# Matemáticas discretas II: Teoría de Grafos II

**Universidad del Valle**
**EISC**

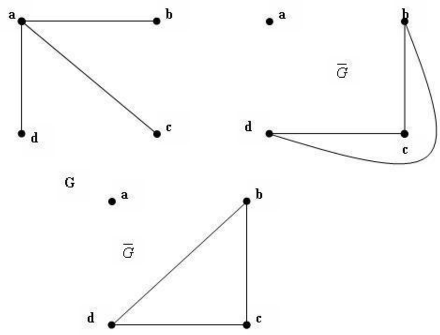
Septiembre 2017

# Contenido

# Grafos complementarios

## Grafo complementario

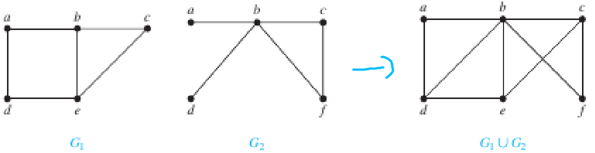
Sea $G$ un grafo simple no dirigido sin bucles con $n$ vértices. El complementario de $G$, se denota como $\overline{G}$. $\overline{G}$ de un grafo simple $G$ tiene los mismos vértices que $G$. Dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ **sii** estos dos vértices no son adyacentes en $G$.
Si $G = K_n$, $\overline{G}$ es un grafo con $n$ vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama **grafo nulo**.



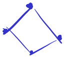
# Grafos complementarios

## Unión de grafos

La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple con el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ y el conjunto de aristas $E_1 \cup E_2$. La unión de $G_1$ y $G_2$ es denotada por $G_1 \cup G_2$.




Universidad del Valle



$$K_n = \{\underbrace{n-1, n-1, n-1, n-1, \dots, n-1}_{n \text{ veces}}\}$$

$$C_n = \{\underbrace{2, 2, 2, 2, 2, \dots, 2}_{n \text{ veces}}\}$$

$$\overline{C_n} = \{n-3, n-3, n-3, \dots, n-3\}$$

¿Cuántas aristas hay?

$$n(n-3) = 2e$$

$$\boxed{\frac{n(n-3)}{2} = e}$$

$$K_{(n+1)} = \{\underbrace{n, n, n, \ldots \ldots n}_{n+1 \text{ vertices}}\}$$

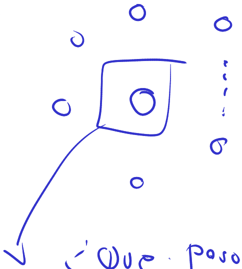
rueda

$$W_n = \{\underbrace{n}_{1}\ \underbrace{3\ 3, \ldots \ldots 3}_{n \text{ vertices}}\}$$

$$\overline{W_n} = \{\underbrace{0}_{1}, \underbrace{n-3, n-3, n-3, \ldots n-3}_{n \text{ vertices}}\}$$

$$2e = 0 + n(n-3)$$

$$e = \frac{n(n-3)}{2}$$



¿Que paso con este en $\overline{W_n}$?

No es conectado con ningún vertice

Grafos complementarios y $K_n$

**Teorema**

*Si $G$ es un grafo simple con $n$ vértices, entonces la unión de $G$ y $\overline{G}$ es $K_n$*

**Dem**// La unión de $G$ y $\overline{G}$ contienen una arista entre cada par de $n$ vértices. Por lo tanto, esta unión es $K_n$.

**Ejercicio**

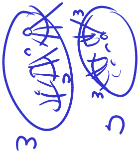
Si la secuencia de grado de un grafo simple $G$ es $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ¿Cuál es la secuencia de grado de $\overline{G}$?

$$n-1-d_n, n-1-d_{n-1}, \ldots, n-1-d_2, n-1-d_1$$

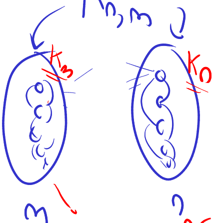
**Problema**

Si el grafo simple $G$ tiene $v$ vértices y $e$ aristas, ¿Cuántas aristas tiene $\overline{G}$?

$\overline{K}_{m,n}$




$\overline{K}_{n,m}$




$m(m-1) + n(n-1)$

1)

$$K_{n+m} = \{\underbrace{n+m-1,\ n+m-1,\ \dots\ n+m-1}_{n+m}\}$$

$$K_{n,m} = \{\underbrace{n,\ n,\ n,\ n}_{m\ \text{вер.}},\ \underbrace{\dots\ m,\ m,\ m,\ m,\ m}_{n\ \text{верш}}\}$$

$$\overline{K}_{n,m} = \{\underbrace{m-1,\ m-1,\ \dots m-1}_{m\ \text{вер.}}\ \ \underbrace{n-1,\ n-1,\ \dots\ n-1}_{n\ \text{верш}}\}$$

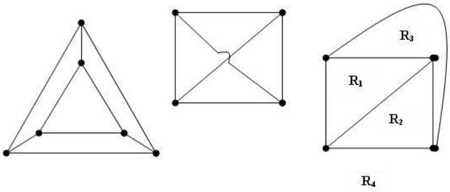
$$2e = m(m-1) + n(n-1)$$

$$e = \frac{m(m-1) + n(n-1)}{2}$$

# Contenido

**Grafo plano.**

Un grafo (o multigrafo) $G$ es plano si podemos dibujar $G$ en el plano de modo que sus aristas se intersectan sólo en los vértices de $G$. Este dibujo se conoce como una inmersión (*embedding*)de $G$.




Al igual que $K_4$ también $K_1, K_2, K_3$ son planos a diferencia de $K_5$ que no lo es.

## Teorema

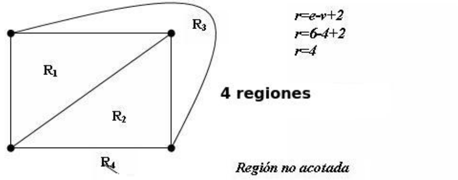
*Sea G un grafo simple conexo con $e$ aristas y $v$ vértices. Sea $r$ el número de regiones de una representación plana de G. Entonces, $r = e - v + 2$*

## Observación

*Sea $G = (V, E)$ un grafo plano sin bucles con $\mid V \mid = v$, $\mid E \mid = e > 2$, y $r$ regiones, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$*

**Ejemplo.** El grafo $K_4$, tiene $\mid V \mid = 4$, $\mid E \mid = 6 > 2$, además cumple con las dos condiciones: (ver grafo)

- $3r \leq 12 \rightarrow r \leq 4$
- $e \leq 3(4) - 6, \quad e \leq 6, 6 \leq 6$



*Sea $G = (V, E)$ un grafo plano sin bucles con $\mid V \mid = v$, $\mid E \mid = e > 2$, y $r$ regiones, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$*

$r = e - v + 2$
$r = 10 - 5 + 2 = 7$

**Ejemplo.** Sea el grafo $K_5$, tiene $\mid V \mid = 5$, y $2e = 4 \cdot 5$, $e = 10$ no cumple con la condición:

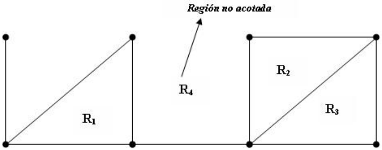
- $e \leq 3(5) - 6, \quad e \leq 9,$ $10 \leq 9$

$3r \leq 2e$

$3(7) \leq 2(10)$

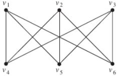
$21 \leq 20$ ✗

**Ejemplo.** Cálculo de las regiones en un grafo planar.




*r=e-v +2= 10-8+2= 4 regiones*

Grafo plano




$|V| = 6$ y $|E| = 9$, $e \leq 3(6) - 6$,

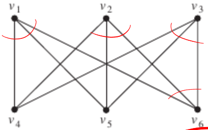
$e \leq 12$ **Por lo tanto** $9 \leq 12$

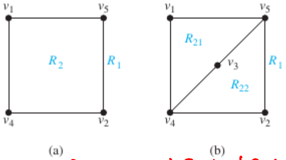
y $r????$

## ¿Es $K_{3,3}$ plano?

$r = e - v + 2$

*Sea $G = (V, E)$ un grafo plano sin bucles con $|V| = v$, $|E| = e > 2$, y $r$ regiones, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$*




$r = 9 - 6 + 2$ $\boxed{r = 5}$

$3r \leq 2e$ $15 \leq 18$ ✓

$e \leq 3v - 6$ $9 \leq 18 - 6$ $9 \leq 12$ ✗

- Sea $v_1, v_4, v_5, v_2$ un subgrafo con dos regiones $R_1$ y $R_2$ que forman una curva cerrada, entonces, el vértice $v_3$ estaría en $R_1$ o en $R_2$. Cuando $v_3$ está en $R_2$ al interior de la curva cerrada, las aristas $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_3, v5\}$ separan a $R_2$ en dos regiones, $R_{21}$ y $R_{22}$, sigue siendo plano.
- Entonces no hay manera de colocar el vértice $v_6$ sin cruzar, si $v_6$ está en $R_1$, entonces el lado $\{v_3, v_6\}$ no se puede dibujar sin cruzar. Si $v_6$ está en $R_{21}$, entonces $\{v_2, v_6\}$ no se puede ser dibujado sin cruzar. Si $v_6$ está en $R_{22}$, entonces $\{v_1, v_6\}$ no puede dibujar sin cruzar.
- De manera similar cuando $v_3 \in R_1$.

Bajo que condiciones $\overline{Cn}$ no es plano?

$$K_n = \{\overbrace{n-1, n-1, \dots, n-1}\}$$

$$C_n = \{2, 2, \dots, 2\}$$

$$\overline{C_n} = \{n-3, n-3, \dots, n-3\}$$

$n \geq 3$

$$\boxed{e = \frac{(n-3)n}{2}}$$

$$\boxed{n > 7}$$

$$r = e - v + 2$$

$$r = \frac{n(n-3)}{2} - n + 2$$

$$r = \frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n - n + 2$$

$$r = \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{2} + 2 \qquad \boxed{r = 2(n^2 - 5n + 1)}$$

$$3r \leq 2e$$

$$\frac{3n^2}{2} - \frac{15n}{2} + 6 \leq n^2 - 3n \quad \times$$

$$\frac{3n^2}{2} - \frac{15n}{2} + 6 - n^2 + 3n > 0 \qquad \text{No cumple}$$

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 6 > 0 \qquad r_{1,2} = \frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 4 \times \frac{1}{2} \times 6}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$r_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{48}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{4}}$$

No cumple

$$= \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{33} = 7.37$$

$$\boxed{n > 7} \qquad \cancel{n \geq 2}$$

$$\boxed{n > 7}$$

$$e \leq 3v - 6$$

$$\frac{n(n-3)}{2} \leq 3n - 6$$

No

$$\frac{n(n-3)}{2} - 3n + 6 > 0$$

$$\frac{n^2}{2} - \frac{9}{2}n + 6$$

$$n > 7$$

# Contenido

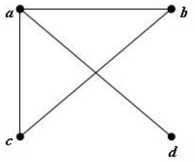
### Matriz de Adyacencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$, la matriz de adyacencia es la **matriz booleana** de $n \times n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- hay $n!$ matrices de adyacencia distintas para un grafo de $n$ vértices.
- todos los grafos no dirigidos, incluyendo multigrafos, pseudografos, tienen matrices simétricas

**Ejemplo.** La matriz de adyacencia de un grafo simple




$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

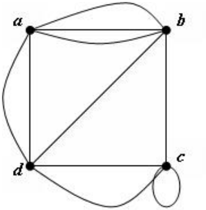
# Representación de grafos

## La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido con bucles y con aristas paralelas tiene las siguientes características:

- Un bucle en el vértice $a_i$ se representa por medio de un 1 en la posición $(i, i)$ de la matriz.
- Cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana, ya que el elemento de la posición $(i, j)$ es igual al número de aristas asociadas a $\{v_i, v_j\}$

**Ejemplo.** Matriz de adyacencia de un **pseudografo**.

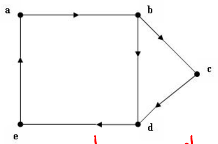



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{3} & 0 & 2 \\ \boxed{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

## Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

**La Matriz de adyacencia de un grafo dirigido** $G = (V, E)$ tiene 1 en la posición $(i, j)$ si hay arista de $v_i$ a $v_j$, siendo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. entonces:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

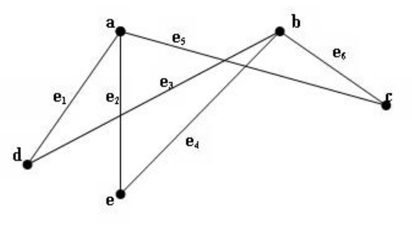



$$\mathbf{M_R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

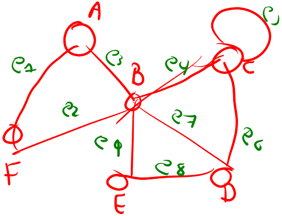
## Matriz de incidencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_m$ las aristas de G. Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de $V$ y $E$ es la matriz $M = [m_{ij}]$ de $n \times m$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } \{e_j\} \text{ es incidente con } \{v_i\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$




$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$




| | e1 | e2 | e3 | e4 | e5 | e6 | e7 | e8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | | 1 | | | | | |
| B | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | |
| C | | | | 1 | 2 | 1 | | |
| D | | | | | | 1 | 1 | 1 |
| E | | | | | | | | 1 |
| F | 1 | 1 | | | | | | |

Matriz adyacencia

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| B | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| C | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| D | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| E | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| F | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

https://graphonline.ru/en/

# Contenido



Universidad del Valle

## Conectividad

**Teorema**

*Sea* $M_R = (m_{ij})$ *la matriz de adyacencia de un grafo.*

$M_R \bigotimes M_R = M_R^2$

$M_R \bigotimes M_R \bigotimes M_R = M_R^3$

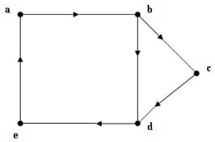
$\vdots$

$$\underbrace{M_R \bigotimes M_R \bigotimes M_R \ldots \bigotimes M_R}_{n} = M_R^n$$

- $\bigotimes$ es el producto booleano.
- 1 en $M_R^n$ en un grafo dirigido significa que se puede ir del nodo $i$ al $j$ recorriendo exactamente $n$ aristas en el grado.

# Conectividad

**Ejemplo** Sea el siguiente grafo y su matriz de adyacencia.



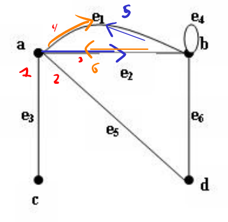

$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \mathbf{M_R^2} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

El 1 en $\mathbf{M_R^2}(1,3)$ significa que hay un camino de longitud 2 de a -c: a,b,c.

# Conectividad

**Ejemplo.** Sea el siguiente pseudografo obtener la cuantía de los caminos de longitud 2.




$$
\mathbf{M_R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\mathbf{M_R^2} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}
$$

El 6 significa que hay 6 caminos de longitud 2 de a-a:

Universidad del Valle

# Conectividad

## Matriz de Conectividad

La matriz de conectividad se define como:

$$M_R^\infty = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \ldots \vee M_R^n$$

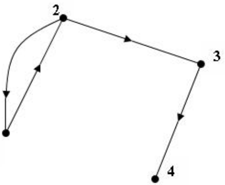
or binario

**Ejemplo** Obtener la matriz de conectividad para el siguiente grafo.

$M_R$
$M_R^2$
$M_R^3$
$M_R^4$

$M_{R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

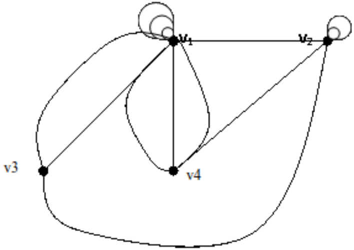
$n^3$




$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_R^\infty} = \begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

## Matrices de Pseudografos




| | v1 | v2 | V3 | v4 |
|---|---|---|---|---|
| v1 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| v2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| v3 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| v4 | 3 | 1 | 0 | 0 |

9+2+4+9

10+13

| | v1 | v2 | v3 | v4 |
|---|---|---|---|---|
| v1 | 23 | | | |
| v2 | | | | |
| v3 | | | | |
| v4 | | | | |

Universidad del Valle

# Conectividad

$\boxed{W^0 = M_R}$

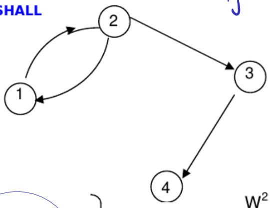
**CONECTIVIDAD POR WARSHALL**

$W^1_{ij} = W^0_{ij} \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{j1})$

$$\left\{ \begin{array}{l} W^1 = W^0 \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{1j}) \;\; i,j \geq 1,\; k \leq n \\ W^k = W^{k-1} \vee (W^{k-1}_{ik} \wedge W^{k-1}_{kj}) \end{array} \right.$$

$W^n = M_R^{\infty}$

4



$W_{11} = 0$

$0 \vee (0 \wedge 0) = 0$

$W^2_{11} = W^1_{21} \vee (W_{12} \wedge W_{k2})$

$0 \vee (1 \wedge 1)$

$1$

$M_R = W^0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W^1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$n^4$

$W^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$W^4$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

```
SUBROUTINE WARSHALL (M)
FOR K := 1 to N
  FOR I := 1 to N
    FOR J := 1 to N
          M[I,J] := M[I,J] OR M[I,K] AND M[K,J]
END SUBROUTINE;
```

$n^2 \times n = n^3$

Universidad del Valle

## Conectividad

### Camino

Es una trayectoria que comienza en un vértice $v_0$ y termina en un vértice $v_n$ donde se pueden repetir aristas y vértices.Un camino se puede representar como una sucesión de vértices $v_0, v_1 \ldots v_{n-1}, v_n$ o como una sucesión de aristas

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2) \ldots (v_{n-1}, v_n)$$

### Camino simple

Es un camino que NO repite aristas.

### Camino cerrado o circuito

Es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y puede repetir aristas y vértices.

### Circuito simple

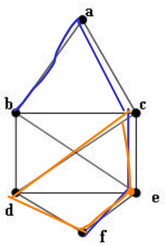
Es un camino cerrado en el que no se pueden repetir aristas.

## Longitud de un camino

Es el número de aristas que recorre el camino. Un camino de longitud $n$ debe tener $\boxed{n+1}$ vértices. Para el siguiente grafo:

2

1

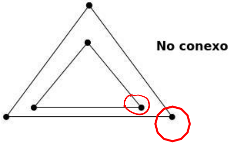



NO repite arista

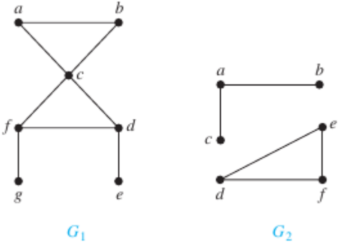
- Un camino $\boxed{\text{simple}}$ de longitud 4 que empiece en b: b,a,c,e,f
- Un camino cerrado de longitud 5 que inicie en f: f,d,c,d,e,f
- Un camino de longitud 5 de d-c: d,b,c,b,c,d
- Un circuito $\boxed{\text{simple}}$ de longitud 4 que empiece en c: c,b,d,e,c

## Grafo conexo

Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido es conexo si para cualquiera $a, b \in V$, existe un camino o trayectoria de cualquier longitud.



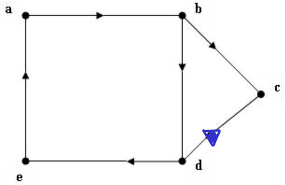

$G_1$ es conexo y $G_2$ no es conexo



# Conectividad

## Débilmente conexo

Se dice que un grafo dirigido es *débilmente conexo* si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.




C= ?

| | | |
|---|---|---|
| **a-b:** a,b | **b-a:** b,d,e,a | **a-e:** a,b,d,e |
| **e-a:** e,a | **a-c:** a,b,c | **c-a:** c,d,e,a |
| **a-d:** a,b,c,d | **d-a:** d,e,a | **c-b:** c,d,b |
| **b-c:** b,c | | |

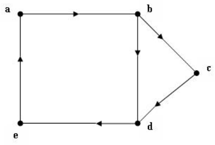
Por lo tanto, también es débilmente conexo. si obtenemos el grafo no dirigido subyacente encontramos que existe un camino para cualquiera dos vértices.

Universidad del Valle

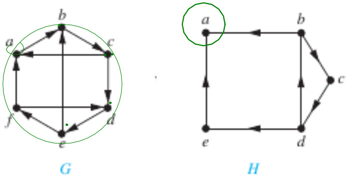
## Grafo fuertemente conexo

### Conexidad en grafos dirigidos

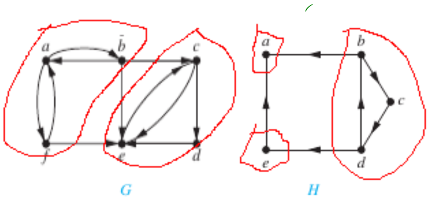
Se dice que un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si hay un camino de $a$ a $b$ y un camino de $b$ a $a$ para cualquiera dos vértices $a$ y $b$ en el grafo.




$H$ es débilmente conexo y $G$ es fuertemente conexo



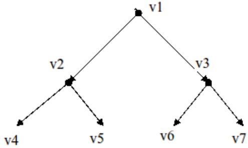
**Componentes fuertemente conexos**

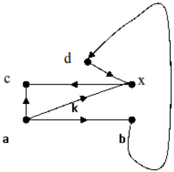


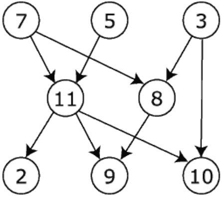

- El grafo $H$ tiene 3 componentes fuertemente conexas; el vértice $a$ y el vértice $e$ por ser subgrafos y el componente que es un subgrafo consistente de los vértices $\{b, c, d\}$
- El grafo $G$ tiene dos componentes fuertemente conexas que son los subgrafos formados por los vértices $\{a, b, f\}$ y $\{c, d, e\}$

## Grafo acíclico dirigido

Es un grafo que no tiene ciclos. → arboles

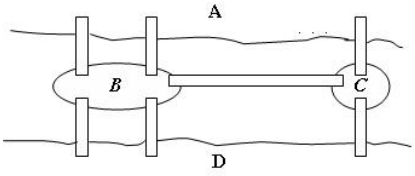


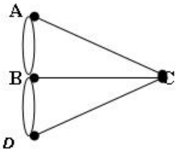



## Problema de los puentes de Königsberg

Partir de cualquier lugar (A,B,C y D) caminar sobre cada puente exactamente una vez y regresar a la posición inicial de partida.

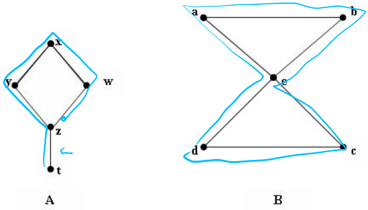



no repita arista

## Circuito de Euler

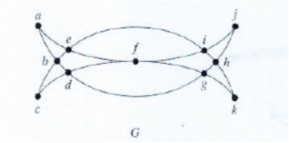
Un **circuito de Euler** en un grafo $G$ es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada arista de $G$. Un **camino de Euler** en $G$ es un camino simple que pasa exactamente una vez por cada arista.




En el grafo $A$ hay una *camino de Euler* t,z,w,x,y,z se pueden repetir vértices pero no aristas. En el grafo $B$ hay un circuito euleriano: a,e,c,d,e,b,a

**Teorema**

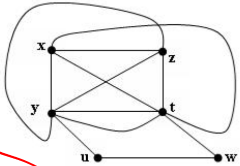
*Un **pseudografo** conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.*



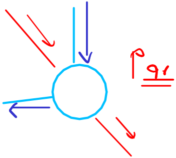
# Conectividad

**Ejemplo.** Sea el siguiente grafo tiene un circuito euleriano
z,y,t,y,x,z,t,x,t,w,u,y,z

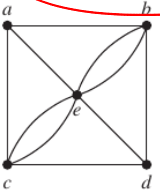
Por

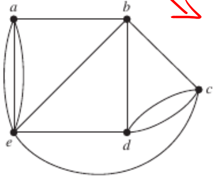


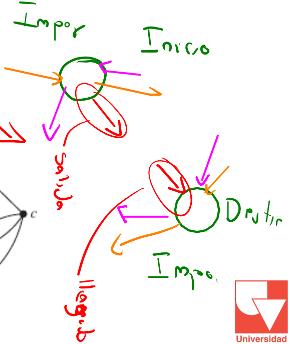

$\delta(u) = 2$
$\delta(w) = 2$
$\delta(y) = 6$
$\delta(t) = 6$
$\delta(z) = 4$
$\delta(x) = 4$




Hay camino de Euler y circuito de Euler



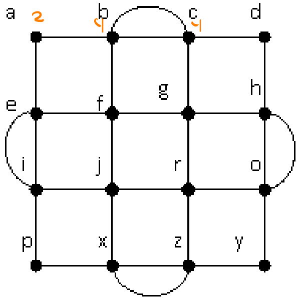




a,e,c,e,b,e,d,b,a,c,d

a,b,c,d,c,e,d,b,e,a,e,a

Un circuito de Euler.




Circuito de Euler: a,b,c,b,f,g,c,d,h,g,r,o,h,o,y,z,r,j,x,z,x,p,i,j,f,e,i,e,a

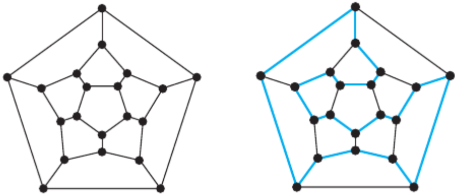
Universidad del Valle

# Conectividad

(no permite arista repetida

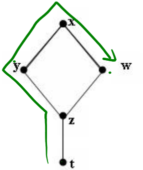
## Circuito de Hamilton

Un **camino de Hamilton** en un grafo $G$ es un *camino simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice, y un **circuito de Hamilton** en un grafo $G$ es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice. Es decir, el camino simple $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ en el grafo $G = (V, E)$ es un camino de Hamilton si $V = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y un circuito simple $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 0)$ es un circuito de Hamilton si $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ es un camino de Hamilton.

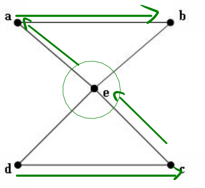


20 ciudades son visitadas pasando exactamente una vez.

# Conectividad

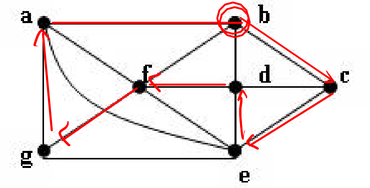



A



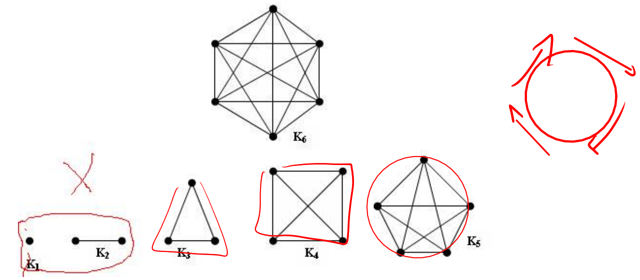

B

El grafo $A$ tiene un camino hamiltoniano t,z,y,x,w y el grafo $B$ tiene un camino hamiltoniano a,b,e,d,c. Ninguno de los dos grafos tiene circuito hamiltoniano.El siguiente grafo tiene el circuito hamiltoniano a,b,c,d,e,f,g,a



## Hamilton y $K_n$

Muestre que $K_n$ tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$




De los circuitos especiales se puede decir:

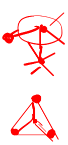
- Que son *circuitos simples*. En el caso del circuito de Euler se pueden repetir vértices pero en el caso del circuito de Hamilton NO.
- Los caminos especiales son *caminos simples*. En el camino de Euler se pueden repetir vértices. Pero en el camino de Hamilton no se pueden repetir vértices.

Camino Arista

# Circuitos eulerianos y circuitos hamiltonianos

Vertice

$W_n$



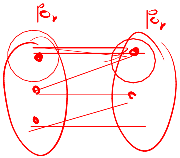

Circuito euleriano= No se cumple

Camino euleriano = NO 2 impar, resto par

Circuito hamiltoniano= Si lo hay, porque ciclo

Camino hamiltoniano


$K_{n,m}$

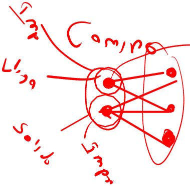



Euler

m y n sean pares

Circuito

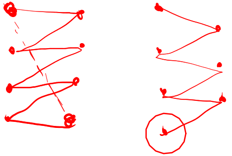
Camino $K_{2,m}$




m impar

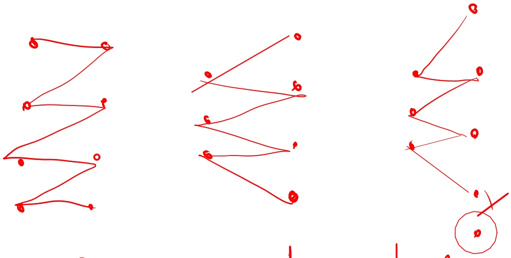
Hamilton

Circuito $n=m$



$K_{n,m}$

Camino hamiltoniano



$n = m$ $\quad$ $|n - m| = 1$

$\overline{K_{n,m}}$ $\quad$ $\overline{W_n}$ $\quad$ $\overline{C_n}$

Resumir

Circuito euleriano:  Inicia y termina en el mismo vértice cubriendo TODAS las aristas con un camino SIMPLE. TODOS los vértices DEBEN tener grado par

Camino euleriano: Inicia en un vétice x y términa en un vétices y cubriendo TODAS las arias en un camino SIMPLE. Se tiene que vértice de inicio y final son de grado IMPAR, mientras que los demás deben tener grado PAR.

Circuito hamiltoniano: Usted puede tener un circuito SIMPLE dentro de un grafo con la caracteristica que se pasa por cada vértice
UNA VEZ.

Camino hamiltoniano: Usted puede tener un camino SIMPLE dentro de un grafo con la carácteristica que pasa por un vétices una sola VE

# Referencias

Kenneth H. Rosen.
*Discrete Mathematics and Its Applications*.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 10. Graphs.