# Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

- \* Definición de función
- \* Dominio, Codominio y Rango
- \* Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- \* Función inversa

#### Noción de función

 Una función permite representar la relación entre dos conjuntos

#### Noción de función

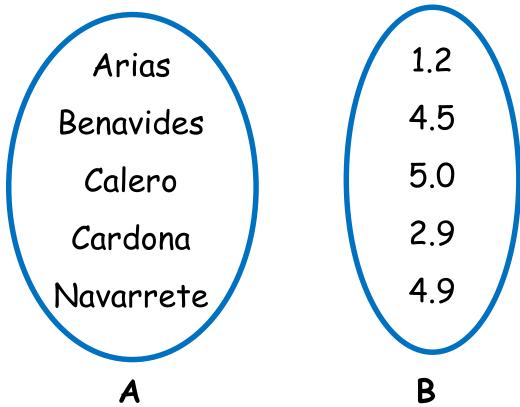
 Una función permite representar la relación entre dos conjuntos

A = {Arias, Benavides, Calero, Cardona, Navarrete}

 $B = \{1.2, 2.9, 4.5, 4.9, 5.0\}$ 

#### Noción de función

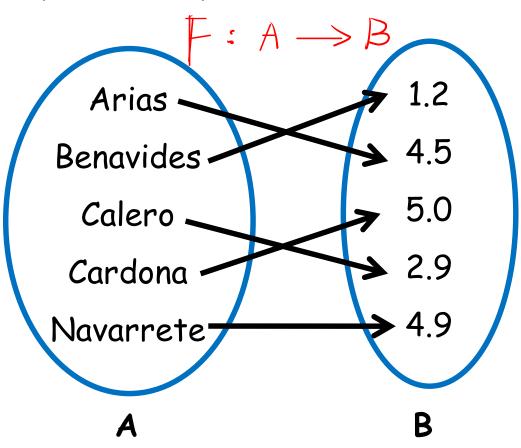
 Una función permite representar la relación entre dos conjuntos



#### Noción de función

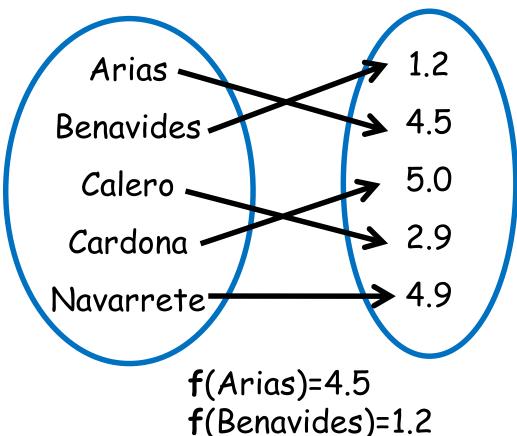
Una función permite representar la relación entre dos

conjuntos



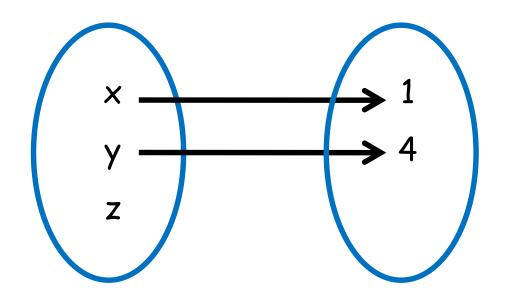
#### Noción de función

 Una función permite representar la relación entre dos conjuntos



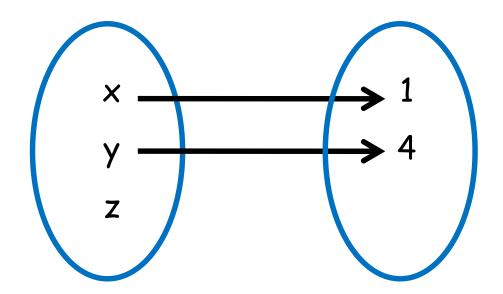
#### **Función**

#### **Función**



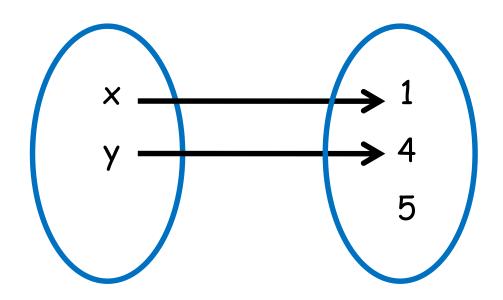
#### **Función**

• Dados dos conjuntos A y B, una función f de A a B, denotada como f:  $A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B

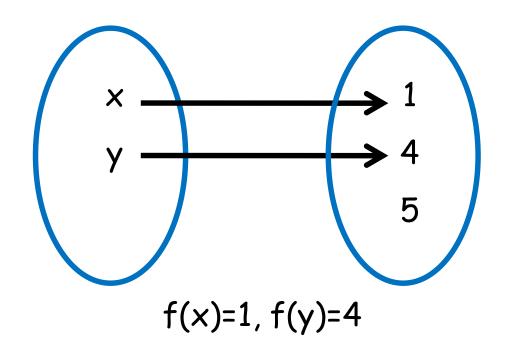


No es función porque z debe tener un valor asignado en B

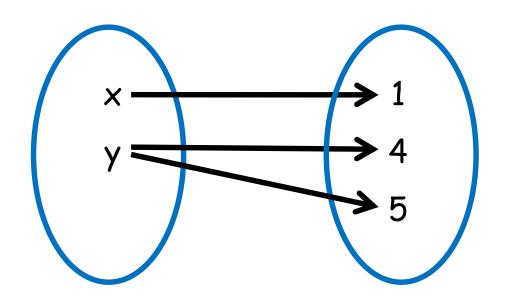
#### **Función**



#### **Función**

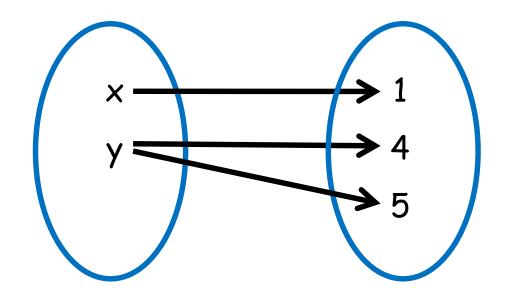


#### **Función**



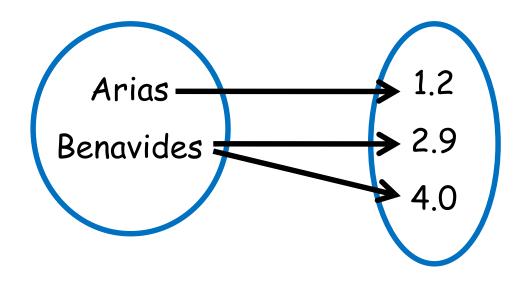
#### **Función**

• Dados dos conjuntos A y B, una función f de A a B, denotada como f:  $A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de A exactamente un elemento de B

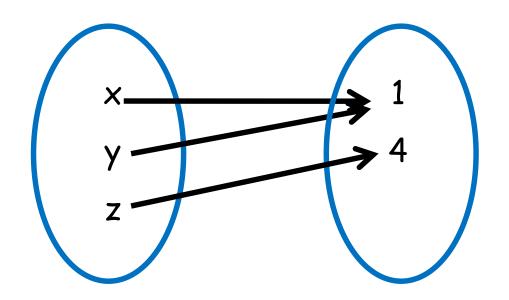


No es función porque debe asignarse exactamente un elemento de B

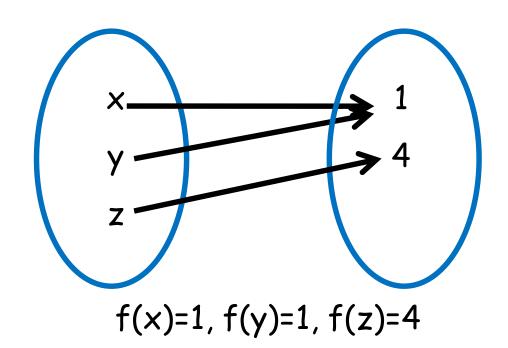
#### **Función**



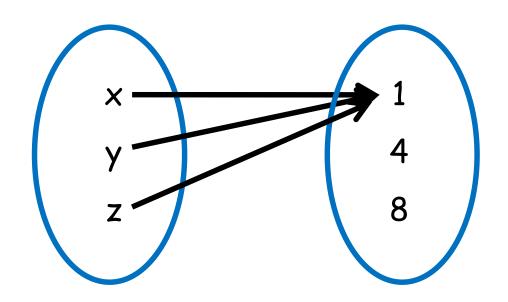
#### **Función**



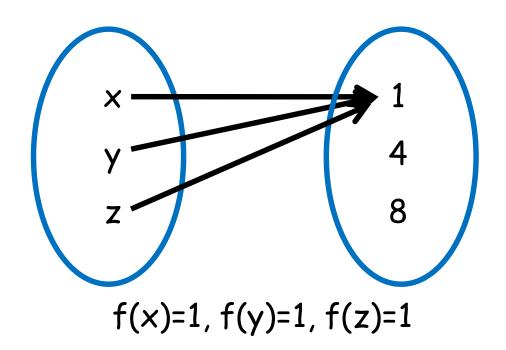
#### **Función**



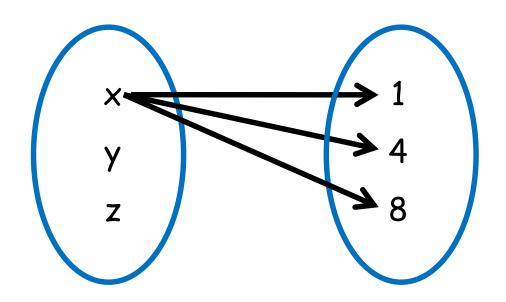
#### **Función**



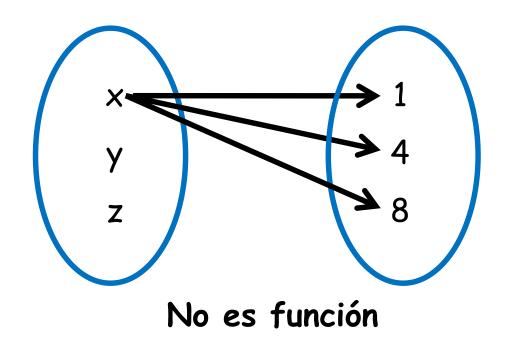
#### **Función**



#### **Función**

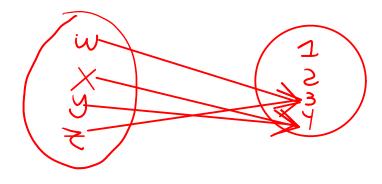


#### **Función**



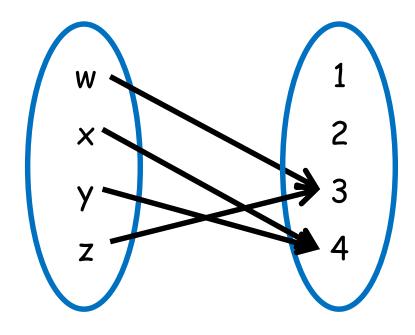
Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{w,x,y,z\}$  y  $B=\{1,2,3,4\}$  es una función.

$$f(w)=3$$
,  $f(x)=4$ ,  $f(y)=4$ ,  $f(z)=3$ 



Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{w,x,y,z\}$  y  $B=\{1,2,3,4\}$  es una función.

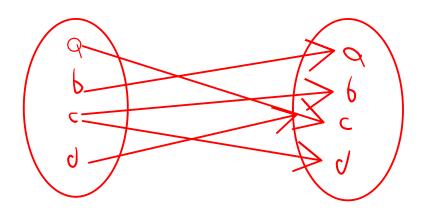
$$f(w)=3$$
,  $f(x)=4$ ,  $f(y)=4$ ,  $f(z)=3$ 



Es función

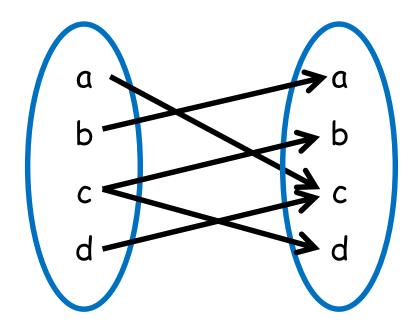
Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{a,b,c,d\}$  y  $B=\{a,b,c,d\}$  es una función.

$$f(c)=d$$
,  $f(a)=c$ ,  $f(b)=a$ ,  $f(c)=b$ ,  $f(d)=c$ 



Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{a,b,c,d\}$  y  $B=\{a,b,c,d\}$  es una función.

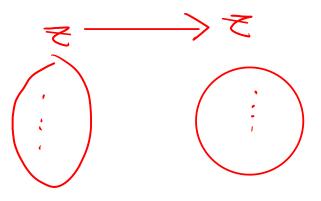
$$f(c)=d$$
,  $f(a)=c$ ,  $f(b)=a$ ,  $f(c)=b$ ,  $f(d)=c$ 



No es función

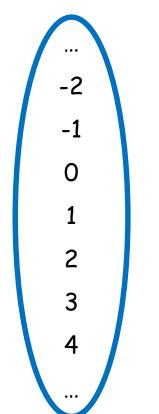
Las funciones se pueden especificar por medio de fórmulas, por ejemplo,

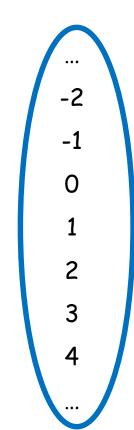
$$f(x)=x+1$$
, de Z a Z



Las funciones se pueden especificar por medio de fórmulas, por ejemplo,

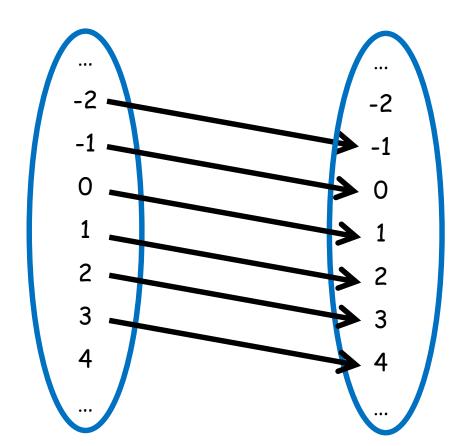
$$f(x)=x+1$$
, de Z a Z





Las funciones se pueden especificar por medio de fórmulas, por ejemplo,

$$f(x)=x+1$$
, de Z a Z



Indique si cada f es, o no, una función de R en R:

• 
$$f(x)=1/x$$
  $f(0)=\frac{1}{2}$ 

• 
$$f(x)=\sqrt{x}$$
  $f(-1)=$   $j\in \mathcal{L}$ 

• 
$$f(x)=x^2+1$$

Indique si cada f es, o no, una función de R en R:

- f(x)=1/x. no es una función porque f(0) no está definida
- $f(x)=\sqrt{x}$ . no es una función porque f(-1) no está definida
- $f(x)=\pm x$ . no es una función porque asigna dos valores a x
- $f(x)=x^2+1$ . si es una función

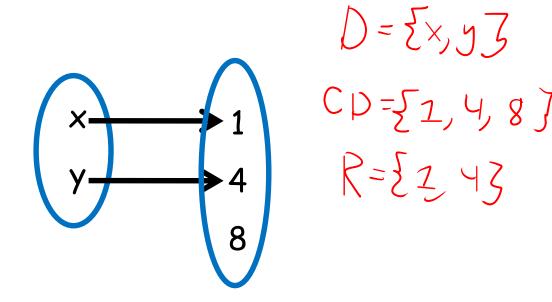
# Dominio, Codominio y Rango

Si f es una función de A a B, se dice que:

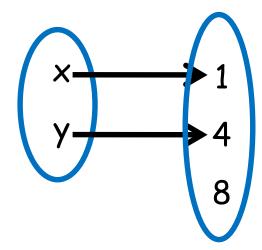
- A es el dominio
- · B es el codominio

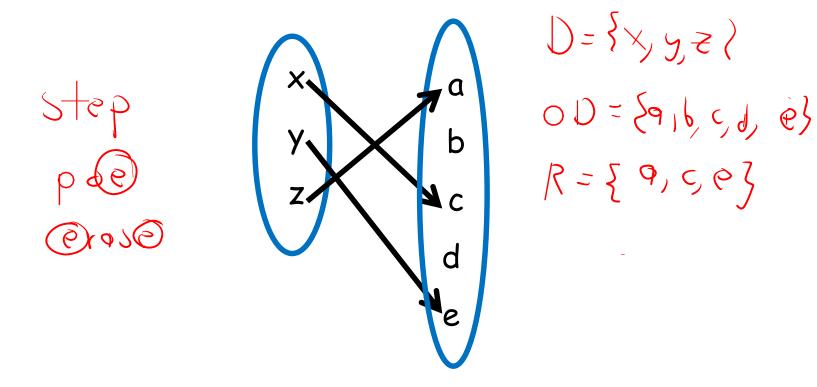


• El rango de f es el conjunto de todas las imágenes de los elementos de A. Si f(a)=b se dice que b es la imagen de a

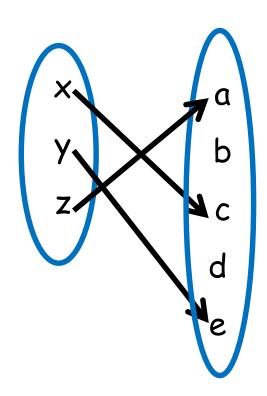


- Dominio={x,y}
- **Codominio**={1,4,8}
- Rango={1,4}





- Dominio={x,y,z}
- Codominio={a,b,c,d,e}
- Rango={a,c,e}



Indique el rango de la siguiente función:

•  $f(x)=x^2$ , de los reales a los reales

$$D = R$$

$$C = R$$

$$C > R$$

$$C > 0$$

Indique el rango de la siguiente función:

- $f(x)=x^2$ , de los reales a los reales
  - Dominio=R
  - Codominio=R
  - Rango=R⁺∪0

Indique el rango de la siguiente función:

•  $f(x)=x^2+4$  de los reales a los reales

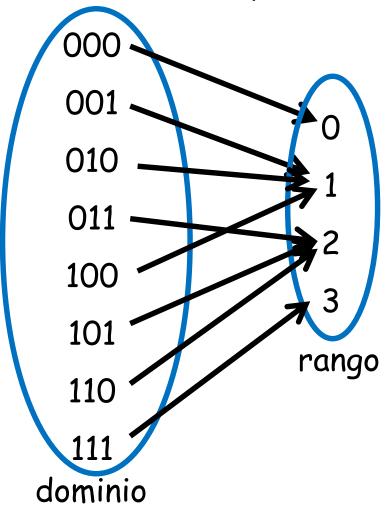
$$D=R$$
  $CD=R$   $R^{\dagger} \geq V$ 

Indique el rango de la siguiente función:

- $f(x)=x^2+4$  de los reales a los reales
  - Dominio=R
  - Codominio=R
  - Rango=Reales mayores o iguales a 4

Sea f la función que toma cualquier cadena de 3 bits y devuelve la cantidad de 1's. Indique el dominio y el rango

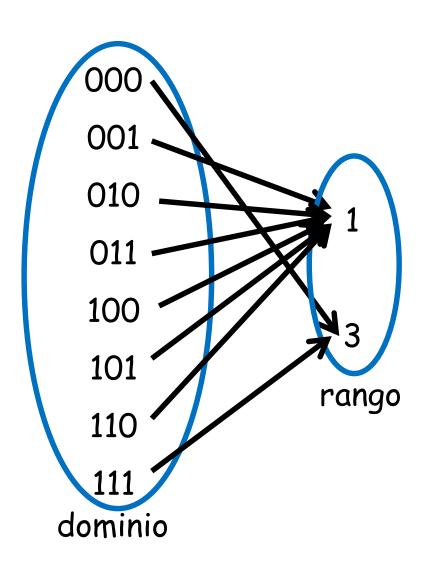
Sea f la función que toma cualquier cadena de 3 bits y devuelve la cantidad de 1's. Indique el dominio y el rango



Sea f la función que toma cualquier cadena de 3 bits y asigna el valor absoluto de la diferencia entre la cantidad de 1's y 0's Indique el dominio y el rango

$$000 \rightarrow 3 \qquad 010 \rightarrow 1$$

$$110 \rightarrow 1$$

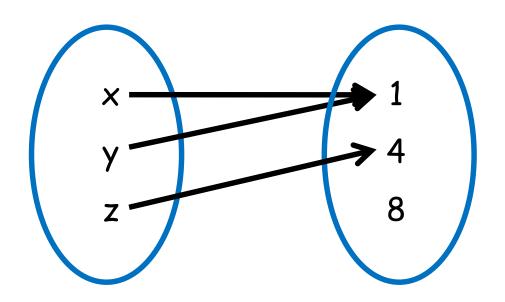


# Tipos de funciones

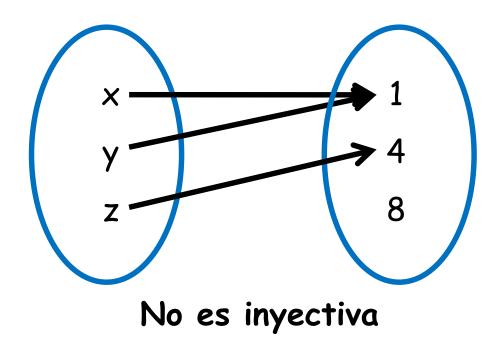
- Inyectiva
- Sobreyectiva
- Biyectiva

## Función inyectiva

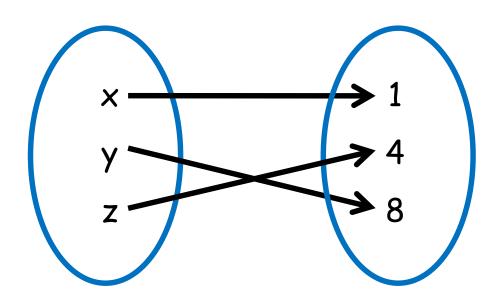
## Función inyectiva



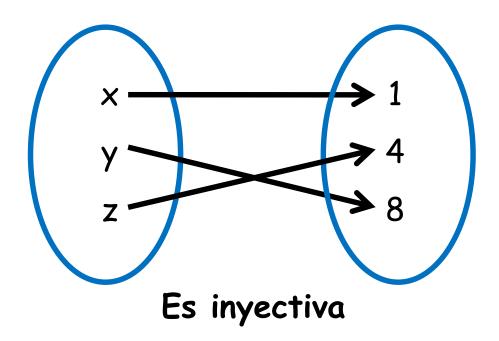
## Función inyectiva



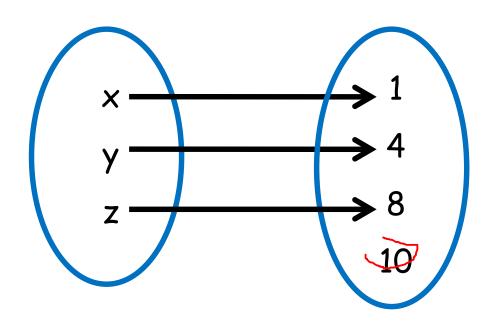
## Función inyectiva



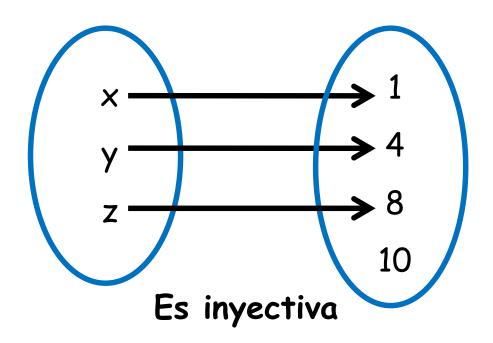
## Función inyectiva



## Función inyectiva



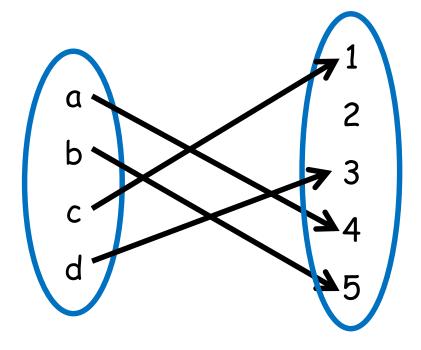
## Función inyectiva



Indique cuáles de las siguientes funciones son inyectivas:

- f de {a,b,c,d} a {1,2,3,4,5} donde f(a)=4, f(b)=5, f(c)=1 y f(d)=3
- $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros
- f(x)=x+1 de los enteros a los enteros

f de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4,5\}$  donde f(a)=4, f(b)=5, f(c)=1 y f(d)=3



Es inyectiva

•  $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros, **no es inyectiva** porque f(1)=f(-1)=1

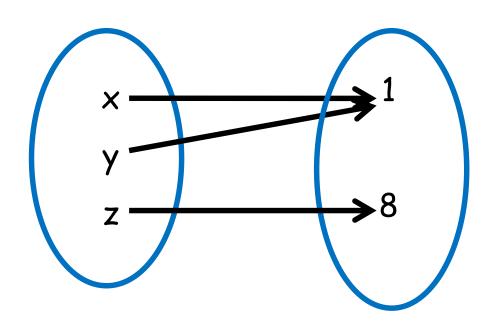
• f(x)=x+1 de los enteros a los enteros, si es inyectiva porque cada x tiene un solo y asignado, x+1

## Función sobreyectiva

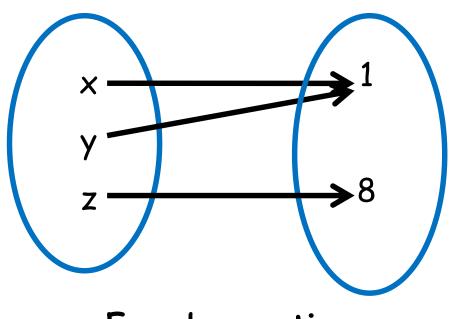
## Función sobreyectiva

- Una función f es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$  (codominio), existe un elemento  $a \in A$  tal que f(a)=b
- Una función es sobreyectiva si el codominio es igual al rango

## Función sobreyectiva

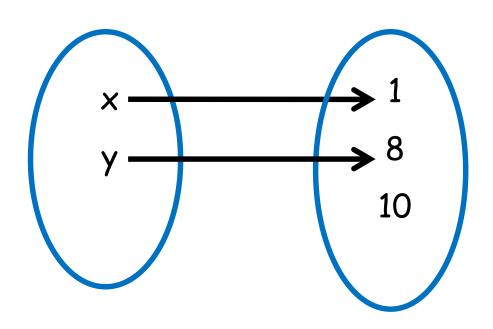


## Función sobreyectiva



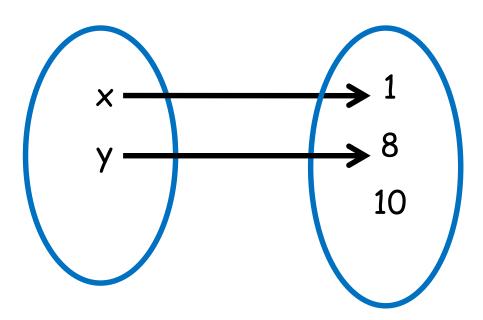
Es sobreyectiva

## Función sobreyectiva



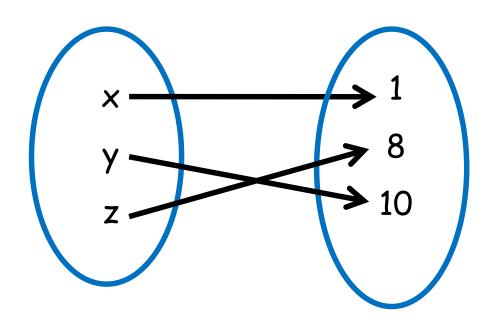
## Función sobreyectiva

• Una función f es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que f(a)=b

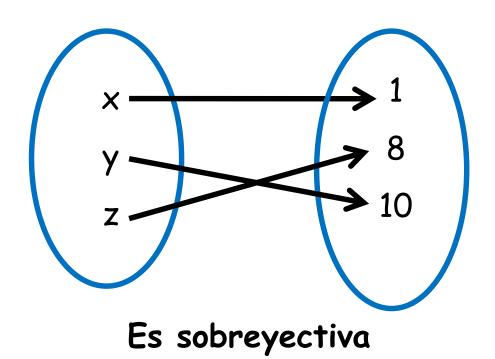


No es sobreyectiva porque 10 no está en el rango

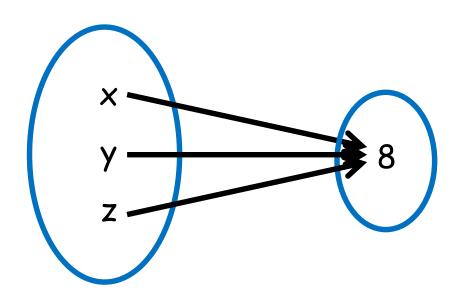
## Función sobreyectiva



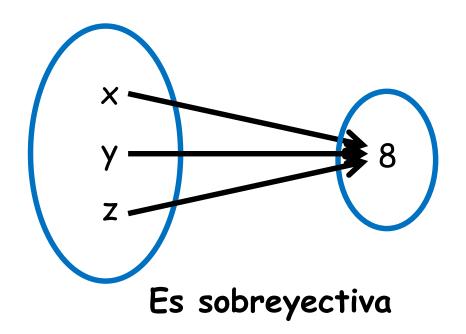
## Función sobreyectiva



## Función sobreyectiva



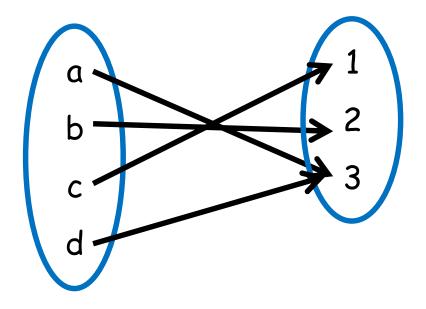
## Función sobreyectiva



Indique cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas:

- f de {a,b,c,d} a {1,2,3} donde f(a)=3, f(b)=2, f(c)=1 y f(d)=3
- $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros  $\times$
- f(x)=x+1 de los enteros a los enteros

f de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3\}$  donde  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{a,b,c,d\}$  a



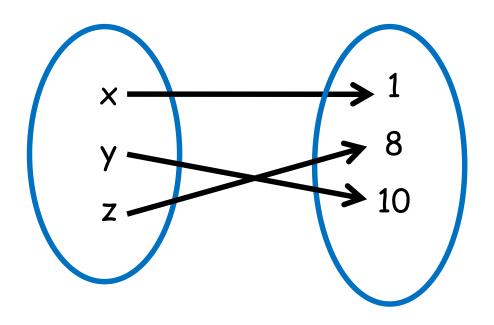
Es sobreyectiva

•  $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros, **no es sobreyectiva** porque -1 que está en el codominio no está en el rango

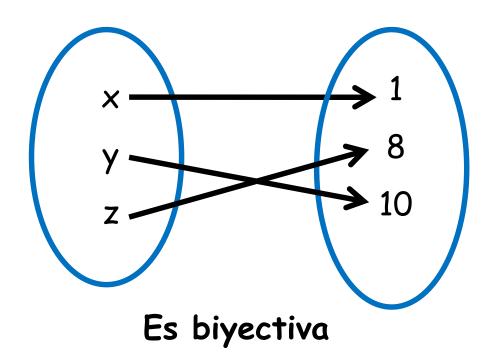
• f(x)=x+1 de los enteros a los enteros, si es sobreyectiva porque cada y del codominio es una imagen

## Función biyectiva

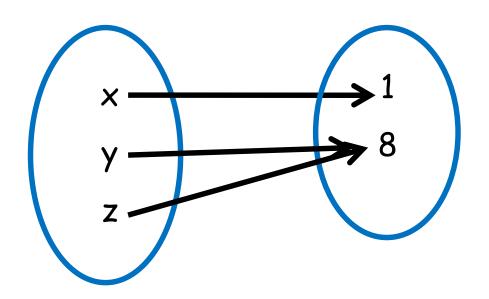
# Función biyectiva



## Función biyectiva

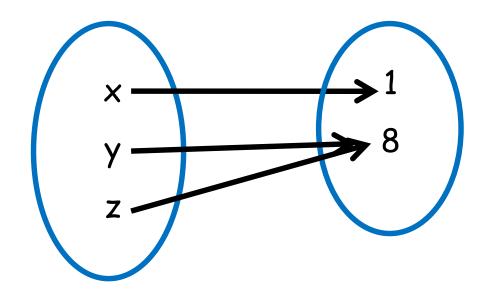


# Función biyectiva



## Función biyectiva

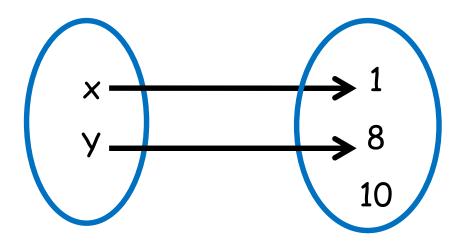
· Una función f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



No es biyectiva porque no es inyectiva

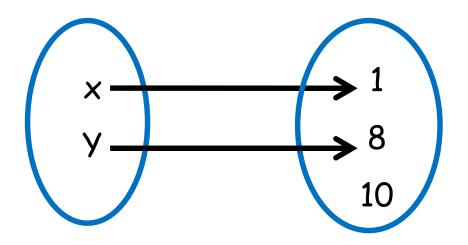
## Función biyectiva

· Una función f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



### Función biyectiva

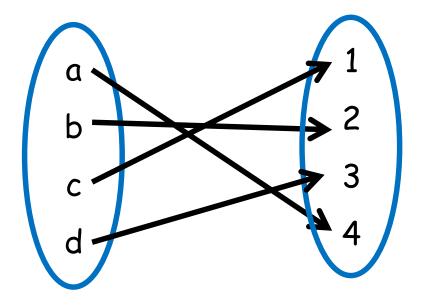
· Una función f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



No es biyectiva porque no es sobreyectiva

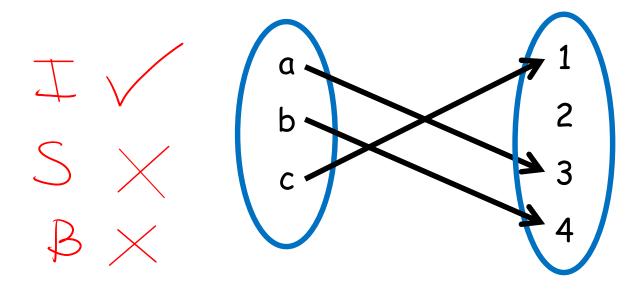
Indique si la función f de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4\}$  donde f(a)=4, f(b)=2, f(c)=1, f(d)=3 es biyectiva

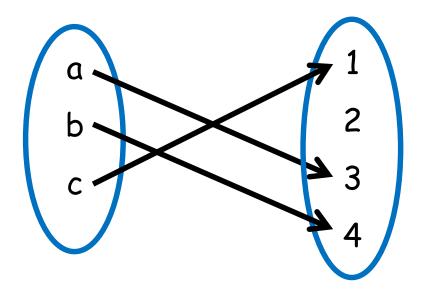
Indique si la función f de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4\}$  donde  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{b,c,d\}$  donde  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{a,b,c,d\}$  donde  $\{a,b,c,d\}$  dond



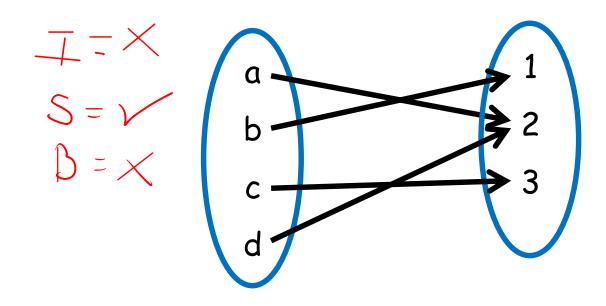
Es biyectiva

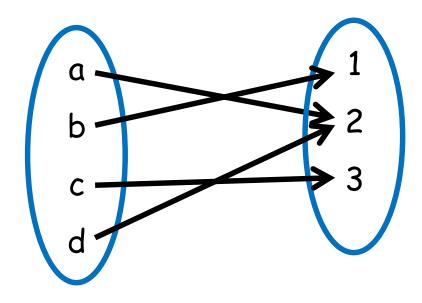
Clasifique cada una de las siguientes funciones como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva



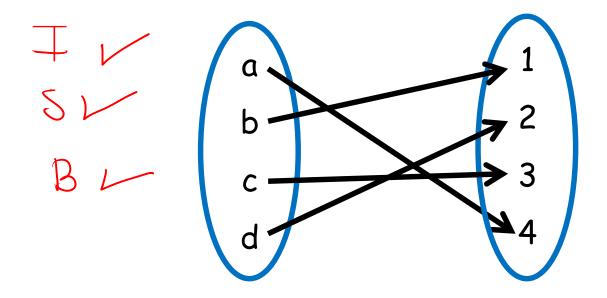


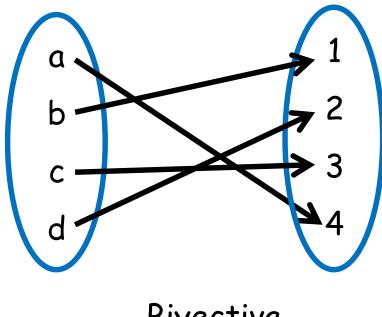
Inyectiva pero no sobreyectiva



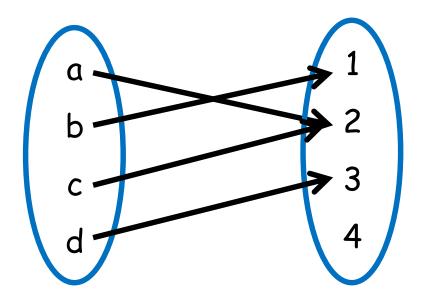


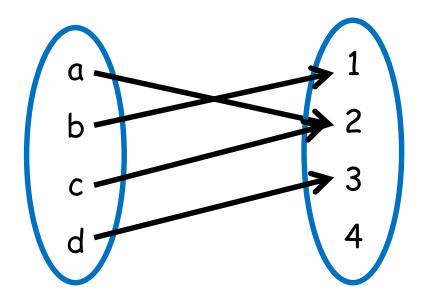
Sobreyectiva pero no inyectiva



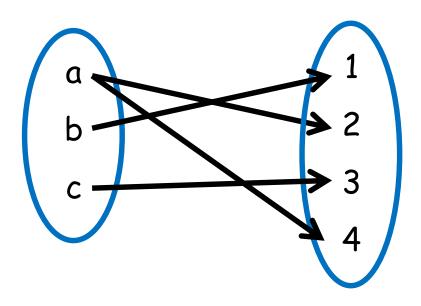


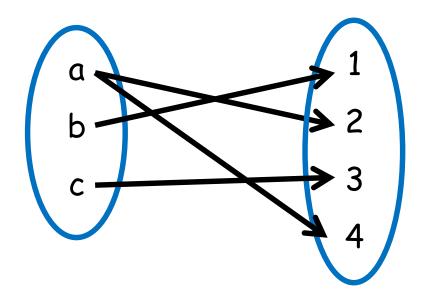
Biyectiva





Ni inyectiva ni sobreyectiva

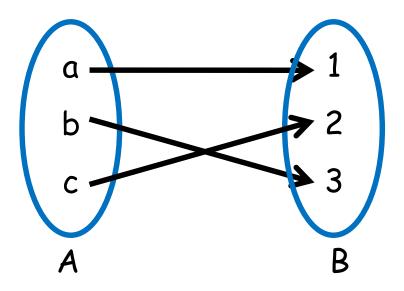




No es función

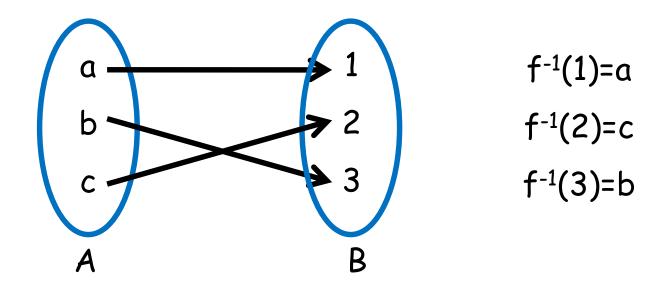
#### Función inversa

Dada una función  $f:A \rightarrow B$ , la función inversa de f, denotada por  $f^{-1}$ , asigna a un elemento  $b \in B$  un solo elemento  $a \in A$  tal que f(a)=b



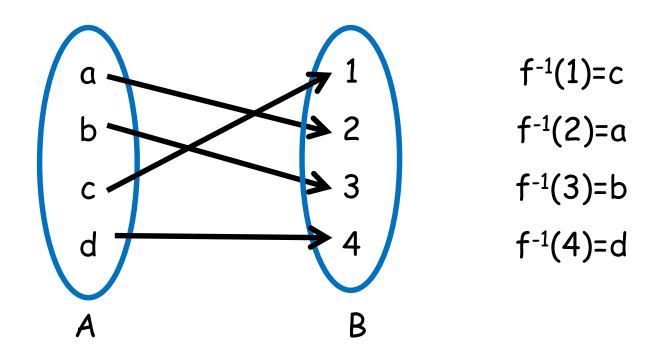
#### Función inversa

Dada una función  $f:A \rightarrow B$ , la función inversa de f, denotada por  $f^{-1}$ , asigna a un elemento  $b \in B$  un solo elemento  $a \in A$  tal que f(a)=b



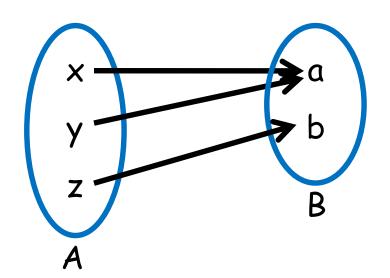
Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $B=\{1,2,3,4\}$  y f(a)=2, f(b)=3, f(c)=1, f(d)=4

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $B=\{1,2,3,4\}$  y f(a)=2, f(b)=3, f(c)=1, f(d)=4



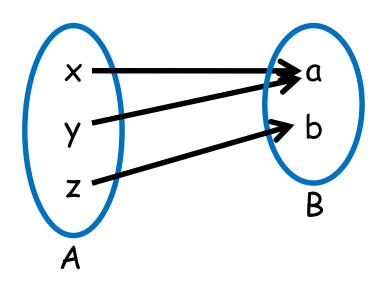
Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y,z\}$ ,  $B=\{a,b\}$  y f(x)=a, f(y)=a, f(z)=b

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y,z\}$ ,  $B=\{a,b\}$  y f(x)=a, f(y)=a, f(z)=b



 La relación que hay de B→A no es una función f<sup>-1</sup>(a)=x f<sup>-1</sup>(a)=y

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y,z\}$ ,  $B=\{a,b\}$  y f(x)=a, f(y)=a, f(z)=b

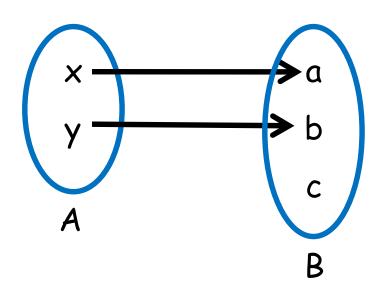


 La relación que hay de B→A no es una función f<sup>-1</sup>(a)=x f<sup>-1</sup>(a)=y

f-1 no está definida cuando f no es inyectiva

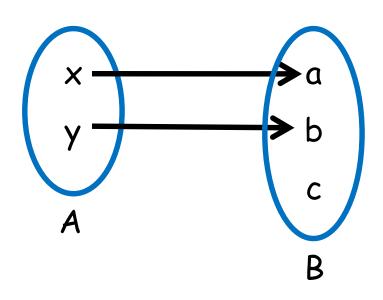
Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y\}$ ,  $B=\{a,b,c\}$  y f(x)=a, f(y)=b

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y\}$ ,  $B=\{a,b,c\}$  y f(x)=a, f(y)=b



• La relación que hay de  $B \rightarrow A$  no es una función porque no se tiene  $f^{-1}(c)$ 

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y\}$ ,  $B=\{a,b,c\}$  y f(x)=a, f(y)=b



• La relación que hay de  $B \rightarrow A$  no es una función porque no se tiene  $f^{-1}(c)$ 

f-1 no está definida cuando f no es sobreyectiva

#### Función inversa

Una función  $f:A \rightarrow B$  es invertible si es biyectiva

Indique cuáles de las siguientes funciones son invertibles.

f:R
$$\rightarrow$$
R

• f(x)=2x+1

• f(x)=x^2+1

• f(x)=x^3

• f(x)=(x^2+1)/(x^2+2)

•  $\Rightarrow$  S

• N  $\Rightarrow$  S

Indique cuáles de las siguientes funciones son invertibles. f:R→R

- f(x)=2x+1, es invertible
- $f(x)=x^2+1$ , no es invertible. f(-1)=f(1)=1 no es inyectiva
- $f(x)=x^3$ , es invertible
- $f(x)=(x^2+1)/(x^2+2)$ , no es invertible. no es inyectiva [f(-1)=f(1)=2/3], ni sobreyectiva (1 no es imagen en f)

Determine si las siguientes funciones, de R a R, son invertibles:

Determine si las siguientes funciones, de R a R, son invertibles:

- f(x)=[x/2]. no, no es inyectiva. f(1)=f(2)=1
- $f(x)=3x^2+7$ . **no**, no es inyectiva. f(1)=f(-1)=10
- f(x)=(x+1)/(x+2). **no**, no es sobreyectiva. 1 no es imagen
- $f(x)=x^5+1$ . si

Dadas las siguientes funciones de los enteros a los enteros, complete la tabla indicando si cumple, o no, cada propiedad

• 
$$f_1(x) = x^2 - 1$$

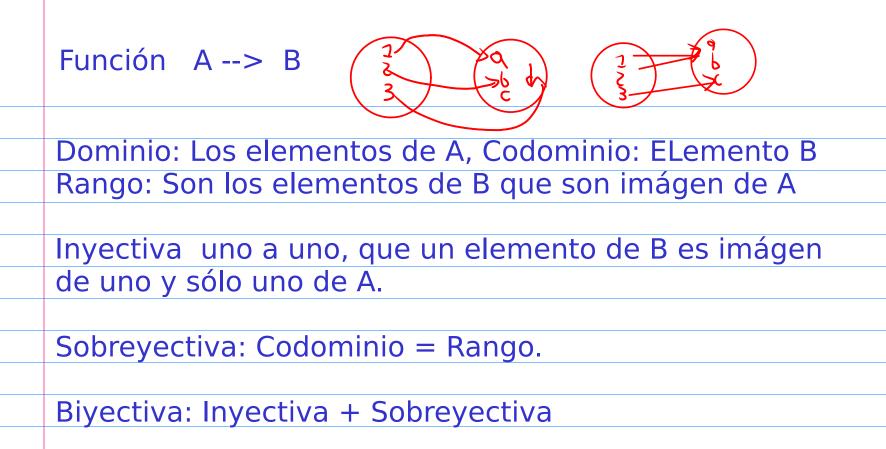
• 
$$f_2(x) = 5x - 8$$

1.		Α.	_	L
l)	0	n	חו	. 2
$\boldsymbol{\smile}$	•	111	,,,	

Cod	Ö	<b>M</b> //	110
	•	' '	,

_	Inyectiva	Sobreyectiva	Biyectiva
f <sub>1</sub>	No	No	NO
f <sub>2</sub>	8	5I	SI

Justifique solamente las propiedades que no se cumplen



Las función son invertibles si y sólo sí son biyectivas

•  $f_1$  de {a,b,c,d} a {1,2,3} donde  $f_1(a)=3$ ,  $f_1(b)=1$ ,  $f_1(c)=2$  y  $f_1(d)=3$ 

Rongo- R

- $f_2(x)=x^2+4$  de los <u>reales</u> a los <u>reales positivos mayores o iguales a 4.0</u>
- $f_3(x)=x^3+1$  de los reales a los reales

F(-1)= F(2)
-------------

	Inyectiva	Sobreyectiva	Biyectiva
$f_1$	<b>V</b> 0	SI	VØ
f <sub>2</sub>	NO	SI	NO
f <sub>3</sub>	St	st	S±

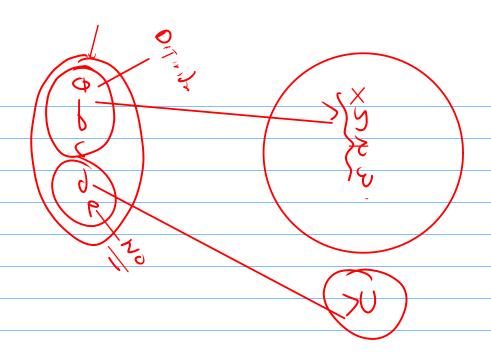
Indique si las siguientes funciones son invertibles de Enteros positivos a Enteros, indicando si son invectivas o sobreyectivas

$$2) \quad x^3 + 8x \rightarrow \mathcal{I} = \checkmark \qquad \mathcal{S} = \checkmark$$

3) 
$$-x+3 \rightarrow \bot = \checkmark \{2, 1, 0, -1, -0\}$$

**78. a)** Show that a partial function from 
$$A$$
 to  $B$  can be viewed as a function  $f^*$  from  $A$  to  $B \cup \{u\}$ , where  $u$  is not an element of  $B$  and

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a) \text{ if } a \text{ belongs to the domain} \\ \text{of definition of } f \\ u \text{ if } f \text{ is undefined at } a. \end{cases}$$



$$F(x) \times F(x) = 0$$

$$X \notin S \qquad S \subseteq U$$

$$S \subseteq U$$



**72.** Suppose that f is a function from A to B, where A and Bare finite sets with |A| = |B|. Show that f is one-to-one if and only if it is onto.

