Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Ecuaciones de recurrencia

Recurrencias

Método de iteración

Método maestro*

Método de sustitución

Recurrencias

Método de iteración

Expandir la recurrencia y expresarla como una suma de términos que dependen de n y de las condiciones iniciales

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$, $T(1)= \Theta(1)$ y n par

Expandir la recurrencia 2 veces

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

$T(n) = n + 3T(n/4)$

1) $T(n) = n + 3\left(\frac{n}{4} + 3T\left(\frac{n}{4^2}\right)\right)$

2) $T(n) = n + 3\left(\frac{n}{4} + 3\left(\frac{n}{4^2} + 3T\left(\frac{n}{4^3}\right)\right)\right)$

Recurrencias

$\boxed{T(1)} = \Theta(1)$

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

$3^3\ n/4^3 + 3^4\ T(n/4^4)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

$$n + \frac{3n}{4} + \frac{3^2 n}{4^2} + \frac{3^3 n}{4^3} + \dots + \frac{3^k n}{4^k} + \dots + T(1)$$

$$T\left(\frac{n}{4^i}\right) = T(1) \qquad \frac{n}{4^i} = 1$$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16\; + 3T(n/64)\,))$

$n + 3^*n/4 + 3^2{}^*n/4^2\; + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a $T(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a T(1), esto es, cuando $(n/4^i)=1$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3^*n/4 + 3^2{}^*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

$n + 3^*n/4 + 3^2{}^*n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}T(1)$

$\frac{n}{4^i} = 1 \qquad n = 4^i$

$i = \log_4(n)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a $T(1)$, esto es, cuando $(n/4^i)=1$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16\; + 3T(n/64)\,))$

$n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2\; + 3^3T(n/4^3)$

$\frac{3^0}{4^0}\,n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}T(1)$

Después de iterar, se debe tratar de expresar como una sumatoria con forma cerrada conocida

$$\sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i n \quad + \quad 3^{\log_4 n}\,T(1)$$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4\rfloor)$

$n + 3 (n/4\rfloor + 3T(n/16\rfloor))$

$n + 3 (n/4\rfloor + 3(n/16\rfloor + 3T(n/64\rfloor)))$

$n + 3{*}n/4\rfloor + 3^2{*}n/4^2\rfloor + 3^3(n/4^3\rfloor) + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\leq n + 3n/4 + 3^2 n/4^2 + 3^3 n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16 \;+ 3T(n/64)\,))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 \;+ 3^3(n/4^3) + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\leq\; n + 3n/4 + 3^2n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i n\right) + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$$

$$= n\left(\frac{(3/4)^{(\log_4 n)} - 1}{(3/4) - 1}\right) + n^{\log_4 3} = n * 4(1 - (3/4)^{(\log_4 n)}) + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$= O(n)$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$$2^{\log_2(n)} = n^{\log_2(2)} = n^1 = n$$

$T(1) = 5$ $\boxed{6n-1}$ $\boxed{n \text{ potencia de } 2}$

$T(n) = 2T(n/2) + 1$, $T(1)= \Theta(1)$

$$T(n) = 1 + 2\boxed{T(n/2)}$$

$$T(n) = 1 + 2\left(1 + 2T\left(\frac{n}{2^2}\right)\right)$$

$$T(n) = 1 + 2 + 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right)$$

$$T(n) = 1 + 2 + 2^2\left(1 + 2T\left(\frac{n}{2^3}\right)\right)$$

$$T(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right)$$

$$T(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right)$$

$$\frac{n}{2^k} = 1 \qquad k = \log_2(n)$$

$$T(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{\log_2(n)} T(1)$$

$$T(n) = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots +}_{\log_2(n)-1} \underbrace{n\,T(1)}_{\log_2(n)}$$

$$\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i + n\,T(1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1} \quad r \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i + \boxed{nT(1)}$$

$a = 1 \qquad r = 2$

$k = i \qquad n = \log_2(n) - 1$

$$\frac{2^{\log_2(n)} - 1}{2 - 1} + nT(1)$$

$T(1) = 5$

$T(1) = \Theta(1)$ constant

$$n - 1 + nT(1)$$

$$n - 1 + 5n$$

$$\boxed{6n - 1}$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

- $T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1) = \Theta(1)$

$2T(n/2) + n$

$n + 2T(n/2)$

$n + 2\left(\frac{n}{2} + 2T\left(\frac{n}{2^2}\right)\right)$

$n + n + 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right)$

$n + n + 2^2\left(\frac{n}{2^2} + 2T\left(\frac{n}{2^3}\right)\right)$

$n + n + n + 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right)$

$$\underbrace{n + n + n + \cdots + }_{K \times n} 2^K T\left(\frac{n}{2^K}\right)$$

$T(1)$

$$\frac{n}{2^K} = 1 \qquad K = \log_2(n)$$

$$\log_2(n) \times n + 2^{\log_2(n)} T(1)$$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$n \times \log_2(n) + n\,T(1)$$

$$\boxed{n(\log_2(n) + 1)}$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = 1 + T(n/2)$

$T(n) = \underbrace{1 + 1}_{2} + T(n/2^2)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = \underbrace{1 + 1 + 1}_{3} + T(n/2^3)$

$\boxed{T(n) = T(n/2) + 1,\ T(1)= \Theta(1)}$

$T(n) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots +}_{k} T(n/2^k)$

$\frac{n}{2^k} = 1 \qquad n = 2^k \qquad k = \log_2(n)$

$\boxed{T(n) = \log_2(n) + T(1)}$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1,\ T(1)= \Theta(1)$

Ejercicio

Demuestre que $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$, es $\Omega(n\log n)$

Recurrencias

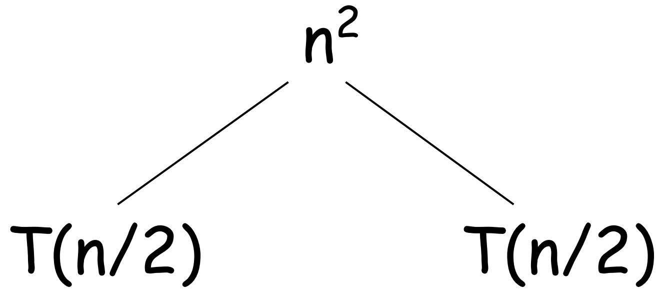
Iteración con árboles de recursión

$T(1) = 1$

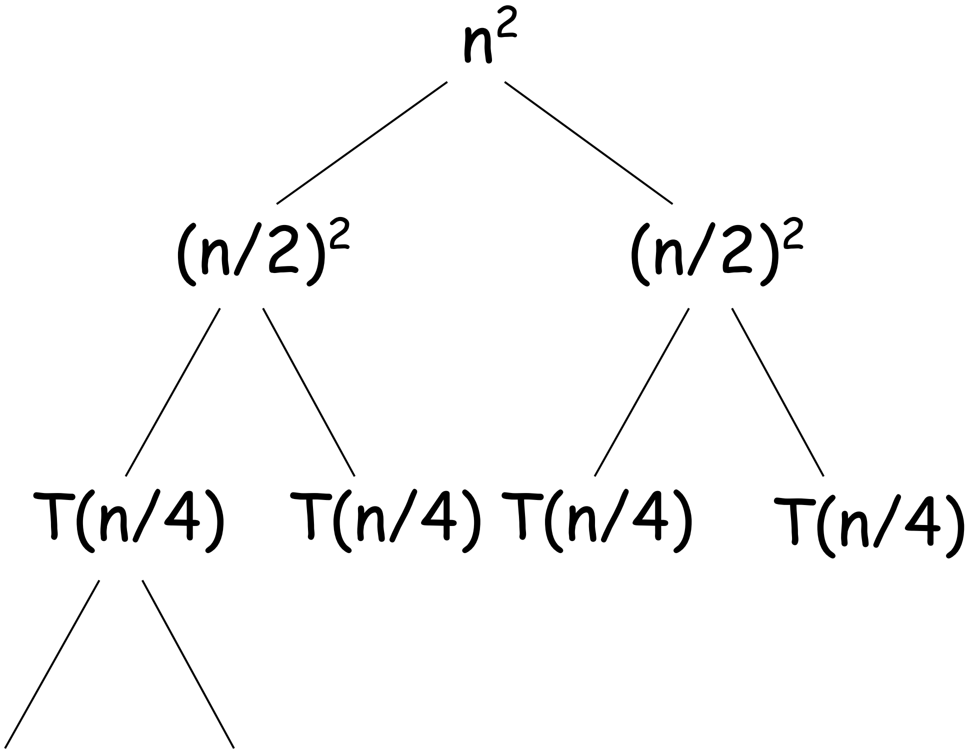
$T(n) = 2T(n/2) + n^2$

Recurrencias

$2T(n/2) + n^2$

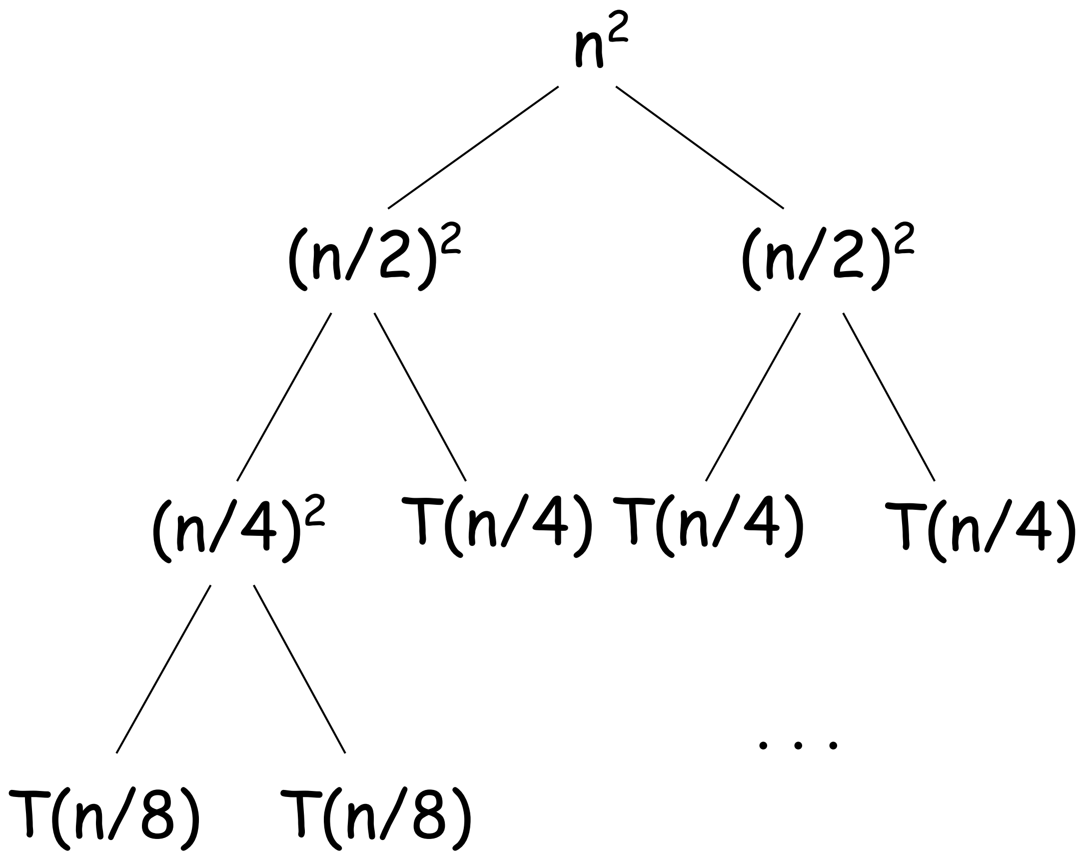


Recurrencias

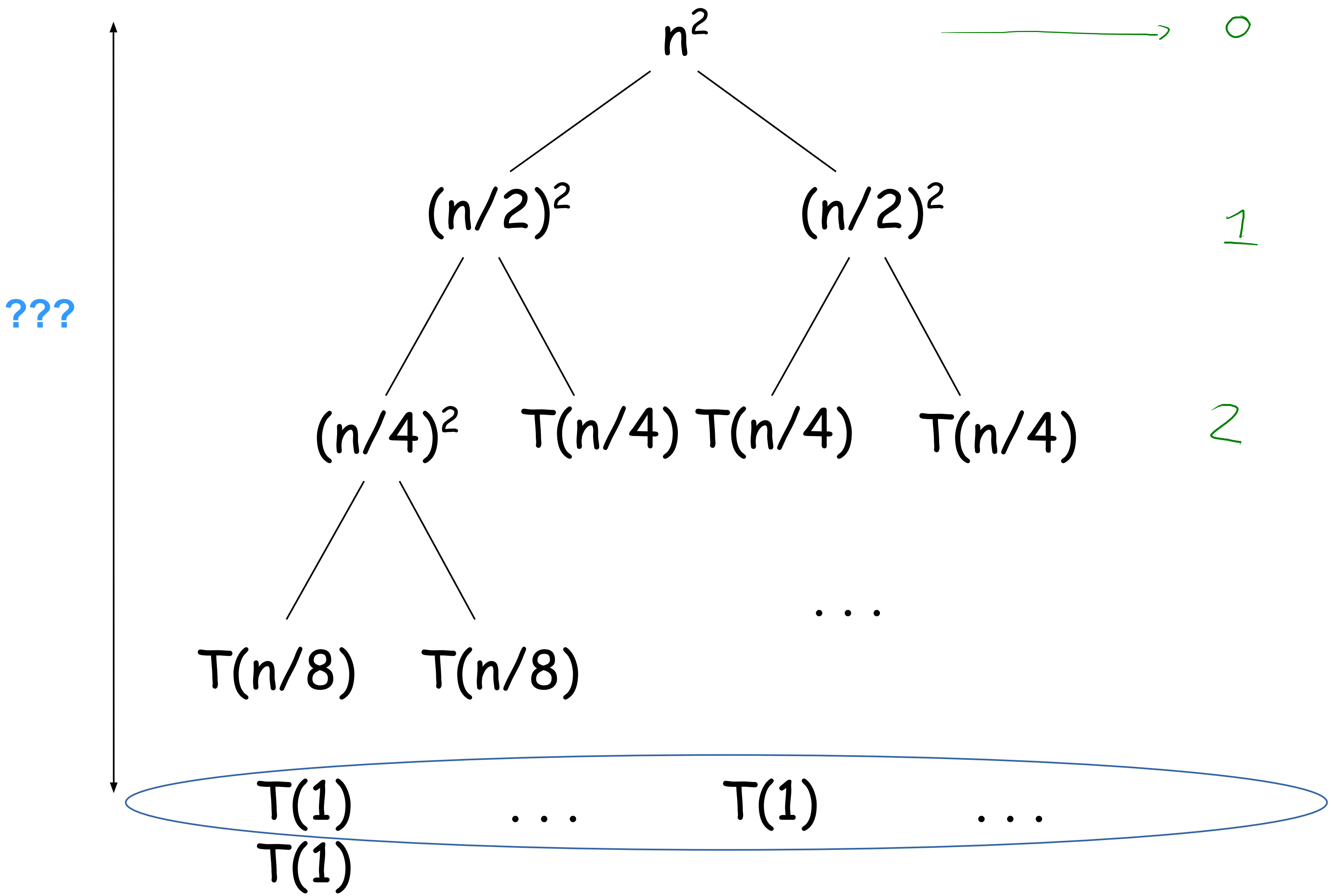


. . .

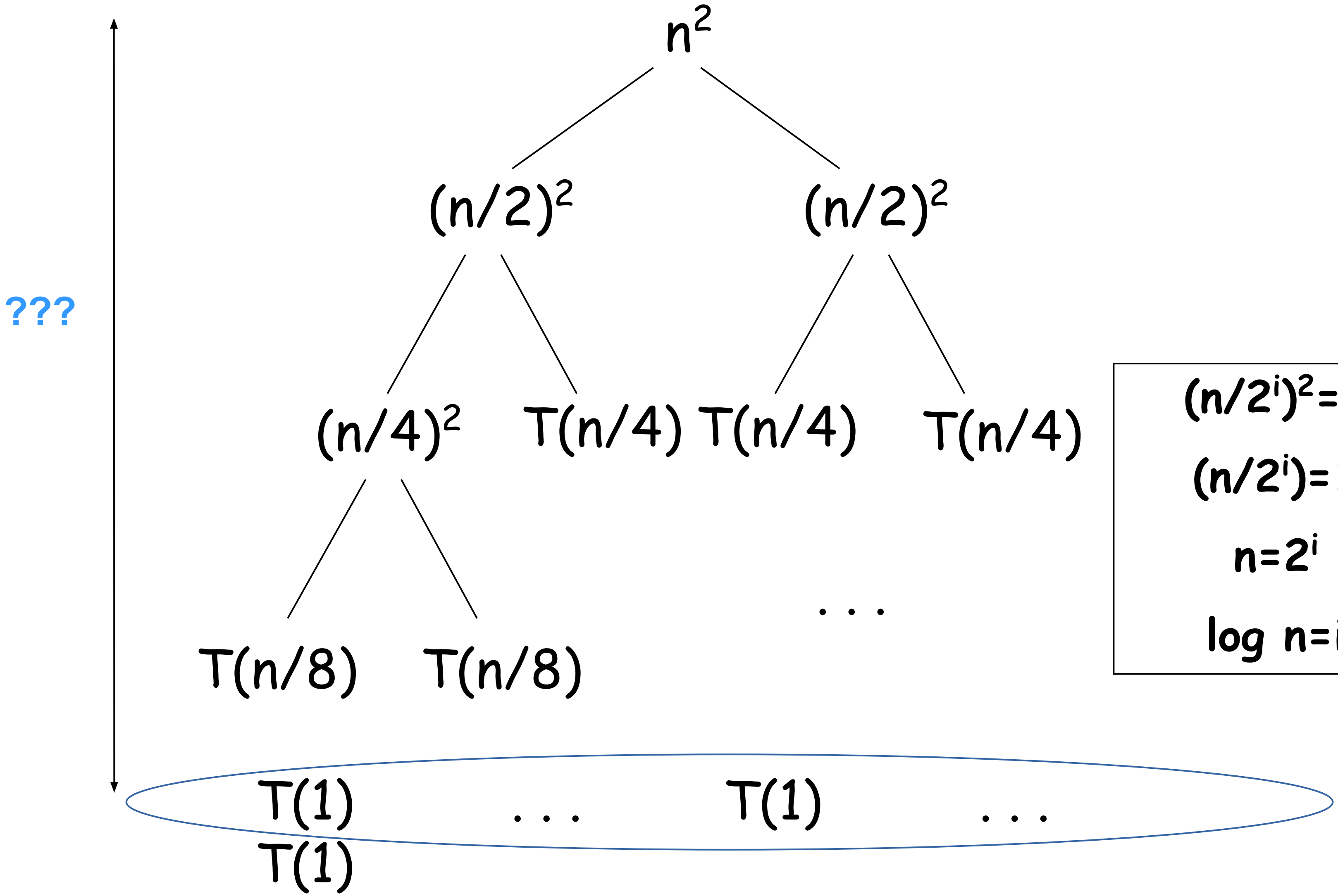
Recurrencias



Recurrencias



Recurrencias



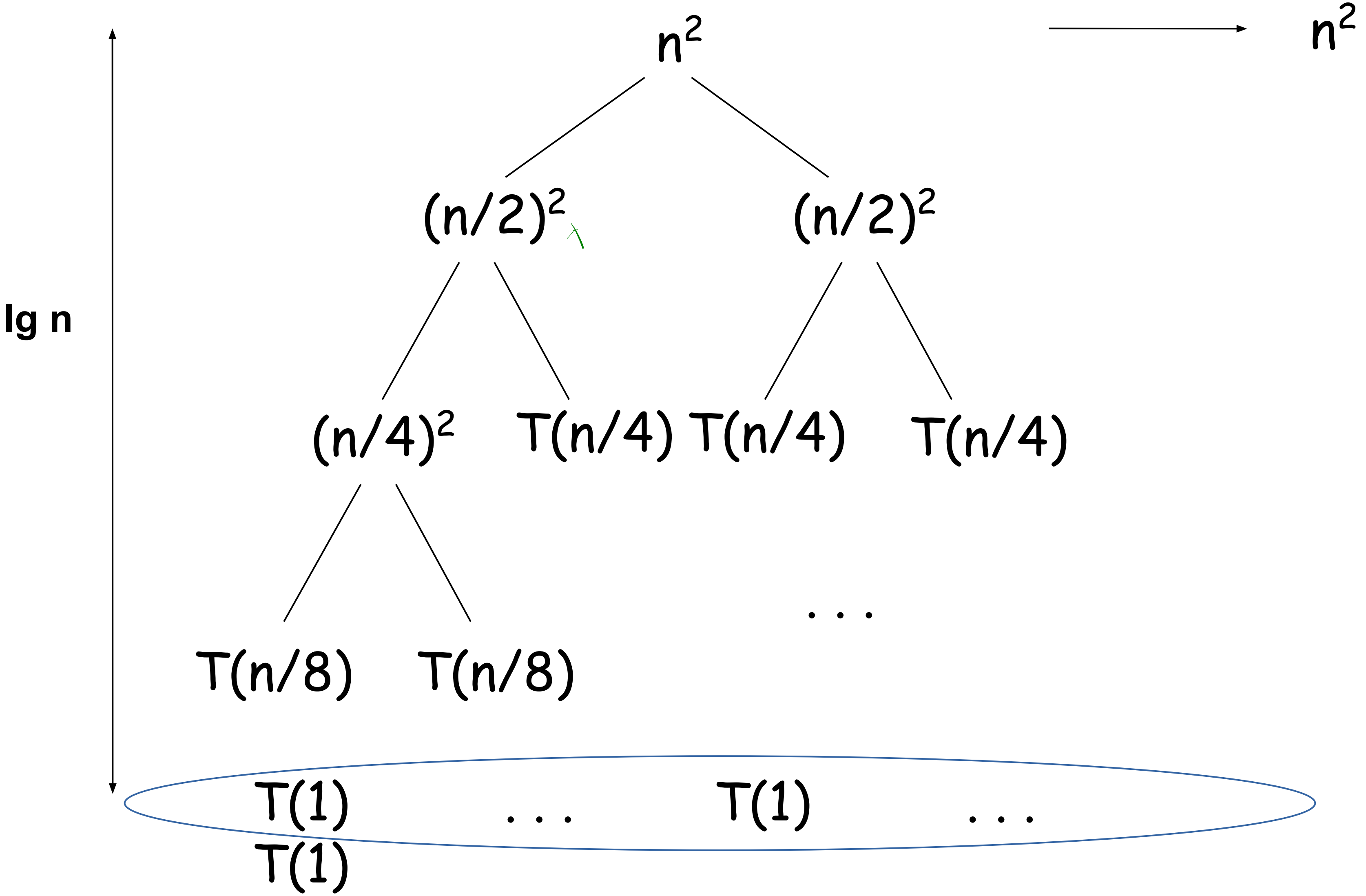
$(n/2^i)^2=1$

$(n/2^i)=1$

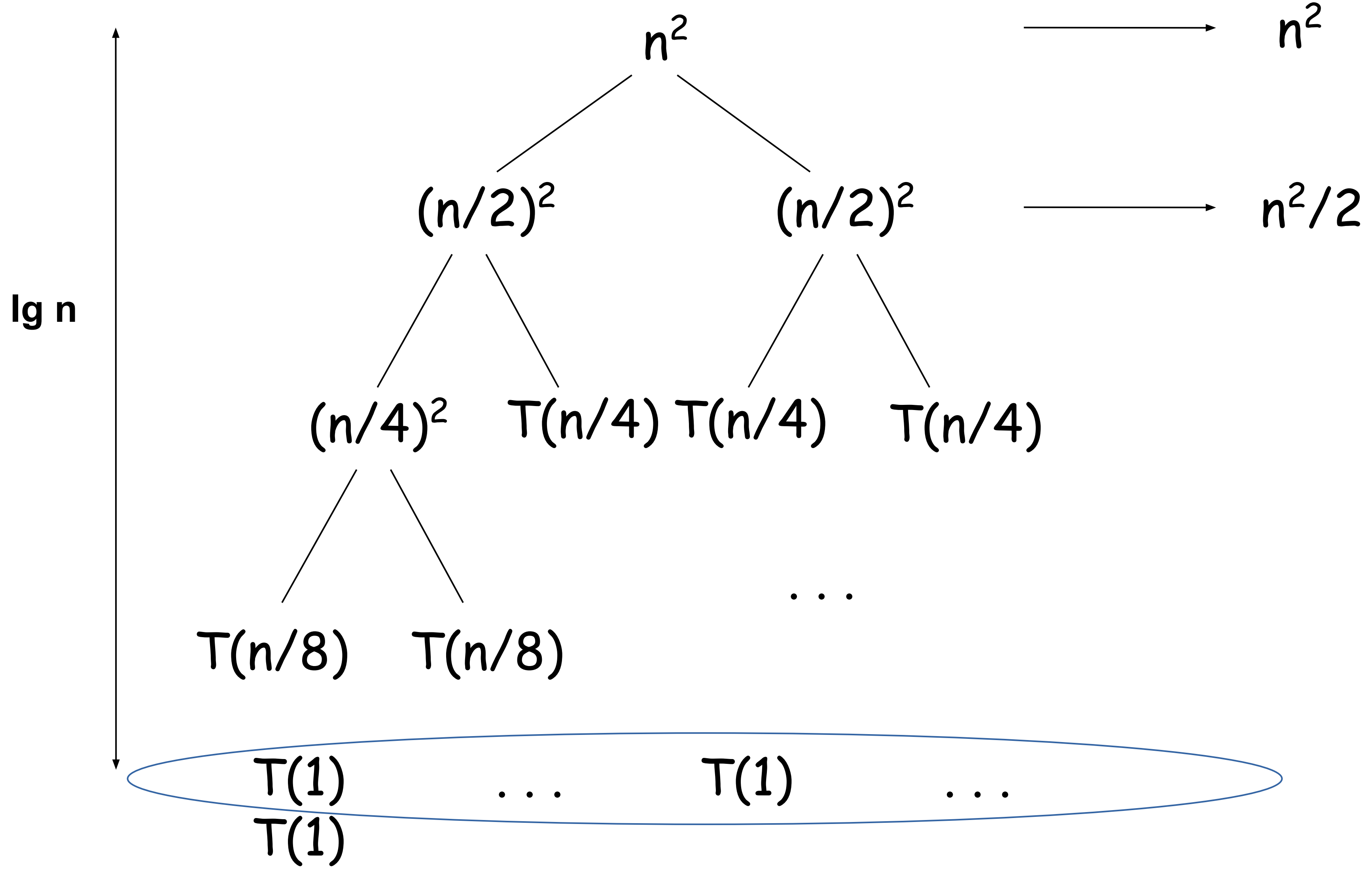
$n=2^i$

$\log n=i$

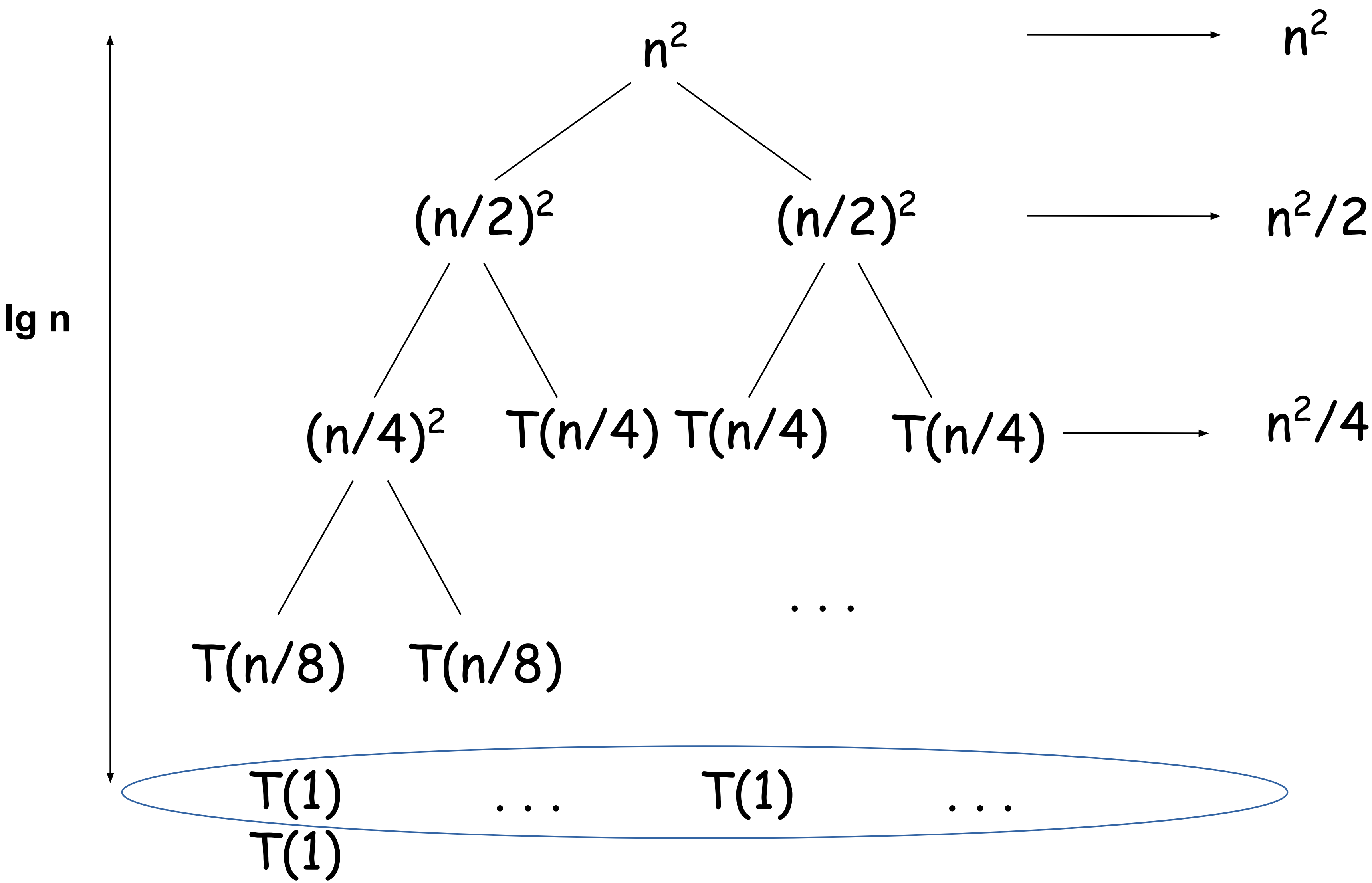
Recurrencias



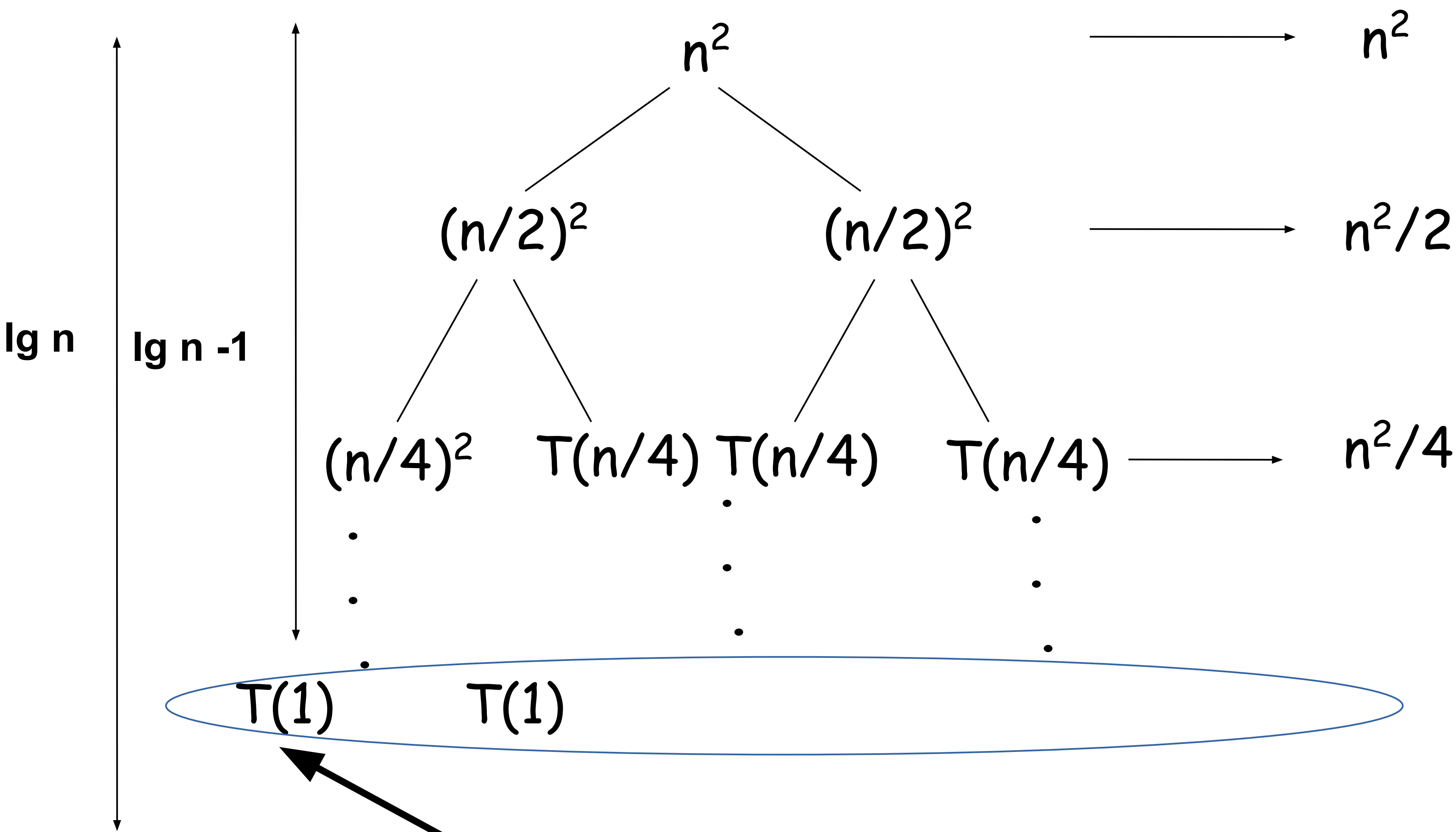
Recurrencias



Recurrencias

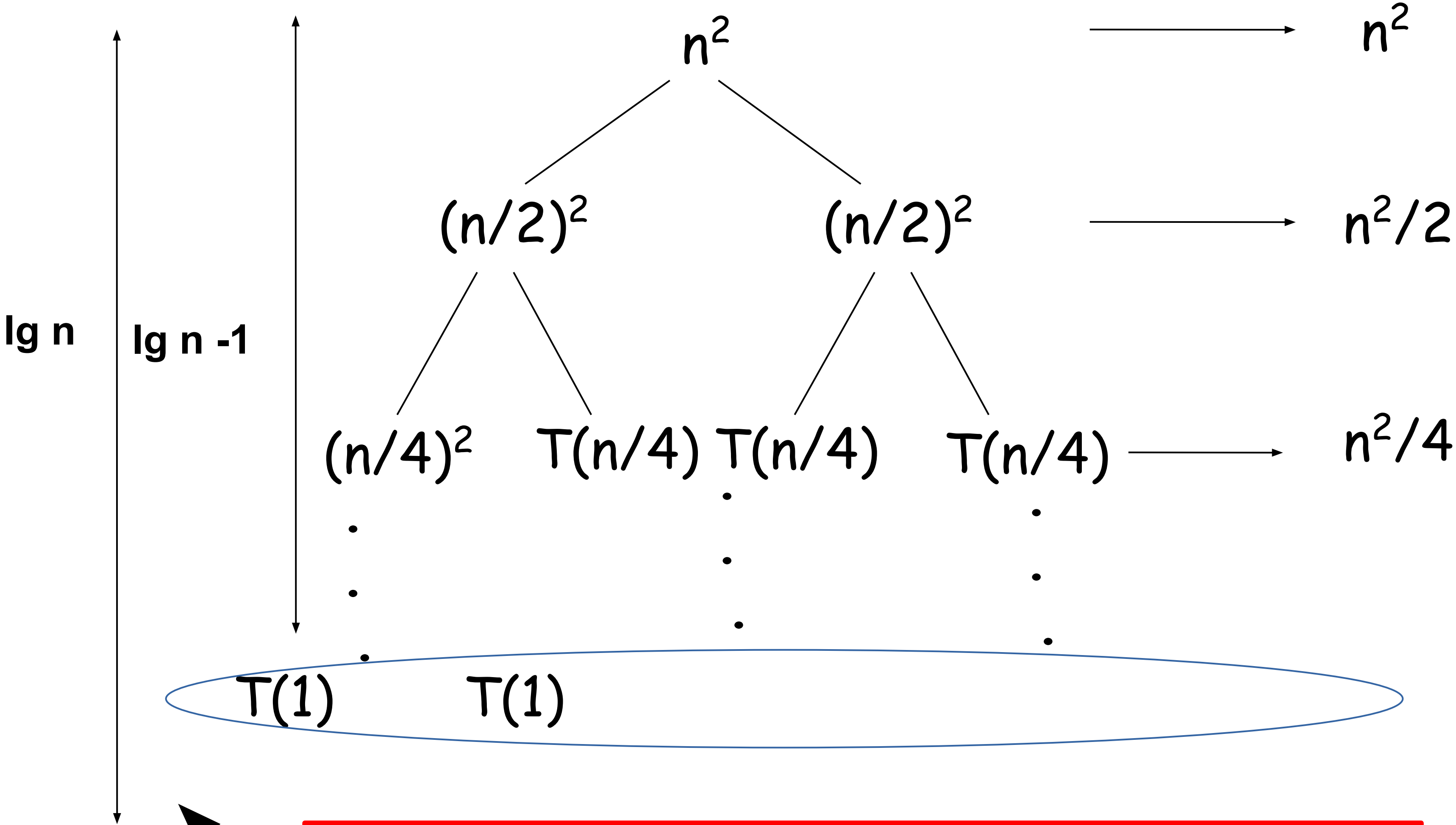


Recurrencias



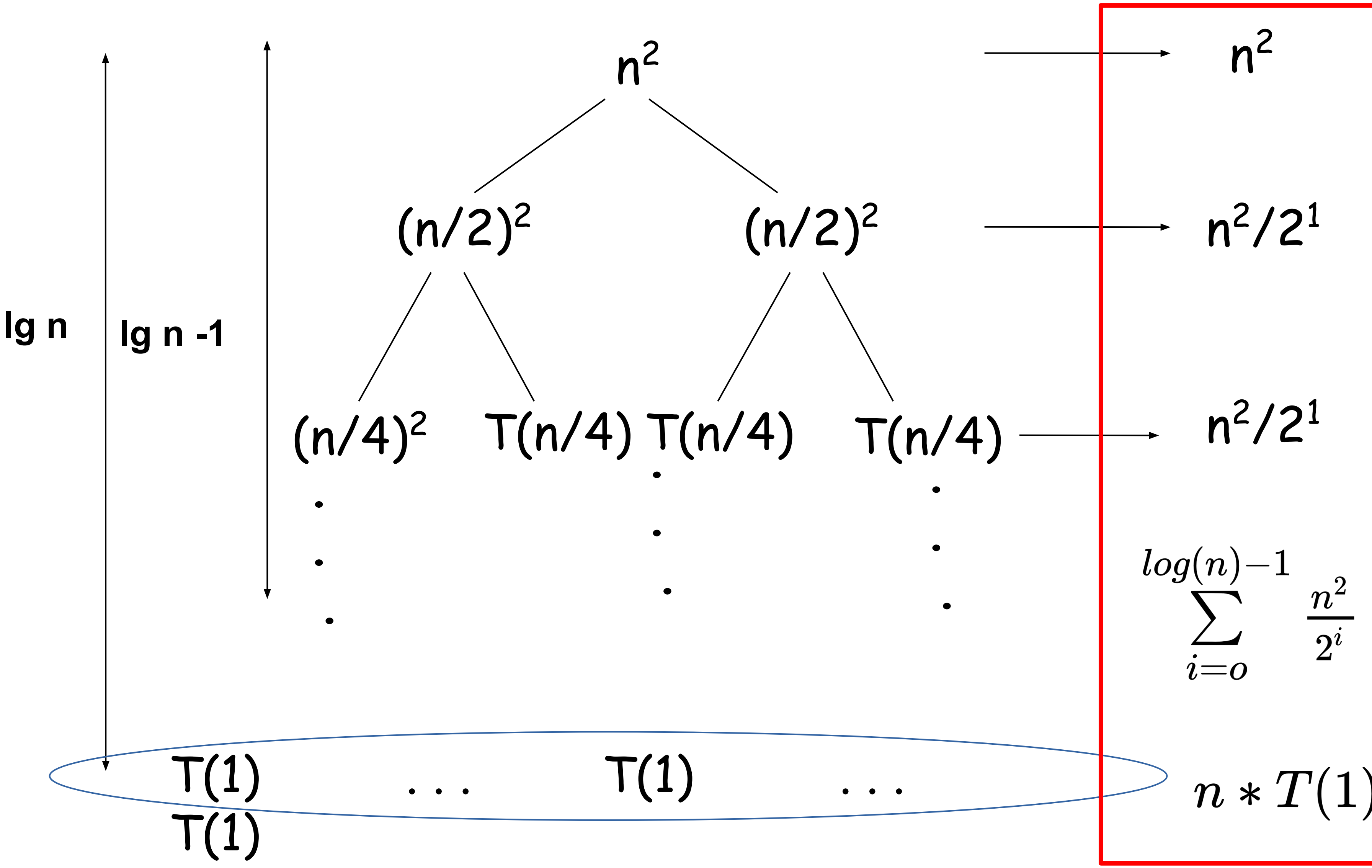
¿Cuantas hojas T(1) tenemos?

Recurrencias



Si recuerda en un árbol m-ario se tienen máximo m^h. En este caso al ser arbol binario m=2, tenemos $2^{\log(n)}$ hojas. Por lo tanto se

Recurrencias



Recurrencias

$$T(n) = n * T(1) + \sum_{i=o}^{log(n)-1} \frac{n^2}{2^i}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{0.5^{log(n)} - 1}{0.5 - 1}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{n^{log(0.5)} - 1}{-0.5}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{n^{-1} - 1}{-0.5}$$

$$T(n) = n * c - \frac{n}{0.5} + \frac{n^2}{0.5} = O(n^2)$$

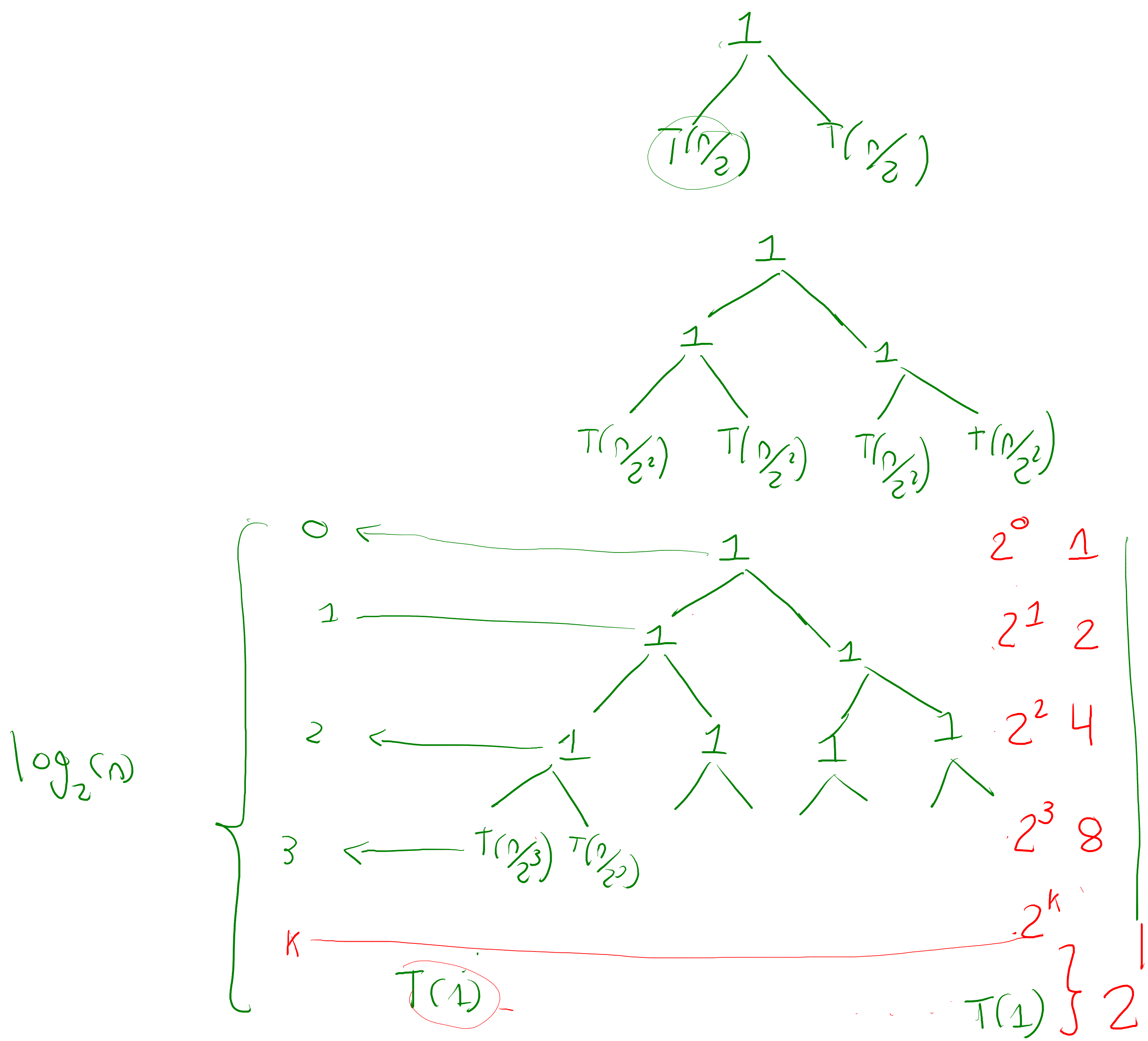
Recurrencias

Resuelva construyendo el árbol

$T(n) = 2T(n/2) + 1$, $T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$



$$1 - T\left(\frac{n}{2^k}\right)$$

$$1 = \frac{n}{2^k}$$

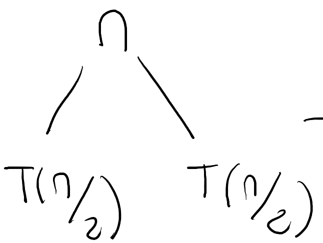
$$\boxed{K = \log_2(n)}$$

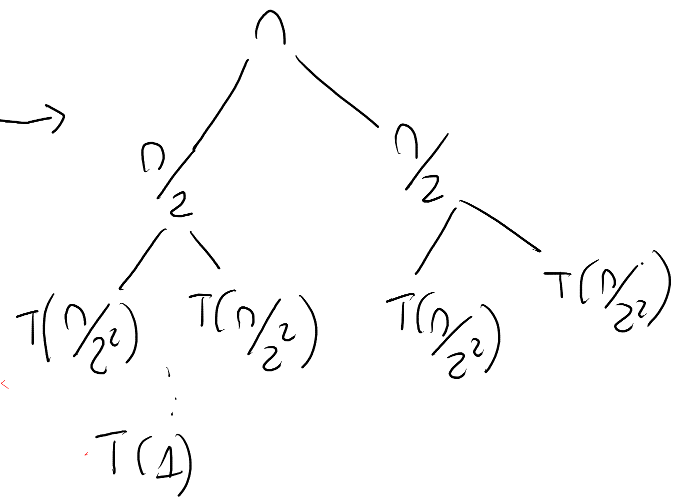
$$T(1) \Big\} \; 2^{\log_2(n)} \times T(1) = \boxed{n \times T(1)}$$

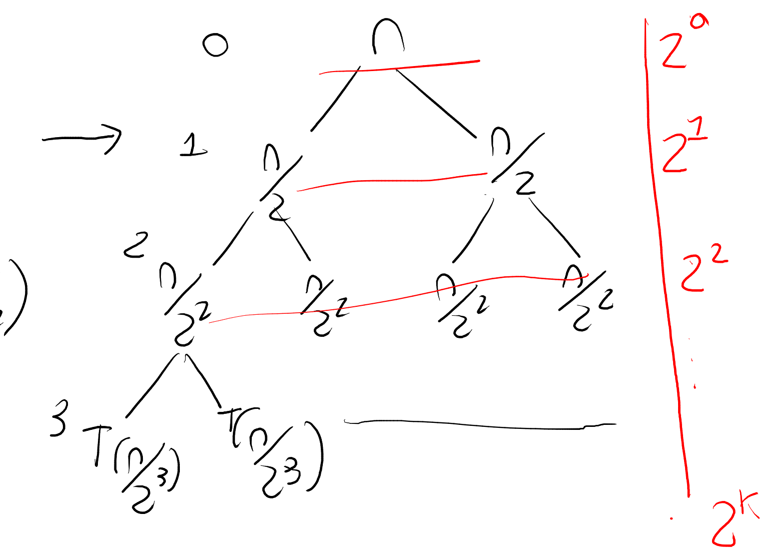
$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{\log_2(n)} T(1)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i \right) + nT(1)$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$



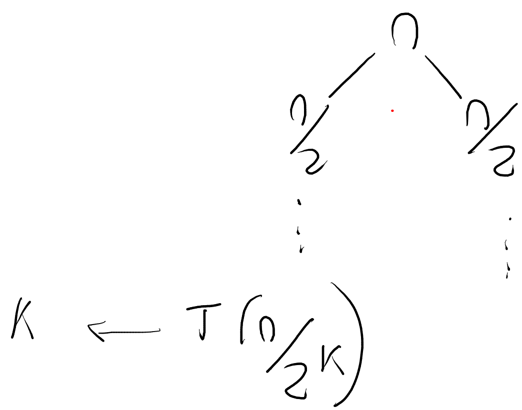




$n \times 2^0 = n$

$\frac{n}{2} \times 2^1 = n$

$\frac{n}{2^2} \times 2^2 = n$



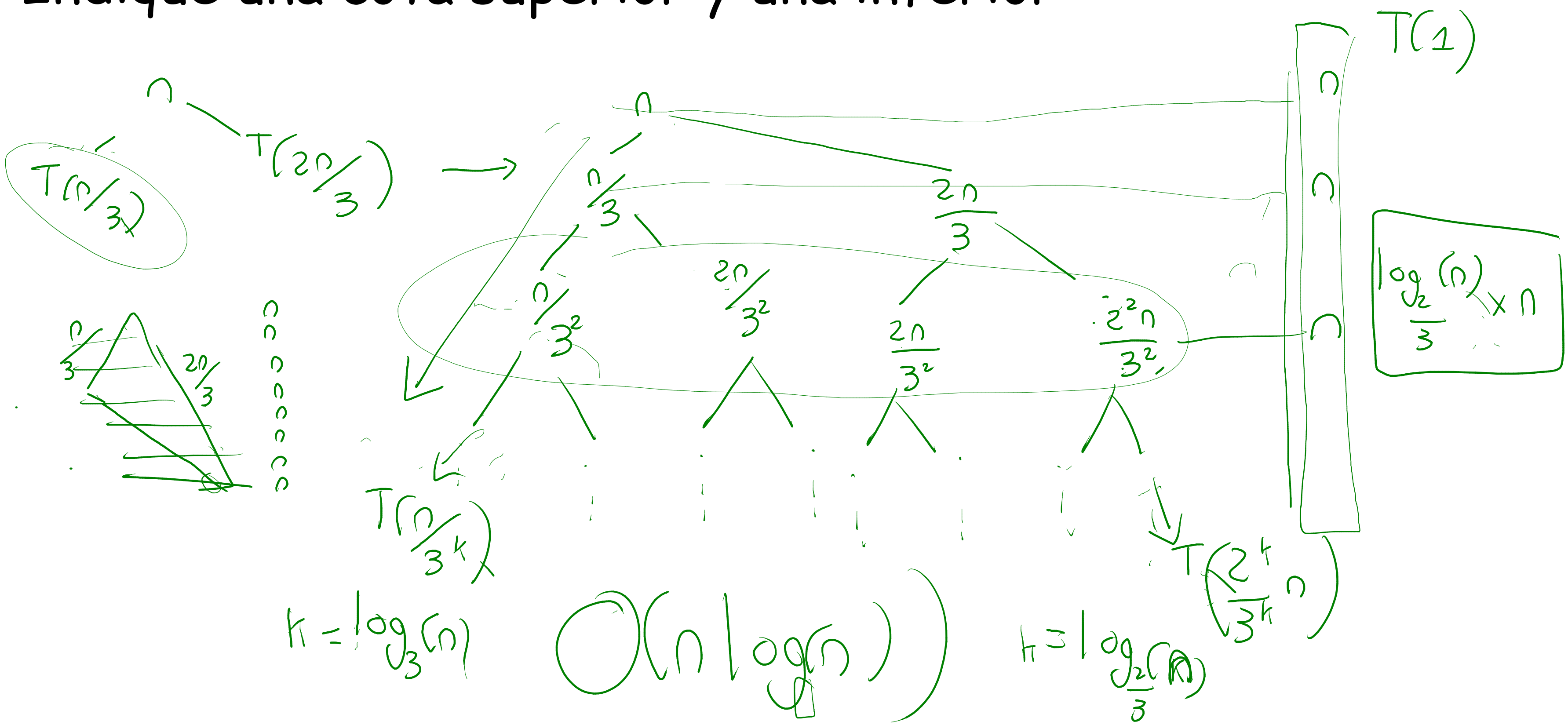
$n/2^k = 1 \qquad K = \log_2(n)$

$$\underbrace{n + n + n + n + n + n + \dots\dots}_{0 \quad 1 \quad 2} + 2^{\log_2(n)} T(1) = \boxed{(\log_2(n) - 1) \times n + nT(1)}$$

Recurrencias

Resuelva la recurrencia T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n

Indique una cota superior y una inferior

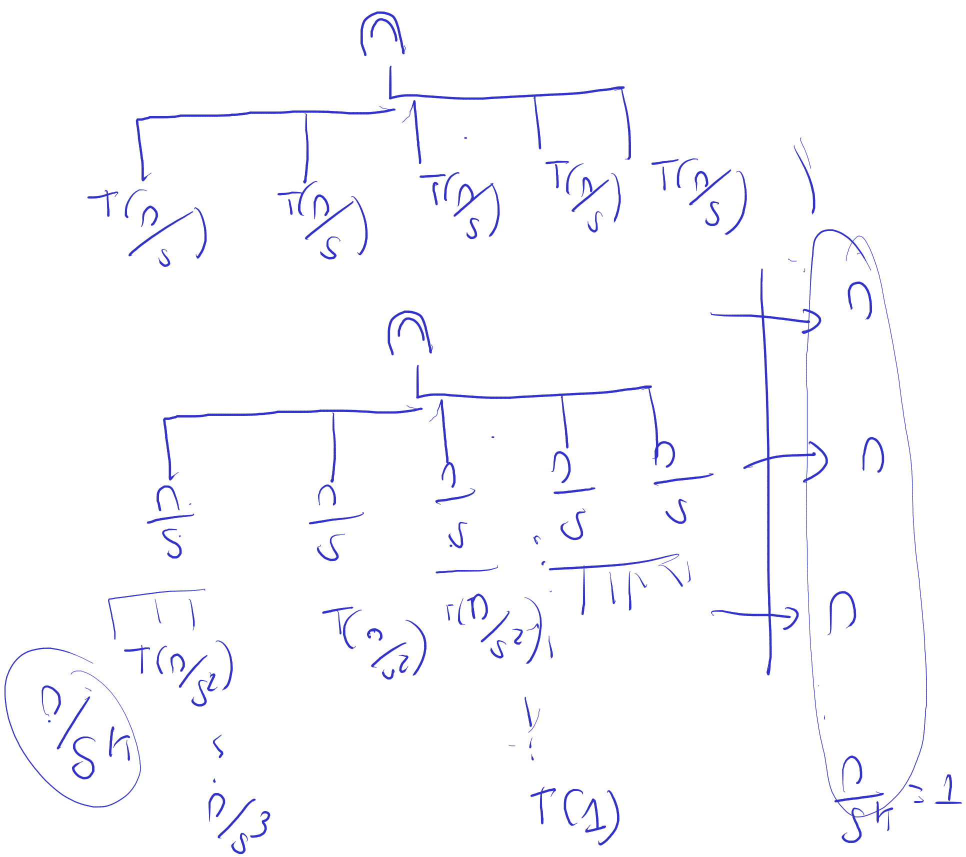


$$T(n) = n + T\left(\frac{n}{2} + 17\right)^{*}$$

$$\boxed{T(n) = n + 5T\left(\frac{n}{5}\right) \qquad T(1) = 10}$$

1) ¿Hasta cuando expandir?

¿Solución $O(f(n))$



$$\boxed{k = \log_5(n)}$$

$k = \log_5(n)$

$n \log_5(n)$

$$\boxed{O(n \log(n))}$$

Recurrencias

Método maestro

Permite resolver recurrencias de la forma:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$, donde $a \geq 1$, $b > 1$

Recurrencias

Dado T(n) = aT(n/b) + f(n), donde a≥1, b>1, se puede acotar asintóticamente como sigue:

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si a*f(n/b) ≤c*f(n)

para algun c<1

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

T(n) = 9T(n/b) + f(n)

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = n$$

f(n) = n

$n^{\log_b 9 - \epsilon}$

$n^{\log_3 9 - \epsilon}$

$n^{2-\epsilon}$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $n = O(n^{2-\varepsilon})$?

$\epsilon = 1$

n es O(n)

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $n = O(n^{2-\varepsilon})$?

Si $\varepsilon = 1$ se cumple que $n = O(n)$, por lo tanto, se cumple que:

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$$

Recurrencias

T(n) = T(2n/3) + 1

$a=1 \quad b=\frac{3}{2} \quad f(n)=1$

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = 1$$

$n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $1 = O(n^{0-\varepsilon})$?

No existe $\varepsilon > 0$

Recurrencias

$T(n) = T(2n/3) + 1$

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \text{vs} \quad f(n) = 1$$

1 es $O(1)$ y $\Omega(1)$

Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$?

Es $1 = \Theta(1)$?

Si, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta(1 * \lg n) = \Theta(\lg n)$$

Recurrencias

T(n) =3 T(n/4) + nlgn

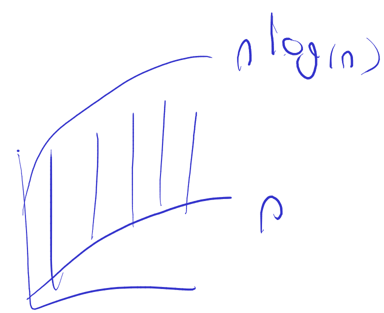
$$n^{\log_4 3} = n^{0.793} \quad \text{vs} \quad f(n) = n\lg n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$? ×

Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$? ×

Es $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$?

$\boxed{\Omega(n)}$



Si, y además, af(n/b)≤cf(n)

3(n/4)lg(n/4) ≤ cnlgn

3(n/4)lgn - 3(n/4)*2 ≤ cnlgn

(3/4)nlgn ≤ cnlgn → c=3/4 y se concluye que $\boxed{T(n) = \Theta(n\lg n)}$

Recurrencias

$T(n) = 2T(n/2) + n\lg n$

$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$ $\quad \log_b a = \log_2 2 = 1$

$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = n\lg(n)$ $\quad n^1$

Muestre que no se puede resolver por el método maestro

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$

$n\log(n)$ es $O(n^{1-\varepsilon})$

$n\log(n)$ es $O(n)$ X

2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$

Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon > 0$

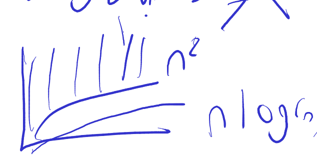
$n\log(n)$ es $\Theta(n)$ $O(n)$ $\Omega(n)$

X X

3. $T(n) = \Theta(f(n))$

Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ si $a*f(n/b) \leq c*f(n)$ $\quad c < 1$

$n\log(n)$ es $\Omega(n^2)$ X



Recurrencias

Resuelva usando métodc

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si a*f(n/b) ≤c*f(n)

$\boxed{T(n) = 4T(n/2) + n}$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$\log_b a = \log_2 4 = 2$

$a = 4$

$b = 2$

$f(n) = n$

n es $O(n^{2-\varepsilon})$ ✓

n es $O(n)$

$\boxed{\Theta(n^2)}$

$T(n) = aT(n/b) + F(n)$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$a = 4$

$b = 2$

$\boxed{f(n) = n^2}$

$\log_b a = \log_2 4$

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si a*f(n/b) ≤c*f(n)

1) n^2 es $O(n^{2-\epsilon})$

n^2 es $O(n)$ X

2) $F(n)$ es $\Theta(n^2)$

n^2 es $\Theta(n^2)$

$T(n) = \Theta(n^2 \log(n))$

$$T(n) = 4T(n/2) + n^3$$

$a = 4$
$b = 2$
$f(n) = n^3$

$\log_b a = \log_2 4 = 2$

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ $\boxed{\text{si } a*f(n/b) \le c*f(n)}$

1) $n^3 \in O(n^{2-\epsilon})$ ✗

2) $n^3 \in \Theta(n^2)$ ✗

$n^3 \in \Omega(n^{2+\epsilon})$

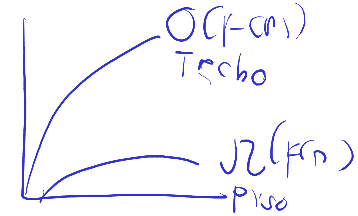
$n^3 \in \Omega(n^3)$ ✓

$4\left(\frac{n}{4}\right)^3 \le c \times n^3$

$\frac{4}{4^3} n^3 \le c \times n^3$ $\quad c \ge \frac{1}{16}$

$\Theta(n^3)$

Resolver método del maestro



$$\boxed{T(n) = 3T(n/4) + n^2} \rightarrow \Theta(n^2)$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + F(n)$$

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

Techo

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si $a*f(n/b) \le c*f(n)$ $c < 1$

$\log_b(a)$

$\log_4(3)$

$n^{\log_4(3)}$

n^2 es $O(n^{\log_4(3)-\epsilon})$

n^2 es $\Theta(n^{\log_4(3)})$

n^2 es $\Omega(n^{\log_4 3+\epsilon})$

$$3\left(\frac{n}{4}\right)^2 \le c \times n^2$$

$$\frac{3}{16}n^2 \le c\,n^2 \qquad c \ge \frac{3}{16} \qquad c=\frac{3}{16}$$

$n^3 + 2n^2 + 5n$

$T(n) = 6T(n/5) + 2n^3$

$\log_5 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5}$

1.11328

$n^{\log_5 6} \approx n^{1.11328}$

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si $a*f(n/b) \le c*f(n)$

$c < 1$

$2n^3$ es $O(n^{1.11328-\epsilon})$

$2n^3$ es $\Theta(n^{1.11328})$

$2n^3$ es $\Omega(n^{1.11328+\epsilon})$ $\epsilon = 1$

$6 \times 2\left(\frac{n}{5}\right)^3 \le c \times n^3$

$\Theta(\boxed{n^3}) = \Theta(2n^3)$

$\frac{12 \times \cancel{n^3}}{125} \le c \times \cancel{n^3}$

$c \ge \frac{12}{125}$

$c = \frac{12}{125}$

Recurrencias

Método de sustitución

Suponer la forma de la solución y probar por inducción matemática

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2\rfloor)+n$, $T(1)=1$

Suponer que la solución es de la forma $T(n)=O(n\lg n)$

Probar que $T(n)\leq cn\lg n$.

Se supone que se cumple para $n/2$ y se prueba para n

Hipotesis inductiva: $T(n/2) \leq c(n/2)\lg (n/2)$

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Hipótesis inductiva: $T(n/2) \leq cn/2 \lg (n/2)$

Paso inductivo:

$$\boxed{\log(n/2) = \log(n) - \overbrace{\log(2)}^{1}}$$

$T(n) \leq 2(cn/2 \lg (n/2)) + n$

$T(n) \leq cn \lg (n/2) + n$

$= cn \lg (n) - cn + n$, para $c \geq 1$, haga $c=1$

$T(n) \leq cn \lg n$

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $\boxed{T(1)=1}$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Paso base: si $c=1$, probar que $T(1)=1$ se cumple

$1 \leq 1 \times (1) \log(1)$

$T(1) \leq 1*1\lg 1$?

$1 \leq 0$?

No, se debe escoger otro valor para c

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Paso base: si $c=2$, probar que $T(1)=1$ se cumple

0

$T(1) \leq 2*1\lg 1$?

$1 \leq 0$?

No, se puede variar k.

Para esto, se calcula $T(2)$ y se toma como valor inicial

Recurrencias

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$. $T(n) = 2T(n/2) + n$

$T(2)=2T(\cancel{0}\,1)+2=4$

Paso base: si c=1, probar que T(2)=4 se cumple

$T(2) \leq 1*2\lg 2$?

$4 \leq 2$?

No, se puede variar c.

Recurrencias

Probar que $T(n) \leq cn \lg n$.

$T(2)=2T(0)+2=4$

Paso base: si $c=3$, probar que $T(2)=4$ se cumple

$T(2) \leq 3*2\lg 2$?

$4 \leq 6$?

Si, se termina la demostración

Recurrencias

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1$, $T(1)=O(1)$, $T(2) = O(1)$

Suponer que la solución es de la forma $T(n)=O(2^n)$

Probar que $T(n) \leq c2^n$.

Se supone que se cumple para $n-1$ y se $n-2$ prueba para n

Hipotesis inductiva: $T(n-1) \leq c2^{(n-1)}$ y $T(n-2) \leq c2^{(n-2)}$

Recurrencias

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+\cancel{1}$, $T(1)=O(1)$, $T(2) = O(1)$

Ahora se debe probar que: $T(n) \leq c2^n$

$T(n) = O(2^n)$

$$T(1) \leq c2^1 \rightarrow 1 \leq 2*c$$

$$T(2) \leq c2^2 \rightarrow 1 \leq 4*c$$

$$T(3) \leq c2^3 \rightarrow 2 \leq 8*c$$

$$T(4) \leq c2^4 \rightarrow 3 \leq 16*c$$

$$T(5) \leq c2^5 \rightarrow 5 \leq 32*c$$

$$T(6) \leq c2^6 \rightarrow 8 \leq 64*c$$

$$T(7) \leq c2^7 \rightarrow 13 \leq 128*c$$

$$T(8) \leq c2^8 \rightarrow 21 \leq 256*c$$

Con $c = 1$, se cumple.

$\boxed{T(n) = 4T(n/2) + n}$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

$T(n) = \Theta(n^2)$

$\varepsilon = 1$

n es $O(n^{2-\varepsilon})$

n es $O(n)$

$\boxed{\Theta(n^2)}$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a} \lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si $a*f(n/b)$
$\leq c*f(n)$

$$\boxed{T(n) = 4T(n/2) + n \longrightarrow \Theta(n^2)}$$

$O(n^2)$ y $\Omega(n^2)$

- $T(1) = 4$
- $T(2) = 4 \times 4 + 2 = 18$
- $T(4) = 4 \times 18 + 4 = 72 + 4 = \underline{76}$

$T(8) = 4 \times 76 + 8 = 312$

$T(n) \leq c \times n^2$	$T(n) \geq c \times n^2$
$T(n) \leq \cancel{4} \times c \times \left(\frac{n}{\cancel{2}}\right)^2 + n$	$T(n) \geq 4c \times \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n$
$T(n) \leq cn^2 + n$	$T(n) \geq c \times n^2 + n$

n				
1	$4 \leq c(1)^2 + 1$	$4 \leq 101$ ✓	$4 \geq c(1)^2 + 1$	$4 \geq 2$ ✓
2	$18 \leq c(2)^2 + 1$	$18 \leq 401$ ✓	$18 \geq c(2)^2 + 1$	$18 \geq 5$ ✓
4	$76 \leq c(4)^2 + 1$	$76 \leq 1601$ ✓	$76 \geq c \times (4)^2 + 1$	$76 \geq 17$ ✓
8	$312 \leq c(8)^2 + 1$	$312 < 6.400$ ✓	$312 \geq c \times (8^2) + 1$	$312 \geq 65$ ✓
	$c = 100$		$c = 1$	

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$T(1)=4$

n^2

1. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$

2. $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\lg n)$

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon>0$

3. $T(n)=\Theta(f(n))$

Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ para algún $\varepsilon>0$ si a*f(n/b) ≤c*f(n)

$T(1)=4$

$T(2)=16+4=20$

$T(4)=80+16=96$

$T(5)=320+25$

345

1) n^2 es $O(n^{2-\epsilon})$

2) n^2 es $\Theta(n^2)$

$\Theta(n^2 \log(n))$

$T(n) \leq C \times n^2 \log(n) + n^2$ $\quad T(n) \leq c4\left(\frac{n}{2}\right)^2 \log\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ $\quad T(n) \leq C \times n^2(\log(n) - \log(2)) + n^2$

$T(n) \leq C \times n^2(\log(n) - 1) + n^2$

$T(n) \leq C \times n^2 \log(n) - C \times n^2 + n^2$

---

n $\quad O(n^2\log(n))$ $\quad C = 10$ $\quad K \geq 4$

1 $\quad \boxed{4 \leq -C \times n^2 + n^2}$

2 $\quad 20 \leq C(2)^2 - C(2)^2 + 2^2$

4 $\quad 96 \leq C(4)^2 \times 2 - C(4)^2 + 4^2$ $\quad 11(4)^2$

8 $\quad 345 \leq C(8)^2 \times 3 - C(8)^2 + 8^2$ $\quad 21(8)^2$ $\quad 21(64)$

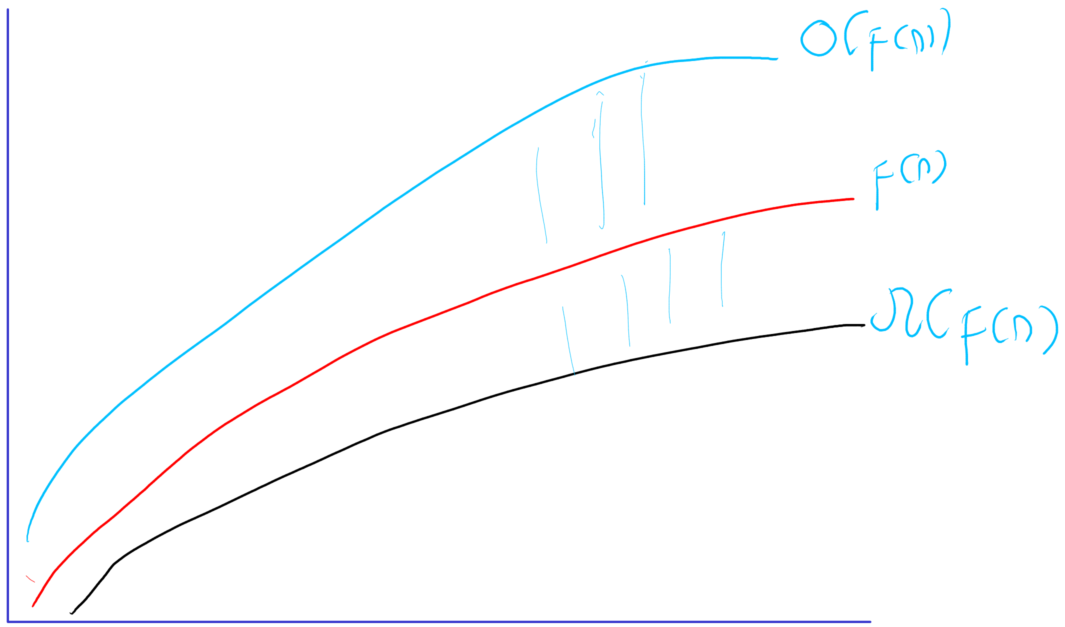
$\Omega(n^2\log(n))$ $\quad \boxed{C=1}$ $\quad K \geq 1$

$4 \geq -C \times n^2 + n^2$

$20 \geq C(2)^2 - C(2)^2 + 2^2$

$96 \geq C(4)^2 \times 2 - C(4)^2 + 4^2$

$345 \geq C(8)^2 \times 3 - C(8)^2 + 8^2$



O(f(n))
f(n)
Ω(f(n))

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 4

Gracias

Próximo tema:

Divide y vencerás