

Matemáticas Discretas II

Oscar Bedoya

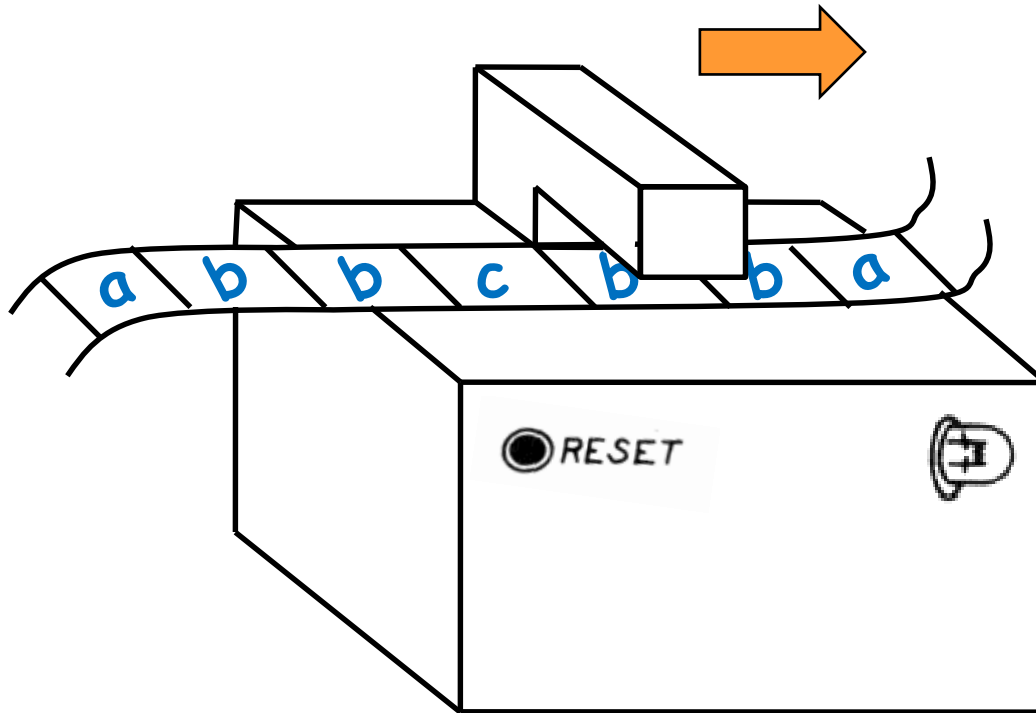
`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- Alfabetos, palabras y lenguajes
- Operadores sobre palabras y lenguajes
- Lenguajes regulares
- Expresiones regulares

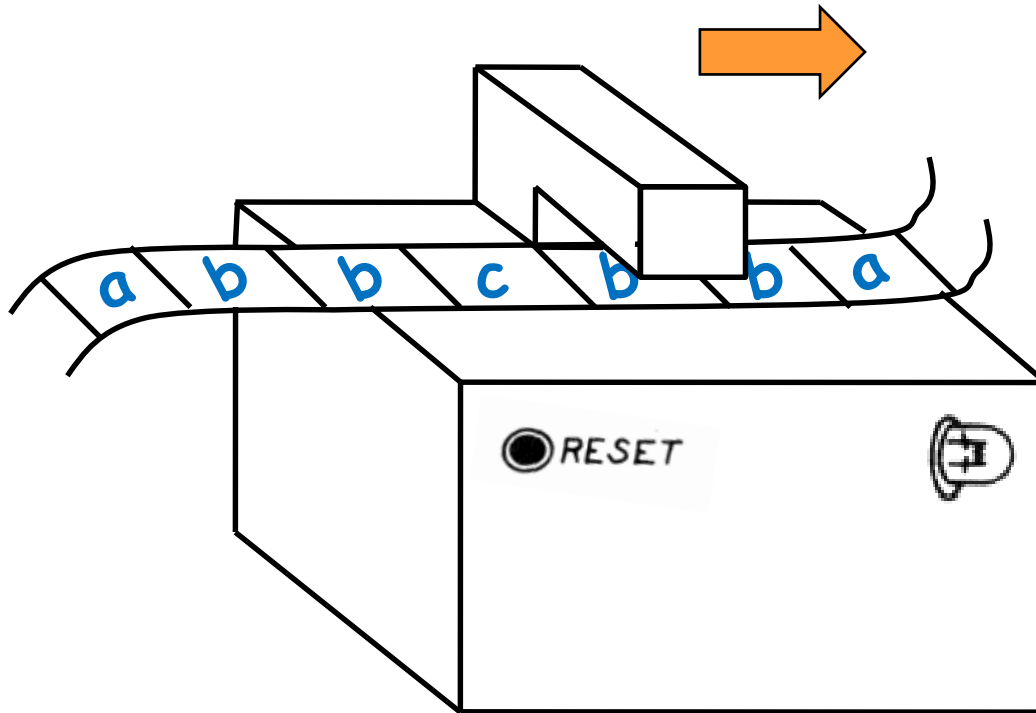
Lenguajes regulares

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta, \alpha \leq \beta $
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes regulares



Lenguajes regulares



El alfabeto es el conjunto de símbolos que podrán aparecer en la entrada de la máquina

Lenguajes regulares

Alfabeto

- Un alfabeto es cualquier conjunto de símbolos no vacío

$$\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma = \{a,b\}$$

Lenguajes regulares

Alfabeto

- Un alfabeto es cualquier conjunto de símbolos no vacío

$$\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\Sigma = \{a,b\}$$

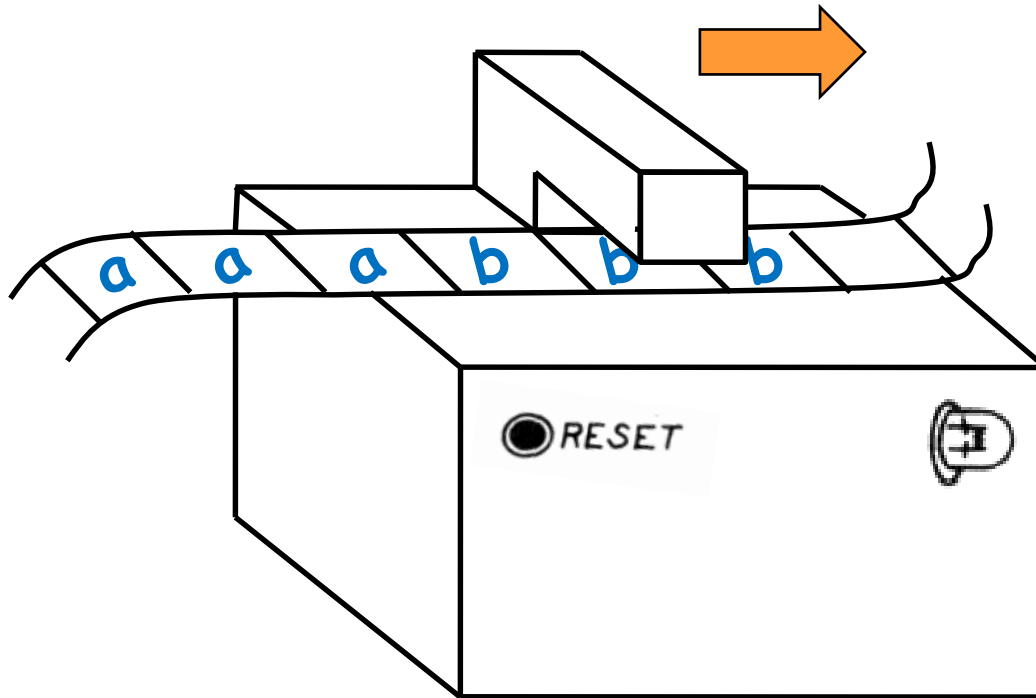
- **Alfabeto latino:**

$$\Sigma = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,\tilde{n},o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z\}$$

- **Alfabeto griego:**

$$\Sigma = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\dots,\Psi,\Omega\}$$

Lenguajes regulares



Las **palabras** o **cadenas** son secuencias finitas de símbolos

Lenguajes regulares

- Dado el alfabeto usado en español:

$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$

se pueden crear palabras:

colina

punte

dardo

fdkfjk

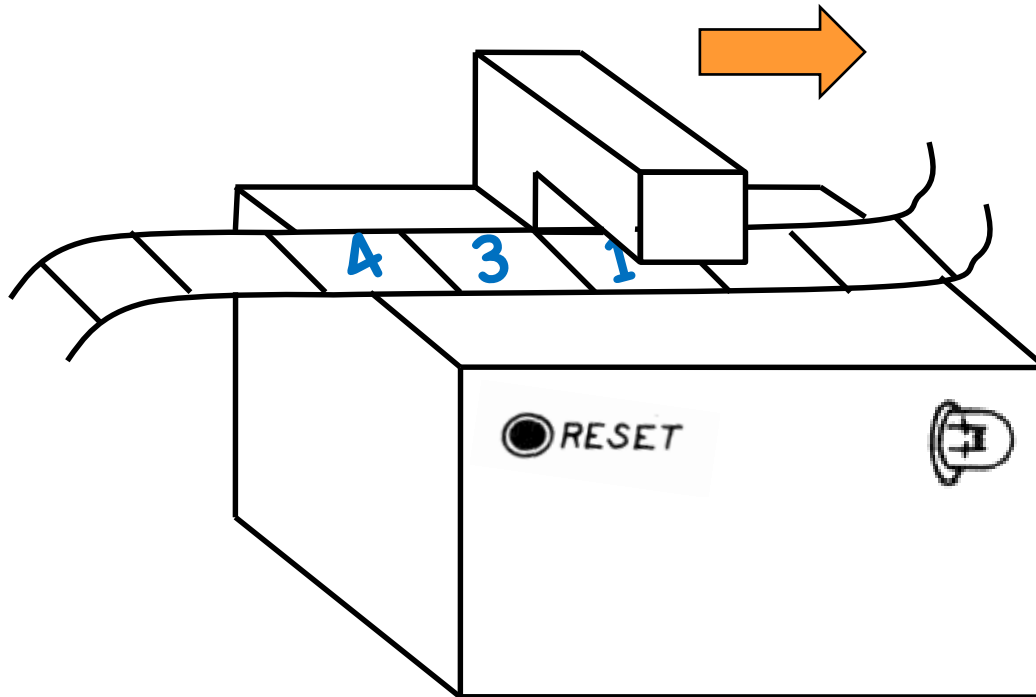
La noción de palabra no tiene asociada semántica

Lenguajes regulares

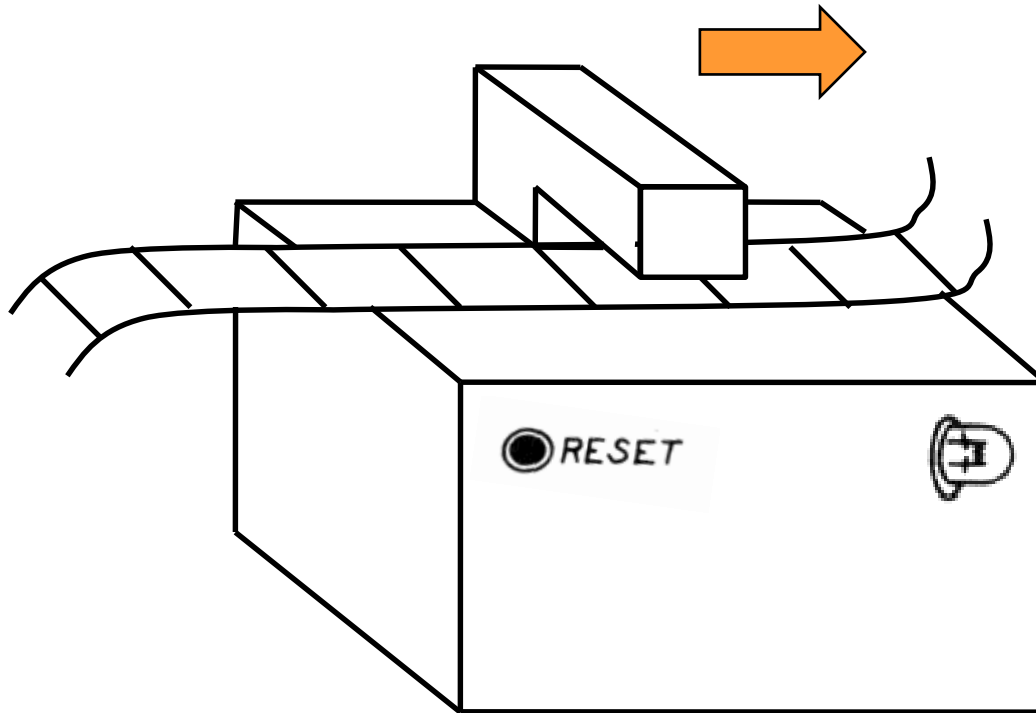
Cadena o palabra

- Una palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto
 - Si $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces 431, 021, ε , son palabras de Σ
 - Si $\Sigma = \{a,b\}$, entonces ab, ba, aab, ε , son palabras de Σ

Lenguajes regulares

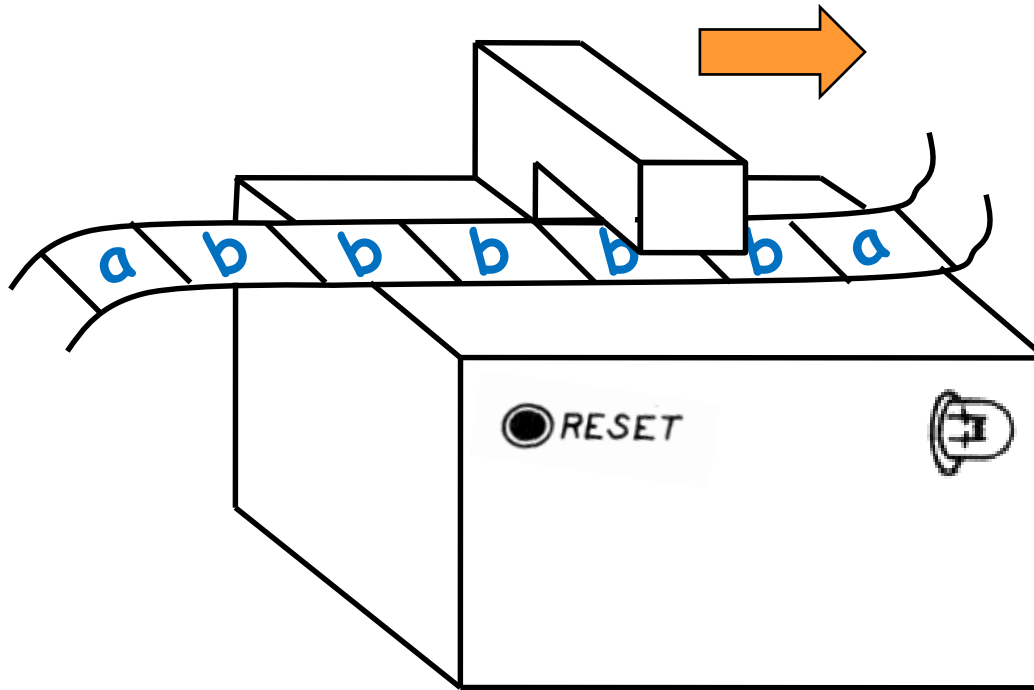


Lenguajes regulares



La **cadena vacía** ϵ representa una palabra que tiene 0 símbolos, esto es, una cinta vacía

Lenguajes regulares



Una máquina **acepta** un conjunto de palabras específico que se puede generar a partir de un alfabeto

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$
 - L_1 : conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$
 - L_1 : conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos
 - L_2 : conjunto de palabras que tienen al menos una a

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$
 - L_1 : conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos
 - L_2 : conjunto de palabras que tienen al menos una a
 - L_3 : conjunto de palabras que tienen un número par de símbolos

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje es un conjunto de palabras particular
- Muestre los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$
 - L_1 : conjunto de palabras que tienen exactamente 3 símbolos
 - L_2 : conjunto de palabras que tienen al menos una a
 - L_3 : conjunto de palabras que tienen un número par de símbolos
 - L_4 : conjunto de todas las posibles palabras

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Se denota como Σ^* y se conoce también como **cerradura**
- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Se denota como Σ^* y se conoce también como **cerradura**
- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
- Muestre el lenguaje universal Σ^* para los siguientes alfabetos:
 - $\Sigma = \{a,b,c\}$
 - $\Sigma = \{1\}$

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ
 - Para $\Sigma=\{a,b,c\}$, $\Sigma^*=\{\epsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \dots\}$
 - Para $\Sigma=\{1\}$, $\Sigma^*=\{\epsilon, 1, 11, 111, 1111, \dots\}$

Lenguajes regulares

Lenguaje universal sobre Σ

- Σ^* es el lenguaje formado por todas las cadenas sobre el alfabeto Σ

- Para $\Sigma=\{a,b,c\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, \dots\}$

- Para $\Sigma=\{1\}$, $\Sigma^*=\{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \dots\}$

ε siempre está en Σ^* porque la cadena vacía se puede obtener de cualquier alfabeto

Para cualquier alfabeto Σ , se tiene que Σ^* es infinito ya que Σ no puede ser vacío

Lenguajes regulares

Lenguaje

- Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un subconjunto de Σ^* , es decir, $L \subseteq \Sigma^*$

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

· es el operador concatenación

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $(aab)^3$

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $(aab)^3 = aab \cdot (aab)^2$
 $= aab \cdot aab \cdot aab^1$
 $= aab \cdot aab \cdot aab \cdot aab^0$
 $= aab \cdot aab \cdot aab \cdot \varepsilon = aabaabaab$

Lenguajes regulares

Potencia de una cadena

- Sea x una cadena, se define la potencia de x como:

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } n=0 \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Muestre
 - $a^3 \cdot (aba)^2$
 - $(ab)^2 \cdot (ba)^3$

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\},$

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$

Lenguajes regulares

• $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a^1 & a^2 & a^3 & a^4 \end{array}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma = \{a, b\}$,

$L = \{ab, aabb, aaabbb, \dots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma = \{a, b\}$,

$L = \{ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma = \{a, b\}$,

$L = \{ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma = \{a, b\}$,

$L = \{ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

- $\Sigma = \{0, 1\}$,

$L = \{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, 1001, \dots\}$

Lenguajes regulares

- $\Sigma = \{a\}$,

$L = \{a, aa, aaa, aaaa, \dots\} = \{a^n \mid n \geq 1\}$, cadenas de una ó más a's

- $\Sigma = \{a, b\}$,

$L = \{ab, aabb, aaabbb, \dots\} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, cadenas con igual cantidad de a's que b's, donde las a's están a la izquierda de las b's

- $\Sigma = \{0, 1\}$,

$L = \{\epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1100, 1001, \dots\} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{tienen la misma cantidad de 0's que 1's}\}$, cadenas con igual cantidad de 0's que 1's

Lenguajes regulares

Longitud de una cadena

- Sea x una cadena que pertenece a un lenguaje L , su longitud se denota por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{si } x = \varepsilon \\ n, & \text{si } x = a_1 a_2 \dots a_n \end{cases}$$

Lenguajes regulares

Longitud de una cadena

- Sea x una cadena que pertenece a un lenguaje L , su longitud se denota por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{si } x = \varepsilon \\ n, & \text{si } x = a_1 a_2 \dots a_n \end{cases}$$

- $|\varepsilon| = 0$
- $|ababaa| = 6$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ , la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ , la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B = \{ab, abb, acb, ab^2, abb^2, acb^2\} = \{ab, ab^2, acb, ab^2, ab^3, acb^2\}$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ , la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B = \{ab, abb, acb, ab^2, abb^2, acb^2\} = \{ab, ab^2, acb, ab^2, ab^3, acb^2\}$
 $= \{ab, ab^2, acb, ab^3, acb^2\}$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ , la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B = \{ab, abb, acb, ab^2, abb^2, acb^2\} = \{ab, ab^2, acb, ab^2, ab^3, acb^2\}$
- $B \cdot A = ?$

Lenguajes regulares

Concatenación entre lenguajes

- Sean A y B dos lenguajes definidos sobre Σ , la concatenación $A \cdot B$ se define como:

$$A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A \wedge v \in B\}$$

- $A = \{a, ab, ac\}$, $B = \{b, b^2\}$
- $A \cdot B = \{ab, abb, acb, ab^2, abb^2, acb^2\} = \{ab, ab^2, acb, ab^2, ab^3, acb^2\}$
- $B \cdot A = \{ba, bab, bac, b^2a, b^2ab, b^2ac\}$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \text{si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \text{si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \text{si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \{ab,b\}\{ab,b\}\{ab,b\}$$

$$= \{ab,b\}\{abab,bab,abb,bb\}$$

$$= \{ababab,abbab,ababb,abbb,babab,bbab,babb,bbb\}$$

Lenguajes regulares

Potencia de un lenguaje

- Dado un lenguaje A sobre Σ se define la potencia como:

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \text{si } n=0 \\ A \cdot A^{n-1}, & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Cadenas formadas usando
3 concatenaciones sobre A

Calcule A^3 para $A=\{ab,b\}$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \{ab,b\}\{ab,b\}\{ab,b\}$$

$$= \{ab,b\}\{abab,bab,abb,bb\}$$

$$= \{ababab,abbab,ababb,abbb,babab,bbab,babb,bbb\}$$



Lenguajes regulares

Dado $A = \{ab, ca, ad\}$,

¿ $abcaab \in A^3$?

¿ $adca \in A^2$?

¿ $caba \in A^2$?

¿ $abcaaa \in A^3$?

¿ $adcaab \in A^3$?

Lenguajes regulares

Dado $A = \{ab, c, ac\}$,

¿ $accab \in A^3$?

¿ $abacca \in A^3$?

¿ $abcc \in A^3$?

¿ $abcba \in A^3$?

Lenguajes regulares

Dado $A=\{a,b,ab\}$ calcule

- $A^0 \cup A^1 \cup A^2$

Lenguajes regulares

Dado $A=\{a,b,ab\}$ calcule

- $A^0 \cup A^1 \cup A^2$

- $A^0 = \{\varepsilon\}$

- $A^1 = A = \{a,b,ab\}$

- $A^2 = A \cdot A = \{aa,ab,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\}$

Por lo tanto $A^0 \cup A^1 \cup A^2 = \{\varepsilon,a,b,ab,aa,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- La cerradura de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias, se denota por A^*

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- La cerradura de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias, se denota por A^*

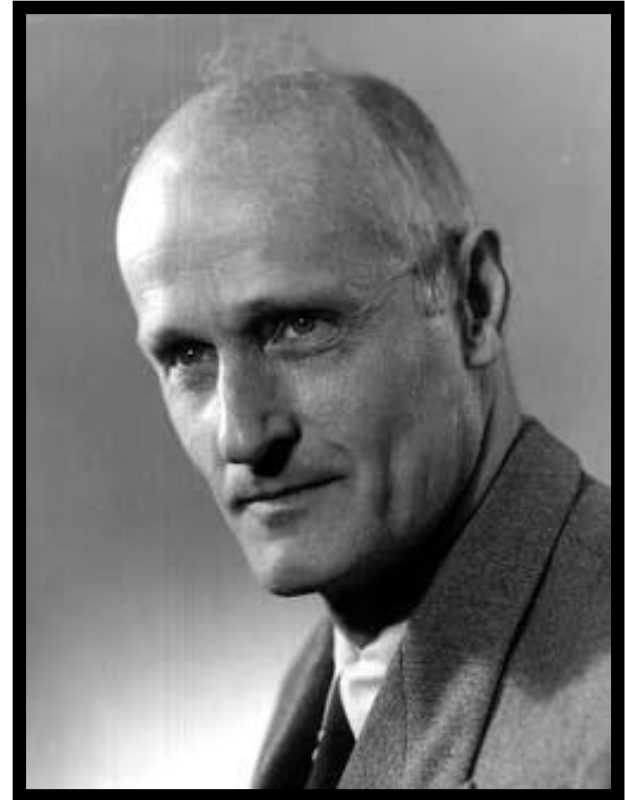
$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$$

- También se conoce como **cerradura estrella**
- A^* es el conjunto de posibles concatenaciones sobre A

Lenguajes regulares

Stephen Kleene

- Creador de las expresiones regulares
- Enunció la cerradura de Kleene, A^*



(1909 - 1994)

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- Calcule A^* para $A=\{a, ab\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A = \{a, ab\}$

$$A^0 = \{\varepsilon\}$$

$$A^1 = \{a, ab\}$$

$$A^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$$

...

$$A^* = \{\varepsilon, a, aa, ab, aab, aba, abab, \dots\}$$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A = \{a, ab\}$

$$A^0 = \{\varepsilon\}$$

$$A^1 = \{a, ab\}$$

$$A^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$$

...

$$A^* = \{\varepsilon, a, aa, ab, aab, aba, abab, \dots\}$$

$$\text{¿} ababab \in A^* \text{?}$$

$$\text{¿} abbbbbb \in A^* \text{?}$$

$$\text{¿} abaaaaaaaa \in A^* \text{?}$$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A = \{a, ab\}$

$$A^0 = \{\varepsilon\}$$

$$A^1 = \{a, ab\}$$

$$A^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$$

...

$$A^* = \{\varepsilon, a, aa, ab, aab, aba, abab, \dots\}$$

- ¿Qué relación tiene A^* con Σ^* ?
- Calcule Σ^* sobre $\Sigma = \{a, b\}$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene

- $A = \{a, ab\}$

$$A^0 = \{\varepsilon\}$$

$$A^1 = \{a, ab\}$$

$$A^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$$

...

$$A^* = \{\varepsilon, a, aa, ab, aab, aba, abab, \dots\}$$

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene A^* y Cerradura Σ^*

- Σ^* se define sobre el alfabeto y corresponde a todas las cadenas que se pueden crear sobre un alfabeto Σ
- A^* se define sobre un lenguaje A y consiste en todas las concatenaciones posibles

Lenguajes regulares

Cerradura de Kleene A^* y Cerradura Σ^*

- Σ^* se define sobre el alfabeto y corresponde a todas las cadenas que se pueden crear sobre un alfabeto Σ
- A^* se define sobre un lenguaje A y consiste en todas las concatenaciones posibles

$A=\{a, ab\}$ está definido sobre $\Sigma=\{a,b\}$

$$A^* = \{\varepsilon, a, ab, aa, aab, aba, abab, \dots\}$$

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, aab, aba, \dots\}$$

- En general se cumple que $A^* \subseteq \Sigma^*$

Lenguajes regulares

Cerradura positiva de Kleene A^+

- La cerradura positiva de Kleene de un lenguaje A es la unión de las potencias sin incluir $A^0 = \{\varepsilon\}$,

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$

Lenguajes regulares

Cerradura positiva Σ^+

- Es el conjunto de palabras que se pueden formar sobre Σ sin incluir la cadena vacía

Lenguajes regulares

- Sea $A=\{a,b,ab\}$, muestre A^* y A^+ . Indique si $abba \in A^*$, $bbaa \in A^*$
- Sea $A=\{a,aa,ac\}$ y $B=\{b,ba\}$, muestre $A \cdot B$, $B \cdot A$ y B^*

- Sea $A=\{a,b,ab\}$, muestre A^* y A^+

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$$

$$= \{\varepsilon\} \cup \{a,b,ab\} \cup \{aa,ab,aab,ba,bb,bab,aba,abb,abab\} \cup \dots$$

$$= \{\varepsilon, a, b, ab, aa, aab, ba, bb, bab, aba, abb, abab, \dots\}$$

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \dots$$

$$= \{a, b, ab, aa, aab, ba, bb, bab, aba, abb, abab, \dots\}$$

- Sea $A=\{a,aa,ac\}$ y $B=\{b,ba\}$, muestre $A \cdot B$, $B \cdot A$ y B^*

$$A \cdot B = \{ab, aba, aab, aaba, acb, acba\}$$

$$B \cdot A = \{ba, baa, bac, baa, baaa, baac\}$$

$$B^* = \{\varepsilon, b, ba, bba, bab, bbba, babb, \dots\}$$

Lenguajes regulares

- Muestre cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes. Indique si la cadena vacía ε pertenece a los lenguajes y exprese de forma general (en palabras) el tipo de cadenas que pertenecen a cada uno.
 - $L_1 = \{w_1cw_2 \mid |w_1| = |w_2| \text{ donde } w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ con } \Sigma = \{a, b\}\}$
 - $L_2 = \{a^n b^m \mid n \neq m, n, m \geq 0\}$
 - $L_3 = \{a^n b^{2^n} c^n \mid n \geq 1\}$

- $L_1 = \{w_1cw_2 \mid |w_1| = |w_2| \text{ donde } w_1, w_2 \in \Sigma^* \text{ con } \Sigma = \{a, b\}\}$

aca, acb, bca, abbbabcaaaaaa

En general, cadenas que tienen una c en el medio, tal que las subcadenas a sus lados tienen la misma longitud. $\varepsilon \notin L_1$

- $L_2 = \{a^n b^m \mid n \neq m, n, m \geq 0\}$

abb, aab, aabbb, aaabb

En general, cadenas que tienen distinta cantidad de a's que b's donde están a la izquierda las a's de las b's. $\varepsilon \notin L_2$

- $L_3 = \{a^n b^{2n} c^n \mid n \geq 0\}$

abbc, aabbbbcc, aaabbbbbbbccc

En general, cadenas que tienen el doble de b's que a's y que c's donde aparecen de izquierda a derecha las a's, b's y luego c's. $\varepsilon \in L_3$

Lenguajes regulares

- Exprese de manera formal los siguientes lenguajes:
 - L_1 es el conjunto de cadenas del lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b,c\}$ que empiezan por a y terminan en a
 - L_2 es el conjunto de cadenas que tienen longitud par definidas sobre el lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b\}$

- L_1 es el conjunto de cadenas del lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b,c\}$ que empiezan por a y terminan en a

$$L_1=\{aw_1a \mid w_1 \in \Sigma^* \text{ con } \Sigma=\{a,b,c\}\}$$

- L_2 es el conjunto de cadenas que tienen longitud par definidas sobre el lenguaje universal de $\Sigma=\{a,b\}$

$$L_2=\{w_i \mid |w_i|=2k, \text{ donde existe } k \geq 1, w_i \in \Sigma^* \text{ con } \Sigma=\{a,b\}\}$$

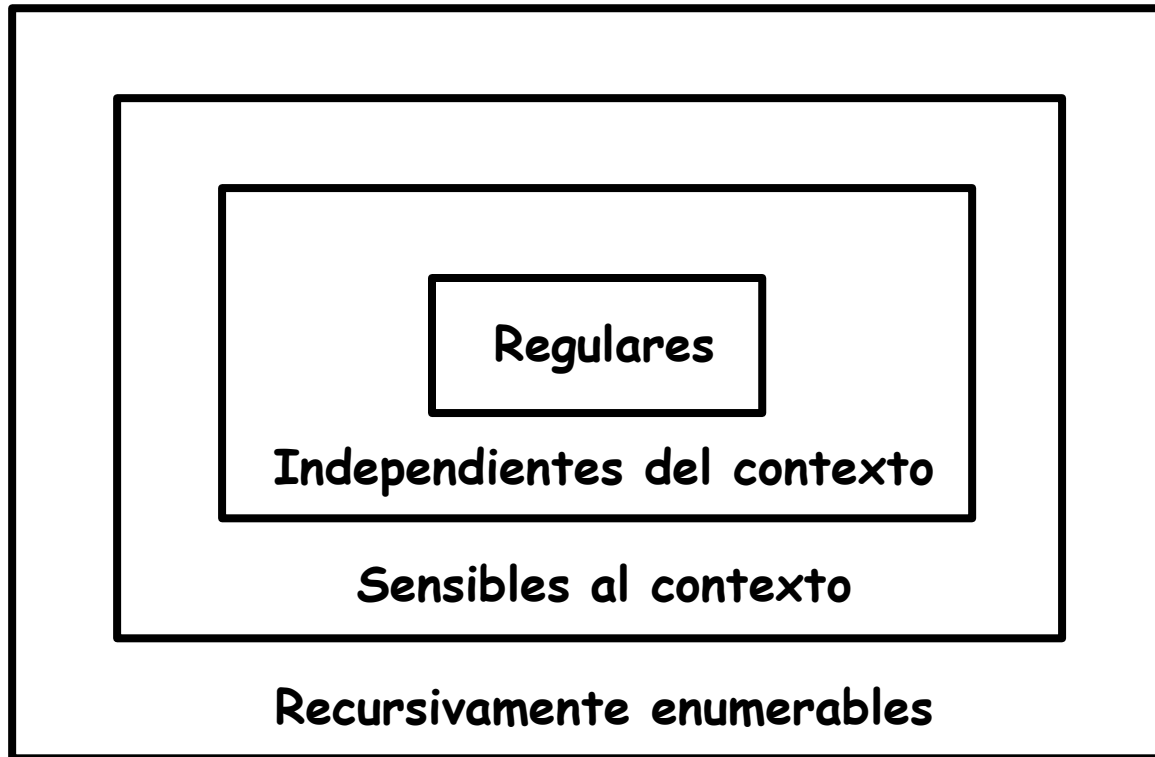
Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Tipo	Lenguajes	Tipo de máquina	Normas para la gramática
0	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing	No restringida
1	Sensibles al contexto	Autómata lineal acotado	$\alpha \rightarrow \beta, \alpha \leq \beta $
2	Independientes del contexto	Autómata de pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Lenguajes Regulares	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes regulares

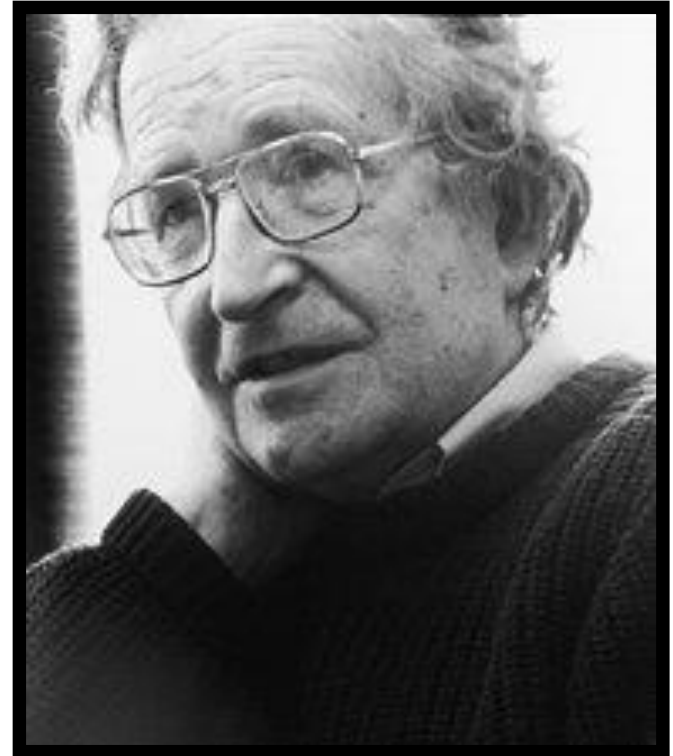
Jerarquía de Chomsky



Lenguajes regulares

Noam Chomsky

- Definió las gramáticas independientes del contexto
- Creador de la jerarquía de Chomsky. 1956
- Definió la forma normal de Chomsky. 1979



(1928 -)

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado un alfabeto Σ , los lenguajes regulares sobre tal alfabeto se definen recursivamente como:

- \emptyset es un lenguaje regular
- $\{\epsilon\}$ es un lenguaje regular
- Para todo símbolo $a \in \Sigma$, $\{a\}$ es un lenguaje regular
- Si A y B son lenguajes regulares, entonces
 - $A \cup B$, $A \cdot B$ y A^* son lenguajes regulares
- Ningún otro lenguaje es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, las siguientes afirmaciones son correctas:

- \emptyset y $\{\epsilon\}$ son lenguajes regulares
- $\{a\}$ y $\{b\}$ son lenguajes regulares
- • $\{a,b\}$ es regular porque es la unión de $\{a\}$ y $\{b\}$
- • $\{ab\}$ es regular porque es la concatenación de $\{a\}$ y $\{b\}$
- $\{a,ab,b\}$ es regular porque es la unión de dos lenguajes regulares
- $\{a^n | n \geq 0\}$ es regular $\{\epsilon, a, aa, \dots\}$
- $\{a^m b^n | m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$ es regular $\{\epsilon, a, b, ab, ba, \dots\}$
- $\{(ab)^n | n \geq 0\}$ es regular $\{\epsilon, ab, abab, \dots\}$

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma = \{a, b, c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

SI • $\{a\}^*$ $a^0 \cup a^1 \cup a^2 \cup \dots = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$

SI • $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ $a^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\}$ $b^* = \{\epsilon, b, bb, bbb, \dots\}$

SI • $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$ $= \{\epsilon, b, bb, \dots, a, ab, abb, \dots, aaa, aaab, \dots\}$

SI • $\{a, bc\}^*$ $= \{\epsilon, \underbrace{a}_{a^1}, \underbrace{bc}_{a^2}, \underbrace{aabc}_{a^3}, \underbrace{bcbcb}_{a^4}, \dots\}$

SI • $\{a\} \cdot \{b, c, ab\}$ $= \{ab, ac, aab\}$

NO • $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ $a^n = \{\epsilon, a, aa, \dots\}$ $b^n = \{\epsilon, b, bb, bbb, \dots\}$ $a^n b^n = \{\epsilon, b, bb, \dots, aab, aabbb, \dots\}$

No puedo definir $a^n b^n$ como la concatenación de ambas

SI • $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$ $a^l = \{\epsilon, a, aa, \dots\}$ $b^m = \{\epsilon, b, bb, \dots\}$ $c^n = \{\epsilon, c, cc, \dots\}$

$a^l b^m c^n = \{\epsilon, a, b, c, aabbcc, \dots\}$

NO • $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$

$a^n = \{\epsilon, a, aa, \dots\}$ $b^{2n} = \{\epsilon, bb, bbbb, \dots\}$

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a, bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\}$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, no es regular
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2^n} \mid n \geq 0\}$, no es regular

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b,c\}$, indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a, bc\}^*$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\}$
- $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, no es regular
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$
- $\{a^n b^{2^n} \mid n \geq 0\}$, no es regular

• $\{a^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\}$
• $\{b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, b, bb, bbb, \dots\}$
 $aab \in \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\} \cdot \{\varepsilon, b, bb, bb, \dots\}$
pero no cumple $a^n b^n$



Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L = \{abc, ab, a\}^+$

$L = \{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L = \{abc, ab, a\}^+$

$L = \{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$

- Compárelo con $\{abc, ab, a\}^*$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L = \{abc, ab, a\}^+$

$L = \{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$

- Compárelo con $\{abc, ab, a\}^*$

$\{abc, ab, a\}^* = \{\epsilon, abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$

$\{abc, ab, a\}^+ = \{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$

Lenguajes regulares

- Desarrolle el lenguaje $L=\{abc,ab,a\}^+$

$L=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,...\}$

- Compárelo con $\{abc,ab,a\}^*$

$\{abc,ab,a\}^*=\{\varepsilon,abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,...\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a,abcabc,abcab,abca,...\}$

$\{abc,ab,a\}^+=\{abc,ab,a\}^*\cdot\{abc,ab,a\}$

- En general se cumple que $A^+=A^*\cdot A$

Lenguajes regulares

Indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{ab^na \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$
- $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, \text{ para } k \geq 0\}$

Lenguajes regulares

Indique si los siguientes lenguajes son regulares:

- $\{ab^na \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$
- $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, \text{ para } k \geq 0\}$
 $\{aa, ab, ba, bb\}^*$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a, bc\}^*$
- $\{abc, ab, a\}^+$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^*$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^*$ ¿ $ab \in \{a\}^* \cup \{b\}^*$?
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$ ¿ $bbbb \in \{a\}^* \cdot \{b\}^*$?, ¿ $baaa \in \{a\}^* \cdot \{b\}^*$?
- $\{a, bc\}^*$ ¿ $bcbca \in \{a, bc\}^*$?, ¿ $baaaa \in \{a, bc\}^*$?
- $\{abc, ab, a\}^+$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots\} \cup \{\varepsilon, b, bb, bbb, \dots\} = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, bbb, \dots\}$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, \dots, ab, aab, aaab, \dots, b, b, bbb, \dots\}$
- $\{a, bc\}^* = \{\varepsilon, a, bc, aa, abc, bca, bcba, aaa, \dots\}$
- $\{abc, ab, a\}^+ = \{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\} = \{ab, ac, aab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\} = \{\varepsilon, a, b, ab, aab, abb, aaab, \dots\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\} = \{\varepsilon, a, b, c, ab, bc, abc, aa, aab, aac, \dots\}$

Lenguajes regulares

Desarrolle cada uno de estos lenguajes regulares:

- $\{a\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa, \dots\}$
- $\{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\} \cup \{\epsilon, b, bb, bbb, \dots\} = \{\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, bbb, \dots\}$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots, ab, aab, aaab, \dots, b, b, bbb, \dots\}$ ←
- $\{a, bc\}^* = \{\epsilon, a, bc, aa, abc, bca, bcba, aaa, \dots\}$
- $\{abc, ab, a\}^+ = \{abc, ab, a, abcabc, abcab, abca, \dots\}$
- $\{a\} \cdot \{b, c, ab\} = \{ab, ac, aab\}$
- $\{(ab)^i \mid i \geq 0\} = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \dots\}$
- $\{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\} = \{\epsilon, a, b, ab, aab, abb, aaab, \dots\}$
- $\{a^l b^m c^n \mid l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0\} = \{\epsilon, a, b, c, ab, bc, abc, aa, aab, aac, \dots\}$

Note que el orden importa y que pueden haber cualquier cantidad de a's o de b's

Lenguajes regulares

Discuta la pertenencia de las siguientes cadenas dado $L = \{a, bc\}^* \cup \{ad, d\}^*$

- ¿ $bcabc \in L$?
- ¿ $aabcad \in L$?
- ¿ $adbc \in L$?
- ¿ $adad \in L$?
- ¿ $adddd \in L$?

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* \cup \{b\}^*$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* \cup \{b\}^*$$

Cadenas que tienen a's o b's. Estos símbolos no aparecen mezclados

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Interprete el tipo de palabras que pertenecen al siguiente lenguaje

$$L = \{a\}^* \cdot \{b\}^*$$

Cadenas que tienen cero o más a's seguidas de cero o más b's

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

$$A = \{\underline{b}\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje A de todas las palabras que tienen exactamente una a

$$A = \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^*$$

- Desarrolle el lenguaje

$$\begin{aligned} & \{ \epsilon, b, bb, \dots \} \{ a \} \{ \epsilon, b, bb, \dots \} \\ & \{ a, ba, bab, \dots \} \end{aligned}$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje B de todas las palabras que comienzan con b

$$B = \{b\} \cdot \{\{a\} \cup \{b\}\}^*$$

$$\{b\} \cdot \{a, b\}^*$$

$\{b, ab, a, \epsilon\}$

$$\{a, b\}^* = \{a, b\}^0 \cup \{a, b\}^1 \cup \{a, b\}^2 \cup \dots$$
$$\{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \dots\}$$

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba

Lenguajes regulares

Lenguajes regulares

Dado $\Sigma=\{a,b\}$, defina el lenguaje C de todas las palabras que contienen la cadena ba

$$C = \underbrace{\{a\} \cup \{b\}}^* \cdot \underbrace{ba} \cdot \underbrace{\{a\} \cup \{b\}}^*$$

Lenguajes regulares

Expresión regular

Una expresión regular es una forma simplificada de representar un lenguaje regular

Lenguaje regular	Expresión regular
$\{ab\}$	ab
$\{a\}^*$	a^*
$\{a\}^+$	a^+
$\{a\} \cup \{b\}$	$a \cup b$

Lenguajes regulares

Expresión regular

Algunas expresiones regulares:

- b^*
- $b(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^*ba(a \cup b)^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que comienzan con b y terminan con a.

$b(a \vee b)^*a$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que comienzan con b y terminan con a

$$b(a \cup b)^*a$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen exactamente dos a's

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen exactamente dos a's

$b^*ab^*ab^*$

aa
aba
abba

baa
bbaa
bbbaa

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen un número par de a's

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen un número par de a's

$b^*(\underline{ab^*ab^*})^+$ $\leftarrow 0$ a's es par

$b(aa)^*$

$b(\underline{a}b\underline{a})^*$

$b(\underline{a}b\underline{b}a\underline{b})^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud par

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud par

$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud impar

Lenguajes regulares

+

*

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las palabras sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen longitud impar

$$a(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* \cup b(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* a \cup (aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* b$$

$$(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^* (a \cup b)$$

$$(a \cup b)(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen al menos una b

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ que tienen al menos una b

$a^*b(a \cup b)^*$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b,c\}$ que no contienen la subcadena ac

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b,c\}$ que no contienen la subcadena ac

$$(b \cup c)^*(a \cup bc^*)^*$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el penúltimo símbolo es una a

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el penúltimo símbolo es una a

$$(a \cup b)^* a (a \cup b)$$

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el antepenúltimo símbolo es una a

Lenguajes regulares

- Indique la **expresión regular** que denota el lenguaje de todas las cadenas sobre $\Sigma=\{a,b\}$ donde el antepenúltimo símbolo es una a

$$(a \cup b)^* a (a \cup b) (a \cup b)$$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$

2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$

3. $r \cup r = r$

4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$

5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$

6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$

7. $(rs)t = r(st)$

8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$

9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$

10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$

11. $r(sr)^* = (rs)^* r$

12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$

13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$

14. $s(r \cup \varepsilon)^* (r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$

15. $rr^* = r^* r$

16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$

2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$

3. $r \cup r = r$

4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$

5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$

6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$

7. $(rs)t = r(st)$

8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$

9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$

10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$

11. $r(sr)^* = (rs)^* r$

12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$

13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$

14. $s(r \cup \varepsilon)^* (r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$

15. $rr^* = r^* r$

16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$

$\{a\} \cup \{bc\} = \{bc\} \cup \{a\} = \{a, bc\}$

Lenguajes regulares

Expresiones regulares equivalentes

1. $r \cup s = s \cup r$

2. $r \cup \emptyset = r = \emptyset \cup r$

3. $r \cup r = r$

4. $(r \cup s) \cup t = r \cup (s \cup t)$

5. $r \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot r = r$

6. $r \cdot \emptyset = \emptyset \cdot r = \emptyset$

7. $(rs)^t = r(st)$

8. $r(s \cup t) = rs \cup rt$

9. $r^* = (r^*)^* = r^* r^* = (\varepsilon \cup r)^*$

10. $(r \cup s)^* = (r^* \cup s^*)^* = (r^* s^*)^*$

11. $r(sr)^* = (rs)^* r$

12. $(r^* s)^* = \varepsilon \cup (r \cup s)^* s$

13. $(rs^*)^* = \varepsilon \cup r(r \cup s)^*$

14. $s(r \cup \varepsilon)^* (r \cup \varepsilon) \cup s = sr^*$

15. $rr^* = r^* r$

16. $(r \cup \varepsilon)^* = r^*$