

Matemáticas discretas II

Árboles

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Carlos Andrés Delgado S.

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Octubre de 2017

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

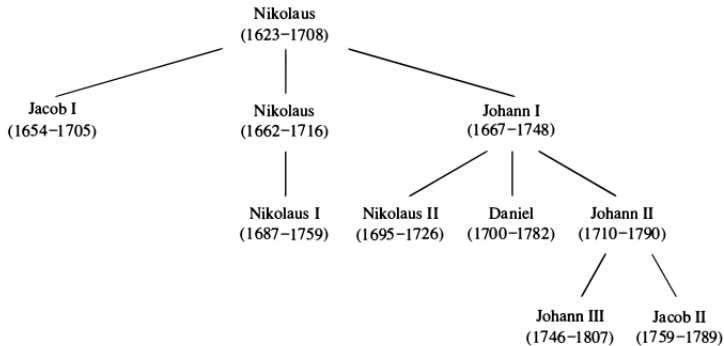
Recorridos en
árboles

Introducción

Un árbol es un grafo conexo que no contiene circuitos simples. Los árboles son utilizados en un gran número de problemas computacionales, como es el caso de algoritmos de codificación, programación dinámica, entre otros.

Definición 1

Un árbol no tiene ningún circuito simple. Esto quiere decir que no puede contener aristas múltiples ni ciclos.



Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

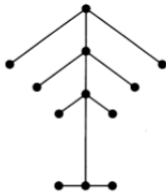
Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Teorema 1

Un grado no dirigido es un árbol si y sólo si hay un único camino entre cada par de *vértices*



Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

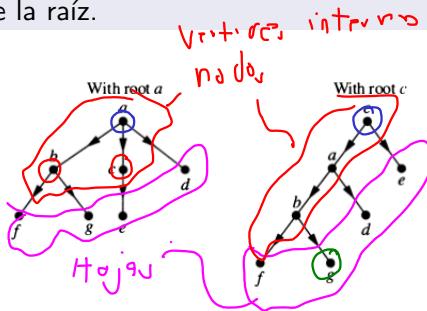
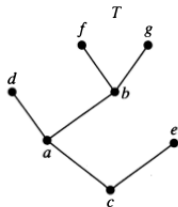
Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Definición 2

Un árbol con raíz es un árbol con un vértice que ha sido designado como raíz y cada arista se puede acceder desde un camino directo desde la raíz.



Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

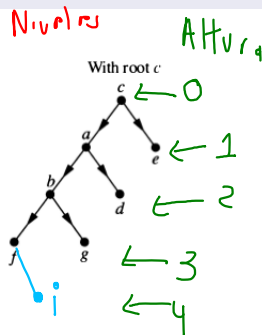
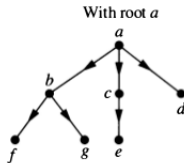
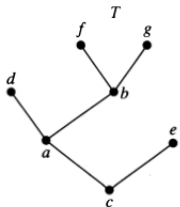
Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Definición 2

Un árbol con raíz es un árbol con un vértice que ha sido designado como raíz y cada arista se puede acceder desde un camino directo desde la raíz.



Definición 3

La terminología de los árboles tiene orígenes botánicos y genealógicos. Suponga que T es un árbol con raíz.

- El **padre** de v es el único vértice u , tal que hay una arista dirigida de u a v
- El caso contrario anterior, se dice v es **hijo** de u
- Los vértices con el mismo padre son llamados **hermanos**
- Los **antecesores** de cualquier vértice, son el camino desde la **raíz** hasta el vértice, pero excluyéndolo a él
- Los **descendientes** de un vértice son todos aquellos que tienen a v como antecesor

Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Definición 4

- Un vértice es llamado **hoja** si no tiene hijos
- Los vértices ~~de los~~ hijos son llamados **vértices internos** *que tienen* *nod*_{os}

Definición 5

El **nivel de un vértice** es la longitud del único camino desde la raíz que hasta él. El nivel de la raíz es 0

Definición 6

La **altura** de un árbol es la **longitud del camino más largo** desde la raíz hasta cualquier vértice

Definición 7

Un árbol de altura (h), está **equilibrado** o **balanceado** si todas sus hojas están en los niveles h o $h - 1$

Introducción a los árboles

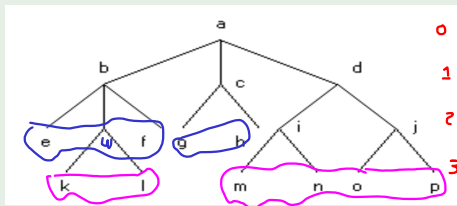
Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Ejemplo de árbol equilibrado

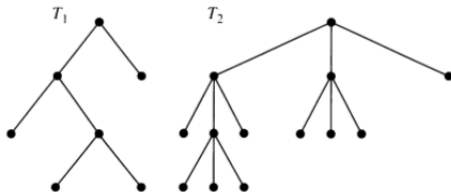


- 1 El árbol está **equilibrado**
- 2 Su **altura** es 3
- 3 j es el **padre** de p
- 4 Los **antecedentes** de n son $\{i, d, a\}$
- 5 los **descendientes** de i son $\{i, j, m, n, o, p\}$
- 6 Los vértices $\{e, k, l, f, g, h, m, n, o, p\}$ son **hojas**
- 7 Los vértices $\{a, b, c, d, i, j\}$ son **vértices internos**

$$h = 3$$

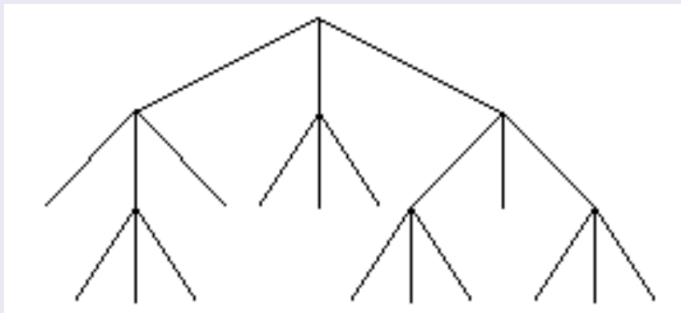
Definición 8

Un árbol con raíz es llamado m -ario si cada vértice interno no tiene más de m hijos. Un árbol es llamado un árbol m -ario completo si cada vértice interno tiene exactamente m hijos. Un árbol m -ario con $m = 2$ es llamado **árbol binario**.



Definición 9

Un **árbol m -ario completo** es aquel donde los vértices internos tienen exactamente m hijos y es equilibrado.



Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Propiedades de los árboles

Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas.

Demostración

Paso base: Con $n = 1$ se tiene 0 aristas.

Paso inductivo: Si se supone que para n existen $n - 1$ aristas, ahora miramos para $n + 1$, para conectar el nuevo vértice se necesita una nueva arista

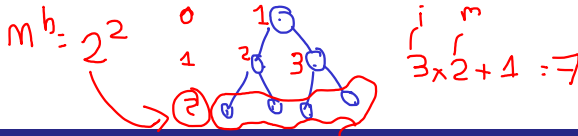
Introducción a los árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles



Propiedades de los árboles

Un árbol m -ario completo con i vértices internos contiene $n = m \cdot i + 1$ vértices.

Demostración

Puesto que el número de nodos internos es i y cada uno tiene m hijos diferentes de la raíz.

Propiedades de los árboles

Un árbol m -ario de altura h , tiene máximo m^h hojas.

Demostración

- **Paso base** Con $h = 1$ se tiene m hijos
- **Paso inductivo** Tomando h cualquier se tienen m^h hijos.
Para $h + 1$ cada hijo tiene m hijos, por lo tanto, se tienen en total $m * m^h = m^{h+1}$ hijos.



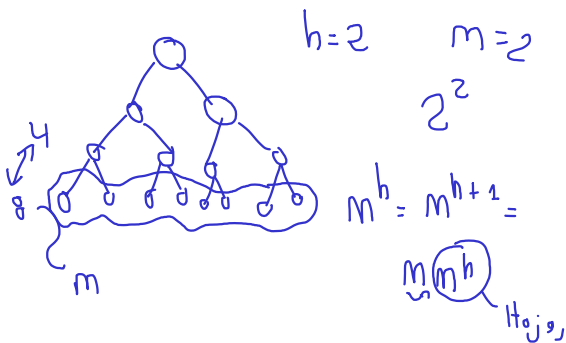
Universidad
del Valle

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

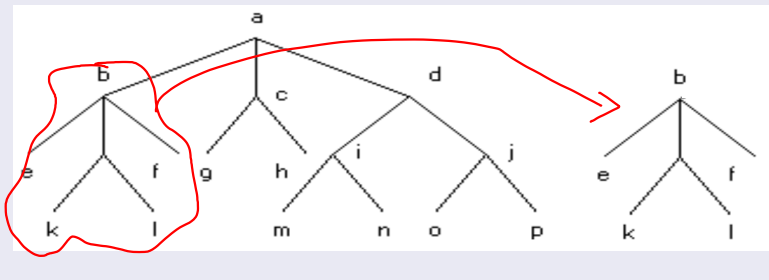
Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles



Propiedades de los árboles

Un **subárbol** es un árbol que se obtiene al tomar uno de los nodos internos de un árbol como raíz.



Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

1 Introducción a los árboles

2 Recorridos en árboles

Definición

Los árboles con raíz se utilizan frecuentemente para almacenar información. Existen algoritmos de recorrido para visitar cada uno de los vértices para acceder a los datos. Los algoritmos más conocidos de recorrido de árboles son:

- Recorrido en preorden
- Recorrido en inorden
- Recorrido en postorden

Recorrido en preorden

Para realizar el recorrido en preorden:

- 1 Visite la raíz. muestre la raíz
- 2 Visite los subárboles de izquierda a derecha (repita el procedimiento hasta llegar a las hojas)

Recorridos en árboles

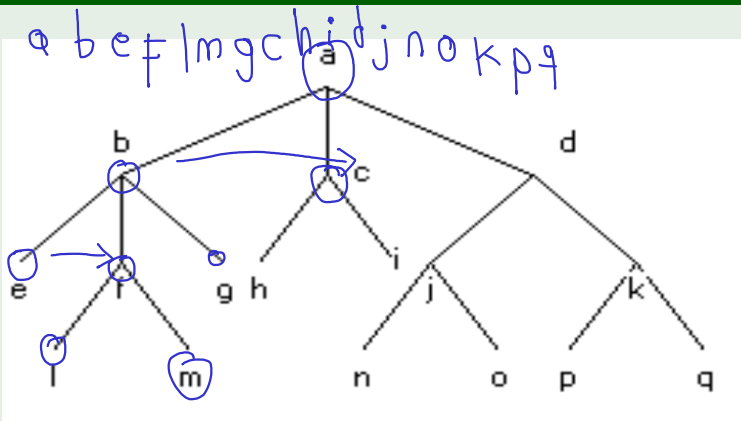
Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Recorrido en preorden



El recorrido preorden es $a, b, e, f, l, m, g, c, h, i, d, j, n, o, k, p, q$

Recorrido en inorden

Para realizar el recorrido en inorden:

- 1 Visite el sub-arbol más izquierdo (primer hijo de izquierda a la derecha)
- 2 Visite la raíz. muestre la raíz
- 3 Visite los subárboles restantes de izquierda a derecha (repita el procedimiento hasta llegar a las hojas)

Recorridos en árboles

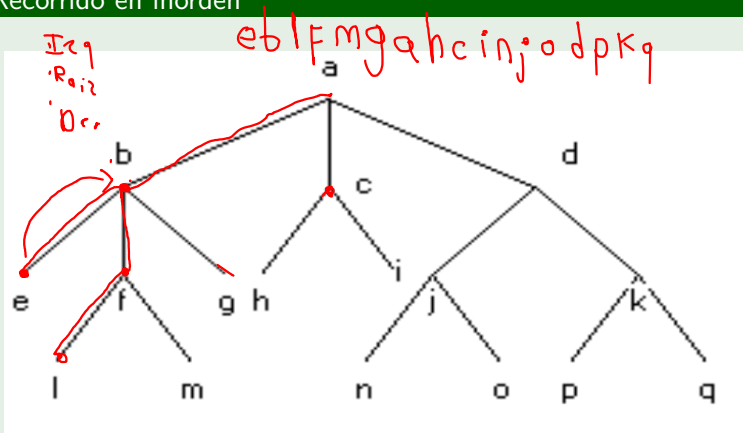
Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Recorrido en inorden



El recorrido en inorden es:

$e, b, l, f, m, g, a, h, c, i, n, j, o, d, p, k, q$

Recorrido en postorden

Para realizar el recorrido en postorden:

- 1 Visite el sub-arbol más izquierdo (primer hijo de izquierda a la derecha)
- 2 Visite los subárboles restantes de izquierda a derecha (repita el procedimiento hasta llegar a las hojas)
- 3 Visite la raíz. muestre la raíz

Recorridos en árboles

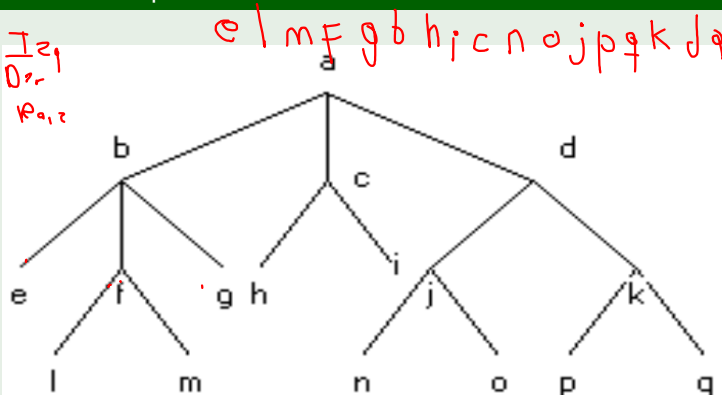
Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Recorrido en postorden

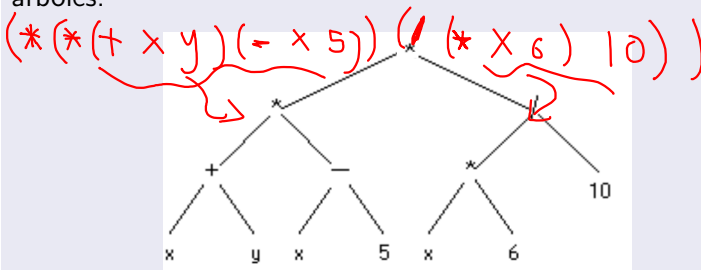


El recorrido en postorden es:

$e, l, m, f, g, b, h, i, c, n, o, j, p, q, k, d, a$

Expresiones aritméticas

Las expresiones matemáticas pueden ser representadas usando árboles:



- En preorden: $(* (* (+ x y) (- x 5)) (/ (* x 6) 10))$
- En inorden: $((x + y) * (x - 5)) * ((x * 6) / 10)$
- En postorden: $(((x y +) (x 5 -) *) ((x 6 *) 10 /) *)$

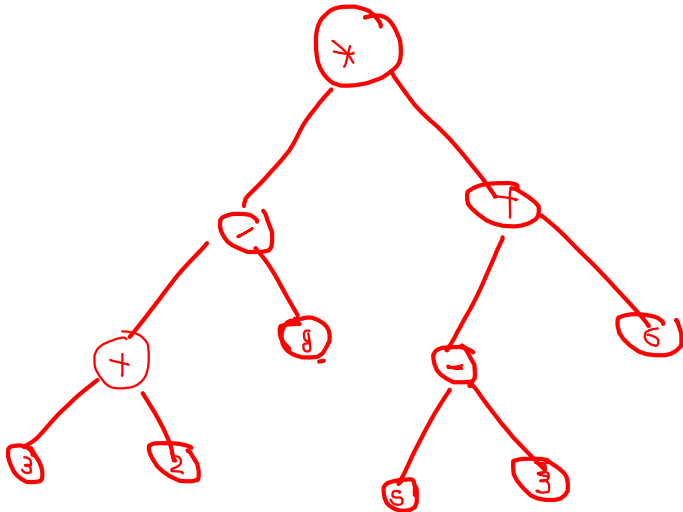
Recorridos en árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles



Recorridos en árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Schema

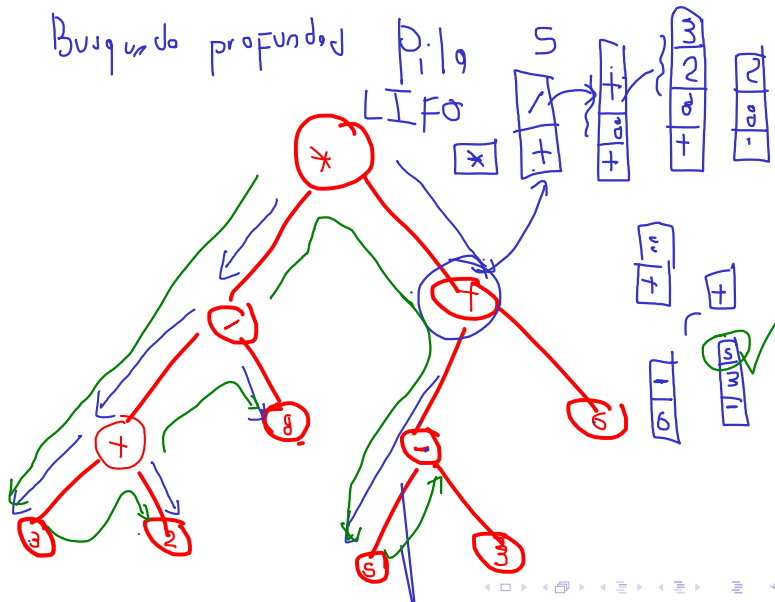
$$(* (/ (+ 3 2) 8) (+ (- 5 3) 6))$$

Inorden

$$((3 + 2) / 8) * ((5 - 3) + 6)$$

$$(((3 2 +) 8 /) ((5 3 -) 6 +) *)$$

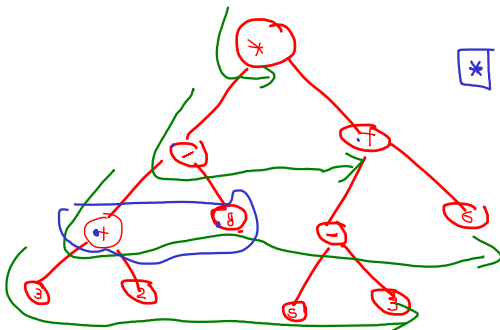
Recorridos en árboles



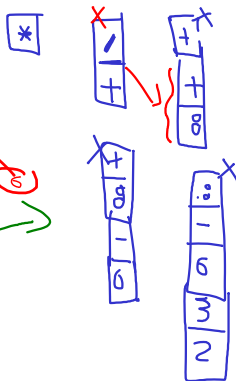


Recorridos en árboles

Buysse amplitude



Colg
FIFO



Recorridos en árboles

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

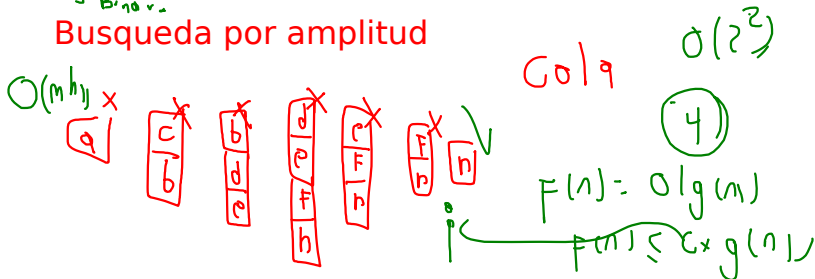
Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Busqueda por profundidad



Busqueda por amplitud



Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles



Kenneth H. Rosen.

Discrete Mathematics and Its Applications.

McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.

Chapter 11. Graphs.

Matemáticas
discretas II

Carlos Andrés
Delgado S.

Introducción a
los árboles

Recorridos en
árboles

Próximo tema:
Lenguajes y gramáticas