

# Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

[oscar.bedoya@correounivalle.edu.co](mailto:oscar.bedoya@correounivalle.edu.co)

Carlos Andres Delgado

[Carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co](mailto:Carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co)

- \* Definición de función
- \* Dominio, Codominio y Rango
- \* Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- \* Función inversa
- \* Composición de funciones
- \* Funciones piso y techo
- \* Funciones característica

# Funciones

---

## Noción de función

- Una función permite representar la relación entre dos conjuntos

# Funciones

---

## Noción de función

- Una función permite representar la relación entre dos conjuntos

$A = \{\text{Arias, Benavides, Calero, Cardona, Navarrete}\}$

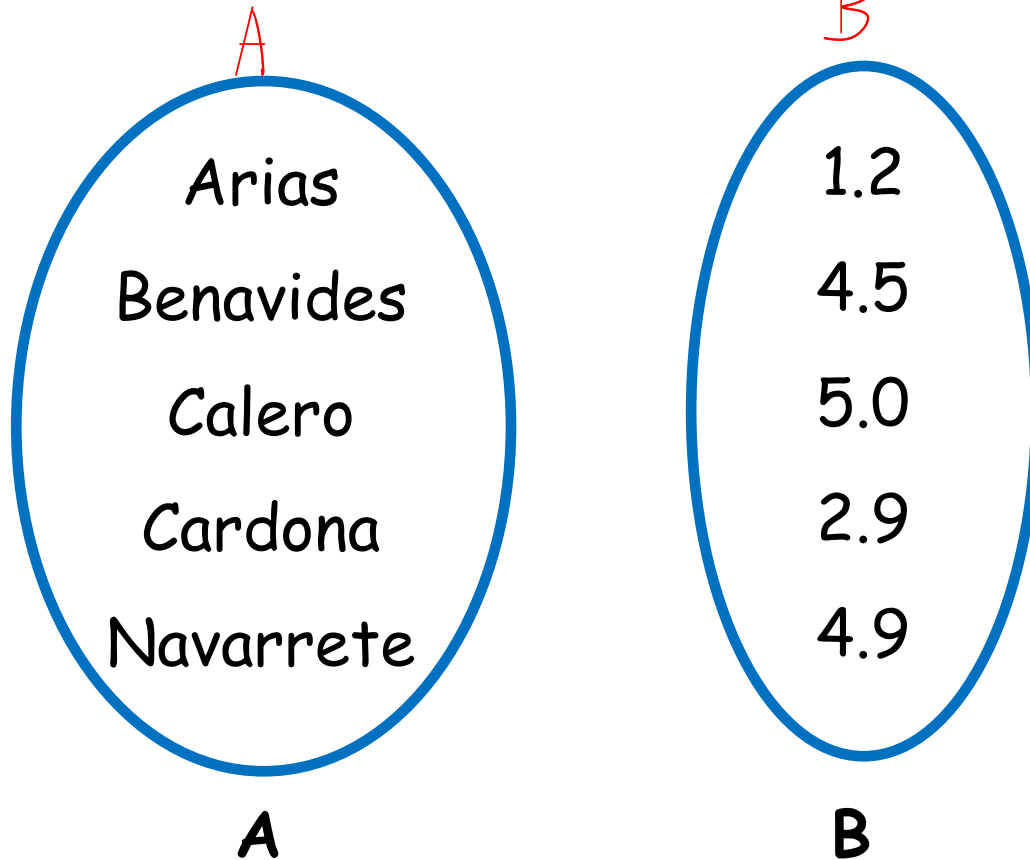
$B = \{1.2, 2.9, 4.5, 4.9, 5.0\}$

# Funciones

---

## Noción de función

- Una función permite representar la relación entre dos conjuntos

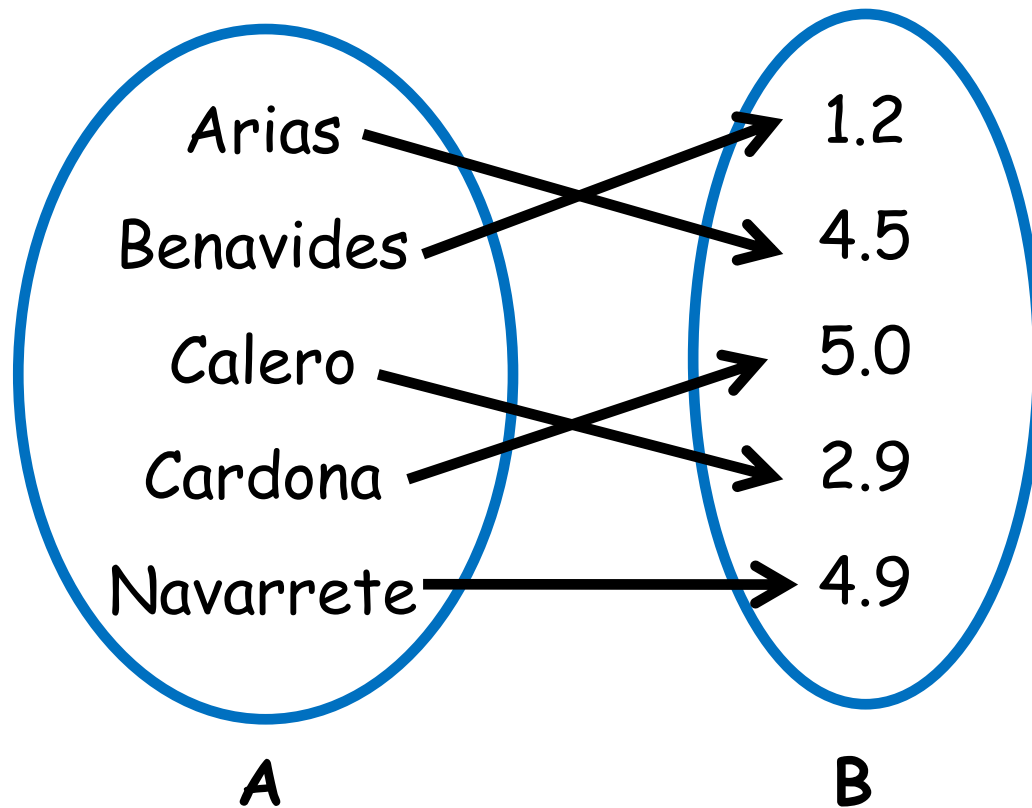


# Funciones

---

## Noción de función

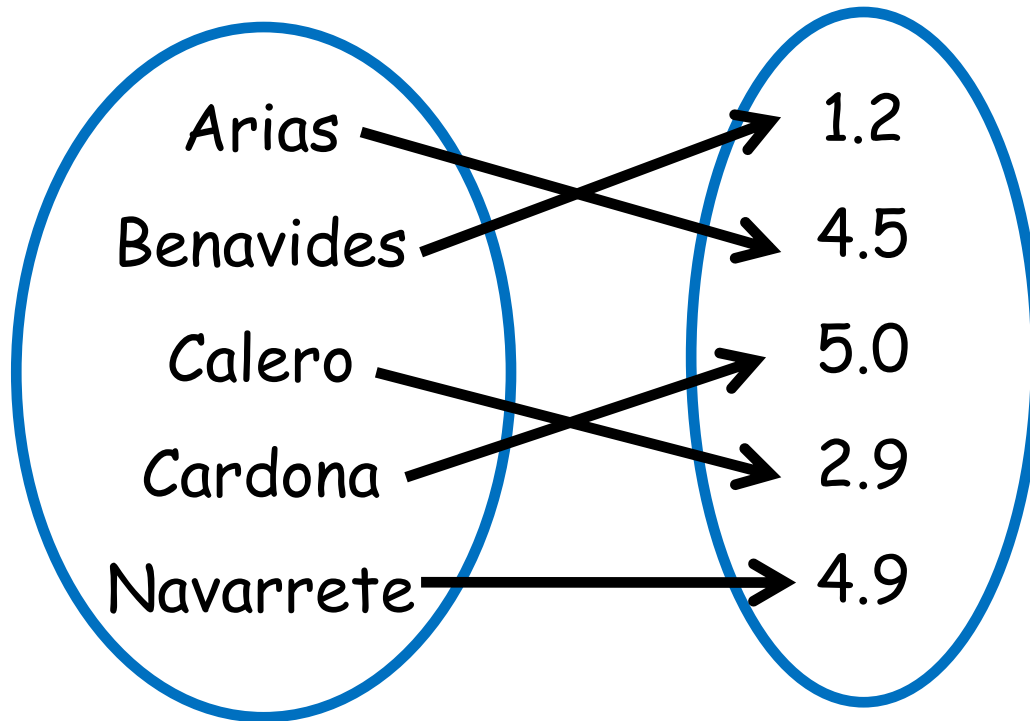
- Una función permite representar la relación entre dos conjuntos



# Funciones

## Noción de función

- Una función permite representar la relación entre dos conjuntos



$$f(\text{Arias})=4.5$$

$$f(\text{Benavides})=1.2$$

$$f: A \rightarrow B$$

# Funciones

---

## Función

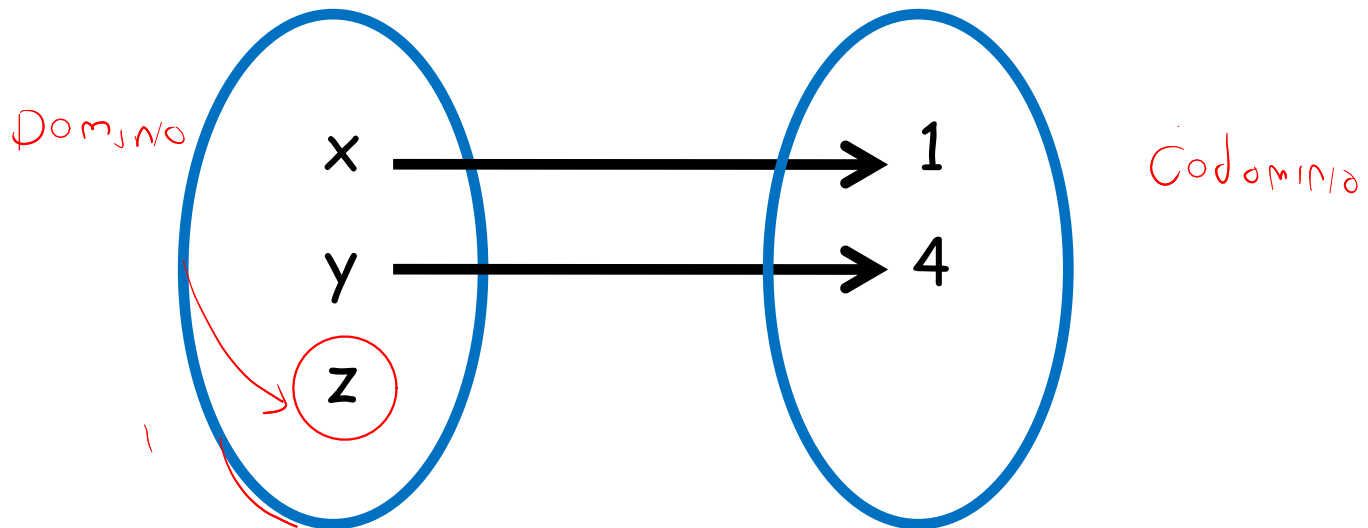
- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



# Funciones

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

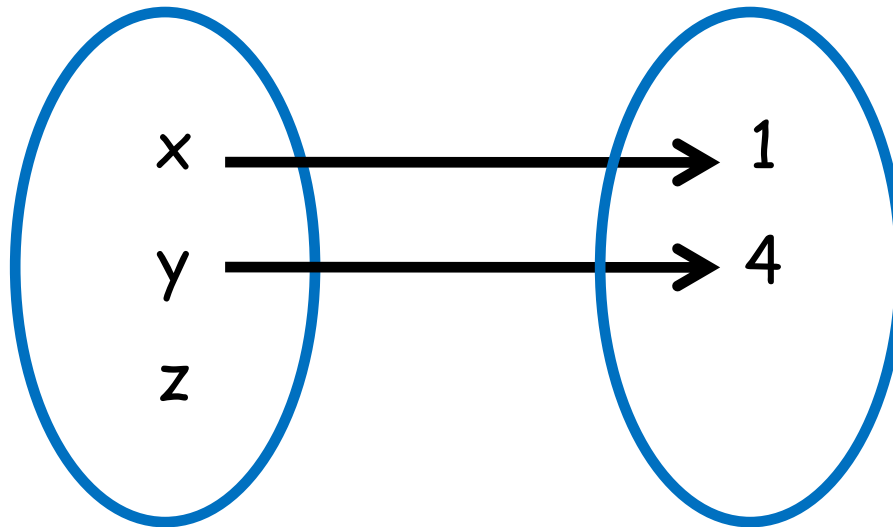


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



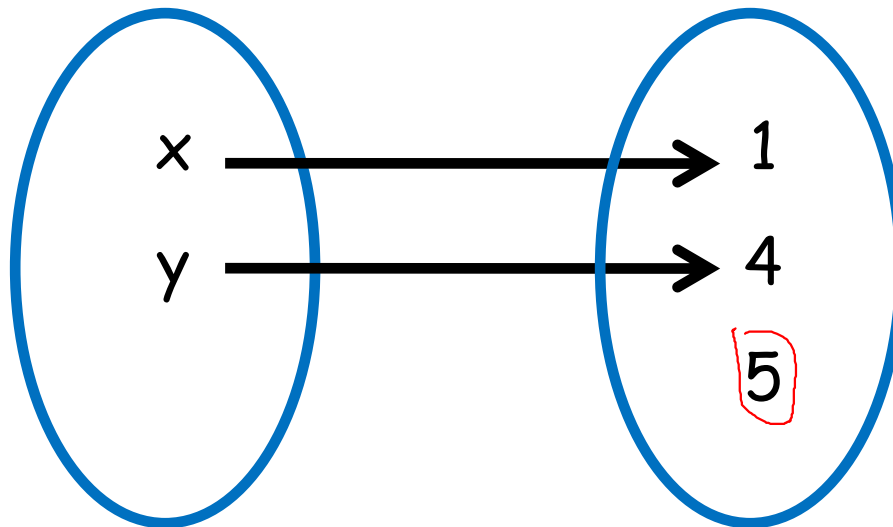
No es función porque  $z$  debe tener un valor asignado en  $B$

# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

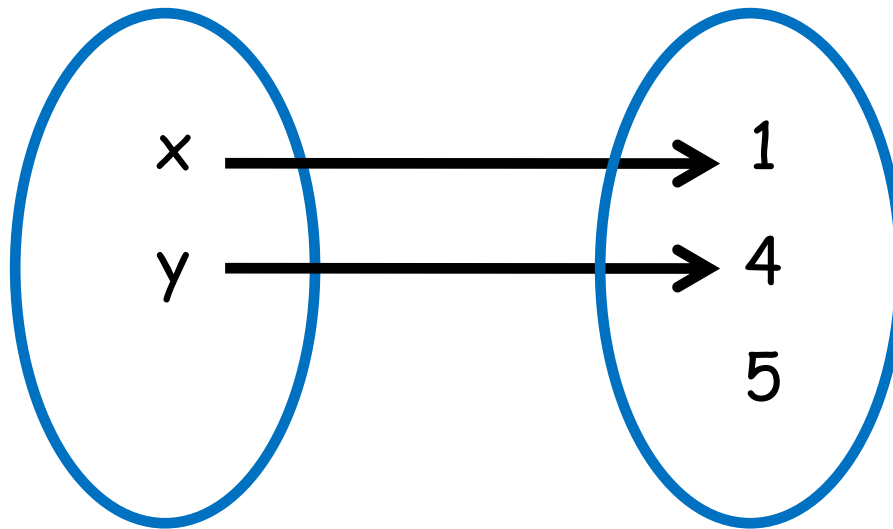


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

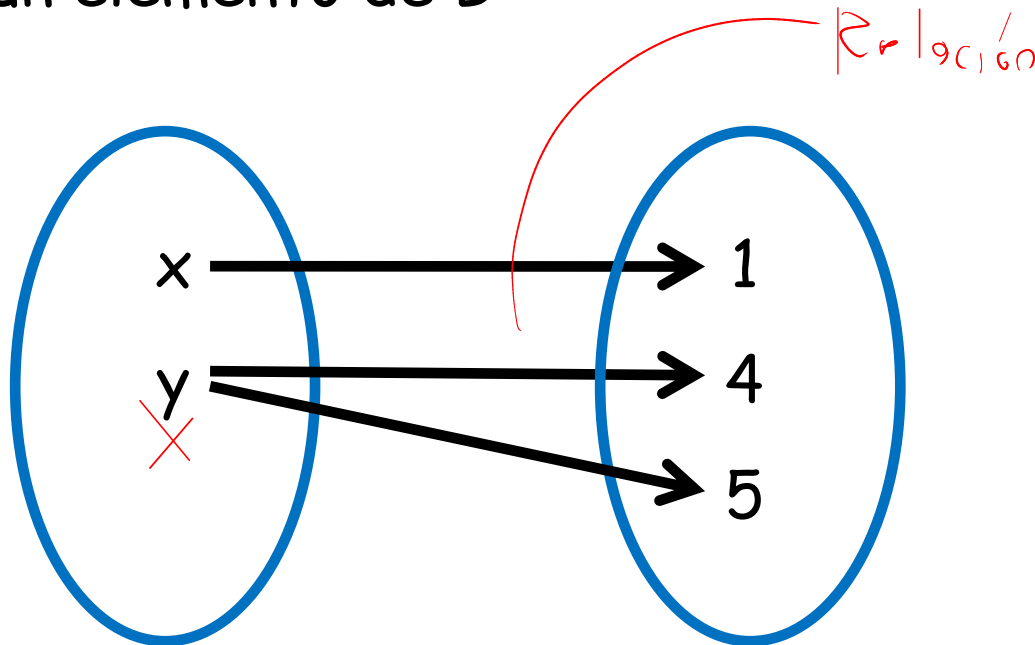


$$f(x)=1, f(y)=4$$

# Funciones

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

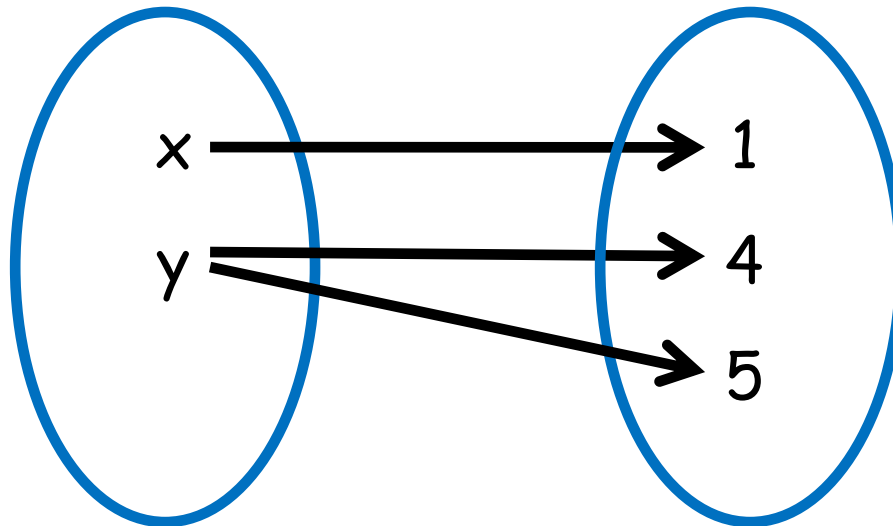


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



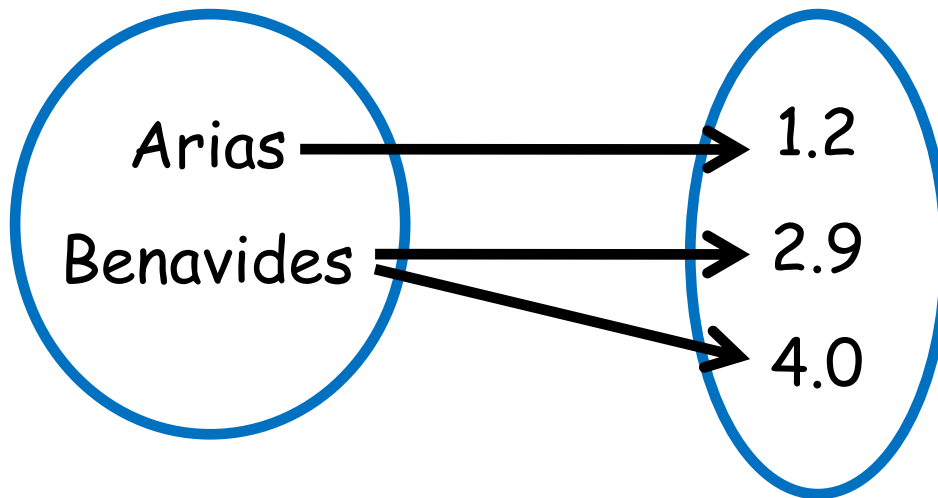
No es función porque debe asignarse exactamente un elemento de  $B$

# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

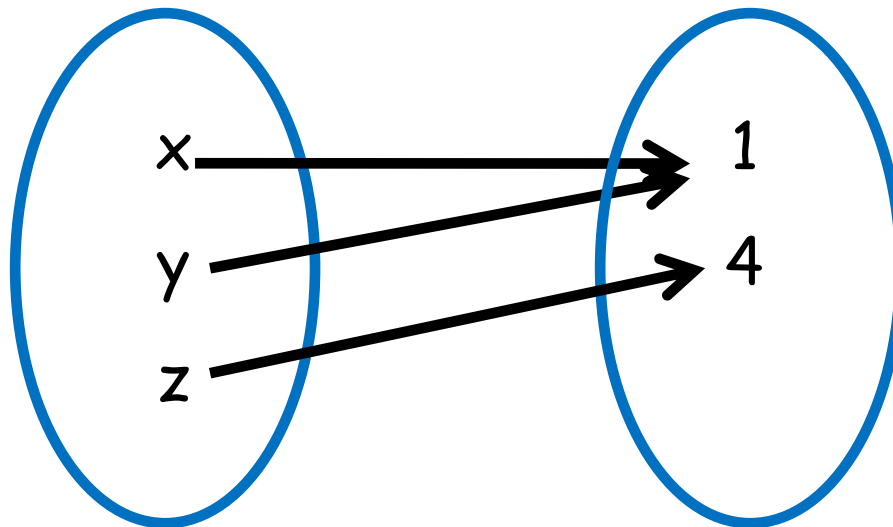


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



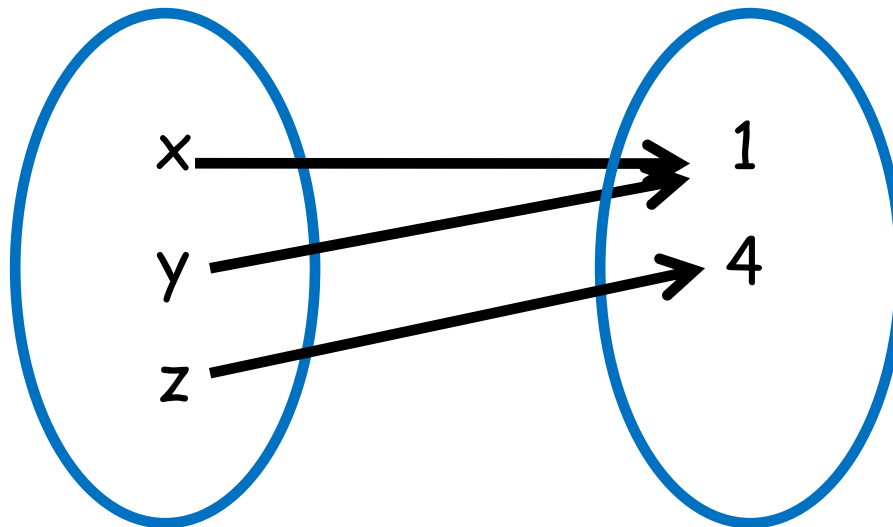


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



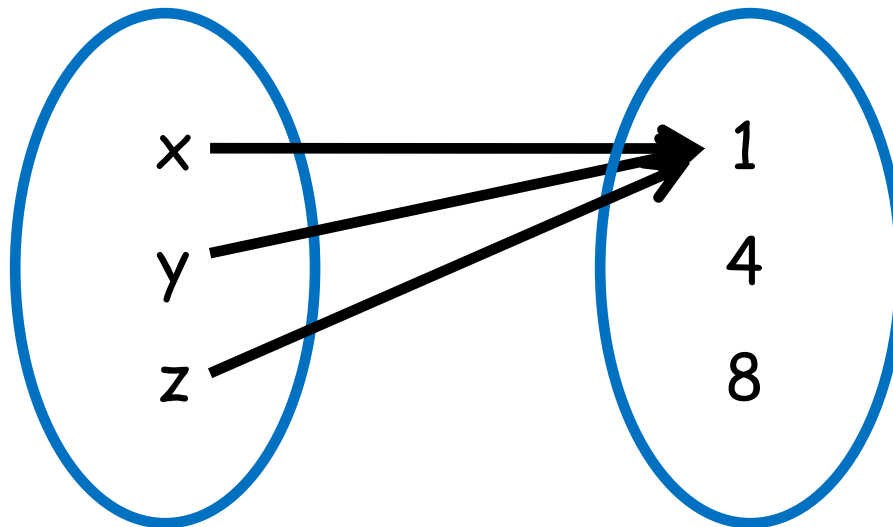
$$f(x)=1, f(y)=1, f(z)=4$$

# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

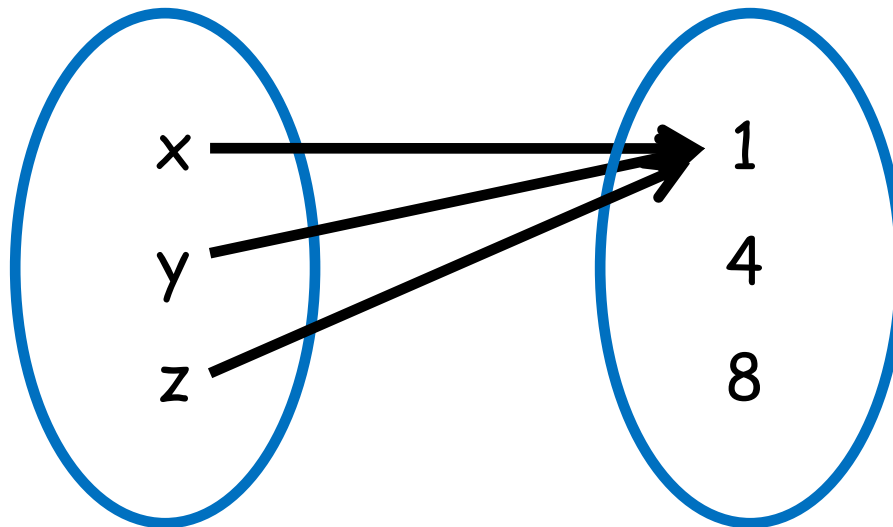


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



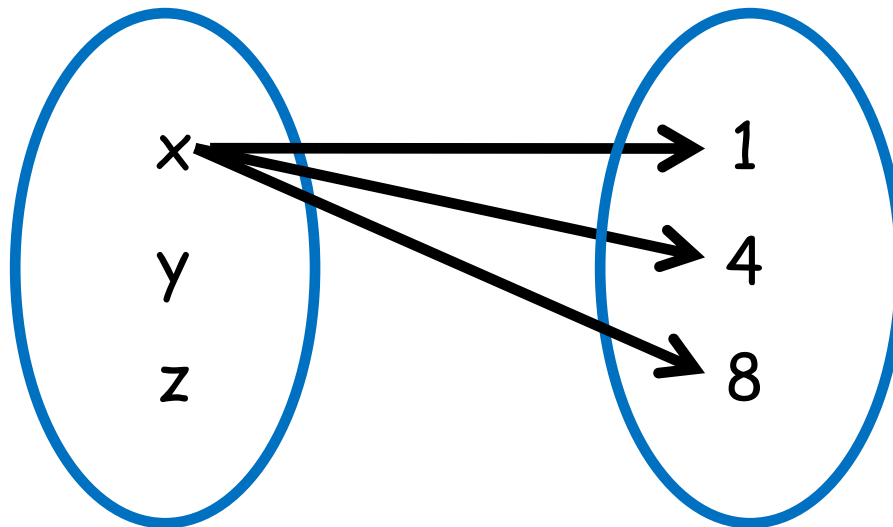
$$f(x)=1, f(y)=1, f(z)=1$$

# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$

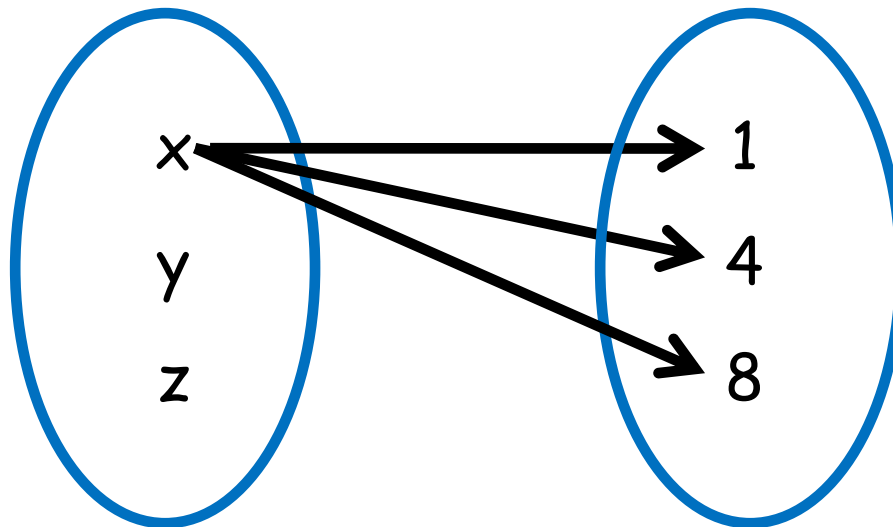


# Funciones

---

## Función

- Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  a  $B$ , denotada como  $f: A \rightarrow B$ , asigna a cada elemento de  $A$  exactamente un elemento de  $B$



No es función

# Funciones

---

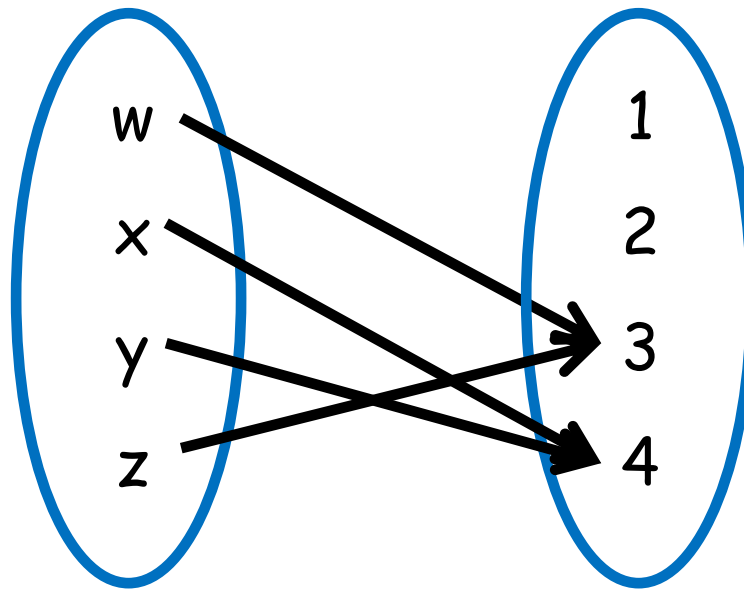
Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{w,x,y,z\}$  y  $B=\{1,2,3,4\}$  es una función.

$$f(w)=3, f(x)=4, f(y)=4, f(z)=3$$

# Funciones

Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{w,x,y,z\}$  y  $B=\{1,2,3,4\}$  es una función.

$$f(w)=3, f(x)=4, f(y)=4, f(z)=3$$



$$\text{Dom} = \{w, x, y, z\}$$

$$\text{Cod} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Rango} = \{3, 4\}$$

$$\underline{\text{Rango} \subseteq \text{Cod}}$$

Es función

# Funciones

---

Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{a,b,c,d\}$  y  $B=\{a,b,c,d\}$  es una función.

$$f(c)=d, f(a)=c, f(b)=a, f(c)=b, f(d)=c$$

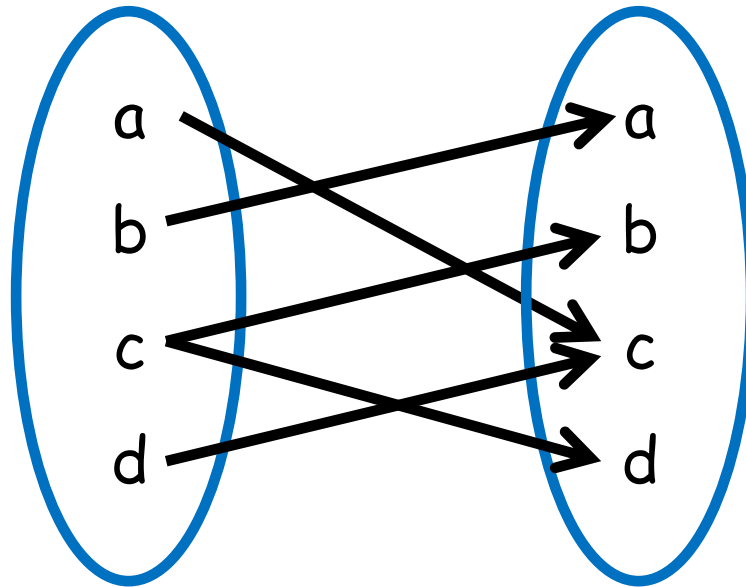


# Funciones

---

Indique si la siguiente relación entre los conjuntos  $A=\{a,b,c,d\}$  y  $B=\{a,b,c,d\}$  es una función.

$f(c)=d$ ,  $f(a)=c$ ,  $f(b)=a$ ,  $f(c)=b$ ,  $f(d)=c$



**No es función**

# Funciones

---

Las funciones se pueden especificar por medio de fórmulas, por ejemplo,

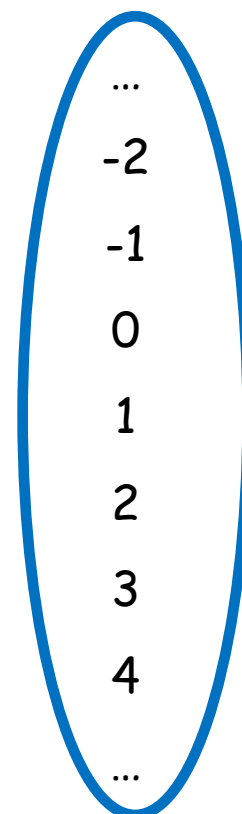
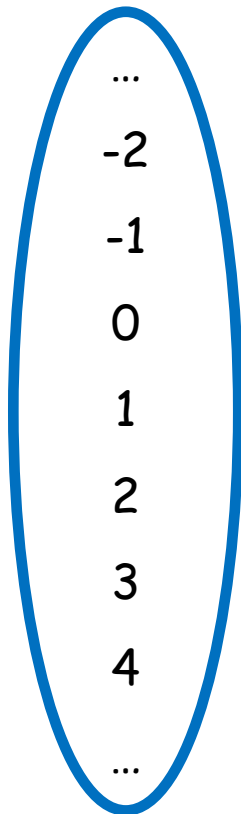
$$f(x)=x+1, \text{ de } \overset{A}{\mathbb{Z}} \text{ a } \overset{B}{\mathbb{Z}}$$

# Funciones

---

Las funciones se pueden especificar por medio de fórmulas, por ejemplo,

$$f(x)=x+1, \text{ de } \mathbb{Z} \text{ a } \mathbb{Z}$$

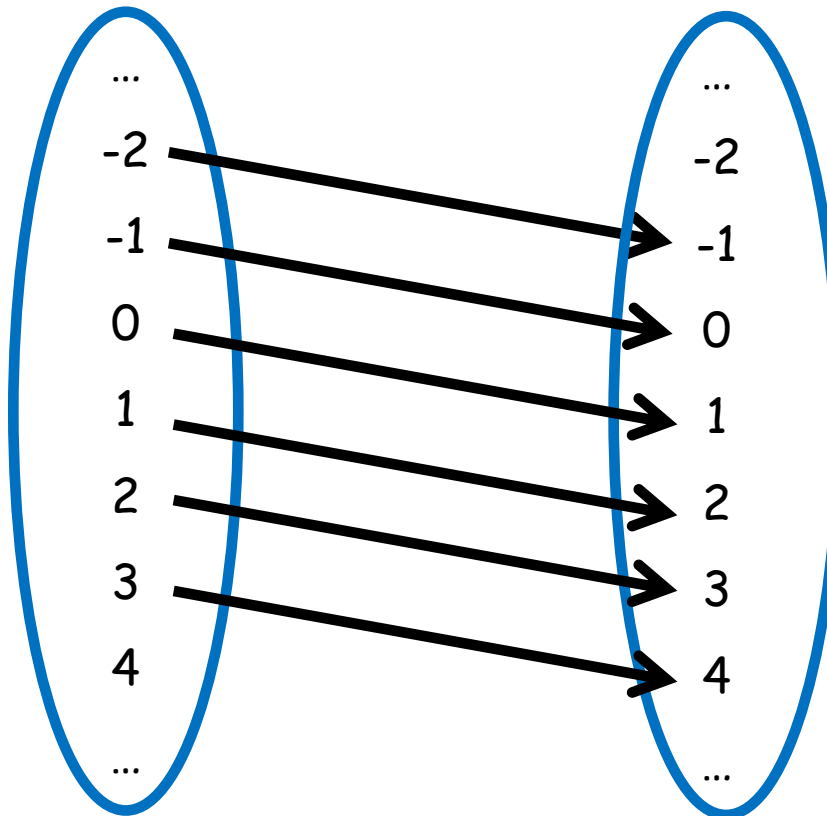


# Funciones

---

Las funciones se pueden especificar por medio de fórmulas, por ejemplo,

$$f(x)=x+1, \text{ de } \mathbb{Z} \text{ a } \mathbb{Z}$$



# Funciones

Indique si cada  $f$  es, o no, una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ :

- $f(x)=1/x$  •  $x=0 \quad f(x) \xrightarrow{\text{ind}} \text{NO ES}$
- $f(x)=\sqrt{x}$  •  $\sqrt{x} \quad x < 0 \quad \sqrt{x} \in \mathbb{C} \quad \text{NO ES}$
- $f(x)=\pm x$  •  $\pm x \quad x=2 \quad f(\pm x) = -2, 2 \quad \text{NO ES}$
- $f(x)=x^2+1$  • SI ES FUNCION

# Funciones

---

Indique si cada  $f$  es, o no, una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ :

- $f(x)=1/x$ . **no es una función** porque  $f(0)$  no está definida
- $f(x)=\sqrt{x}$ . **no es una función** porque  $f(-1)$  no está definida
- $f(x)=\pm x$ . **no es una función** porque asigna dos valores a  $x$
- $f(x)=x^2+1$ . **si es una función**

# Funciones

---

## Dominio, Codominio y Rango

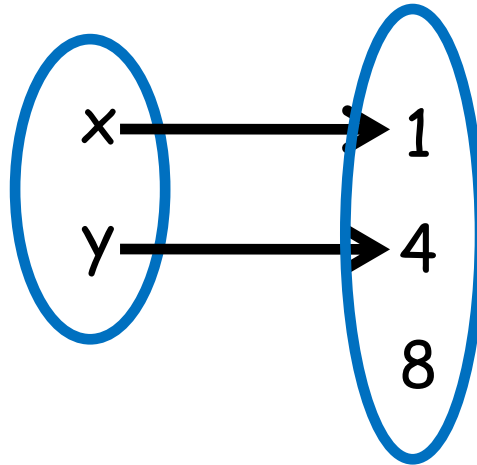
Si  $f$  es una función de  $A$  a  $B$ , se dice que:  $f: A \rightarrow B$

- $A$  es el **dominio**
- $B$  es el **codominio**  $\text{Rango}(B) \subseteq \text{Cod}$
- El **rango** de  $f$  es el conjunto de todas las imágenes de los elementos de  $A$ . Si  $f(a)=b$  se dice que  $b$  es la imagen de  $a$

# Funciones

---

Indique el dominio, codominio y rango de la siguiente función:



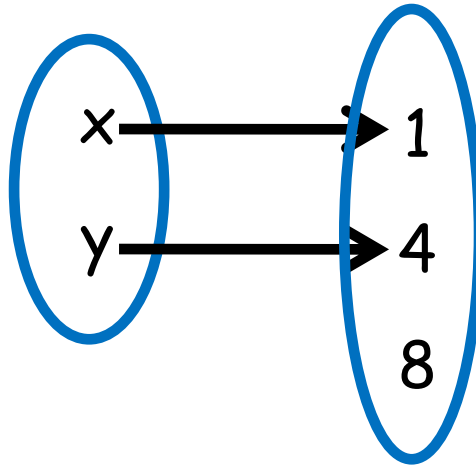


# Funciones

---

Indique el dominio, codominio y rango de la siguiente función:

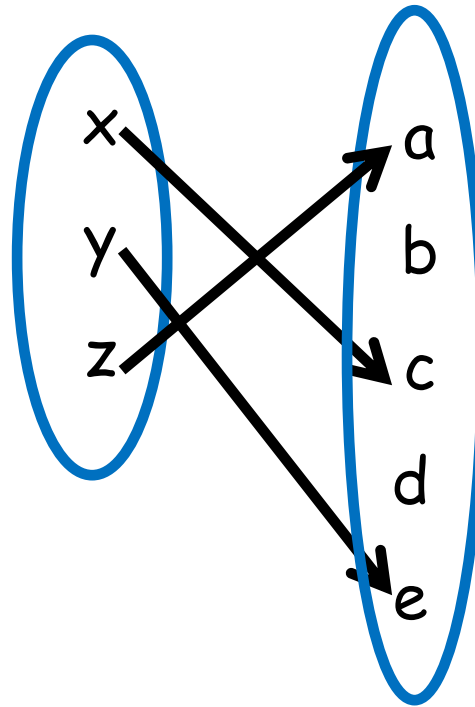
- **Dominio** =  $\{x, y\}$
- **Codominio** =  $\{1, 4, 8\}$
- **Rango** =  $\{1, 4\}$



# Funciones

---

Indique el dominio, codominio y rango de la siguiente función:

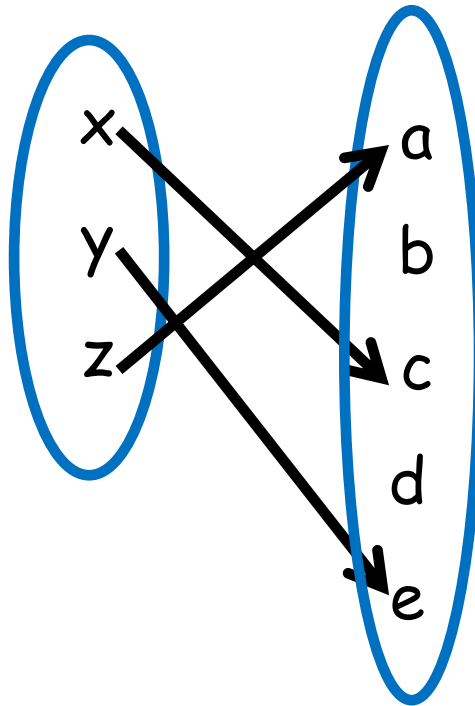


# Funciones

---

Indique el dominio, codominio y rango de la siguiente función:

- **Dominio** =  $\{x, y, z\}$
- **Codominio** =  $\{a, b, c, d, e\}$
- **Rango** =  $\{a, c, e\}$



# Funciones

---

Indique el rango de la siguiente función:

- $f(x)=x^2$ , de los reales a los reales

$\hookrightarrow$   $\mathbb{D}$        $\hookrightarrow$   $\mathbb{C}$

Rango: Reales positivos  $\cup$  0.

# Funciones

---

Indique el rango de la siguiente función:

- $f(x)=x^2$ , de los reales a los reales
  - Dominio= $\mathbb{R}$
  - Codominio= $\mathbb{R}$
  - Rango= $\mathbb{R}^+ \cup 0$

# Funciones

---

Indique el rango de la siguiente función:

- $f(x)=x^2+4$  de los reales a los reales

$$| \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 4$$

# Funciones

---

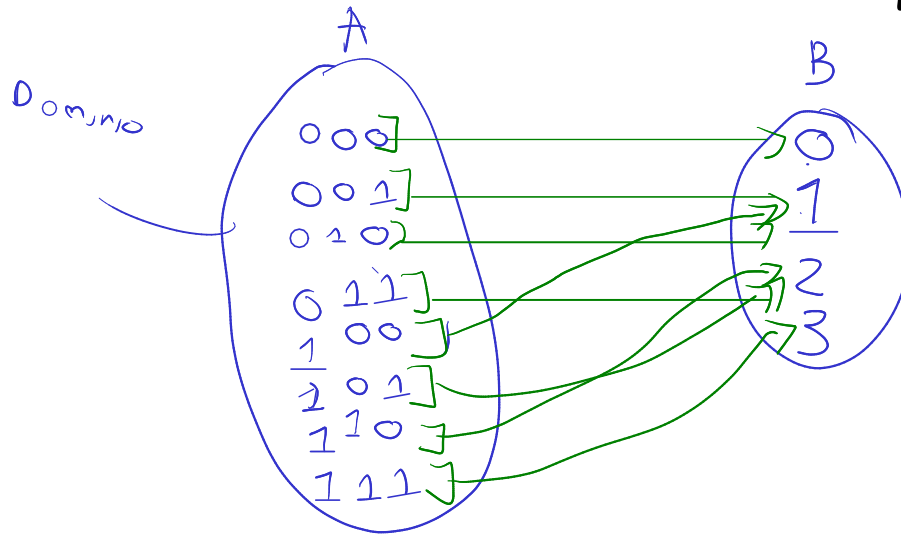
Indique el rango de la siguiente función:

- $f(x)=x^2+4$  de los reales a los reales
  - Dominio= $\mathbb{R}$
  - Codominio= $\mathbb{R}$
  - Rango=Reales mayores o iguales a 4

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 4$$

# Funciones

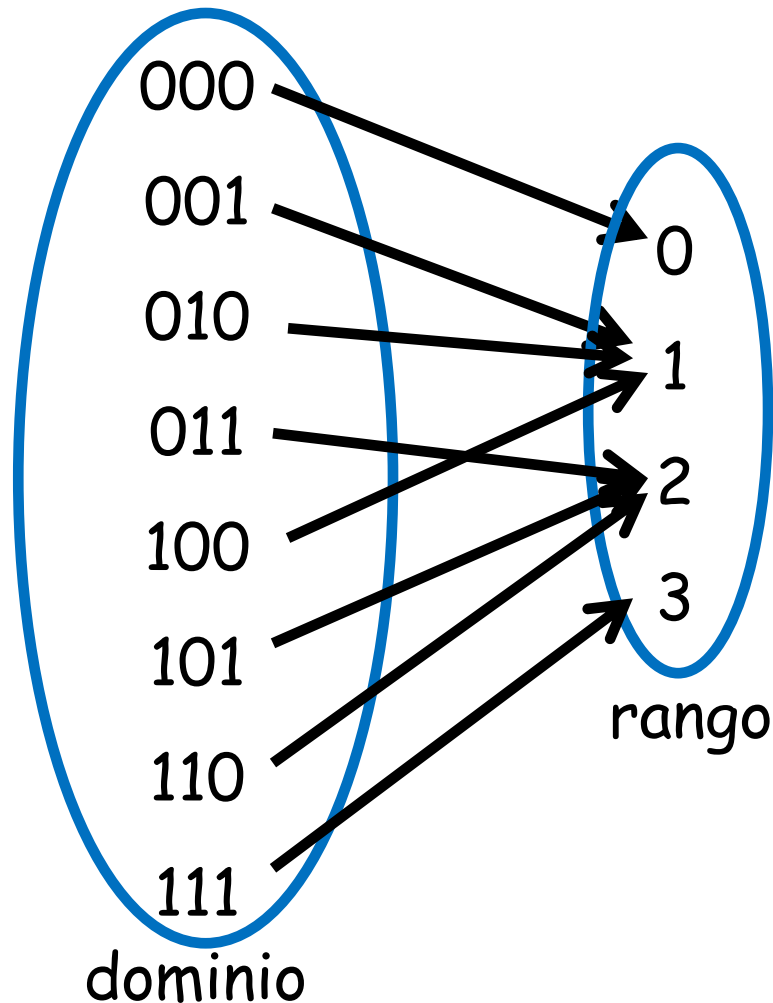
Sea  $f$  la función que toma cualquier cadena de 3 bits y devuelve la cantidad de 1's. Indique el dominio y el rango





# Funciones

Sea  $f$  la función que toma cualquier cadena de 3 bits y devuelve la cantidad de 1's. Indique el dominio y el rango



# Funciones

Sea  $f$  la función que toma cualquier cadena de 3 bits y asigna el valor absoluto de la diferencia entre la cantidad de 1's y 0's. Indique el dominio y el rango.

000  
001  
010  
011  
100  
101  
110  
111

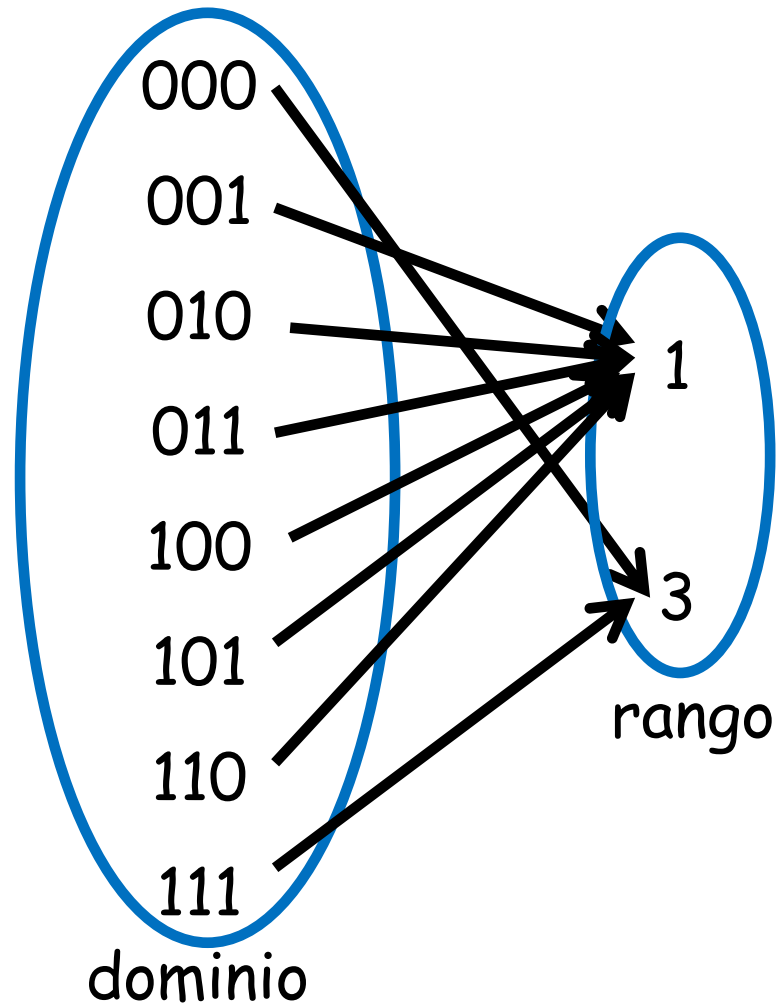
1  
3

110  
001  
- 001  
110

000  
3 ones  
0 ones

# Funciones

---



# Funciones

---

## Tipos de funciones

- Inyectiva
- Sobreyectiva
- Biyectiva

# Funciones

---

## Función inyectiva

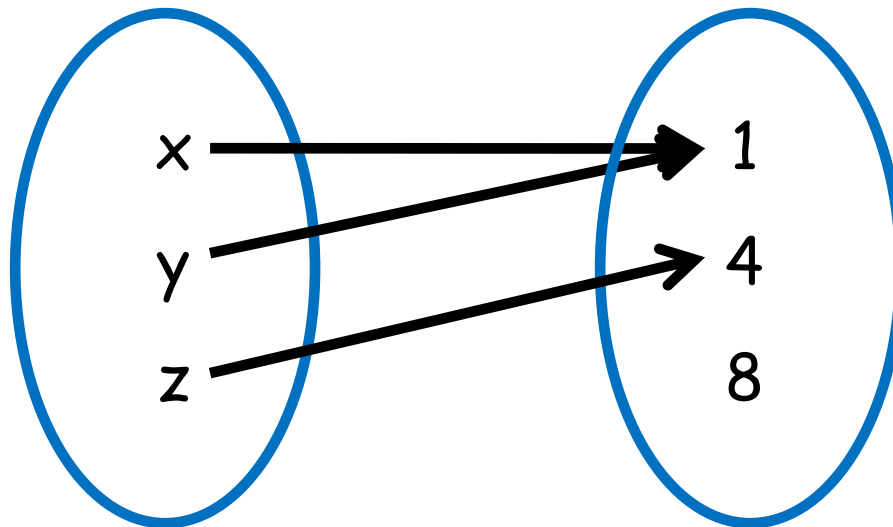
- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única

# Funciones

---

## Función inyectiva

- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única

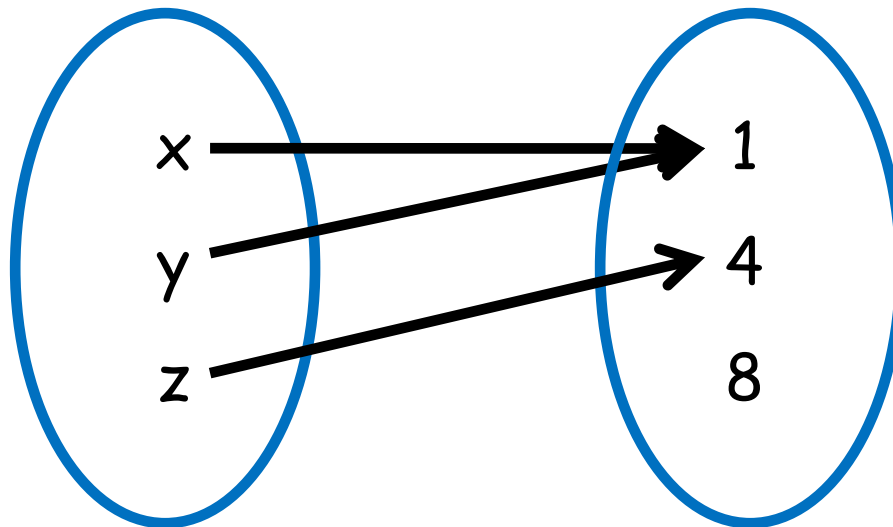


# Funciones

---

## Función inyectiva

- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única



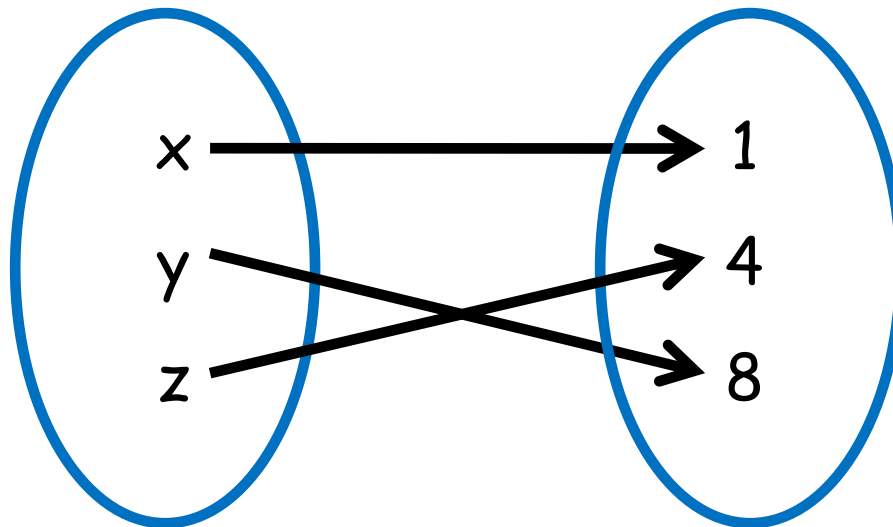
No es inyectiva

# Funciones

---

## Función inyectiva

- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única



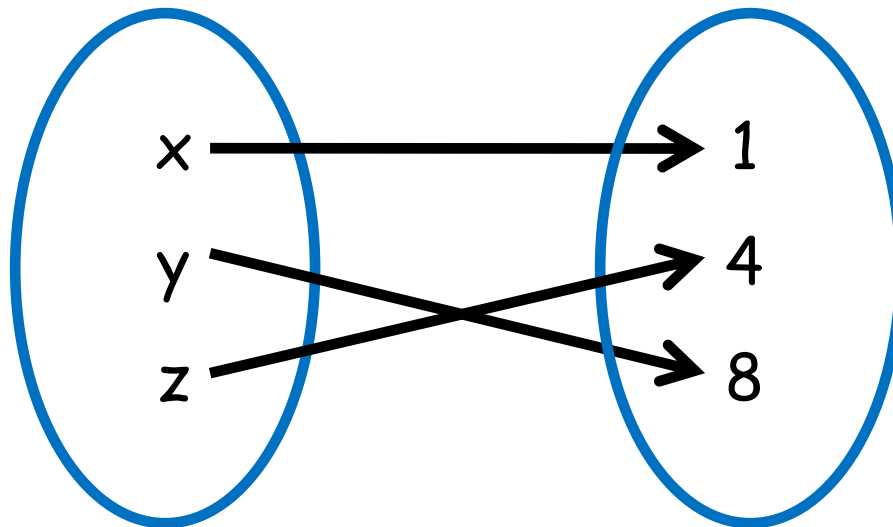


# Funciones

---

## Función inyectiva

- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única



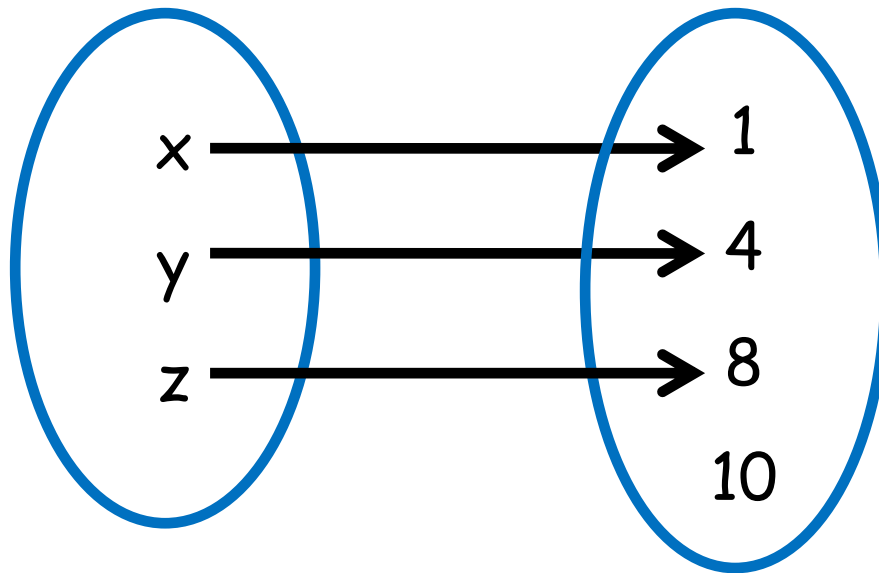
Es inyectiva

# Funciones

---

## Función inyectiva

- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única

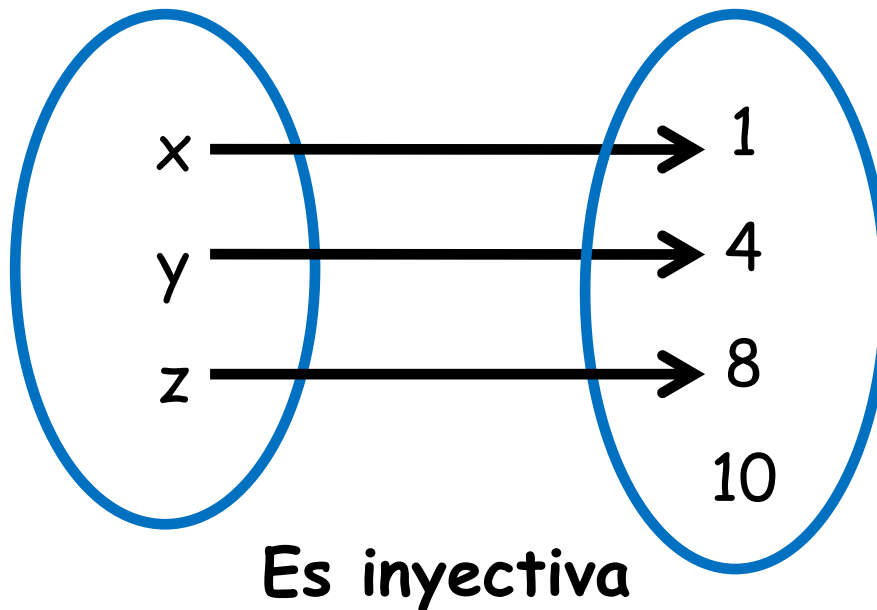


# Funciones

---

## Función inyectiva

- Una función  $f$  se llama **uno a uno** o **inyectiva**, si y solo si, cada imagen asociada es única



# Funciones

---

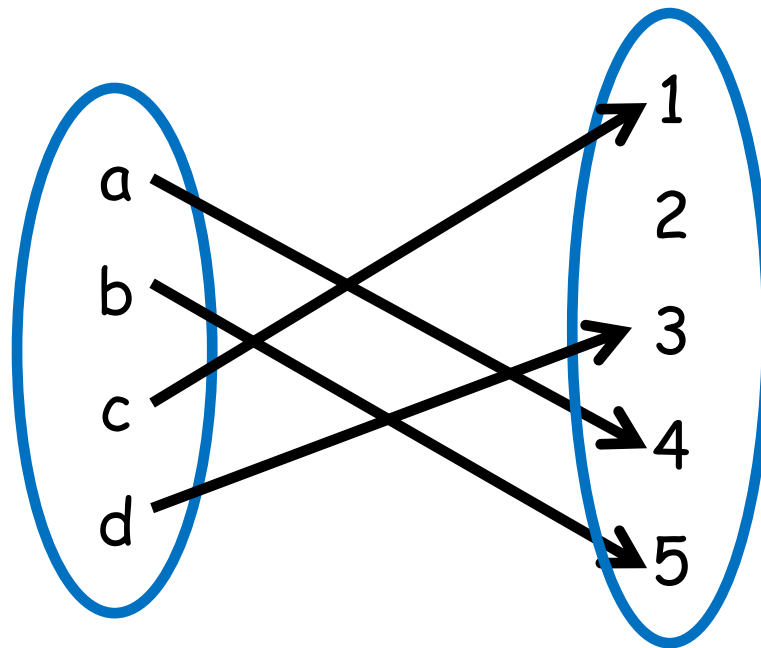
Indique cuáles de las siguientes funciones son inyectivas:

- $f$  de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4,5\}$  donde  $f(a)=4$ ,  $f(b)=5$ ,  $f(c)=1$  y  $f(d)=3$  SI
- $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros  $f(-2) = f(2)$  NO
- $f(x)=x+1$  de los enteros a los enteros ← SI

# Funciones

---

$f$  de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4,5\}$  donde  $f(a)=4$ ,  $f(b)=5$ ,  $f(c)=1$  y  $f(d)=3$



Es inyectiva

# Funciones

---

- $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros, **no es inyectiva** porque  $f(1)=f(-1)=1$
- $f(x)=x+1$  de los enteros a los enteros, **si es inyectiva** porque cada  $x$  tiene un solo  $y$  asignado,  $x+1$

# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$  (codominio), existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a)=b$

Codominio = rango

# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$  (codominio), existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a)=b$
- Una función es sobreyectiva si el codominio es igual al rango

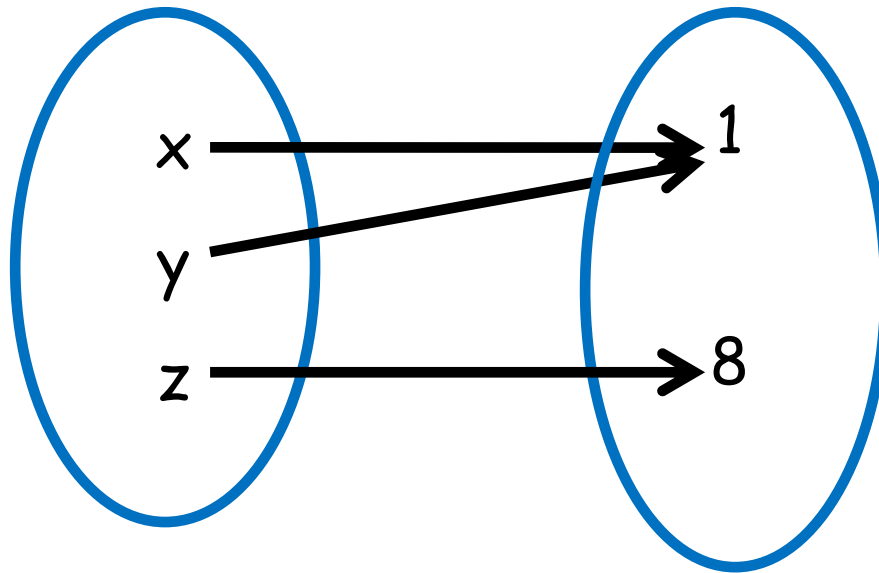


# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$

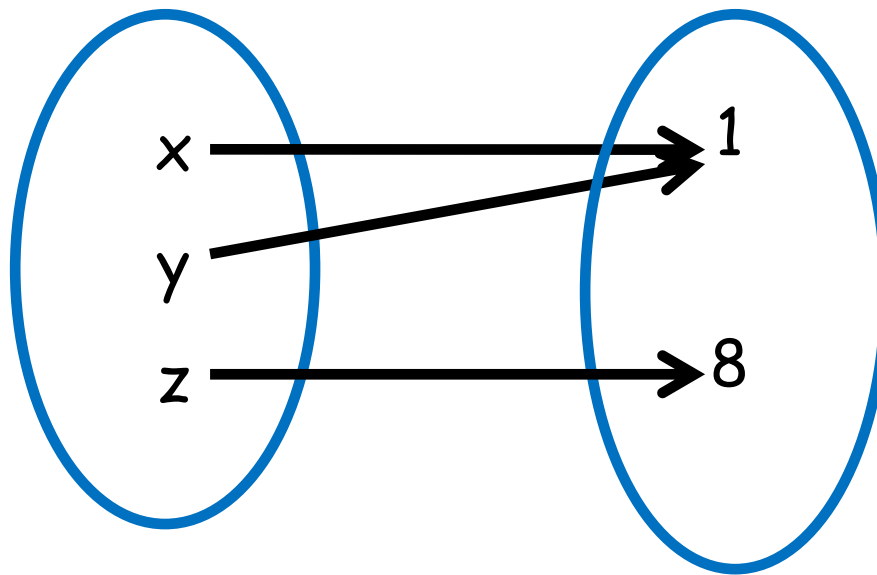


# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$



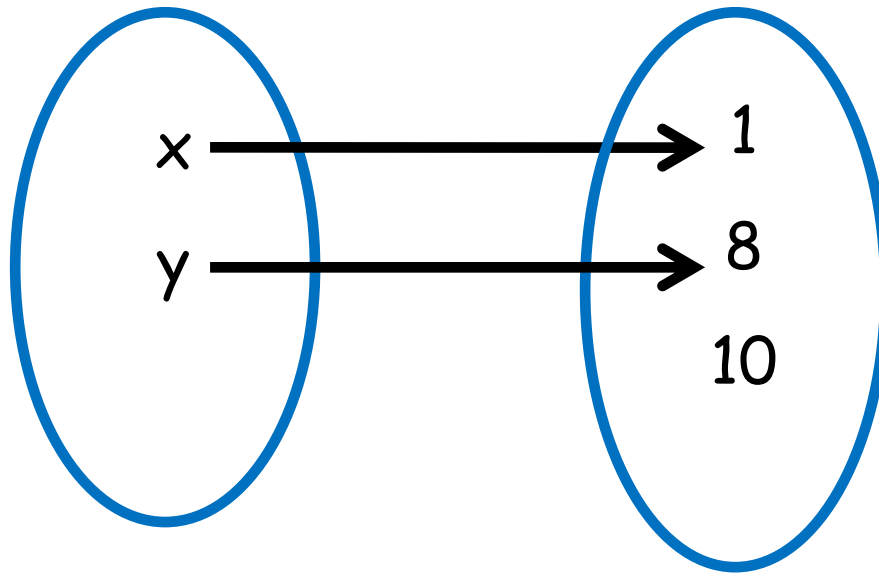
Es sobreyectiva

# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$

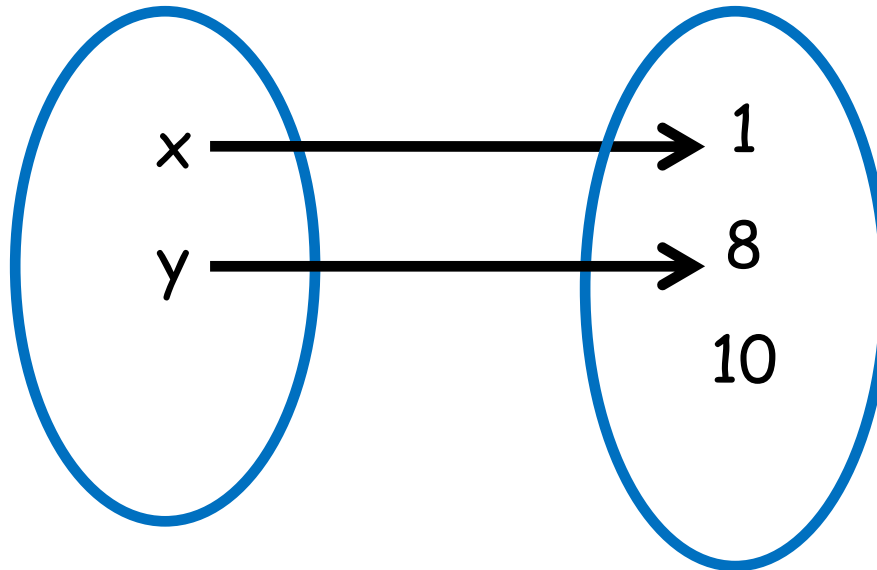


# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$



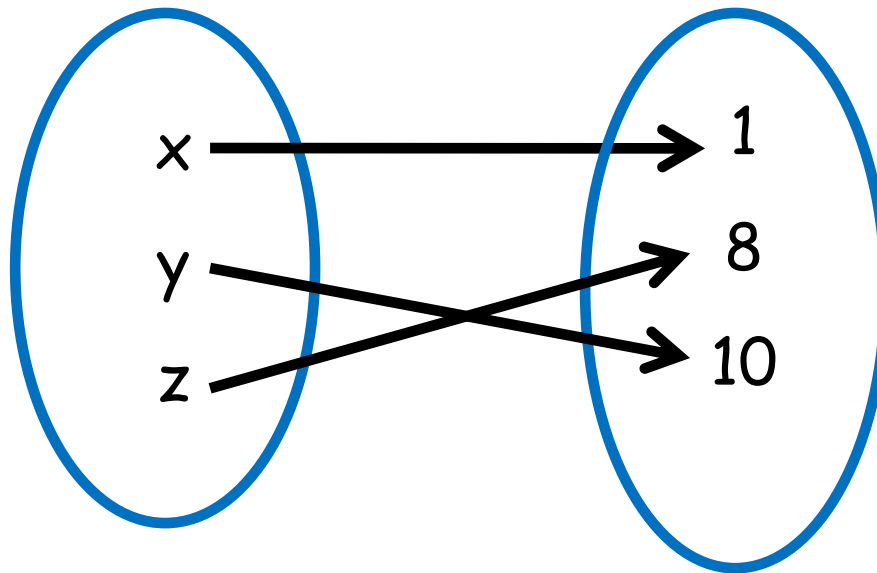
No es sobreyectiva porque  
10 no está en el rango

# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$

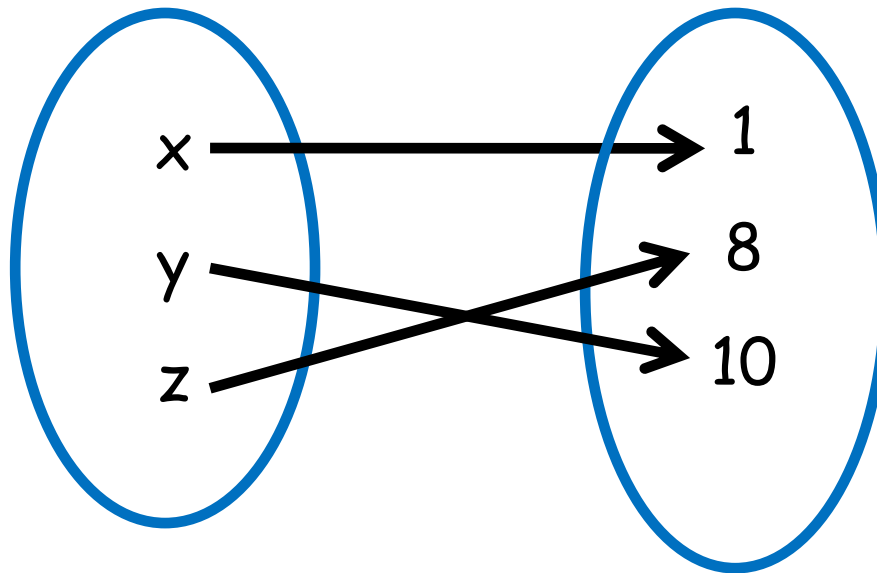


# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$



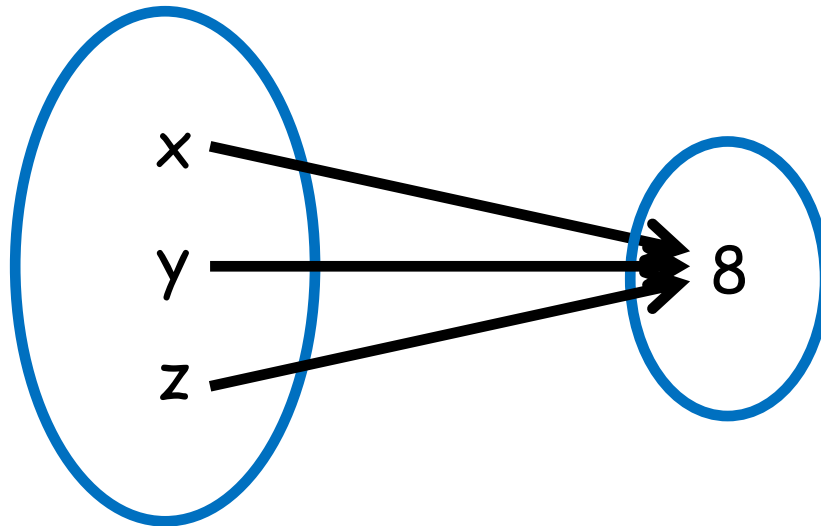
Es sobreyectiva

# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$

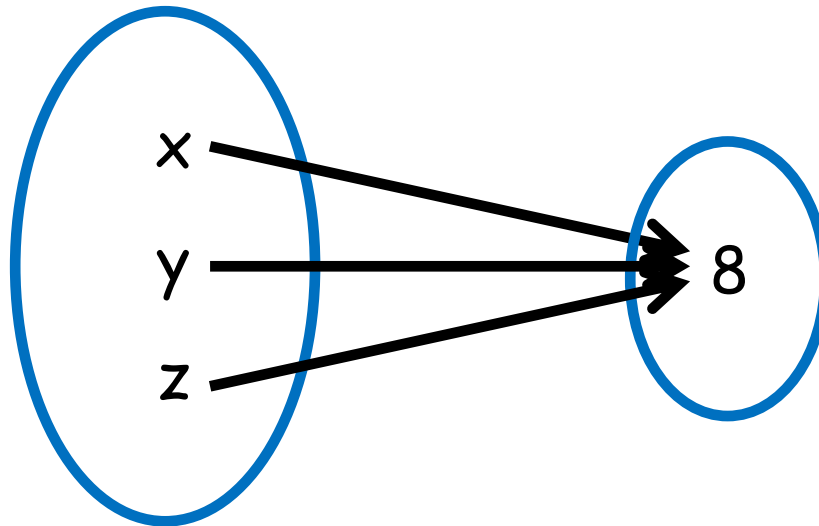


# Funciones

---

## Función sobreyectiva

- Una función  $f$  es sobreyectiva, si y solo si, para cada elemento  $b \in B$ , existe un elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$



Es sobreyectiva



# Funciones

---

Indique cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas:

•  $f$  de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3\}$  donde  $f(a)=3$ ,  $f(b)=2$ ,  $f(c)=1$  y  $f(d)=3$

SI

$\in \text{Enteros}^T$

•  $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros

NO

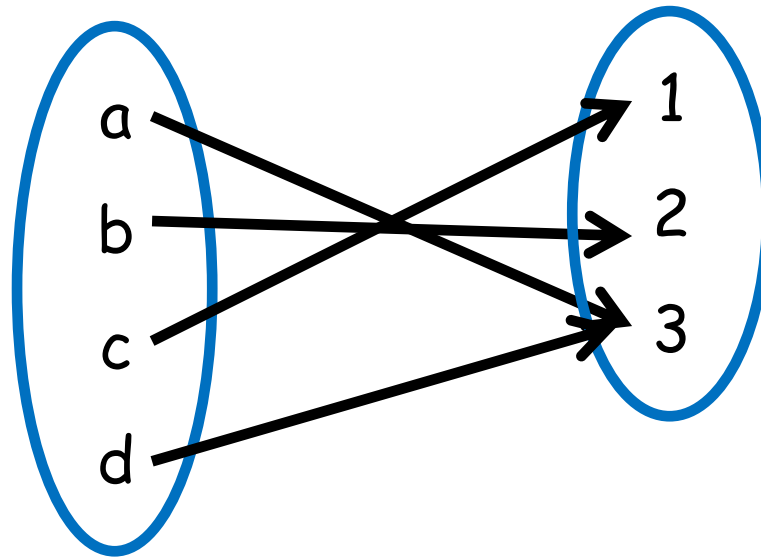
•  $f(x)=x+1$  de los enteros a los enteros

SI

# Funciones

---

$f$  de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3\}$  donde  $f(a)=3$ ,  $f(b)=2$ ,  $f(c)=1$  y  $f(d)=3$



Es sobreyectiva

# Funciones

---

- $f(x)=x^2$  de los enteros a los enteros, **no es sobreyectiva** porque -1 que está en el codominio no está en el rango
- $f(x)=x+1$  de los enteros a los enteros, **si es sobreyectiva** porque cada  $y$  del codominio es una imagen

# Funciones

---

## Función biyectiva

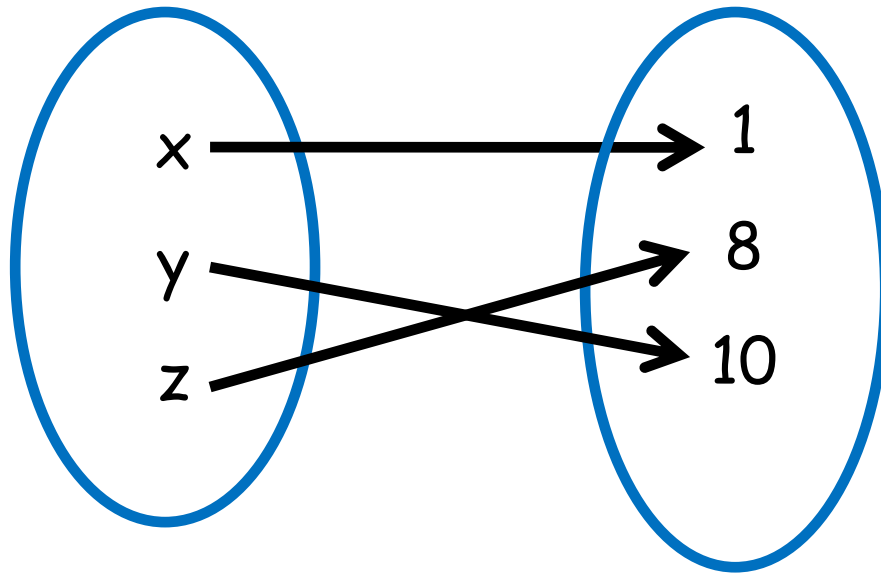
- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

# Funciones

---

## Función biyectiva

- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

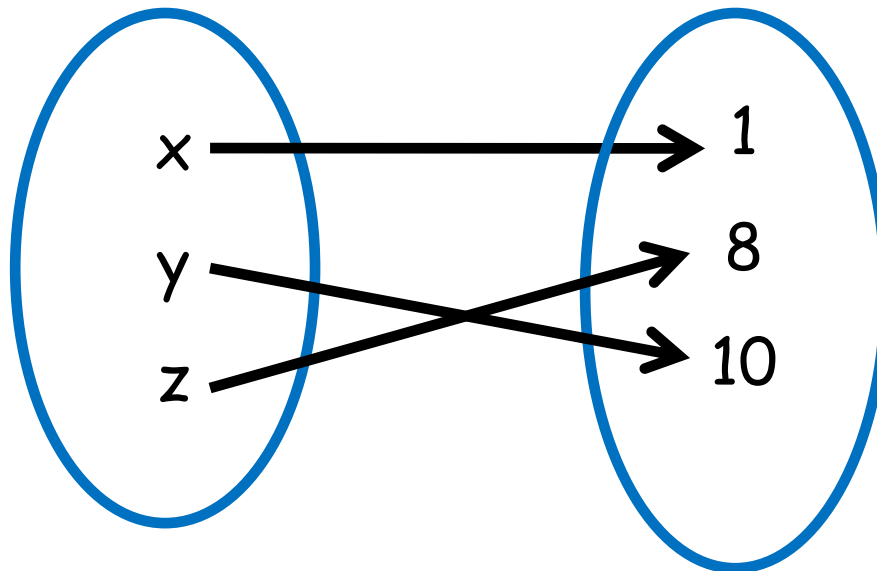


# Funciones

---

## Función biyectiva

- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



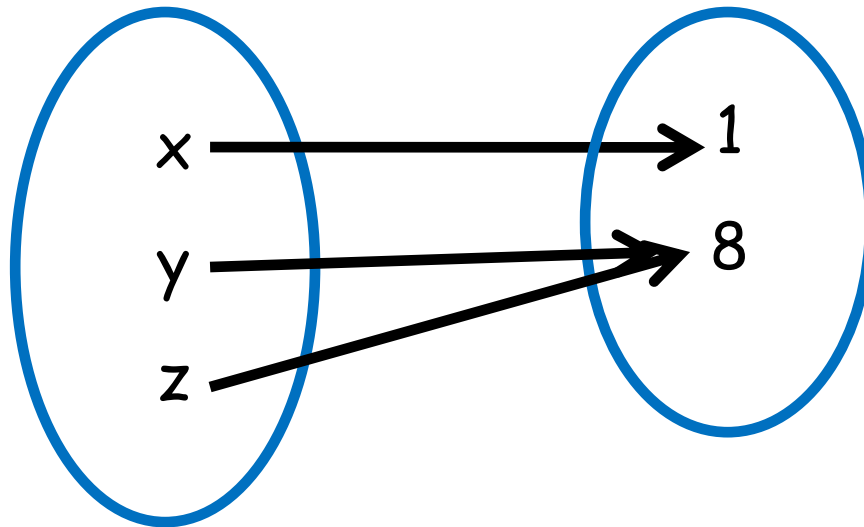
Es biyectiva

# Funciones

---

## Función biyectiva

- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

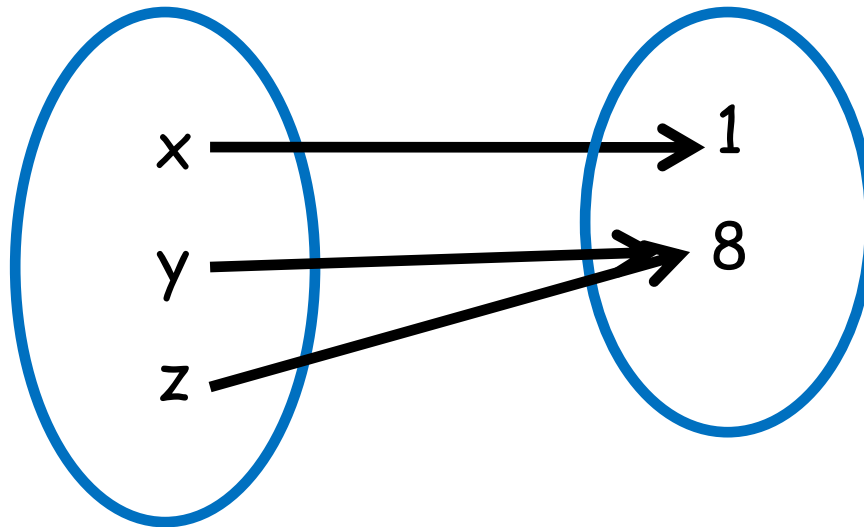


# Funciones

---

## Función biyectiva

- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



No es biyectiva porque  
no es inyectiva

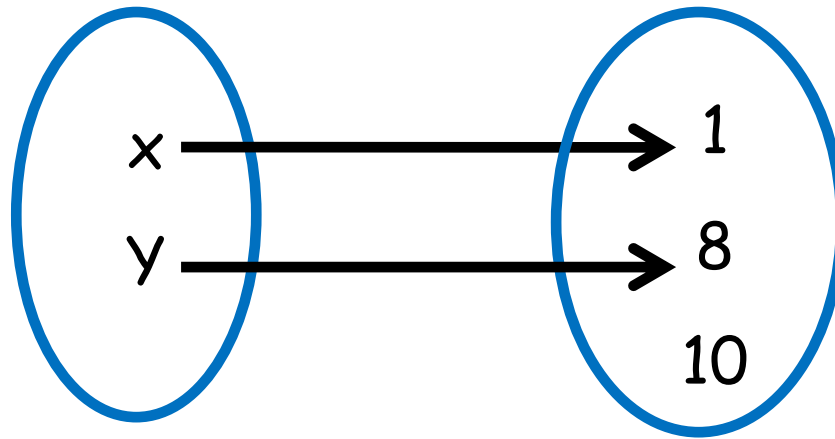


# Funciones

---

## Función biyectiva

- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

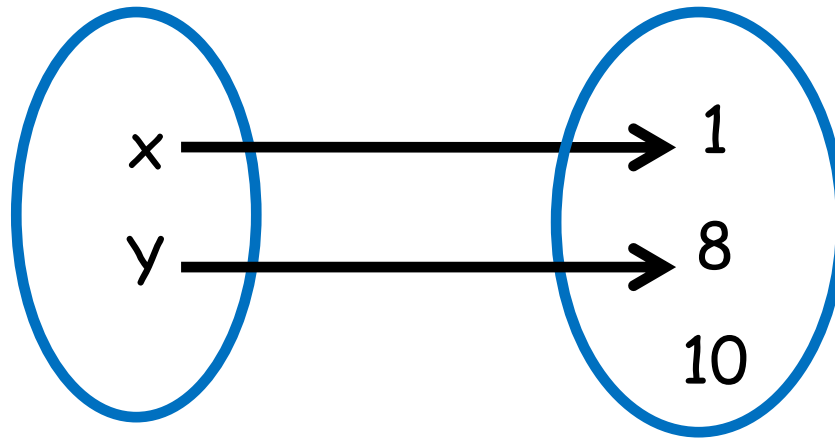


# Funciones

---

## Función biyectiva

- Una función  $f$  es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



No es biyectiva porque  
no es sobreyectiva

# Funciones

---

Indique si la función  $f$  de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4\}$  donde  $f(a)=4$ ,  $f(b)=2$ ,  $f(c)=1$ ,  $f(d)=3$  es biyectiva

Es uno a uno entonces es INYECTIVA

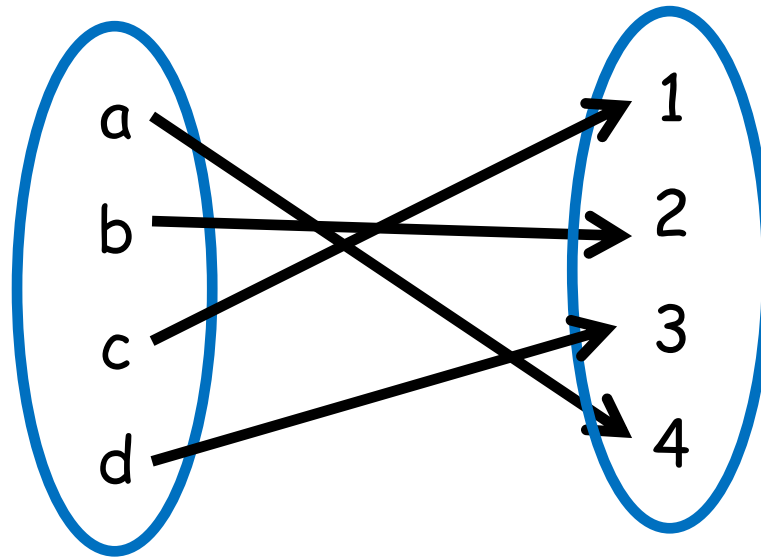
Codominio  $\{1,2,3,4\}$  Rango  $\{1,2,3,4\}$  es SOBREYECTIVA

Por lo tanto, es BIYECTIVA

# Funciones

---

Indique si la función  $f$  de  $\{a,b,c,d\}$  a  $\{1,2,3,4\}$  donde  $f(a)=4$ ,  $f(b)=2$ ,  $f(c)=1$ ,  $f(d)=3$  es biyectiva



**Es biyectiva**

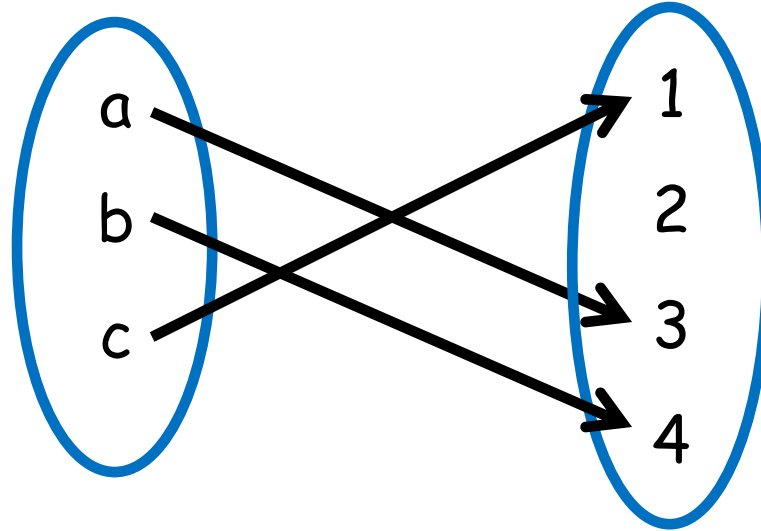
# Funciones

---

Clasifique cada una de las siguientes funciones como inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

# Funciones

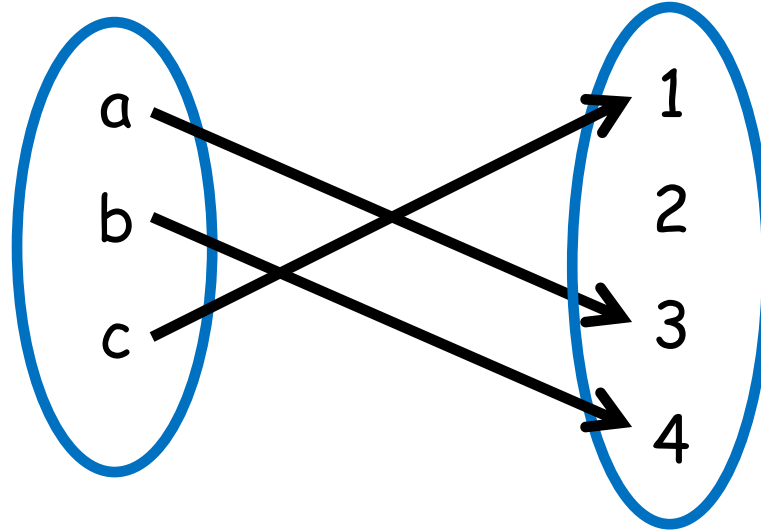
---



¿Es inyectiva? SI  
¿Es sobreyectiva? No

# Funciones

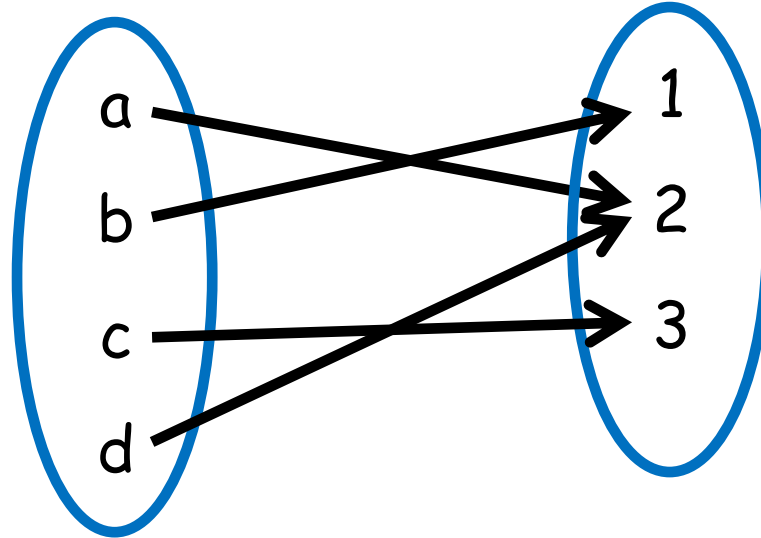
---



Inyectiva pero no sobreyectiva

# Funciones

---



¿Es inyectiva? NO  $f(a) = f(d)$

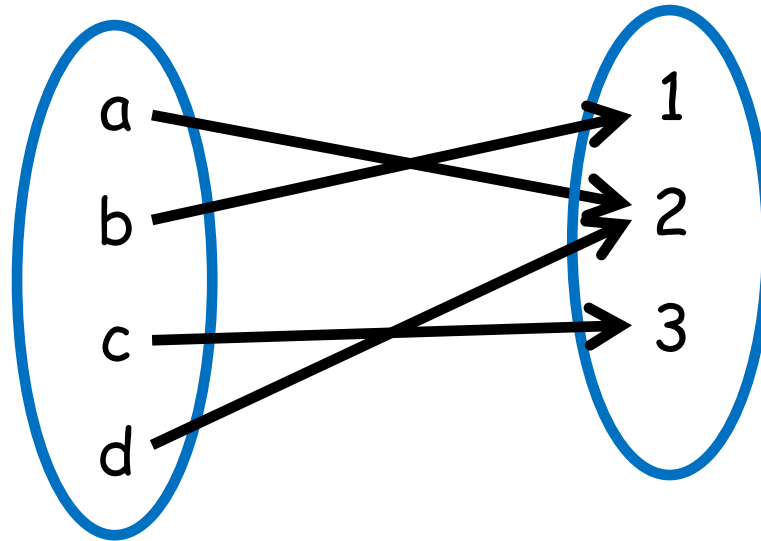
¿Es sobreyectiva? SI

Por lo tanto, NO ES SOBREYECTIVA



# Funciones

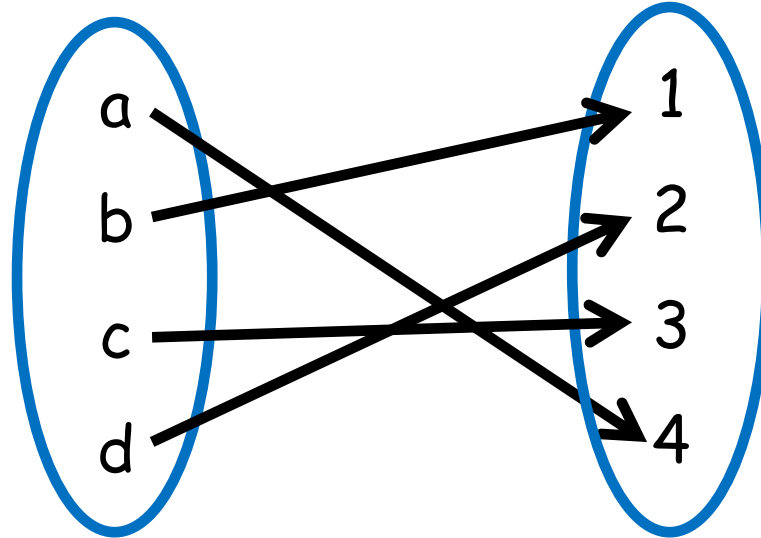
---



Sobreyectiva pero no inyectiva

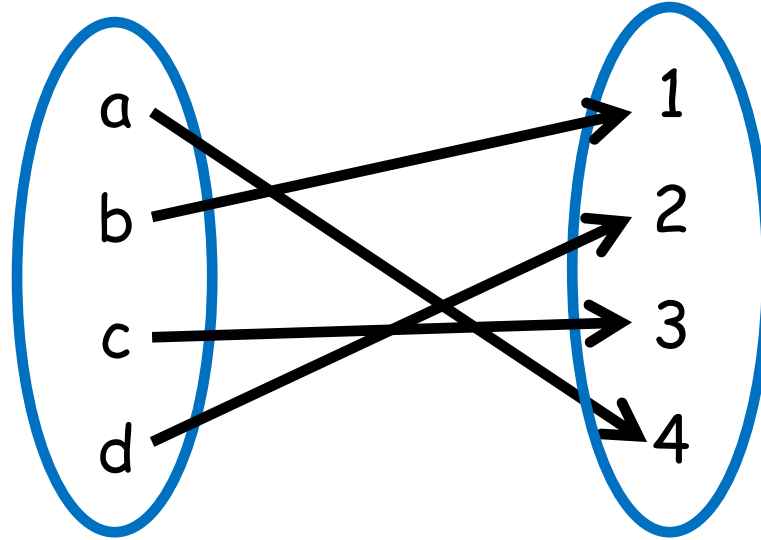
# Funciones

---



# Funciones

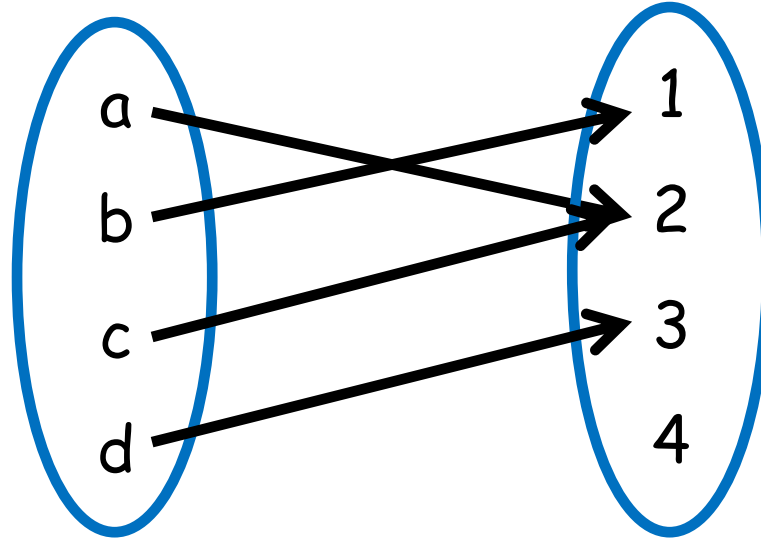
---



Biyectiva

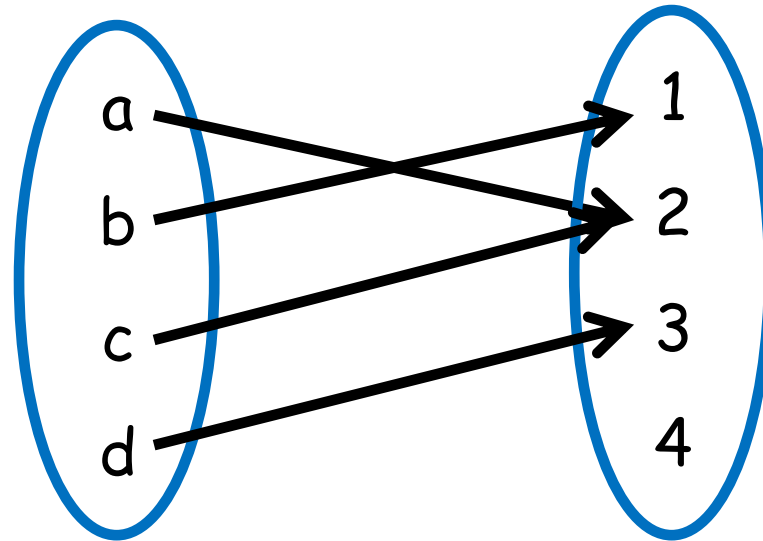
# Funciones

---



# Funciones

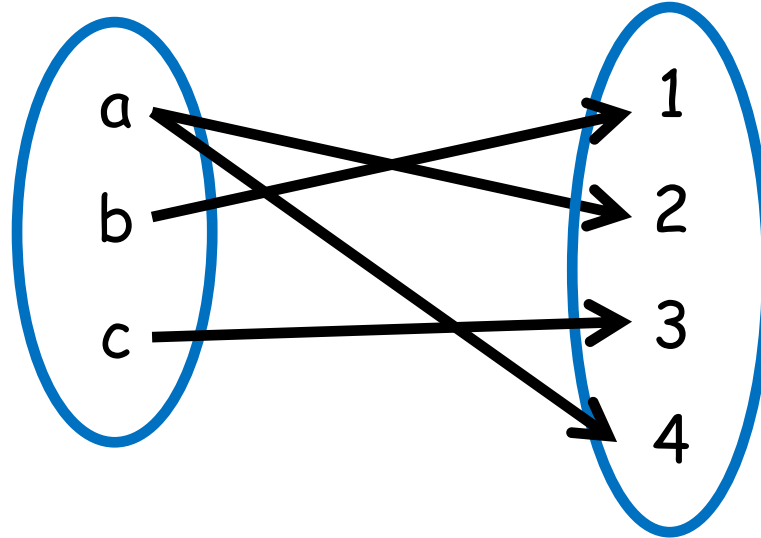
---



Ni inyectiva ni sobreyectiva

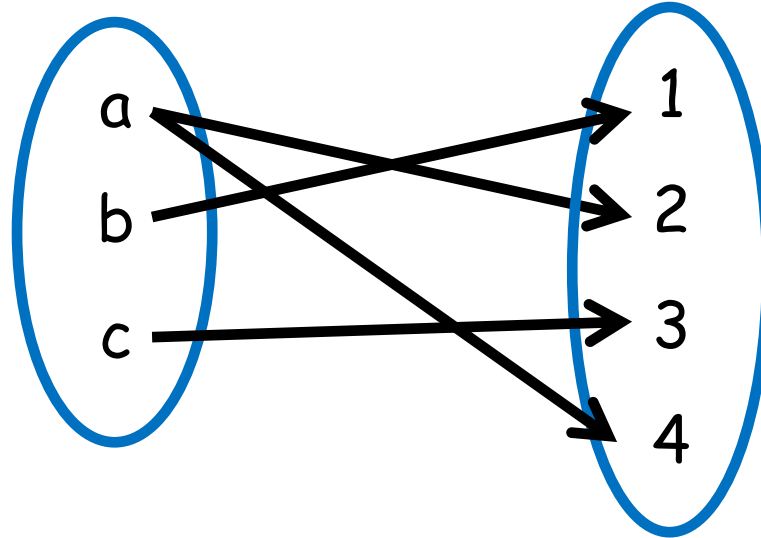
# Funciones

---



# Funciones

---



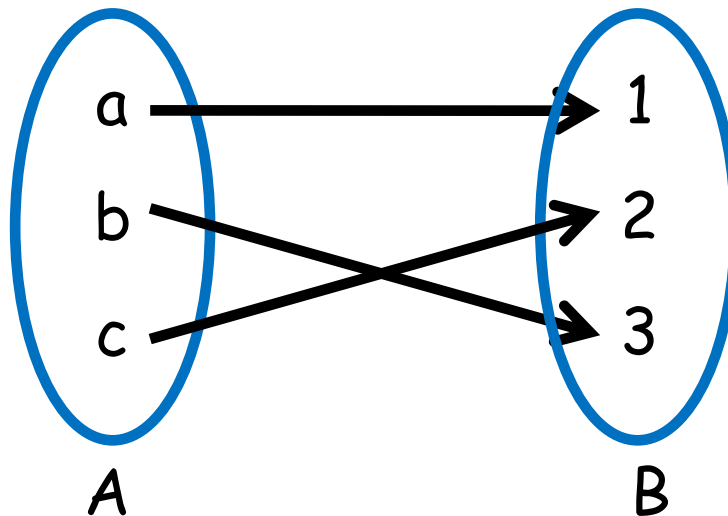
No es función

# Funciones

---

## Función inversa

Dada una función  $f:A \rightarrow B$ , la función inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1}$ , asigna a un elemento  $b \in B$  un solo elemento  $a \in A$  tal que  $f(a)=b$

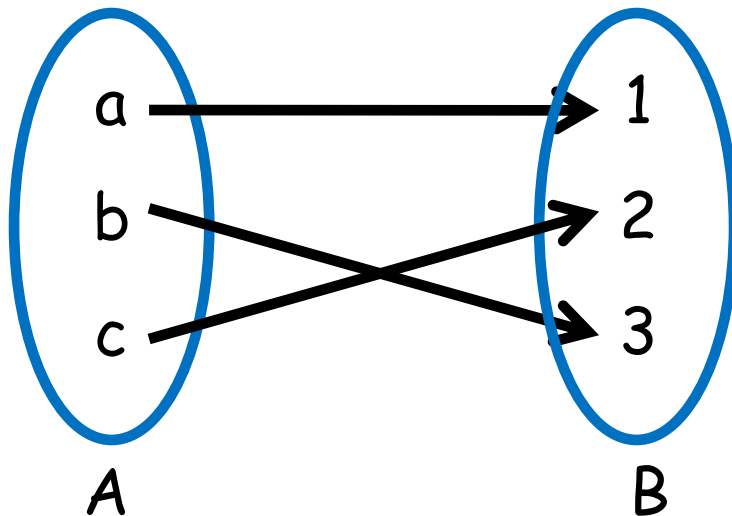




# Funciones

## Función inversa

Dada una función  $f:A \rightarrow B$ , la función inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1}$ , asigna a un elemento  $b \in B$  un solo elemento  $a \in A$  tal que  $f(a)=b$



$$f^{-1}(1)=a$$

$$f^{-1}(2)=c$$

$$f^{-1}(3)=b$$

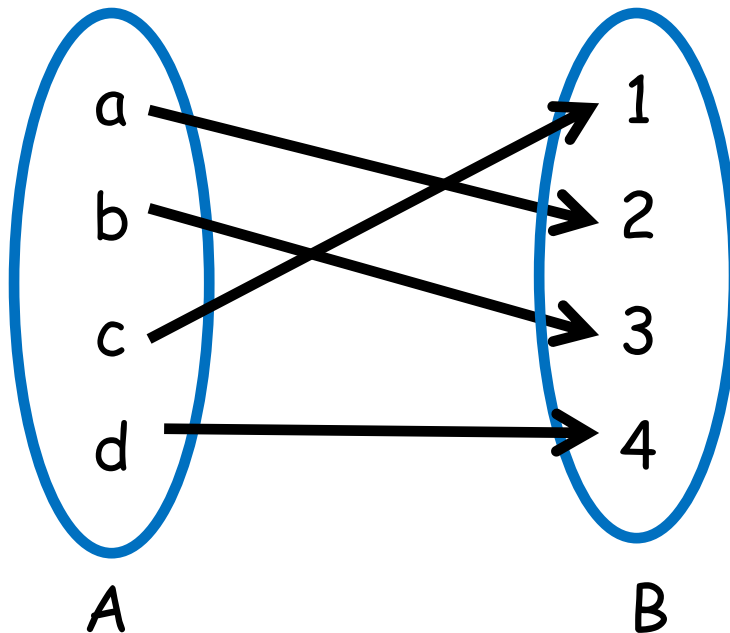
# Funciones

---

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $B=\{1,2,3,4\}$  y  $f(a)=2$ ,  $f(b)=3$ ,  $f(c)=1$ ,  $f(d)=4$

# Funciones

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{a,b,c,d\}$ ,  $B=\{1,2,3,4\}$  y  $f(a)=2$ ,  $f(b)=3$ ,  $f(c)=1$ ,  $f(d)=4$



$$f^{-1}(1)=c$$

$$f^{-1}(2)=a$$

$$f^{-1}(3)=b$$

$$f^{-1}(4)=d$$

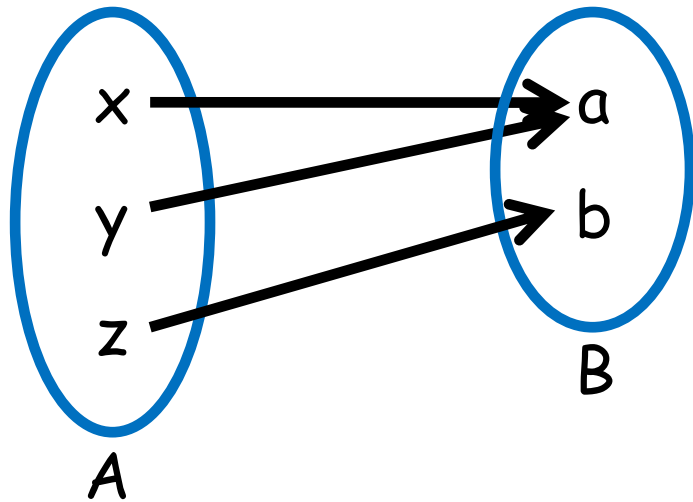
# Funciones

---

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y,z\}$ ,  $B=\{a,b\}$  y  $f(x)=a$ ,  $f(y)=a$ ,  $f(z)=b$

# Funciones

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y,z\}$ ,  $B=\{a,b\}$  y  $f(x)=a$ ,  $f(y)=a$ ,  $f(z)=b$



- La relación que hay de  $B \rightarrow A$  no es una función

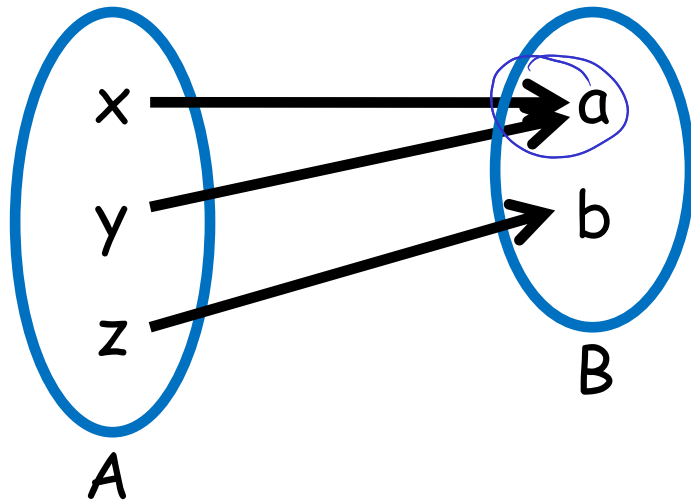
$$f^{-1}(a)=x$$

$$f^{-1}(a)=y$$

# Funciones

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y,z\}$ ,  $B=\{a,b\}$  y  $f(x)=a$ ,  $f(y)=a$ ,  $f(z)=b$

NO ES INYECTIVA



- La relación que hay de  $B \rightarrow A$  no es una función

$$f^{-1}(a)=x$$

$$f^{-1}(a)=y$$

$f^{-1}$  no está definida cuando  $f$  no es inyectiva

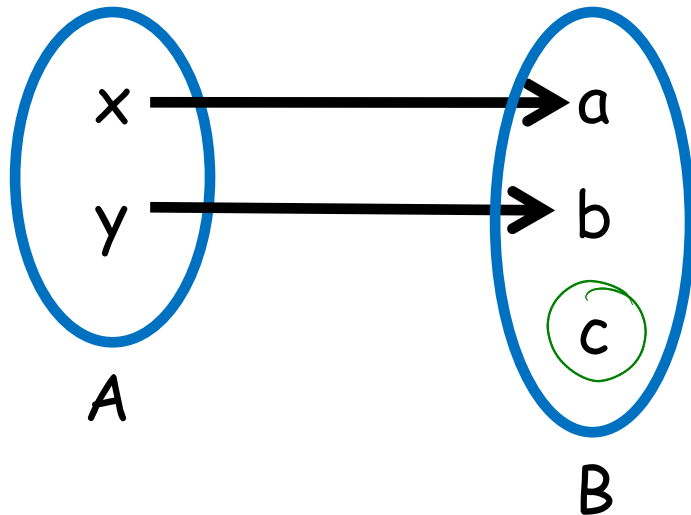
# Funciones

---

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y\}$ ,  $B=\{a,b,c\}$  y  $f(x)=a$ ,  $f(y)=b$

# Funciones

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y\}$ ,  $B=\{a,b,c\}$  y  $f(x)=a$ ,  $f(y)=b$

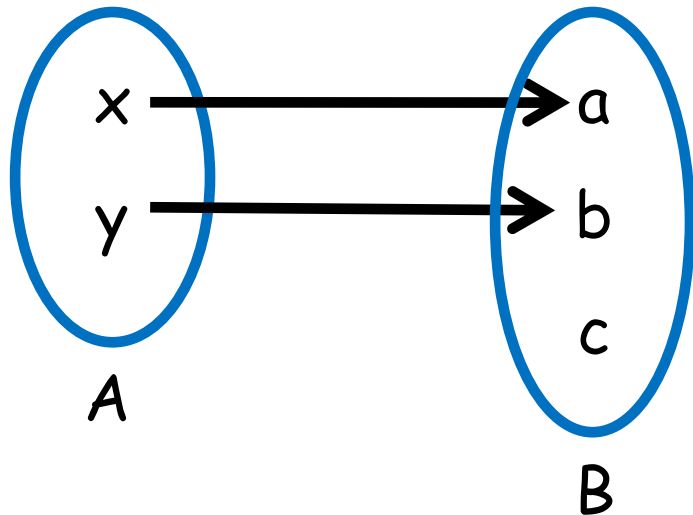


- La relación que hay de  $B \rightarrow A$  no es una función porque no se tiene  $f^{-1}(c)$



# Funciones

Muestre la inversa para  $f:A \rightarrow B$ , donde  $A=\{x,y\}$ ,  $B=\{a,b,c\}$  y  $f(x)=a$ ,  $f(y)=b$



- La relación que hay de  $B \rightarrow A$  no es una función porque no se tiene  $f^{-1}(c)$

$f^{-1}$  no está definida cuando  $f$  no es sobreyectiva

# Funciones

---

## Función inversa

Una función  $f:A \rightarrow B$  es **invertible** si es biyectiva

# Funciones

Indique cuáles de las siguientes funciones son invertibles.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) = 2x + 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{SI} \\ \text{SI} \end{array} \right\}$  INV
- $f(x) = x^2 + 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{NO} \\ \text{NO} \end{array} \right\}$  NO ES INV
- $f(x) = x^3$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{SI} \\ \text{SI} \end{array} \right\}$  ES INV
- $f(x) = (x^2 + 1) / (x^2 + 2)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{INV. : NO} \\ \text{SOB. : NO} \end{array} \right\}$  NO ES INV

# Funciones

---

Indique cuáles de las siguientes funciones son invertibles.  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- $f(x)=2x+1$ , **es invertible**
- $f(x)=x^2+1$ , **no es invertible**.  $f(-1)=f(1)=1$  no es inyectiva
- $f(x)=x^3$ , **es invertible**
- $f(x)=(x^2+1)/(x^2+2)$ , **no es invertible**. no es inyectiva [ $f(-1)=f(1)=2/3$ ], ni sobreyectiva (1 no es imagen en  $f$ )

# Funciones

Determine si las siguientes funciones, de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , son invertibles:

•  $f(x) = \lceil x/2 \rceil$

$$f(-3.2) = \lceil -1.6 \rceil = -1 \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(-3.4) = \lceil -1.7 \rceil = -1$$

•  $f(x) = 3x^2 + 7$

INY: NO

SOB: NO

•  $f(x) = (x+1)/(x+2) \rightarrow x = -2$  NO ES FUNCIÓN

•  $f(x) = x^5 + 1$

INY = SI

SOB = SI

# Funciones

Determine si las siguientes funciones, de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ , son invertibles:

- $f(x) = \lceil x/2 \rceil$ . no, no es inyectiva.  $f(1) = f(2) = 1$
- $f(x) = 3x^2 + 7$ . no, no es inyectiva.  $f(1) = f(-1) = 10$
- $f(x) = (x+1)/(x+2)$ . no, no es sobreyectiva. 1 no es imagen
- $f(x) = x^5 + 1$ . si

$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$   
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$

# Funciones

---

Dadas las siguientes funciones de los enteros a los enteros, complete la tabla indicando si cumple, o no, cada propiedad

- $f_1(x) = x^2 - 1$
- $f_2(x) = 5x - 8$

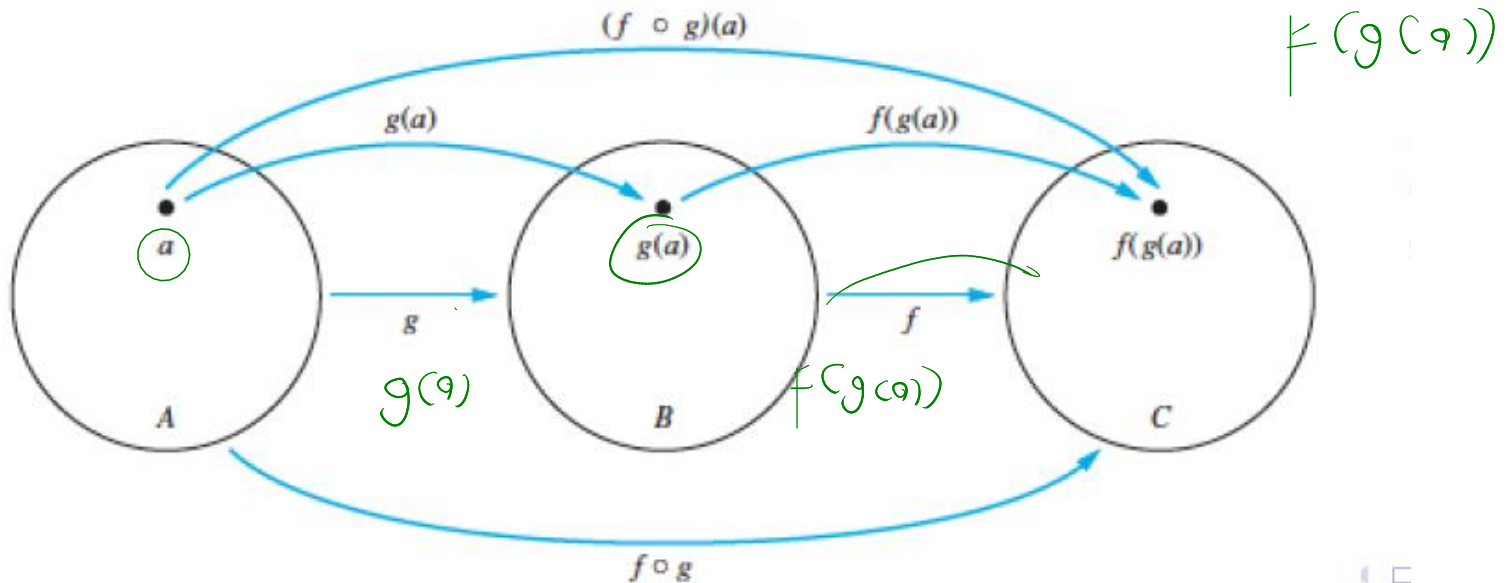
	Inyectiva	Sobreyectiva	Biyectiva
$f_1$			
$f_2$			

Justifique solamente las propiedades que no se cumplen

# Composición de funciones

Dadas dos funciones  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  se denomina composición de  $g$  con  $f$ , como la función  $f \circ g: A \rightarrow C$  tal que:

$$\begin{aligned} f \circ g &= \{(a, c) \mid \underline{a \in A \wedge c \in C} \wedge \exists b \mid b \in B: a g b \wedge b f c\} \\ &= \{(a, c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \mid b \in B: \underline{b = g(a)} \wedge \underline{c = f(b)}\} \end{aligned}$$





# Composición de funciones

Sea  $g = \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c\}$  tal que  $g(a) = b$ ,  $g(b) = c$  y  $g(c) = a$

Sea  $f = \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  tal que  $f(a) = 3$ ,  $f(b) = 2$ ,  $f(c) = 1$

Estudiamos  $f \circ g$

$$f(g(a)) = f(b) = 2$$

$$f(g(b)) = f(c) = 1$$

$$f(g(c)) = f(a) = 3$$

$$g \circ f$$
$$g(f(x))$$

$$g(f(a)) = g(3)$$
$$g(2)$$
$$g(1)$$

Observe que  $g \circ f$

$$g(f(a)) = \underline{f(3)} = \text{????}$$

$f \circ g$  está bien definida  
sii  $\text{rango } g \subseteq \text{dominio de } f$

# Composición de funciones

---

Sea  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $g(y) = 3y + 2$

Sea  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $f(x) = 2x + 3$

$$f \circ g (z) = \underline{f(g(z))} = f(\underline{3z + 2}) = 2(3z + 2) + 3 = 6z + 7$$

$$g \circ f (z) = g(f(z)) = g(\underline{2z + 3}) = 3(2z + 3) + 2 = 6z + 11$$

La composición no es conmutativa

$$f \circ g \neq g \circ f$$

# Funciones piso y techo

---

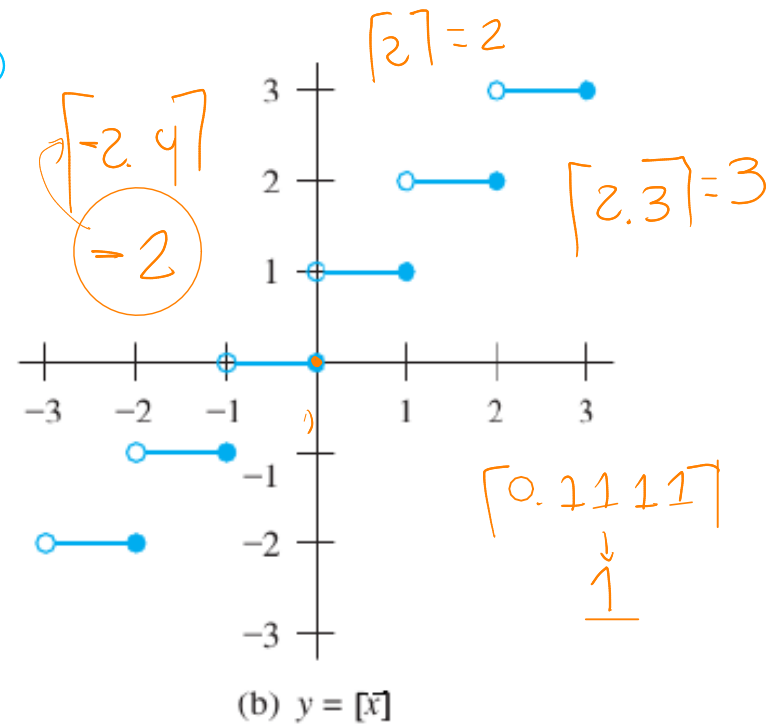
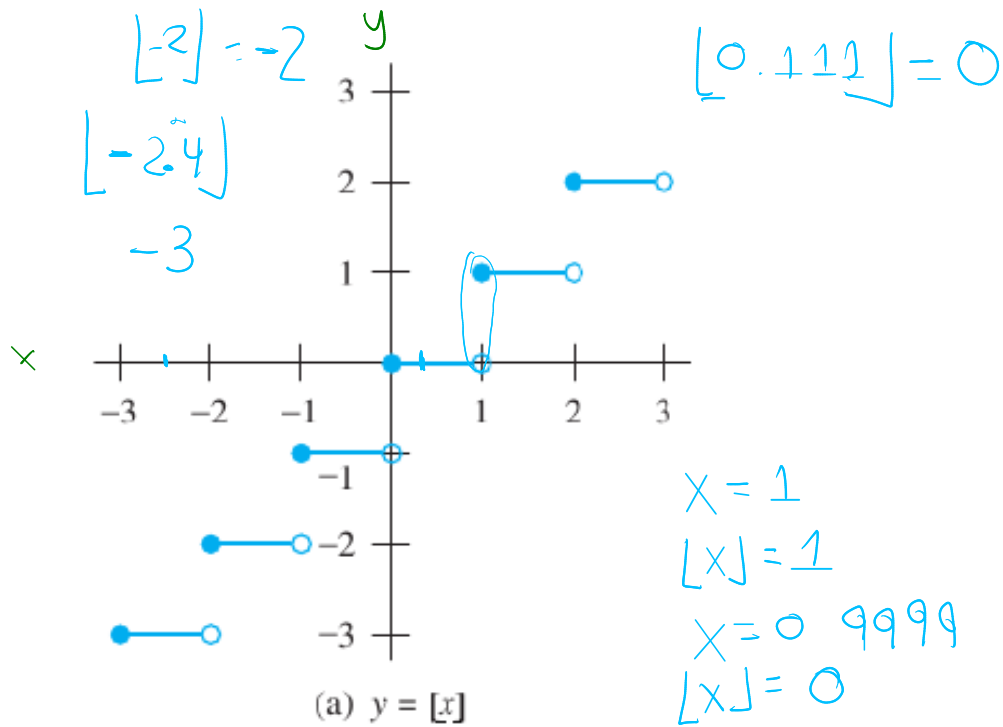
La función entera piso asigna a un número real  $x$  el mayor entero que es menor o igual que  $x$ . Se denota así:

$$\lfloor x \rfloor$$

La función entera techo o función de parte entera por exceso, asigna a un número real  $x$  el mayor entero que es mayor o igual que  $x$ . Se denota así:

$$\lceil x \rceil$$

# Funciones piso y techo

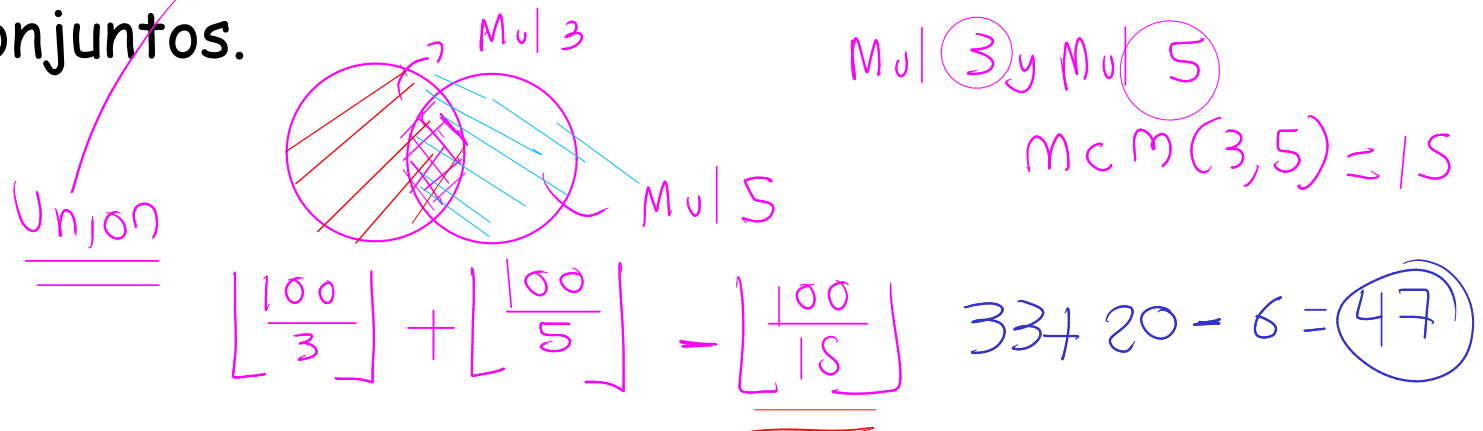


# Funciones piso y techo

Sean  $k$  y  $n$  enteros positivos. Entonces el número de múltiplos de  $k$  entre 1 y  $n$  está dado por  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

**Ejemplo,** Sea  $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , con  $k = 2$ , el número de múltiplos es  $\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = [50]$

**Ejemplo,** Sea  $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , ¿Cuántos números son divisibles entre 3 o por 5? Pista: Aquí aplica la propiedad de union de conjuntos.



# Función característica

---

La función característica de un subconjunto  $A$  con respect al Universal  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  Se define así

$$f_a(u_i) \begin{cases} 1 & \text{Si } u_i \in A \\ 0 & \text{Si } u_i \notin A \end{cases}$$

Ejemplo: Si  $A = \{4, 7, 9\}$  y  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  Entonces  $f_A(2) = 0$ ,  $f_A(4) = 1$ ,  $f_A(7) = 1$  y  $f_A(12) = 0$