tree problem
- 3-dimensional matching
- Partition
- Job shop scheduling

$\{ \underbrace{x_0, x_1,} x_n \}$

Contenido

Definición 3SAT

Instancia

Una instancia de 3-SAT es una colección C de cláusulas donde cada cláusula contiene 3 literales.

Example

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$C = (v_1 \vee \bar{v_2} \vee v_3) \wedge (\bar{v_1} \vee v_2 \vee v_4)$$

¿3SAT es NPC?

Definición

Este problema es más restringido que SAT, por lo que si 3SAT es NP-Completo implica que SAT es NPC y no viceversa.

Teorema

Se asume que 3SAT es NPC. Y que SAT $\leq_p$ 3-SAT

$A \leq_p B$

¿3SAT es NPC?

Reducción

Se procede a realizar la reducción de SAT a 3SAT, se debe probar que esta reducción se puede realizar en tiempo polinomial.

Demostración

La reducción se realiza utilizando como base la longitud de cada cláusula.

(v_1)

$(v_1 \; v_2)$

$(v_1$

¿3SAT es NPC?

Procedimiento de reducción

Suponga que C_i contiene k literales:

- Si $k = 1$ significa $C_i = z_1$. Se crean dos variables v_1 y v_2 de tal forma se obtienen cuatro nuevas clausulas de 3 literales.

$$\{v_1, v_2, z_1\}, \{v_1, \bar{v_2}, z_1\}, \{\bar{v_1}, v_2, z_1\}, \{\bar{v_1}, \bar{v_2}, z_1\}$$

Observe que la expresión se satisface si z_1 es verdadera. [1]

[1] n es el número de claúsulas.

Universidad del Valle

¿3SAT es NPC?

Procedimiento de reducción

Suponga que C_i contiene k literales:

- Si $k = 2$ significa $C = \{z_1, z_2\}$. Se crean una variable v_1 de tal forma se obtienen dos nuevas clausulas de 3 literales.

$$\{v_1, z_1, z_2\}, \{\bar{v_1}, z_1, z_2\}$$

¿3SAT es NPC?

Procedimiento de reducción

Suponga que C_i contiene k literales:

- Si $k = 3$ copie la clausula en la instancia 3-SAT tal como está

¿3SAT es NPC?

Procedimiento de reducción

Suponga que C_i contiene k literales: $(z_1, z_2, \ldots z_k)$

- Si $k > 3$ cree $k-3$ variables v_1, v_2 .. v_{k-3} y agregue $k-2$ cláusulas, siguiendo la forma

$$\{z_1, z_2, v_1\},$$
$$\{\bar{v}_1, z_3, v_2\}, \{\bar{v}_2, z_4, v_3\}, \ldots,$$
$$\ldots, \{\bar{v}_i, z_{i+2}, v_{i+1}\}\ldots, \{\bar{v}_{k-3}, z_{k-1}, z_k\}$$

(z_1, z_2, z_3, z_4) $\quad K-3$

$K=1 \quad V_1$

$(z_1, z_2, V_1) \wedge (\bar{V}_1, z_3, z_4)$

SAT $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ $\quad K-3 \quad V_1, V_2, V_3$

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \text{v} & & & \text{v} & & & \text{v} & & & \\ (z_1, & z_2, & V_1) & (\bar{V}_1, & z_3, & V_2) & (\bar{V}_2, & z_4, & V_3) & (\bar{V}_3, & z_5, & z_6) \\ & & \text{v} & \text{F} & \text{F} & \text{v} & \text{F} & \text{F} & \text{v} & & & \end{array}$$

3SAT

$Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

$z_1 = F \quad z_2 = V \quad z_3 = V$

$z_4 = X$

$(\bar{z}_1)\,(z_1\, z_2)\,(\bar{z}_2\, z_3\, z_1)\,(z_1\, z_2,\, z_3,\, \bar{z}_4)$

$\downarrow$

$(\bar{z}_1, v_1, v_2)\,(\bar{z}_1, v_1, \bar{v}_2)\,(\bar{z}_1, \bar{v}_1, v_2)\,(\bar{z}_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$

$(z_1, z_2, v_3)\,(z_1, z_2, \bar{v}_3)\,(\bar{z}_2\; z_3\; z_1)$

$(z_1, z_2, v_4)\,(\bar{v}_4, z_3, \bar{z}_4)$

¿3SAT es NPC?

Procedimiento de reducción

Si ninguna de las variables originales en una clausula son verdaderas entonces no se pueden satisfacer con ninguna de la combinación de las variables adicionales.

$$(F, F, T), (F, F, T), .., (F, F, F)$$

Universidad del Valle

¿3SAT es NPC?

(F, ... T, F)

k>3

Procedimiento de reducción

Pero si cualquier literal es verdadero, se tienen $n-3$ y $n-2$ clausulas que se encuentran satisfechas:

$$(F,F,T),(F,F,T),..,(F,T,F),..,(T,F,F),(T,F,F)$$

$\bar{1}$ V_k $\bar{V}_k$

$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$

$(z_1, z_2, V_1)(\bar{V}_1, z_2, V_2)(\bar{V}_2, z_3, V_3)(\bar{V}_3, z_4, z_5)$

F, F, V   F, F, V   F, V, F   V

¿3SAT es NPC?

Procedimiento de reducción

Entonces cualquier solución de SAT será también satisfecha en una instancia de 3-SAT obteniendo las variables de una solución de SAT.

Complejidad reducción

Si se tienen n clausulas y m literales en una instancia de SAT esta transformación se realiza en tiempo $O(m)$

n Variables

$\}m$ clausulas / literales

$1 \ldots\ldots k$

$$4O(m) + 2O(m) + O(m) + 2O(m) + 3O(m)$$
$$+ 4O(m) + \ldots + (k-3)O(m)$$

$O(n^a)$ $a \to cte$

$O(m)$

¿3SAT es NPC?

Extensión de la solución

La reducción de SAT a 3SAT, puede ser extendida a problemas 4SAT, 5SAT, etc. Por lo que se concluye que estos también son NP completos. La dirección de la reducción es 3SAT a X-SAT

Importante

Esta reducción no aplica para los problemas 1-SAT ni 2-SAT los cuales se ha ha demostrado se resuelven en tiempo polinomial.

$SAT \rightarrow ¿2SAT$

¿2SAT es P?

Caso 2SAT

El problema 2SAT es un caso especial de SAT que se puede solucionar en tiempo polinomial. La estrategia de solución de este problema es construir un grafo así:

- Los vértices son las variables y sus negaciones
- Se crea una arista dirigida entre a y b, si existe una clausula $(\neg a \vee b)$.

La estrategia consiste en demostrar que sí existe un camino entre a y b, debe existir un camino entre $\neg a$ y $\neg b$.

¿3SAT es NPC?

Ejercicio 1

Realice la reducción de la siguiente instancia de SAT a 3SAT

$$C = \{a_1, a_2\, \bar{a}_3\}, \{a_2, \bar{a}_3\}$$

Ejercicio 2

Realice la reducción de la siguiente instancia de SAT a 3SAT

$$C = \{a_1, a_2\, \bar{a}_4\}, \{a_2, \bar{a}_3\}, \{a_1, a_2, \bar{a}_3, a_5, a_6\}$$

¿3SAT es NPC?

Solución ejercicio 1

Realizando reducción

$$C = \{a_1, a_2\ \bar{a}_3\}, \{v_1, a_2, \bar{a}_3\}, \{\bar{v}_1, a_2, \bar{a}_3\}$$

Comprobación

1. La reducción se realiza en tiempo polinomial.
2. Con $a_3 = F$ SAT es sastisfactible. En la reducción también se refleja esta situación.
3. Con $a_1 = F, a_2 = F$ y $a_3 = V$ SAT no es sastisfactible. En la reducción también se refleja esta situación.

¿3SAT es NPC?

Solución ejercicio 2

Realizando reducción

$$C = \{a_1, a_2\ \bar{a_4}\}, \{v_1, a_2, \bar{a_3}\}, \{\bar{v_1}, a_2, \bar{a_3}\},$$
$$\{v_2, a_1, a_2\}\{\bar{v_2}, \bar{a_3}, v_3\}\{\bar{v_3}, a_5, a_6\}$$

Comprobación

1. La reducción se realiza en tiempo polinomial.
2. Con $a_2 = V$ SAT es sastisfactible. En la reducción también se refleja esta situación, haciendo $v_2 = F$ y $v_3 = F$
3. Con $a_1 = F$,$a_2 = F$,$a_4 = V$ SAT no es sastisfactible. En la reducción también se refleja esta situación.

¿3SAT es NPC?

Ejercicio 3

Plantee reducciones de SAT a:

1. 4-SAT
2. 5-SAT
3. X-SAT, $X \geq 3$

Para demostrar que estos problemas también son NPC

$k \geq 3$ 3-SAT $k-3$ variables

$(z_1, z_2, v_1)(\bar{v}_1, z_3, v_2)(\bar{v}_2, z_4, v_3)$

$\ldots(\bar{v}_{k-4}, z_{k-2}, v_{k-3})(\bar{v}_{k-3}, z_{k-1}, z_k)$

4-SAT

1) Variable z_1 3 Variables, 2^3 clausules

(z_1, v_1, v_2, v_3) —— $(z_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$

2) Variable z_1, z_2 2 Variables, 2^2 clausulas

$(z_1, z_2, v_1, v_2) \ldots (z_1, z_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$

3) Variable (z_1, z_2, z_3) 1 Variable, 2^1 clausuls

(z_1, z_2, z_3, v_1) $(\bar{v}_1, z_1, z_2, z_3)$

4) Variables $\quad$ 2 Variables, 2 clauses

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$\boxed{k > 4}$ $\quad (z_1, z_2 \dots z_k)$ $\quad k-4$ Var

5) Variables

$$(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$$

$$(z_1, z_2, z_3, V_1)(\bar{V}_1, z_3, z_4, z_5)$$

$$(z_1, z_2, z_3, V_1)(\bar{V}_1, z_3, z_4, V_2)$$

$$(z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, V_j)$$

$$(\bar{V}_j, z_{i+2}, z_{i+3}, V_{j+1})$$

6 Variable

$\hookrightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$ $\quad$ 2 Variable

$$(z_1, z_2, z_3, \underline{V_1})(\bar{V}_1, z_3, z_4, V_2)(\bar{V}_2, z_4, z_5, z_6)$$

$k > 4$ $\quad K-4$ Variables

$(z_1, z_2, \dots, z_k)$ $\quad k-4$ Var

$V_1, V_2, \dots V_{k-4}$

$(z_1, z_2, z_3, V_1)(\overline{V_1}, \overline{z_3}, z_4, V_2) \dots$

$(z_i, z_{i+1}, z_{\underline{i+2}}, V_j)(\overline{V_j}, \overline{z}_{\underline{i+2}}, z_{i+3}, V_{j+1}) \dots$

$\dots(\overline{V}_{k-5}\, z_{k-3}\, z_{\underline{k-2}}\, V_{k-4})(\overline{V}_{k-4}\, \overline{z}_{\underline{k-2}}\, z_{k-1}\, z_{\underline{k}})$

¿Preguntas?