Examenes opcionales - Matemáticas discretas II

Carlos Andres Delgado S, Msc
carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

18 de junio de 2022

Tener en cuenta

1. Este examen debe ser entregado en el campus virtual antes del Sábado 18 de Junio a las 11:59:59am, se permiten entregas tardías pero se aplicará penalización acumulada de 0.3 en la nota cada 5 minutos o fracción.
2. La solución debe entregarse en formato PDF, el enlace del campus sólo aceptará archivos en este formato, asegúrese que las fotos que tome de sus solucione sean claras y se eviten confusiones en la calificación.
3. Este examen puede ser realizado en parejas, sólo uno de los integrantes debe entregar la solución por el campus virtual, en caso de presentarse dos entregas sólo se revisará una de ellas. Si realiza ambos opcionales la pareja debe ser la misma para evitar confusiones en la calificación.
4. Sólo puede realizar 2 de los 3 opcionales, en caso de presentar los 3 debe seleccionar cuales 2 se le va a calificar.
5. En caso de realizar dos opcionales entregar un sólo archivo en formato PDF, indicando donde inicia y termina cada opcional.

1. Opcional primer examen

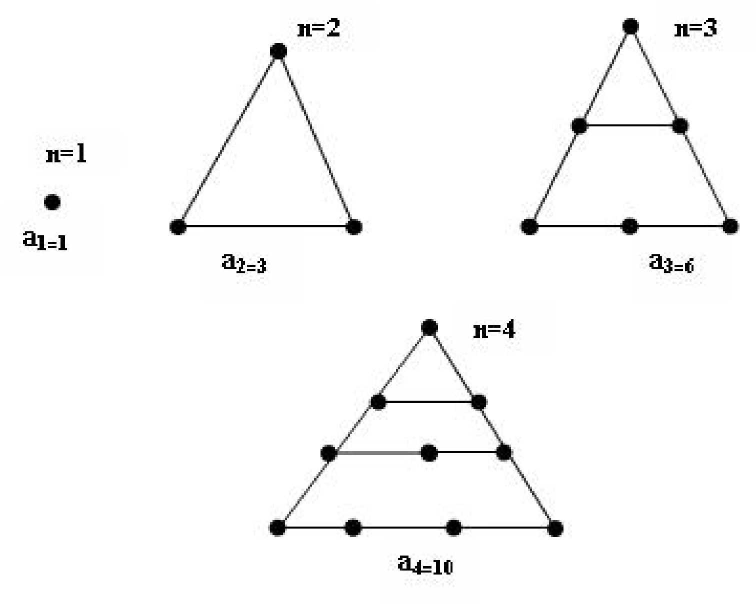
1. [**34 puntos**] Sea a_n la suma de los n primeros números triangulares (números que se pueden disponer formando un triangulo), es decir,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

donde $t_k = k(k+1)/2$. Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ satisface la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + n(n+1)/2$ y la condición inicial $a_1 = 1$ (sugerencia: demuestre que la solución de la sumatoria es igual a la de la recurrencia).

Ayudas:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$



Muestre el procedimiento realizado, no es válido únicamente colocar las soluciones.

2. **[33 puntos]** Resolver la relación de recurrencia: $T(n) = 6T(\frac{n}{3}) - 9T(\frac{n}{9}) + n - 12$ con la condición inicial $T(1) = 8, T(3) = 16$ Debe indicar:

    a) (10 puntos) Solución general en términos de k

    b) (10 puntos) Solución particular en términos de k con sus constantes calculadas

    c) (13 puntos) Solución total en términos de n

    Muestre el procedimiento realizado en cada uno de los puntos, no es válido únicamente colocar las soluciones.

3. **[33 puntos]** Muestre y resuelva la relación de recurrencia producto de la siguiente sucesión:

n	**T(n)**
0	2
1	6
2	14
3	28

    a) (10 puntos) Ecuación de recurrencia asociada con sus condiciones iniciales

    b) (10 puntos) Solución general de la ecuación, homogénea + particular con sus constantes calculadas.

    c) (13 puntos) Solución total de la ecuación con sus constantes calculadas

    Muestre el procedimiento realizado, no es válido únicamente colocar las soluciones.

2. Opcional segundo examen

1. [**33 puntos**] En un árbol binario se encuentra que hay 4087 hojas. ¿Cual es la altura de este árbol? Argumente su respuesta indicando el rango de hojas que se cumple para esa altura de árbol, indicando claramente cual es el rango de hojas para esa altura.

2. [**33 puntos**] ¿Cual es el número cromático en términos de n de los siguientes grafos?

   a) (16.5 puntos) $\overline{C_n}$

   b) (16.5 puntos) $K_{n,m}$

3. [**34 puntos**] Indique las condiciones que debe cumplir n para que exista un circuito euleriano, camino euleriano, circuito hamiltoniano y camino hamiltoniano. Si no se cumple bajo ninguna circunstancia, explique porque.

   a) $K_{n,m}$

   b) W_n

   Sustente su respuesta

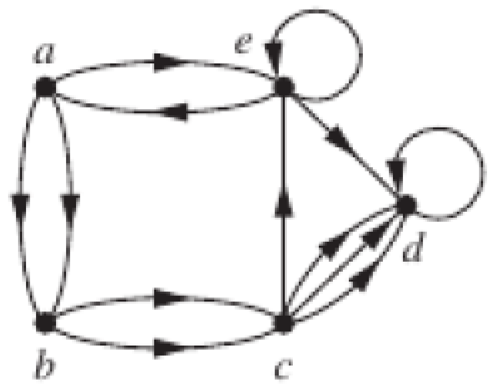
   a) (9 puntos) Circuito euleriano

   b) (8 puntos) Camino euleriano

   c) (9 puntos) Circuito hamiltoniano

   d) (8 puntos) Camino hamiltoniano

4. [**25 puntos**] Realizando operaciones con la matriz de adyacencia indique cuantos caminos de longitud 3 hay entre cada cada de vértices del siguiente grafo dirigido:



   Justifique claramente su respuesta

3. Opcional tercer examen

1. (33 puntos) Diseñe un AFD con $\Sigma = \{a, b, c\}$ para reconocer la expresión $((a \cup b)a^*b^+cb^*a^+)^*$. Muestre el diagrama y la tabla de transiciones.

2. (33 puntos) Diseñe un AFN con $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ para reconocer la expresión $(a^*(b \cup c)^+(c \cup (a \cup d))b^*a^+)^*$. Muestre el diagrama y la tabla de transiciones.

3. (34 puntos) Diseñe un AFN que permita construir cadenas con $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, que cumplan estos requisitos:

   - Deben iniciar en **a** o en **bb**.
   - Deben contener **cc**, **ad** y **dd**.
   - Deben terminar en **abc**.

   Indique la expresión regular asociada, muestre el diagrama y la tabla de transiciones.