Técnicas de conteo

Universidad del Valle
EISC

Mayo 2019

Temas del día

- Principio de palomar
  - Principio de palomar generalizado
  - Algunas aplicaciones del principio de palomar
- Permutaciones y combinaciones
- Coeficiente binomial

Contenido

Universidad del Valle

Principio del Palomar (P.P) (Principio de Dirichlet)

El principio del palomar asegura que si hay más palomas que nidos, debe haber algún nido con al menos dos palomas.

Teorema

Si $k+1$ o más objetos se colocan en k cajas, existe al menos una caja que contiene dos o más objetos.

Demostración Suponemos que ninguna de las cajas contiene más de un objeto. En tal caso, el número total de objetos es como máximo k, lo que contradice el hecho de que hay al menos $k+1$ objetos.

(a) (b) (c)

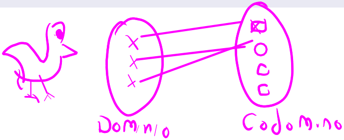
Una segunda forma del P.P

P.P

Si f es una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y y $\mid X \mid > \mid Y \mid$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$.
X es el conjunto de palomas.
Y es el conjunto de nidos.
Entonces asignamos la paloma x_i al nido $f(x_i)$.

Formalización de la segunda forma usando la primera definición

Por el P.P al menos dos palomas $x_1, x_2 \in X$, se asignan al mismo nido, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$.



Universidad del Valle

Ejemplo

En un grupo de 367 personas debe haber al menos dos que cumplen años el mismo día, ya que hay sólo 366 posibles fechas de cumpleaños.

Ejemplo

En cualquier grupo de 27 palabras del ~~español~~ debe haber al menos dos que comiencen por la misma letra, ya que hay 26 letras del alfabeto.

inglés

Principio del Palomar

$\dfrac{0,0}{1}$ $\quad\quad$ $\underbrace{1.0 — 5.0}_{41}$

Ejemplo

¿Cuantos estudiantes debe haber en la clase de matemáticas discretas para garantizar que al menos dos estudiantes reciben la misma nota?. Las notas son 0.0 y entre 1.0 y 5.0 incluidos.

Universidad del Valle

Ejemplo

¿Cuantos estudiantes debe haber en la clase de matemáticas discretas para garantizar que al menos dos estudiantes reciben la misma nota?. Las notas son 0.0 y entre 1.0 y 5.0 incluidos.

Solución

Existen en total 42 notas, por lo tanto deben existir al menos 43 estudiantes para garantizar al menos dos estudiantes reciban la misma nota.

¿Qué se puede demostrar usando el P.P. ?

Ejemplo

Demuestre que si se escoge cinco números cualesquiera del 1 al 8, entonces dos de éstos sumarán 9.

1 2 3 4 5 6 7 8

1, 8

2, 7

3, 6

4, 5

¿Qué se puede demostrar usando el P.P. ?

Ejemplo

Demuestre que si se escoge cinco números cualesquiera del 1 al 8, entonces dos de éstos sumarán 9.

Solución.

1. Construimos cuatro conjuntos de la siguiente manera:

$$A_1=\{1,8\},\ A_2=\{2,7\},\ A_3=\{3,6\},\ A_4=\{4,5\}$$

2. Cada uno de los cinco números debe pertenecer a uno de estos conjuntos.
3. Como sólo hay cuatro conjuntos por P.P se dice que dos de los números escogidos pertenecen al mismo conjunto.
4. Es decir, a uno de estos cuatro conjuntos.

Generalización del Principio del Palomar

$$\left\lceil \frac{35}{12} \right\rceil = 3$$

Definición

Si se colocan N objetos en k cajas, existe al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$

Ejemplo

En un grupo de 100 personas siempre hay al menos $\underline{\lceil 100/12 \rceil}$=9 que nacieron en el mismo mes.

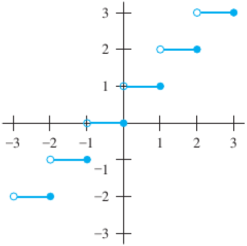
$$5 \times 5 + 1 = 26$$

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = \cancel{x} \qquad \left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6$$

Universidad del Valle

P.P Generalizado

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que debe haber en una clase para estar seguro de que al menos seis reciben la misma calificación, si las calificaciones posibles son **Suspenso, Aprobado,Notable**, **Sobresaliente,** y **Matrícula de Honor**?



(b) $y = [x]$

P.P Generalizado

Solución.

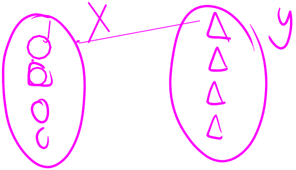
1. Para asegurar que al menos seis estudiantes reciben la misma calificación es el menor entero N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$
2. Si $N = 25$, es posible que cada una de las cinco calificaciones sea asignada a cinco estudiantes, de forma que NO haya seis que reciban la misma.
3. Por tanto, $N = 26$ es el número mínimo de estudiantes para garantizar que al menos seis reciben la misma calificación.

Tercera forma de P.P

Formalización para subconjuntos del dominio

Sea f una función de un conjunto finito X en un conjunto finito Y. Suponga que $\mid X \mid = n$ (objetos) y $\mid Y \mid = m$ (cajas). Sea $k = \lceil n/m \rceil$. Entonces existen al menos k objetos $a_1, \cdots, a_k \in X$ tales que

$$f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_k)$$



$$k = \left\lceil \frac{|X|}{|y|} \right\rceil$$

Demostración aplicando el P.P

Demuestre que si f es una función de S en T, donde S y T son conjuntos finitos y $m = \lceil |S|/|T| \rceil$, existen al menos m elementos de S cuya imagen es el mismo elemento de T, es decir, demuestra que existen m elementos $s_1, s_2, \cdots, s_m$ de S tales que
$f(s_1) = f(s_2) = \cdots = f(s_m)$

- Una paloma s está en su nido t cuando decimos que $f(s) = t$.
- Por el P.P la idea es colocar los $|S|$ objetos $f(s)$ para $s \in S$ en T cajas, una para cada elemento de T.
- Si se colocan $|S|$ objetos en $|T|$ cajas, existe al menos m elementos de S que no son todos los elementos de T.
- Los m elementos de S tienen como imagen un elemento común en T

Ejemplo

A lo largo de 30 días un equipo de béisbol juega al menos un partido cada día, pero no mas de 45 partidos en total. Demuestra que debe haber un cierto número de días consecutivos en los que el equipo juegue exactamente 14 partidos.

$34 \qquad 48$

$\{a_1, a_2 \ldots a_{15}\ a_{30}\}$

$\{a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots a_{30} + 14$

48

Principio de palomar

Solución

Sea a_j el número de partidos jugados antes o ~~después~~ del día j-ésimo. La sucesión $a_1, a_2, ..., a_{30}$ es estrictamente creciente de enteros distintos tales que $1 \leq a_j \leq 45$. Además, $a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14$ también es una sucesión creciente tal que $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.
Los 60 enteros positivos $\overbrace{a_1, a_2, ..., a_{30}}^{30}, \overbrace{a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14}^{30}$ son todos menores o iguales que 59. Por lo tanto por el principio de palomar, dos de estos enteros deben ser iguales. Como los enteros $a_i, i = 1, 2, .., 30$ son distintos y $a_j, j = 1, 2, ..., 30$ son distintos también, entonces deben existir dos indices tales que $a_i = a_j + 14$. Esto significa que los días $j + 1$ e i se jugaron exactamente 14 partidos.

$\{a_1, a_2 \ldots a_{30}\}$ $\underline{1 \leq a_j \leq 45}$

$\{a_1+14, a_2+14, \ldots a_{30}+14\}$ $\underline{15 \leq a_j \leq 59}$

$$\underbrace{\{a_1, a_2 \ldots a_{30}\} \text{ y } \{a_1+14, a_2+14, \ldots a_{30}+14\}}_{1 \leq a_j \leq 59}$$

$$\left\lceil \frac{60}{59} \right\rceil = 2$$

Usted tiene 59 posibles valores y 60 elementos

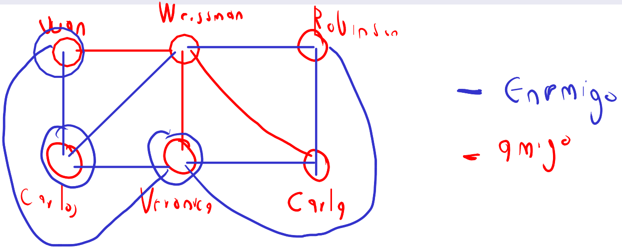
Principio de palomar

$\left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil = \cancel{X}$ al menos debe haber

caja

Ejemplo

Asuma que en un grupo de seis personas, cada par de individuos consiste de dos amigos o dos enemigos. Demuestra que en el grupo hay tres amigos mutuales o tres enemigos mutuales.



Ejemplo

Sea A un individuo del grupo, los otros cinco son sus amigos o enemigos. Aplicando el principio de palomar generalizado los 5 objetos están en 2 cajas (amigos o enemigos), entonces:

$$\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$$

Amigo $\lceil \frac{2}{2} \rceil = 1$

Esto significa que al menos 3 individuos están en una misma caja. Entre ellos pueden ser amigos o enemigos entre sí, supongamos que estos tres individuos son amigos de A y ellos son amigos entre sí, significa que todos son amigos entre sí.

Amigo

Enemigo

Ejercicio 1

Demuestra que en un conjunto de seis clases debe haber dos que tienen lugar el mismo día, suponiendo que las clases solo se ven de lunes a viernes.

$$\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil = 2 \qquad \left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil = 2$$

Principio de palomar

Solución

Como hay seis clases, pero solo cinco días laborales, el principio de palomar demuestra que hay que repetir al menos dos clases el mismo día.

Principio de palomar

Ejercicio 2

Demuestra que en cualquier grupo de cinco enteros cualesquiera hay dos que dan el mismo resto cuando se dividen entre cuatro

$$[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] \qquad \left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil = \underline{1}$$

Universidad del Valle

Solución

Como hay cuatro posibles restos al dividir un número por cuatro, el principio de palomar asegura que para cinco números enteros cualesquiera, al menos dos dan el mismo resto cuando se dividen por cuatro.

Ejercicio 3

Cuantos enteros se deben escoger en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para asegurar que al menos una pareja de ellos sume 7.

$(1, 6) \quad (2, 5) \quad (4, 3)$

$$\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil = 2$$

$$\boxed{N = 4}$$

Universidad del Valle

Solución

Las parejas que suman 7 son: $\{1,6\},\{2,5\},\{3,4\}$, escogiendo 4 enteros se asegura al menos tener 2 dentro de un conjunto que suma 7.

Ejercicio 4

Demuestra que hay al menos seis personas en California (Cuya población es 34 millones) que tienen la mismas tres letras iniciales en su nombre y cumplen años el mismo día.

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = \qquad \left\lceil \frac{34 \times 10^6}{26^3 \times 366} \right\rceil = \lceil 5.3 \rceil = 6 \checkmark$$

Principio de palomar

Solución

Hay 6432816 posibilidades para los nombres y el cumpleaños. Las posibilidades se calculan así: $26 * 26 * 26 * 366$. ¡Recuerde los años bisiestos!.

Solución

Por lo tanto según el principio de palomar generalizado $\lceil \frac{34000000}{6432816} \rceil = 6$ personas que tienen las mismas iniciales de nombre y fecha de cumpleaños.

Contenido

Universidad del Valle

Pensamos en una combinación descuidadamente, sin pensar en el orden de las cosas:

- **Observación**

  Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas: *No importa el orden en qué pusimos las frutas:*

  bananas, uvas y manzanas
  uvas, bananas y manzanas
  De todas formas es la misma ensalada.

  - La combinación de una clave; por ejemplo, 472
    Si importa el orden porque 724 no serviría, ni 247 tendría que ser 4-7-2

Definición

Una permutación de un conjunto de objetos distintos, es una $\mathit{ORDENACION}$ *de esos objetos. Una lista ordenada de* r *elementos de un conjunto se llama* $r\!-\!permutaci\acute{o}n$ *o variación de* r *elementos.*

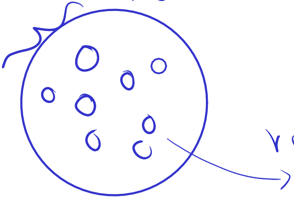
Cuántas secuencias diferentes, cada una de longitud r, puede formarse utilizando los elementos n elementos del conjunto A

Si T_1 puede efectuarse de n maneras, en vista que se puede escoger cualquier elemento de A para la primera posición, sólo quedan $(n-1)$ elementos, de manera que T_2 puede realizarse de $(n-1)$ maneras, y así sucesivamente, hasta que finalmente T_r puede efectuarse de $(n-(r-1))$, o $(n-r+1)$ maneras. En consecuencia, por el principio extendido de la multiplicación, una secuencia de r **elementos distintos** tomados de A puede formarse de

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Universidad del Valle

n elementos



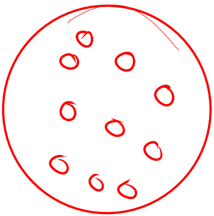
r elementos

$r \leq n$

$$\underbrace{\underset{1}{\underline{n}} \times \underset{2}{\underline{n-1}} \times \underset{3}{\underline{n-2}} \times \underset{4}{\underline{n-3}} \times \cdots \times \underset{r}{\underline{n-r+1}}}_{r \text{ elementos}}$$

$$\overbrace{n \times n-1 \times n-2 \times \cdots n-r+1}^{r} \times \underbrace{\boxed{n-r \times \quad \times 2 \times 1}}_{(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$



5

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \quad \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!}$$

$$\frac{10!}{(10-\underset{r}{5})!} = \frac{10!}{5!}$$

A una secuencia de r elementos distintos de A suele llamársela permutación de A tomados r a la vez.

Teorema

El número de $\texttt{r-permutaciones}$ *de un conjunto de n elementos distintos es:*

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

nP_r

$10P3$

Ejemplo

Escriba todas las permutaciones de $\{a, b, c\}$

Solución. abc,acb,bac,bca,cab,cba, en este caso $P(n, n) = n!$, es decir, 3!=6.

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Universidad del Valle

Permutaciones de n elementos y la regla del producto

Teorema

Existen $n!$ permutaciones de n elementos.

Demostración.

1. Una permutación de n elementos se puede construir en n pasos.
2. El primer elemento puede elegirse de n formas.
3. Una vez elegido el 1er elemento, el segundo puede elegirse de $n-1$ formas.
4. Una vez elegido el 2do elemento, el tercero puede elegirse de $n-2$ formas.
5. Por la regla del producto, existen:

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Universidad del Valle

Ejemplo

Escriba todas las 2-permutaciones de $\{a, b, c\}$

Solución. ab,ac,ba,bc,ca,cb en este caso $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$, es decir, 3!/1!=6.

{a,b}{a,c}{b,a}{b,c}{c,a}{c,b}

Ejemplo

¿Cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer clasificado de un concurso si hay un total de 100 concursantes?

Solución. Es el número de listas ordenadas de tres elementos:

$$P(100, 3) = \frac{100!}{(100-3)!} = 970{,}200$$

100×99×98

Universidad del Valle

Más permutaciones

DEF → X

$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$

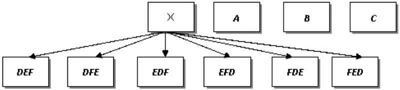
¿Cuántas permutaciones de las letras **ABCDEF** contienen la subcadena DEF? Solución. Para garantizar la presencia del patrón DEF en la subcadena, estas tres letras deben estar juntas. Por teorema 4!=24

DEF	A	B	C

Más permutaciones

DEF → X $\quad 4! \times 3!$

¿Cuántas permutaciones de las letras **ABCDEF** contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?



La primera tarea se puede hacer en 3!=6 y el segundo tarea puede realizarse de 24 formas.Por lo tanto, por la regla del producto tenenos 6.24=144 permutaciones.

Más permutaciones

¿De cuántas formas pueden formarse en una fila siete marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos sin ninguna pareja de jupiterianos puede estar junta?

$$\_M_1\_M_2\_M_3\_M_4\_M_5\_M_6\_M_7\_$$

1. La primera tarea: Los Marcianos pueden formarse de 7!=5040 maneras.
2. Segunda tarea: Como ninguna pareja de jupiterianos puede estar junta vamos a tener 8 posiciones posibles. Entonces, tenemos $P(8,5) = \dfrac{8!}{(8-5)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$=6720 maneras
3. Por la regla del producto tenemos:

$$5040 \cdot 6720 = 33{,}868{,}800$$

Universidad del Valle


1 2 3 4 5 6 7 8
8 7 6 5 4
8 P 5
7

Permutaciones con repetición

$$\underbrace{n \quad n \quad n \quad \cdots \quad n \quad n}_{r} = n^r$$

Definición

El número de r-permutaciones con repetición, o variaciones con repetición, de un conjunto de n elementos es n^r talque $r \leq n$.

`Ejemplo.` El número de 2-permutaciones con repetición de $\{a, b, c\}$ sería $3^2 = 9$

aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc

`Ejemplo.` ¿Cuántas cadenas de longitud n se pueden formar con las 26 letras del alfabeto inglés? Rta: 26^n

Permutaciones con repetición

¿Cuántos billetes de la lotería del Valle se ponen en juego cada miércoles en el sorteo, si juega con cuatro cifras y dos números para la serie?

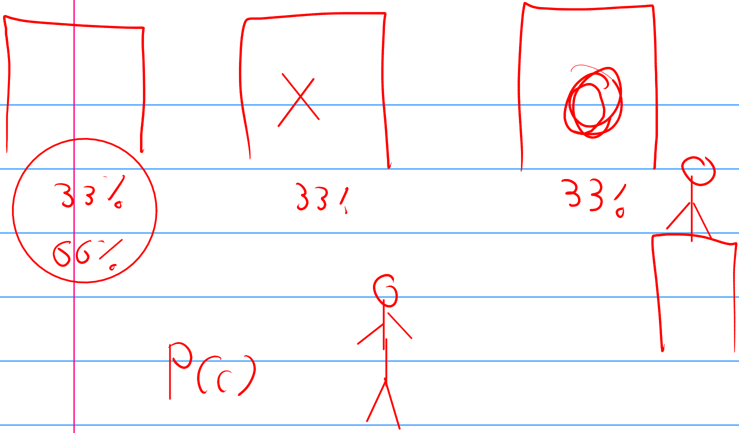
Aquí si importa el orden de colocación de las cifras y existen repeticiones, es decir, El número de r-permutaciones es n^r, donde $n = 10$, y $r = 4$

$10 \; 10 \; 10 \; 10 = 10^4 \times 100 = 10^6$

10	10	10	10	=10.000

10	10	=100

El total de billetes se puede calcular con la regla del producto $(10^4)(10^2)$=1.000.000



$P(C)$

$P(C \mid \underline{y = \text{colrq}})$

Permutaciones con objetos INDISTINGUIBLES

Definición

*Llamamos a las permutaciones con repetición de n elementos tomados de a en a, b en b, de c en c, etc, en los n elementos repetidos (un elemento aparece a veces, otro b veces, otro c veces,etc) verificándose que $a+b+c+\ldots=n$ donde los objetos del mismo tipo son **INDISTINGUIBLES** entonces el número de permutaciones con repetición es:*

$$P_n^{a,b,c}=\frac{n!}{a!b!c!}$$

`Ejemplo.` ¿Cuántas permutaciones se pueden obtener con a,b de forma que la a y la b se repitan dos veces?

$$P_4^{a,b}=\frac{4!}{2!2!}=6$$

a+b veces=4, aabb,abab,abba,baab,baba,bbaa

Universidad del Valle

Permutaciones con objetos INDISTINGUIBLES

¿Cuánto es el número de disposiciones de cuatro letras de la palabra *BALL*?

A B L L
A L B L
A L L B
B A L L
B L A L
B L L A
L A B L
L A L B
L B A L
L B L A
L L A B
L L B A

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = \underline{\underline{12}}$$

L es **INDISTINGUIBLE**

¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar reordenando las letras de la palabra *PAPAYA*?

Universidad del Valle

¿Cuantas palabras puedo formar con las letras de la palabra weissman de tamaño 7 y 8?

Tamaño 8 $\frac{8!}{2!}$

$+$

Tamaño 7 $\frac{7! \times 6}{2!}$ w e i m a n

SS

$+$

$7!$ Faltando una S

Combinaciones

Combinaciones mediante el uso de permutaciones

Podemos construir las r-permutaciones de un conjunto X con n elementos en dos pasos:

1. Primero se elige una r-combinación de X (un subconjunto no ordenado de r elementos)
2. Luego se ordena

$$\underbrace{\underline{r}\quad r-\underline{1}\quad \_\quad \_}_{r}$$

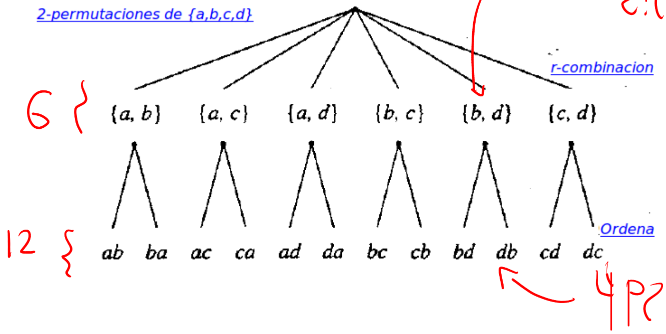
$$P(n,r) = C(\underline{n,r})r!, \text{ Entonces,}$$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}, \therefore C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Universidad del Valle

Combinaciones

$4C2$ $\qquad \dfrac{4!}{2!(4-2)!} \quad \dfrac{4!}{2! \times 2!}$



Combinaciones por regla del producto

Combinatorio desde una permutación

Las permutaciones r del conjunto se obtienen formando primero las $C(n,r)$ combinaciones r del conjunto y arreglando (ordenando) después los elementos en cada combinación r, lo cual puede efectuarse en $P(r,r)$ maneras. De tal modo que

$$
\begin{aligned}
P(n,r) &= C(n,r)\ldots P(r,r)\\
C(n,r) &= \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!}\\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!}
\end{aligned}
$$

Caso particular: $C(n,n) = 1$

Universidad del Valle

Combinaciones

Definición

El número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos, donde n es un entero no negativo y r un entero talque $0 \leq r \leq n$, es:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo

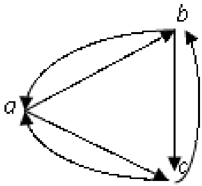
¿Cuánto es el número de 2-combinaciones sin repetición de a,b,c?

$$C(3, 2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Universidad del Valle

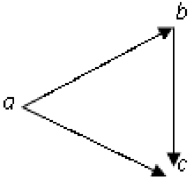
Combinaciones

Si importa el orden



ab,ac,ba,bc,ca,cb

No importa el orden



ab,ac,bc

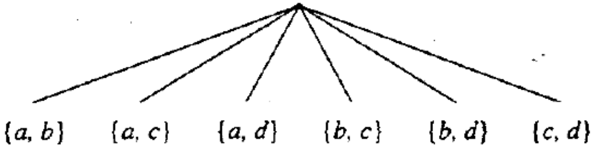
Ejemplos de Combinaciones

r-combinaciones

¿Cuáles son las 2-combinaciones de $\{a, b, c, d\}$?

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Son los seis subconjuntos $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$



$$10C7 = \frac{10!}{7! \times 3!}$$

Ejemplo

Un estudiante que realiza un examen de Historia recibe la instrucción de responder siete de 10 preguntas.
Aquí No importa el orden, como el estudiante puede responder:

$$C(10,7) = \frac{10!}{7!3!} = 120 \quad \text{formas}$$

$5C3 \times 5C4$

Ejemplo

1. Si un estudiante debe responder tres preguntas de las primeras cinco y cuatro preguntas de las últimas cinco.
   - Puede elegir tres preguntas de las primeras cinco.

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!2!} = 10 \quad \text{formas}$$

   - Puede elegir cuatro preguntas de las últimas cinco:

$$C(5,4) = \frac{5!}{4!1!} = 5 \quad \text{formas}$$

   - Por regla del producto el estudiante puede realizar el examen de 50 formas.

Universidad del Valle

$45C6 = 8'145\,060$

BALOTO

Obtenga el número de combinaciones para ganarse el BALOTO al sacar 6 números diferentes en cualquier orden de 45 balotas posibles.

$$C(45,6) = \frac{45!}{6!39!} = 8{,}145{,}060$$

$_{52}C_5$

Ejemplo

¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas (no ordenadas), pueden elegirse de una baraja de 52 cartas?

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!47!} = 2{,}598{,}960$$

Ejemplo

¿Cuántas manos de póquer tiene todas las cartas del mismo palo? Hay 4 palos de 13 cartas: tréboles, diamantes, corazones y espadas. El primer paso puede realizarse de 4 formas, y el segundo paso de $C(13,5)$ por lo tanto, tenemos $4 \cdot C(13,5) = 5148$.

Universidad del Valle

Combinaciones con repeticiones

Se obtiene el combinatorio como se viene haciendo

En un conjunto de n elementos hay $C(n+r-1,r)$ r-combinaciones con repetición.

Ejemplo

El número de 2-combinaciones con repetición de los elementos a y b se obtienen así: ($n=2$ y $r=2$)

$$C(2+2-1,2) = C(3,2) = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Las combinaciones son $\underrightarrow{aa, ab, bb}$

$C(n+r-1, r)$ combinaciones

¿De cuántas formas se pueden seleccionar cuatro piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas, naranjas y peras, si el orden no interesa y hay al menos cuatro piezas de cada tipo en la cesta?

Hay 4-combinaciones con repetición de un conjunto de tres elementos $\{manzana, naranja, pera\}$.

$$C(3+4-1, 4) = C(6, 4) = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$C(n+r-1, r)$

4 manzanas	4 naranjas	4 peras
3 manzanas, 1 naranja	3 manzanas, 1 pera	3 naranjas, 1 manzana
3 naranjas, 1 pera	3 peras, 1 manzana	3 peras, 1 naranja
2 manzanas, 2 naranjas	2 manzanas, 2 peras	2 naranjas, 2 peras
2 manzanas, 1 naranja, 1 pera	2 naranjas, 1 manzana, 1 pera	2 peras, 1 manzana, 1 naranja

Combinaciones

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

que satisfagan las siguientes restricciones: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
Cada solución de la ecuación es equivalente a elegir 15 elementos, x_i de tipo i, $i = 1, 2, 3$, Por lo tanto, el número de soluciones es igual al número de 15-combinaciones con repetición de un conjunto de 3 elementos.

$$C(3 + 15 - 1, 15) = C(17, 15) = \frac{17!}{15!3!} = \frac{17 \cdot 16}{6} = 21$$

¿Cuántas soluciones enteras no negativas que satisfagan $x_1 \geq 0, x_2 > 0, x_3 = 1$ tiene la ecuación

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 15}$$

Aplicando el valor de $x_3 = 1$ se obtiene:

$$x_1 + x_2 = 14$$

Y tomamos $x_2 > 0$, es decir $x_2 \geq 1$ entonces:

$$x_1 + x_2 = 13$$

Por lo tanto, tenemos 13-combinaciones de 2 elementos

$$C(2 + 13 - 1, 13) = C(14, 13)\frac{14!}{13!1!} = 14$$

$X_2 \geq 1$

$X > K$

$X \geq K + 1$

Universidad del Valle

$\underline{29}$ $C(n+r-1, r)$

$C(4+29-1, 29)$ $C(32, 29)$

Combinaciones en solución de ecuaciones

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$$

$x_i \geq 0$

Cada solución de la ecuación es equivalente a elegir 29 elementos, x_i de tipo i, $i = 1, 2, 3, 4$, por tanto el número de selecciones es:

$$C(4 + 29 - 1, 29) = \underline{C(32, 29)} = \frac{32!}{29!3!} = 4960$$

Combinaciones

$X_1 \geq 1,\ X_2 \geq 2,\ X_2 \geq 3,\ X_4 \geq 0 \quad C(n+r-1, r)$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 23 \quad C(4+23-1, 23)$

Combinaciones en solución de ecuaciones

¿Cuántas soluciones enteras que satisfagan $x_1 > 0, x_2 > 1, x_3 > 2, x_4 \geq 0$ tiene la ecuación

$C(26, 23)$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29 - 6$$

Una solución de esta ecuación: $x_1 > 0 = 1, x_2 > 1 = 2, x_3 > 2 = 3$
Por lo tanto se eligen 23 elementos.
$C(4 + 23 - 1, 23) = C(26, 23) = 2600$

Universidad del Valle

Otra forma de solucionar las cadenas de reordenar las letras de $PAPAYA$

¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar reordenando las letras de la palabra $PAPAYA$?

- Las tres letras A se pueden colocar en las seis posiciones de $C(6,3)$ formas distintas, dejando tres posiciones libres.
- Luego las dos letras P se pueden colocar en estos tres lugares de $C(3,2)$ formas.
- Queda un sólo lugar para la letra Y, es decir $C(1,1)$ formas.
- Según la regla del producto, el número de cadenas distintas es:

$$C(6,3)C(3,2)C(1,1) = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = 60 \quad \text{similar a:}$$

$$P_6^{A,P,Y} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

PAPAYA

Permutacion

$$P^{3,2} = \frac{6!}{3! \times 2!} = \underline{\underline{60}}$$

combinacion

P)

A) _ _ _ _ _ _

y)

$$\left.\begin{array}{c} 6C2 \\ \times \\ 4C3 \\ \times \\ 1C1 \end{array}\right\} 60$$

Ejercicios combinaciones

Con bolas de colores

Supongamos que existen pilas de pelotas rojas, azules y verdes, y que cada pila contiene al menos ocho pelotas.

1. ¿De cuántas formas podemos elegir ocho pelotas? $C(24,8) = 735471$. En este caso se suponen que existen 3 pilas con 8 pelotas cada una, para un total de 24 elementos.
2. ¿De cuántas formas podemos elegir ocho pelotas si debemos tener al menos una pelota de cada color? $C(8+3-1,3) = C(10,3) = \dfrac{10!}{3!7!} = 120!$ En este caso suponemos que tenemos una bolsa con pelotas rojas, azules y verdes las cuales se pueden repetir.

Ejercicio 1

Determina el número de 5-permutaciones de un conjunto de nueve elementos

$_9P_5$

Ejercicio 1

Determina el número de 5-permutaciones de un conjunto de nueve elementos

Solución

$\frac{9!}{(9-5)!} = 15120$

.

Ejercicios

$\emptyset, \{\cdot\}, \{\cdot\}, \ldots \{\cdot\}, \{\cdot\}, \ldots \{\cdot\}$

$\{\cdots\} \to 2^n$

Ejercicio 2

¿Cuantos subconjuntos de más de dos elementos tiene un conjunto de 100 elementos?.

$2^{100} - 1 - 100 - 100C2$

Universidad del Valle

Ejercicios

Ejemplo

¿Cuantos subconjuntos tiene un conjunto de 100 elementos?
Si recuerdan es el conjunto potencia, que tiene una cardinalidad de 2^{100}

Solución

- El número de conjuntos de un elemento es $\frac{100!}{(100-1)!} = 100$
- Debido a que el orden no es importante el número de conjuntos de dos elementos es $\frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100*99}{2} = 4950$
- Nos falta considerar el conjunto vacío.

Por lo tanto la respuesta para el ejercicio es:
$2^{100} - 100 - 4950 - 1 = 2^{100} - 5051$

Universidad del Valle

Contenido

Coeficiente binomial

Definición

Estos ofrecen el desarrollo de potencias de expresiones binomiales. Una expresión binomial es la suma de dos términos por ejemplo $(x+y)^2$.

$$(x+y)^{100}$$

Coeficiente binomial

Teorema del binomio

Sean x e y variables y n un entero no negativo. Se cumple que:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j$$

$$= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,1)x^{n-2}y^1 + \ldots + +C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n$$

$$(x+y)^7 = \sum_{j=0}^{7} C(7,j)x^{7-j}y^j =$$

$$C(7,0)\times x^7 + C(7,1)x^6y + C(7,2)x^5y^2 + C(7,3)x^4y^3 + C(7,4)x^3y^4$$
$$+ C(7,5)x^2y^5 + C(7,6)xy^6 + C(7,7)y^7$$

Universidad del Valle

Ejemplo

Cual es el desarrollo de $(x+y)^4$

Solución

Según el teorema del binomio:

$$(x+y)^4 = C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4$$

$$(x+y)^4 = \frac{4!}{0!4!}x^4 + \frac{4!}{1!3!}x^3y + \frac{4!}{2!2!}x^2y^2 + \frac{4!}{3!1!}xy^3 + \frac{4!}{4!0!}y^4$$

$$(x+y)^4 = 4x^4 + 6x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Coeficiente binomial

$n = 25$ $j = 13$ $C(25, 13)$

Ejercicio 1

Cual es el coeficiente $x^{12}y^{13}$ de $(x+y)^{25}$

Ejercicio 2

Cual es el coeficiente $x^{12}y^{13}$ de $(2x-3y)^{25}$

$C(25,13)(2)^{12}(-3)^{13}$

Solución ejercicio 1

Según el teorema del binomio:

$$C(2513) * x^{12}y^{13} = 5200300 * x^{12}y^{13}$$

Solución ejercicio 2

Reemplazando en la expresión del binomio:

$$(2x-3y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)(2x)^{n-j}(-3y)^j$$

El coeficiente de $x^{12}y^{13}$ se obtiene cuando $j = 13$ debido a que $n - j = 25 - 13 = 12$ es decir:

$$C(25,13)(2x)^{25-13}(-3y)^{13} = \frac{25!}{13!12!}(-3)^{13}2^{12}x^{12}y^{13}$$

Coeficiente binomial

Identidad de pascal

Sean n y k positivos tales que $n \geq k$ entonces:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k) \tag{1}$$

Con $C(n,0) = 1$ y $C(n,n) = 1$.

Coeficiente binomial

Identidad de pascal

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8	k = 9
n = 0	1									
n = 1	1	1								
n = 2	1	2	1							
n = 3	1	3	3	1						
n = 4	1	4	6	4	1					
n = 5	1	5	10	10	5	1				
n = 6	1	6	15	20	15	6	1			
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Identidad de pascal

Sean n y k positivos tales que $n \geq k$ entonces:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

Con $C(n,0) = 1$ y $C(n,n) = 1$.

$$\left.\begin{aligned}
C(5,1) &= \overset{1}{\cancel{C(4,0)}} + \overset{4}{C(4,1)} \\
C(4,1) &= \overset{1}{\cancel{C(3,0)}} + C(3,1)\ 3 \\
C(3,1) &= \overset{1}{\cancel{C(2,0)}} + C(2,1)\ 2 \\
C(2,1) &= \overset{1}{\cancel{C(1,0)}} + C\overset{1}{\cancel{(1,1)}}
\end{aligned}\right\} 5$$

Ejercicio 3

Escribe el desarrollo de $(x+y)^6$

Ejercicio 4

Cual es el coeficiente de $x^{101}y^{99}$ en el desarrollo de $(2x-3y)^{200}$

Solución ejercicio 3

$$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Solución ejercicio 4

$$C(200, 99) * (2)^{101}(-3)^{99}$$

***54.** Utiliza la regla del producto para demostrar que hay 2^{2^n} tablas de verdad distintas para el conjunto de proposiciones con n variables.

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n\}$

V
F

V
F

$\overbrace{2 \mid 2 \mid 2 \mid 2}^{n} \to 2^n$

$\{2^n$

2^{2^n}

*42 ¿Cuántas cadenas de diez bits contienen bien la cadena 00000 o bien la cadena 11111?

$$2^5 + 2^5 - 2 = \underline{\underline{62}}$$

32. ¿Cuántas funciones hay entre el conjunto {1, 2, ..., n}, donde *n* es un entero positivo, y el conjunto {0, 1}?

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & \\ 2 & 2 & 0 \\ & \vdots & 1 \\ 2 & & \\ 2 & n & \end{array}$$

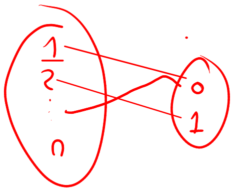
$$2^n$$

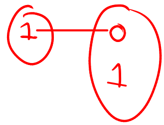
33. ¿Cuántas funciones hay entre el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, donde n es un entero positivo, y el conjunto $\{0, 1\}$

a) que sean inyectivas?

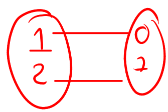
b) que asignen el 0 tanto a $\boxed{1 \text{ como a } n}$? → Dominio

c) que asignen el 1 a exactamente uno de los enteros positivos menores que n?



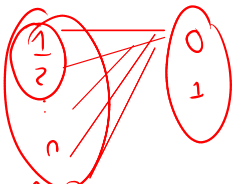


2.



2.

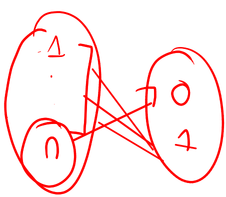
b



Pendiente

2^{n-2} si $n>1$ y 1 $n=1$

c)



$n-1+1=n$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 6.

Gracias

Próximo tema:
Recurrencias.