Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

http://eisc.univalle.edu.co/~oscarbed/MD/

* Notación O

Crecimiento de funciones

Donald Knuth

- Cuando estaba en 8° grado participó en un concurso que consistía en formas palabras con las letras de la expresión "Ziegler's giant Bar"
- Estudió Física, matemáticas y ciencias
- Escribió *The Art of Computer Programming*
- Desarrolló TeX

(1938 -)

Crecimiento de funciones

$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n =$

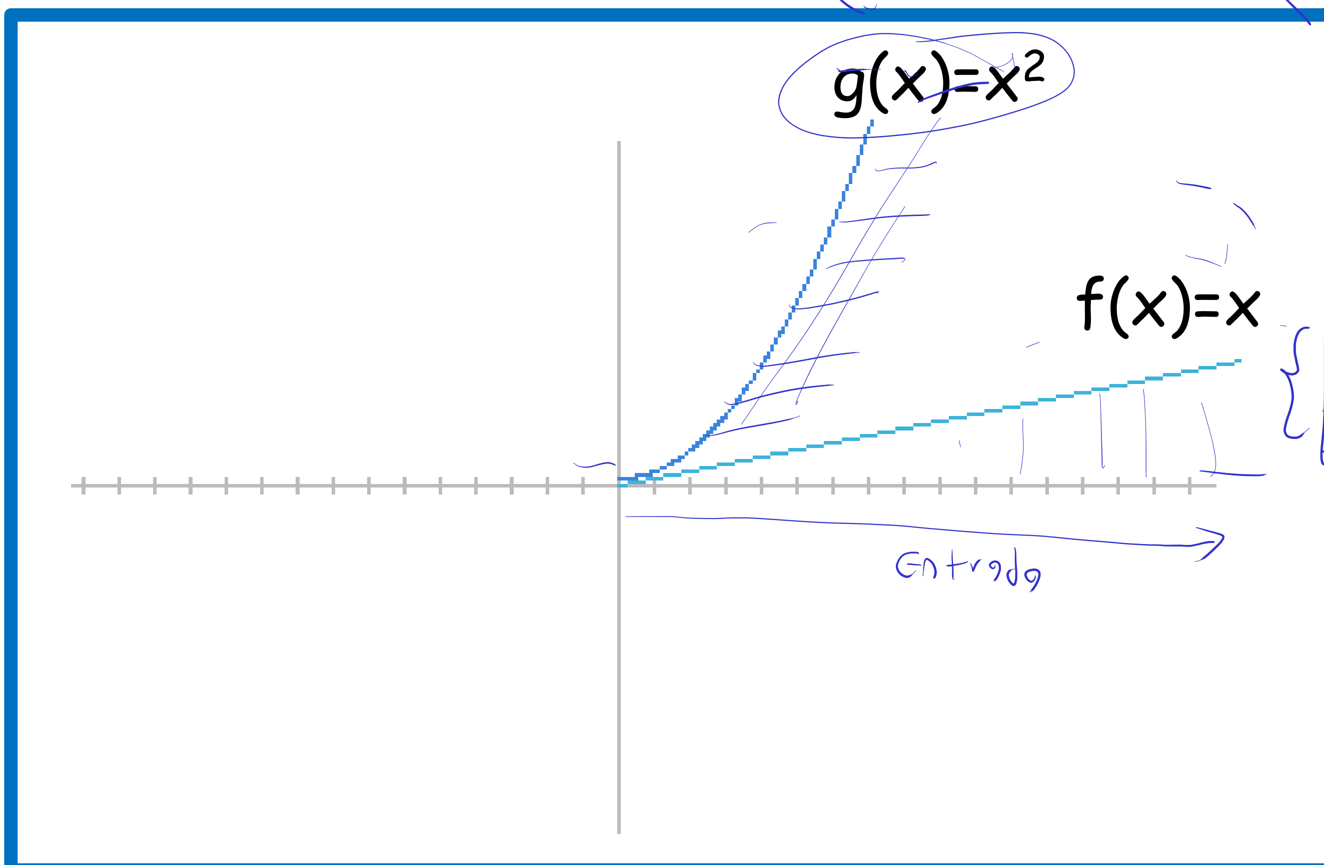
$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

El **análisis de crecimiento de funciones** se basa en comparar el comportamiento de dos o más funciones

$F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

$n \geq 0$

$n^2 + 3$



n^3

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 1$$

n^3

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

$i \le 9$

n

```
for (int i=0; i<10 ; i=i+1){        10        (10^2)
  for (int j=0; j<10 ; j=j+1){      10
1   if (datos[i][j]==b){
      System.out.println("Encontrado");          100
      break;
    }
  }
}
```

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

0 Apoyo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-8	12	-9	65	34	56	-54	55	14	7
-9	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
-56	-56	13	95	-87	77	99	87	77	-3

10x10

b=7

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

1

7	12	-9	65	34	56	-54	55	14	-65
-34	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
-56	-56	13	95	-87	77	99	87	77	-3

10x10

b=7

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

-8	12	-9	65	34	56	-54	55	14	-65
-35	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
7	-56	13	95	-87	77	99	87	77	-3

91

10x10

b=7

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

100

-8	12	-9	65	34	56	-54	55	14	-65
-35	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
32	-56	13	95	-87	77	99	87	77	7

10x10

b=7

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

```
for (int i=0; i<10 ; i=i+1){
   for (int j=0; j<10 ; j=j+1){
      if (datos[i][j]==b){
         System.out.println("Encontrado");
         break;
      }
   }
}
```

Mejor caso ← 1

Caso promedio ← 50

Peor caso ← 100

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

```
for (int i=0; i<n ; i=i+1){
   for (int j=0; j<n ; j=j+1){
      if (datos[i][j]==b){
         System.out.println("Encontrado");
         break;
      }
   }
}
```

En el peor caso, ¿cuántas comparaciones hará el programa para una matriz de tamaño nxn?

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

1	2	3	4	5					
-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34

b=7

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

16

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34

b=34

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34

b=-3

Programa 1:

```
public void buscar(){
 for(int i=1; i<=n; i=i+1){
  if (datos[i]==b){
    System.out.println("Encontrado");
    break;
  }
 }
}
```

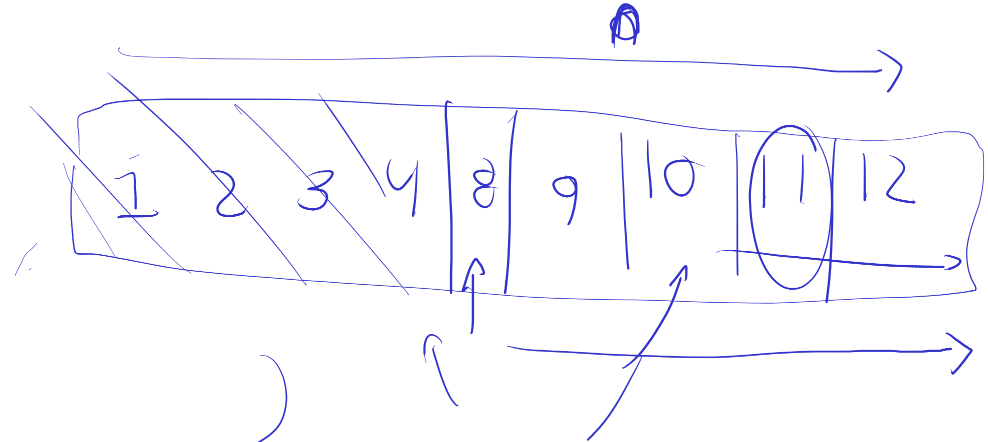
Programa 1:

```
public void buscar(){
  for(int i=1; i<=n; i=i+1){
   if (datos[i]==b){
     System.out.println("Encontrado");
     break;
   }
  }
}
```

En el peor caso, ¿cuántas comparaciones hará el programa para un arreglo de tamaño n?

Programa 2:

```
public void buscar(int i, int j){
  medio=(i+j)/2;
  if (a[medio]==b){
    System.out.println("Encontrado");
    break;
  }
  if (a[medio]<b)
    buscar(medio,j);
  if (a[medio]>b)
    buscar(i,medio);
}
```



11

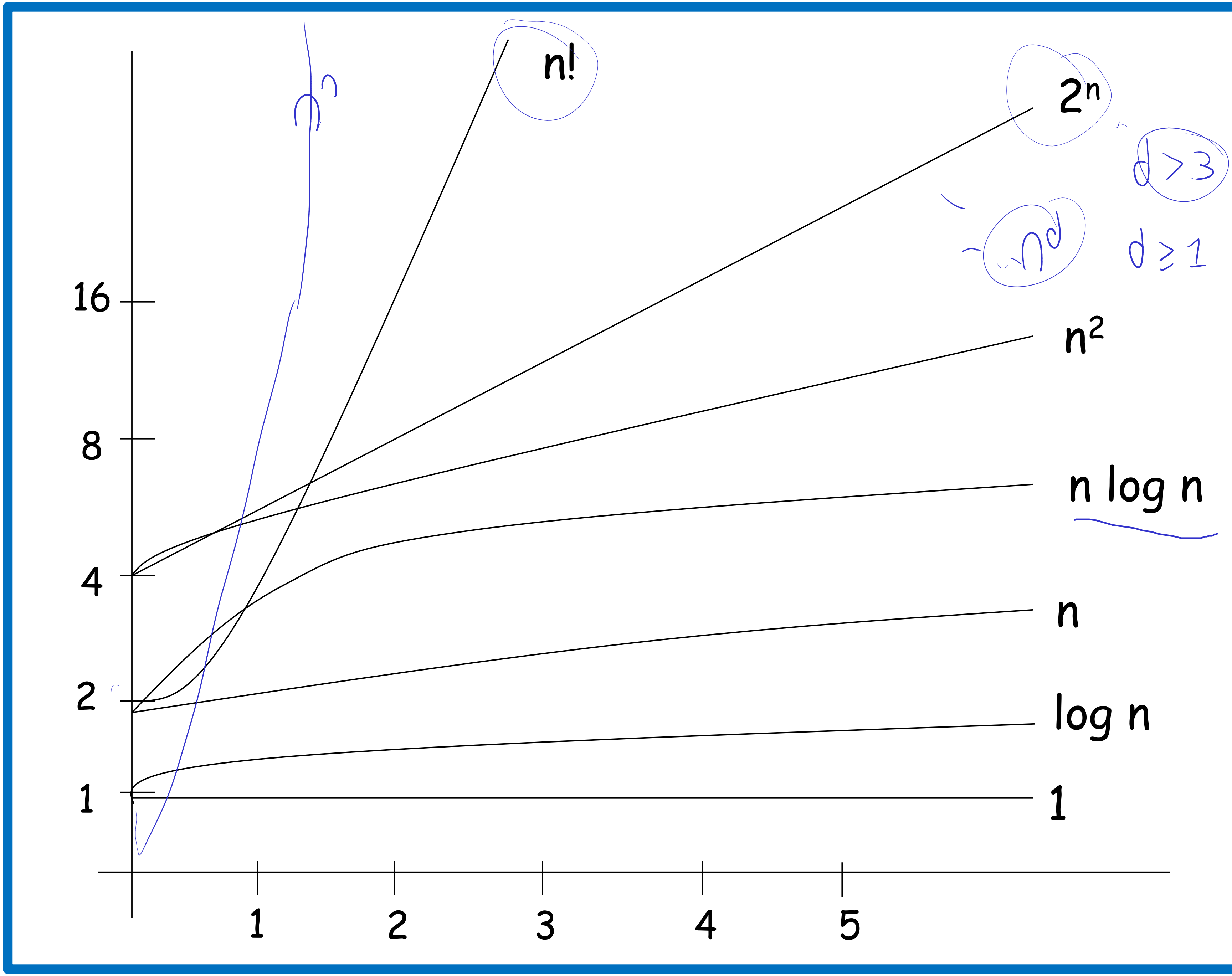
$\log(10^8) = 28$

n $\quad$ 10^8

Programa 2:

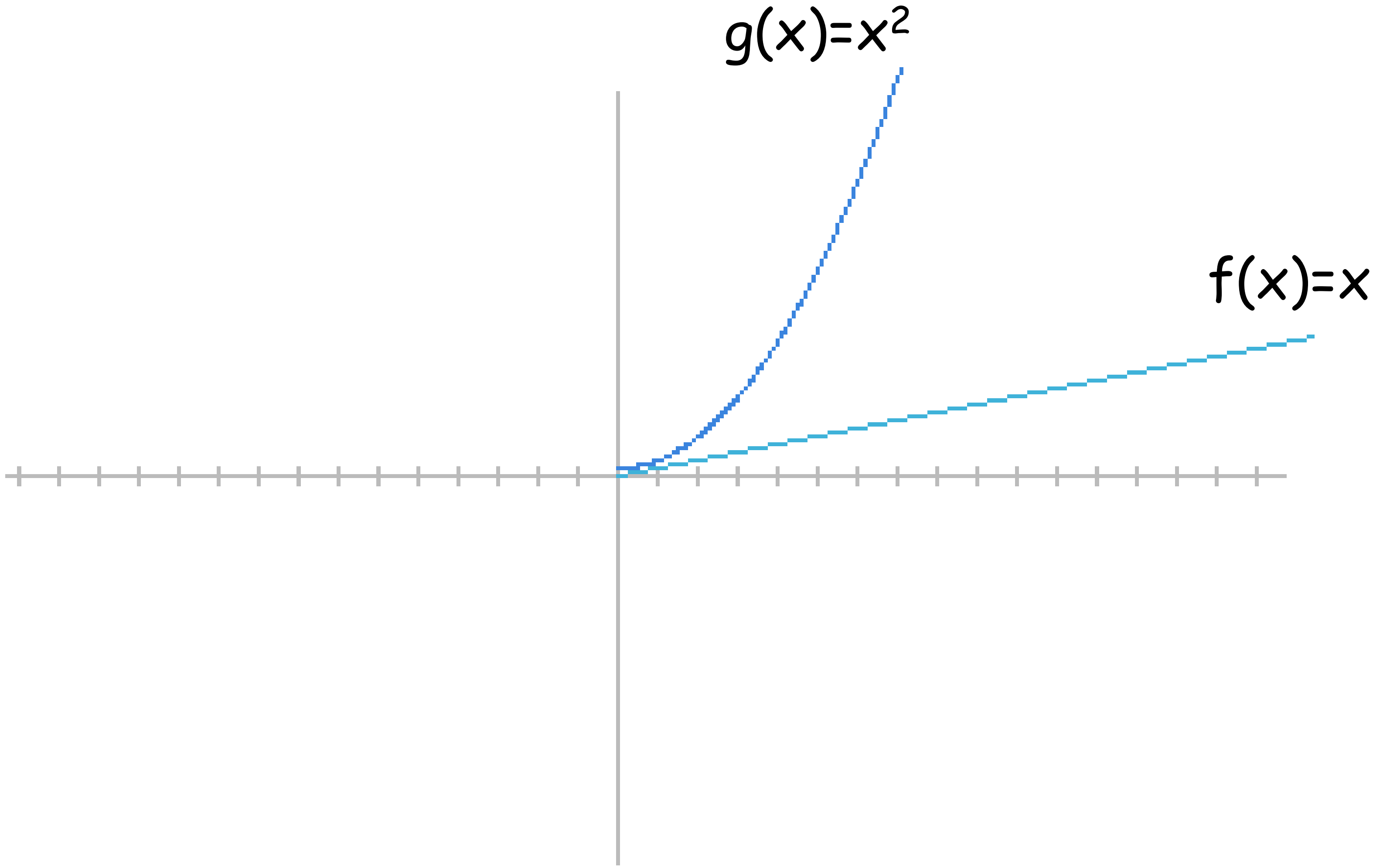
```
public void buscar(int i, int j){
  medio=(i+j)/2;
  if (a[medio]==b){
    System.out.println("Encontrado");
    break;
  }
  if (a[medio]<b)
    buscar(medio,j);
  if (a[medio]>b)
    buscar(i,medio);
}
```

En el peor caso, ¿cuántas comparaciones hará el programa para un arreglo de tamaño n?



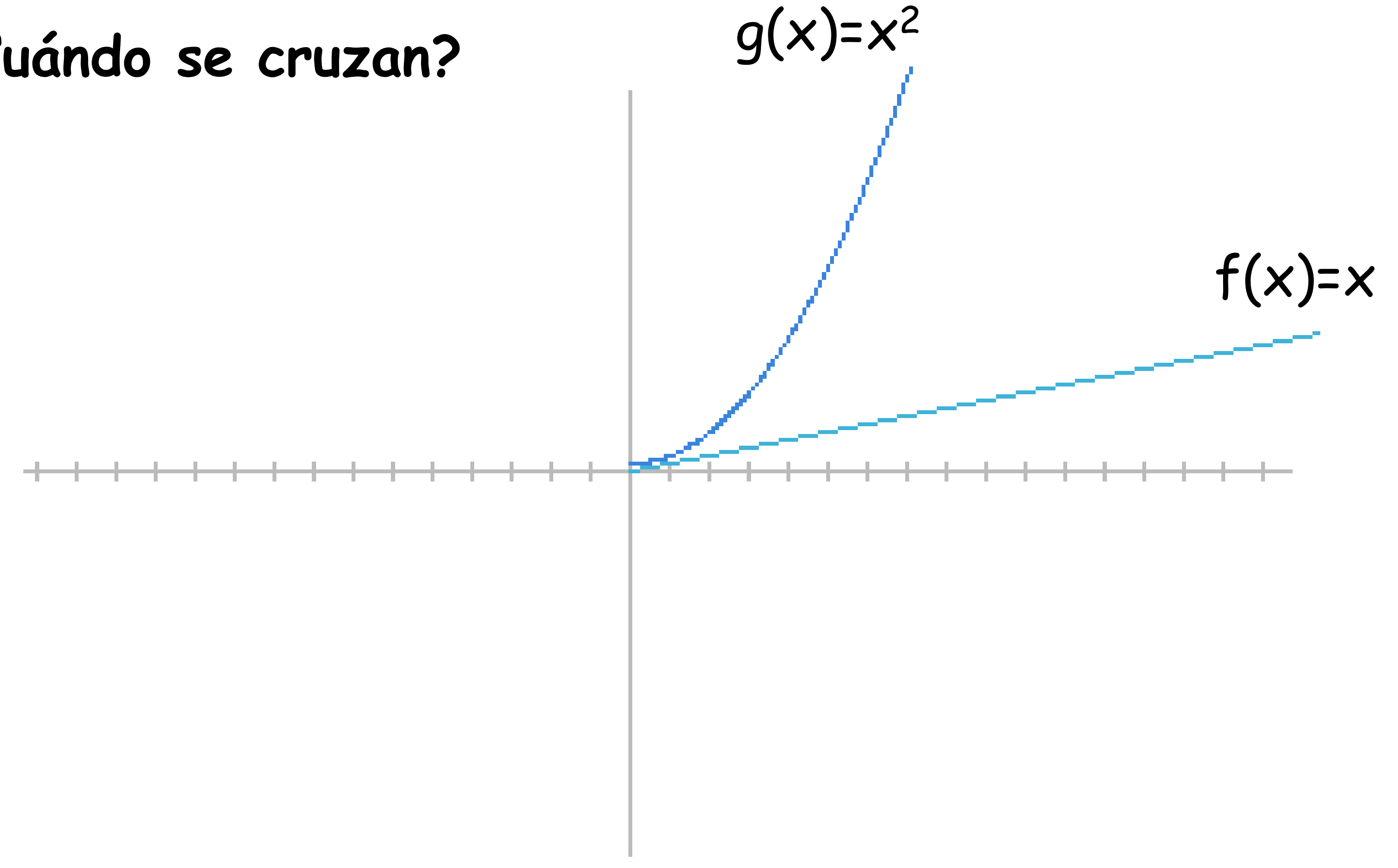
n!
2^n
n^2
n log n
n
log n
1
16
8
4
2
1
1
2
3
4
5
n^n
n^d
$d > 3$
$d \geq 1$

Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

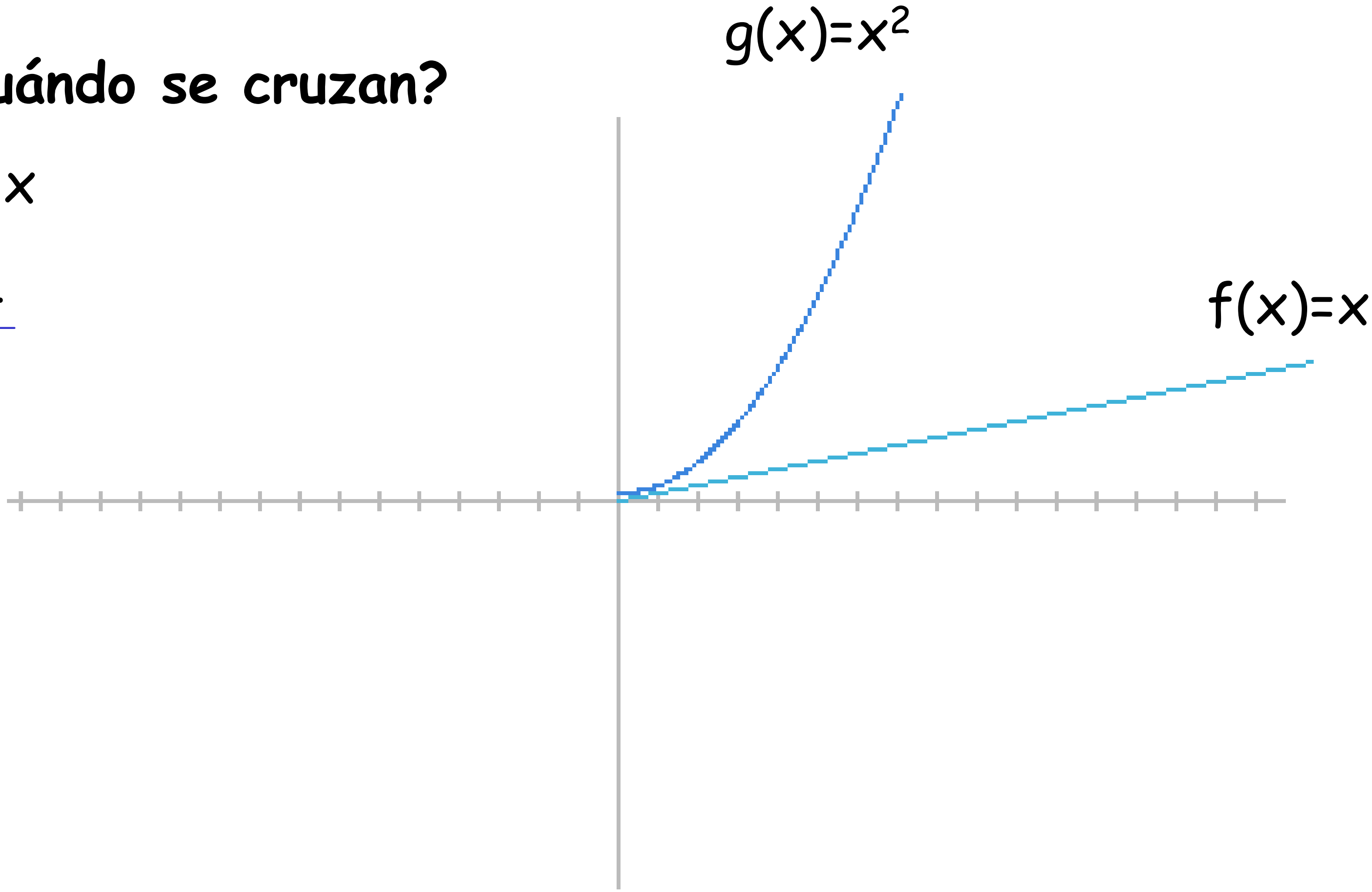


Crecimiento de funciones

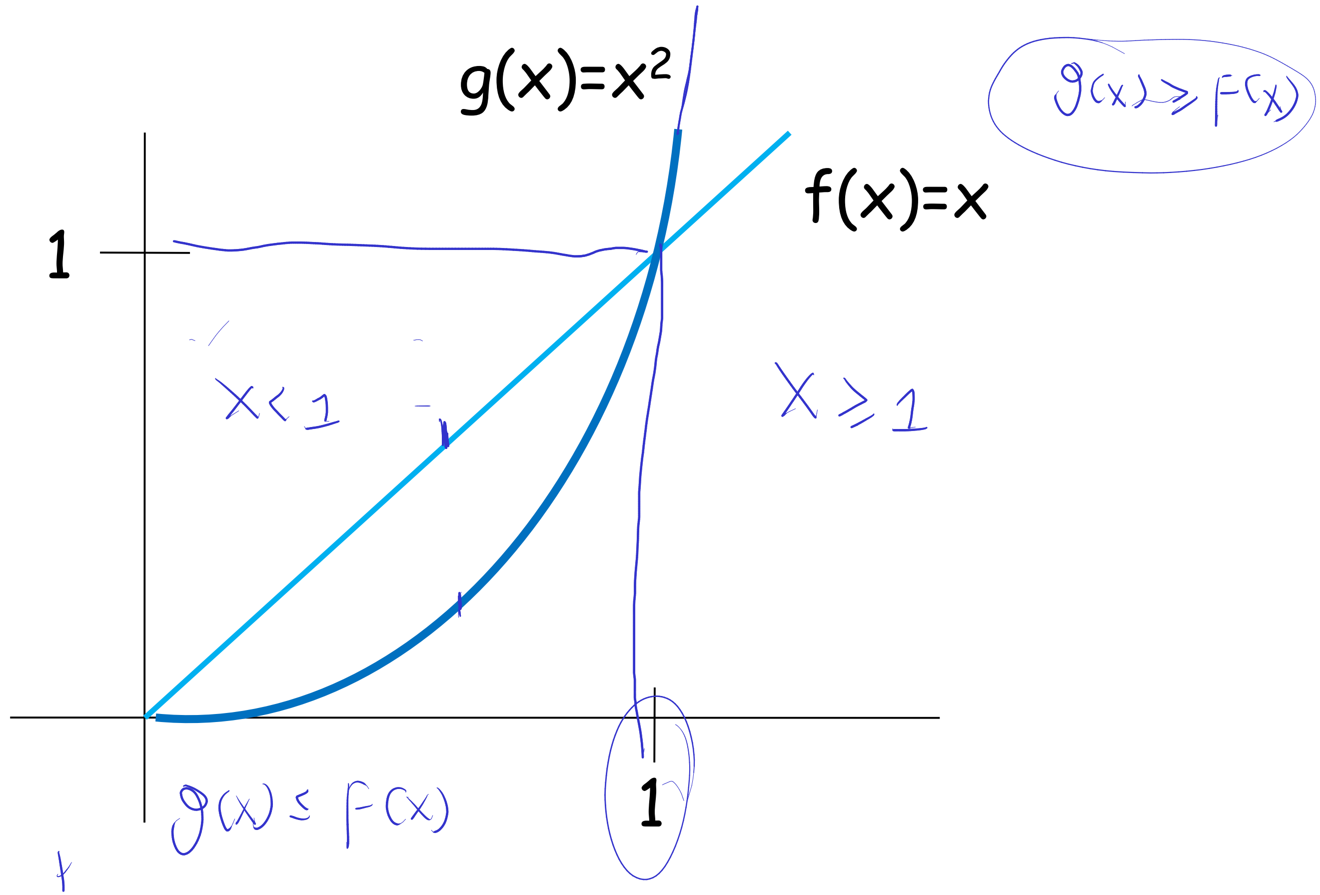
¿Cuándo se cruzan?

$x^2=x$

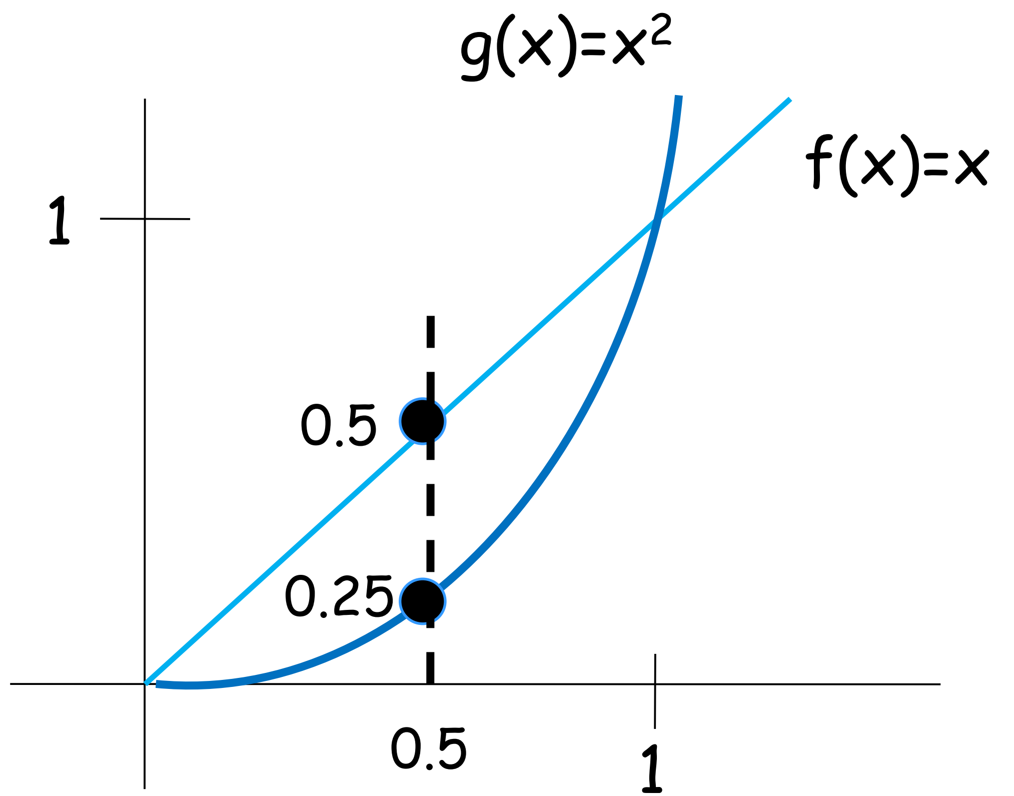
$x=1$



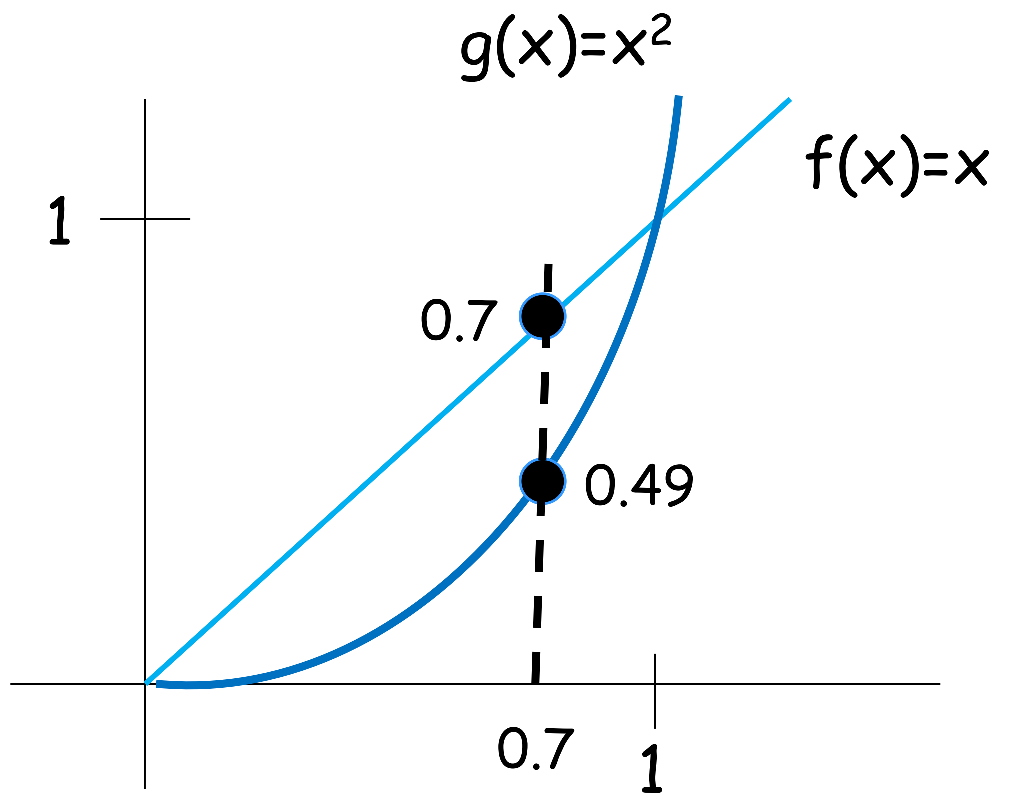
Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

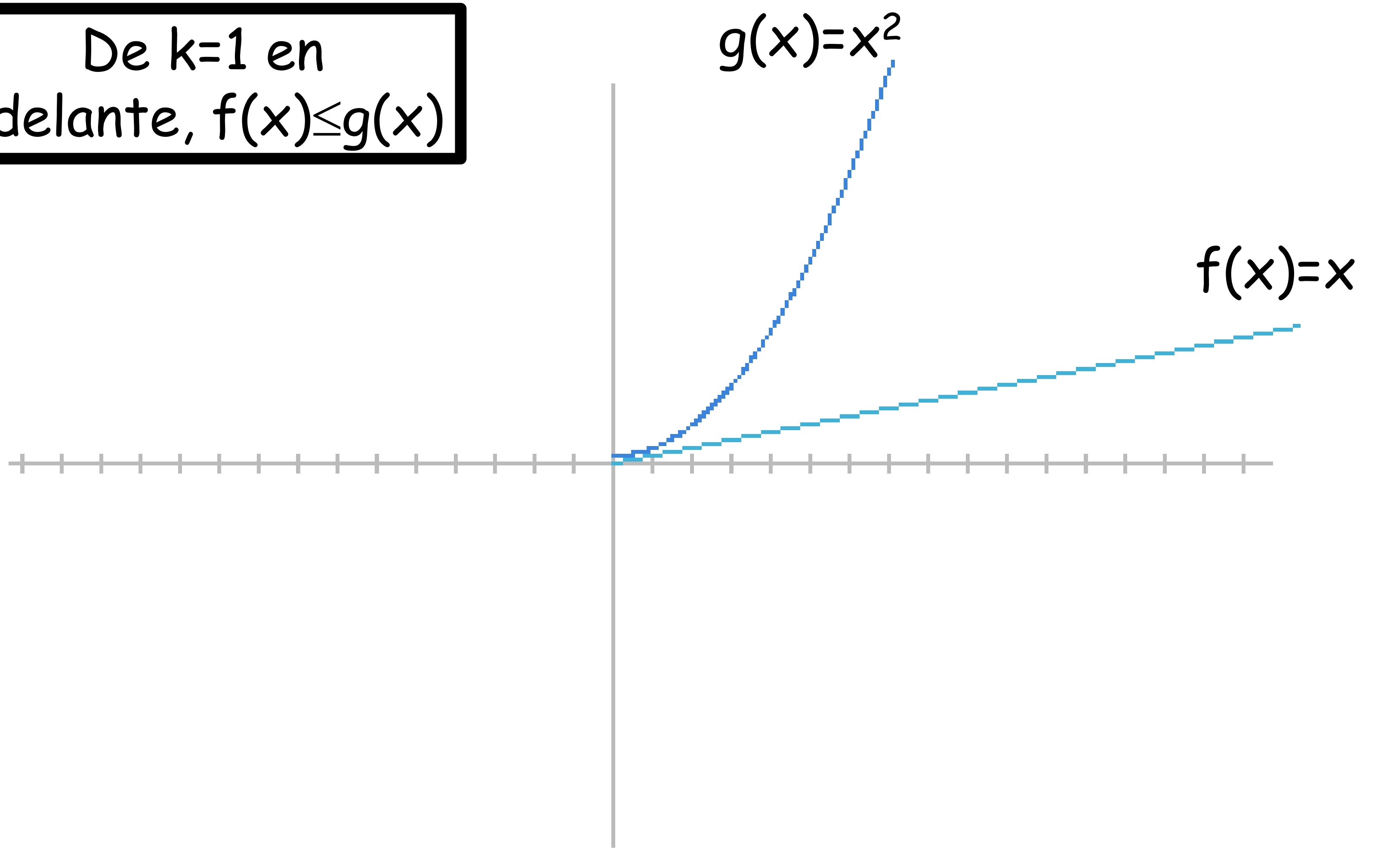


Crecimiento de funciones



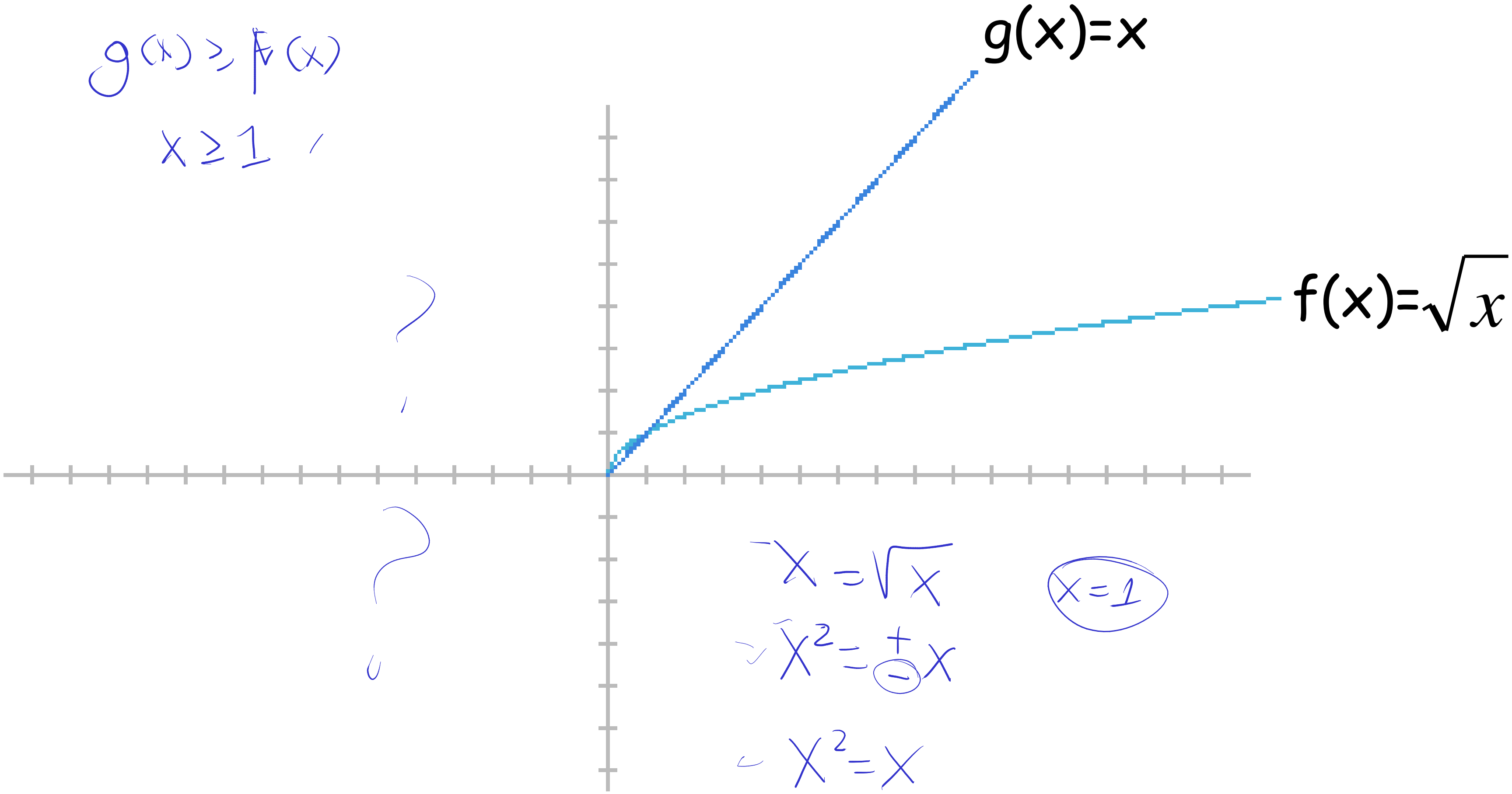
Crecimiento de funciones

De $k=1$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



$g(x) \geq f(x)$

$x \geq 1$

$x = \sqrt{x}$

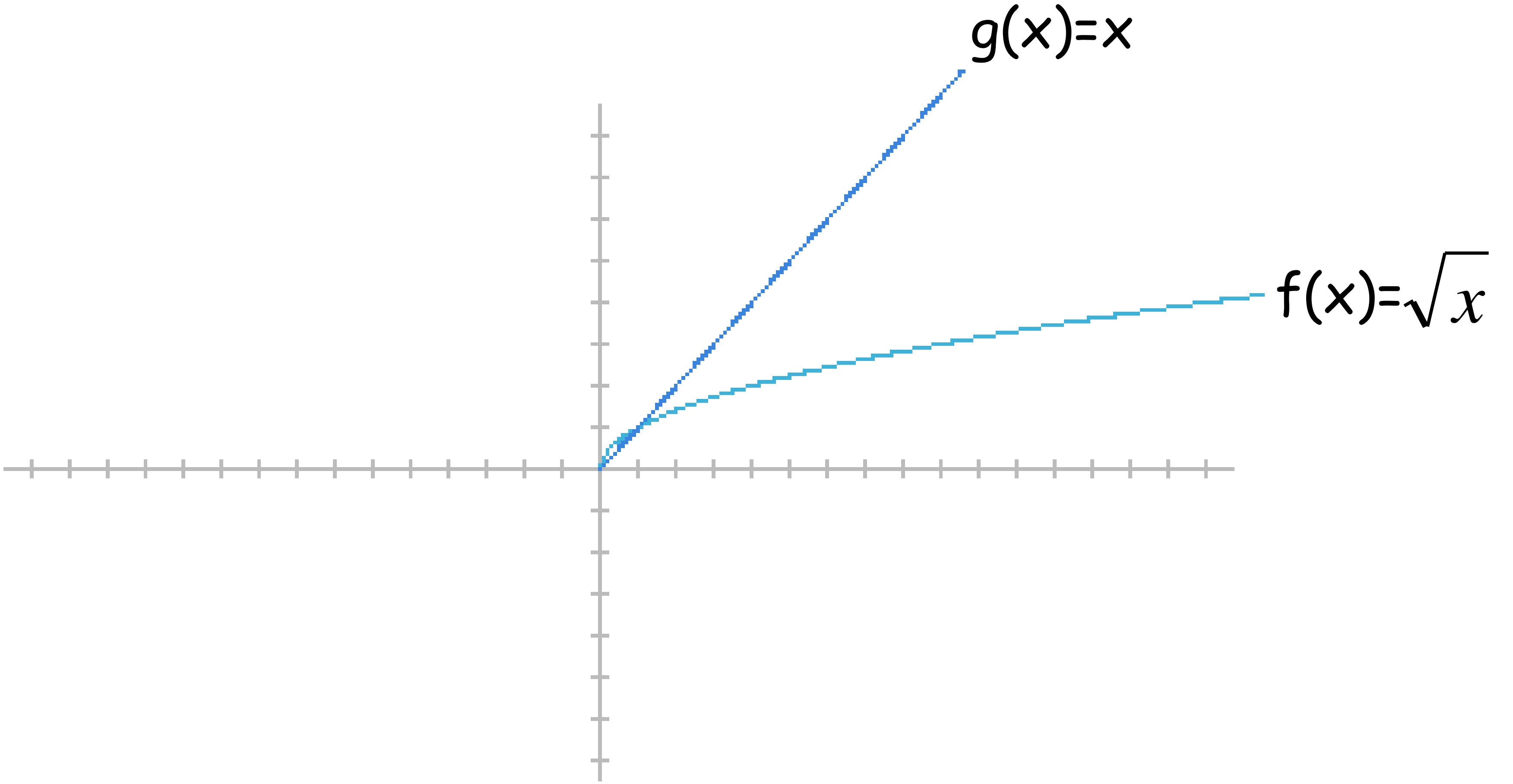
$x^2 = \pm x$

$x^2 = x$

$x = 1$

Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

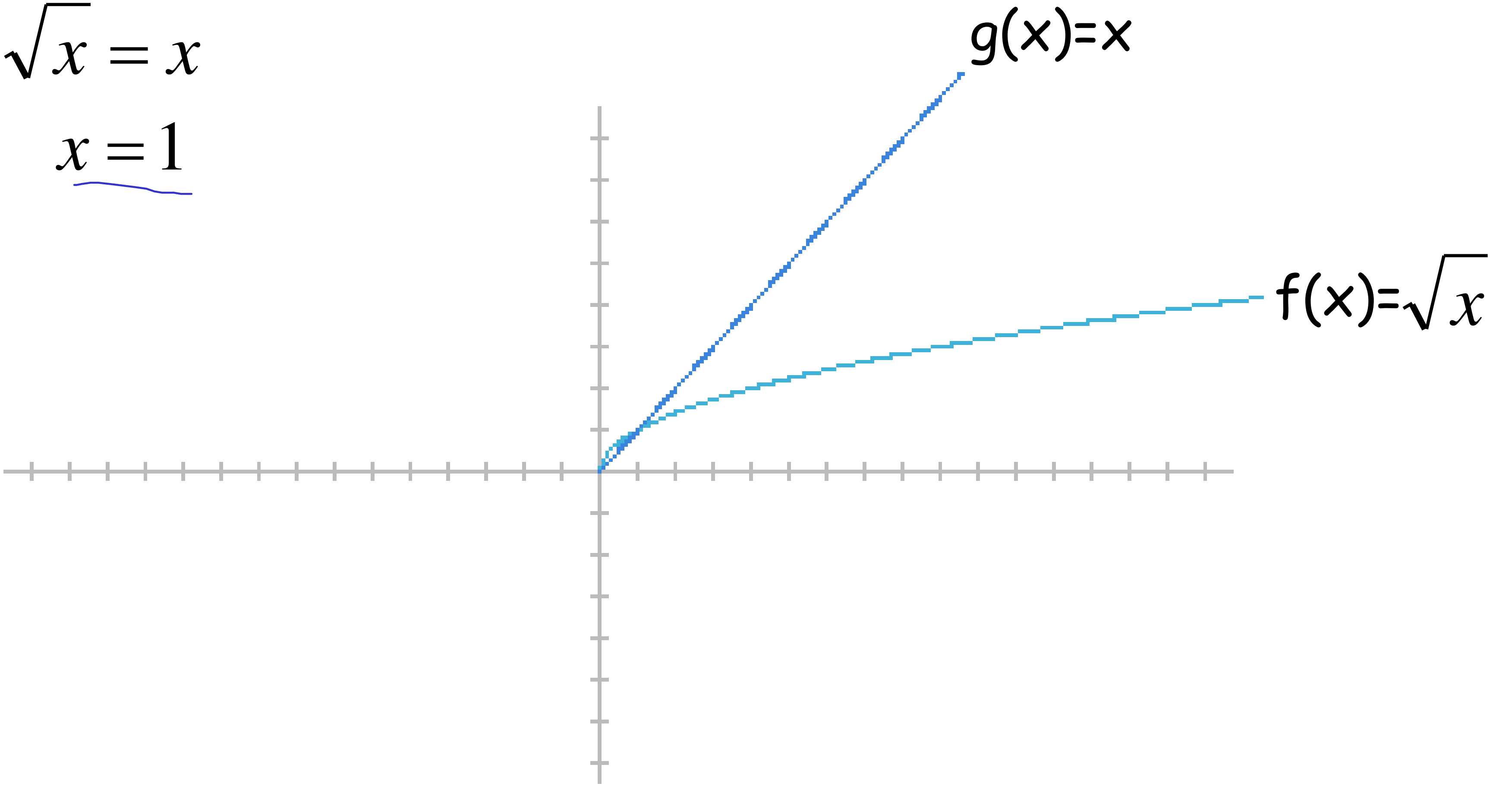


Crecimiento de funciones

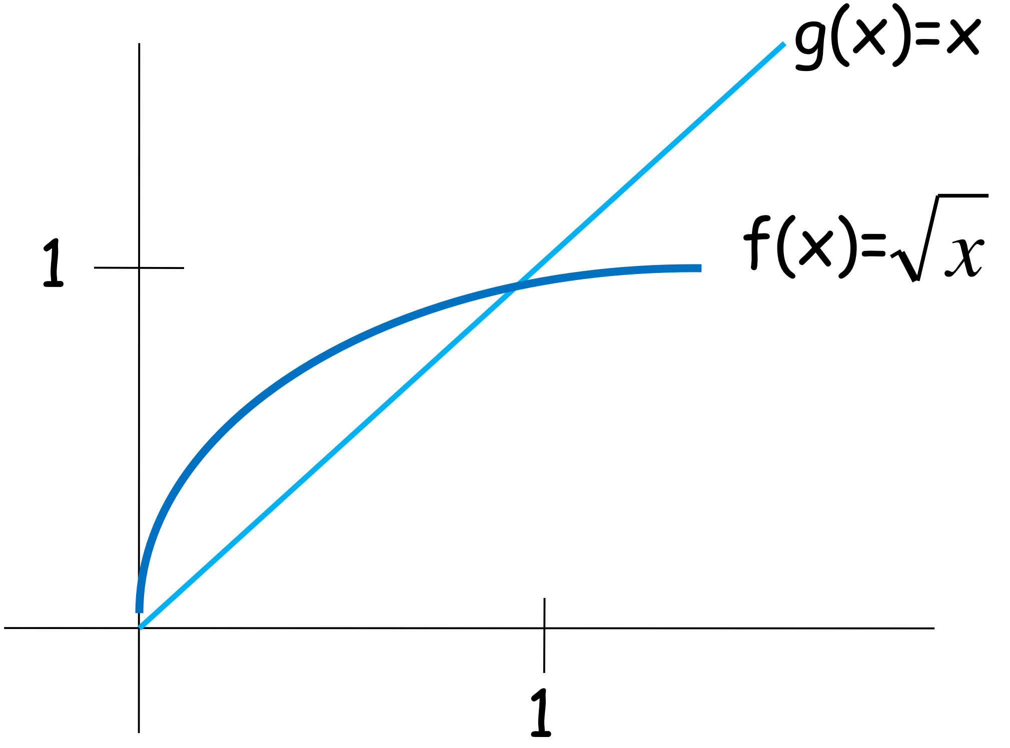
¿Cuándo se cruzan?

$$\sqrt{x} = x$$

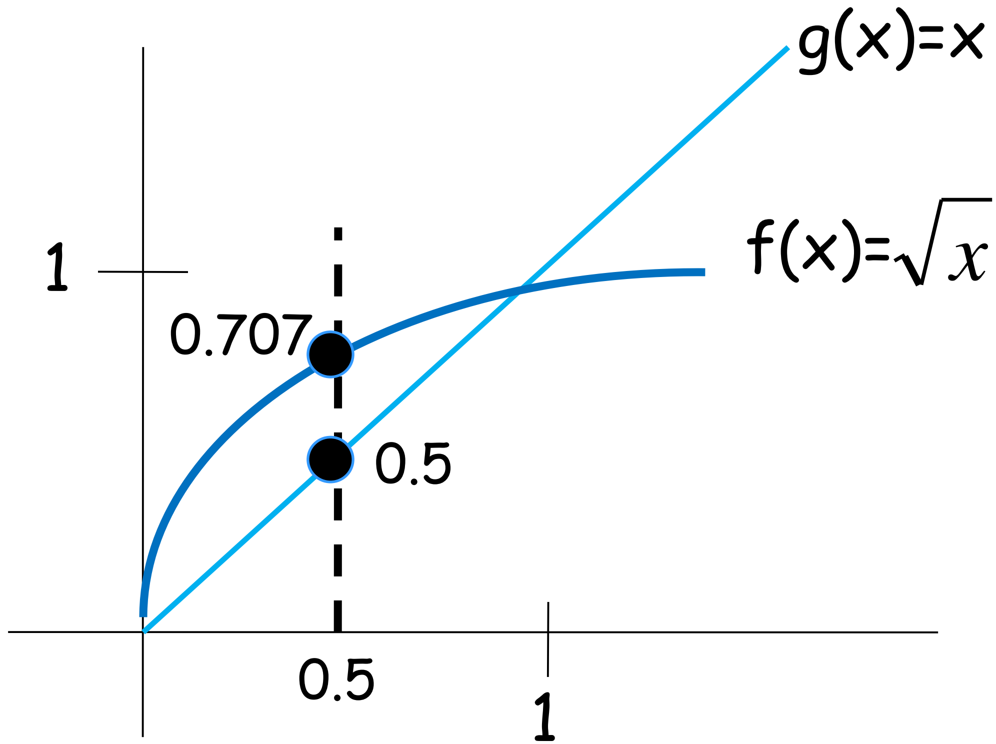
$$x = 1$$



Crecimiento de funciones

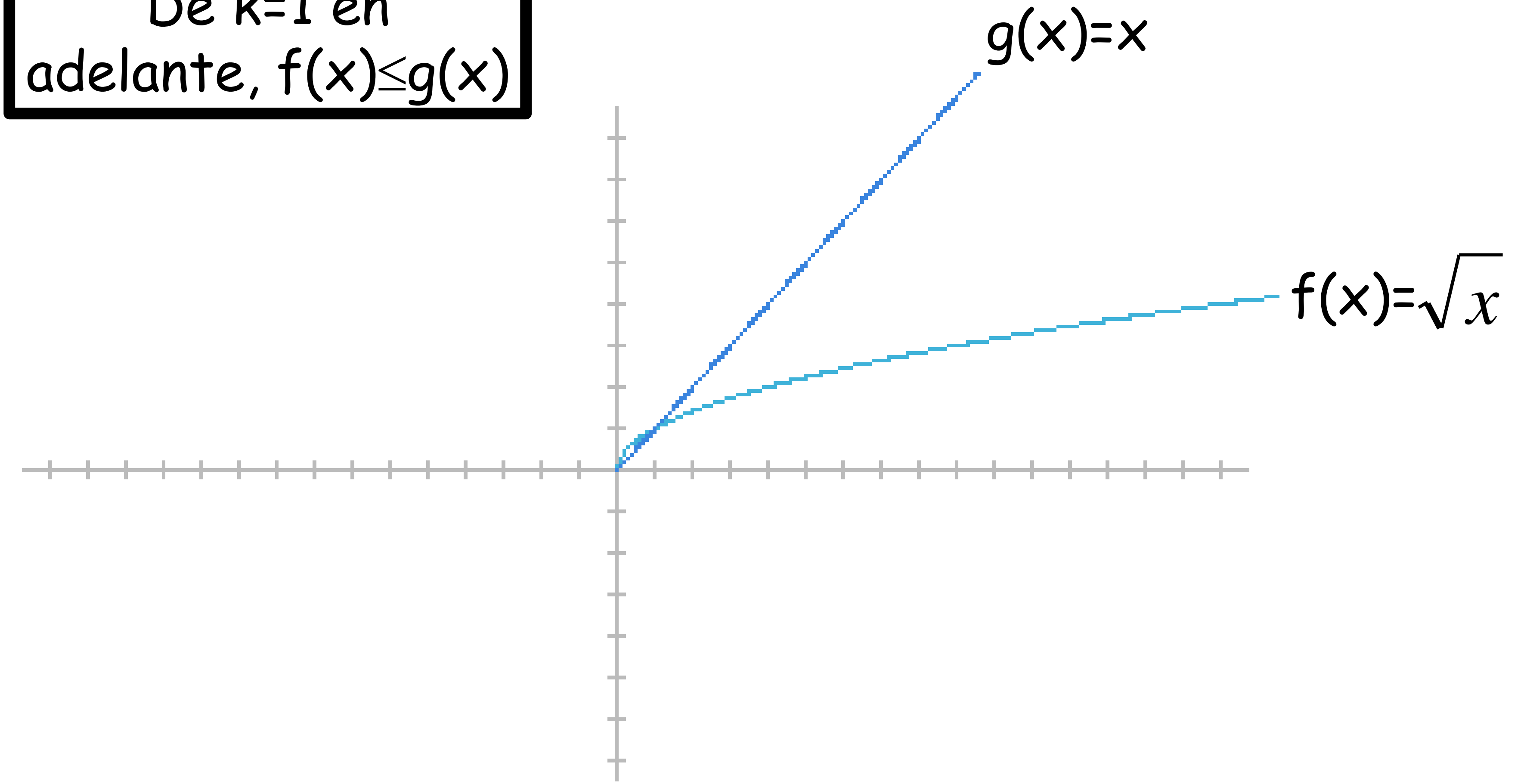


Crecimiento de funciones



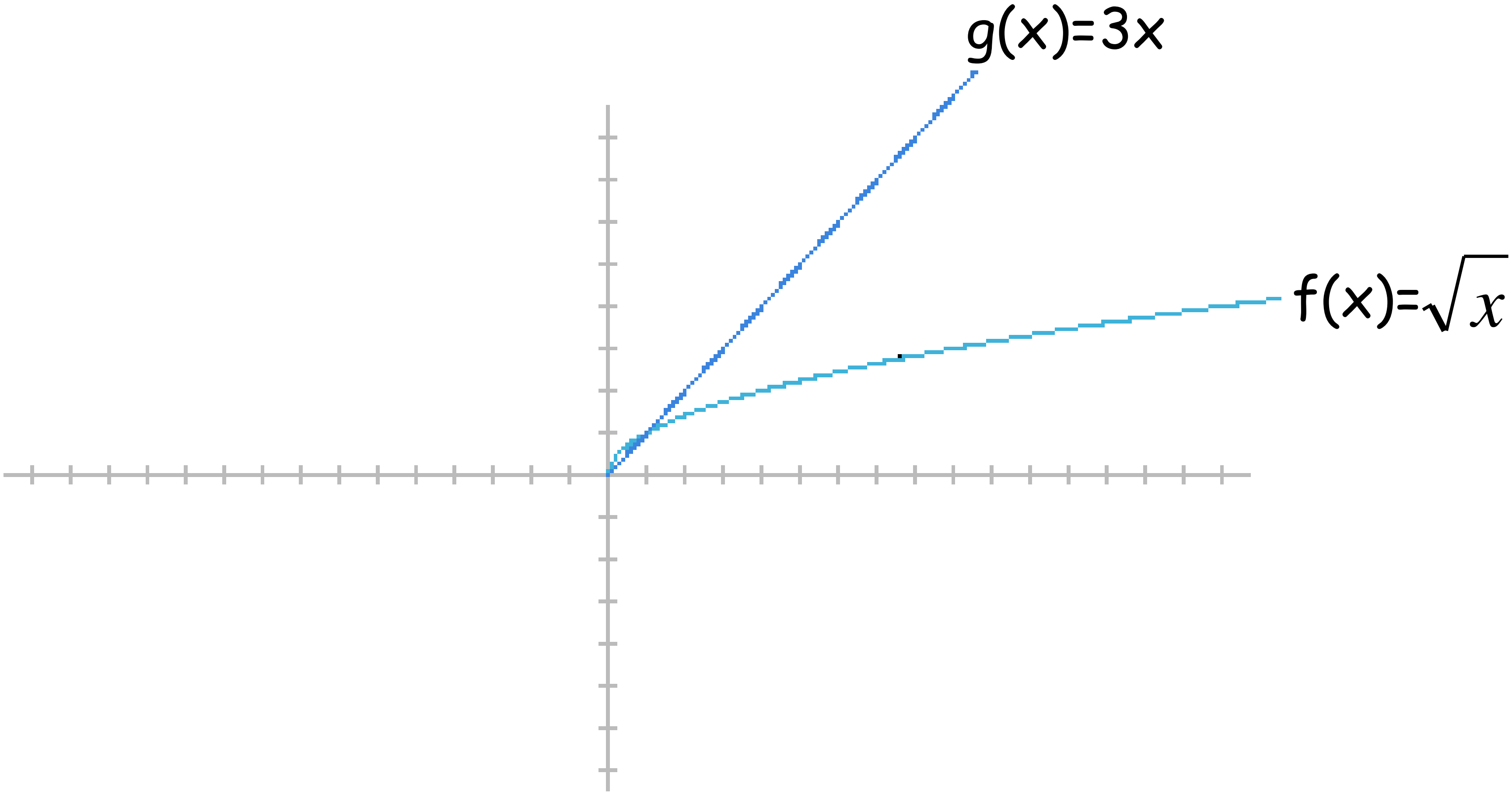
Crecimiento de funciones

De $k=1$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



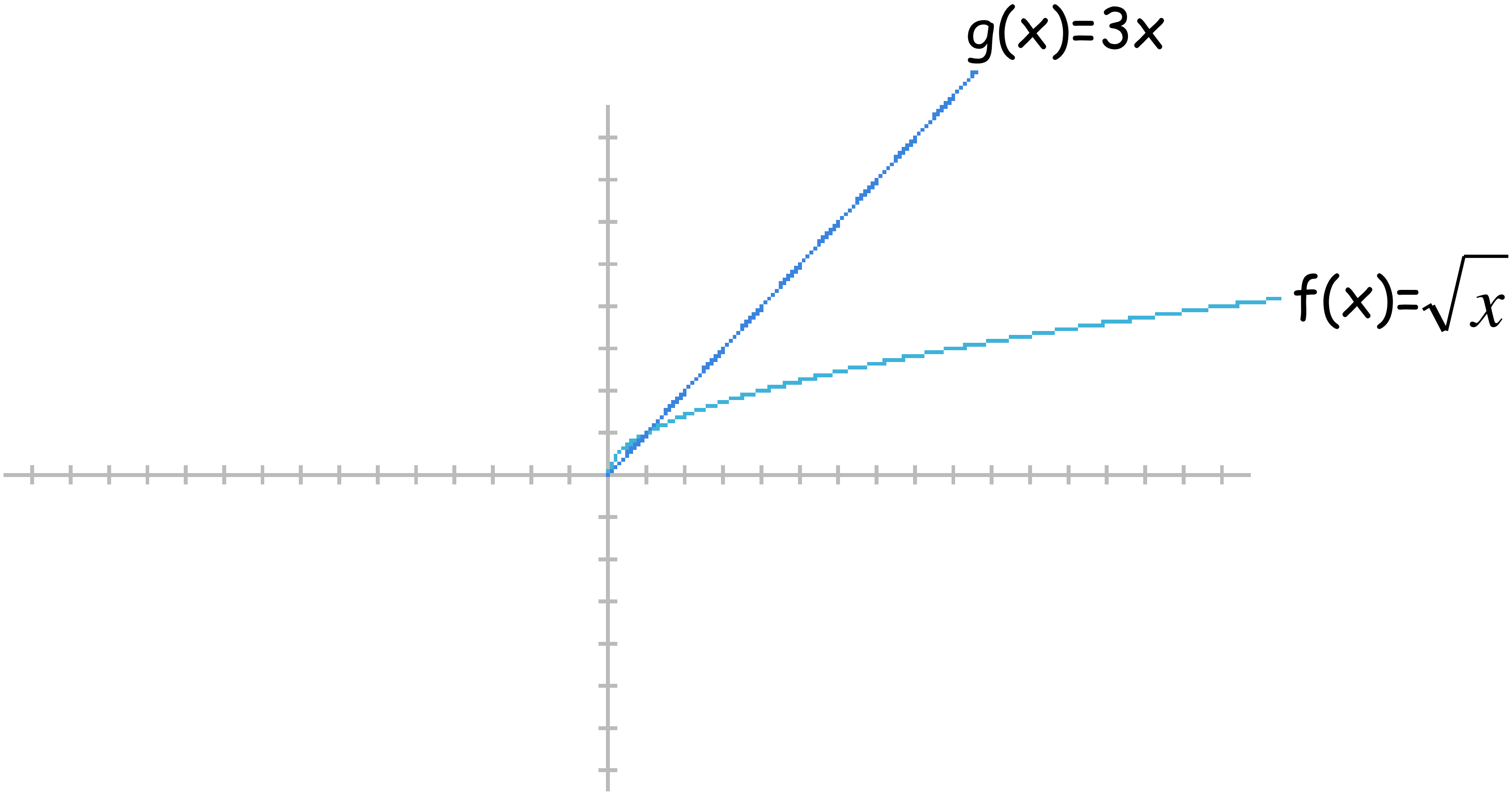
Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

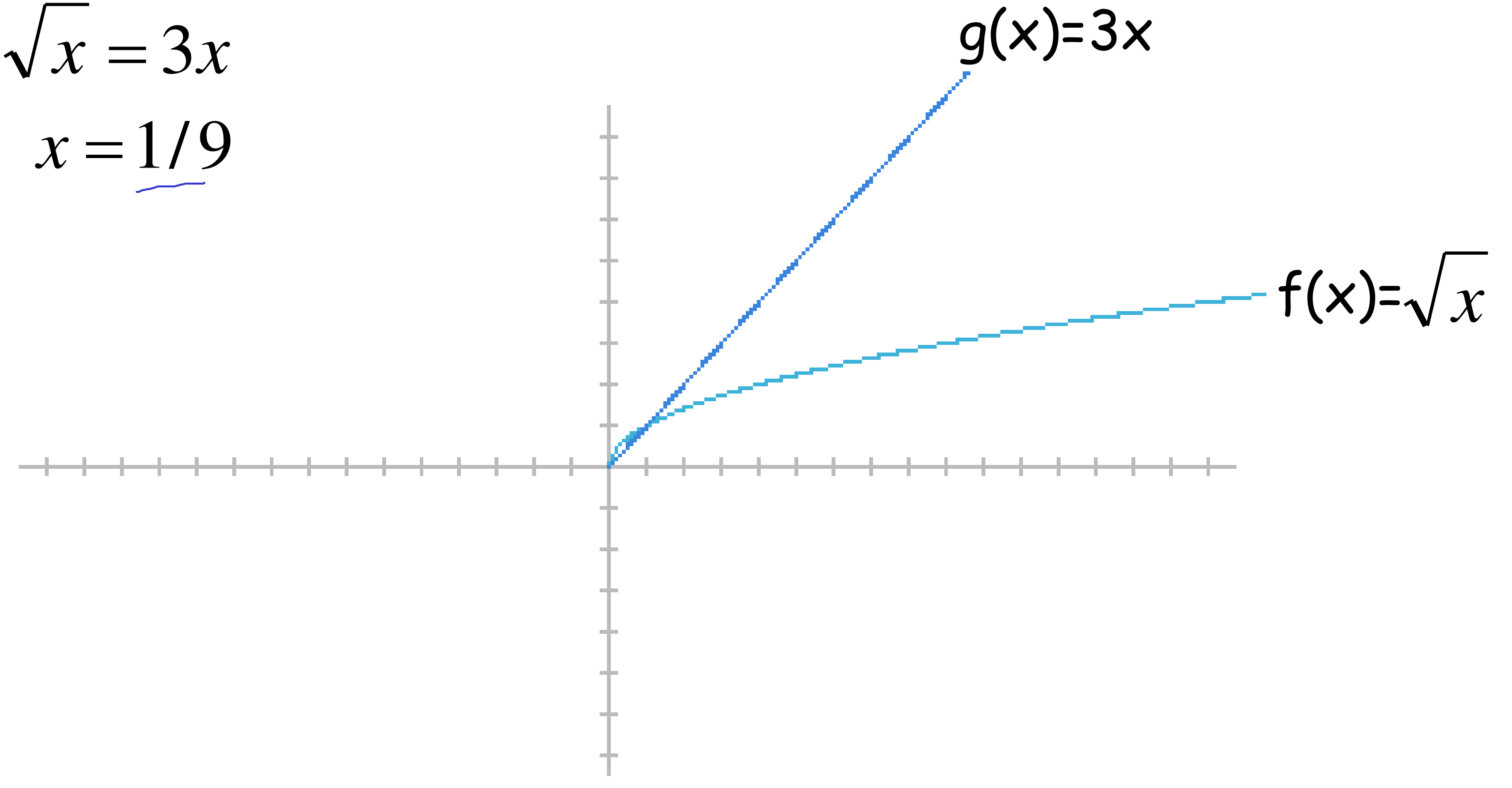


Crecimiento de funciones

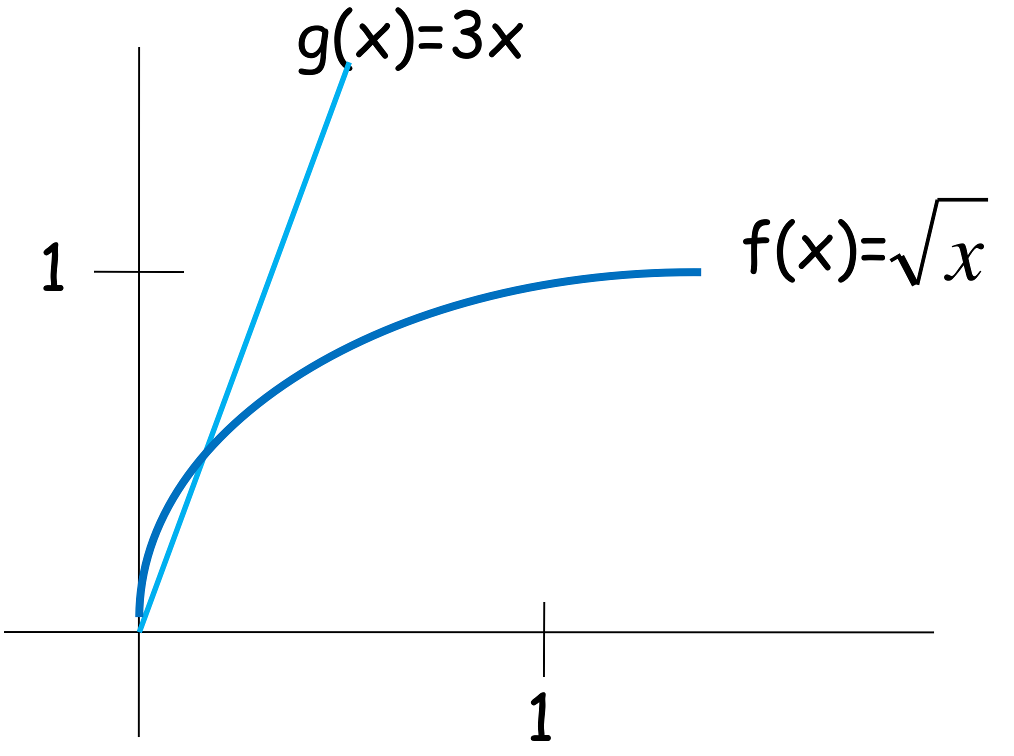
¿Cuándo se cruzan?

$$\sqrt{x} = 3x$$

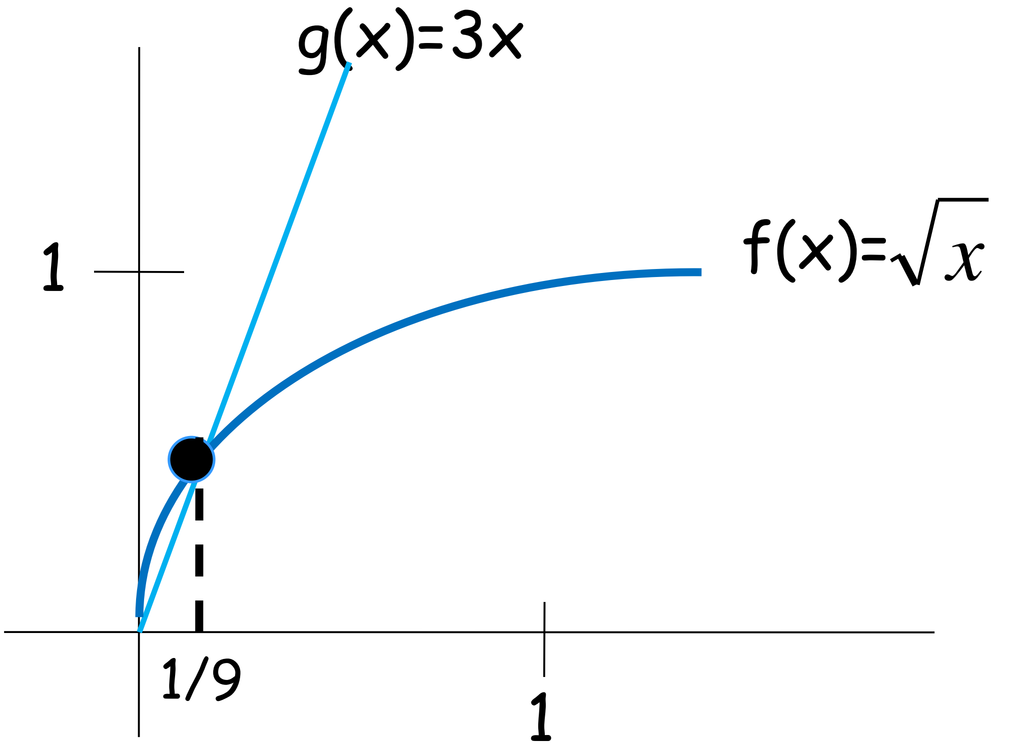
$$x = 1/9$$



Crecimiento de funciones

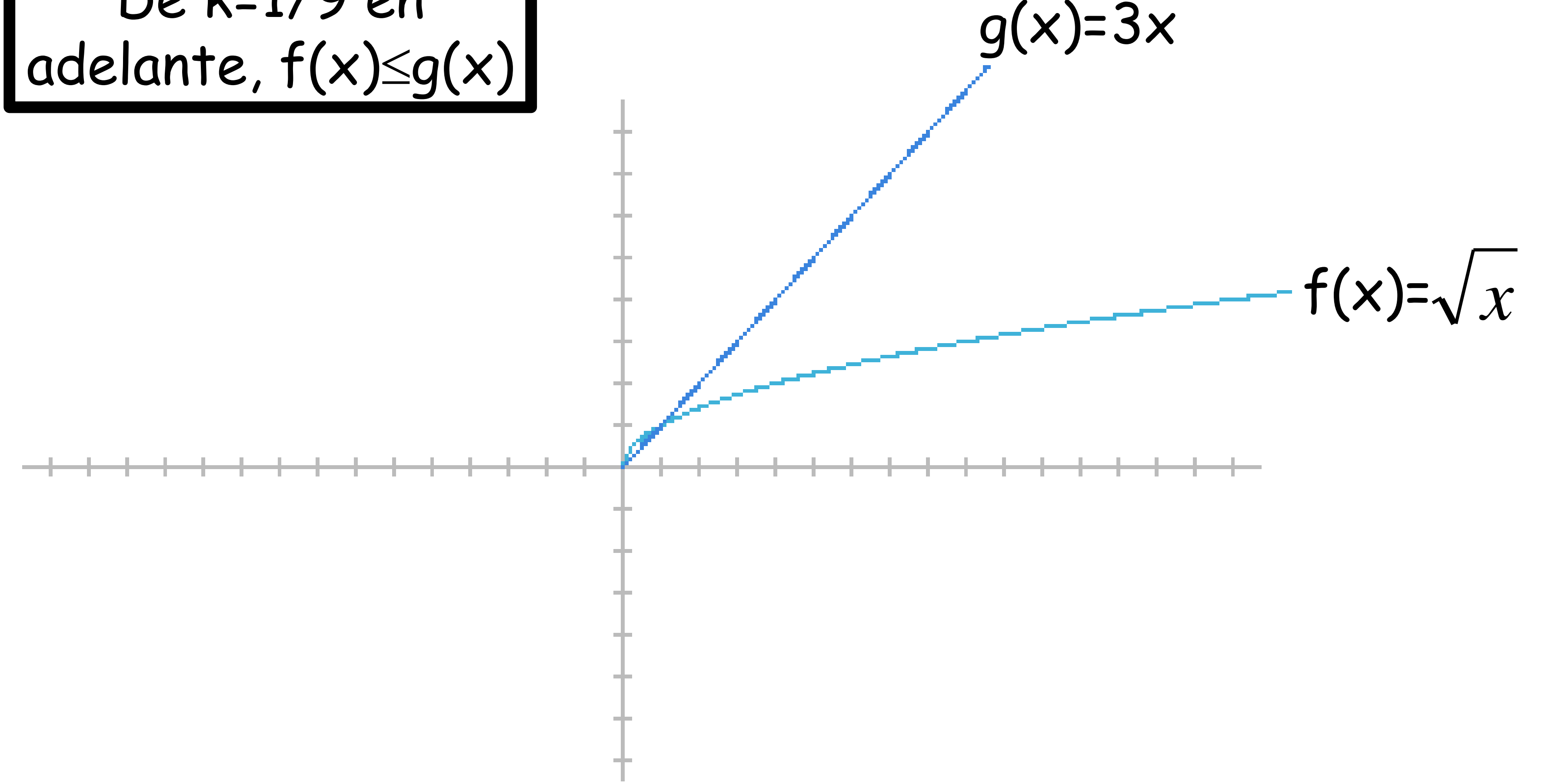


Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

De k=1/9 en adelante, f(x)≤g(x)



Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$g(x)=x^2$

$f(x)=x+2$

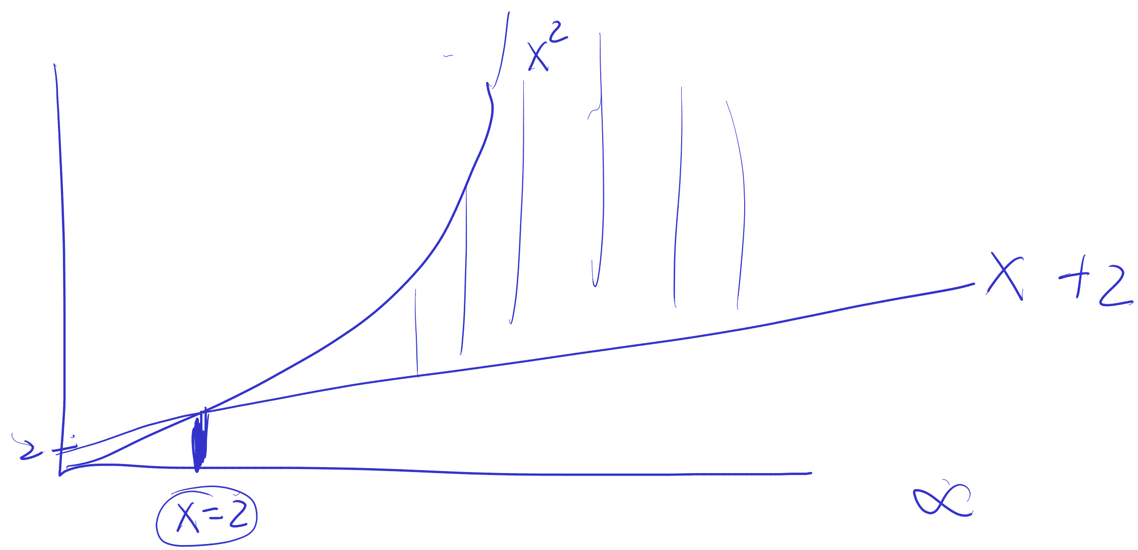
Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$g(x)=x^2$

$f(x)=x+2$

De k=2 en adelante, $f(x)\leq g(x)$



Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$g(x)=x^2$

$f(x)=2x+24$

Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

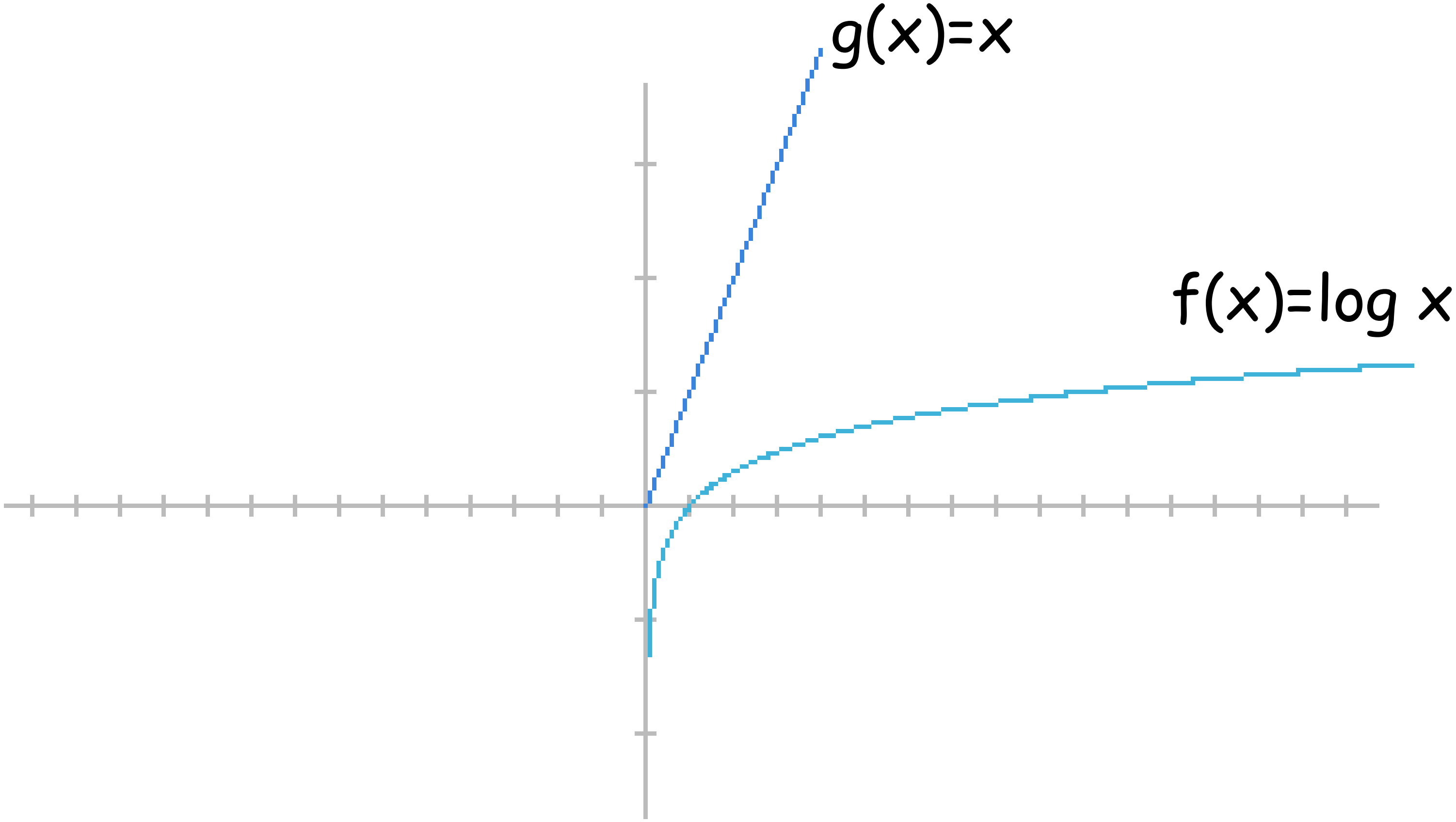
$g(x)=x^2$

$f(x)=2x+24$

De $k=6$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$

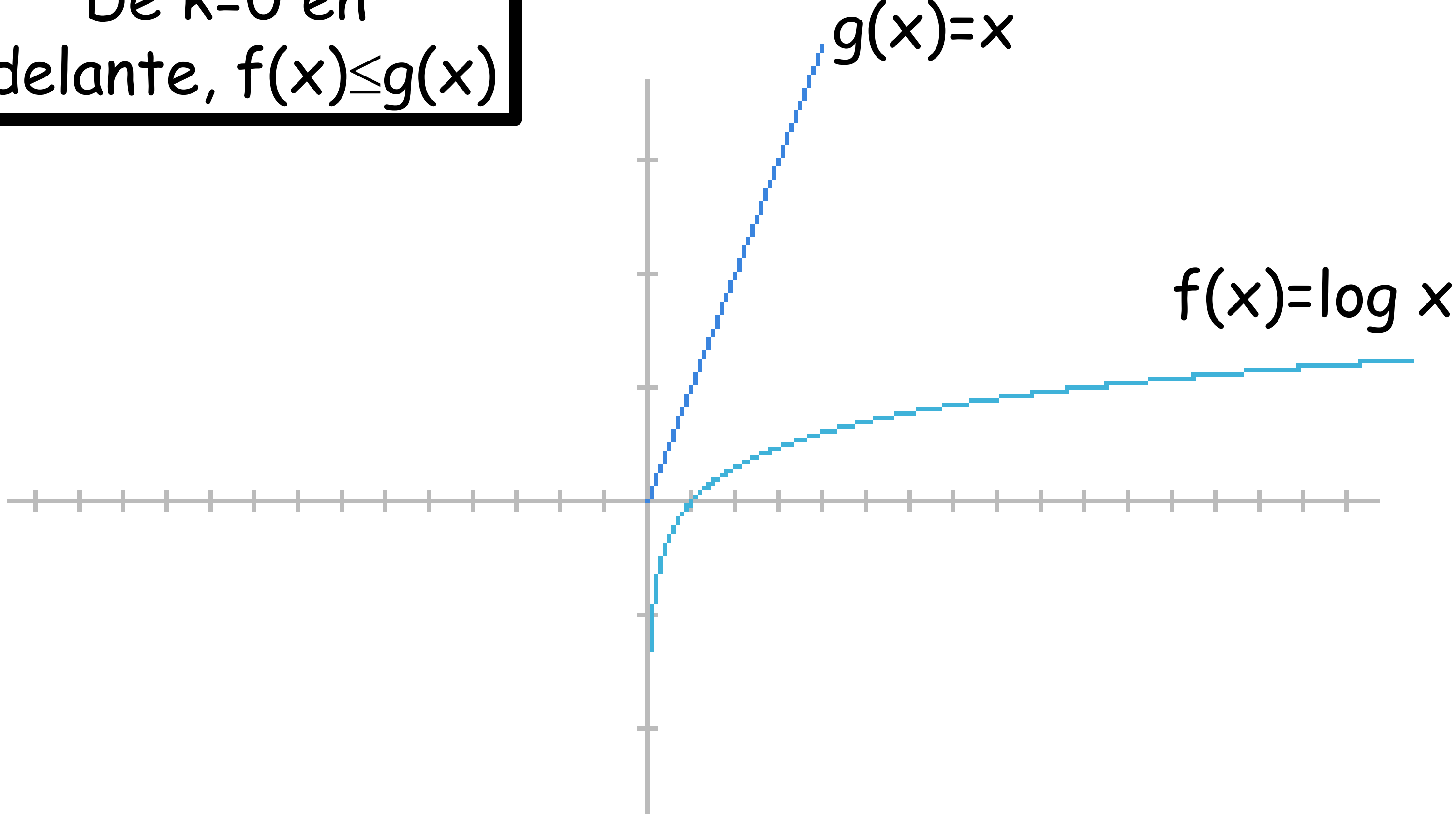
Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



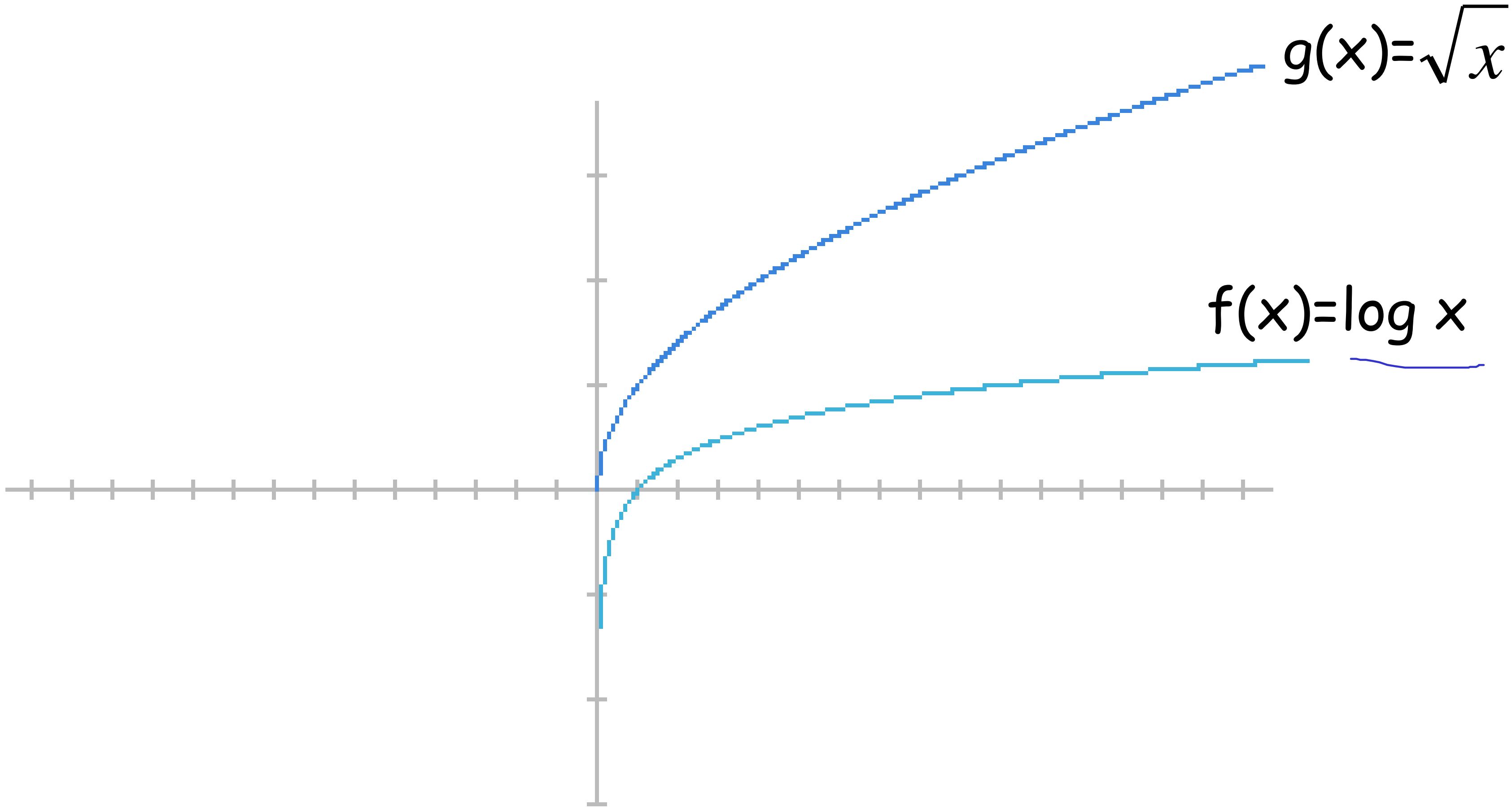
Crecimiento de funciones

De k=0 en adelante, $f(x) \leq g(x)$



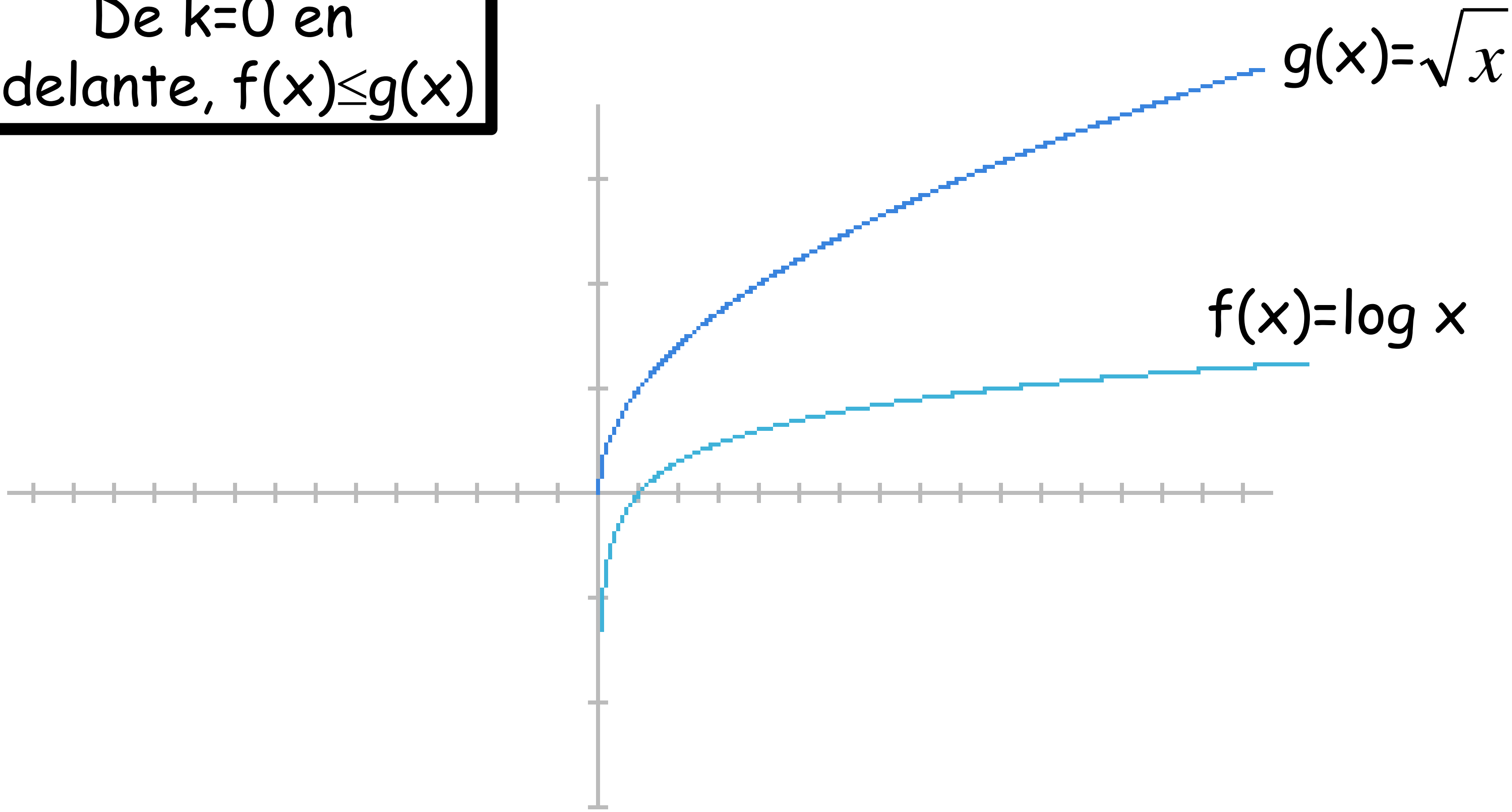
Crecimiento de funciones

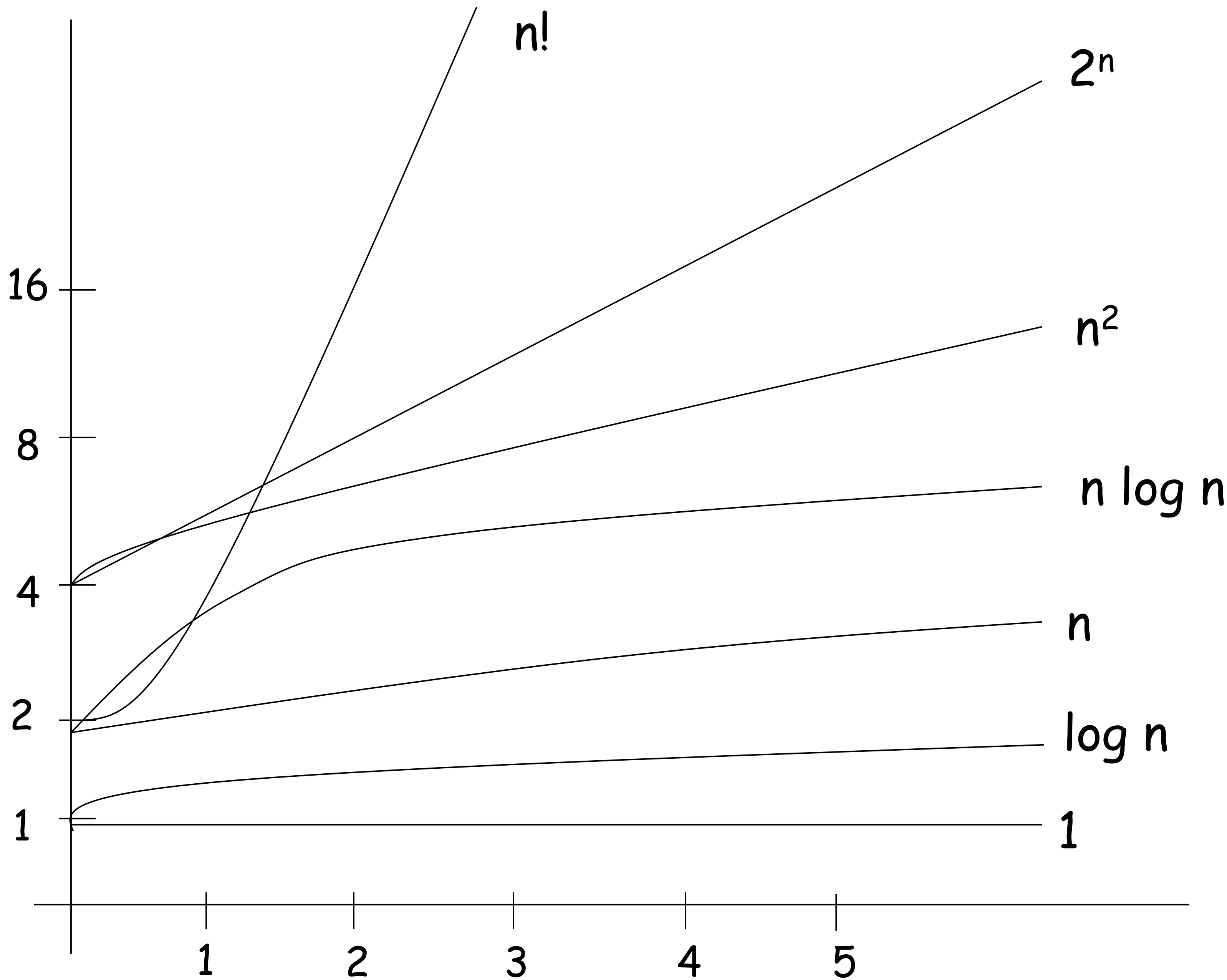
Analice el crecimiento de las siguientes funciones



Crecimiento de funciones

De k=0 en adelante, f(x)≤g(x)




n!
2^n
n^2
n log n
n
log n
1
16
8
4
2
1
1
2
3
4
5

Crecimiento de funciones

Notación O

Sean f y g dos funciones, se dice que $f(x)=O(g(X))$ si se cumple que

$$f(x) \leq g(x)$$

$f(x) \leq c \times g(x)$

$c = 1$

para $x>k$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2 = O(x^3)$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2=O(x^3)$

$7x^2 < x^3$, para $x>7$

Crecimiento de funciones

Muestre que $2x-1=O(x^2)$

$2x - 1 \leq x^2$

$x^2 - 2x + 1 \boxed{\geq} 0 \quad x = 1$

$x \geq 1$

Crecimiento de funciones

Muestre que $2x-1=O(x^2)$

$2x-1 < x^2$, para $x>1$

Crecimiento de funciones

Muestre que $3x+10=O(x^2)$

$$3x+10 \le x^2$$

$$x^2-3x-10 \boxed{\ge} 0$$

$$x \ge 5$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$r=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$r=\frac{3 \pm \sqrt{9-4(-10)}}{2}$$

$$r=\frac{3 \pm 7}{2}$$

5

-1

Crecimiento de funciones

Muestre que $3x+10=O(x^2)$

$3x+10 < x^2$, para $x>5$

Crecimiento de funciones

Muestre el valor de k para el cual se cumple cada una de las siguientes relaciones:

- $6x+16=O(x^2)$
- $\sqrt{6x} = O(3x)$

$6x+16 \le x^2$

$\boxed{k \ge 8}$

$x^2 - 6x - 16 \ge 0$

$\dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 16 \times 4}}{2}$

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3

16

6

$\dfrac{6 \pm 10}{2}$

8

-1

$\sqrt{6x} \le 3x$

$6x \le 9x^2$

$6x \le 9x^2$

$6 \le 9x$

$\boxed{x \ge \frac{6}{9}}$

$\frac{2}{3} \approx 0.6666$

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

$\boxed{5}n^2 \in O(n^2)$

$\boxed{3}n^2 + 4 \in O(n^2)$

$5n^2 \leq \boxed{10}n^2$

$3n^2 + 4 \leq \boxed{6}n^2$

$n+4 \quad O(n)$

1) n^2 es $O(n)$ ← NO $n^2 \leq n$ $n \leq 1$ ✗ $n \geq K$

2) n^2+4 es $O(n^2)$ ← Si $n^2+4 \leq 2 \times n^2$ $\boxed{K=4}$ $\log(n)=5$

3) $\log(n)$ es $O(n)$ ← Si $\log(n) \leq n$ $n \leq 2^n$ $\boxed{K=1}$ $2^n = 5$

4) $n^2 \log(n)$ es $O(n^3)$ ← Si $n^2 \log(n) \leq n^3$ $\log(n) \leq n$ $n \leq 2^n$ $\boxed{K=1}$

5) $100n$ es $O(n)$ ← Si $100n \leq 200n$ $K = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{array}{c} F(x) \text{ es } O(g(x)) \\ F(x) \leq C\, g(x) \\ x \geq K \end{array}}$$

$c = 1$

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

- Suponga que tiene dos algoritmos cuyos tiempos de ejecución están acotados de la siguiente forma:

  - $T_1(n) = O(n^2)$
  - $T_2(n) = O(\log n)$

- ¿Cuál algoritmo escogería?

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

• Suponga que tiene dos algoritmos cuyos tiempos de ejecución están acotados de la siguiente forma:

- $T_1(n) = O(n^2)$
- $T_2(n) = O(\log n)$

• ¿Cuál algoritmo escogería? **El algoritmo 2**

Complejidades de los algoritmos

Complejidad	Terminología
$O(1)$	Complejidad constante
$O(\log n)$	Complejidad logarítmica
$O(n)$	Complejidad lineal
$O(n \log n)$	Complejidad n log n
$O(n^b)$	Complejidad polinomial
$O(b^n)$	Complejidad exponencial
$O(n!)$	Complejidad factorial

Polinomiales

no polinomiales