Métodos Numéricos

Estabilidad en Sistemas Lineales

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

November 6, 2014

Agenda

Número de Condición.

Análisis de Error y Condición.

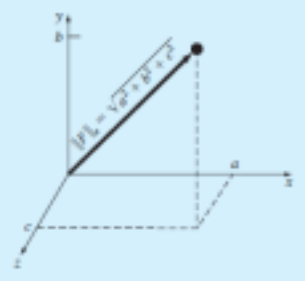
- En los problemas de Ingeniería se presenta la siguiente relación

$$\mathit{Entrada} + \mathit{Sistema} = \mathit{Salida}$$

- Cuando se conoce entrada-salida ó sistema-salida y se desea encontrar el sistema ó entrada respectivamente el problema se conoce como problema inverso

Número de Condición.
Análisis de Error y Condición.

- Una norma es un valor real que proporciona una medida de la longitud de un vector o matriz



Número de Condición.

Análisis de Error y Condición.

- Las p-normas para *vectores* se puede calcular a partir de la siguiente ecuación

$$||X||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- El vector de norma uniforme o de máxima magnitud se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$||X||_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Número de Condición.

Análisis de Error y Condición.

- La norma de suma de columna para las matrices se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$||A||_1 = max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- La norma de suma de fila para las matrices se calcula a partir de la siguiente ecuación

$$||A||_\infty = max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Número de Condición.
Análisis de Error y Condición.

- La norma 2 para las matrices se calcula a partir de la siguiente ecuación

$\det(A - \lambda I)$

$$||A||_2 = (\mu_{max})^{1/2}$$

Donde μ es el eigenvalor mas grande de $[A]^T[A]$

- La norma de *Frobenius* es otro estimador

$$||A||_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$$

$||A_2|| \leq ||A||_F$

Número de Condición.

Análisis de Error y Condición.

- **Problema:** Encuentre la norma 2 de la resta entre los vectores a y b

$$a = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

$$a - b = \begin{bmatrix} -0,01 \\ 0,03 \\ -0,02 \end{bmatrix}$$

Número de Condición.
Análisis de Error y Condición.

- **Solución:**

$$a - b = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.03 \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

$$||a - b||_2 = \sqrt{(-0.01)^2 + (0.03)^2(-0.02)^2} = 0.0374$$

Número de Condición.
Análisis de Error y Condición.

- **Problema:** Encuentre la solución para $[x_1, x_2]$, calcule la norma 2 de la diferencia entre las soluciones

Sin Ruido $AX = b$ b_{px}

$$\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.28 \\ 3.31 \end{bmatrix}$$

Con Ruido b

$$\begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.25 \\ 3.33 \end{bmatrix}$$

Número de Condición.
Análisis de Error y Condición.

- **Solución:**

$$x(sinruido) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(conruido) = \begin{bmatrix} 7.0089 \\ -8.3957 \end{bmatrix}$$

$$||b - b_{exacta}||_2 = 0.0374$$

$$||x - x_{exacta}||_2 = 11.1528$$

Número de Condición.

Análisis de Error y Condición.

- En el problema anterior una pequeña variación en la medición del vector de salida (b), produjo un cambio considerable en la estimacion de $[x_1, x_2]$
- Cuando se obtienen resultados de este tipo, se dice que la matriz A es inestable, la inestabilidad de un sistema se mide con el numero de condición

Número de Condición.
Análisis de Error y Condición.

$Ld = b \rightarrow$ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\end{bmatrix}$

$Ux = d$

- El número de condición permite medir la sensibilidad de la solución ante las perturbaciones o ruido

Si la matriz es cuadrada:

$$cond(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$$

Si la matriz no es cuadrada:

Pseudoinversa

$$cond(A) = ||A||_2||A^{+}||_2$$

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

1) $AA^{+}A = A$

2) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$

3) $A^{+}A = (A^{+}A)^{T}$

4) $AA^{+} = (AA^{+})^{T}$

Número de Condición.

Análisis de Error y Condición.

- **Problema:** Encuentre el número de condición de la matriz A, y comente sobre su estabilidad.

$\sqrt{\sum |A_{ij}|^2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.10 \\ 0.17 & 0.11 \\ 2.02 & 1.29 \end{bmatrix}$$

$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2$

$\underbrace{2{,}4126 \times 454{,}81}$

$1097{,}46$

Nota: La matriz A es inestable si el número de condición es mucho mayor a 1

$$A^+ = \begin{bmatrix} 204{,}12 & -135.122 & -4.3 \\ -319.58 & 211.66 & 7.5 \end{bmatrix}$$

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.