

# Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- \* Clausuras de una relación
- \* Relaciones de equivalencia
- \* Relaciones de orden parcial

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- Indique si la relación es **reflexiva**

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Faltan los pares  $(3,3)$  y  $(4,4)$

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Faltan los pares  $(3,3)$  y  $(4,4)$

- La **clausura reflexiva de  $R$**  es la relación

$$R' = R \cup \{(3,3),(4,4)\}$$

# Relaciones de equivalencia

---

## Clausura reflexiva

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación reflexiva?

Faltan los pares  $(3,3)$  y  $(4,4)$

- La **clausura reflexiva de  $R$**  es la relación

$$R' = R \cup \{(3,3),(4,4)\}$$

La **clausura reflexiva** de  $R$ , es la relación  $R'$  que contiene todos los pares de  $R$  y además aquellos pares que le faltan para ser reflexiva

# Relaciones de equivalencia

---

## Clausuras de una relación

Dada una relación  $R$ , se tienen 3 tipos de clausuras:

- Clausura reflexiva
- Clausura simétrica
- Clausura transitiva



# Relaciones de equivalencia

---

## Clausura simétrica

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,2), (4,1), (4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación simétrica?

$$R' = R \cup \{(2,1), (2,3), (1,4)\}$$

# Relaciones de equivalencia

---

## Clausura simétrica

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación simétrica?

Faltan los pares  $(2,1)$ ,  $(2,3)$ ,  $(1,4)$

# Relaciones de equivalencia

---

## Clausura simétrica

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación simétrica?

Faltan los pares  $(2,1)$ ,  $(2,3)$ ,  $(1,4)$

- La **clausura simétrica de  $R$**  es la relación

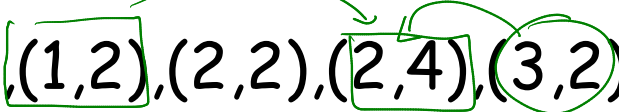
$$R' = R \cup \{(2,1),(2,3),(1,4)\}$$

# Relaciones de equivalencia

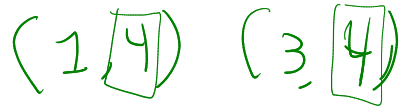
---

## Clausura transitiva

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,2)\}$$


• ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación transitiva?

$$(1,4) \quad (3,4)$$


# Relaciones de equivalencia

---

## Clausura transitiva

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación transitiva?

Faltan los pares  $(1,4)$ ,  $(3,4)$

# Relaciones de equivalencia

---

## Clausura transitiva

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,2)\}$$

- ¿Qué le falta a la relación para que sea una relación transitiva?

Faltan los pares  $(1,4)$ ,  $(3,4)$

- La **clausura transitiva de  $R$**  es la relación

$$R' = R \cup \underline{\{(1,4), (3,4)\}}$$

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),\textcircled{(3,1)},(3,3)\}$$

Muestre las clausuras reflexivas, simétricas y transitivas

$$\text{Reflexiva} = \underline{R \cup \{(4,4)\}}$$

$$\text{Simétrica} \quad \underline{R \cup \{(4,1), (4,2), (1,3)\}} = R'$$

$$\text{Transitiva} \quad \underline{R \cup \{(3,4)\}}$$

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3)\}$$

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(4,4)\}$$

- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(4,1),(4,2),(1,3)\}$$

- **Clausura transitiva**

$$R' = R \cup \{(3,4)\}$$



# Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (4,4)\}$$

Muestre las clausuras reflexivas, simétricas y transitivas

$$R_{\text{Ref}} = R \cup \{(2,2)\}$$

$$R_{\text{Sim}} = R \cup \{(2,1), (3,2), (3,4)\}$$

$$R_{\text{Trans}} = R \cup \{(2,1), (3,2), (3,4), (4,2), (2,2), (2,4)\}$$

# Relaciones de equivalencia

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

$$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$$

- **Clausura reflexiva**

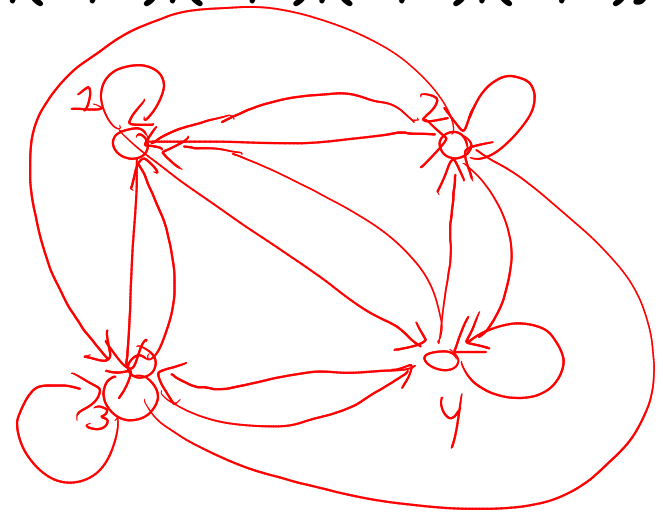
$$R' = R \cup \{(2,2)\}$$

- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(2,1),(3,2),(3,4)\}$$

- **Clausura transitiva**

$$R' = R \cup \{(2,1),(3,2),(3,4),(4,2)\}$$



$$\{(2,2), (2,4)\}$$

$$\{(2,3), (3,4), (2,4)\}$$

# Relaciones de equivalencia

---

Considere la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$

0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Muestre las clausuras reflexivas y simétricas

$$R_{\text{ref}} \quad R' = R \cup \{(1,1) (4,4)\}$$

$$R_{\text{sim}} \quad R' = R \cup \{(2,1) (1,3) (3,2) (4,3)\}$$

# Relaciones de equivalencia

---

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(1,1),(4,4)\}$$

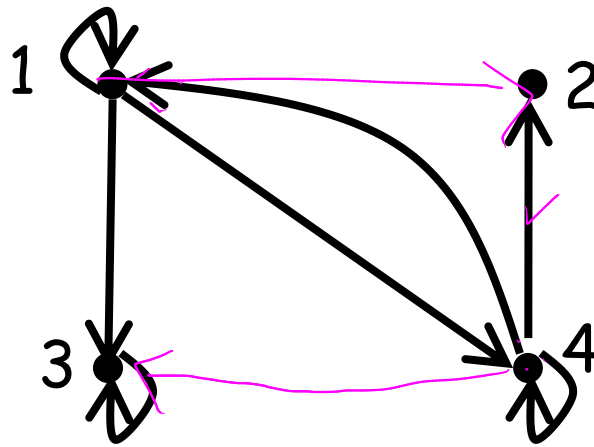
- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(1,3),(2,1),(3,2),(4,3)\}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Relaciones de equivalencia

Muestre las clausura reflexiva, simétrica y transitiva



Reflex:  $R' = R \cup \{(2, 2)\}$

Simetr:  $R' = R \cup \{(3, 1), (2, 4)\}$

Trans:  $R' = R \cup \{(1, 2), (4, 3)\}$

# Relaciones de equivalencia

- **Clausura reflexiva**

$$R' = R \cup \{(2,2)\}$$

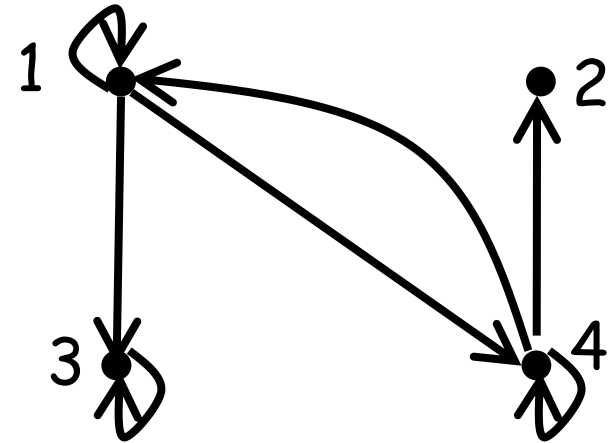
- **Clausura simétrica**

$$R' = R \cup \{(3,1),(2,4)\}$$

- **Clausura transitiva**

$$R' = R \cup \{(1,2),(4,3)\}$$

R:



# Relaciones de equivalencia

---

## Relaciones especiales

- Relación de equivalencia
- Relación de orden parcial

# Relaciones de equivalencia

---

## Relación de equivalencia

- Una relación  $R$  en un conjunto  $A$  es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva



# Relaciones de equivalencia

---

*Eq = Ref, Sim, transitive*

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de equivalencia:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$  *Equivalencia SI*
- $R_2=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$  *No*
- $R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$  *SI*

# Relaciones de equivalencia

---

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de equivalencia:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$  **si**
- $R_2=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$  **no es reflexiva ni transitiva**
- $R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,4)\}$  **si**

# Relaciones de equivalencia

---

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de equivalencia:

- $R_4=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$  No
- $R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,4)\}$  No

# Relaciones de equivalencia

---

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de equivalencia:

- $R_4=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$  **no es transitiva**
- $R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,4)\}$  **no es simétrica ni transitiva**

# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$  es de equivalencia

1	1	1
0	1	1
1	1	1

No

# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$  es de equivalencia

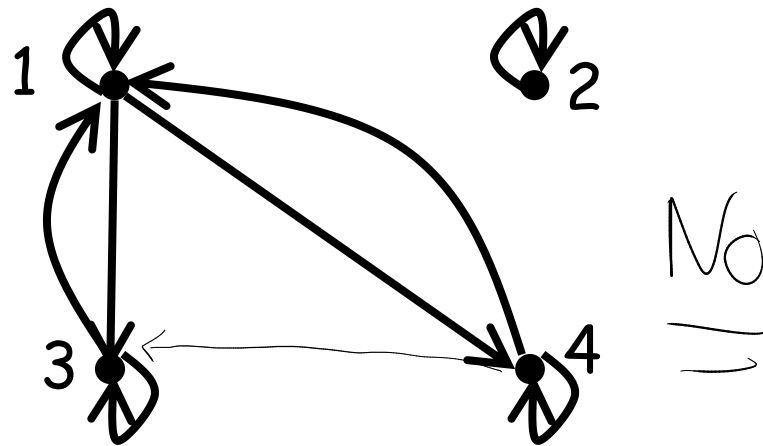
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva pero no es simétrica ( $(1,2) \in R$  y  $(2,1) \notin R$ ) ni transitiva ( $(2,3) \in R$  y  $(3,1) \in R$  pero  $(2,1) \notin R$ ). Por lo tanto, **no es una relación de equivalencia**

# Relaciones de equivalencia

---

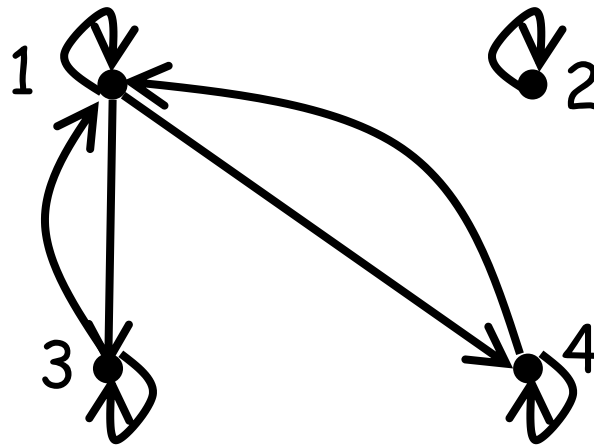
Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de equivalencia



# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de equivalencia



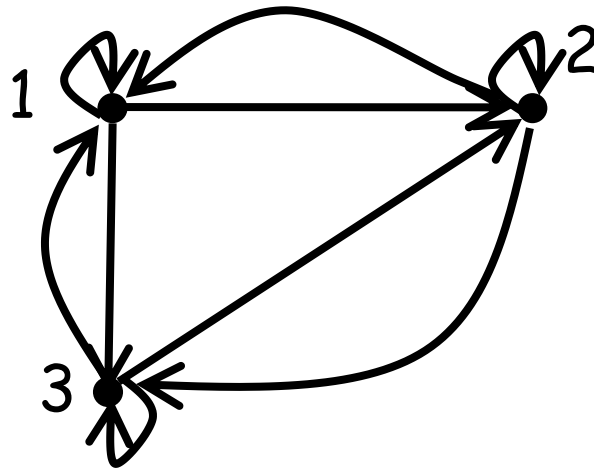
- La relación es reflexiva y simétrica pero no es transitiva  $((3,1) \in R$  y  $(1,4) \in R$  pero  $(3,4) \notin R$ ). Por lo tanto, **no es una relación de equivalencia**



# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$  es de equivalencia

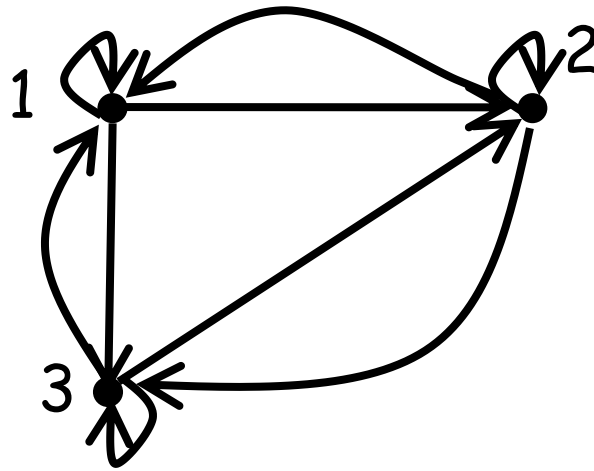


R ✓  
S ✓  
T ✓

# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3\}$  es de equivalencia



- La relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto es una relación de equivalencia

# Relaciones de equivalencia

---

## Relaciones especiales

- Relación de equivalencia
- Relación de orden parcial

# Relaciones de equivalencia

---

## Relación de orden parcial

- Una relación  $R$  en un conjunto  $A$  es una **relación de orden parcial** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva

# Relaciones de equivalencia

---

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de orden parcial:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$  SI
- $R_2=\{(\textcircled{1,1}),(1,3),(1,4),(\textcircled{2,2}),(3,3),(3,4),(4,4)\}$  SI
- $R_3=\{(1,1),(2,2),(\textcircled{2,3}),(2,4),(\textcircled{3,2}),(3,3),(4,4)\}$  No

# Relaciones de equivalencia

---

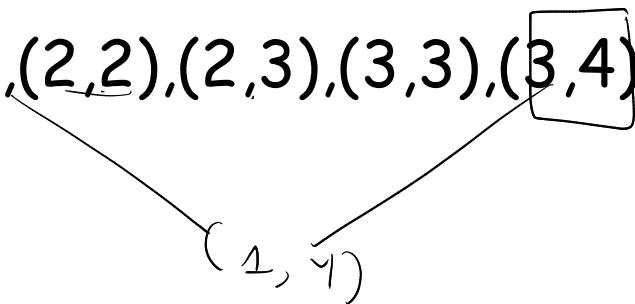
Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de orden parcial:

- $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$  **si**
- $R_2=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}$  **si**
- $R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(4,4)\}$  **no, porque no es antisimétrica (  $(2,3)\in R$  y  $(3,2)\in R$  )**

# Relaciones de equivalencia

---

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de orden parcial:

- $R_4=\{(1,1),(2,2),(\underline{2,4}), (3,3),(\underline{4,2}), (4,4)\}$  No
  - $R_5=\{(\underline{1,1}),(\underline{1,2}),(\underline{1,3}), (2,2), (2,3), (3,3),(\underline{3,4}), (4,4)\}$  No
- 

# Relaciones de equivalencia

---

Indique cuáles de las siguientes relaciones definidas en  $A=\{1,2,3,4\}$  son relaciones de orden parcial:

- $R_4=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$  **no es antisimétrica**
- $R_5=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$  **no es transitiva**,  $(1,3)\in R_5$  y  $(3,4)\in R_5$  pero  $(1,4)\notin R_5$



# Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial

1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1

$$(1, 2) (2, 4) = (1, 4)$$

No

# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva y antisimétrica pero no es transitiva  $((1,2) \in R$  y  $(2,4) \in R$  pero  $(1,4) \notin R$ ). Por lo tanto, **no es una relación de orden parcial**

# Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial

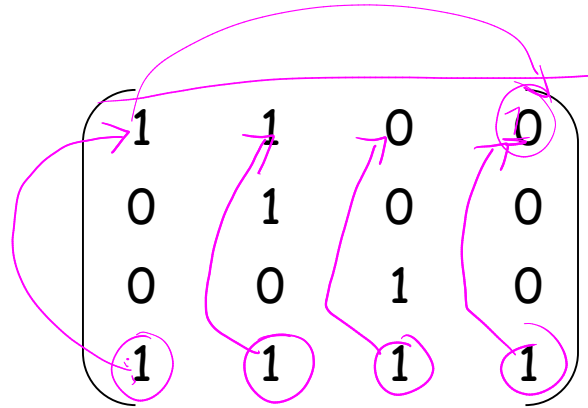
SI

1	1	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

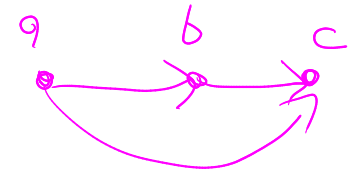
$(4, 3)(3, 3) = (4, 3)$   
 $(4, 4)(4, 2) = (4, 2)$   
 $(4, 1)(1, 2) = (4, 2)$   
 $(4, 2)(2, 2) = (4, 2)$

# Relaciones de equivalencia

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial



1	1	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

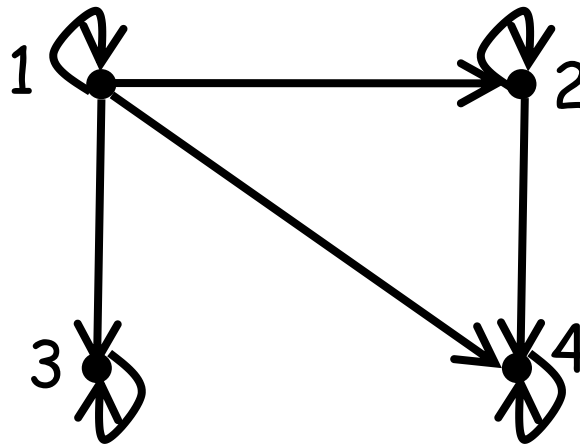


- La relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, es una relación de orden parcial

# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial

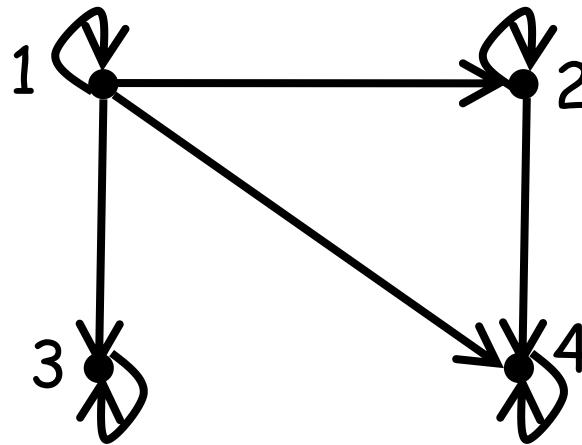


SI

# Relaciones de equivalencia

---

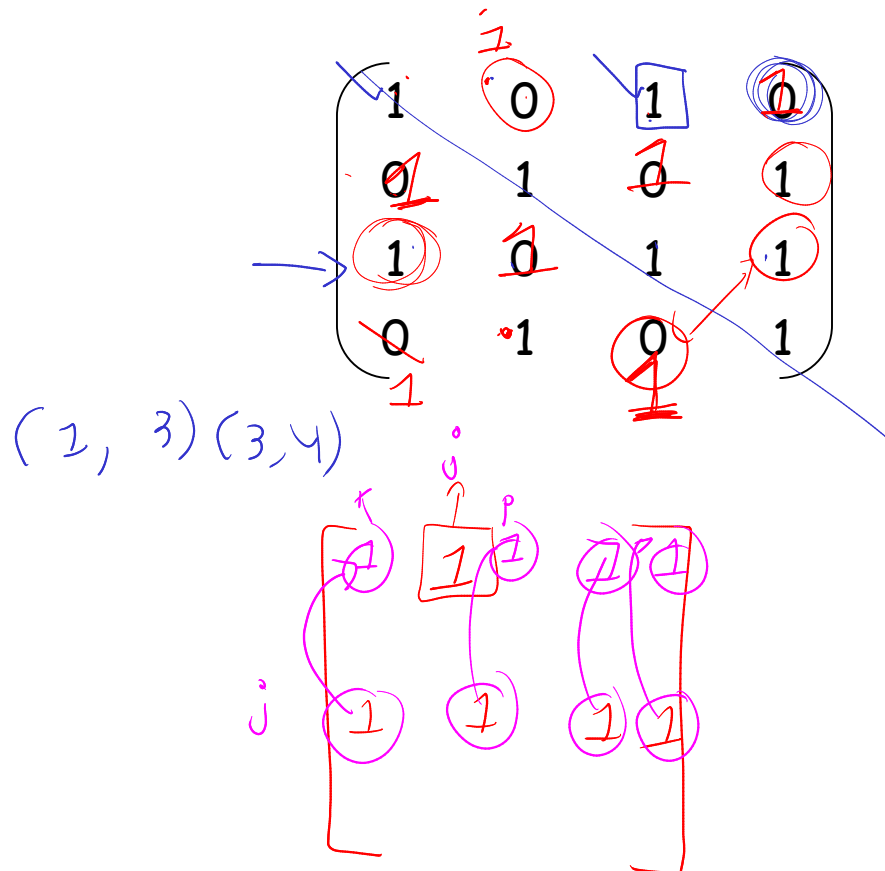
Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial



- La relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, es una relación de orden parcial

# Relaciones de equivalencia

1) Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de equivalencia. En caso de no serlo, indique la(s) propiedad(es) que no cumple



$$E_q = R, S, T$$

$$P_o = R, A, T$$

$$\{(4, 3) (1, 4), (4, 1) (1, 2), (2, 1) (2, 3), (3, 2) \}$$

# Relaciones de equivalencia

---

Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de equivalencia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La relación es reflexiva pero no es simétrica ni transitiva  $((3,4) \in R$  y  $(4,2) \in R$  pero  $(3,2) \notin R$ ). Por lo tanto, **no es una relación de equivalencia**



# Relaciones de equivalencia

---

2) Indique si la siguiente relación definida sobre  $A=\{1,2,3,4\}$  es de orden parcial. En caso de no serlo, indique la(s) propiedad(es) que no cumple

