Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

TÉCNICAS DE DEMOSTRACIÓN

* Reglas de inferencia
* Demostración directa
* Demostración indirecta
* Demostración por contraejemplo
* Inducción matemática

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Reglas de inferencia
- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. Si es viernes entonces hay audición
2. Hoy es viernes

Técnicas de demostración

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. Si es viernes entonces hay audición
2. Hoy es viernes

$\therefore$ Hay audición

Técnicas de demostración

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. Si es viernes entonces hay audición
2. Hoy es viernes
3. Hay audición, **modus ponens**(1,2)

Modus ponens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Técnicas de demostración

Reglas de inferencia

• A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

Técnicas de demostración

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo

$\therefore$ El carro es negro

Técnicas de demostración

Reglas de inferencia

- A partir de un conjunto de sentencias que son ciertas, permite conocer otras que se derivan de dicho conjunto

1. El carro es rojo o es negro
2. El carro no es rojo
3. El carro es negro, **silogismo disyuntivo**(1,2)

Silogismo disyuntivo

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Regla de inferencia	Nombre
$\begin{array}{l} \quad p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	Simplificación
$\begin{array}{l} \quad p \vee q \\ \quad \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Silogismo disyuntivo
$\begin{array}{l} \quad p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	Modus tollens
$\begin{array}{l} \quad p \rightarrow q \\ \quad p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Modus ponens
$\begin{array}{l} \quad p \rightarrow q \\ \quad q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	Silogismo hipotético

Técnicas de demostración

Aplicar las siguientes reglas:

- **Simplificación** sobre
  1. $\neg q \wedge \neg t$ $\Big\}$ $\neg q$, $\neg t$
- **Silogismo disyuntivo** sobre
  1. $t \vee \cancel{\neg p}$ F
  2. p

  $\Big\}$ t
- **Modus tollens** sobre
  1. $\neg q \rightarrow \neg t$
  2. t

  $\Big\}$ q

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow p$
3. $\neg r \rightarrow s$
4. $s \rightarrow t$

$\neg p$ $\neg r$ s t

- Demuestre que **t** es cierto

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow p$
3. $\neg r \rightarrow s$
4. $s \rightarrow t$
5. $\neg p$, simplificación(1)
6. $\neg r$, modus tollens(2,5)
7. s, modus ponens(3,6)
8. t, modus ponens(4,7)

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $s \to q$
2. $\neg p \to r$
3. $r \to s$

$r \to q$

Si hoy es viernes entonces hay audic.

Si hoy llueve entonces es viernes

- Demuestre que $\neg \mathbf{p} \to \mathbf{q}$ es cierto

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $s \rightarrow q$
2. $\neg p \rightarrow r$
3. $r \rightarrow s$
4. $\neg p \rightarrow s$, silogismo hipotético(2,3)
5. $\neg p \rightarrow q$, silogismo hipotético(4,1)

$a \rightarrow b$

$b \rightarrow c$

$a \rightarrow c$

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \rightarrow \neg q$

2. $\neg r$

3. $\neg p \rightarrow s$

4. $\neg q \rightarrow r$

5. SI(1, 4) $p \rightarrow r$

6. MT(2, 5) $\neg p$

7) MP(3, 6) s ✓ :)

- Demuestre que **s** es cierto

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \rightarrow \neg q$

2. $\neg r$

3. $\neg p \rightarrow s$

4. $\neg q \rightarrow r$

5. q, modus tollens(2,4)

6. $\neg p$, modus tollens(1,5)

7. s, modus ponens(3,6)

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \vee \neg q$
2. $\neg p \wedge r$
3. $\neg q \rightarrow \neg s$
4. $s \vee t$

5) Simp(2) $\neg p$

6) Simp(2) r

7) SD(1,5) $\neg q$

8) MP(7,3) $\neg s$

9) SD(8,4) t

- Demuestre que **t** es cierto

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $p \lor \neg q$

2. $\neg p \land r$

3. $\neg q \rightarrow \neg s$

4. $s \lor t$

5. $\neg p$, simplificación(2)

6. $\neg q$, silogismo disyuntivo(1,5)

7. $\neg s$, modus ponens(3,6)

8. t, silogismo disyuntivo(4,7)

Técnicas de demostración

Suponga que se conoce que las siguientes sentencias son verdaderas:

1. $u \vee w$
2. $p \wedge \neg q$
3. $t \rightarrow q$
4. $\neg w \vee s$
5. $\boxed{u \rightarrow t}$

5) p Simplificación (2)

6) $\neg q$ Simplificación (2)

7) $\boxed{\neg t}$ Modo tollens (3, 6)

8) $\neg u$ Modus tollens (5, 7)

9) w Silogismo disyuntivo (8, 1)

10) SD (9, 4) s ✓

- Demuestre que **s** es cierto

Técnicas de demostración

1. $u \vee w$
2. $p \wedge \neg q$
3. $t \rightarrow q$
4. $\neg w \vee s$
5. $u \rightarrow t$
6. $\neg q$, simplificación(2)
7. $\neg t$, modus tollens(3,6)
8. $\neg u$, modus tollens(5,7)
9. w, silogismo disyuntivo(1,8)
10. s, silogismo disyuntivo(4,9)

Un político es corrupto si y solo si da puestos en el gobierno,
da prebendas para cumplir sus intereses o favorece a sus familiares
aprovechandose de su puesto.
Si alguien corrupto convoca a una marcha contra la corrupción
entonces ese alguien es un descarado. Es bien sabido que el
Gran Polombiano dio puestos en el gobierno. Así mismo, el
Gran Polombiano dio sobornos para favorecer sus objetivos. De la
misma manera, ayudó a sus familiares aprovechandose de
ser presidente. Además, hace poco el Gran Polombiano
convocó a una marcha por la corrupción.
Demuestre por inferencia lógica en lógica de predicados
que el Gran Polombiano es un descarado.

p: es corrupto   q: da puesto en el gobierno s: da prebendas intereses
t: favorece a sus familiares   u: convoca a una marcha contra la corr
w: es un descarado.

1) $\boxed{p \leftrightarrow q \vee s \vee t}$ $\rightarrow$ 7) $p \rightarrow q \vee s \vee t$ $\wedge$ $q \vee s \vee t \rightarrow p$

2) $p \wedge u \longrightarrow w$

3) q

4) s

5) t

6) u

8) $p \rightarrow q \vee s \vee t$ SIMP(7)

9) $q \vee s \vee t \rightarrow p$ SIMP(7)

10) $\neg p \vee q \vee s \vee t$ Algebra(8)

Union

11) $(\neg q \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee p$

14) $q \wedge s \wedge t$

p

15) p SD(14, 11)

12) $\neg p \vee \neg u \vee w$

13) SD(6, 12) $\neg p \vee w$

16) SD(13, 15) w

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Reglas de inferencia
- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración directa

- Se parte de la hipótesis y se intenta llegar a la conclusión

Técnicas de demostración

- Demuestre que si $\underline{n}$ y $\underline{m}$ son impares, la suma es par

Técnicas de demostración

Demuestre que si n y m son impares, la suma es par

- Si n y m son números impares, se pueden expresar de la forma:

$$n=2 \cdot k_1+1$$

$$m=2 \cdot k_2+1$$

- La suma n+m será:

$$\begin{aligned} n + m &= (2 \cdot k_1+1) + (2 \cdot k_2+1) \\ &= 2 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \\ &= 2 \cdot (k_1 + k_2 + 1) \\ &= 2 \cdot k_3 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n+m debe ser un número par

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

$$n = 2k_1 + 1$$

$$3(2k_1 + 1) + 2$$

$$6k_1 + 3 + 2$$

$$6k_1 + 2 + 2 + 1$$

$$2(\underbrace{3k_1 + 1 + 1}_{k_2}) + 1$$

$$2k_2 + 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces 3n+2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2\cdot k_1+1) + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 3 + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 4 + 1 \\ &= 2(3\cdot k_1 + 2) + 1 \\ &= 2\cdot k_2 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, 3n+2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

$2k_1+1$

- Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

$$n = 2k_1 + 1$$

$$n^2 = (2k_1 + 1)^2$$

$$n^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1$$

$$= 2\underbrace{(2k_1^2 + 2k_1)}_{k_2} + 1$$

$$n^2 = \boxed{2k_2 + 1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces n^2 es impar

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

  $$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

  $$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^2 debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

$$n = 2k_1 + 1$$

$$n^3 = (2k_1 + 1)^3 + 5$$

$$n^3 = 8k_1^3 + 3 \times 4k_1^2 + 3 \times 2k_1 + 1 + 5$$

$$n^3 = 8k_1^3 + 3 \times 4k_1^2 + 3 \times 2k_1 + 6$$

$$n^3 = 2(\underbrace{4k_1^3 + 3 \times 2k_1^2 + 3k_1 + 3}_{k_2})$$

$$\boxed{n^3 = 2k_2 \quad :)}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es impar, entonces n^3+5 es par

- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

  $n=2\cdot k_1+1$

- Al calcular n^3+5 se tiene:

  $$\begin{aligned} n^3 &= (2\cdot k_1+1)^3+5 \\ &= (2\cdot k_1)^3 + 3\cdot(2k_1)^2\cdot 1 + 3\cdot 2k_1\cdot 1^2 + 1^3 + 5 \\ &= 8\cdot k_1{}^3 + 12\cdot k_1{}^2 + 6\cdot k_1 + 6 \\ &= 2(4\cdot k_1{}^3 + 6\cdot k_1{}^2 + 3\cdot k_1 + 3) \\ &= 2\cdot k_2 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, n^3+5 debe ser un número par

Técnicas de demostración

$2k_1$ $\quad$ $2k_2+1$

- Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

$n = 2k_1$ $\qquad$ $m = 2k_1 + 1$

$\underline{m} - 2n$

$2k_1 + 1 - 4k_2$

$2(\underbrace{k_1 - 2k_2}_{k_3}) + 1$

$2k_3 + 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n es par y m es impar, entonces m-2n es impar

- Si n es par y m es impar, se pueden expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

$$m=2\cdot k_2+1$$

- Al calcular m-2n se tiene:

$$\begin{aligned} m-2n &= (2\cdot k_2+1)-2(2\cdot k_1) \\ &= 2\cdot k_2 + 1 - 4k_1 \\ &= 2(k_2 - 2\cdot k_1) + 1 \\ &= 2\cdot k_3 + 1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto, m-2n debe ser un número impar

Técnicas de demostración

- Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ es impar

$$m = 2k_1 + 1 \qquad n = 2k_2$$

$$m^2 + 2mn + n^2 = \underline{4k_1^2 + 4k_1 + 1} + 8k_1k_2 + \underline{4k_2} + 4k_2^2$$

$$= 2(2k_1^2 + 2k_2 + 4k_1k_2 + 2k_2 + 2k_2^2) + \underline{1}$$

$$= 2k_3 + \underline{1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si m es impar y n es par, entonces $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ es impar

- Si n es impar y n es par, se pueden expresar de la forma:

$$m=2\cdot k_1+1$$

$$n=2\cdot k_2$$

- Al calcular $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
m^2+2\cdot m\cdot n+n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2+2(2\cdot k_1+1)(2\cdot k_2)+(2\cdot k_2)^2 \\
&= 4\cdot k_1^2 + 4\cdot k_1 + 1 + 8\cdot k_1\cdot k_2 + 4\cdot k_2 + 4\cdot k_2^2 \\
&= 2(2\cdot k_1^2 + 2\cdot k_1 + 4\cdot k_1\cdot k_2 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_2^2) + 1 \\
&= 2\cdot k_3 + 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ debe ser un número impar

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Reglas de inferencia
- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración indirecta

- Utiliza la contrapositiva de $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$
- Toma como hipótesis $\neg q$ e intenta llegar a la conclusión $\neg p$

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

Si n es par $\longrightarrow$ 3n+2 par

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que “si n es par, entonces 3n+2 es par”

Técnicas de demostración

Demuestre que si 3n+2 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que “si n es par, entonces 3n+2 es par”
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

- Al calcular 3n+2 se tiene:

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2\cdot k_1) + 2 \\ &= 6\cdot k_1 + 2 \\ &= 2(3\cdot k_1 + 1) \\ &= 2\cdot k_2 \text{ , es decir, } 3n+2 \text{ es par} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que si n² es par, entonces el número n es par

n es impar, entonces n^2 es impar

$2k_1+1$

$$(2k_1+1)^2$$

$$4k_1^2+4k_1+1$$

$$2(\underbrace{2k_1^2+2k_1}_{k_2})+1$$

$$2k_2+1$$

:) !

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"

Técnicas de demostración

Demuestre que si n^2 es par, entonces el número n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces n^2 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular n^2 se tiene:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2\cdot k_1+1)^2 \\ &= (2\cdot k_1)^2 + 2\cdot 2\cdot k_1\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4\cdot k_1^2 + 4\cdot k_1 + 1 \\ &= 4(k_1^2 + k_1) + 1 \\ &= 4\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } n^2 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Demuestre que si $7n-4$ es par, entonces n es par

Técnicas de demostración

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que “si n es impar, entonces 7n-4 es impar“

Demuestre que si 7n-4 es par, entonces n es par

- Se demuestra que "si n es impar, entonces 7n-4 es impar"
- Si n es impar, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1+1$$

- Al calcular 7n-4 se tiene:

$$\begin{aligned} 7n-4 &= 7(2\cdot k_1+1) - 4 \\ &= 14\cdot k_1 + 7 - 4 \\ &= 14\cdot k_1 + 3 \\ &= 14\cdot k_1 + 2 + 1 \\ &= 2(7\cdot k_1 + 1) + 1 \\ &= 2\cdot k_2 + 1, \text{ es decir, } 7n-4 \text{ es impar} \end{aligned}$$

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 5n-6 es par"

Demuestre que si 5n-6 es impar, entonces n es impar

- Se demuestra que "si n es par, entonces 5n-6 es par"
- Si n es par, se puede expresar de la forma:

$$n=2\cdot k_1$$

- Al calcular 5n-6 se tiene:

$$\begin{aligned} 5n-6 &= 5(2\cdot k_1) - 6 \\ &= 10\cdot k_1 - 6 \\ &= 2(5\cdot k_1 - 3) \\ &= 2\cdot k_2, \text{ es decir, } 5n-6 \text{ es par} \end{aligned}$$

Técnicas de demostración

Técnicas de demostración

- Reglas de inferencia
- Demostración directa
- Demostración indirecta
- Demostración por contraejemplo
- Inducción matemática

Técnicas de demostración

Demostración por contraejemplo

• Se muestra un caso donde no se cumple una expresión cuantificada universalmente

*

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares 27
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n

n = 5   n = 13   n = 15

100 + 10 + 41 = 151

Técnicas de demostración

- **Todos los primos son impares**

  2 es un contraejemplo ya que es par y primo

- **Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo**

  n=7 es un contraejemplo ya que 7 es primo pero 9 no

- **n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos nx**

  n=40 es un contraejemplo ya que $40^2+40+41= 1681$ no es primo (es divisible entre 41)

Técnicas de demostración

- Todos los primos son impares
- Para cada número primo n, se cumple que n+2 es primo
- n^2+n+41 es un número primo para todos los enteros no negativos n
- $\forall x\ x^2 \geq x$
- $\forall x \forall y\ (x+y=x-y)$
- $\forall x \forall y\ (\ (x>0 \wedge y>0) \rightarrow x-y>0\ )$

Técnicas de demostración

1) Demuestre **q** a partir de las siguientes sentencias:

1. $p \vee \neg t$

2. $\neg s \vee w$

3. $t \wedge \neg r$

4. $p \rightarrow \neg w$

5. $\neg q \rightarrow s$

2) Demuestre de forma directa que si n y m son impares, entonces $(n^2+m^2)/2$ es impar

3) Demuestre de forma indirecta que si n^2+2m es par, entonces n y m son pares

4) Demuestre por contradicción que la siguiente afirmación no es correcta "2^n+1 es un número primo para todos los enteros no negativos n"