Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Árboles de búsqueda binaria

Octubre 2017

Propiedad de un árbol de búsqueda binaria

Árboles y recorrido *inorden*

Operaciones mínimo, máximo, sucesor y predecesor

Inserción y eliminación

Árboles

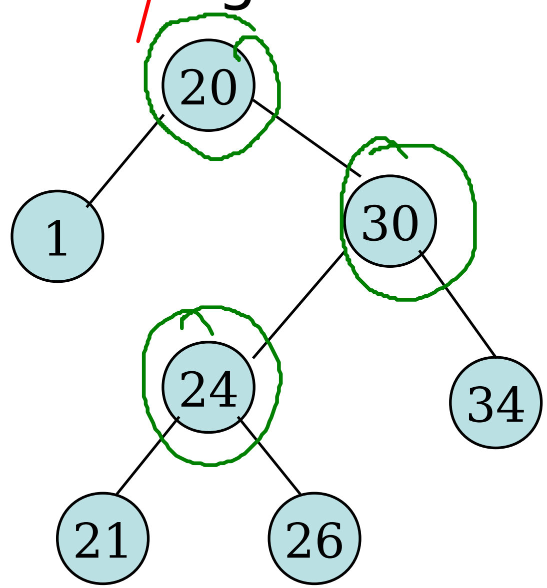
Por qué son importantes los árboles

- Operaciones básicas como insertar, borrar y buscar, toman un tiempo proporcional a la altura del árbol
- Para un árbol binario completo con n nodos, las operaciones básicas toman $\Theta(\lg n)$
- Si el árbol se construye como una cadena lineal de n nodos, tomarían $\Theta(n)$

Árboles

Árbol de búsqueda binaria

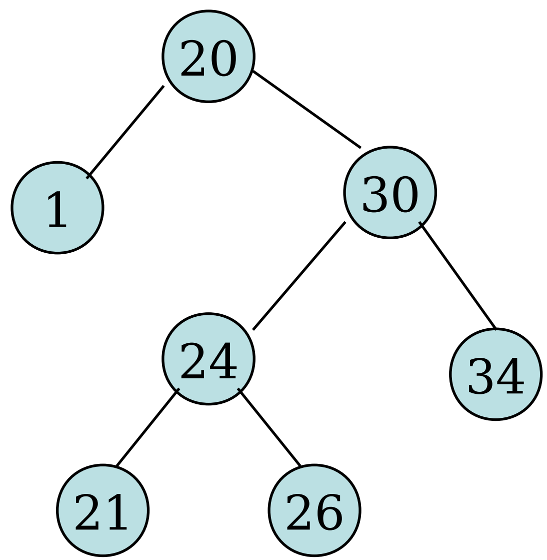
Es un árbol binario en el cual se cumple que, para cada nodo x, los nodos del subarbol izquierdo son menores o iguales a x y que, los nodos del subarbol derecho son mayores ~~o iguales~~ a x



Árboles

Propiedad del árbol de búsqueda binaria

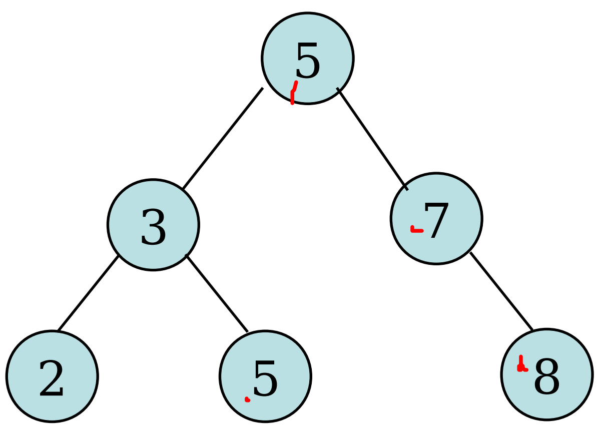
Sea x un nodo del árbol. Si y es un nodo en el subarbol izquierdo de x, entonces key[y]≤key[x]. Si y es un nodo en el subarbol derecho de x, entonces key[y]≥key[x]

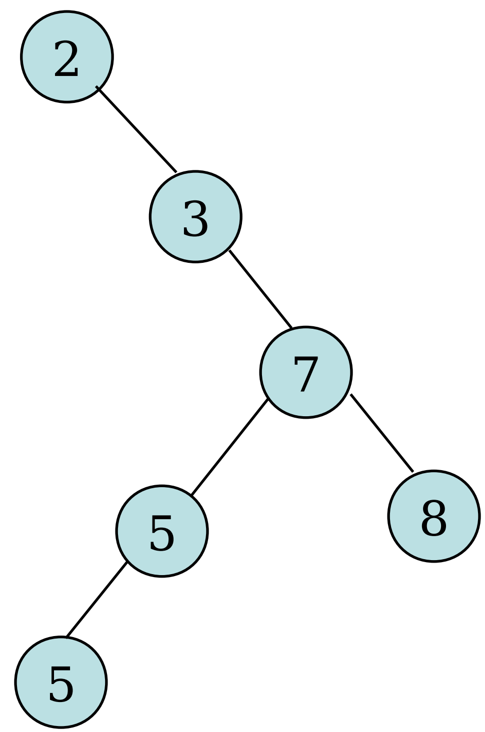


Árboles

Propiedad del árbol de búsqueda binaria

Sea x un nodo del árbol. Si y es un nodo en el subarbol izquierdo de x, entonces key[y]≤key[x]. Si y es un nodo en el subarbol derecho de x, entonces key[y]≥key[x]



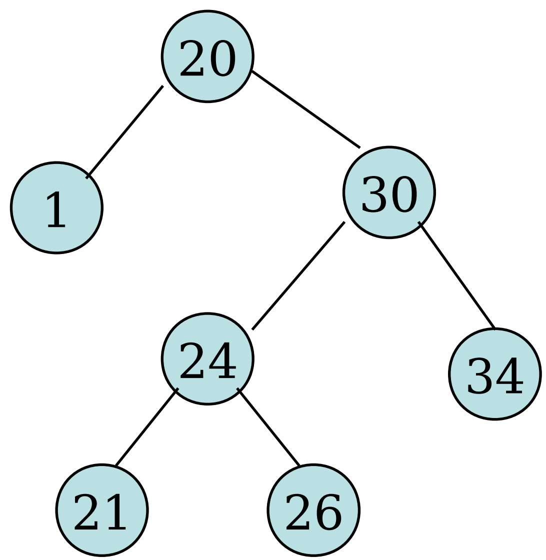


2 3 5 5 7 8

Árboles

Árbol de búsqueda binaria

Indique si el siguiente árbol es de búsqueda binaria

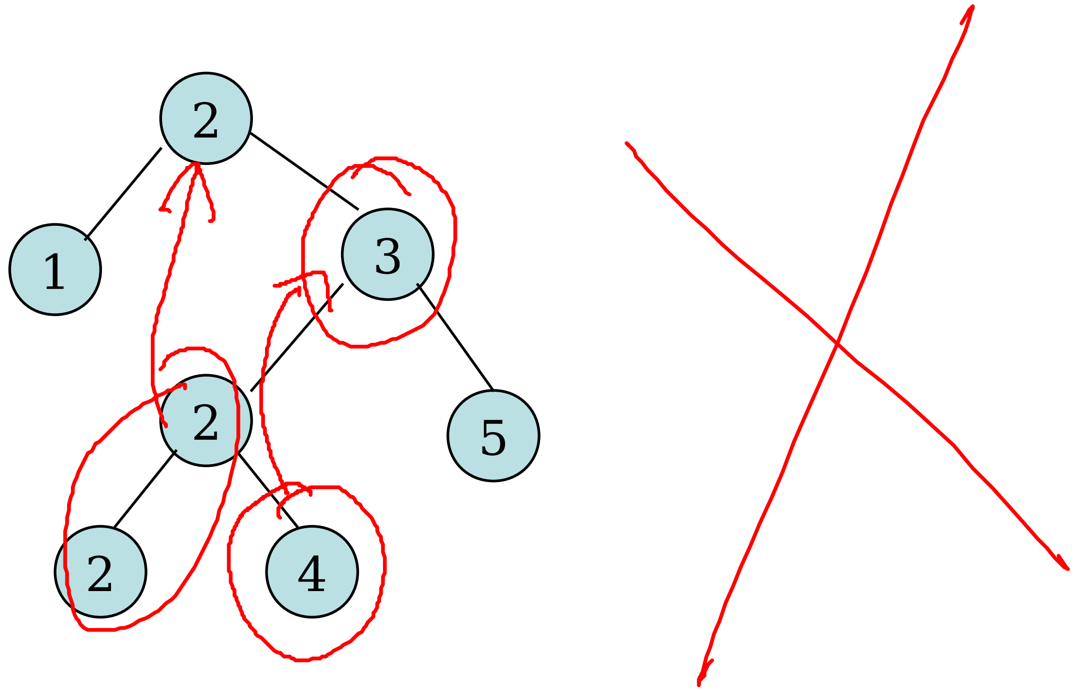


1 20 21 24 26 30 34

Árboles

Árbol de búsqueda binaria

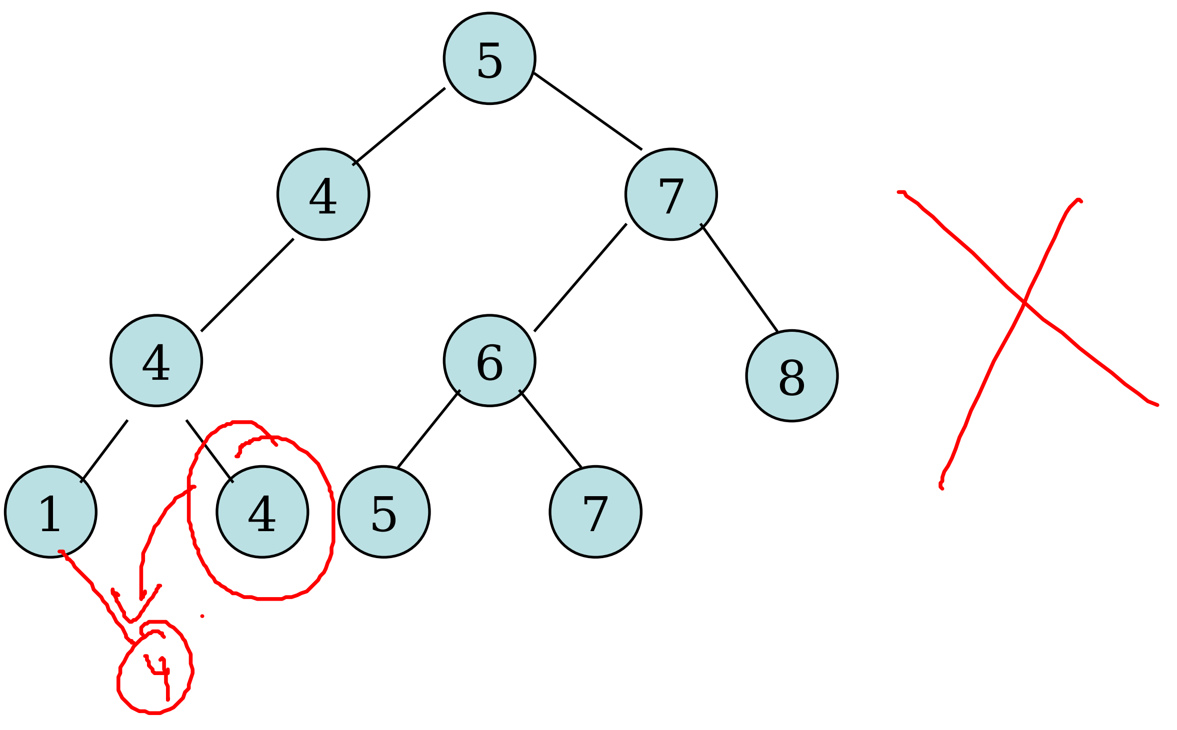
Indique si el siguiente árbol es de búsqueda binaria



Árboles

Árbol de búsqueda binaria

Indique si el siguiente árbol es de búsqueda binaria

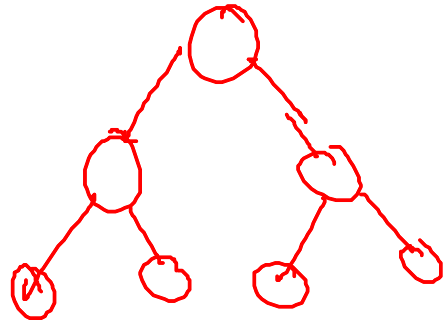


Árboles

Los árboles de búsqueda binaria tienen otra característica, si son recorridos en *inorden*, producen una lista de las llaves ordenada ascendentemente

$\Theta(n)$

```
INORDER-TREE-WALK(x)
 if x ≠ nil
    then INORDER-TREE-WALK(left[x])
            print key[x]
            INORDER-TREE-WALK(right[x])
```



$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$$

$a = 2 \quad b = 2 \quad f(n) = 1$

$T(n) = \Theta(n)$

$\log_b a = \log_2 2 = 1$

$\uparrow$

1) $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) = 1$ es $O(n^{1-\epsilon})$ $\quad T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Árboles

- Recorra los árboles de búsqueda binaria previos, en inorden

- Demuestre que la complejidad del algoritmo INORDER-TREE-WALK(x) es $\Theta(n)$

Árboles

Consulta de un árbol de búsqueda binaria

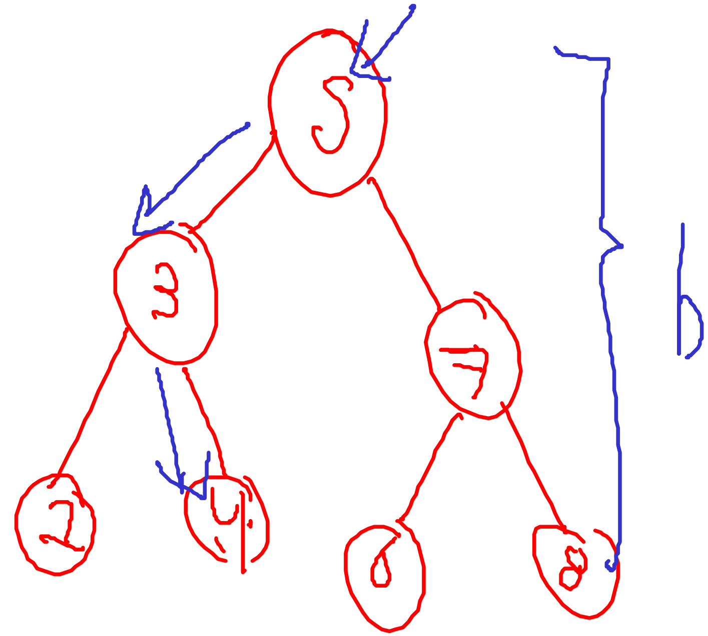
- Búsqueda de una llave
- Mínimo
- Máximo
- Sucesor de un nodo
- Predecesor de un nodo

Cada una de estas operaciones se puede hacer en O(h) donde h es la altura del árbol

Árboles

Buscar un nodo con llave k dado un árbol con apuntador a la raiz x

```
TREE-SEARCH(x,k)
  if x=nil or k=key[x]
    then return x
  if k<key[x]
    then return TREE-SEARCH(left[x],k)
    else return TREE-SEARCH(right[x],k)
```



$O(h)$

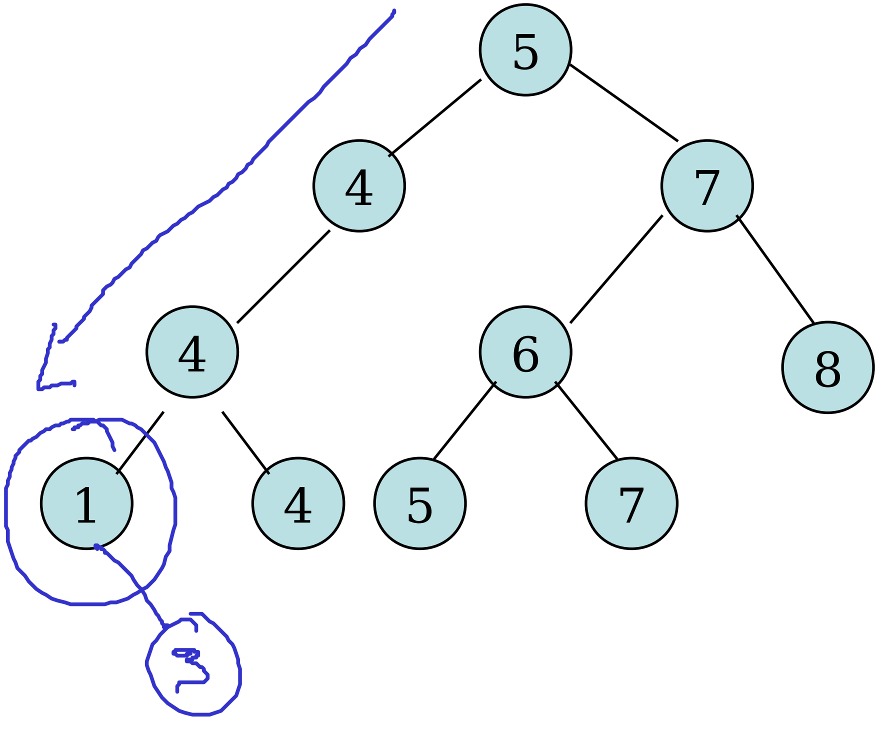
Árboles

Búsqueda iterativa

```
ITERATIVE-TREE-SEARCH(x,k)
  while x≠nil and k≠key[x]
    do if k<key[x]
        then x←left[x]
        else  x←right[x]
```

Árboles

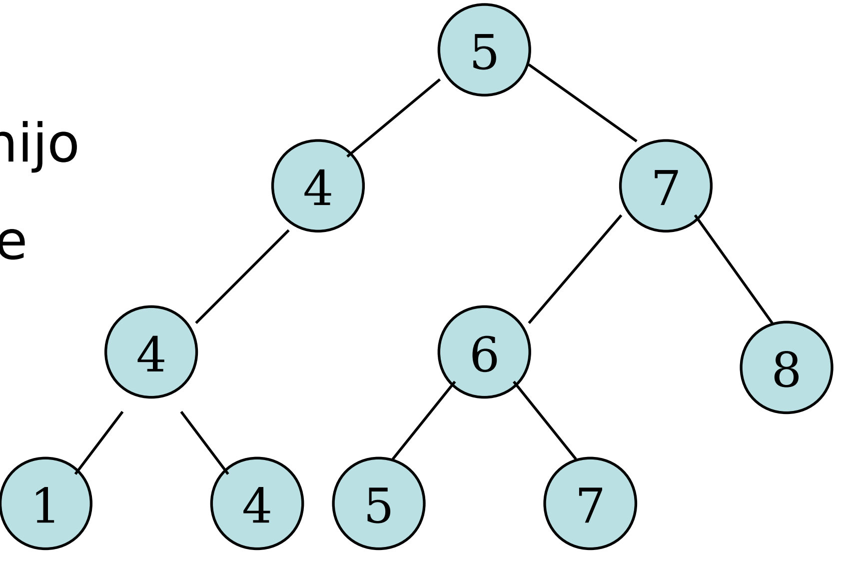
En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento mínimo?



Árboles

En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento mínimo?

Idea: seguir los apuntadores al hijo izquierdo desde la raiz hasta que se encuentre nil



Árboles

En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento mínimo?

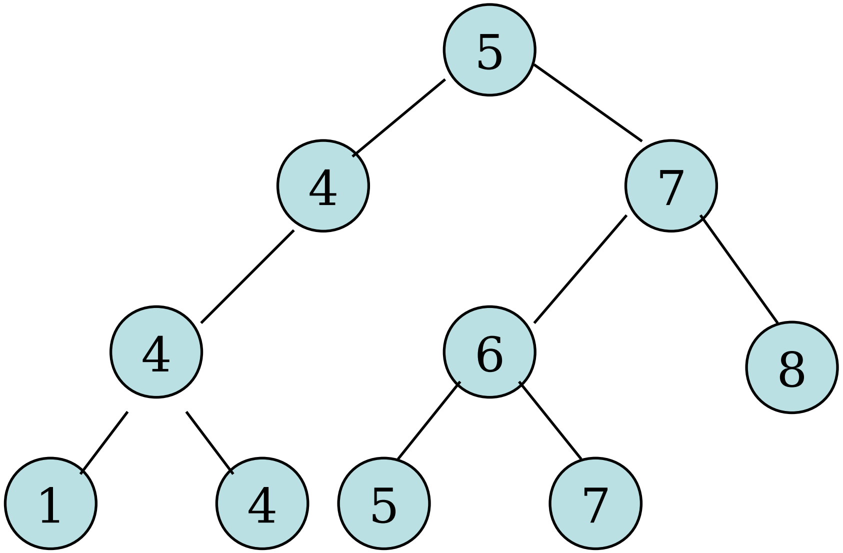
TREE-MINIMUN(x)

while left[x] $\neq$nil

do x←left[x]

return x

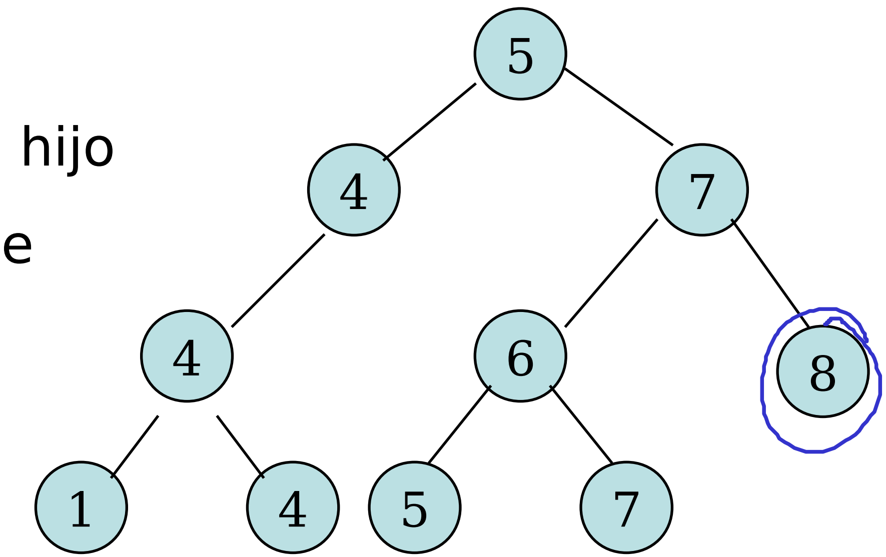
O(h)



Árboles

En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento máximo?

Idea: seguir los apuntadores al hijo derecho desde la raiz hasta que se encuentre nil



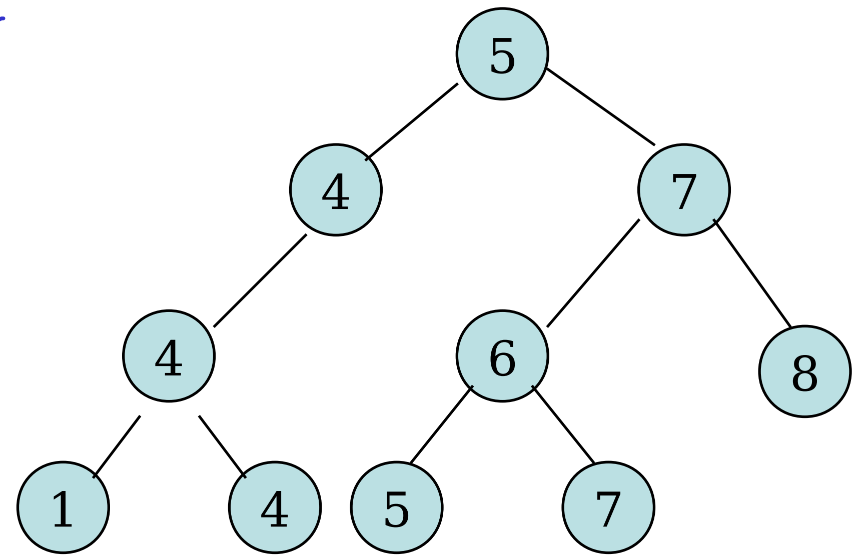
Árboles

En un árbol de búsqueda binaria dónde se ubica el elemento máximo?

TREE-MAXIMUM(x)

    while right[x] ≠nil
      do x←right[x]
    return x

d(h)

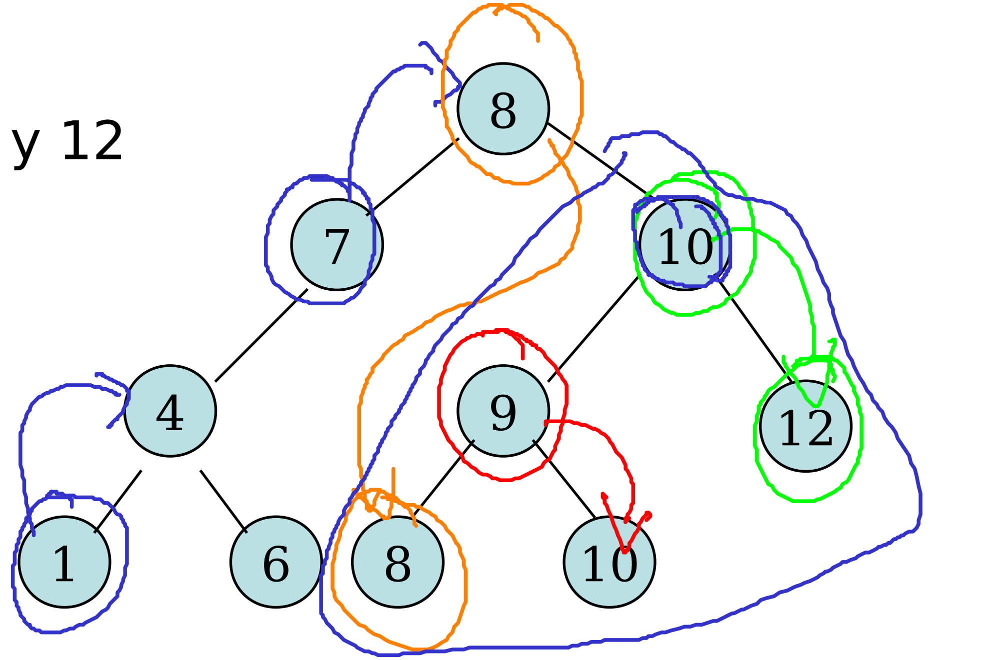


Árboles

Sucesor

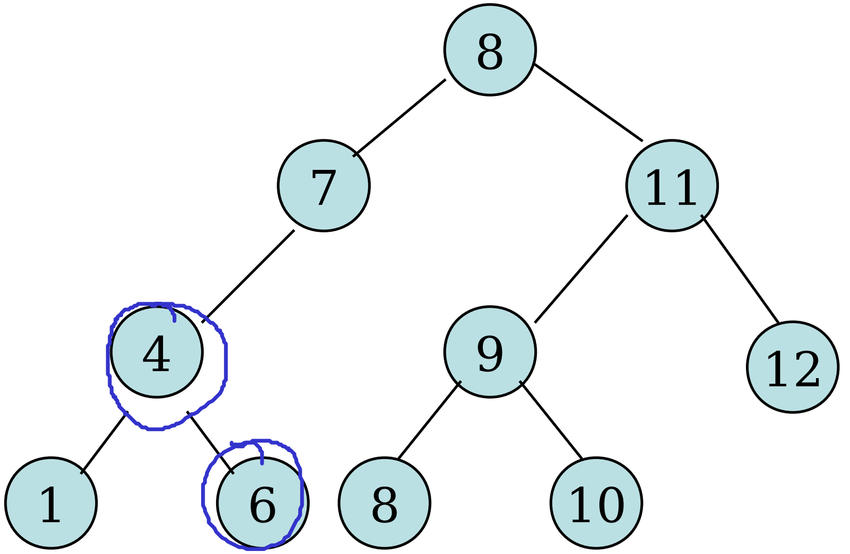
Dado un nodo x donde key[x]=k, el sucesor de x es el nodo y tal que key[y] es la llave más pequeña, mayor que key[x]

Cuál es el sucesor de 7, 9, 10 y 12



Árboles

```
TREE-SUCCESSOR(x)
  if right[x]≠nil
     then return TREE-MINIMUM(right[x])
  y←p[x]
  while y≠nil and x=right[y]
    do x←y
       y←p[y]
  return y
```



Explique el código anterior

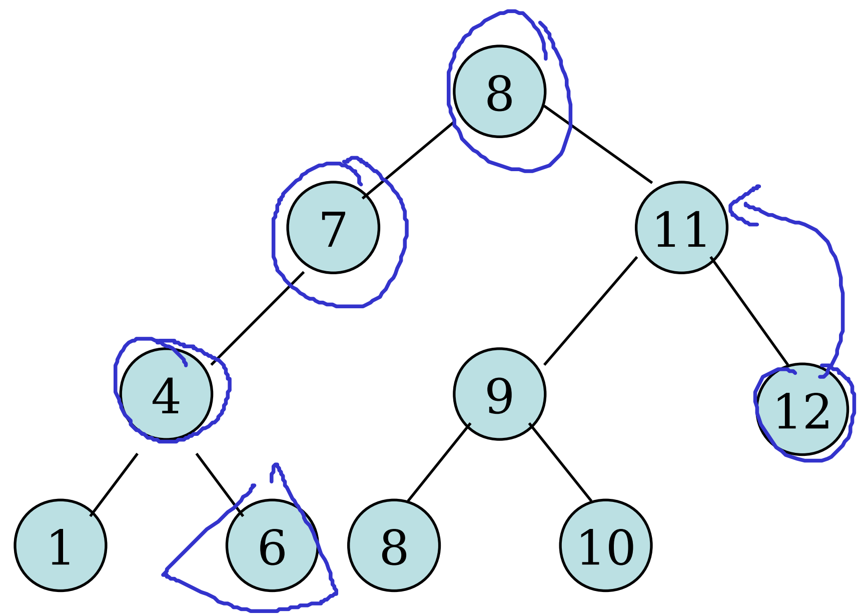
para el caso de TREE-SUCCESSOR(4)

Árboles

TREE-SUCCESSOR(x)

```
if right[x]≠nil
   then return TREE-MINIMUM(right[x])
y←p[x]
while y≠nil and x=right[y]
   do x←y
      y←p[y]
return y
```

y = 8 x = 7



Explique el código anterior

para el caso de TREE-SUCCESSOR(7)

Árboles

TREE-SUCCESSOR(x)

if right[x]≠nil

then return TREE-MINIMUM(right[x])

y←p[x]   y=7   x=8

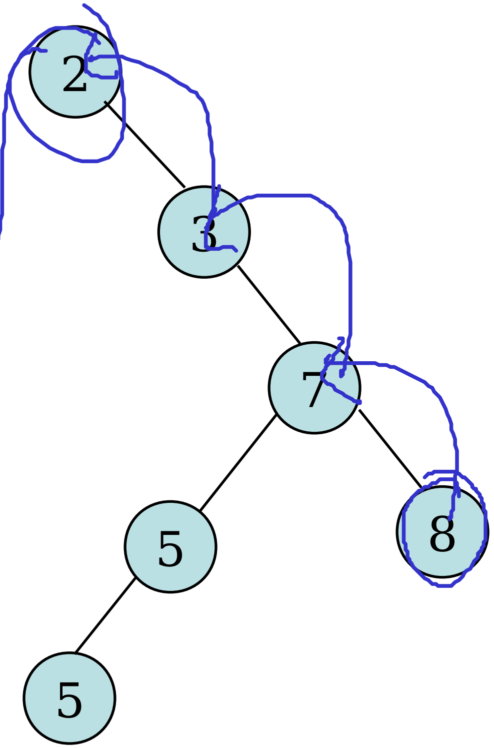
while ~~y≠nil~~ and x=right[y]

do x←y   x=7   y=3

y←p[y]   x=3   y=2

return y   x=2   y=nil

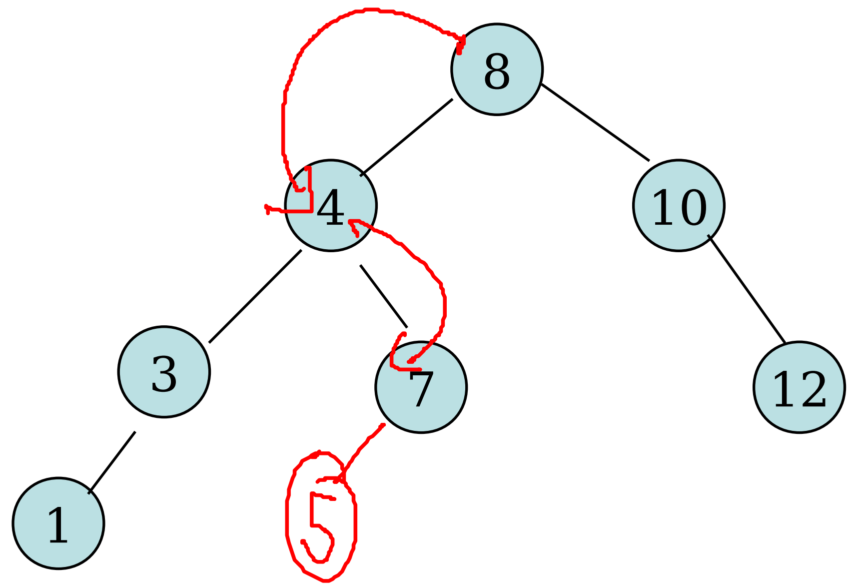
O(h)



Explique el código anterior

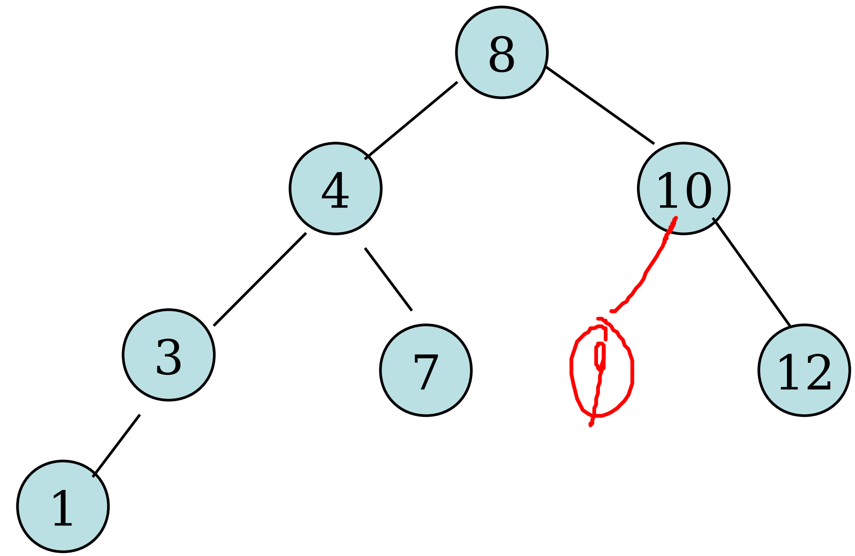
para el caso de TREE-SUCCESSOR(8)

```
TREE-INSERT(x)
  y←nil
  x←root[T]
  while x≠nil
     do y←x
         if key[z]<key[x]
            then x←left[x]
            else x←right[x]
  p[z]←y
  if y=nil
     then root[T]←z
     else if key[z]<key[y]
              then left[y]←z
              else right[y]←z
```



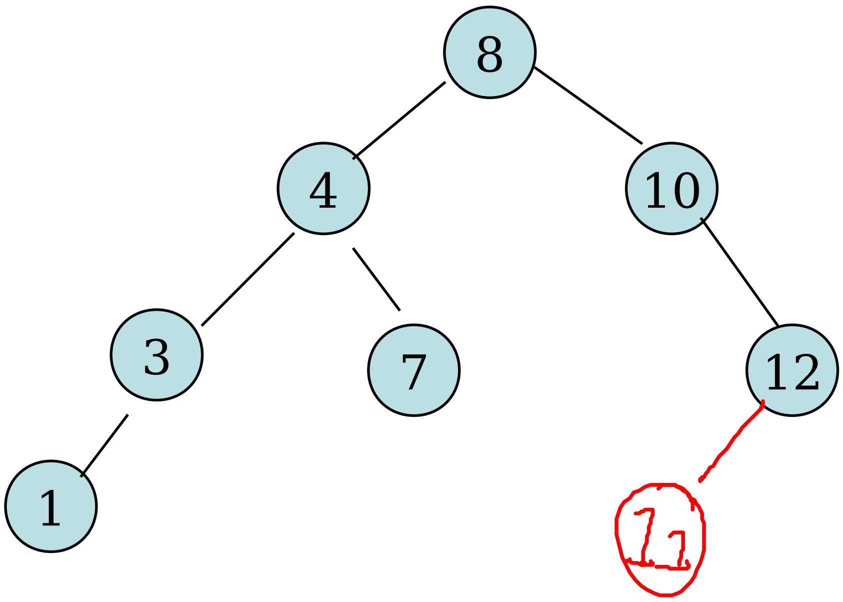
Explique el código para el caso de TREE-INSERT(z), donde key[z]=5

```
TREE-INSERT(x)
  y←nil
  x←root[T]
  while x≠nil
     do y←x
         if key[z]<key[x]
            then x←left[x]
            else x←right[x]
  p[z]←y
  if y=nil
     then root[T]←z
     else if key[z]<key[y]
              then left[y]←z
              else right[y]←z
```



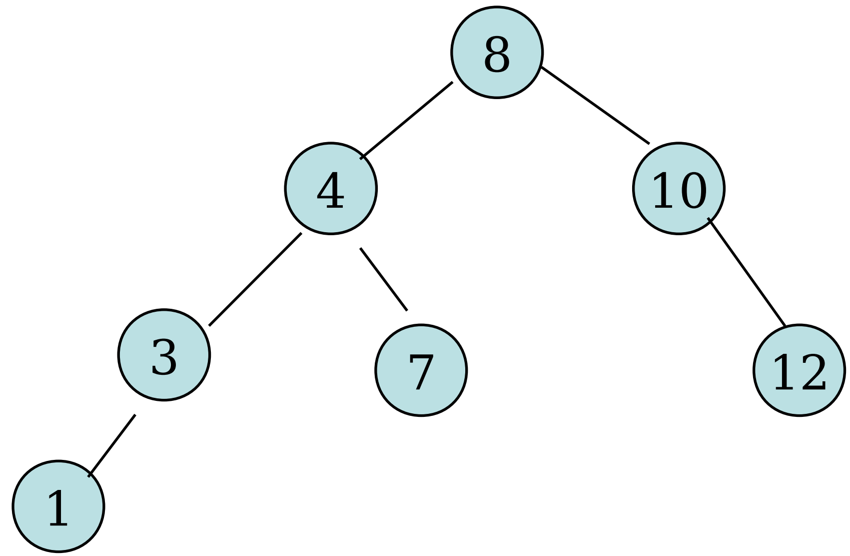
Explique el código para el caso de TREE-INSERT(z), donde key[z]=9

```
TREE-INSERT(x)
  y←nil
  x←root[T]
  while x≠nil
    do y←x
       if key[z]<key[x]
         then x←left[x]
         else x←right[x]
  p[z]←y
  if y=nil
    then root[T]←z
    else if key[z]<key[y]
           then left[y]←z
           else right[y]←z
```



Explique el código para el caso de TREE-INSERT(z), donde key[z]=11

```
TREE-INSERT(x)
  y←nil
  x←root[T]
  while x≠nil
     do y←x
         if key[z]<key[x]
            then x←left[x]
            else x←right[x]
  p[z]←y
  if y=nil
     then root[T]←z
     else if key[z]<key[y]
              then left[y]←z
              else right[y]←z
```



La complejidad es de O(h)

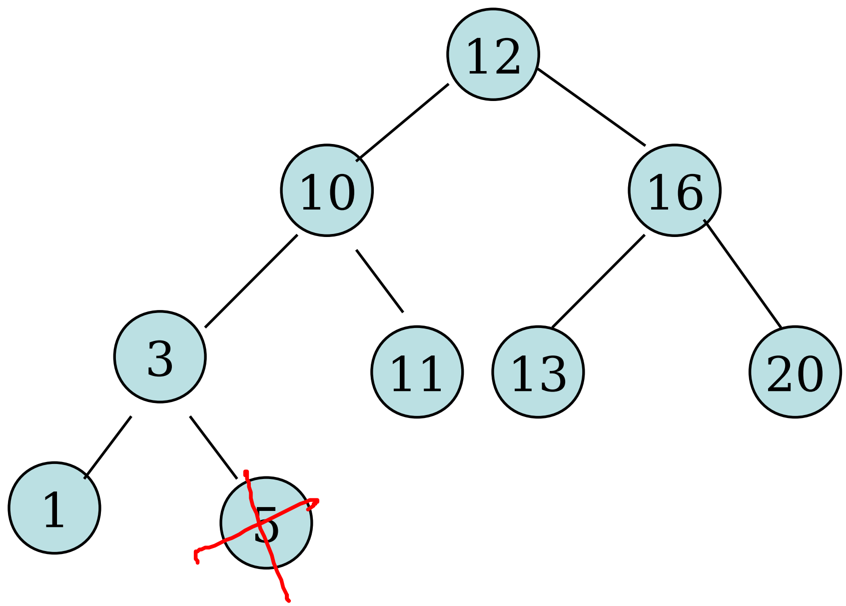
```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil
    then x←left[y]
    else x←right[y]
 if x≠nil
    then p[x]←p[y]
 if p[y]=nil
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
              then left[p[y]]←x
              else right[p[y]]←x
 if y≠z
    then key[z]←key[y]
 return y
```

Caso 1:

Borrar z y z no tiene hijos.

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=5

Qué se debe hacer?



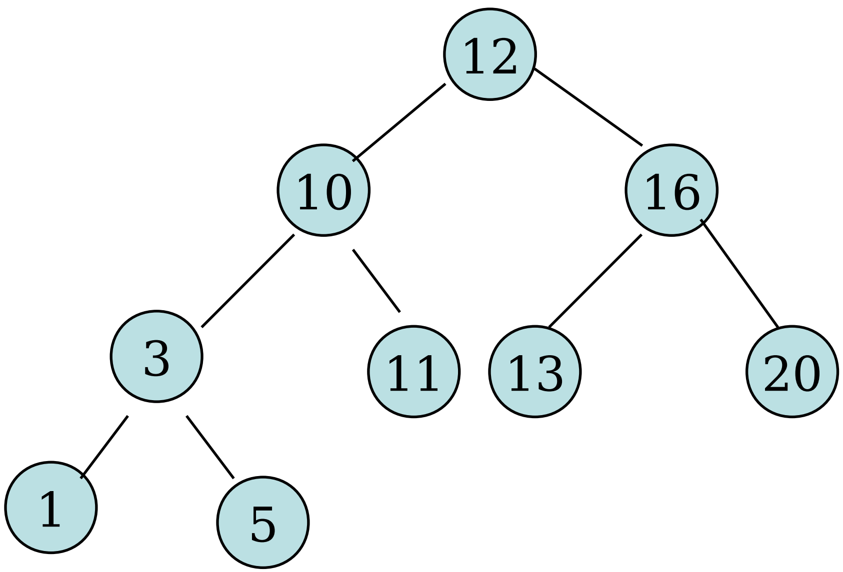
Caso 1:

Borrar z y z no tiene hijos.

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=5

El padre de z debe ahora apuntar a nil

p[z]←nil

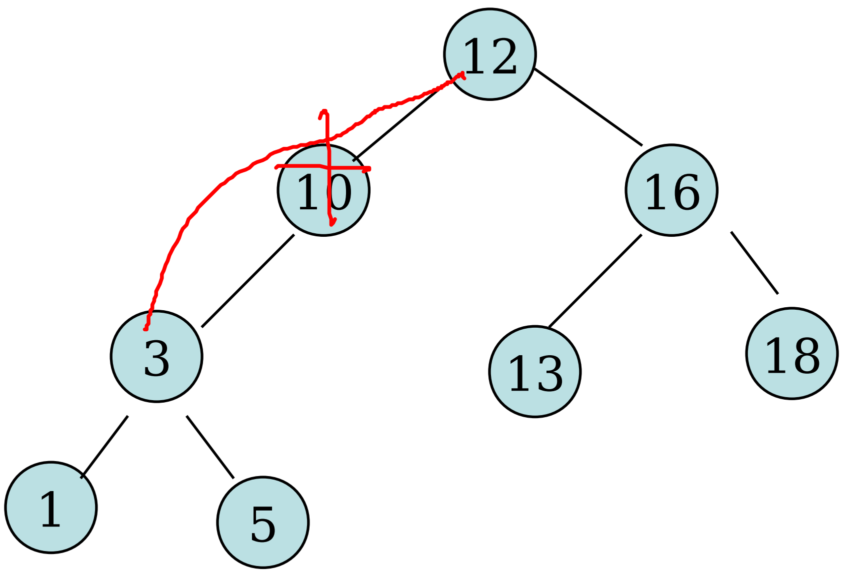


Caso 2:

Borrar z y z tiene un solo hijo

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=10

Qué se debe hacer?

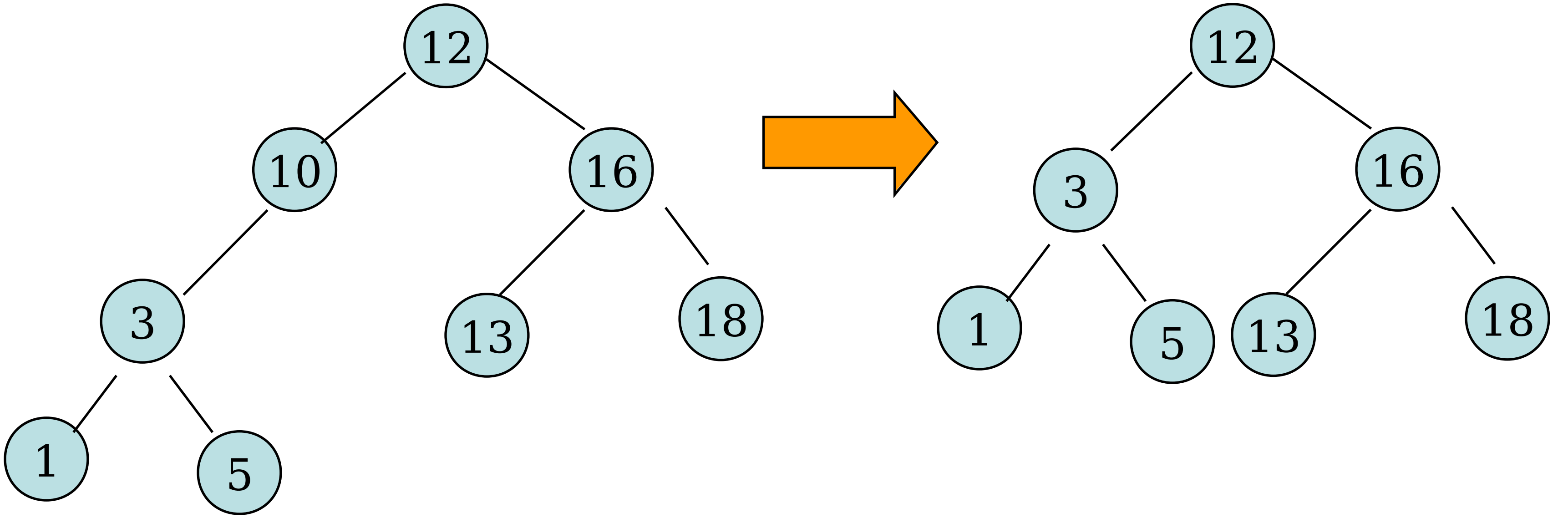


Caso 2:

Borrar z y z tiene un solo hijo

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=10

Se separa z del árbol

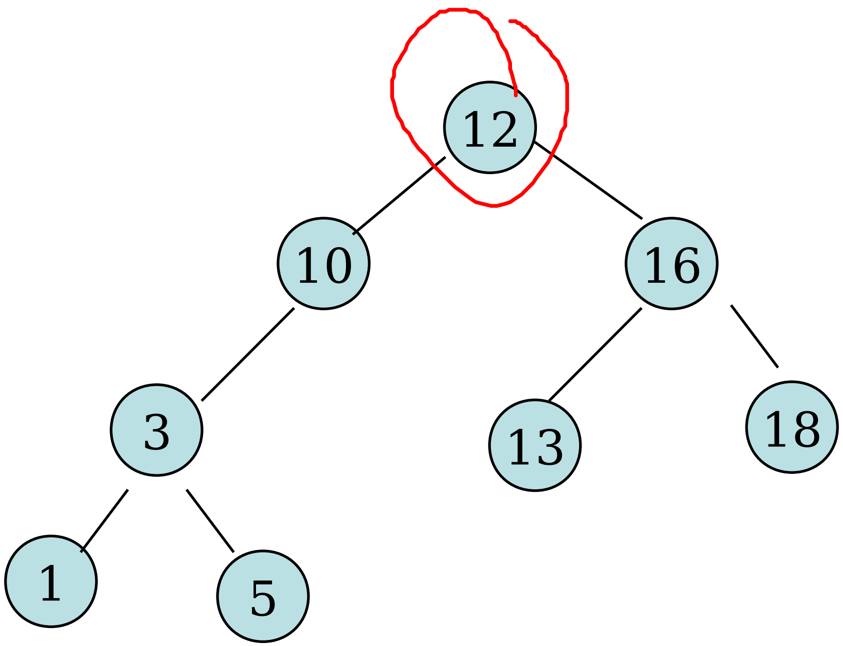


Caso 3:

Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Qué se debe hacer?

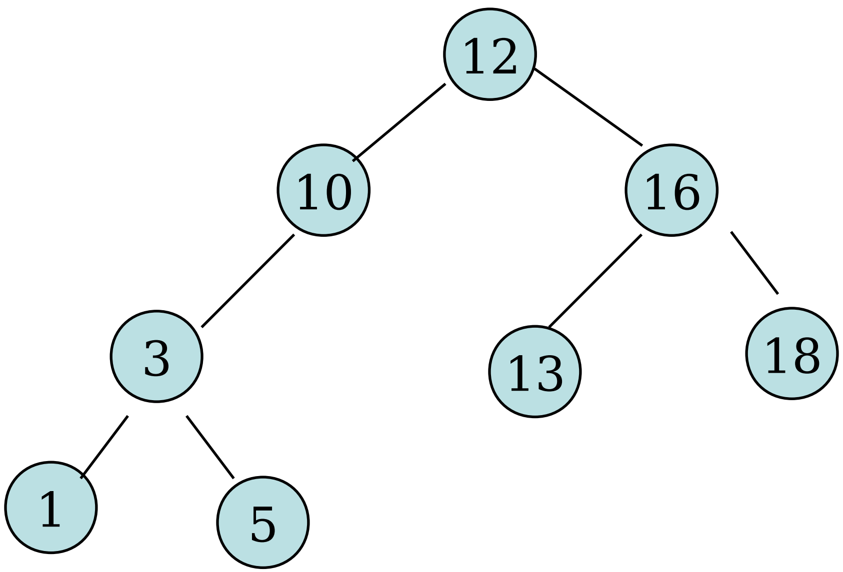


Caso 3:

Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Qué se debe hacer?



Caso 3:

Borrar z y z tiene dos hijos

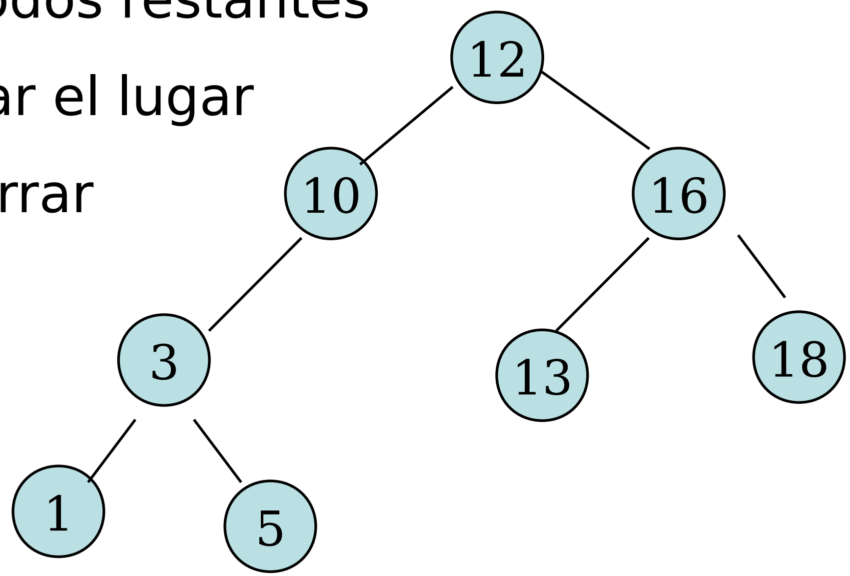
TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Qué se debe hacer?

Cuál de los nodos restantes

debería ocupar el lugar

del nodo a borrar



Caso 3:

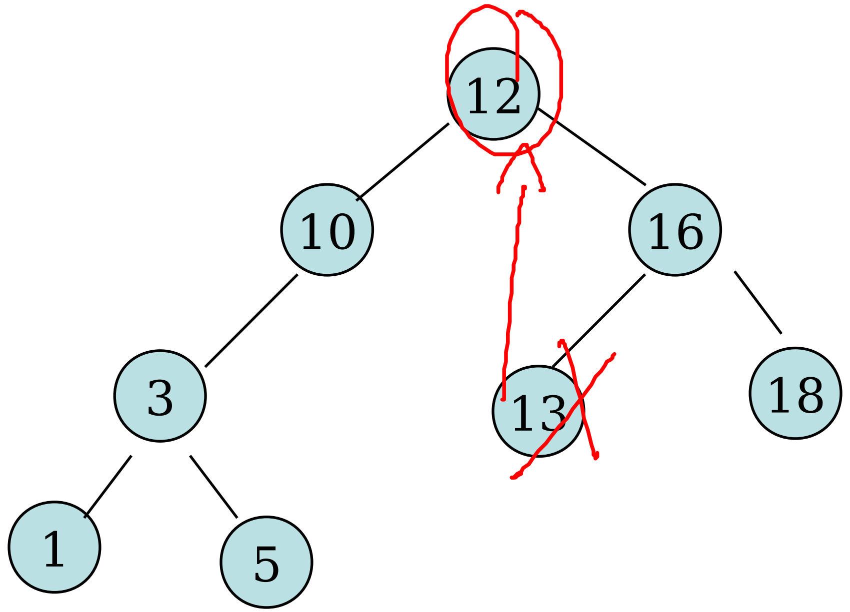
Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Se separa(elimina) su sucesor y del árbol

y se reemplaza su contenido con el

de z



Caso 3:

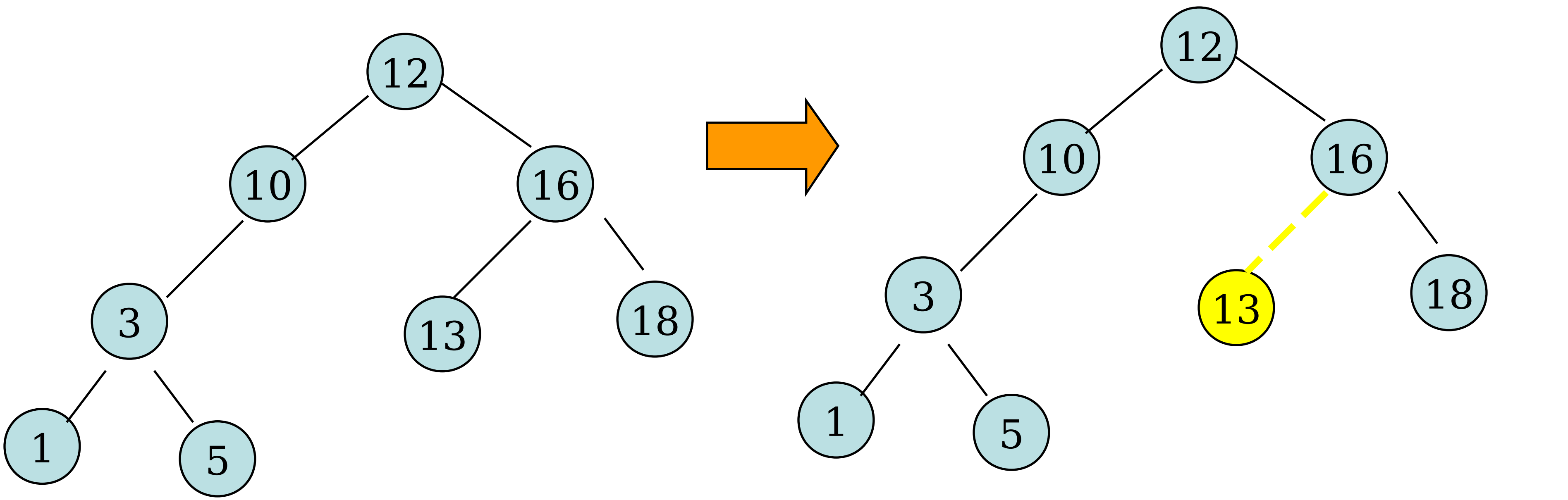
Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

Se separa(elimina) su sucesor y del árbol

y se reemplaza su contenido con el

de z



Caso 3:

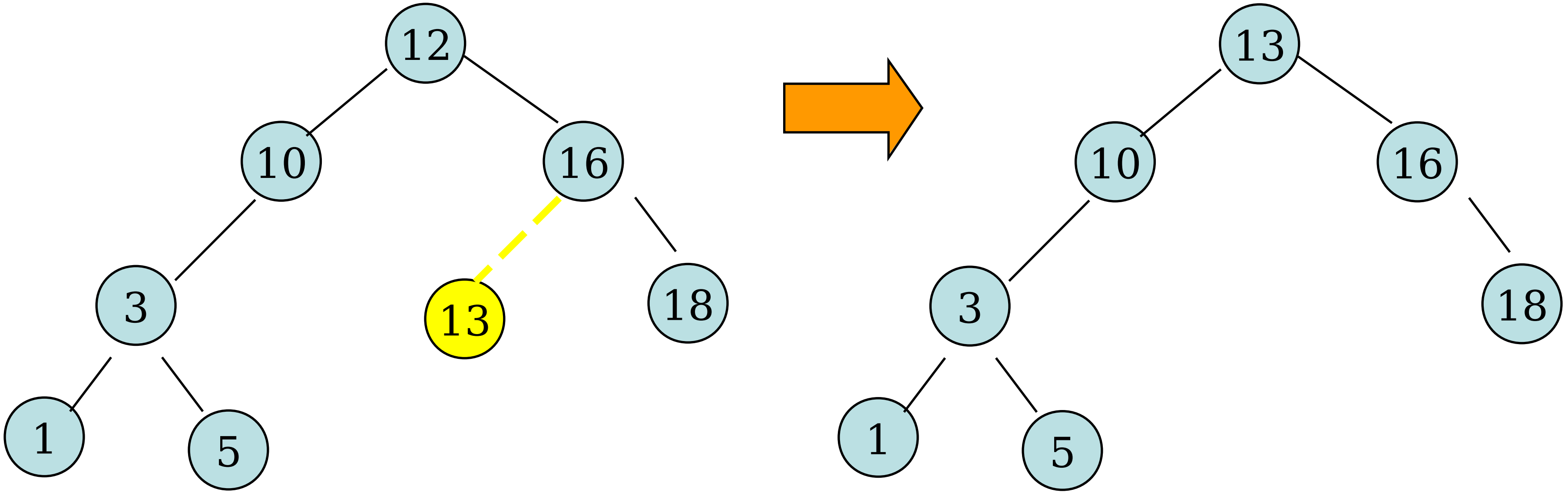
Borrar z y z tiene dos hijos

TREE-DELETE(T,z), donde key[z]=12

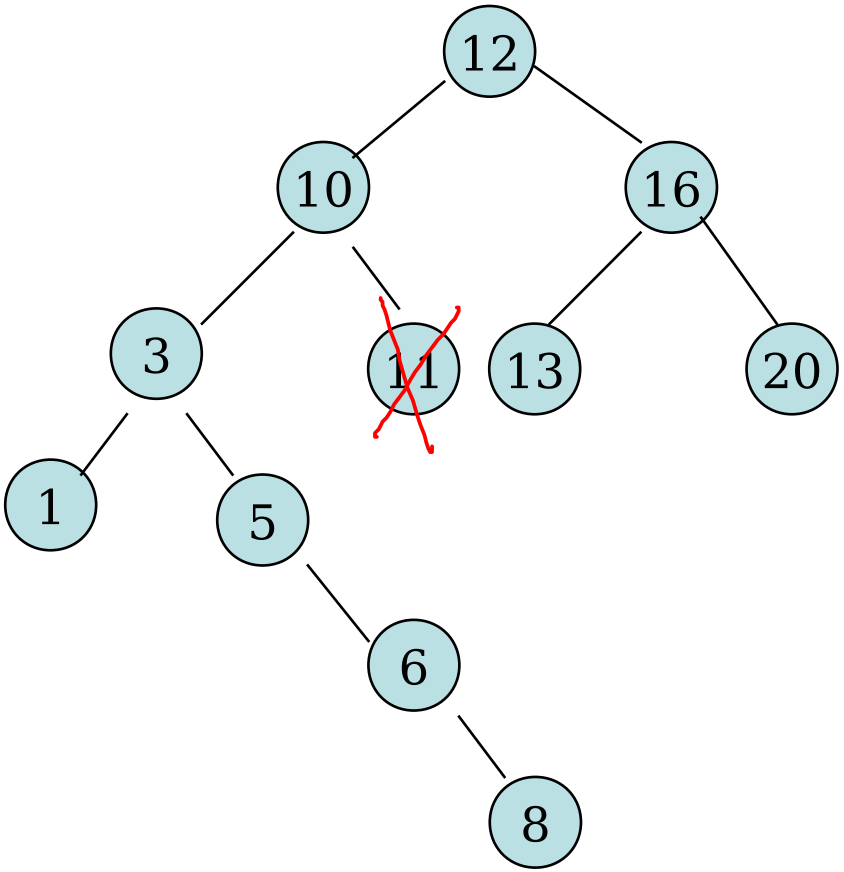
Se <u>separa(elimina)</u> su sucesor y del árbol

y se reemplaza su contenido con el

de z

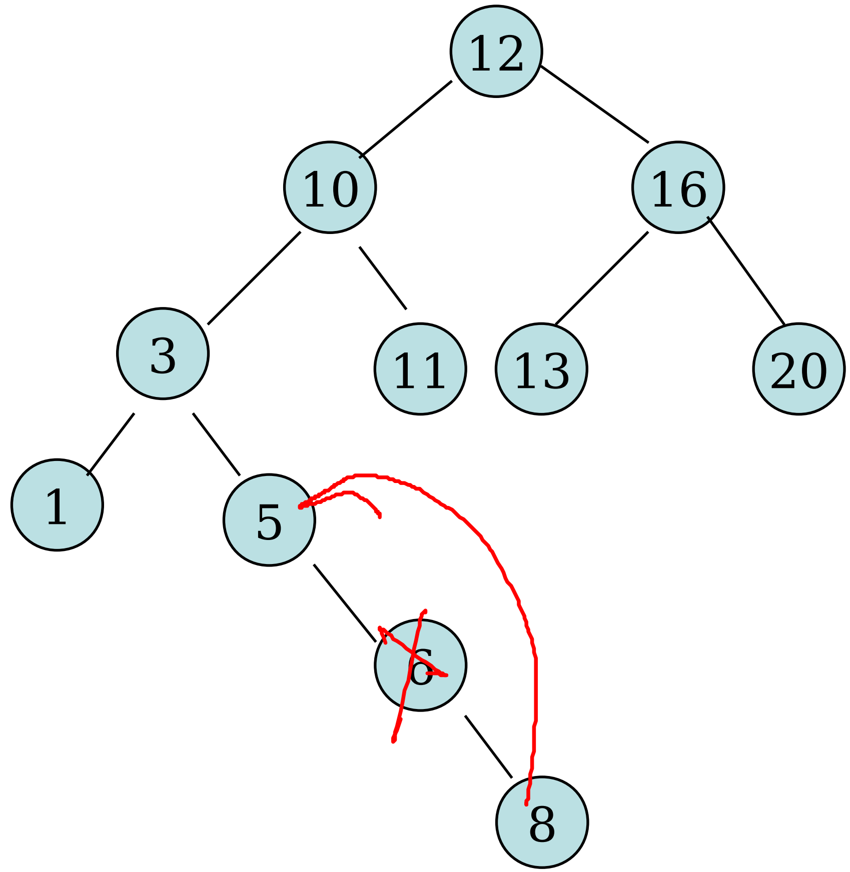


```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil
    then x←left[y]
    else x←right[y]
 if x≠nil
    then p[x]←p[y]
 if p[y]=nil
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
              then left[p[y]]←x
              else right[p[y]]←x
 if y≠z
    then key[z]←key[y]
 return y
```



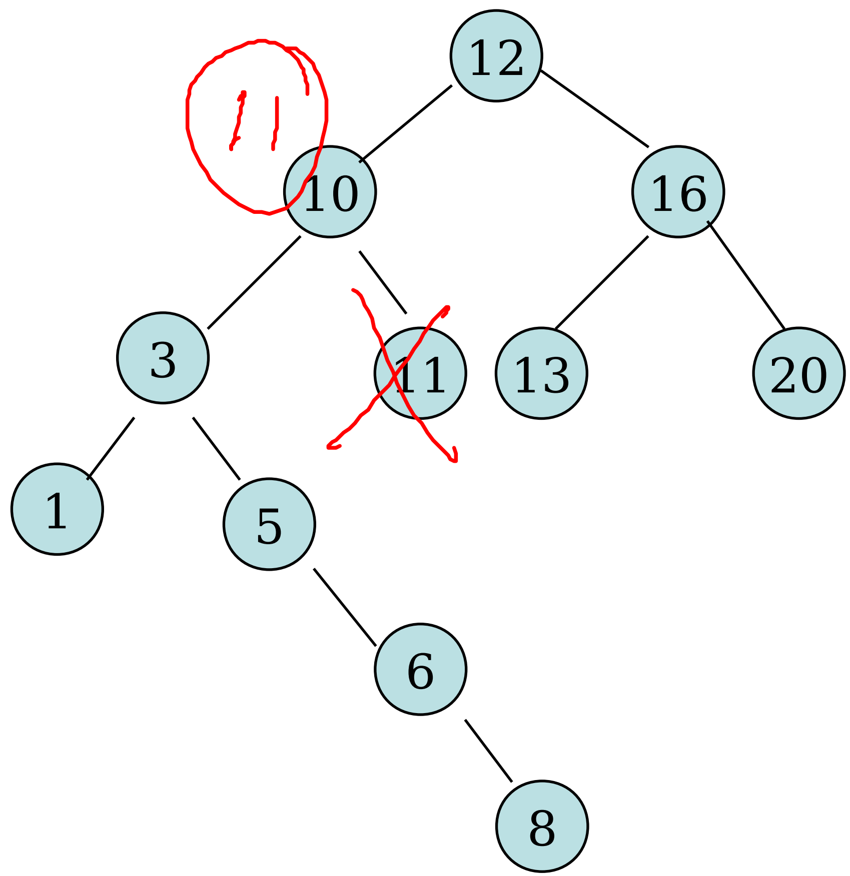
Siga el algoritmo TREE-DELETE(T,z) donde z es el nodo tal que key[z]=11

```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil
    then x←left[y]
    else x←right[y]
 if x≠nil
    then p[x]←p[y]
 if p[y]=nil
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
              then left[p[y]]←x
              else right[p[y]]←x
 if y≠z
    then key[z]←key[y]
 return y
```



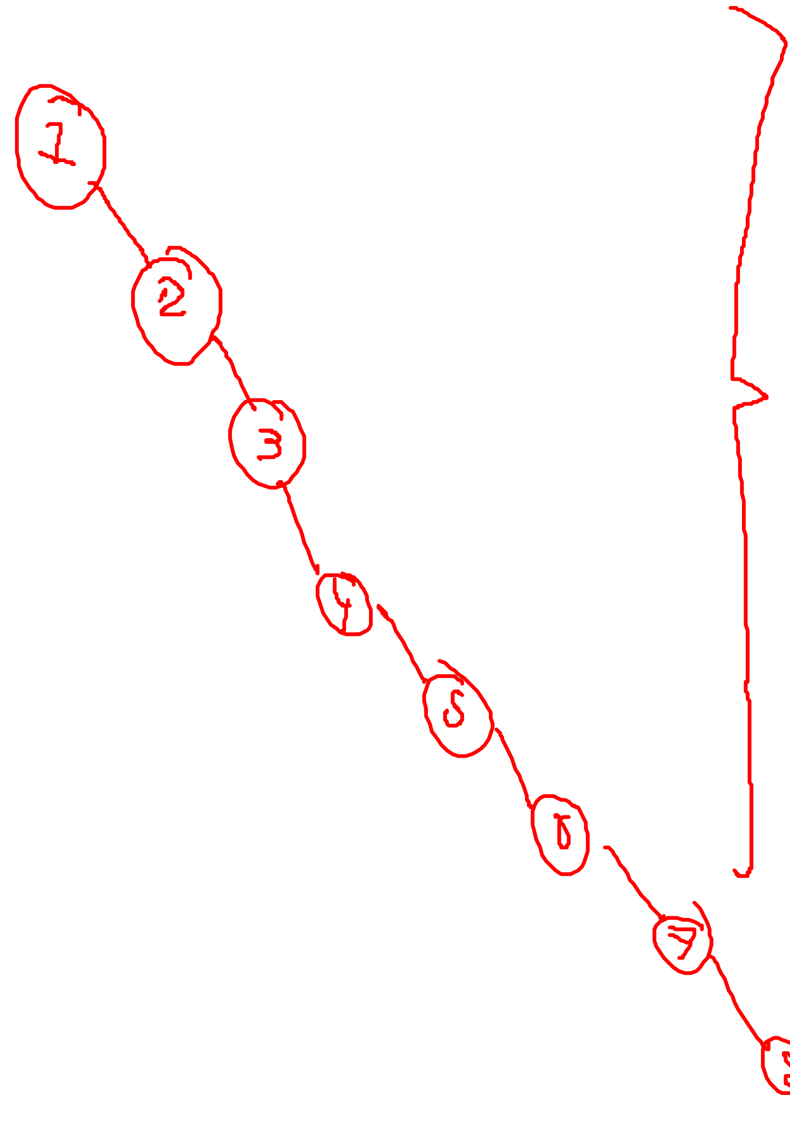
Siga el algoritmo TREE-DELETE(T,z) donde z es el nodo tal que key[z]=6

```
TREE-DELETE(x)
 if left[z]=nil or right[z]=nil
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil
    then x←left[y]
    else x←right[y]
 if x≠nil
    then p[x]←p[y]
 if p[y]=nil
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
              then left[p[y]]←x
              else right[p[y]]←x
 if y≠z
    then key[z]←key[y]
 return y
```



Siga el algoritmo TREE-DELETE(T,z) donde z es el nodo tal que key[z]=10

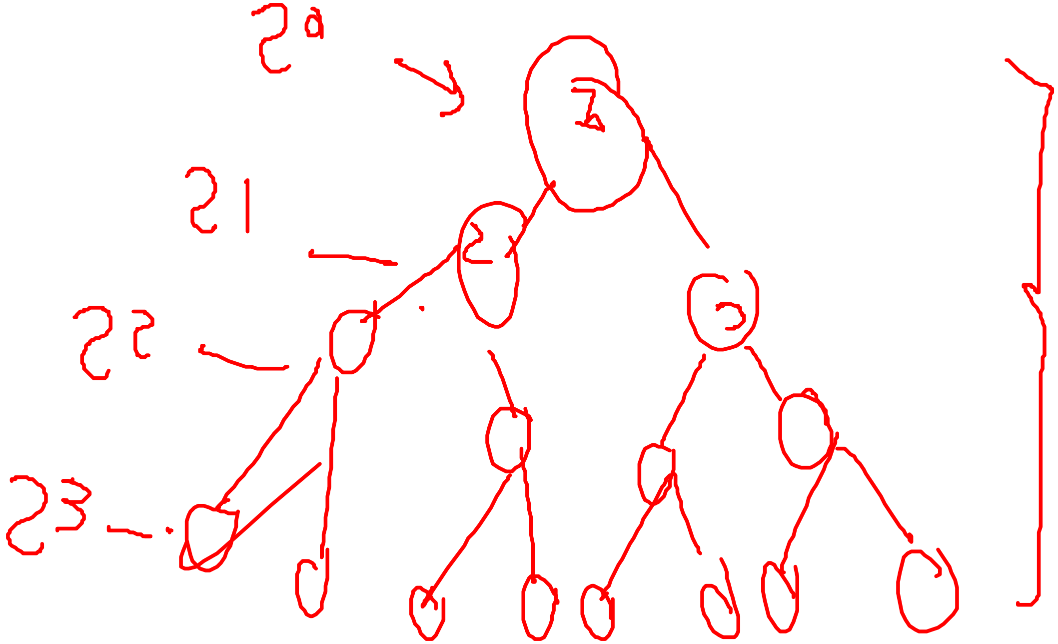
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10



$O(n)$

$h \simeq n$

15



$\log_2(n) = h$

$\log_2(15) \approx 3$

$O(\log(n))$

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 12

Gracias

Próximo tema:

Estructuras de datos: Arboles rojinegros