Recurrencias

Raúl E Gutiérrez de Piñerez R.
raul.gutierrez@correounivalle.edu.co
Ing. Carlos Andres Delgado S.[2]
carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2017

Universidad del Valle

Contenido

Recurrencias

- Las relaciones de recurrencia juegan un papel importante en el estudio de los algortimos.
- La programación dinámica en la cual el algoritmo parte un problema e varios subproblemas.
- La complejidad de tales algoritmos puede ser analizada usando especiales relaciones de recurrencia.
- También la complejidad de los algoritmos de divide y vencerás pueden ser analizados mediamte relaciones de recurrencias.
- Podemos resolver problemas avanzados de conteo usando las funciones generatrices para resolver relaciones de recurrencias.

Problema bacterias

Suponga que el número de bacterias de una colonia se dobla a cada hora. Si la colonia comienza con 5 bacterias. ¿Cuántas bacterias habrán en n horas?

1. Sea a_n el número de bacterias al final de las n horas.
2. Como el número de bacterias de doble cada hora tenemos la relación a_n=2a_{n-1} para $n \in Z^+$.
3. Por lo tanto al cabo de 5 horas habrán : Sea $a_0 = 5$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 = 2 \cdot 5 = 10 \\
a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 10 = 20 \\
a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 20 = 40 \\
a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 40 = 80 \\
a_5 &= 2a_4 = 2 \cdot 80 = 160
\end{aligned}$$

Problema de los conejos ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)

Problema conejos

Una pareja de conejos recién nacidos (uno de cada sexo) se sueltan en una isla. Los conejos no pueden tener descendencia hasta que cumplan dos meses, cada pareja tiene como descendencia otra pareja de conejos cada mes. Encuentre el número de conejos una vez transcurridos n meses.

mes	Parejas Repro.	Parejas Jov
1	0	1_A
2	0	1_A
3	1_A	1_B
4	1_A	$1_B + 1_C$
5	$1_A + 1_B$	$1_{B_1} + 1_C + 1_D$
6	$1_A + 1_B + 1_C$	$1_{B_1} + 1_{B_2} + 1_{C_1} + 1_D + 1_E$
7	$1_A + 1_B + 1_C + 1_{B_1} + 1_D$	$1_{B_{1_1}} + 1_{B_2} + 1_{B_3} + 1_{C_1} + 1_{C_2} + 1_{D_1} + 1_E + 1_F$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Problema de los conejos ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)

mes	Parejas Repro.	Parejas Jov
1	0	1_A
2	0	1_A
3	1_A	1_B
4	1_A	$1_B + 1_C$
5	$1_A + 1_B$	$1_{B_1} + 1_C + 1_D$
6	$1_A + 1_B + 1_C$	$1_{B_1} + 1_{B_2} + 1_{C_1} + 1_D + 1_E$
7	$1_A + 1_B + 1_C + 1_{B_1} + 1_D$	$1_{B_{1_1}} + 1_{B_2} + 1_{B_3} + 1_{C_1} + 1_{C_2} + 1_{D_1} + 1_E + 1_F$

1. El primer mes el número de parejas jóvenes de conejos es $f_1 = 1$ si f_n es el número de parejas en n meses.
2. Durante el segundo mes $f_2 = 1$ y f_{n-1} el número de parejas que había el mes anterior.
3. f_{n-2} es el número de parejas en cada nacimiento par.

Número de Fibonacci

Problemas de conejos como una relación de recurrencia

Sea $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ entonces

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

para $n \geq 3$

Universidad del Valle

Problema bancario

Problema bancario

Supongamos que una persona deposita 10000 pesos en una cuenta bancaria que le proporciona un interés anual del 11%. Si los intereses se abonan a la misma cuenta. ¿Cuanto dinero habrá en la cuenta al cabo de 30 años?

Sea P_n: saldo de la cuenta la cabo de n años.
P_{n-1}: saldo de la cuenta transcurridos $n-1$ años.
$0.11P_{n-1}$ es el interés y P_{n-1} es el saldo. Por lo tanto, para $P_0 = 10000$

$$\boxed{P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1}} = 1.11P_{n-1}$$

Calculamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$

$P_n = 1.11 P_{n-1}$

Universidad del Valle

Problema bancario

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Calculamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1.11P_0 \\
P_2 &= 1.11(1,11)P_1 = (1,11)^2 P_0 \\
P_3 &= 1.11P_2 = (1,11)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1.11)^n P_0
\end{aligned}$$

Problema bacterias

Suponga que el número de bacterias de una colonia se triplica a cada hora.

1. Determinar una relación de recurrencia para el número de bacterias después de transcurridas n horas

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$a_0 = x$

$a_1 = 3a_0$

$a_2 = 3a_1 = 3^2 a_0$

$a_3 = 3a_2 = 3^3 a_0$

$a_n = 3^n a_0$

Problema bacterias

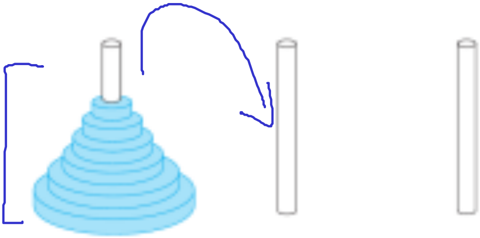
2. Si se utilizan 100 bacterias para empezar una nueva colonia ¿Cuántas bacterias habrá en la colonia después de diez horas? $a_0 = 100$

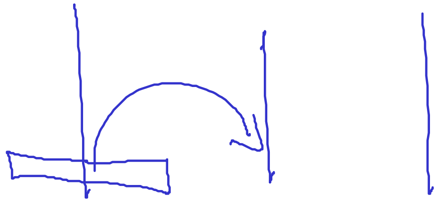
$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3a_0 \\
a_1 &= 3(100) \\
a_2 &= 3 \cdot 3(100) \\
a_3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3(100) \\
&\vdots \\
a_n &= 3^n(100)
\end{aligned}
$$

Si $n = 10$ tenemos $a_{10} = 3^{10}(100)$ bacterias.

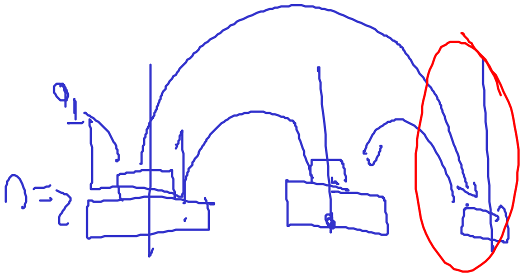
Torres de Hanoi

Se componen tres barras montadas sobre una base cada una junto con discos de diferentes tamaños. Reglas del juego:
1. Los discos se mueven de uno en uno.
2. Un disco no se puede colocar encima de otro más pequeño.
3. Los discos colocados en la primera barra se deben colocar en la segunda barra ordenados con el de mayor base.



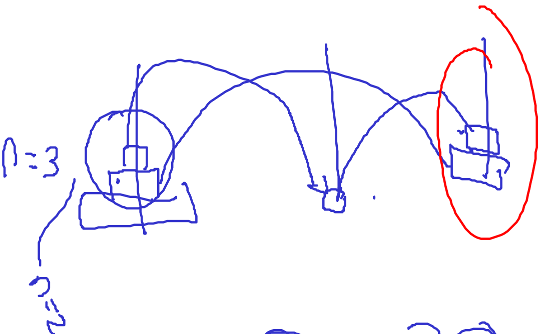


$\cancel{X}\ M = 1$



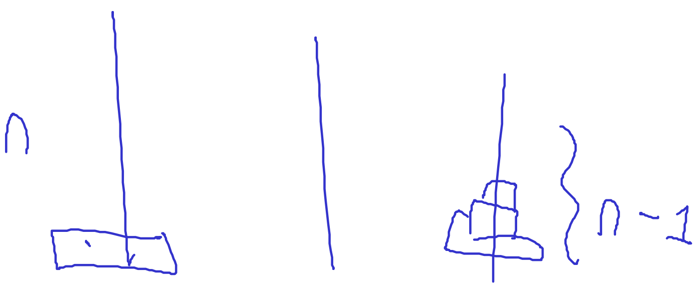
$\cancel{X}\ M = 3$

$a_2 = 2a_1 + 1$



$a_3 = 2a_2 + 1$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$



Solución de Torres de Hanoi

Sea H_n número de movimientos necesarios para resolver el problema con n discos. Sea H_1 el movimiento de tener un disco.

$H_n = 2H_{n-1} + 1$

1. Los $n-1$ discos de encima se pueden llevar a cualquier torre, realizando H_{n-1} movimientos.
2. Siempre se realizan H_{n-1} para mover el disco a una torre y H_{n-1} a la otra

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

$$\begin{aligned} H_2 &= 2H_1 + 1 = 3 \\ H_3 &= 2H_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 \\ H_4 &= 2H_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 \end{aligned}$$

Definición

Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para el número de cadenas de n bits que **NO** contienen dos ceros consecutivos.¿Cuántas cadenas de longitud 4 hay?

Inicialmente, a_n: Cadenas de n bits que inician en 1 + Cadenas de n bits que inician en 0.
Si $n = 1$, 0 y 1, $a_1 = 2$ (cadenas de longitud 1)
Si $n = 2$, 01, 10, 11, $a_2 = 3$ (cadenas de longitud 2)
Si $n = 3$

00

$n = 1$: 0, 1

$a_1 = 2$

$n = 2$: 01, 10, 11

$a_2 = 3$

$n = 3$: 010, 011, 101, 110, 111

Problemas de cadenas con relación de recurrencia

1. Tomamos las cadenas de $n-1$ bits y le añadimos un 1 al principio, sea $n-1=2$, es decir, $01, 10, 11$ y le agregamos 1, $011, 101, 111$
2. Tomamos las cadenas de $n-2=1$ bits y le añadimos un 10 al principio, entonces $010, 110$. Por lo tanto tenemos que $a_3=5$, es decir, $a_3=a_2+a_1=3+2=5$

En general,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para} \quad n \geq 3$$

a_{n-1}: cadenas de $n-1$ bits que inician en 1.
a_{n-2}: cadenas de $n-2$ bits que inician en 0.

COntar las cadenas de bits que no pueden tener
10 consecutivos

$n=1$

1
0

$n=2$

00
01
11

$n=3$

000
001
011
111

$n=4$

0000
0001
0011
0111
1111

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

Número de cadenas binarias que no pueden tener tres unos consecutivos

$n=1$

1
0

$n=2$

00
01
10
11

$n=3$

000
001
010
011
100
101
110

$n=4$

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
1000
1001
1010
1011
1100
1101

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

Contenido

Recurrencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes

Una relación lineal, homogénea con coeficientes constantes es de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \quad \text{Homogénea de orden } k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes reales y $c_k \neq 0$

Recurrencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes

Para resolver la R.R suponemos una solución $a_n = r^n$, r constante.

$\boxed{a_n = r^n}$ es solución de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ **sii**

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k} \tag{1}$$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

$r^n = r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3}$

$r^3 = r^2 + r + 1$

Recurrencias lineales homogéneas

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k} \tag{2}$$

Dividimos por r^{n-k}

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{c_1 r^{n-1}}{r^{n-k}} + \frac{c_2 r^{n-2}}{r^{n-k}} + \ldots + \frac{c_k r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

Planteamos la ecuación característica:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_{k-1} r + c_k \tag{3}$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0 \tag{4}$$

$a_n = r^n$ es solución **sii** r es solución de (4)

$a_n = r^n \qquad a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2}$

Teorema

Sean c_1 y c_2 reales, supongamos que $\boxed{r^2 - c_1 r - c_2} = 0$ tiene dos raices reales distintas r_1 y r_2. Entonces la suceción $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ sii $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, para $n = 0, 1, 2$ donde α_1 y α_2 son constantes.

$r^2 - C_1 r - C_2 = 0 \qquad \frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{C_1 r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{C_2 r^{n-2}}{r^{n-2}} \qquad = r^2 = C_1 r + C_2$

$a \quad b$

$a_n = X a^n + Y b^n$

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$

1. La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. Así **Por teorema**, la secuencia $\{a_n\}$ es la solución de la recurrencia **sii**

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$r^2 = r + 2$

$r^2 - r - 2 = 0$

Resolviendo las ecuaciones:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1)$$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$ar^2 + br + c$

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 4$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r^2 - 3r - 4$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \qquad r_1 = 4 \qquad r = -1$$

$$a_n = \alpha_1 (4)^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$\boxed{a_n = 4^n}$$

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$4 = 4\alpha_1 - \alpha_2$$

$$5 = 5\alpha_1 \qquad \alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 0$$

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 8$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

n

$$r^2 - 4r - 5 \quad r_1 = -1, \quad r_2 = 5$$

$$a_n = \alpha_1 (-1)^n + \alpha_2 (5)^n$$

$1 = \alpha_1 + \alpha_2$

$8 = -\alpha_1 + 5\alpha_2$

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{3}{2} 5^n}$$

$a_0 = 1$ ✓

$a_1 = 8$

$a_2 = 37$

$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} 5^2$

$9 = 6\alpha_2$

$\alpha_2 = \frac{3}{2}$

$1 = \alpha_1 + \frac{3}{2}$

$\frac{2}{2} - \frac{3}{2} = \alpha_1$

$\alpha_1 = -\frac{1}{2}$

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$

2. Entonces $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -1$ por lo tanto la solución de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

Resolver la relación de recurrencia de fibonacci

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$ por tanto la ecuación característica $r^2 - r - 1 = 0$ cuyas raíces son: $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$ por lo tanto por teorema:

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para algunas constantes α_1 y α_2 y las condiciones iniciales $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ f_1 &= \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Universidad del Valle

Resolver la relación de recurrencia de fibonacci
La solución de las ecuación $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$ y $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$, por tanto una **fórmula explicita de Fibonacci:**

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Recurrencias lineales homogéneas

Resolver la recurrencia $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ para $n \geq 0$, $a_0 = 2$ y $a_1 = 8$

1. Sea $a_{n+2} = r^{n+2}$ para $n \geq 0$ por tanto se obtiene la ecuación característica $r^2 + 4r - 5 = (r+5)(r-1) = 0$ cuyas raíces $r_1 = -5$ y $r_2 = 1$
2. La sucesión $\{a_n\}$ es solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1(-5)^n + \alpha_2(1)^n$$

3. Por tanto el sistema de ecuaciones para obtener α_1 y α_2

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= 8 = \alpha_1(-5) + \alpha_2 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 3$

$$a_n = 3(1)^n - (-5)^n$$

Teorema 2

Sean c_1 y c_2 reales con $c_2 \neq 0$, supongamos que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ tiene una sola raíz r_0. Una secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ **sii** $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, para $n = 0, 1, 2$ donde α_1 y α_2 son constantes.

Recurrencias lineales homogéneas

Solucionar la recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ y condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 6$

1. Entonces $r^2 - 6r + 9 = 0$, $(r-3)^2 = 0$ tiene como única raíz $r = 3$.
2. La solución de la recurrencia por **teorema 2** es:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

3. Usando los valores iniciales calculamos:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 = \alpha_1 \\ a_1 = 6 &= \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$

$$a_n = 3^n + n3^n$$

$r_1 = 2 \to 2^n$ $\qquad$ $r_4 = 3 \to 3^n$

$r_2 = 2 \to n2^n$ $\qquad$ $r_5 = 3 \to n3^n$

$r_3 = 2 \to n^2 2^n$ $\qquad$ $r_6 = 4$

$$a_n = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + D3^n + En3^n + F4^n$$

Teorema 3

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con k **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son constantes.

Recurrencias lineales homogéneas

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

1. La ecuación característica $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 1, r_2 = 2$ y $r_3 = 3$, porque $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$
2. La solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Por tanto las constantes deben ser calculadas

$$\begin{aligned} a_0 = 2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 = 5 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3, \\ a_2 = 15 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9 \end{aligned}$$

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$, Por lo tanto la **única solución** de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$ con

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Teorema 4

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con t **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_t$ con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_t$ respectivamente, así que $m_i \geq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, t$ y $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$ Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n + \ldots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_{i,j}$ son constantes para $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$

Universidad del Valle

Supongamos que las raíces de la ecuación característica son $2, 2, 2, 5, 5$ y 9 que forma tiene la solución general.

1. Hay tres raíces distintas.
2. Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.
3. Solución

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \alpha_{1,2} n^2) 2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n) 5^n + \alpha_{3,0} 9^n$$

Encontrar la solución la recurrencia

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Con $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$, la ecuación característica de la recurrencia es :

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

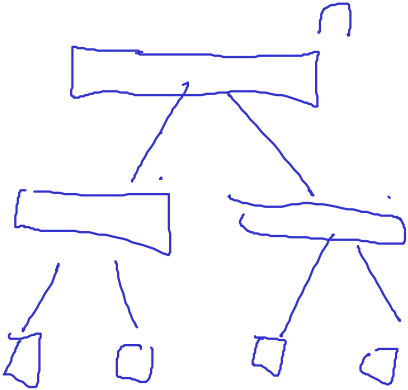
$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$$

Entonces $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3$ y $\alpha_{1,2} = -2$, la única solución es la secuencia $\{a_0\}$

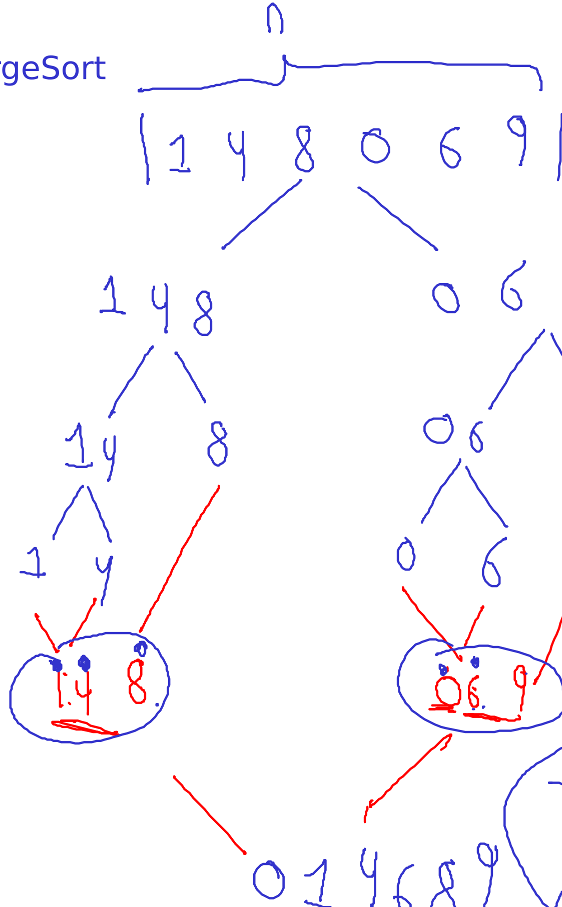
$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

Universidad del Valle

Divide y vencerás



MergeSort



$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

$$T(n) = T(n/2) + T(n/2) + n$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 3T(n-2) \; ; \quad T(0) = 2, \quad T(1) = 3$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r^2 - 2r - 3 \quad \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

$$T(n) = A\,3^n + B(-1)^n$$

$$2 = A + B$$

$$3 = 3A - B$$

$$5 = 4A \qquad A = \frac{5}{4} \qquad B = \frac{3}{4}$$

$$T(n) = \frac{5}{4}3^n + \frac{3}{4}(-1)^n$$

Contenido

$T(n) = C_1 T(n-1) + C_2 T(n-2) \cdots + C_k T(n-k)$

Recurrencias lineales no homogéneas

homogenea   Función

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$
Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$
Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 1,}$ $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

Ejercicio 1

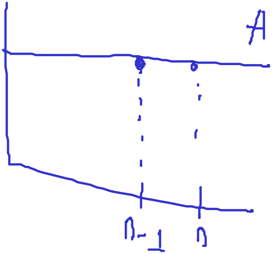
1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $\boxed{F(n) = 1}$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n^p = A$$

$$A = 2A + 1$$

$$A = -1$$



$$\boxed{a_n^t = \alpha 2^n - 1}$$

$$a_1 = 1$$

$$1 = \alpha 2 - 1$$

$$2 = 2\alpha$$

$$\alpha = 1$$

$$a_n^t = 2^n - 1$$

$$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2) + n$$

$a_n^h =$ $r^2 - 3r - 4 = 0$ $\quad r = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$

$r = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$

$r = \frac{3 \pm 5}{2}$ $\quad 4, \; -1$

$$\boxed{a_n^h = \alpha_1 (4)^n + \alpha_2 (-1)^n}$$

Solución homogénea

$F(n) = n$

$a_n^p = A_1 n + A_0$ $\quad T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2) + n$

$$A_1 n + A_0 = 3(A_1(n-1) + A_0) + 4(A_1(n-2) + A_0) + n$$

$$A_1 n + A_0 = 3A_1 n - 3A_1 + 3A_0 + 4A_1 n - 8A_1 + 4A_0 + n$$

$$0 = 6A_0 - 11A_1 + 6A_1 n + n$$

$$0 = 6A_0 - 11A_1$$

$$0 = 6A_1 n + n \rightarrow -n = 6A_1 n$$

$$-\frac{1}{6} = A_1$$

$$0 = 6A_0 + \frac{11}{6} \rightarrow -\frac{11}{6} = 6A_0$$

$$A_0 = -\frac{11}{36}$$

$$a_n^p = -\frac{1}{6} n - \frac{11}{36}$$

$$a_n^t = \alpha_1 (4)^n + \alpha_2 (-1)^n - \frac{1}{6} n - \frac{11}{36}$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

$a(n-2)$

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**

La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\underline{\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n}$ (**por Teorema 1**)

$a_n^{(p)} = A7^n$ $\quad A7^n = 5A7^{n-1} - 6A7^{n-2} + 7^n$

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

2^n 3^n 5^n

r^n

Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

E. homogénea,

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$

   $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$

4. Entonces por términos semejantes $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

$$a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2} + \underline{n2^n} + \underline{n} \qquad a_0 = 2 \quad a_1 = 10$$

$$a_n^{(h)} = c_1(2+\sqrt{7})^n + c_2(2-\sqrt{7})^n$$

$n = An + B$

$n2^n = 2^n(Kn + F)$

$$a_p = An + B + \underline{2^n(Kn + F)}$$

$$\underline{A}n + \underline{B} + 2^n(\underline{K}n + \underline{F}) = 4\overbrace{\left(A(n-1) + B + \frac{2^n}{2}(K(n-1) + F)\right)}^{a_{n-1}}$$

$$\underbrace{3\left(A(n-2) + B + \frac{2^n}{4}(K(n-2) + F)\right)}_{a_{n-2}} + n2^n + n$$

1) T.S Constante

2) T.S n

3) T.S 2^n

4) T.S $n2^n$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad m, existe una solución particular de la forma
$$n^m \underbrace{(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n}_{\text{Solución particular}}$$

$r = 2$ y 3

$F(n) = 2^n \rightarrow a_n^{(p)} = A2^n$

$a_n^{(h)} = \alpha_1 (2)^n + \alpha_2 (3)^n$

$n^m \rightarrow a_n^{(p)} = An2^n$

$r = \underbrace{2, 2, 2}_{m=3}, \underbrace{3, 3, 3, 3}_{m=4}$

$F(n) = 2^n + 3^n$

$a_n^{(h)} = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + D3^n + En3^n + Fn^2 3^n + gn^3 3^n$

$a_n^{(p)} = Hn^3 2^n + In^4 3^n$

Recurrencias lineales no homogéneas

$C2^{?}$

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B = {} & 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ & -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$

$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

Contenido

Estrategias de solución de recurrencias

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Estrategias de solución de recurrencias

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución
- Por iteración
- Funciones generatrices

Cambio de variable

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

$k = \log_2(n)$ 2^k

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

$\frac{2^k}{2} = 2^{k-1}$

2. Por tanto la recurrencia $\boxed{t_k = 2t_{k-1} + 2}$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

Cambio de variable

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1]$, $A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned} \log n &= \log 4^k \\ &= k\log_4 4 \\ \log n &= k \end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak+B)4^k$

$$\begin{aligned} (Ak+B)4^k &= 3[(A(k-1)+B)4^{k-1}] + 4^k k \\ (Ak+B)4^k &= 4^k(3/4[(A(k-1)+B)] + k) \\ Ak+B &= 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k \end{aligned}$$

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ **es** $O(n \log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n \log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n \log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n \log n)$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 17 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que: $T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Método Maestro

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + cn^d}$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{array} \right\}$$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$

$a = 2 \quad b = 2 \quad c = 1 \quad d = 0$

$a < b^d \quad 2 < 2^0 \quad 2 < 1$ ✗

$a = b^2 \quad 2 = 2^0 \quad 2 = 1$ ✗

$a > b^d \quad 2 > 2^0 \quad 2 > 1$ ✓

$O\left(n^{\log_b a}\right) = O(n) \le cn, c \geq 1$

$\boxed{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n} \rightarrow$ mergesort

$a = 2 \quad b = 2 \quad c = 1 \quad d = 1$

$a < b^d \quad 2 < 2^1 \quad \times$

$a = b^d \quad 2 = 2^1 \quad \checkmark$

$O(n^d \log(n)) \rightarrow O(n \log(n))$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$a = 2 \quad b = 2 \quad c = \underline{1} \quad d = 2$

$a < b^d \quad 2 < 2^2$ ✓

$$O(n^d) = O(n^2)$$

Método Maestro

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$
  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$
- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$
  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$
  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$
- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $O(n^{\log_2 5})$
  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{array} \right\}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

Método Maestro

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17 n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.

Universidad del Valle