

Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- * Clausuras de una relación
- * Relaciones de equivalencia
- * Relaciones de orden parcial

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- Indique si la relación es **reflexiva**

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Faltan los pares $(3,3)$ y $(4,4)$

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Faltan los pares $(3,3)$ y $(4,4)$

- La **clausura reflexiva de R** es la relación

$$R' = R \cup \{(3,3),(4,4)\}$$

Relaciones de equivalencia

Clausura reflexiva

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Faltan los pares $(3,3)$ y $(4,4)$

- La **clausura reflexiva de R** es la relación

$$R' = R \cup \{(3,3),(4,4)\}$$

La **clausura reflexiva** de R , es la relación R' que contiene todos los pares de R y además aquellos pares que le faltan para ser reflexiva

Relaciones de equivalencia

Clausuras de una relación

Dada una relación R , se tienen 3 tipos de clausuras:

- Clausura reflexiva
- Clausura simétrica
- Clausura transitiva

Relaciones de equivalencia

Clausura simétrica

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación simétrica?

Relaciones de equivalencia

Clausura simétrica

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación simétrica?

Faltan los pares $(2,1)$, $(2,3)$, $(1,4)$

Relaciones de equivalencia

Clausura simétrica

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación simétrica?

Faltan los pares $(2,1)$, $(2,3)$, $(1,4)$

- La **clausura simétrica de R** es la relación

$$R' = R \cup \{(2,1),(2,3),(1,4)\}$$

Relaciones de equivalencia

Clausura transitiva

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación transitiva?

$$(1,4) \quad (3,4) \quad] \quad =$$

Relaciones de equivalencia

Clausura transitiva

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación transitiva?

Faltan los pares $(1,4)$, $(3,4)$

Relaciones de equivalencia

Clausura transitiva

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación transitiva?

Faltan los pares $(1,4)$, $(3,4)$

- La **clausura transitiva de R** es la relación

$$R' = R \cup \{(1,4), (3,4)\}$$

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3)\}$$

Muestre las clausuras reflexivas, simétricas y transitivas

$$R_r = R \cup \{(4,4)\}$$

$$S_r = R \cup \{(4,2), (2,4), (1,3)\}$$

$$T_r = R \cup \{(3,4)\}$$

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3)\}$$

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(4,4)\}$$

- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(4,1),(4,2),(1,3)\}$$

- **Clausura transitiva**

$$R' = R \cup \{(3,4)\}$$

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (4,4)\}$$

Muestre las clausuras reflexivas, simétricas y transitivas

$$R_f = R \cup \{(2,2)\}$$

$$S_f = R \cup \{(2,1), (3,2), (3,4)\}$$

$$T_f = R \cup \{(2,1), (3,2), (3,4), (4,2), (2,2), (2,4)\}$$

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$$

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(2,2)\}$$

- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(2,1),(3,2),(3,4)\}$$

- **Clausura transitiva**

$$R' = R \cup \{(2,1),(3,2),(3,4),(4,2)\} \quad (2,2) \quad (2,4)$$

Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Muestre las clausuras reflexivas y simétricas

Relaciones de equivalencia

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(1,1), (4,4)\}$$

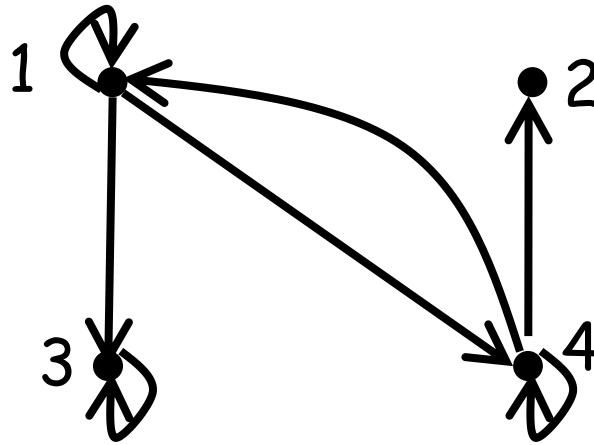
- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relaciones de equivalencia

Muestre las clausura reflexiva, simétrica y transitiva



R_F

$R \cup \{(2, 2)\}$

$R_S =$

$R \cup \{(2, 4), (3, 1)\}$

$R_T =$

$R \cup \{(1, 2), (4, 3)\}$

Relaciones de equivalencia

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(2,2)\}$$

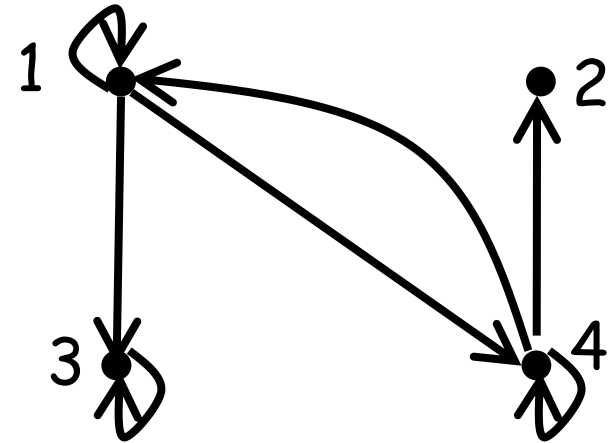
- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(3,1),(2,4)\}$$

- **Clausura transitiva**

$$R' = R \cup \{(1,2),(4,3)\}$$

R:



Relaciones de equivalencia

Relaciones especiales

- Relación de equivalencia
- Relación de orden parcial

Relaciones de equivalencia

Relación de equivalencia

- Una relación R en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de equivalencia:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ SI
- $R_2=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ NO
- $R_3=\{(1,1),(\underline{2},\underline{2}),(\underline{2},3),(\underline{3},2),(\underline{3},3),(\underline{4},4)\}$ SI

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de equivalencia:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ **si**
- $R_2=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$ **no es reflexiva ni transitiva**
- $R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$ **si**

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de equivalencia:

- $R_4=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
- $R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,4)\}$

$(3,3)$

$(2,3)$
No

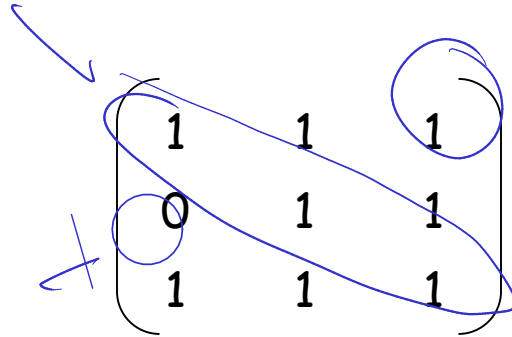
Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de equivalencia:

- $R_4=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$ **no es transitiva**
- $R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,4)\}$ **no es simétrica ni transitiva**

Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ es de equivalencia



1	1	1
0	1	1
1	1	1

No
=

Relaciones de equivalencia

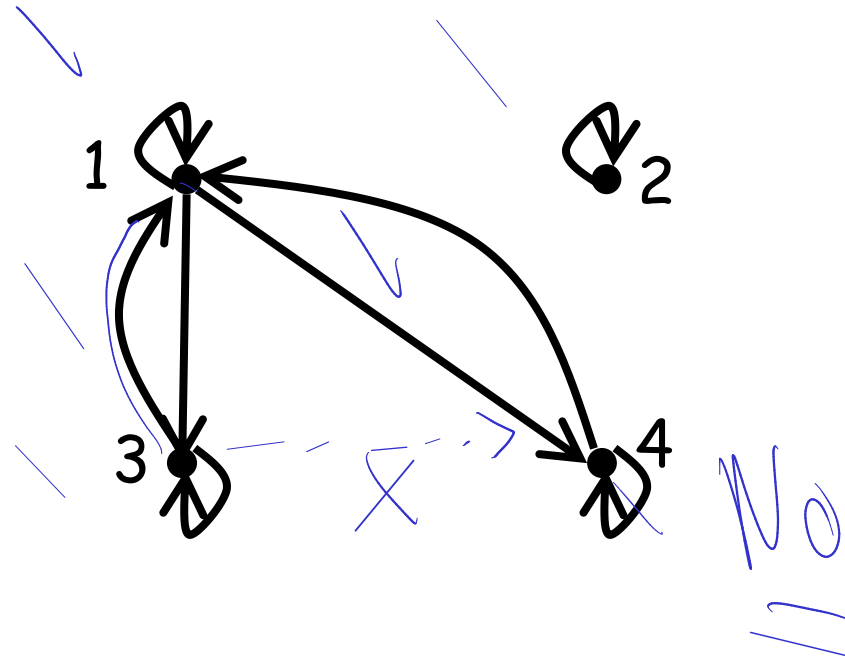
Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ es de equivalencia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva pero no es simétrica ($(1,2) \in R$ y $(2,1) \notin R$) ni transitiva ($(2,3) \in R$ y $(3,1) \in R$ pero $(2,1) \notin R$). Por lo tanto, **no es una relación de equivalencia**

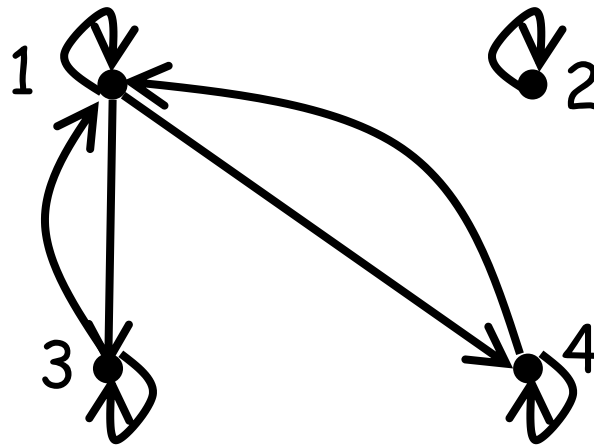
Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de equivalencia



Relaciones de equivalencia

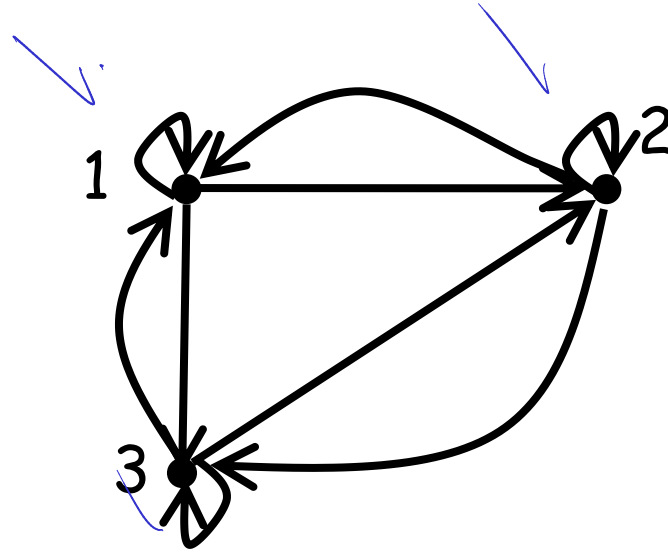
Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de equivalencia



- La relación es reflexiva y simétrica pero no es transitiva ($(3,1) \in R$ y $(1,4) \in R$ pero $(3,4) \notin R$). Por lo tanto, **no es una relación de equivalencia**

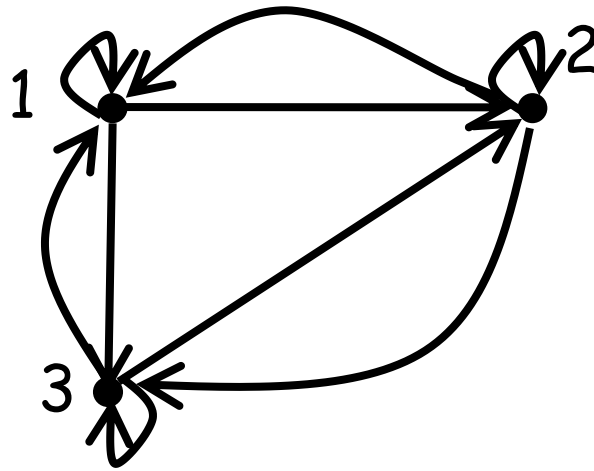
Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ es de equivalencia



Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ es de equivalencia



- La relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto es una relación de equivalencia

Relaciones de equivalencia

Relaciones especiales

- Relación de equivalencia
- Relación de orden parcial

Relaciones de equivalencia

Relación de orden parcial

- Una relación R en un conjunto A es una **relación de orden parcial** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de orden parcial:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ SI
- $R_2=\{(\cancel{1,1}),(\cancel{1,3}),(\cancel{1,4}),(\cancel{2,2}),(\cancel{3,3}),(\cancel{3,4}),(\cancel{4,4})\}$ SI
- $R_3=\{(\cancel{1,1}),(\cancel{2,2}),(\cancel{2,3}),(\cancel{2,4}),(\cancel{3,2}),(\cancel{3,3}),(\cancel{4,4})\}$ X

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de orden parcial:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ **si**
- $R_2=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ **si**
- $R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(4,4)\}$ **no, porque no es antisimétrica ($(2,3)\in R$ y $(3,2)\in R$)**

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de orden parcial:

- $R_4 = \{(1,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2), (4,4)\}$ NO
- $R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$(1,4)$

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en $A=\{1,2,3,4\}$ son relaciones de orden parcial:

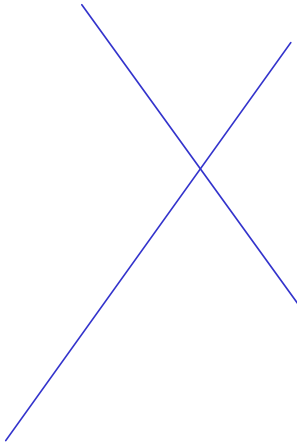
- $R_4=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$ **no es antisimétrica**
- $R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ **no es transitiva, $(1,3)\in R_5$ y $(3,4)\in R_5$ pero $(1,4)\notin R_5$**

Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial

1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1

$(1,2)$ $(1,4)$ $(2,4)$



Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva y antisimétrica pero no es transitiva $((1,2) \in R \text{ y } (2,4) \in R \text{ pero } (1,4) \notin R)$. Por lo tanto, **no es una relación de orden parcial**

Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial

$(1,1)$

1	1	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

$(4,2)$ $(4,3)$

SI

Relaciones de equivalencia

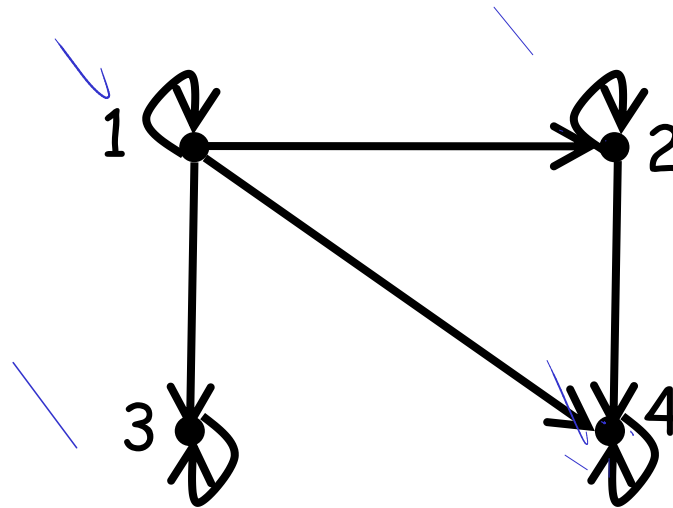
Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, **es una relación de orden parcial**

Relaciones de equivalencia

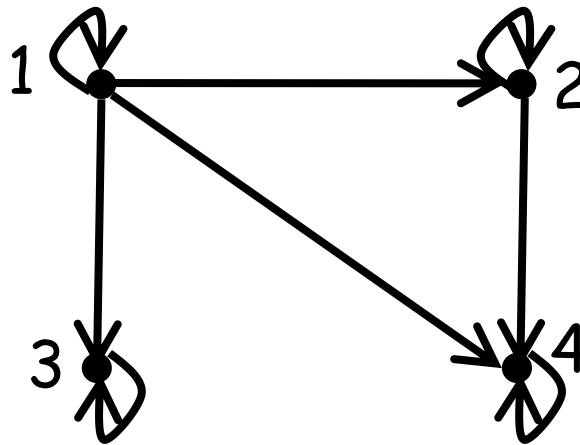
Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial



SI

Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial



- La relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, **es una relación de orden parcial**

Relaciones de equivalencia

1) Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de equivalencia. En caso de no serlo, indique la(s) propiedad(es) que no cumple

1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	1

NO SIMETRICA

NO TRANSITIVA

Relaciones de equivalencia

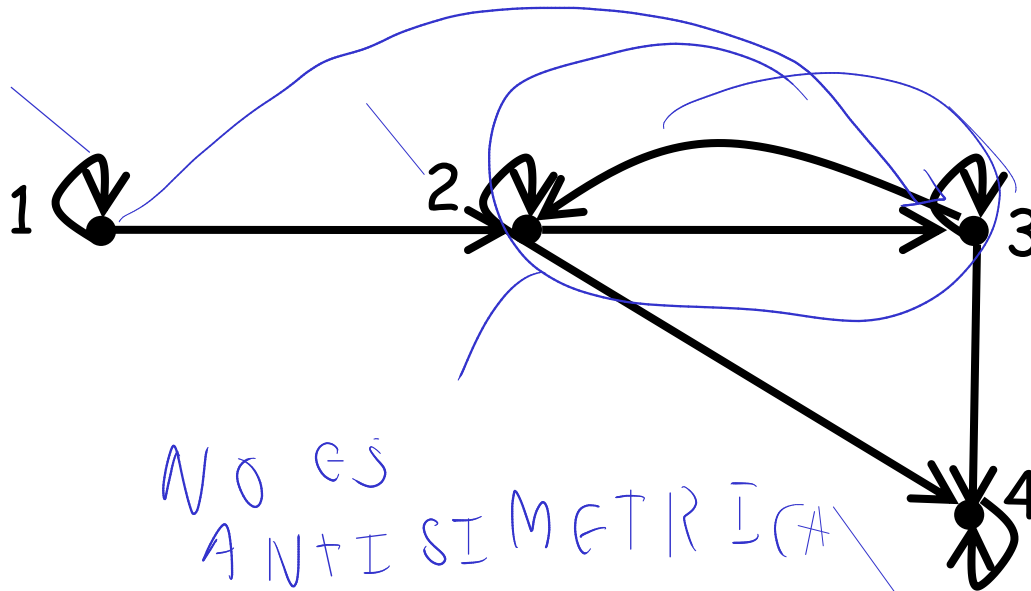
Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de equivalencia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva pero no es simétrica ni transitiva $((3,4) \in R$ y $(4,2) \in R$ pero $(3,2) \notin R$). Por lo tanto, **no es una relación de equivalencia**

Relaciones de equivalencia

2) Indique si la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$ es de orden parcial. En caso de no serlo, indique la(s) propiedad(es) que no cumple



NO ES
ANTI SIMETRICA

W8 ES TRANSITIVA