1. Regla del producto, de la suma e inclusión-exclusión [25 puntos]

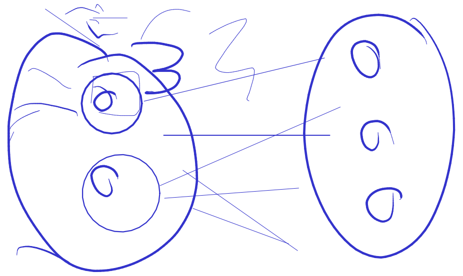
Para los siguientes puntos se trabaja en coordenadas homogéneas en 3D.

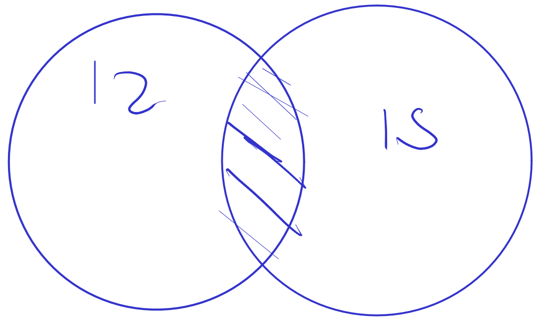
1. (7 puntos) Cuántas cadenas distintas de tres letras empiezan y terminan por A?.
2. (7 puntos) Cuántas funciones inyectivas hay entre un conjunto de 2 elementos y otro conjunto de 3 elementos.
3. (11 puntos) Cuántos enteros positivos menores o iguales que 2000 con divisibles bien por 12 o por 15? (sugerencia: con $\lfloor 25/4 \rfloor$ se obtiene el número de divisores de 4 menores o iguales a 25)

2. Permutaciones y combinaciones [25 puntos]

1. (7 puntos) Cuántas palabras de tres letras distintas pueden formarse con las letras de la palabra MAST?
2. (10 puntos) Supongamos que un departamento tiene 10 hombres y 12 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar una comisión de seis miembros si debe haber igual número de hombres que de mujeres?
3. (8 puntos) Obtenga todas las cadenas de dos o más caracteres que se pueden formar con las letras de TOO?

1) $\underline{1}\ \underline{26}\ \underline{1} = 26$ | $1\ 52\ 1 = 52$

2)  $3 \times 2 = 6$

3) 

$\left\lfloor \frac{2000}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2000}{60} \right\rfloor$

$mcm(12,15) = 60$

2.1) $4 \times 3 \times 2$

2.2) $C(10,3) \times C(12,3)$

2.3) $3!/2! + 2! + 2!/2!$

teres que se pueden formar con las letras de TOO?

3. Recurrencias [50 puntos]

1. (15 puntos) Resuelva la relación de recurrencia $2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$, $n \geq 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

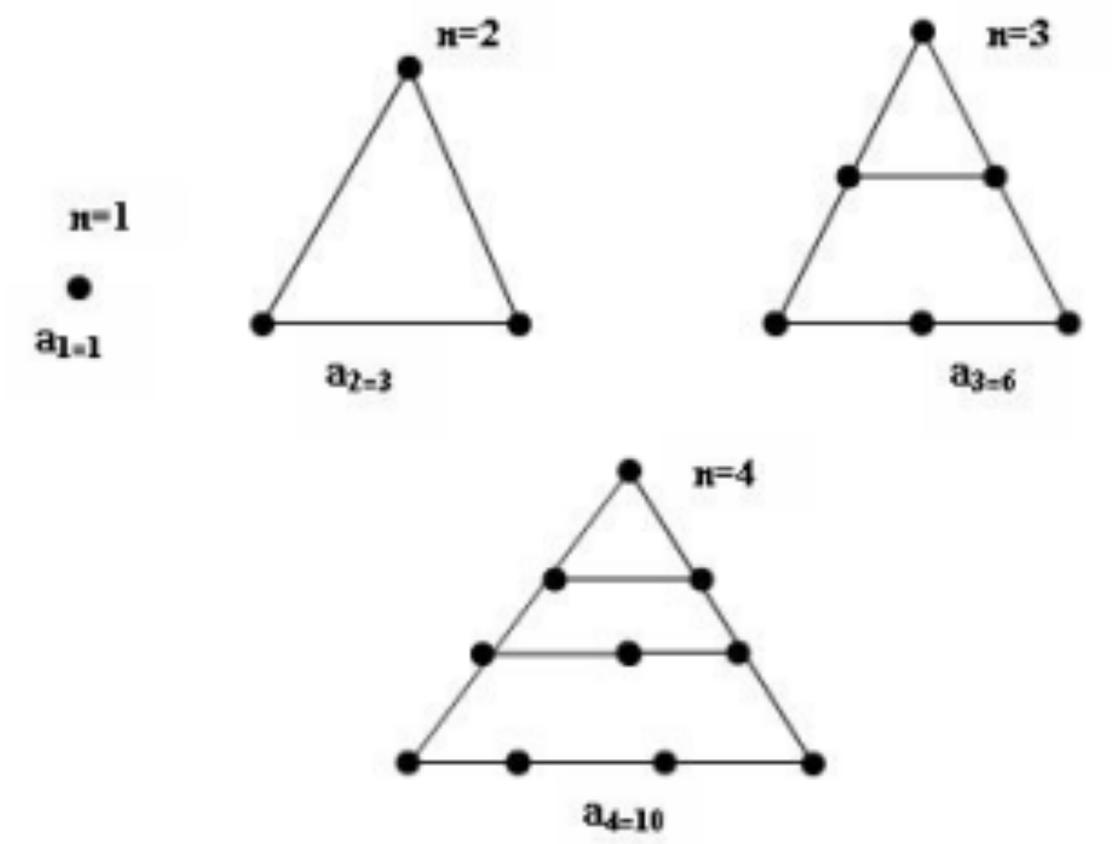
2. (15 puntos) Obtenga una solución particular de la siguiente relación de recurrencia no homogénea: $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n + 2^n$

3. (20 puntos) Sea a_n la suma de los n primeros números triangulares (números que se pueden disponer formando un triangulo), es decir,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

donde $t_k = k(k+1)/2$. Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ satisface la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + n(n+1)/2$ y la condición inicial $a_1 = 1$ (sugerencia: demuestre que la solución de la sumatoria es igual a la de la recurrencia)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$



$2a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n \qquad a_0 = 0 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 2$

$a_n = r^n$

$$\frac{2r^{n+3}}{r^n} = \frac{r^{n+2}}{r^n} + \frac{2r^{n+1}}{r^n} - \frac{r^n}{r^n}$$

$$2r^3 = r^2 + 2r - 1$$

$$r^3 = \frac{r^2}{2} + r - \frac{1}{2}$$

$$r^3 - \frac{r^2}{2} - r + \frac{1}{2} = 0$$

$r_1 = -1$

$r_2 = \frac{1}{2}$

$r_3 = 1$

$$a_n = A(-1)^n + B\left(\frac{1}{2}\right)^n + C$$

$$0 = A + B + C$$

$$1 = -A + \frac{1}{2}B + C$$

$$2 = A + \frac{1}{4}B + C$$

$$\boxed{a_n = 0.16667(-1)^n - 2.6667\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2.5}$$

2. (15 puntos) Obtenga una solución particular de la siguiente relación de recurrencia no homogénea:
$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n + 2^n$

$F(n) = (n+1)2^n$

$$a^h(n) \begin{cases} r^2 - 4r + 4 & \{ r = 2 \\ a^h(n) = A2^n + Bn2^n \end{cases}$$

$a_p = n^2(Cn + D)2^n = Cn^3 2^n + Dn^2 2^n$

$$Cn^3 2^n + Dn^2 2^n = 4\left(\frac{C(n-1)^3 2^n}{2} + D(n-1)^2 2^n\right)$$
$$-4\left(\frac{C(n-2)^3 2^n}{4} + D(n-2)^2 2^n\right) + 1n2^n + 2^n$$

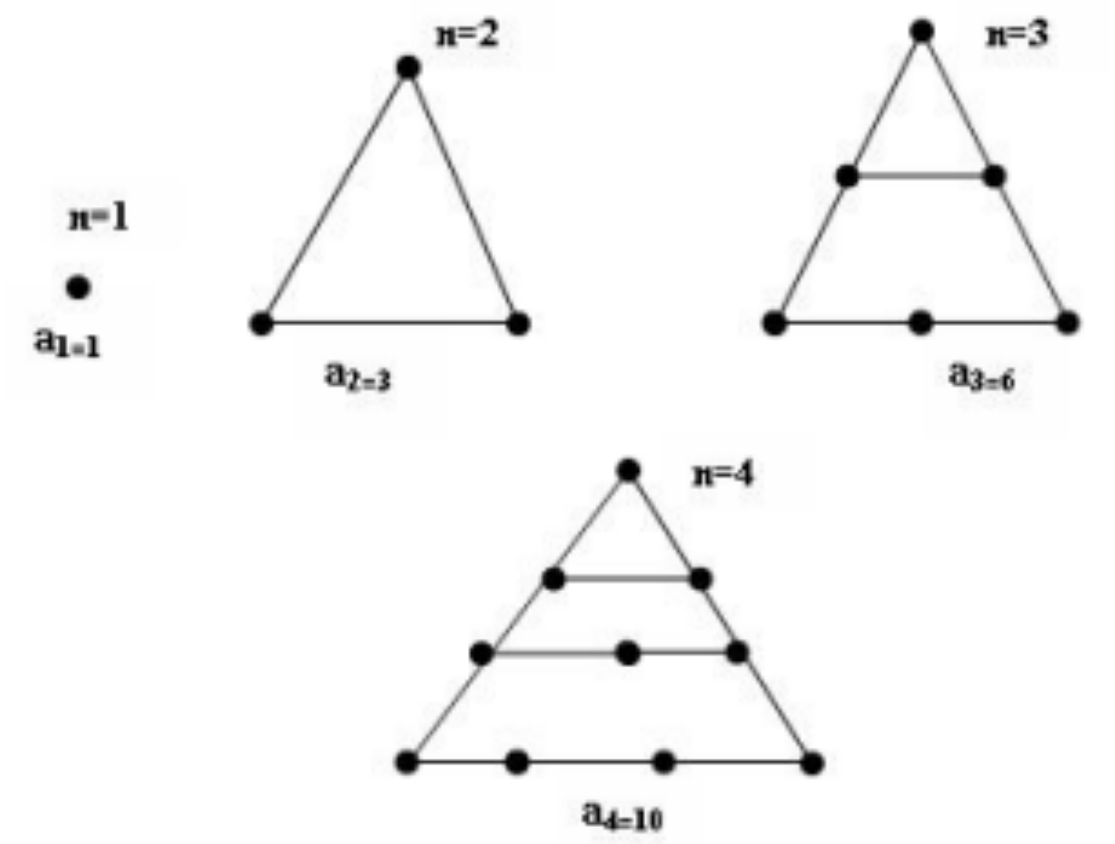
Terminos semejante $n^3 2^n, n^2 2^n, n 2^n, 2^n$

3. (20 puntos) Sea a_n la suma de los n primeros números triangulares (números que se pueden disponer formando un triangulo), es decir,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

donde $t_k = k(k+1)/2$. Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ satisface la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + n(n+1)/2$ y la condición inicial $a_1 = 1$ (sugerencia: demuestre que la solución de la sumatoria es igual a la de la recurrencia)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$



$$a_n = a_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$a_n^h = A(1)^n$$

$$(Bn^2 + Cn + D)\,n = Bn^3 + Cn^2 + Dn$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$$