

Teoría de Grafos

Raúl E Gutiérrez de Piñerez R.

`raul.gutierrez@correounivalle.edu.co`

Carlos Andres Delgado

`carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co`

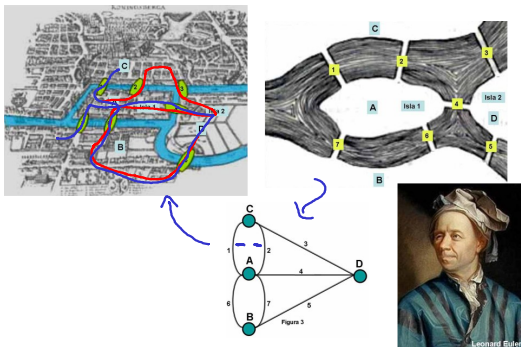
Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2017

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples ↗
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad ← PC
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Problema de los puentes de Königsberg (1.736)



¿Es posible salir desde cualquier punto de la ciudad (A,B,C o D) y llegar al mismo punto recorriendo exactamente una vez cada puente?

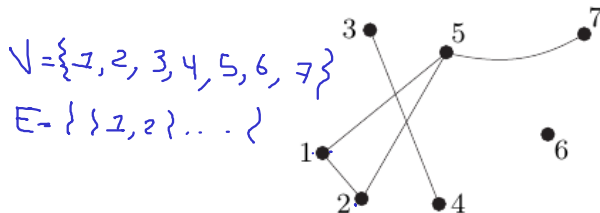
$$P = \{a, b, c, d\} \quad |P| = 4$$

$$P^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), \dots, (d, d)\}$$

$$P^P = \{ \emptyset, \{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \dots, \{a, b, c, d\} \}$$

Que es un Grafo

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ de conjuntos que satisfacen $E \subseteq [V]^2$ así, los elementos de E son subconjuntos de 2-elementos de V en la cual los elementos de E son aristas y los elementos de V son vértices. Tácitamente $E \cap V = \emptyset$. Saen $V = \{1, \dots, 7\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$.



- Un **grafo vacío** (\emptyset, \emptyset) se escribe simplemente como \emptyset .
- El número de vértices de un grafo G es su orden, y se escribe $|G|$.
- Un grafo puede ser *finito* o *infinito* según su orden. Un grafo de orden 0 o de orden 1 es llamado el *grafo trivial*.

Grafo simple

Un **grafo simple** $G = (V, E)$ es un grafo en el cual cada arista conecta dos diferentes vértices y donde dos aristas no conectan el mismo par de vértices. No tiene ni aristas paralelas ni bucles.

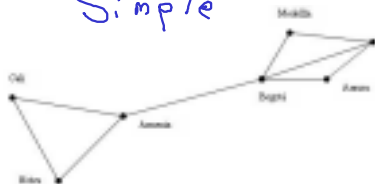
Multigrafo

Un **multigrafo** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V , un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\}/u, v \in V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.

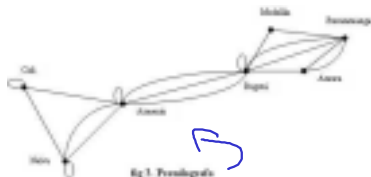
Pseudografo

Un **pseudografo** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V , un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\}/u, v \in V\}$. Una arista e es un bucle o lazo si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.

Simple



Multigrafo



- Los grafos simples no permiten aristas paralelas.
- Los multigrafos no permiten bucles.



Grafo Dirigido

Un **Grafo dirigido** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V , un conjunto E de aristas que son pares ordenados de V . Usamos una flecha apuntando de u a v para indicar la dirección de la arista (u, v)



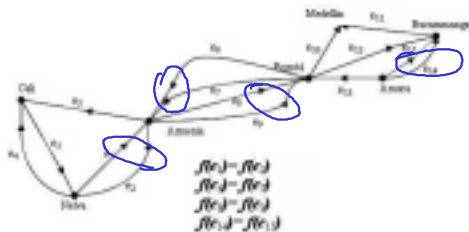
Multigrafo dirigido

Un **multigrafo dirigido** $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices V , un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{(u, v)/u, v \in V\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.





Fig 4. grafo dirigido

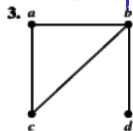


multigrafo dirigido

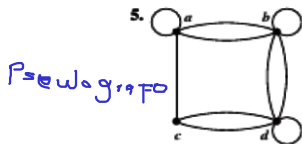
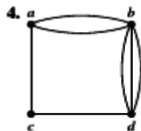
Tipos	Aristas	¿aristas múltiples?	¿bucles?
Grafo simple	no dirigidas	no	no
Multigrafo	no dirigidas	sí	no
Pseudografo	no dirigidas	sí	sí
Grafo dirigido	dirigidas	No	sí
Multigrafo dirigido	dirigidas	sí	sí

Determinar el tipo de grafo no dirigido (¿Grafo simple, multigrafo o pseudografo)

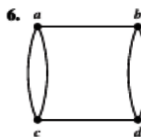
Grafo Simple



Multigrafo

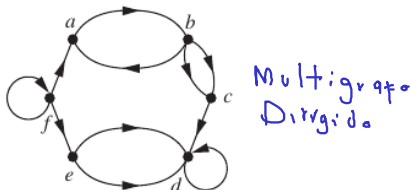
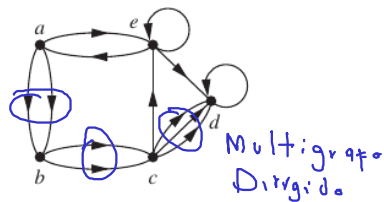
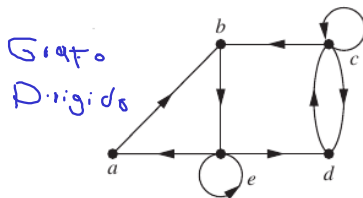


Pseudografo



Multigrafo

Determinar el tipo de grafo (¿Grafo dirigido o multigrafo dirigido?)



- 1 Introducción
- 2 Terminología**
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Adyacencia

Se dice que dos vértices u y v de un grafo no dirigido G son *adyacentes* (o vecinos) en G si $\{u, v\}$ es una arista de G . Si $e = \{u, v\}$, se dice que la arista e es *incidente* con los vértices u y v . También se dice que la arista e *conecta* a u y v . Se dice que los vértices u y v son extremos de la arista e .

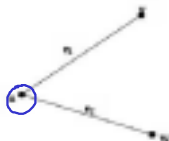
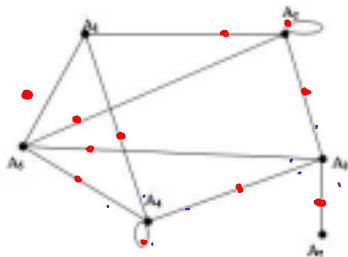


Fig. 7. vértices y aristas adyacentes

- Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común, por ejemplo en la fig 7. e_1 y e_2 son adyacentes.
- La vecindad de un vértice x , denotado como $N(x)$, está dado por todos los vértices adyacentes a x . $N(u) = \{v, w\}$

El grado de un vértice

El grado de un vértice de un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él, exceptuando los bucles, que contribuye con dos unidades al grado del vértice. El grado del vértice se denota por $\delta(v)$.



$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$

$$2e = 22 \approx e = 11$$

Los grados del grafo G son: $\delta(A_1) = 3$, $\delta(A_2) = 5$, $\delta(A_3) = 4$, $\delta(A_4) = 5$, $\delta(A_5) = 4$, $\delta(A_6) = 0$, $\delta(A_7) = 1$.

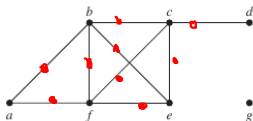
Teorema de Handshaking

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido con e aristas. Entonces,

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v)$$

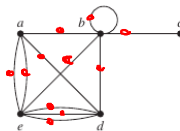
- Incluso si hay aristas múltiples y bucles en el grafo.
- Podemos determinar el número de aristas del grafo G , es decir $2e = 18$,
 $e = 9$
- La suma de los grados de un grafo no dirigido es par.

$$\begin{aligned}\delta(a) &= 2 \\ \delta(b) &= 4 \\ \delta(c) &= 4 \\ \delta(e) &= 3 \\ \delta(f) &= 4 \\ \delta(g) &= 0\end{aligned}$$



$$\delta(d) = 1$$

$$18 = 2e \\ e = 9$$



$$\begin{aligned}\delta(a) &= 4 \\ \delta(b) &= 6 \\ \delta(c) &= 1 \\ \delta(d) &= 5 \\ \delta(e) &= 6\end{aligned}$$

Cuál es el número de aristas de H?

$$22 = 2e \\ e = 11$$

Par

$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x) \rightarrow 2e = 60 \quad e = 30$$

Ejemplo: Cuántas aristas hay en un grafo con diez vértices, cada uno de los cuales tiene grado seis?

Teorema

Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.

Dem. Sea V_1 : conjunto de vértices de grado par y V_2 : conjunto de vértices de grado impar de un grafo $G = (V, E)$, entonces

$$2e = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$$

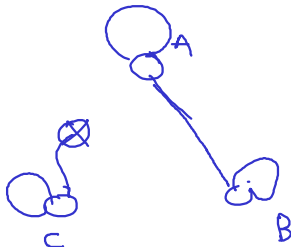
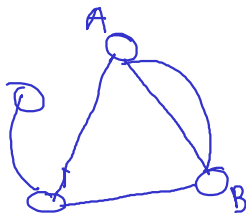
Par
 $\delta(v)$ par
 $\delta(v)$ impar

Como $\delta(v)$ si $v \in V_1$ es par y $\sum_{v \in V} \delta(v)$ es par al despejar $\sum_{v \in V_2} \delta(v)$ el resultado es par.

Aplicación del Teorema de Handshaking

¿Se puede dibujar un grafo simple de 15 vértices cada uno de grado 5?

3 vertices grado 3



Resumen

1. Grado: Número de aristas incidentes a un vértice, los bucles se cuentan por 2.

2. Teorema de Handshaking (No dirigidos) $\sum_{x \in V} \delta(x) = 2e$

Bucle

Si (u, v) es una arista del grafo dirigido G , se dice que u es adyacente a v y que v es adyacente desde u . Al vértice u se le llama **vértice inicial** de (u, v) y a v se le llama **vértice final** o terminal de (u, v) . los vértices inicial y final de un **bucle** coinciden.



Grado en un grafo dirigido

En un grafo dirigido, *el grado de entrada de un vértice v* , denotado por $\delta^-(v)$, es el número de aristas que tienen a v como **vértice final**. *El grado de salida de un vértice v* , de notado por $\delta^+(v)$, es el número de aristas que tienen a v como **vértice inicial**.



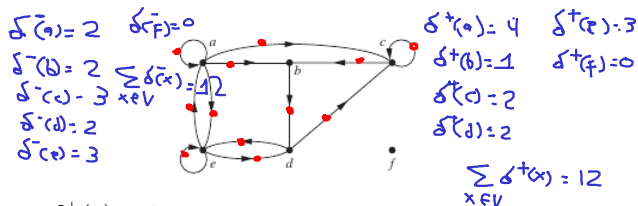
Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces,

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$$

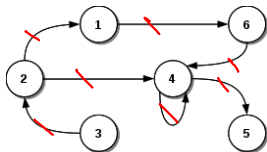
Ejemplo

Hallar los grados de entrada y de salida de cada vértice para el siguiente grafo.



- $\delta^-(a) = 2, \delta^+(a) = 4$
- $\delta^-(b) = 2, \delta^+(b) = 1$
- $\delta^-(c) = 3, \delta^+(c) = 2$
- $\delta^-(e) = 3, \delta^+(e) = 3$
- $\delta^-(d) = 2, \delta^+(d) = 2$
- $\delta^-(f) = 0, \delta^+(f) = 0$

Entonces $\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E| = 12$



$$\delta^-(1) = 1$$

$$\delta^-(2) = 1$$

$$\delta^-(3) = 0$$

$$\delta^-(4) = 3$$

$$\delta^-(5) = 1$$

$$\delta^-(6) = 1$$

$$7$$

$$\delta^+(1) = 1$$

$$\delta^+(2) = 2$$

$$\delta^+(3) = 1$$

$$\delta^+(4) = 2$$

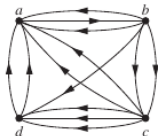
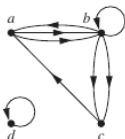
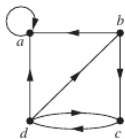
$$\delta^+(5) = 0$$

$$\delta^+(6) = 1$$

$$7$$

Grafos simples, multigrafos y Pseudografos

- 1 ¿Existe algún grafo simple de cinco vértices con los grados siguientes?
si es así dibujar el grafo.
- 1 3,3,3,3,2; 1,2,3,4,4
 - 2 0,1,2,2,3; 1,2,3,4,5
 - 3 3,4,3,4,3; 1,1,1,1,1
- 2 ¿Cuántas aristas tiene un grafo si los grados de sus vértices son 5,2,2,2,2,1?
- 3 ¿Cuántos vértices tiene un grafo regular de grado 4 con 10 aristas?
- 4 Encontrar $\delta^-(v)$ y $\delta^+(v)$ para $\forall v \in V$ en los siguientes grafos:



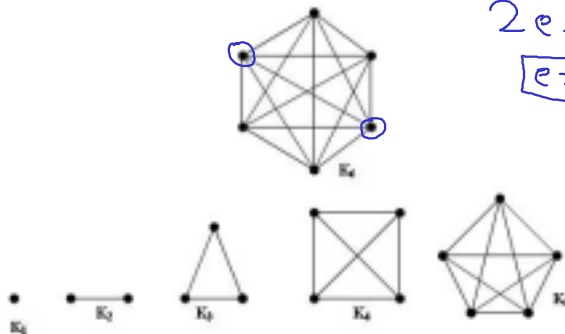
e

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples**
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Grafo Completo

El grafo completo de n vértices, que se denota por K_n , es el grafo simple que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos.

Ejemplo 1. sean Los K_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$



$$2e = 6(5)$$

$$e = 15$$

K_n

$$n \geq 1$$

$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$

$$2e = n(n-1)$$

$$e = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\overbrace{(n-1) + (n-1) + \dots + (n-1)}^n$$

$$\sum_{i=1}^n (n-1)$$

$$n(n-1)$$

vertices



...

$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x) = n(n-1)$$

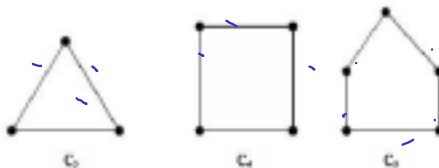
$$e = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

Ciclo

El *Ciclo* C_n , $n \geq 3$, consta de n vértices v_1, v_2, \dots, v_n y aristas

$$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \quad y \quad \{v_n, v_1\}$$

En la siguiente figura se muestran los ciclos C_3, C_4, C_5 .



C_n

$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$

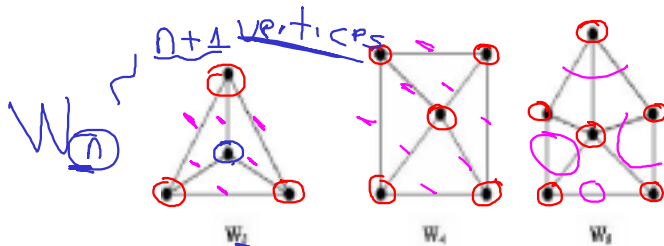
$$2e = \underbrace{2+2+2+2+2}_{n \text{ vertices}}$$

$$2e = 2n$$

$$e = n$$

Rueda

Obtenemos una **rueda** W_n cuando añadimos un **vértice** adicional al ciclo C_n , para $n \geq 3$, y conectamos a este nuevo **vértice** con cada uno de los n vértices de C_n mediante una nueva arista. ver W_3, W_4, W_5



$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$

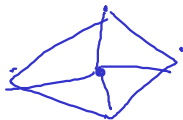
$$2e = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_n + n$$

$$2e = 3n + n \quad \begin{matrix} n \text{ vertices} \\ 2e = 4n \quad e = 2n \end{matrix}$$

$$W_{103}^n$$

$$|V| = 104$$

$$|E| = \dots\dots$$



$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$

$$2e = (103)(3) + (103)$$

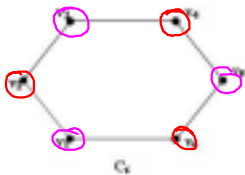
$$2e = (4)(103)$$

$$e = 2 \times 103 = 206$$

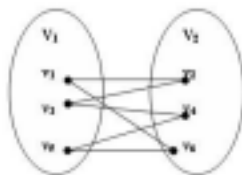
- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos**
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Grafo Bipartito o bigrafo

Se dice que un grafo simple G es **bipartito** si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tales que cada arista del grafo conecta un vértice V_1 con un vértice de V_2 (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de V_1 ni tampoco dos vértices de V_2).



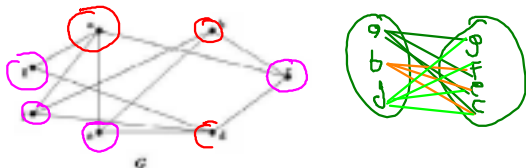
El ciclo C_6 es bipartito



$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$
$$V_1 \cup V_2 = V$$

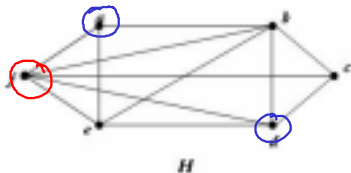
El grafo C_6 es bipartito donde $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ entre v_1, v_3, v_5 no existen aristas que los comuniquen.

Ejemplo. Determinar si el siguiente grafo G es bipartito?



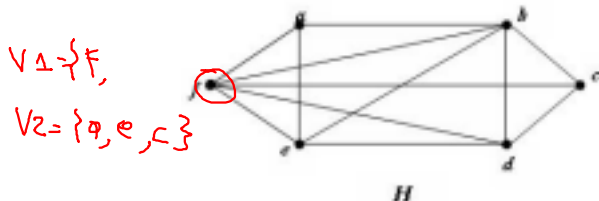
Es bipartito por que podemos encontrar dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 tale que $V_1 = \{c, e, g, f\}$ y $V_2 = \{a, b, d\}$

Ejemplo. Determinar si el siguiente grafo H es bipartito?



El grafo H no es bipartito.

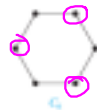
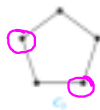
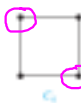
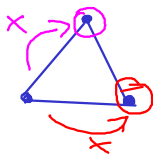
Se puede justificar un grafo que no sea bipartito definiendo un máximo de vértices para V_1 y V_2 y encontrando un contraejemplo. Sea el grafo:



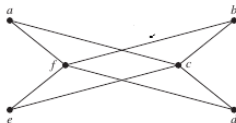
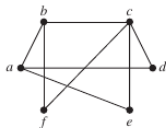
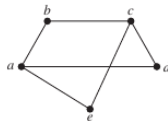
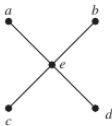
- Sean los conjuntos $V_1 = \{f\}$ y $V_2 = \{a, c\}$, entonces existen dos aristas adyacentes $\{f, a\}$ y $\{f, c\}$, en f no se pueden adicionar vértices por que todos los vértices son adyacentes con f
- Con un contraejemplo demostramos que el grafo no es bipartito, sean $V_1 = \{f\}$ y $V_2 = \{a, c\}$ y el vértice b , entonces cualquier arista incidente con b ; $\{f, b\}$ y $\{a, b\}$ debe tener vértices en V_1 y V_2 . Por tanto b no puede estar ni en V_1 ni en V_2 .

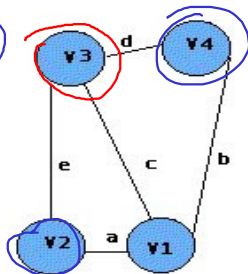
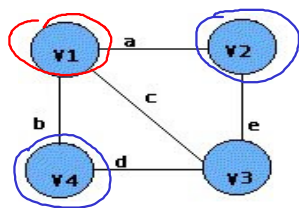
Grafos bipartitos

Por ejemplo, K_3 no es bipartito y C_6 si lo es, para que otros valores de n , C_n es bipartito.



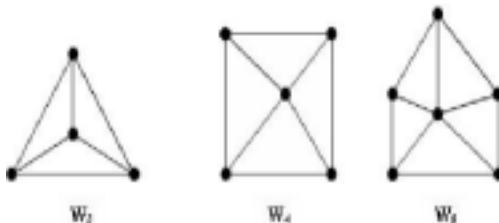
K_n solamente es bipartito cuando $n = 2$.





NO SON
BIPARTITOS

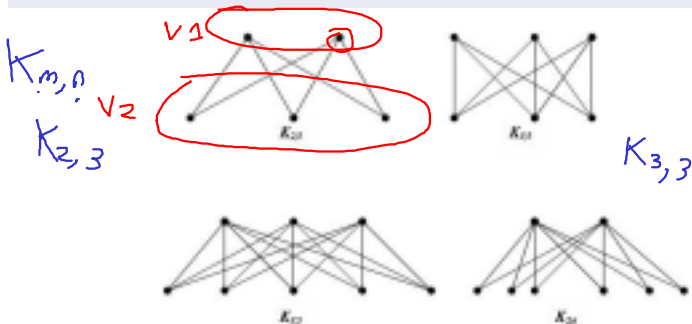
Porque los grafos rueda no son bipartitos:



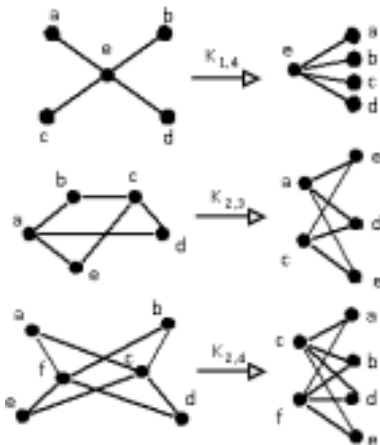
Sea k_3 un grafo completo no bipartito y sea k_3 un subgrafo contenido en los grafos rueda W_n .

Grafo Bipartito Completo

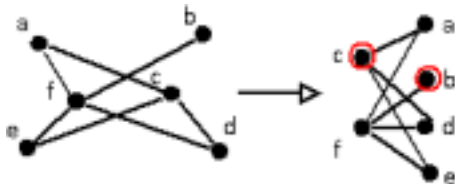
El grafo bipartito completo $K_{m,n}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices está formado por dos subconjuntos con m y n vértices, respectivamente, y hay una arista entre dos vértices si, y sólo si, un vértice está en el **primer subconjunto** y el otro vértice está en el **segundo subconjunto**.



Algunos grafos bipartitos son bipartitos completos



Grafo bipartito que no es bipartito completo



Indique si son bipartitos

1) K_4 No

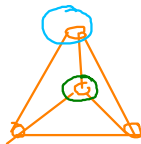
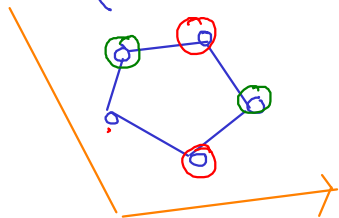
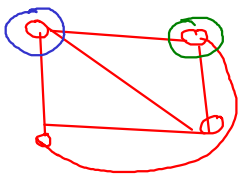
2) K_7 No

3) K_8 No

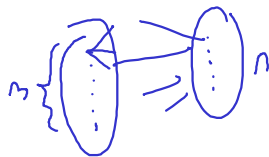
4) C_5

5) W_3

K_n $n > 2$ NO es
B. partido
 $n = 2$ si es bipartito



$$K_{m,n}$$



- 1) $K_{7,8}$ $V=15$ $E=56$
 2) $K_{9,10}$ $V=19$ $E=90$

$$|V| = m + n$$

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = m \cdot n + n \cdot m$$

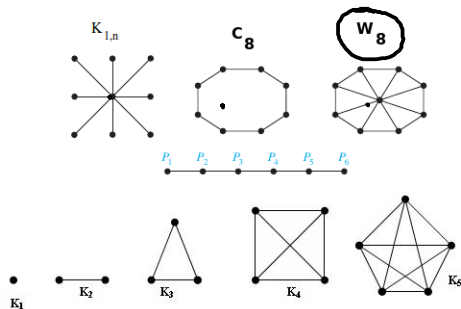
$$= 2mn$$

$$2E = 2mn$$

$$E = mn$$

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos**
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Topologías para redes de área local: ESTRELLA, ANILLO E HÍBRIDA y un arreglo lineal de 6 procesadores



¿Cuántos vértices y cuántas aristas tiene cada uno de los grafos?

K_n, C_n, W_n y $K_{n,m}$.

Por ejemplo para K_n el número de vértices es n . El número de aristas según el teorema del apretón de manos (handshaking) es $2e = \sum_{v \in V} \delta(v)$, entonces $e = (n(n-1))/2$ donde $n-1$ es el número de aristas incidentes para cada n vértices.



K_n ← No dirigido
→ n vertices

$$G = (V, E)$$

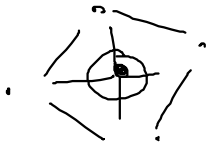


$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$

$$2e = n(n-1)$$

$$e = \frac{n(n-1)}{2}$$

W_n

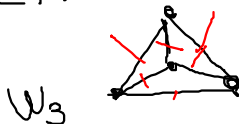


$n+1$

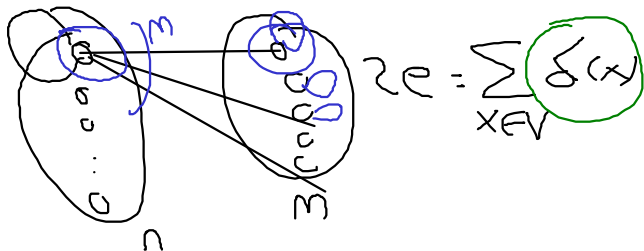
$$2e = \sum_{x \in V} \deg(x)$$

$$2e = n(3) + n$$

$$2e = 4n \rightarrow e = 2n$$



Grafo bipartito con bucles. Cada nodo/vertices tiene un bucle, calcule el número de aristas de $K'_{n,m}$



$$2e = (m+2)n + (n+2)m$$

$$2e = nm + 2n + nm + 2m$$

$$e = nm + n + m$$

Secuencia de grado

Se puede encontrar la secuencia del grado de un grafo $G = (V, E)$ que es la secuencia de los grados de los vértices del grafo en orden decreciente.

- Las secuencias de grado de

$$K_4 = 3, 3, 3, 3, C_4 = 2, 2, 2, 2, W_4 = 4, 3, 3, 3, 3 \text{ y } K_{2,3} = 3, 3, 2, 2, 2$$



K_4



C_4



W_4

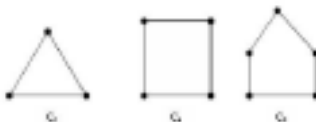


$K_{2,3}$

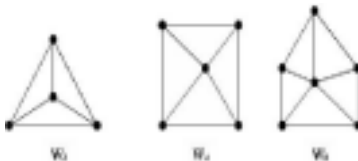
$$C_{100} = \{2, 2, \dots, 2\}$$

- Cuál es la secuencia de grado de K_n , donde n es un entero positivo. **Cada uno de los n vértices es adyacente a cada uno de los otros $n - 1$ vértices, así la secuencia del grado es $n - 1, n - 1, \dots, n - 1$ (n términos)**

La secuencia de grados de cualquier C_n es $2, 2, 2, \dots, 2$ (n términos)



La secuencia de grado de cualquier W_n es $n, \underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_{(n-\text{términos})}$



la secuencia de grado para cualquier $K_{m,n}$

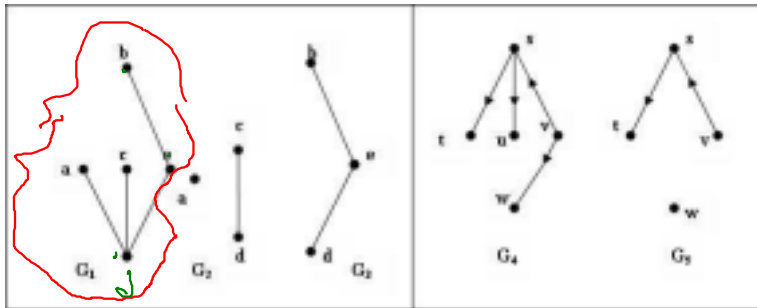
$K_{n,m}$

$$n > m$$

$$\underbrace{n, n, \dots, n}_{m \text{ times}}, \underbrace{m, m, \dots, m}_{n \text{ times}}$$

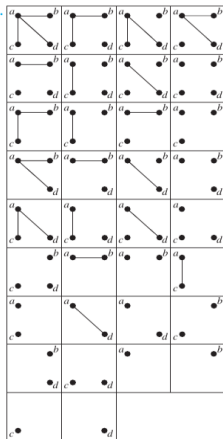
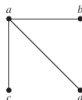
Subgrafo

Si $G = (V, E)$ es un grafo (dirigido o no), $G_1 = (V_1, E_1)$ entonces es un subgrafo de G , si $V_1 \subseteq V$ y $E_1 \subseteq E$ y $E_1 \subseteq V_1^2$



En esta figura G_2 y G_3 son subgrafos de G_1 y en el grafo derecho G_5 es subgrafo de G_4 .

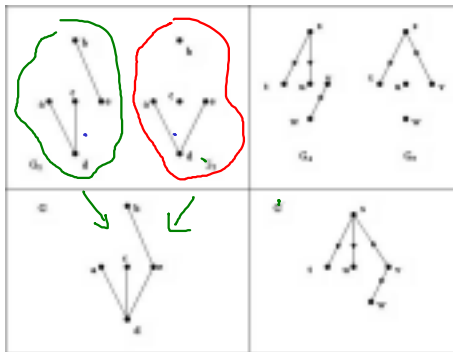
Dibujar todos los grafos del siguiente grafo:



Dibujar los 17 subgrafos de K_3 con al menos un vértice.

Subgrafo recubridor.

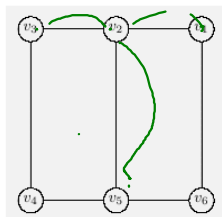
Dado un grafo (dirigido o no) $G = (V, E)$, sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un subgrafo de G . Si $V_1 = V$, entonces G_1 es un subgrafo recubridor de G .



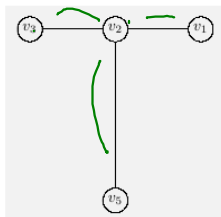
En esta figura G_1 y G_2 son subgrafos recubridores de G y en el grafo derecho G_4 y G_5 son subgrafos recubridores de G'

Subgrafo inducido

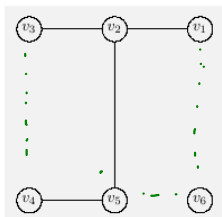
Para cualquier subconjunto W de vértices de un grafo $G = (V, E)$, llamaremos subgrafo inducido por W , y lo notaremos $\langle W \rangle$, al subgrafo de G que se obtiene tomando los vértices de W y las aristas de G que son incidentes con ellos.



G

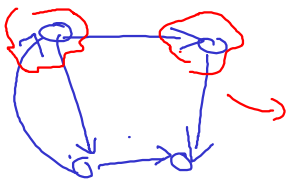


H_1



H_2

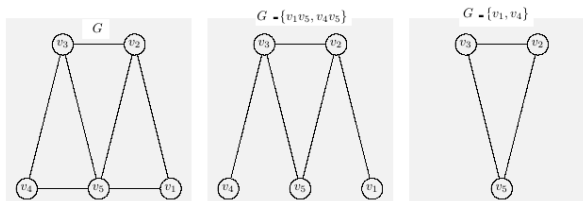
H_1 es un subgrafo inducido ya que $W = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$, el subgrafo H_1 contiene todas las aristas de G incidentes con los vértices de W , pero H_2 no lo es ya que faltan las aristas $\{v_1, v_6\}$, $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_5, v_6\}$.



Eliminación de aristas y vértices

- Sea un arista e del grafo $G = (V, E)$, entonces el subgrafo $G - \{e\}$ es el grafo que se obtiene de G eliminando la arista e . En general, escribimos $G - \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ para determinar el subgrafo que se obtiene de G eliminando las aristas $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ($V = V_1$).
- Si v es un vértice del grafo G , entonces $G - \{v\}$ es el subgrafo obtenido del G eliminando el vértice v junto con todas las aristas incidentes. En general, se escribe $G - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ para notar el grafo obtenido eliminando los vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ en G y todas las aristas incidentes con cualquiera de ellos.

¿Cuál es el grafo inducido sobre G ?



Fragmentos

1) Subgrafo: Es un grafo que puede extraer de otro grafo. Formalmente $G = (V, E)$, $G_1 = (V_1, E_1)$

$$\boxed{V_1 \subseteq V \text{ y } E_1 \subseteq E} / \text{y } E_1 \subseteq V_1^2$$
$$E \subseteq V^2$$

2) Subgrafo recubridor: Subgrafo que tiene los mismo vertices (NO necesariamente las mismas aristas)

3) Subgrafo inducido. Es coger un conjunto de vértices y las aristas que son incidentes entre ellos.

4) Eliminación de aristas (borrarla y ya) y de vertices (que tambien deben borrar las aristas que son incidentes)

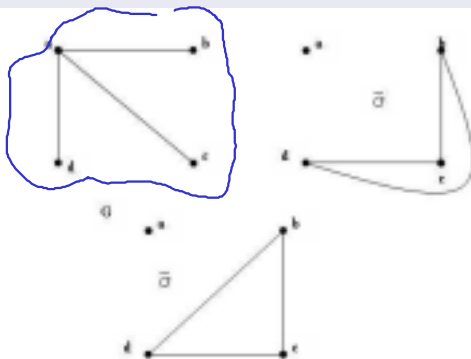
5) Los posibles subgrafos de un grafo

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios**
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Grafo complementario

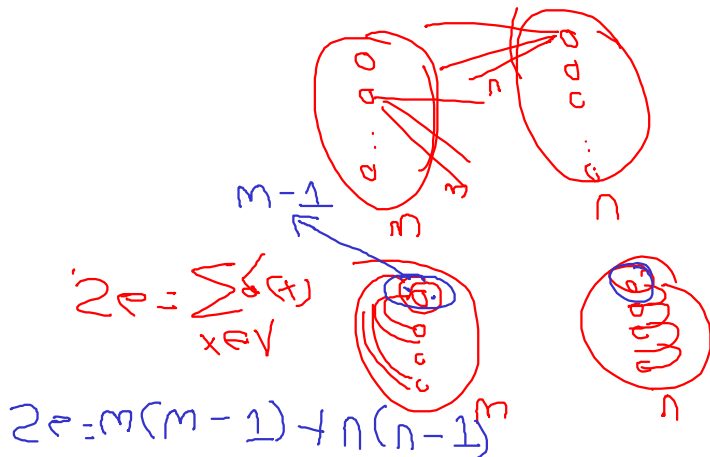
Sea G un grafo simple no dirigido sin bucles con n vértices. El complementario de G , se denota como \overline{G} . \overline{G} de un grafo simple G tiene los mismos vértices que G . Dos vértices son adyacentes en \overline{G} **sii** estos dos vértices no son adyacentes en G .

Si $G = K_n$, \overline{G} es un grafo con n vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama **grafo nulo**.

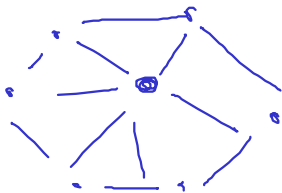


Grafo complementario de K_n , es un grafo con n vértices y sin aristas

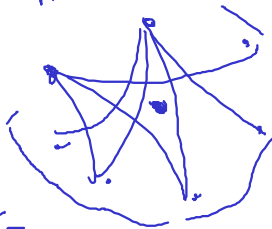
Grafo complementario de $K_{n,m}$



W_n



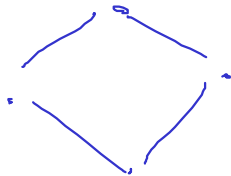
$\overline{W_n}$



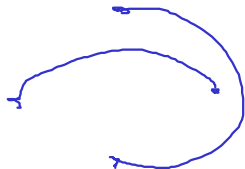
$$2e = \sum_{x \in V} d(x)$$

$$2e = 0 + (n-3)n$$

C_n



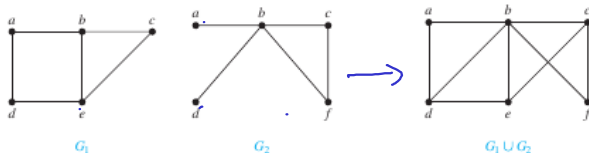
C_n



$$2e = (n-3)n$$

Unión de grafos

La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple con el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ y el conjunto de aristas $E_1 \cup E_2$. La unión de G_1 y G_2 es denotada por $G_1 \cup G_2$.



Grafos complementarios y K_n

Teorema

Si G es un grafo simple con n vértices, entonces la unión de G y \overline{G} es K_n .

Dem// La unión de G y \overline{G} contienen una arista entre cada par de n vértices. Por lo tanto, esta unión es K_n .

Ejercicio

Si la secuencia de grado de un grafo simple G es d_1, d_2, \dots, d_n , ¿Cuál es la secuencia de grado de \overline{G} ?

$n-1-d_n, n-1-d_{n-1}, \dots, n-1-d_2, n-1-d_1$

Problema

Si el grafo simple G tiene v vértices y e aristas, ¿Cuántas aristas tiene \overline{G} ?

C_n

$$\underbrace{2, 2, 2, 2, \dots, 2}_n$$

 C_n

$$n-3, n-3, n-3, \dots, n-3$$

 W_n

$$n, 3, 3, 3, 3, 3,$$

$$K_{n+1} \rightarrow n, n, n, n,$$

$$g \underbrace{n-3, n-3}_n$$

$$K_{n,m}$$

$$n > m$$

$$\underbrace{n, n-1, \dots, n}_{m \text{ vrt}}, \underbrace{m, m, \dots, m}_{n \text{ vrt}}$$

$$K_{n,m}$$

$$n+m$$

$$K_{n+m} = \underbrace{n+m-1, n+m-1}_{n+m}$$

$$n+m-1-n \dots n+m-1-m$$

$$\underbrace{m-1}_{m \text{ vrt}}$$

$$\underbrace{n-1}_{n \text{ vrt}}$$

$$\sum d_G: m(m-1) + n(n-1)$$

Resumen

1) Grafo complementario:

- Tomar las aristas que le faltan para ser completo
- Tomar las aristas de aquellos vertices que no son adyacentes (vecinos)

2) Calcular el grado a partir del grafo completo

$$G = \underline{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n} \quad \overline{G}$$

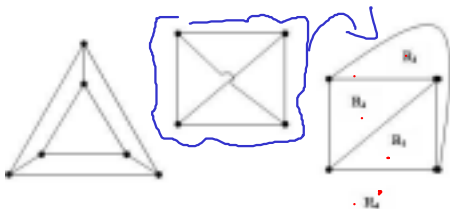
$$\underline{K_n = n-1, n-2, \dots, n-1} \quad n \text{ vrt}$$

$$G = n-1-d_1, n-1-d_2, \dots, n-1-d_n$$

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos**
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Grafo plano.

Un grafo (o multigrafo) G es plano si podemos dibujar G en el plano de modo que sus aristas se intersectan sólo en los vértices de G . Este dibujo se conoce como una inmersión (*embedding*) de G .



Al igual que K_4 también K_1, K_2, K_3 son planos a diferencia de K_5 que no lo es.

Teorema

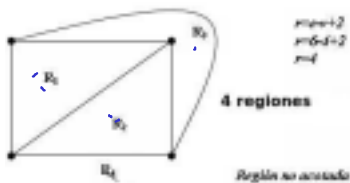
Sea G un grafo simple conexo con e aristas y v vértices. Sea r el número de regiones de una representación plana de G . Entonces, $r = e - v + 2$

Observación

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano sin bucles con $|V| = v$, $|E| = e > 2$, y r regiones, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$

Ejemplo. El grafo K_4 , tiene $|V| = 4$, $|E| = 6 > 2$, además cumple con las dos condiciones: (ver grafo)

- $3r \leq 12 \rightarrow r \leq 4$
- $e \leq 3(4) - 6$, $e \leq 6$, $6 \leq 6$



$$r = e - v + 2$$

$$r = 6 - 4 + 2 = 4$$

$$3r \leq 2e$$

$$12 \leq 12$$

r_1

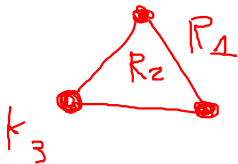


$$e = 1$$

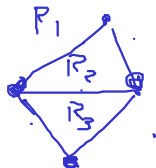
$$V = 2$$

$$r = e - V + 2$$

$$r = \underline{1}$$



$$r = e - V + 2$$



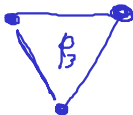
$$r = 5 - 4 + 2 = 3$$

$$\underline{3r} \leq 2e$$



$$\textcircled{B \leq 4}$$

R_1

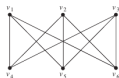
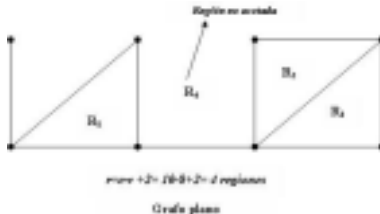


$$\underline{\underline{6 \leq 6}}$$

Ejemplo. Sea el grafo K_5 , tiene $|V| = 5$, y $2e = 4 \cdot 5$, $e = 10$ no cumple con la condición:

■ $e \leq 3(5) - 6$, $e \leq 9$, $10 \leq 9$

Ejemplo. Cálculo de las regiones en un grafo planar.



$|V| = 6$ y $|E| = 9$, $e \leq 3(6) - 6$,
 $e \leq 12$ Por lo tanto $9 \leq 12$
 y $r????$

K₅

$$V=5$$

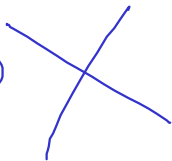
$$r = e - v + 2$$

$$r = 10 - 5 + 2$$

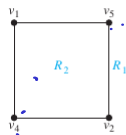
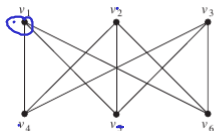
$$r = 7$$

$$3r \leq 2e$$

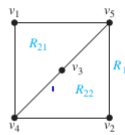
$$21 \leq 20$$



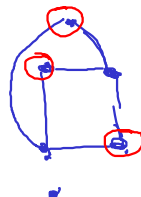
¿Es $K_{3,3}$ plano?



(a)

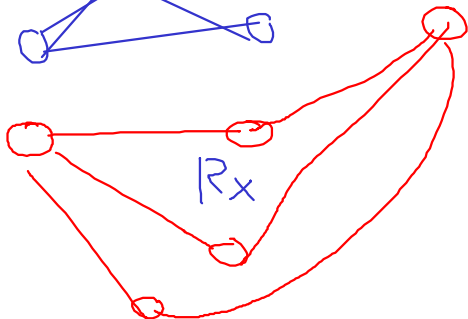
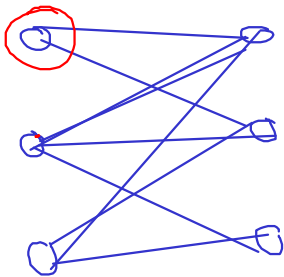


(b)



- Sea v_1, v_4, v_5, v_2 un subgrafo con dos regiones R_1 y R_2 que forman una curva cerrada, entonces, el vértice v_3 estaría en R_1 o en R_2 . Cuando v_3 está en R_2 al interior de la curva cerrada, las aristas $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_3, v_5\}$ separan a R_2 en dos regiones, R_{21} y R_{22} , sigue siendo plano.
- Entonces no hay manera de colocar el vértice v_6 sin cruzar, si v_6 está en R_1 , entonces el lado $\{v_3, v_6\}$ no se puede dibujar sin cruzar. Si v_6 está en R_{21} , entonces $\{v_2, v_6\}$ no se puede ser dibujado sin cruzar. Si v_6 está en R_{22} , entonces $\{v_1, v_6\}$ no puede dibujar sin cruzar.
- De manera similar cuando $v_3 \in R_1$.

$K_{3,3}$



$$K_{3,3}$$

$$r = e - v + 2$$

$$r = 9 - 6 + 2 = 5$$

$$3r \leq 2e$$

$$e \leq 3r - 6$$

$$\checkmark 15 \leq 18$$

$$9 \leq 18 - 6$$

$$\checkmark 9 \leq 12$$

Grafo plano

1) Grafo que podemos pintar sin que se crucen las aristas

2) Teorema empirico para determinar si un grafo puede ser plano (Si pasa la prueba NO es garantia que sea plano)

$$r = e - v + 2, \quad e > 2$$

$$3r \leq 2e, \quad e \leq 3v - 6$$

Puede fallar, como falla con $K_{3,3}$

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos**
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

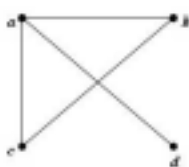
Matriz de Adyacencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$, la matriz de adyacencia es la **matriz booleana** de $n \times n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- hay $n!$ matrices de adyacencia distintas para un grafo de n vértices.
- todos los grafos no dirigidos, incluyendo multigrafos, pseudografos, tienen matrices simétricas

Ejemplo. La matriz de adyacencia de un grafo simple



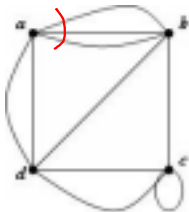
~~$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$~~

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido con bucles y con aristas paralelas tiene las siguientes características:

- Un bucle en el vértice a_i se representa por medio de un 1 en la posición (i, i) de la matriz.
- Cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana, ya que el elemento de la posición (i, j) es igual al número de aristas asociadas a $\{v_i, v_j\}$

Ejemplo. Matriz de adyacencia de un **pseudografo**.

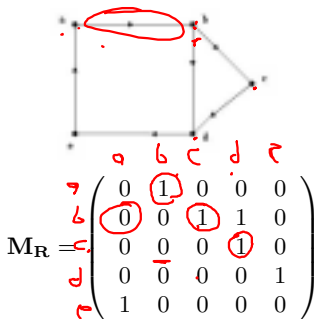


$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

La Matriz de adyacencia de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene 1 en la posición (i, j) si hay arista de v_i a v_j , siendo v_1, v_2, \dots, v_n un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. entonces:

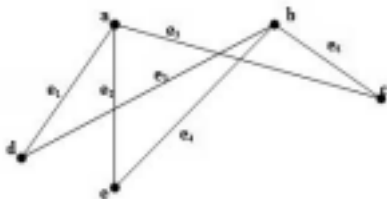
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Matriz de incidencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, supongamos que v_1, v_2, \dots, v_n son los vértices y e_1, e_2, \dots, e_m las aristas de G . Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y E es la matriz $M = [m_{ij}]$ de $n \times m$ dada por:

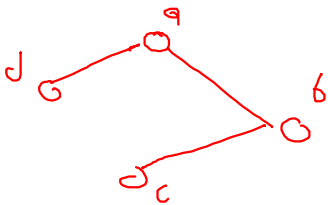
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } \{e_j\} \text{ es incidente con } \{v_i\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
a	1	1	0	0	1	0
b	0	0	1	1	0	1
c	0	0	0	0	1	1
d	1	0	1	0	0	0
e	0	1	0	1	0	0

Σ 2 2 2 2 2 2

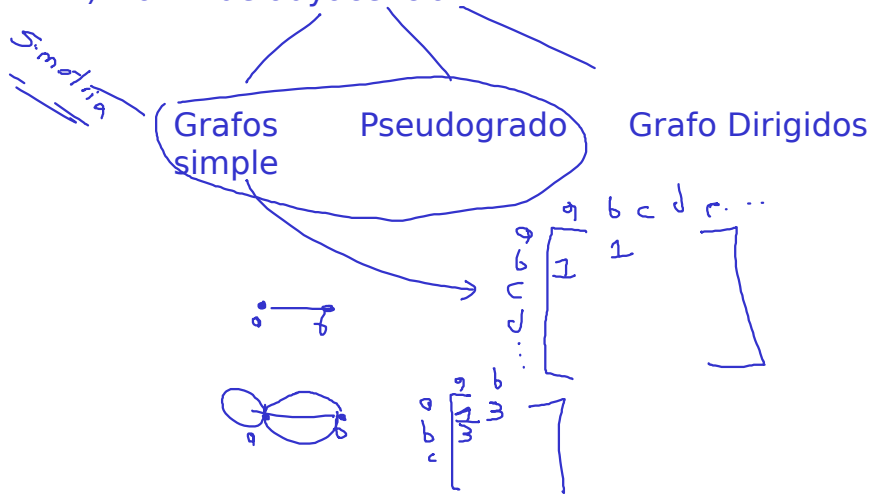
Listas de adyacencia o listas de aristas



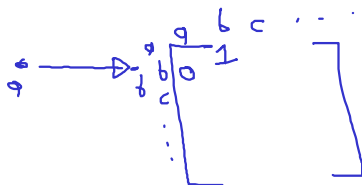
$$L = \{(a, d), (a, b), (b, c)\}$$

Resumen representación de grafos

1) Matriz de adyacencia



Grafos dirigidos



2) Matriz de incidencia



3) Listas de adyacencia / Listas de aristas



Indique si los siguientes grafos son planos y explique porque

$$e = 9 \quad v = 6 \quad r = e - v + 2 = 5$$

1) $K_{3,3}$ $3 \leq 2e \quad 15 \leq 18 \checkmark$

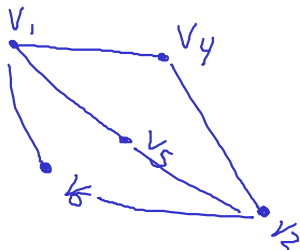
$$e \leq 3v - 6 \quad 9 \leq 12 \checkmark$$

2) K_4

3) K_5

4) C_4

5) W_6



K_4

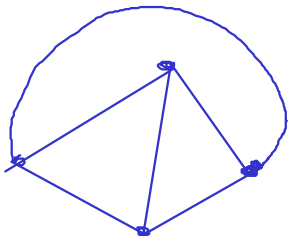
$$e = 6 \quad v = 4$$

$$r = e - v + 2 = 4$$

$$3r \leq 2e \quad 12 \leq 12 \checkmark$$

$$e \leq 3v - 6 \quad 6 \leq 12 - 6$$

$$6 \leq 6 \checkmark$$



K5

$$e=10 \quad V=5$$

$$r=7$$

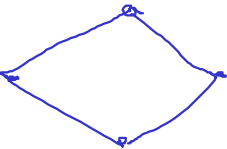
$$3r \leq 2e \quad 21 \leq 20 \quad \times$$

C4

$$e=4 \quad V=4 \quad r=2$$

$$3r \leq 2e \quad 6 \leq 8 \quad \checkmark$$

$$e \leq 3V - 6 \rightarrow 4 \leq 6 \quad \checkmark$$



G_n

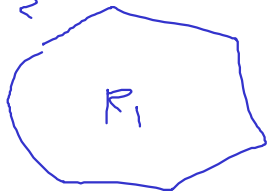
$$\gamma = e - v + 2$$

 R_2

$$\gamma = e - n + 2$$

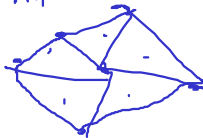
$$\gamma = n - n + 2$$

$$\gamma = 2$$

 W_5

$$e = 10 \quad v = 6 \quad \gamma = 6$$

$$3\gamma \leq 2e \quad 18 \leq 20 \quad \checkmark$$

 R_1 

$$e \leq 3v - 6$$

$$10 \leq 12 \quad \checkmark$$

Wn

$$r = e - v + 2$$

$$r = 2n - (n + 1) + 2$$

$$r = 2n - n - 1 + 2$$

$$r = n + 1$$

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad**
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Teorema

Sea $M_R = (m_{ij})$ la matriz de adyacencia de un grafo.

$$M_R \otimes M_R = M_R^2$$

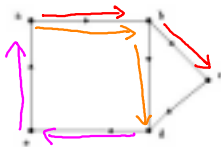
$$M_R \otimes M_R \otimes M_R = M_R^3$$

\vdots

$$\underbrace{M_R \otimes M_R \otimes M_R \dots \otimes M_R}_n = M_R^n$$

- \otimes es el producto booleano.
- 1 en M_R^n en un grafo dirigido significa que se puede ir del nodo i al j recorriendo exactamente n aristas en el grafo.

Ejemplo Sea el siguiente grafo y su matriz de adyacencia.



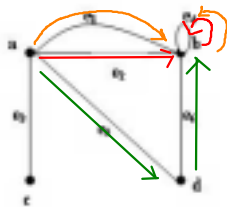
$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_R^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El 1 en $M_R^2(1, 3)$ significa que hay un camino de longitud 2 de a -c: a,b,c.

Ejemplo. Sea el siguiente pseudografo obtener la cuantía de los caminos de longitud 2.

$a-b-a \{e_1, e_2\}$
 $a-b-a \{e_1, e_2\}$
 $a-c-a$ X
 $a-b-a \{e_1\}$ X
 $a-b-a \{e_2\}$ X
 $a-d-a$ X



$a-d-b \{e_3\}$ X
 $a-b-b \{e_1\}$ ✓
 $a-b-b \{e_2\}$ ✓

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$M_R^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El 6 significa que hay 6 caminos de longitud 2 de a-a:

$V = OR$ $\wedge = AND$

Matriz de Conectividad

La matriz de conectividad se define como:

$$M_R^\infty = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \dots \vee M_R^n$$

Grado grafo

Ejemplo Obtener la matriz de conectividad para el siguiente grafo.

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



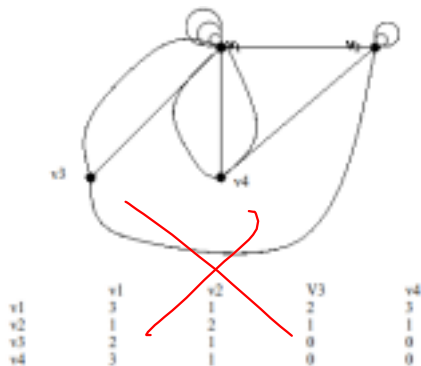
$$M_R^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_R^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de Pseudografos



$$n=2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$n \times n \times n = n^3$$

$$\begin{bmatrix} 3 \times 6 + 5 \times 2 & 3 \times 9 + 5 \times 1 \\ 8 \times 6 + 7 \times 2 & 8 \times 9 + 7 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$O(n^3)$$

$$W^0 = M_R$$

CONECTIVIDAD POR WARSHALL

$$W^1 = W^0 \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{1j}) \quad i, j \geq 1, k \leq n$$

$$W^k = W^{k-1} \vee (W^{k-1}_{ik} \wedge W^{k-1}_{kj})$$

$$W^n = M_R^\infty$$

$$M_R = W^0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_{11}^1 = W_{11}^0 \vee (W_{11}^0 \wedge W_{11}^0)$$

W^1

$k=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_{12}^1 = W_{12}^0 \vee (W_{11}^0 \wedge W_{12}^0)$$

$$W^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k=4$

$$W^4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SUBROUTINE WARSHALL (M)

FOR K := 1 TO N

FOR I := 1 TO N

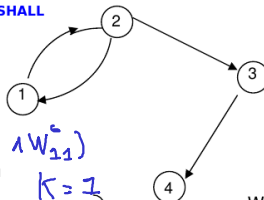
FOR J := 1 TO N

M[I,J] := M[I,J] OR M[I,K] AND M[K,J]

END SUBROUTINE;

$$W_{12}^4 = W_{12}^3 \vee (W_{14}^3 \wedge W_{42}^3)$$

$$i=1 \quad j=2 \quad 1 \vee (1 \wedge 0)$$



Para hallar la conectividad de un grafo

$$Q \text{ --- } \dots \text{ --- } b$$

$$MR^0 = MR \vee MR^2 \vee MR^3 \vee \dots \vee MR^n \quad O(n^3)$$

Warshall $W^0 = MR$

$$W_{ij}^k = W_{ij}^{k-1} \vee (W_{ik}^{k-1} \wedge W_{kj}^{k-1}) \quad O(n^3)$$

$$MR^0 = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \dots \end{matrix}$$

$$MR^0 = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \dots & \dots \end{matrix}$$

Camino

Es una trayectoria que comienza en un vértice v_0 y termina en un vértice v_n donde se pueden repetir aristas y vértices. Un camino se puede representar como una sucesión de vértices $v_0, v_1 \dots v_{n-1}, v_n$ o como una sucesión de aristas

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2) \dots (v_{n-1}, v_n)$$

Camino simple

Es un camino que NO repite aristas.

Camino cerrado o circuito

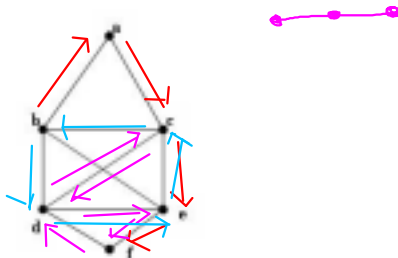
Es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y puede repetir aristas y vértices.

Circuito simple

Es un camino cerrado en el que no se pueden repetir aristas.

Longitud de un camino

Es el número de aristas que recorre el camino. Un camino de longitud n debe tener $n + 1$ vértices. Para el siguiente grafo:



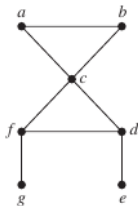
- Un camino simple de longitud 4 que empiece en b: b,a,c,e,f
- Un camino cerrado de longitud 5 que inicie en f: f,d,c,d,e,f
- Un camino de longitud 5 de d-c: d,b,c,b,c,d
- Un circuito simple de longitud 4 que empiece en c: c,b,d,e,c

Grafo conexo

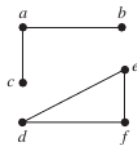
Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido es conexo si para cualquiera $a, b \in V$, existe un camino o trayectoria de cualquier longitud.



G_1 es conexo y G_2 no es conexo



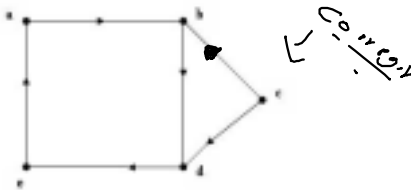
G_1



G_2

Débilmente conexo

Se dice que un grafo dirigido es *débilmente conexo* si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.



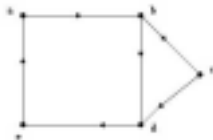
a-b: a,b	b-a: b,d,e,a	a-e: a,b,d,e
e-a: e,a	a-c: a,b,c	c-a: c,d,e,a
a-d: a,b,c,d	d-a: d,e,a	c-b: c,d,b
b-c: b,c		

Por lo tanto, también es débilmente conexo. si obtenemos el grafo no dirigido subyacente encontramos que existe un camino para cualquiera dos vértices.

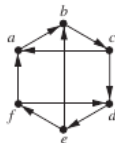
Grafo fuertemente conexo

Conexidad en grafos dirigidos

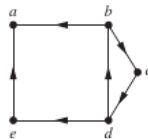
Se dice que un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b en el grafo.



H es débilmente conexo y G es fuertemente conexo

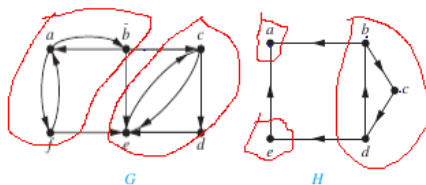


G



H

Componentes fuertemente conexos

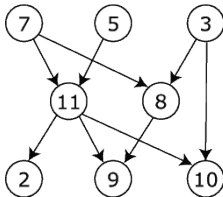
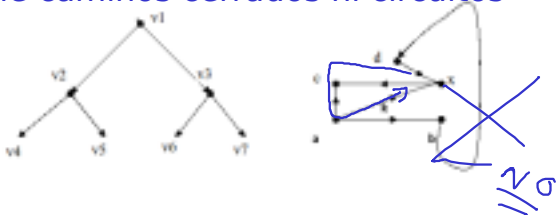


- El grafo H tiene 3 componentes fuertemente conexas; el vértice a y el vértice e por ser subgrafos y el componente que es un subgrafo consistente de los vértices $\{b, c, d\}$
- El grafo G tiene dos componentes fuertemente conexas que son los subgrafos formados por los vértices $\{a, b, f\}$ y $\{c, d, e\}$

Grafo acíclico dirigido

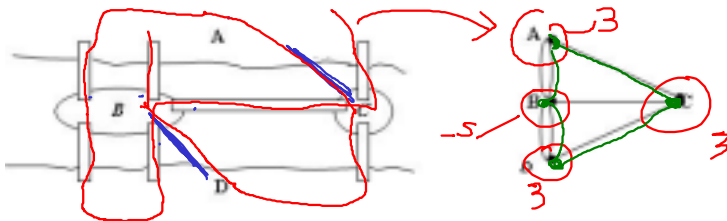
Es un grafo que no tiene ciclos.

NO tiene caminos cerrados ni circuitos



Problema de los puentes de Königsberg

Partir de cualquier lugar (A,B,C y D) caminar sobre cada puente exactamente una vez y regresar a la posición inicial de partida.

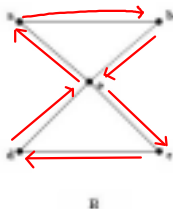
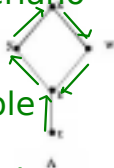


Circuito de Euler

Un **circuito de Euler** en un grafo G es un circuito simple que pasa exactamente una vez por cada arista de G . Un **camino de Euler** en G es un camino simple que pasa exactamente una vez por cada arista.

Camino euleriano
t - z

- 1) Cam simple
- 2) Recorrer todas las aristas



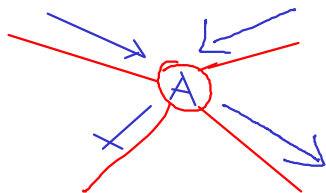
Circuito euleriano
1) Circuito simple
2) Recorri todas las aristas

En el grafo *A* hay una *camino de Euler* **t,z,w,x,y,z** se pueden repetir vértices pero no aristas. En el grafo *B* hay un *circuito euleriano*: **a,e,c,d,e,b,a**

Teorema

Un **pseudografo** conexo contiene un *circuito euleriano* si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.



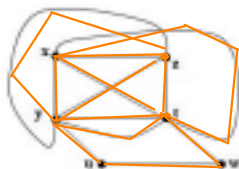


Para que halla un circuito euleriano, cada vértice tiene que tener grado par

Porque si tengo una arista de entrada debo tener una salida

Ejemplo. Sea el siguiente grafo tiene un circuito euleriano

$z, y, t, y, x, z, t, x, t, w, u, y, z$



$$\delta(u) = 2$$

$$\delta(w) = 2$$

$$\delta(y) = 6$$

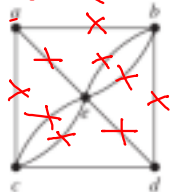
$$\delta(t) = 6$$

$$\delta(x) = 4$$

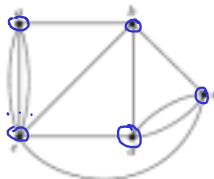
$$\delta(z) = 4$$

Hay camino de Euler y circuito de Euler

$a - b - e - c - e - d - b - e - a - c - d$

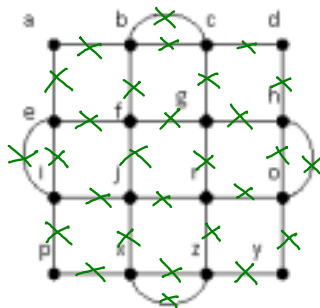


$a, e, c, e, b, e, d, b, a, c, d$



$a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, e, a$

Un circuito de Euler.



Circuito de Euler: [a,b,c,b,f,g,c,d,h,g,r,o,h,o,y,z,r,j,x,z,x,p,i,j,f,e,i,e,a](#)

Circuito euleriano

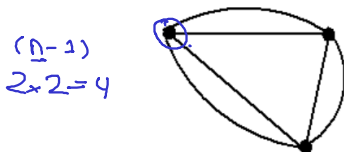
- 1) Circuito simple
- 2) Se recorren todas las aristas
- 3) Todos los vértices deben tener grado par

Camino euleriano

- 1) Camino simple
- 2) Se recorren todas las aristas
- 3) Todos los vértices deben tener grado par, excepto dos: inicio y final

Solución quiz 1

Hasta el momento podemos encontrar por teorema de HandShaking el número de aristas de cualquier grado completo K_n . Sin embargo, vamos hacer una modificación: Ahora estos serán multigrafos no dirigidos y cada arista tendrá m aristas paralelas. Por ejemplo un K_3 con $m = 2$.



Utilizando el teorema de HandShaking ¿Cuántas aristas tiene un K_n con m aristas repetidas? Es fundamental mostrar el procedimiento realizado (no se vale sólo el resultado). Este valor debe quedar en términos de m y n . Responda al respaldo de esta hoja.

$K_4 \quad m=2$

$$e = \frac{4 \times 2 \times 3}{2} = 12$$



$$2e = \sum_{x \in V} \delta(x)$$



$$2e = \sum_{x \in V} \frac{m(n-1)}{n \text{ vertices}}$$

K_n

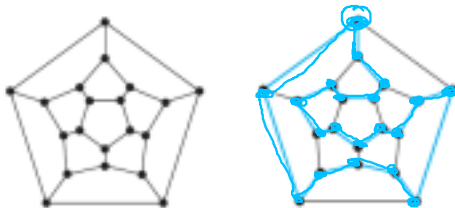
$$e = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$2e = nm(n-1)$$

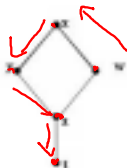
$$e = \frac{nm(n-1)}{2}$$

Circuito de Hamilton

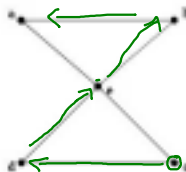
Un **camino de Hamilton** en un grafo G es un camino simple que pasa exactamente una vez por cada vértice, y un **circuito de Hamilton** en un grafo G es un circuito simple que pasa exactamente una vez por cada vértice. Es decir, el camino simple $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ en el grafo $G = (V, E)$ es un camino de Hamilton si $V = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y un circuito simple $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_0$ ($n > 0$) es un circuito de Hamilton si $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ es un camino de Hamilton.



20 ciudades son visitadas pasando exactamente una vez.



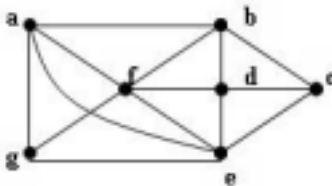
A



B

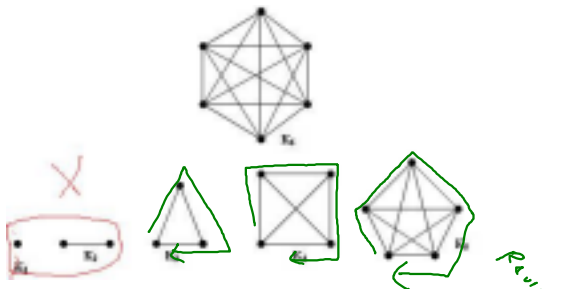
En ninguno hay
circuito
hamiltoniano

El grafo *A* tiene un camino hamiltoniano **t,z,y,x,w** y el grafo *B* tiene un camino hamiltoniano **a,b,e,d,c**. Ninguno de los dos grafos tiene circuito hamiltoniano. El siguiente grafo tiene el circuito hamiltoniano **a,b,c,d,e,f,g,a**



Hamilton y K_n

Muestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$



De los circuitos especiales se puede decir:

- Que son *circuitos simples*. En el caso del circuito de Euler se pueden repetir vértices pero en el caso del circuito de Hamilton NO.
- Los caminos especiales son *caminos simples*. En el camino de Euler se pueden repetir vértices. Pero en el camino de Hamilton no se pueden repetir vértices.

Caminos Hamiltonianos

- 1) Camino simple
- 2) No se pueden repetir vértices

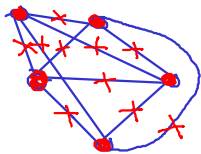
Circuitos hamiltonianos

- 1) Circuito simple
- 2) No se puede repetir vértices, excepto el de inicio

Ejercicio socrativo. Circuito euleriano

S_I 1) K5

$$K_n \rightarrow n-1 \rightarrow K_5 \Rightarrow \delta(x) = 4$$



S_I 2) C3

$$C_n \rightarrow 2$$



N03) W3

$$W_n \rightarrow n, \quad (3, 3, 3, \dots)$$



S_I 4) K4,4



$$K_{n,m}$$

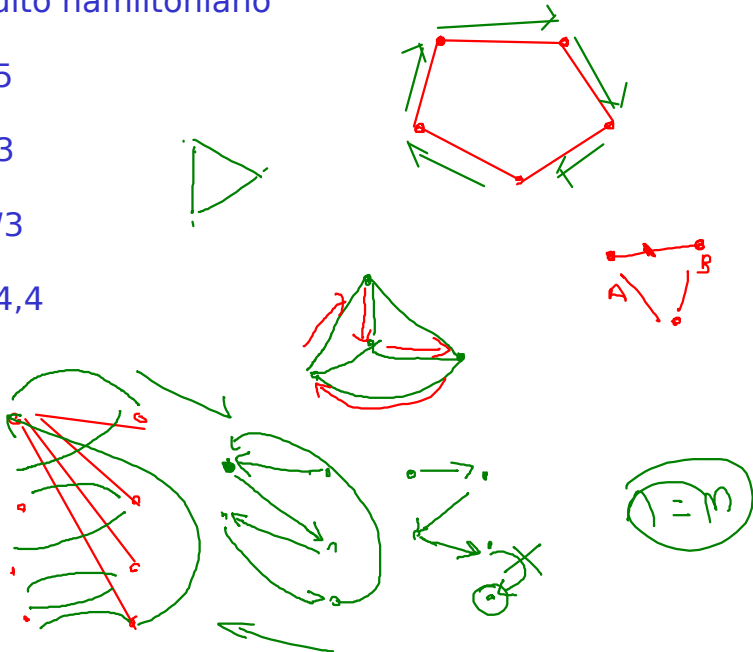
Circuito hamiltoniano

1) K_5

2) C_3

3) W_3

4) $K_{4,4}$

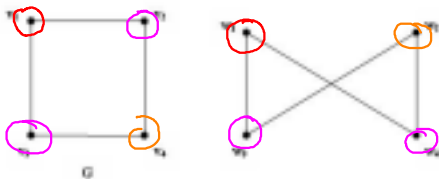


- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos**
- 11 Algoritmos sobre grafos
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Isomorfismos de Grafos

Los grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si hay una función biyectiva f de V_1 en V_2 con la propiedad de que, para cada par de vértices $u, v \in V_1$, u y v son adyacentes en G_1 si, y sólo si, $f(u)$ y $f(v)$ son adyacentes en G_2 . Se dice que esta función f es un isomorfismo.

Ejemplo. Los grafos $G = (V, E)$ y $H = (W, F)$ en la siguiente figura son isomorfos.



La función f con $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_4, f(v_3) = w_3, f(v_4) = w_2$

6

$$\begin{array}{c}
 V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \\
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad W_4 \\
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

1) $W_1 \leftrightarrow W_3$

$$\begin{array}{c}
 W_3 \quad W_2 \quad W_1 \quad W_4 \\
 \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

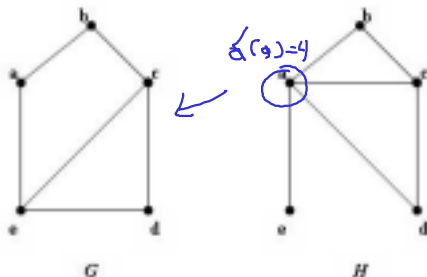
Definición 2.

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Una función $f : V_1 \rightarrow V_2$ es un isomorfismo de grafos si:

- 1 f es inyectiva y sobreyectiva.
- 2 $\forall a, b \in V_1, \{a, b\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(a), f(b)\} \in E_2$.

Cuando existe tal función f se dice que G_1 y G_2 son isomorfos.

Ejemplo. Sean los grafos G y H son isomorfos?

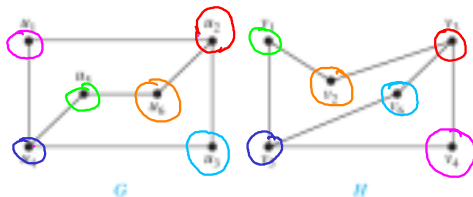


No son isomorfos por varias razones:

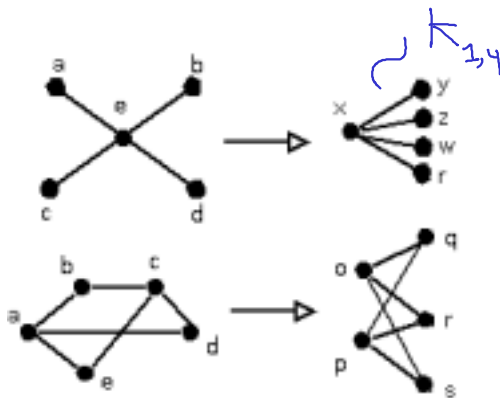
- H tiene el vértice e de grado 1, mientras que G no tiene.
- Si cualquiera de estas cantidades toma valores diferentes en dos grafos simples, dichos grafos simples no pueden ser isomorfos.
- Ahora el que estas cantidades sean iguales no garantiza que los grafos G y H sean isomorfos.

Ejemplo. Determinar si H y G son isomorfos.

$$\begin{aligned} f(u_1) &= v_4 \\ f(u_2) &= v_3 \\ f(u_3) &= v_4 \\ f(u_4) &= v_5 \\ f(u_5) &= v_2 \\ f(u_6) &= v_6 \end{aligned}$$



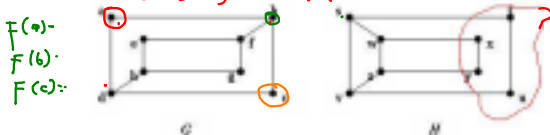
$$A_G = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} & v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \\ \begin{matrix} v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



$$G = \{2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

Ejemplo. Sean los grafos G y H son isomorfos?

$$H = \{3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$



- No son isomorfos por que por ejemplo $\delta(a) = 2$ en G y si observamos a debería corresponder con los vértices t, u, x , o y de H , ya que estos son los vértices de grado dos de H . Sin embargo, cada uno de estos cuatro vértices de H son adyacentes a otros de grado dos, lo que no es cierto en a . Pasa lo mismo con c, g, e en G
- Los mejores algoritmos para determinar si dos grafos son isomorfos tienen complejidad exponencial en el peor caso.
- El mejor algoritmo capaz de determinar si dos grafos son isomorfos con 100 vértices es el NAUTY y se consigue en internet.

¿Cómo funcionaría un algoritmo para encontrar si dos grafos con n vértices son isomorfos?

$$\begin{array}{c} a \ b \ \dots \ n \\ \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ \vdots \\ n \end{array} \right] \end{array} = \begin{array}{c} a \ b \ \dots \ n \\ \left[\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ \vdots \\ n \end{array} \right]$$

2) $(a-b)(b-c) \dots$

3) $(a-b-c) \dots$

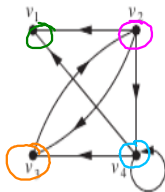
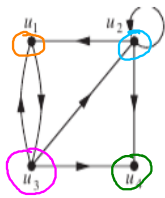
4) $($

$\sim 2^n$

Isomorfismos

Determine si los siguientes par de grafos son isomorfismos, si lo son encuentre una función de correspondencia entre los vértices de cada uno de los grafos.

SI

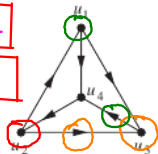


$$\delta^-(u_1)=1 \quad \delta^+(u_1)=2$$

$$\delta^-(u_2)=1 \quad \delta^+(u_2)=2$$

$$\delta^-(u_3)=2 \quad \delta^+(u_3)=1$$

$$\delta^-(u_4)=2 \quad \delta^+(u_4)=1$$

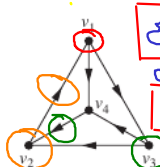


$$\delta^-(v_1)=1 \quad \delta^+(v_1)=2$$

$$\delta^-(v_2)=2 \quad \delta^+(v_2)=1$$

$$\delta^-(v_3)=1 \quad \delta^+(v_3)=2$$

$$\delta^-(v_4)=2 \quad \delta^+(v_4)=1$$



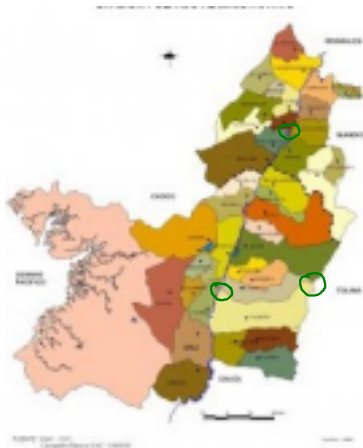
Definiciones grafos isomorfos

- 1) Dado un grafo $G(V,E)$ y $H(V_1,E_1)$ se dice que H es isomorfo con G , si existe una función biyectiva que toma cada vértices de G y lo mapea en H .
- 2) Si hace intercambios entre fila y columnas en la matriz de adyacencia, deben dar iguales.
- 3) Grafos autocomplementarios: Se dice que un grafo es autocomplementario si G y su complemento son ISOMORFOS
- 4) En grafos dirigidos debe conservarse el sentido de las aristas

- 1 Introducción
- 2 Terminología
- 3 Familias de grafos simples
- 4 Grafos bipartitos
- 5 Topologías y subgrafos
- 6 Grafos complementarios
- 7 Grafos planos
- 8 Representación de grafos
- 9 Conectividad
- 10 Isomorfismos
- 11 Algoritmos sobre grafos**
 - Coloreo de grafos
 - Algoritmo de Dijkstra
 - Búsqueda en amplitud
 - Búsqueda en profundidad

Coloreado de grafos

Dado un mapa, ¿cual es el **menor numero** de colores que deben utilizarse para colorearlo, de modo que dos regiones adyacentes no tengan nunca el mismo color ?.



Coloreado de grafos

El **grafo dual** de un mapa corresponde a su representación como un grafo, en la cual:

- Cada región del mapa es un vértice
- Si existe una frontera entre cada par de regiones (vértices), existirá una arista entre ellos.

Dos regiones que se tocan en un solo punto no se consideran adyacentes

Coloreado de grafos

Ejemplo de mapa y grafo dual



Figure: Mapa

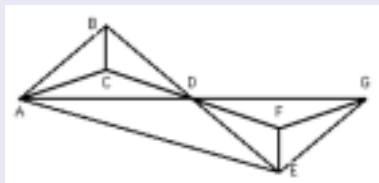


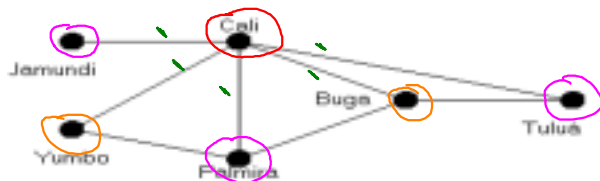
Figure: Grafo dual

Coloración de un grafo

Una coloración de un grafo simple consiste en asignarle un color a cada vértice del grafo de manera que a cada dos vértices adyacentes se les asignan colores distintos.

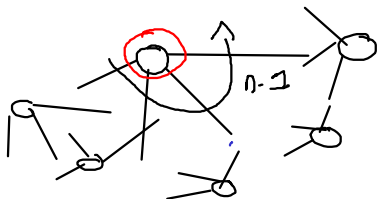
Número cromático

El número cromático de un grafo es el número mínimo de colores que se requieren para su coloración.



¿Cual es el número cromático de este grafo?

¿Cual es el número cromático de K_n ?

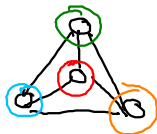
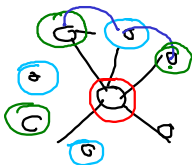


R./ n colores

¿Cual es el número cromático de W_n ?

n par 3

n impar 4



¿Cual es el número cromático de C_n ?

n par debe dar 2

n impar debe dar 3

Teorema de los cuatro colores

El número cromático de un grafo plano es menor o igual que 4.

Número cromático

El número cromático de un grafo es el número mínimo de colores que se requieren para su coloración.

Propuesto inicialmente en 1850 y finalmente demostrado por los matemáticos estadounidenses Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976.

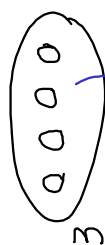
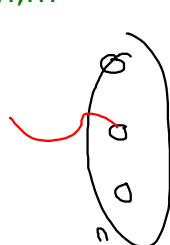
Demostración

Si el teorema era falso, debería existir un contraejemplo, en una lista de aproximadamente 2000 candidatos. Empleando mas de 1000 horas de tiempo de calculo de un ordenador, no encontraron dicho contraejemplo. Haken en 1976.

El caso de $K_{n,m}$

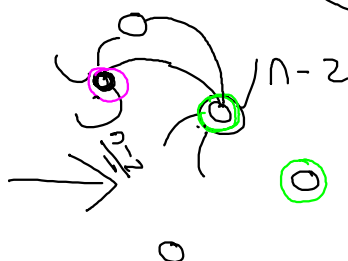
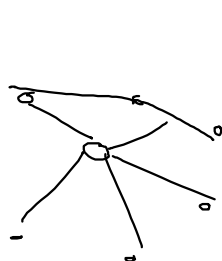
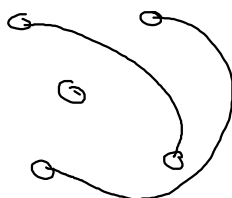
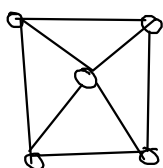
2 colores

1 color

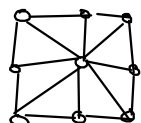


1 color

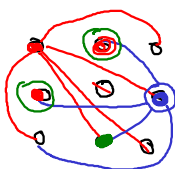
¿Cual es el número cromático de $\overline{W_n}$?



Veritas
 $(n+1)$



1. Un vértices está conectado con $n-2$
2. Uno de esos $n-2$ está conectado con $n-2$ vértices. Pero van haber dos vértices los cuáles no están conectado con el perimero



$R/3$

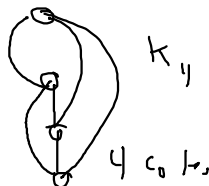
$\chi_n \Rightarrow 3$

¿Cual es el número cromático de $\overline{K_{n,m}}$?



$n > m$, n colores
 $m \geq n$, m colores

$K_{3,4}$



Indicar los números cromáticos de:

- 1 K_n : Grafo completo. R/ n
- 2 $K_{m.n}$ Grafo bipartito completo. $R/ 2$
- 3 C_n Ciclo: $R/ 2$ si n es par, 3 si n es impar.

Problema computacionalmente difícil

Los mejores algoritmos conocidos para calcular el número cromático de un grafo tienen **complejidad exponencial** (en base al número de vértices)

Aplicaciones

- 1 **Programación de asignaturas:** Programar las asignaturas sin que ningún estudiante tenga dos asignaturas al mismo tiempo.

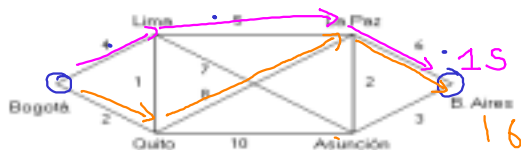
Idea: Los vértices son asignaturas y existe una arista entre un par de vértices, si hay un estudiante matriculado en ambas.

- 2 **Asignación de frecuencias:** Evitar interferencias en sistemas de comunicaciones móviles.

Idea: Los vértices son operadores de comunicaciones y hay un par de vértices entre ellos si prestan el mismo servicio

Grafo ponderado

- 1 A los grafos se les puede asignar un peso a sus aristas
- 2 A estos grafos se les conoce como **grafos ponderados**
- 3 La longitud de un camino de un grafo ponderado corresponde a la suma de los pesos en ese camino



Algoritmo de Dijkstra

- ~~Propuesta~~
- 1 Algoritmo descubierto por el matemático holandés Edsger Dijkstra en 1959.
 - 2 Describe como solucionar el problema de camino de longitud mínima desde a hasta z en grafos ponderados no dirigidos, donde todos los pesos son positivos.
 - 3 Es fácil adaptarlo para solucionar el problema de camino de longitud mínima en grafos dirigidos.

Procedimiento Dijkstra (G : grafo ponderado conexo y todos los pesos positivos)

Para $i = 1$ **Hasta** n

$L(v_i) = \infty$

$L(a) = 0$

$S = \emptyset$

Mientras $z \notin S$

Inicio

u = vertice con $L(u)$ minima entre los vertices que no estan en S

$S = S \cup \{u\}$

Para todos los vertices v que no estan en S

Inicio

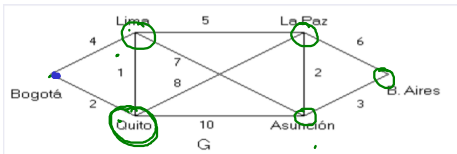
Si $L(u) + w(u, v) < L(v)$

$L(v) = L(u) + w(u, v)$

Fin

Fin ($L(z)$ = longitud del camino mas corto entre a y z)

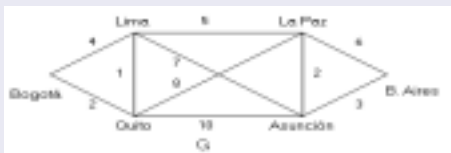
Verifica
origen

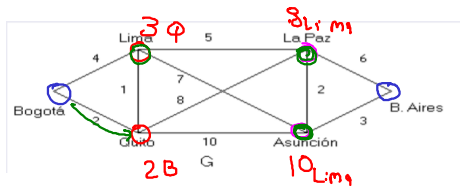


	Bog	Quito	Lim	LP	Aus	BA
	○	∞	∞	∞	∞	∞
	○	2B	4B	∞	∞	∞
Quito →	○	2B	4B	10 _{Quito}	12 _{Quito}	∞
Lima →	○	2B	3 _{Quito}	8 _{Lim}	10 _{Lim}	∞
LP →	○	2B	3 _{Quito}	8 _{Lim}	10 _{Lim}	14 _{LP}
Asu →	○	2B	3 _{Quito}	8 _{Lim}	10 _{Lim}	13 _{Asu}

Algoritmo de Dijkstra

Aplica el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre Bogotá y Buenos Aires:





Bogotá \rightarrow 0B

Lima \rightarrow 3φ

Quito \rightarrow 2B

La Paz \rightarrow 8Lim

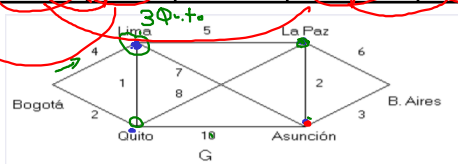
Asunción \rightarrow 10Lim / 10La Paz

BA \rightarrow 13Asunción

Bogotá \rightarrow Quito \rightarrow Lima \rightarrow Asunción \rightarrow BA

Algoritmo de Dijkstra

	Bogotá	Lima	Quito	Paz	Asunción	B. Aires
→	0	∞	∞	∞	∞	∞
→	0	4 ^{Bog}	2 ^{Bog}	∞	∞	∞
↘	0	3 ^{Quito}	2 ^{Bog}	10 ^{Quito}	12 ^{Quito}	∞
→	0	3 ^{Quito}	2 ^{Bog}	8 ^{Lima}	10 ^{Lima}	14 ^{Paz}
↘	0	3 ^{Quito}	2 ^{Bog}	8 ^{Lima}	10 ^{Lima}	13 ^{Asunc}

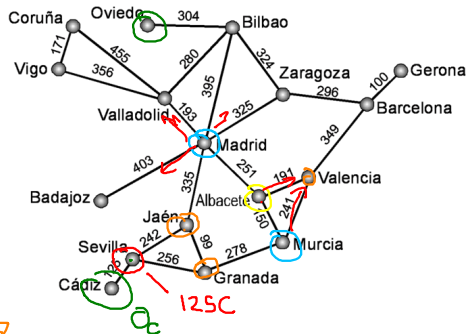


El camino más corto está dado por:

Bogota → *Quito* → *Lima* → *Asunc* → *B.Aires* y tiene longitud 13

Teoremas

- 1 El algoritmo de Dijkstra determina la longitud del **camino más corto** entre dos vértices, en un **grafo ponderado simple, conexo y no dirigido**
- 2 El algoritmo tiene complejidad $O(v^2 + e)$ donde v es el número de vértices y e de aristas



J a e n = 367_s

G r a n a d a = 381_s

M a d r i d = 702_J

M u r c i a = 659_J

A l b a c e t e = 809_M

V a l e n c i a = 900_m

Introducción

Existen dos formas de recorrer un grafo. Búsqueda por amplitud (**BFS**) y búsqueda por profundidad (**DFS**). **BFS** se puede utilizar para hallar la distancia más corta entre algún nodo inicial y los nodos restantes de un grafo. La distancia más corta es el mínimo número de aristas que hay que recorrer entre un par vértices.

Introducción

La idea de esta búsqueda es iniciar un nodo concreto del grafo e ir examinando todos los nodos adyacentes a este, repitiendo este proceso hasta encontrar el nodo deseado. Para mejorar esta búsqueda se pueden marcar como visitados los nodos ya recorridos, para evitar tener que recorrerlos de nuevo.

DFS can cycle

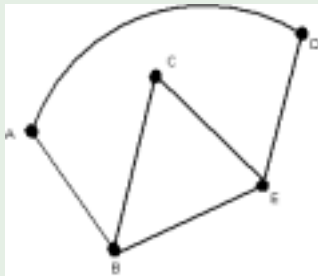
Introducción

El enfoque general de **BFS** es:

- 1 Inicie en un nodo s
- 2 Observe todas las aristas incidentes
- 3 Para a todos los nodos adyacentes w repitiéndose el proceso
- 4 Almacene los caminos encontrados desde nodo inicial s al resto de nodos

Ejemplo

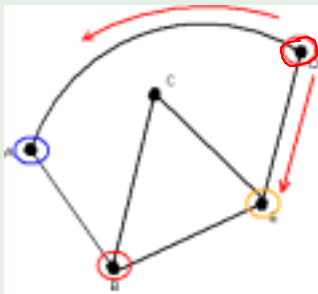
Tomemos como ejemplo el siguiente grafo:



Vamos a mirar cual es la distancia más corta desde A a cualquier nodo.

Ejemplo

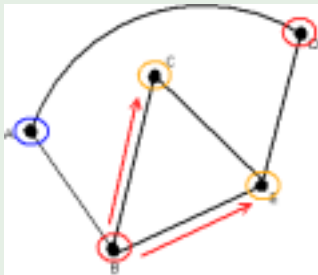
Ahora el algoritmo se repite desde D, evitamos recorrer de nuevo A (ya que lo recorrimos)



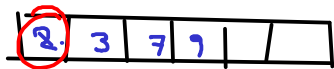
Los caminos encontrados son: $\{A, D\}$, $\{A, B\}$, $\{A, D, E\}$.

Ejemplo

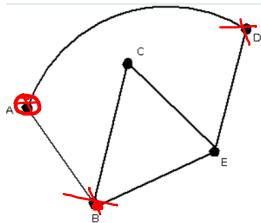
Ahora el algoritmo se repite desde B, evitamos recorrer de nuevo A (ya que lo recorrimos)



Los caminos encontrados son: $\{A, D\}$, $\{A, B\}$, $\{A, D, E\}$, $\{A, B, C\}$, $\{A, B, E\}$



FIFO



Queue

A

} A?

~~D~~ B

} A-D? } A-B?

~~B~~ E

} A-D? } A-B? } A-D-E?

~~E~~ E C

} A-D? } A-B? } A-D-E?

~~E~~ C C

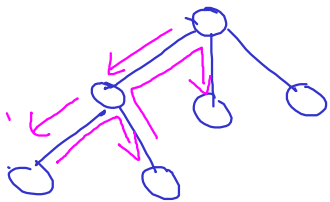
} A-B-C? } A-B-E?

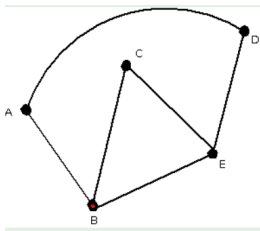
} A-D? } A-B? } A-D-E?

} A-B-C? } A-B-E? } A-B-E-C?

} A-D-E-C?

~~C~~ ~~C~~ ~~C~~





$$M = [\cancel{A}]$$

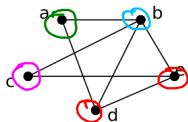
$$M = [\cancel{B}, D]$$

$$M = [\textcircled{C}, E, D]$$

$\{A, B, C, \dots\}$

LIFO

G

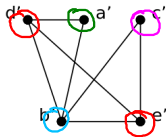

 $\{4, 3, 3, 2, 2\}$

$$\delta(a) = 2 \quad \delta(c) = 2 \quad \delta(e) = 3$$

$$\delta(b) = 4$$

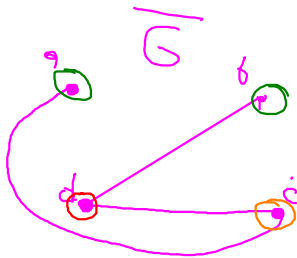
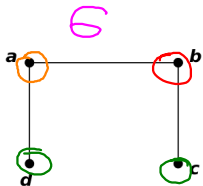
$$\delta(d) = 3$$

H


 $\{4, 3, 3, 2, 2\}$

$$\delta(a') = 2 \quad \delta(b') = 4 \quad \delta(f') = 3$$

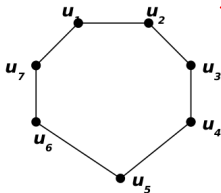
$$\delta(c') = 2 \quad \delta(d') = 3$$



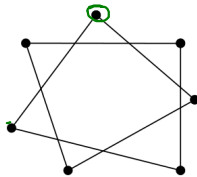
$\{2, 2, 1, 1\} \rightarrow \{2, 2, 1, 1\}$

6

$\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$



$\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$



H