Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

1 Recurrencias lineales no homogéneas

2 Estrategias de solución de recurrencias no homogéneas

- Cambio de variable
- Método maestro

Contenido

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$
Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$
Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

$a_n = 2a_{n-1}$ $F(n) = 1$

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

$a_n = 2a_{n-1} \Longrightarrow r - 2 = 0$ E.C

$r = 2$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $\boxed{F(n) = 1}$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

$a_n = 2a_{n-1} + 1$

$A = -1$ $A = 2A + 1$

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

1. Resolver la parte homogenea, sin evaluar las constantes.

2: Proponer una solución particular de acuerdo al f(n) que tiene R.R y esta reemplazarla en la ecuación original.

[illegible] 3. El sistema completo: Solución homogenea + Solución particular.

4. Hallan las constantes con las condiciones iniciales

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**

La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ **(por Teorema 1)**

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $\boxed{a_n^{(p)} = C7^n}$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$

$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), \boxed{C = 49/20}$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Forma de las soluciones particulares

	$F(n)$	$a_n^{(p)}$
1	C_1	A Pol + r^n
2	n Pol orden 1	$A_1 n + A_0$
3	n^2 Pol orden 2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$ $n 7^n$
4	$n^t, t \in Z^+$ Pol ord 7	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$ $n^2 7^n$
5	$r^n, r \in R$	$A r^n$
6	$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
7	$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
8	$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
9	$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
10	$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

Universidad del Valle

$$a_n = 3a_{n-1} + 2^n,\ a_0 = 1$$

1) Parte homogenea

$a_n = 3a_{n-1} \Rightarrow r - 3 = 0$

$\boxed{a_n = r^n}$

$\boxed{r = 3}$

$\boxed{a_n^{(h)} = A\,3^n}$

2) Particular 2^n

$\boxed{a_n^{(p)} = B2^n}$

$a_n = 3a_{n-1} + 2^n$

$B2^n = 3B2^{n-1} + 2^n$

$B2^n = \frac{3}{2}B2^n + 2^n \Rightarrow \frac{2}{2}B = \frac{3}{2}B + 1 \quad -\frac{1}{2}B = 1 \quad \boxed{B = -2}$

3) $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$\boxed{a_n = A\,3^n - 2 \times 2^n}$

4) Evaluar Condiciones iniciales $a_0 = 1$

$1 = A - 2 \quad \boxed{A = 3}$

$\boxed{a_n = 3 \times 3^n - 2 \times 2^n}$

$$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2) + n + 2 + 7^n$$

Pol ord 1

$T(0)=4$
$T(1)=12$

1) Parte homogenea

$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$

$r^2 - 3r - 4$

$r_1 = 4 \qquad r_2 = -1$

$$\boxed{T(n)^{(h)} = A(4)^n + B(-1)^n}$$

Forma de las soluciones particulares

	$F(n)$	$a_n^{(p)}$
1	C_1	A
2	n — Pol orden 1	$A_1 n + A_0$
3	n^2 — Pol orden 2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
4	$n^t, t \in Z^+$ — Pol ord t	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
5	$r^n, r \in R$	$A r^n$
6	$\sin(\alpha n)$	$A\sin(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$
7	$\cos(\alpha n)$	$A\sin(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$
8	$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n(A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
9	$r^n \sin(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$
10	$r^n \cos(\alpha n)$	$A r^n \sin(\alpha n) + B r^n \cos(\alpha n)$

Pol + r^n

n 7

n 5

2) Parte particular $\quad n+2 + 7^n \quad$ Pol ord 1 $\quad r^n$

$$7^{n-1} = \frac{7^n}{7} \qquad 7^{n-2} = \frac{7^n}{49}$$

$$T_{(n)}^{(p)} = Cn + D + E7^n$$

$$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2) + n + 2 + 7^n$$

$$Cn + D + E7^n = 3(C(n-1) + D + E7^{n-1}) + 4(C(n-2) + D + E7^{n-2}) + n + 2 + 7^n$$

$$\boxed{Cn + D + E7^n = 3C(n-1) + 3D + \frac{3E7^n}{7} + 4C(n-2) + 4D + \frac{4E7^n}{49} + n + 2 + 7^n}$$

7^n $\Big|$ $E = \frac{3E}{7} + \frac{4E}{49} + 1$

$\frac{49}{49}E = \frac{21E}{49} + \frac{4E}{49} + 1 \qquad \frac{24}{49}E = 1 \qquad \boxed{E = \frac{49}{24}}$

n $\Big|$ $C = 3C + 4C + 1$

$-6C = 1 \qquad \boxed{C = -\frac{1}{6}}$

Cte $\Big|$ $D = -3C + 3D - 8C + 4D + 2$

$-6D = -11C + 2$

$-6D = \frac{11}{6} + \frac{12}{6} = \frac{23}{6}$

$$\boxed{D = -\frac{23}{36}}$$

$$\boxed{T_{(n)}^{(p)} = -\frac{1}{6}n - \frac{23}{36} + \frac{49}{24}7^n}$$

3) $T(n) = T(n)^{(h)} + T(n)^{(p)}$

$T(0)=4$
$T(1)=12$

$$\boxed{T(n)^{(h)} = A(4)^n + B(-1)^n - \frac{1}{6}n - \frac{23}{36} + \frac{49}{24}7^n}$$

$$4 = A + B - \frac{23}{36} + \frac{49}{24}$$

$$12 = 4A - B - \frac{1}{6} - \frac{23}{36} + \frac{7 \times 49}{24}$$

A = 2/9 B = 19/8

$$\boxed{T(n) = \frac{2}{9}4^n - \frac{19}{8}(-1)^n - \frac{1}{6}n - \frac{23}{36} + \frac{49}{24}7^n}$$

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma
$$\boxed{n^m}(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = \underline{5a_{n-1} - 6a_{n-2}} + \boxed{2^n + 3n}$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \boxed{\beta 2^n}$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + \underbrace{An + B}_{\text{polinomio orden 1}}$ para $F(n) = 2^n + \underline{3n}$ $C2^n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$
\begin{aligned}
nC2^n + An + B = {} & 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\
& -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n
\end{aligned}
$$

Encontrar la solución general de la recurrencia
$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, \underline{C = -2} \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$
$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, \underline{A = 3/2},$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = \underline{21/4}$

La solución de la recurrencia es:
$\underline{a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4}$

$$\boxed{T(n) = 4T(n-1) - 4T(n-2) + 7\cdot \boxed{2^n} + n}$$ $-b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$

1) Sol. parte homogena

$r^2 - 4r + 4$ $\qquad \frac{4 \pm \sqrt{16-4\times 4}}{2} = r_{1,2} = 2$ $\qquad \boxed{m=2}$

$$T^{(h)}(n) = A(2^n) + Bn2^n$$

2) Sol parte particula

$$+ \qquad \boxed{T^{(p)}(n) = Cn + D + En^2 2^n}$$

$$\cancel{Cn} + \cancel{D} + \cancel{En^2 2^n} = 4C(\cancel{n}-1) + 4D + 4E\frac{(\cancel{n^2} - \cancel{2n} + 1)2^n}{2}$$

$$-4C(\cancel{n}-2) - 4D - 4E\frac{(\cancel{n^2} - 4n + 4)2^n}{4}$$

$$7\times 2^n + \cancel{n}$$

Terminos semejantes

$0 = 2E - 4E + 7$

$2E = 7 \quad E = \frac{7}{2}$

$$\boxed{n^2 2^n \neq n^2}$$

$n^2 2^n$	$E = 2E - E$ $\quad \boxed{E = E}$
$n2^n$	$0 = -4E + 4E$ $\quad \boxed{0 = 0}$
2^n	$0 = 2E - 4E + 7$ $\quad 2E = 7$ $\quad \boxed{E = \frac{7}{2}}$
n	$C = 4C - 4C + 1$ $\quad \boxed{C = 1}$
cte	$D = -4C + 4D + 8C - 4D$ $D = 4C$ $\quad \boxed{D = 4}$

$$T^{(p)}(n) = n + 4 + \frac{7}{2}n^2 2^n$$

$$T(n)\ A(2^n) + Bn2^n + n + 4 + \frac{7}{2}n^2 2^n$$

$$\begin{cases} T(0) = 5 \\ T(1) = 16 \end{cases}$$

$5 = A + 4$ $\quad \boxed{A = 1}$

$16 = 2A + 2B + 1 + 4 + 7$ $\quad 4 = 2A + 2B$

$4 = 2 + 2B$ $\quad \boxed{B = 1}$

$2 = 2B$

$$T(n) = \frac{1}{2}(2^n) + \frac{1}{2}n2^n + n + 4 + \frac{7}{2}n^2 2^n$$

Relaciones de recurrencias no homogeneas

Paso 1: Solucionar la solución homogenea:
- Ecuación caracteristica
- Obtener las raices y colocarlo en la forma que indica el teorema

Paso 2: Solución particular
Depende de la forma f(n) y si f(n) están contenido en la solución homogenea

- Elegir adecuadamente la solución
- Reemplazar en la ecuación para hallar las constantes

Paso 3: Solución total = Solución homogenea + Solución particular

Paso 4: Se hallan las constantes faltantes con las condiciones iniciales

$$(r-1)(r-5) = r^2 - 5r - r + 5 = r^2 - 6r + 5$$

$$T(n) = 6T(n-1) - 5T(n-2) + n + 8 \times 5^n$$

1) Parte homogenea

$$T(n) = 6T(n-1) - 5T(n-2) \qquad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 5}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad \frac{2}{2} = 1 \quad \frac{10}{2} = 5$$

$$\boxed{T(n) = A1^n + B5^n} = \boxed{T(n) = A + B5^n}$$

2) Parte particular $F(n) = n + 8 \times 5^n$

$$Cn + D \qquad E5^n$$

$$* \; T(n) = Cn^2 + Dn + \boxed{En5^n}$$

$$T(n) = 6T(n-1) - 5T(n-2) + n + 8 \times 5^n$$

$$Cn^2 + Dn + En5^n = 6C(n^2 - 2n + 1) + 6D(n-1) + \frac{6E(n-1)5^n}{5}$$

$$- 5C(n^2 - 4n + 4) - 5D(n-2) - \frac{5E(n-2)5^n}{25}$$

$$+ n + 8 \times 5^n$$

$n5^n$: $E = \frac{6}{5}E - \frac{5}{25}E = E = \frac{30}{25}E - \frac{5}{25}E = \boxed{E = \frac{25}{25}E}$

5^n: $0 = -\frac{6}{5}E + \frac{2}{5}E + 8 \qquad \frac{4}{5}E = 8 \qquad \frac{8 \times 5}{4} = E$

$\frac{40}{4} = E \qquad \boxed{E = 10}$

n^2: $C = 6C - 5C \qquad \boxed{C = C}$

n: $D = -12C + 6D + 20C - 5D + 1$

$0 = 8C + 1 \qquad \boxed{C = -\frac{1}{8}}$

Cte

$0 = 6C - 6D - 20C + 10D$

$0 = -14C + 4D \qquad D = \frac{14C}{4} \qquad D = \frac{7}{2} \qquad \boxed{D = \frac{-7}{16}}$

$$T(n) = A + B5^n + \frac{-1}{8}n^2 - \frac{7}{16}n + \boxed{10n5^n} \qquad T(0) = 10 \quad T(1) = 20$$

$\times \; 10 = A + B$

$20 = A + 5B - \frac{1}{8} - \frac{7}{16} + 50$

$-10 = -4B + \frac{1}{8} + \frac{7}{16} - 50 \qquad \boxed{B = \frac{\frac{1}{8} + \frac{7}{16} - 50 + 10}{4}}$

$B = -\frac{631}{64}$

$A = 10 - B$

$A = 10 + \frac{631}{64} \qquad \boxed{A = \frac{1271}{64}}$

Contenido

Universidad del Valle

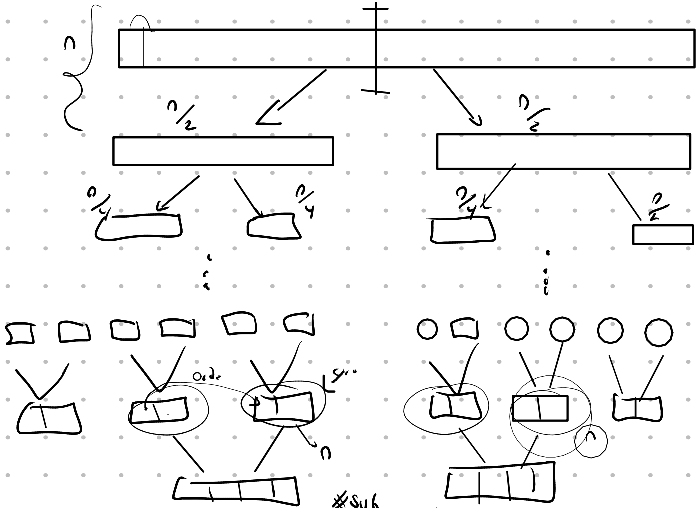
Estrategias de solución de recurrencias

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$\underline{T(n) = aT(n/b) + g(n)}$$

Universidad del Valle



$\Rightarrow F(n) = O(n^2)$

Dividir

$\leftarrow 1$ sol. trivial

#sub

tamaño

$$T(n) = a\,T(n/b) + g(n)$$

$O(n \log(n))$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \rightarrow \text{Mergesort}$$

Estrategias de solución de recurrencias

Métodos de solución

- Cambio de variable ~~X~~ } MD II
- Método maestro ~~X~~
- Por sustitución } FADA
- Por iteración
- Funciones generatrices } Metodos numericos

Cambio de variable

$aT(n/b) + g(n)$ $\boxed{n = 2^k}$

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1. Supongamos $n = 2^k$

$2T(2^{k-1}) + 2$

$$
\begin{aligned}
T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 \\
T(2^k) &= t_k
\end{aligned}
$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 2t_{k-1} + 2$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $\underline{T(n) = \alpha n - 2}$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

Cambio de variable

termino de n

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $\boxed{T(1) = 7}$ para n par

1. Supongamos $n = \underline{2^k}$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3; A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $\boxed{t_k = \alpha 5^k - 3/4}$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $k = \log_2(n)$
$T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A+1]$, $A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned}\log n &= \log 4^k\\ &= k\log_4 4\\ \log n &= k\end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general

$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$

$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$

$t_k^{(p)} = (Ak+B)4^k$

$$(Ak+B)4^k = 3[(A(k-1)+B)4^{k-1}] + 4^k k$$

$$(Ak+B)4^k = 4^k(3/4[(A(k-1)+B)] + k)$$

$$Ak+B = 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k$$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n \\ &= \alpha n^{\log_4 3} + 4n\log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $\boxed{O(n\log n)}$

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 173^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que:
$T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

$\boxed{b = \frac{3}{2}}$

$T(n/6)$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN	
Propiedad	**Ejemplo**
$a^0 = 1$	$(-5)^0 = 1$
$a^1 = a$	$23^1 = 23$
$a^n . a^m = a^{n+m}$	$x^2 . x^{-3} = x^{2-3} = x^{-1}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{7^8}{7^5} = 7^{8-5} = 7^3$
$(a.b)^n = a^n . b^n$	$(4.x)^3 = 4^3 . x^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8}$
$(a^n)^m = a^{n.m}$	$(m^{-1})^3 = m^{-1.3} = m^{-3}$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[5]{8^3} = 8^{\frac{3}{5}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$(a^n)^m = a^{n \times m}$

$T(n) = 3T(n/2) + n^2$ $\quad T(1) = 16$

por

Pillo, esto es porque n es <u>Discreto</u>

$n = 2^k$. $\quad$ n potencia 2

$\log_2 10$

$(2^2)^k$

$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + (2^k)^2$

4^k

$(n^m)^p = n^{m \cdot p}$

$T_k = 3T_{k-1} + (2^k)^2$

$(n^p)^m$

$\boxed{T_k = 3T_{k-1} + 2^{2k}}$ $\quad$ $T_k = 3T_{k-1} + 4^k$

Sol homogeneo

$r - 3 = 0 \quad r = 3 \quad \boxed{T_k^{(h)} = A3^k}$

Sol particular

$T_k^{(p)} = B4^k$

$B4^k = \frac{3B4^k}{4} + 4^k \Rightarrow B = \frac{3B}{4} + 1$

$\frac{1}{4}B = 1 \quad \boxed{B = 4}$

$T_k = A3^k + 4 \times 4^k$ $\quad$ ~~$T(1) = 16$~~

Recordar que esto está en términos de n PILAS

Pasamos de términos $\quad n = 2^k \quad k = \log_2(n)$

$T(n) = A \times 3^{\log_2(n)} + 4 \times 4^{\log_2(n)}$

$T(n) = A n^{\log_2(3)} + 4 \times n^2 \quad O(n^2)$

$16 = A + 4 \quad A = 12 \quad \log_9 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 9}$

$$\boxed{T(n) = 12 n^{\log_2(3)} + 4 \times n^2}$$

$\boxed{O(n^2)}$

Método Maestro

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + cn^d}$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

Universidad del Valle

Método Maestro

$O(n^{\log_3 9})$ $a = 9$ $b = 3$ $c = 1$ $d = 1$ $9 > 3^{1}$ $9 < 3^2$ $9 = 3^2$

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = \underline{O(n^2)}$

  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$
  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$

  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$

- **Mostrar que** $T(n) = 5T\cancel{5}(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $O(n^{\log_2 5})$

  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Por

$T(n) = 3T(n/2) + n^2$

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

$a = 3 \quad b = 2 \quad d = 2$

$3 < 2^2$

$O(n^2)$

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{cases} \}$$

Además, cuando $\boxed{n = b^k}$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $\boxed{C_1 = T(1) + c/(a-1)}$ y $\boxed{C_2 = -c/(a-1)}$

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$\boxed{T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2}$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

$$T(n) = 22 + 3T(2n/3)$$ $T(1)=6$

$n = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ $T_k = 3T_{k-1} + 22$

$T^{(h)}_{(k)} = A3^k$

$T^{(p)}_{(k)} = B$ $B = 3B + 22$

$-2B = 22$ $B = -11$

$\boxed{T_{(k)} = A3^k - 11}$ $\boxed{T(1) = 6}$

$n = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ $k = \log_{\frac{3}{2}} n$ $T(n) = A\, 3^{\log_{\frac{3}{2}} n} - 11$

$T(n) = A n^{\log_{\frac{3}{2}} 3} - 11$

$6 = A - 11$ $A = 17$

$$\boxed{T(n) = 17\, n^{\log_{\frac{3}{2}} 3} - 11}$$

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

$n = 2^k$

$T(2^k) = T(2^{k-1}) + 1$

$T_k = T_{k-1} + 1$

Parte homogenea

$T_k^{(h)} = A\,1^k = A$

$T_k^{(p)} = Bk$

$Bk = Bk - B + 1$

k $\quad B = B \quad B = 1$

c/o $\quad 0 = -B + 1$

$T(k) = A + k \qquad n = 2^k \qquad k = \log_2(n)$

$T(n) = A + \log_2(n) \rightarrow O(\log(n))$

$1 = A$

$$\boxed{T(n) = 1 + \log_2(n)}$$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.