

Técnicas de conteo

Matemáticas Discretas II

Raúl E Gutiérrez de Piñerez R, Ph.D
Carlos Andres Delgado Saavedra, Msc.

Universidad del Valle
EISC

Enero 2020



Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Contenido

- 1 Principio de palomar**
- 2 Permutaciones y combinaciones**
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas**
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial**

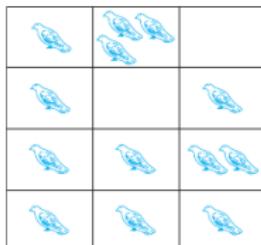
Principio del Palomar (P.P) (Principio de Dirichlet)

El principio del palomar asegura que **si hay más palomas que nidos**, debe haber algún nido con al menos dos palomas.

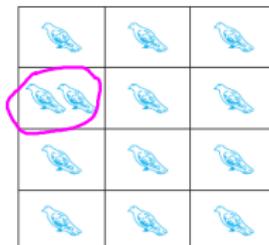
Teorema

Si $k + 1$ o más objetos se colocan en k cajas, existe al menos una caja que contiene dos o más objetos.

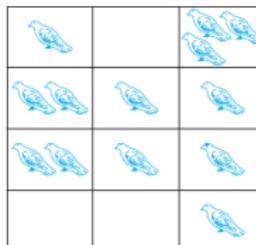
Demostración Suponemos que ninguna de las cajas contiene más de un objeto. En tal caso, el número total de objetos es como máximo k , lo que contradice el hecho de que hay al menos $k + 1$ objetos.



(a)



(b)



(c)

Una segunda forma del P.P

P.P

Si f es una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y y $|X| > |Y|$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$.

X es el conjunto de palomas.

Y es el conjunto de nidos.

Entonces asignamos la paloma x_i al nido $f(x_i)$.

Formalización de la segunda forma usando la primera definición

Por el P.P al menos dos palomas $x_1, x_2 \in X$, se asignan al mismo nido, es decir, $f(x_1) = f(x_2)$ $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$.

Principio del Palomar

Ejemplo

En un grupo de 367 personas debe haber al menos dos que cumplen años el mismo día, ya que hay sólo 366 posibles fechas de cumpleaños.

Ejemplo

En cualquier grupo de 27 palabras del inglés debe haber al menos dos que comiencen por la misma letra, ya que hay 26 letras del alfabeto.

inglés

Principio del Palomar

$$0.0 \quad 1.0 - 5.0 \quad \} \quad 42 \text{ rotas}$$

Ejemplo

¿Cuantos estudiantes debe haber en la clase de matemáticas discretas para garantizar que al menos dos estudiantes reciben la misma nota?. Las notas son 0.0 y entre 1.0 y 5.0 incluidos.

Principio del Palomar

Ejemplo

¿Cuantos estudiantes debe haber en la clase de matemáticas discretas para garantizar que al menos dos estudiantes reciben la misma nota?. Las notas son 0.0 y entre 1.0 y 5.0 incluidos.

Solución

Existen en total 42 notas, por lo tanto deben existir al menos 43 estudiantes para garantizar al menos dos estudiantes reciban la misma nota.

Ejemplo

Demuestre que si se escoge cinco números cualesquiera del 1 al 8, entonces dos de éstos sumarán 9.

$$\begin{array}{c} (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (1, 8) (2, 7) (3, 6) (5, 4) \end{array}$$



¿Qué se puede demostrar usando el P.P. ?

Ejemplo

Demuestre que si se escoge cinco números cualesquiera del 1 al 8, entonces dos de éstos sumarán 9.

Solución.

- 1 Construimos cuatro conjuntos de la siguiente manera:

$$A_1=\{1,8\}, A_2=\{2,7\}, A_3=\{3,6\}, A_4=\{4,5\}$$

- 2 Cada uno de los cinco números debe pertenecer a uno de estos conjuntos.
- 3 Como sólo hay cuatro conjuntos por P.P se dice que **dos de los números escogidos pertenecen al mismo conjunto.**
- 4 Es decir, a uno de estos cuatro conjuntos.

Generalización del Principio del Palomar

Definición

Si se colocan N objetos en k cajas, existe al menos una caja que contiene al menos $\lceil N/k \rceil$

Ejemplo

En un grupo de 100 personas siempre hay al menos $\lceil 100/12 \rceil = 9$ que nacieron en el mismo mes.

$$\left\lceil \frac{32}{12} \right\rceil = 3$$

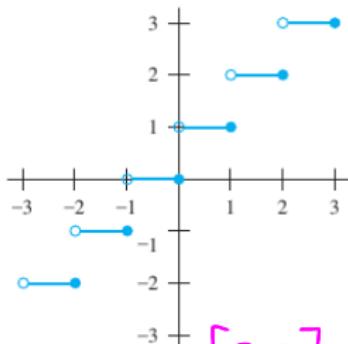
Enero: 3
Septiembre:

P.P Generalizado

¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que debe haber en una clase para estar seguro de que al menos seis reciben la misma calificación, si las calificaciones posibles son Suspenso, Aprobado, Notable, Sobresaliente, y Matrícula de Honor?

$$\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil = n_{\text{min}}$$

→ número primo
→ número primo



$$\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil = n_{\text{min}}$$

$$N = (n_{\text{min}} - 1) K + 1$$

$$\left\lceil \frac{5}{4} \right\rceil = 2 \rightarrow 5 = (2-1) \times 4 + 1$$

(b) $y = [x]$

$$\begin{aligned}\left\lceil \frac{25}{5} \right\rceil &= 5 & \left\lceil \frac{26}{5} \right\rceil &= 6 & \left\lceil \frac{30}{5} \right\rceil &= 6 \\ \left\lceil \frac{27}{5} \right\rceil &= 6 & \left\lceil \frac{28}{5} \right\rceil &= 6 & \left\lceil \frac{31}{5} \right\rceil &= 7 \\ \left\lceil \frac{29}{5} \right\rceil &= 6 & \left\lceil \frac{30}{5} \right\rceil &= 6 & \left\lceil \frac{31}{5} \right\rceil &= 7\end{aligned}$$

$$N = (6-1)S + 1$$

$$N = S \times S + 1 = 25$$

Solución.

- 1 Para asegurar que al menos **seis** estudiantes reciben la misma calificación es el menor entero N tal que $\lceil N/5 \rceil = 6$
- 2 Si $N = 25$, es posible que cada una de las cinco calificaciones sea asignada a cinco estudiantes, de forma que **NO** haya **seis** que reciban la misma.
- 3 Por tanto, $N = 26$ es el número mínimo de estudiantes para garantizar que al menos **seis** reciben la misma calificación.

Principio de palomar

$$\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil = n_{m,n} \quad N = \dots \quad K = \dots \quad n_{m,n} = \dots$$

Ejercicio 1

Demuestra que en un conjunto de seis clases debe haber dos que tienen lugar el mismo día, suponiendo que las clases solo se ven de lunes a viernes.

$$N=6 \quad k=5 \quad n_{m,n}=2$$

Solución

Como hay seis clases, pero solo cinco días laborales, el principio de palomar demuestra que hay que repetir al menos dos clases el mismo día.

$$\left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil = 2$$

Principio de palomar

Pista: módulo

Posibles resto dividir entre 4, son 0 (exacta),
1, 2 o 3

$$\left[\frac{5}{4} \right] = 2 \checkmark$$



Ejercicio 2

Demuestra que en cualquier grupo de cinco enteros cualesquiera hay dos que dan el mismo resto cuando se dividen entre cuatro

Solución

Como hay cuatro posibles restos al dividir un número por cuatro, el principio de palomar asegura que para cinco números enteros cualesquiera, al menos dos dan el mismo resto cuando se dividen por cuatro.

Principio de palomar

Ejercicio 3

Cuantos enteros se deben escoger en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para asegurar que al menos una pareja de ellos sume 7.

Solución

Las parejas que suman 7 son: $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, escogiendo 4 enteros se asegura al menos tener 2 dentro de un conjunto que suma 7.

Principio de palomar

$$\Rightarrow N = 34 \text{ millones}, \quad k = 26^3 \times \underline{366} \quad 366 \text{ cumpleaños}$$

Ejercicio 4

Demuestra que hay al menos seis personas en California (Cuya población es 34 millones) que tienen la mismas tres letras iniciales en su nombre y cumplen años el mismo día.

Solución

Hay 6432816 posibilidades para los nombres y el cumpleaños. Las posibilidades se calculan así: $26 * 26 * 26 * 366$. ¡Recuerde los años bisiestos!.

Por lo tanto, según el principio de palomar generalizado
 $\lceil \frac{34000000}{6432816} \rceil = 6$ personas que tienen las mismas iniciales de nombre y fecha de cumpleaños.

Contenido

1 Principio de palomar

2 Permutaciones y combinaciones

- Permutaciones
- Permutaciones con repetición
- Permutaciones con objetos indistinguibles
- Combinaciones
- Combinaciones con repetición

3 Distinción de objetos y cajas

- Objetos y cajas distinguibles
- Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
- Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
- Objetos y cajas indistinguibles

4 Coeficiente binomial

Permutaciones y Combinaciones

Pensamos en una combinación descuidadamente, sin pensar en el orden de las cosas:

Observación

Mi ensalada de frutas es una combinación de manzanas, uvas y bananas: No importa el orden en qué pusimos las frutas:

- bananas, uvas y manzanas
uvas, bananas y manzanas

De todas formas es la misma ensalada.

- La combinación de una clave; por ejemplo, 472
Si importa el orden porque 724 no serviría, ni 247 tendría que ser 4-7-2

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Permutaciones

Definición

Una permutación de un conjunto de objetos distintos, es una ORDENACION de esos objetos. Una lista ordenada de r elementos de un conjunto se llama r -permutación o variación de r elementos.

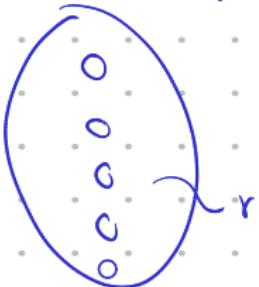
Permutaciones

Cuántas secuencias diferentes, cada una de longitud r , puede formarse utilizando los n elementos del conjunto A

Si T_1 puede efectuarse de n maneras, en vista que se puede escoger cualquier elemento de A para la primera posición, sólo quedan $(n - 1)$ elementos, de manera que T_2 puede realizarse de $(n - 1)$ maneras, y así sucesivamente, hasta que finalmente T_r puede efectuarse de $(n - (r - 1))$, o $(n - r + 1)$ maneras. En consecuencia, por el principio extendido de la multiplicación, una secuencia de r **elementos distintos** tomados de A puede formarse de

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)$$

n elementos



$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & r \\ \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & \textcircled{0} & \dots & \textcircled{0} \\ n \times n-1 & n-2 \times n-3 & & & & & 1 \leq r \\ & & & & & & n-(r-1) \\ & & & & & & n-r+1 \end{array}$$

Permutación de r elemento en N

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times (n-(r-2))$$

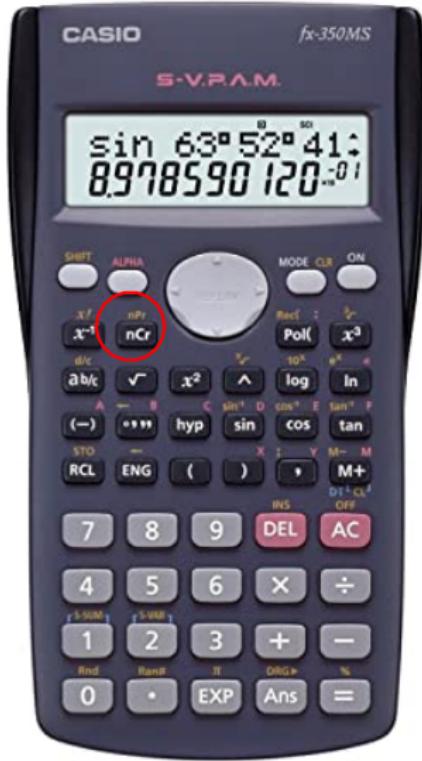
$$(n-r)(n-r-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

$$(n-r)!$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_{n,r}$$

$$\underline{nPR}$$



$$n = 8$$
$$r = 3$$

8 shift nCr 3

8P3

Permutaciones

A una secuencia de r elementos distintos de A suele llamarla permutación de A tomados r a la vez.

Teorema

El número de r -permutaciones de un conjunto de n elementos distintos es:

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ejemplo

Escriba todas las permutaciones de $\{a, b, c\}$

$$P(3, 3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3!$$

Solución. abc,acb,bac,bca,cab,cba, en este caso $P(n, n) = n!$, es decir, $3! = 6$.

Permutaciones de n elementos y la regla del producto

Teorema

Existen $n!$ permutaciones de n elementos.

Demostración.

- 1 Una permutación de n elementos se puede construir en n pasos.
- 2 El primer elemento puede elegirse de n formas.
- 3 Una vez elegido el 1er elemento, el segundo puede elegirse de $n - 1$ formas.
- 4 Una vez elegido el 2do elemento, el tercero puede elegirse de $n - 2$ formas.
- 5 Por la **regla del producto**, existen:

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Permutaciones

$$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

Ejemplo

Escriba todas las 2-permutaciones de $\{a, b, c\}$

Solución. ab,ac,ba,bc,ca,cb en este caso $P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$, es decir, $3!/1!=6$.

Ejemplo

¿Cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer clasificado de un concurso si hay un total de 100 concursantes?

Solución. Es el número de listas ordenadas de tres elementos:

$$P(100, 3) = \frac{100!}{(100 - 3)!} = \underline{\underline{970,200}}$$

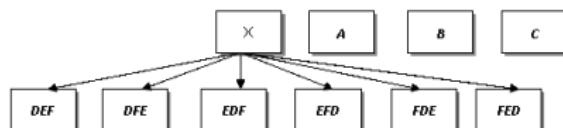
Más permutaciones

¿Cuántas permutaciones de las letras ABC~~DEF~~ contienen la subcadena DEF? Solución. Para garantizar la presencia del patrón DEF en la subcadena, estas tres letras deben estar juntas. Por teorema $4!=24$



Más permutaciones

¿Cuántas permutaciones de las letras ABC**DEF** contienen las letras DEF juntas en cualquier orden?



La primera tarea se puede hacer en $3!=6$ y el segundo tarea puede realizarse de 24 formas. Por lo tanto, por la regla del producto tenemos $6 \cdot 24 = 144$ permutaciones.

$$3! = 6$$



7.



T₁: Ubicar a los marcianos: 7!
T₂ Ubicar Jupiternos P(8, 5)

Más permutaciones

¿De cuántas formas pueden formarse en una fila siete marcianos distintos y cinco jupiterianos distintos sin ninguna pareja de jupiterianos puede estar junta?

$$-M_1-M_2-M_3-M_4-M_5-M_6-M_7-$$

- 1 La primera tarea: Los Marcianos pueden formarse de $7! = 5040$ maneras.
- 2 Segunda tarea: Como ninguna pareja de jupiterianos puede estar junta vamos a tener 8 posiciones posibles. Entonces, tenemos $P(8, 5) = \frac{8!}{(8 - 5)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ maneras
- 3 Por la regla del producto tenemos:

$$5040 \cdot 6720 = \underline{\underline{33,868,800}}$$

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Permutaciones con repetición

Definición

El número de r -permutaciones con repetición, o variaciones con repetición, de un conjunto de n elementos es n^r talque $r \leq n$.

Ejemplo. El número de 2-permutaciones con repetición de $\{a, b, c\}$ sería $3^2 = 9$

$$\underline{3} \quad \underline{3} = 3^2$$

$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

Ejemplo. ¿Cuántas cadenas de longitud n se pueden formar con las 26 letras del alfabeto inglés? Rta: 26^n

Permutaciones con repetición

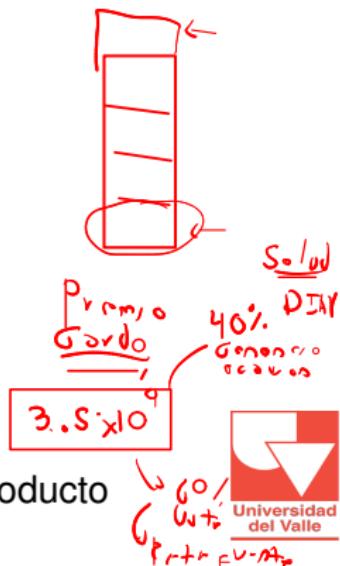
¿Cuántos billetes de la lotería del Valle se ponen en juego cada miércoles en el sorteo, si juega con cuatro cifras y dos números para la serie?

Aquí **si importa el orden** de colocación de las cifras y existen repeticiones, es decir, El número de r -permutaciones es n^r , donde $n = 10$, y $r = 4$

$$\boxed{10} \quad \boxed{10} \quad \boxed{10} \quad \boxed{10} = 10.000$$

$$\boxed{10} \quad \boxed{10} = 100$$

$$10000 \times 10000 = 6 \times 10^{10}$$



El total de billetes se puede calcular con la regla del producto $(10^4)(10^2) = 1.000.000$

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles**
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Permutaciones con objetos INDISTINGUIIBLES

Definición

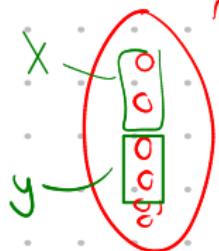
*Llamamos a las permutaciones con repetición de n elementos tomados de a en a , b en b , de c en c , etc, en los n elementos repetidos (un elemento aparece a veces, otro b veces, otro c veces, etc) verificándose que $a + b + c + \dots = n$ donde los objetos del mismo tipo son **INDISTINGUIIBLES** entonces el número de permutaciones con repetición es:*

$$P_n^{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

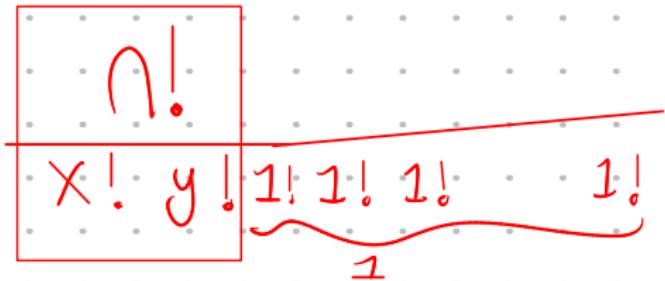
Ejemplo. ¿Cuántas permutaciones se pueden obtener con a,b de forma que la a y la b se repitan dos veces?

$$P_4^{a,b} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$a+b$ veces=4, **aabb,abab,abba,baab,baba,bbaa**



n elementos



Permutaciones con objetos INDISTINGUIIBLES

¿Cuánto es el número de disposiciones de cuatro letras de la palabra **BALL?**

- A B L L
- A L B L
- A L L B
- B A L L
- B L A L
- B L L A
- L A B L
- L A L B
- L B A L
- L B L A
- L L A B
- L L B A

B, A L = 2

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

L es **INDISTINGUIBLE**

¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar reordenando las letras de la palabra **PAPAYA**?

PAPAYA

$$P=2 \quad H=3 \quad Y=1$$

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 \times 2$$

60 Formas

matriculacero

$$\begin{array}{l} M = 4 \\ \rightarrow q = 2 \\ t = 1 \end{array}$$

$$\rightarrow r = \frac{2}{6}$$

$$\begin{array}{l} i = 1 \\ \rightarrow c = 2 \\ v = 1 \end{array}$$

$$l = \frac{1}{5}$$

$$\begin{array}{l} e = 1 \\ o = 1 \\ \hline z \end{array}$$

13

$$\begin{array}{r} 13! \\ - 2! 2! 2! \\ \hline \end{array}$$

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones**
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Combinaciones

Combinaciones mediante el uso de permutaciones

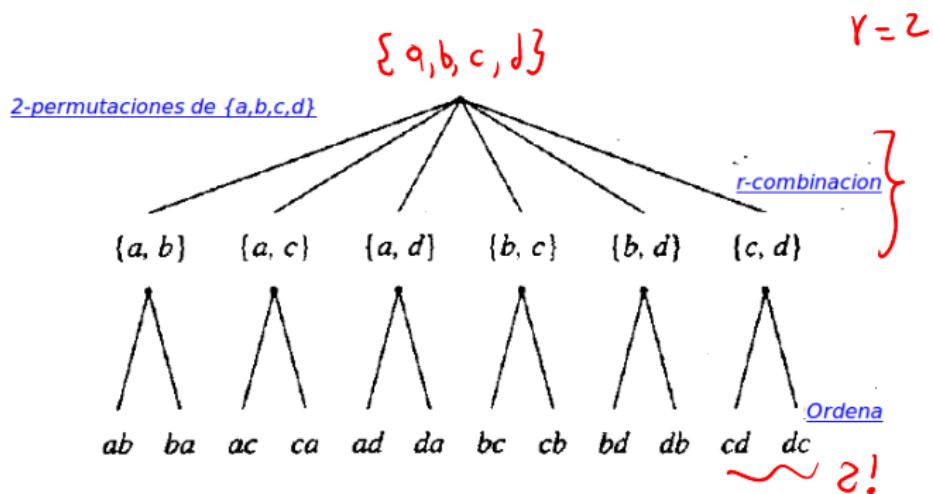
Podemos construir las r -permutaciones de un conjunto X con n elementos en dos pasos:

- 1 Primero se elige una r -combinación de X (un subconjunto no ordenado de r elementos)
- 2 Luego se ordena

$$P(n, r) = C(n, r)r!, \text{ Entonces,}$$
$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}, \therefore C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

ordenamiento

Combinaciones



Combinaciones por regla del producto

Combinatorio desde una permutación

Las permutaciones r del conjunto se obtienen formando primero las $C(n, r)$ combinaciones r del conjunto y arreglando (**ordenando**) después los elementos en cada combinación r , lo cual puede efectuarse en $P(r, r)$ maneras. De tal modo que

$$\begin{aligned} P(n, r) &= C(n, r) \dots P(r, r) \\ C(n, r) &= \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

Caso particular: $C(n, n) = 1$

Combinaciones

Definición

El número de r -combinaciones de un conjunto de n elementos, donde n es un entero no negativo y r un entero talque $0 \leq r \leq n$, es:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$

Ejemplo

¿Cuánto es el número de 2-combinaciones sin repetición de a, b, c ?

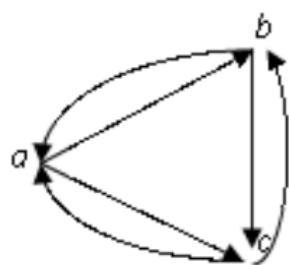
$$C(3, 2) = \frac{3!}{2!(3 - 2)!} = 3$$

a, b a, c b, c

$b, c = c, b$

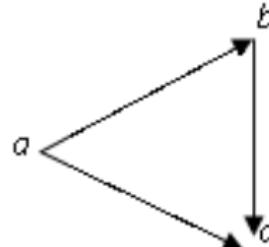
Combinaciones

Si importa el orden



ab, ac, ba, bc, ca, cb

No importa el orden



ab, ac, bc

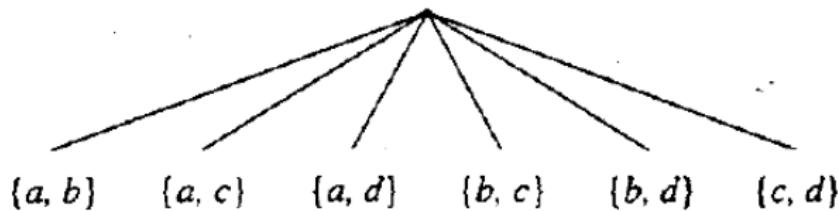
Ejemplos de Combinaciones

r-combinaciones

¿Cuáles son las 2-combinaciones de $\{a, b, c, d\}$?

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Son los seis subconjuntos $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$



Combinaciones

Ejemplo

Un estudiante que realiza un examen de Historia recibe la instrucción de responder siete de 10 preguntas.

Aquí **No importa el orden**, como el estudiante puede responder:

$$C(10, 7) = \frac{10!}{7!3!} = 120 \text{ formas}$$

Combinaciones

Ejemplo

- 1 Si un estudiante debe responder tres preguntas de las primeras cinco y cuatro preguntas de las últimas cinco.
 - Puede elegir tres preguntas de las primeras cinco.

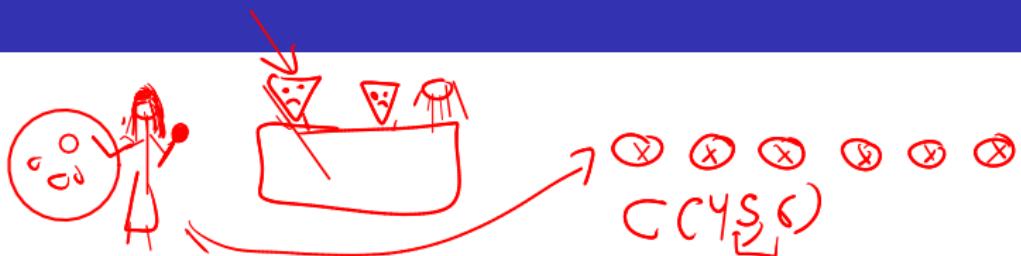
$$C(5, 3) = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ formas}$$

- Puede elegir cuatro preguntas de las últimas cinco:

$$C(5, 4) = \frac{5!}{4!1!} = 5 \text{ formas}$$

- Por regla del producto el estudiante puede realizar el examen de 50 formas.

Combinaciones



BALOTO

Obtenga el número de combinaciones para ganarse el BALOTO al sacar 6 números diferentes en cualquier orden de 45 balotas posibles.

$$C(45, 6) = \frac{45!}{6!39!} = 8,145,060$$

$$\begin{array}{r} 8145060 \times 7000 = 57 \text{ mil } 600 \\ \hline 57,015,420,000 \end{array}$$

Combinaciones

Ejemplo

¿Cuántas manos de póquer de cinco cartas (no ordenadas), pueden elegirse de una baraja de 52 cartas?

$$C(52, 5) = \frac{52!}{5!47!} = 2,598,960$$

Ejemplo

¿Cuántas manos de póquer tiene todas las cartas del mismo palo?
Hay 4 palos de 13 cartas: tréboles, diamantes, corazones y espadas.
El primer paso puede realizarse de 4 formas, y el segundo paso de $C(13, 5)$ por lo tanto, tenemos $4 \cdot C(13, 5) = 5148$.

Contenido

- 1 Principio de palomar**
- 2 Permutaciones y combinaciones**
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición**
- 3 Distinción de objetos y cajas**
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial**

Combinaciones con repeticiones



Se obtiene el combinatorio como se viene haciendo

En un conjunto de n elementos hay $C(n + r - 1, r)$ r -combinaciones con repetición.

Ejemplo

El número de 2-combinaciones con repetición de los elementos a y b se obtienen así: ($n = 2$ y $r = 2$)

$$C(2 + 2 - 1, 2) = C(3, 2) = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

0 1 -1, 2

Las combinaciones son $\overbrace{aa, ab, bb}$

Más sobre combinaciones

$C(n + r - 1, r)$ combinaciones

¿De cuántas formas se pueden seleccionar cuatro piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas, naranjas y peras, si el orden no interesa y hay al menos cuatro piezas de cada tipo en la cesta?

Hay 15 combinaciones con repetición de un conjunto de tres elementos {manzana, naranja, pera}.

$$r = 4$$

$$C(3 + 4 - 1, 4) = C(6, 4) = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$n = 3$$

n son los elementos que son distinguibles
r que pueden repetirse

4 manzanas	4 naranjas	4 peras
3 manzanas, 1 naranja	3 manzanas, 1 pera	3 naranjas, 1 manzana
3 naranjas, 1 pera	3 peras, 1 manzana	3 peras, 1 naranja
2 manzanas, 2 naranjas	2 manzanas, 2 peras	2 naranjas, 2 peras
2 manzanas, 1 naranja, 1 pera	2 naranjas, 1 manzana, 1 pera	2 peras, 1 manzana, 1 naranja

Combinaciones

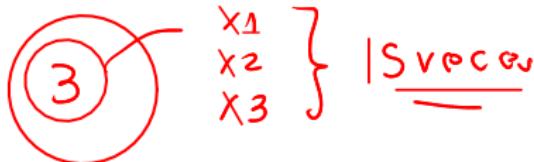
¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación?

$$\underline{x_1} + \underline{x_2} + \underline{x_3} = 15$$

que satisfagan las siguientes restricciones: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Cada solución de la ecuación es equivalente a elegir 15 elementos, x_i de tipo i , $i = 1, 2, 3$, Por lo tanto, el número de soluciones es igual al número de 15-combinaciones con repetición de un conjunto de 3 elementos.

$$C(3 + 15 - 1, 15) = C(17, 15) = \frac{17!}{15!2!} = \frac{17 \cdot 16}{2} = \underline{\underline{136}}$$



Combinaciones

¿Cuántas soluciones enteras no negativas que satisfagan $x_1 \geq 0, x_2 > 0, x_3 = 1$ tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

Aplicando el valor de $x_3 = 1$ se obtiene:

$$x_1 + x_2 = 14$$

Y tomamos $x_2 > 0$, es decir $x_2 \geq 1$ entonces:

$$x_1 + x_2 = 13$$

 $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

$$\boxed{x_2 \geq 0}$$
$$\boxed{x_1 + x_2} + \boxed{-1} = 14$$
$$x_2 \geq 1$$

Por lo tanto, tenemos 13-combinaciones de 2 elementos

$$C(\underline{2} + \underline{13} - \underline{1}, 13) = C(14, 13) \frac{14!}{13!1!} = 14$$

Combinaciones

Combinaciones en solución de ecuaciones

¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$$

$\times_1 \geq 0$

Cada solución de la ecuación es equivalente a elegir 29 elementos, x_i de tipo i , $i = 1, 2, 3, 4$, por tanto el número de selecciones es:

$$C(4+29-1, 29) = C(32, 29) = \frac{32!}{29!3!} = 4960$$

↓
n

Combinaciones

Combinaciones en solución de ecuaciones

¿Cuántas soluciones enteras que satisfagan
 $x_1 > 0, x_2 > 1, x_3 > 2, x_4 \geq 0$ tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$$

Una solución de esta ecuación: $x_1 > 0 = 1, x_2 > 1 = 2, x_3 > 2 = 3$

Por lo tanto se eligen 23 elementos.

$$C(4 + 23 - 1, 23) = C(26, 23) = 2600$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_1 + 1 + x_2 + x_3 + x_4 = 29$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + 2 + x_3 + x_4 = 28$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3 + x_4 = 26$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 23$$

$$C(4 + 23 - 1, 23)$$

Ejercicios combinaciones

Otra forma de solucionar las cadenas de reordenar las letras de *PAPAYA*

¿Cuántas cadenas distintas se pueden formar reordenando las letras de la palabra *PAPAYA*?

- Las tres letras *A* se pueden colocar en las seis posiciones de $C(6, 3)$ formas distintas, dejando tres posiciones libres.
- Luego las dos letras *P* se pueden colocar en estos tres lugares de $C(3, 2)$ formas.
- Queda un sólo lugar para la letra *Y*, es decir $C(1, 1)$ formas.
- Según la regla del producto, el número de cadenas distintas es:

$$C(6, 3)C(3, 2)C(1, 1) = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} = 60 \quad \text{similar a:}$$

$$P_6^{A,P,Y} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

PAPAYA

P=2 A=3 Y=1

$$\frac{6!}{2!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \cancel{\times 1}}{2 \times 1 \times 3 \cancel{\times 2 \times 1}} = 6 \times 5 \times 2 = 60$$

PERMUTACIONES

1. Vamos a colocar 3 A

$$C(6, 3) = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

2. Vamos a colocar 1 y

$$C(3, 1) = 3$$

3. Vamos a colocar 2 P

$$C(2, 2) = 1$$

$$20 \times 3 \times 1 = 60$$

Ejercicios combinaciones



Con bolas de colores

Supongamos que existen pilas de pelotas rojas, azules y verdes, y que cada pila contiene al menos ocho pelotas.

- 1) ¿De cuántas formas podemos elegir ocho pelotas?

$C(24, 8) = 735471$. En este caso se suponen que existen 3 pilas con 8 pelotas cada una, para un total de 24 elementos.

- 2) ¿De cuántas formas podemos elegir ocho pelotas si debemos tener al menos una pelota de cada color?

$$n = 3 \quad r = 8$$

$C(3 + 8 - 1, 8) = C(10, 8) = \frac{10!}{2!8!} = 45$, n son los elementos (rojas, azules y verdes), r es el número de elementos que vamos a tomar con repetición, osea 8.

$$C(3+8-1, 8) = C(10, 8) = \frac{10!}{2!8!} = 5 \times 9 = 45$$

Ejercicios

Ejercicio 1

Determina el número de 5-permutaciones de un conjunto de nueve elementos

Solución

$$\frac{9!}{(9-5)!} = 15120$$

Ejercicios

Ejemplo

¿Cuantos subconjuntos de tamaño 2 o mas tiene un conjunto de 100 elementos?

Si recuerdan es el conjunto potencia, que tiene una cardinalidad de 2^{100}

Solución

- El número de conjuntos de un elemento es $\frac{1}{2} \cdot \frac{100!}{(100-1)!} = 100$ 100 c 1
- Debido a que el orden no es importante el número de conjuntos de dos elementos es $\frac{100!}{2!(100-2)!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$ 100 c 2
- Nos falta considerar el conjunto vacío. 100 c 0

Por lo tanto la respuesta para el ejercicio es:

$$2^{100} - 100 - 4950 - 1 = 2^{100} - 5051$$

$$100c3 + 100c4 + 100c5 + \dots + 100c100$$

El numero de palabras que existe de tamaño 4, 5 y 6 que se pueden escribir con las letras de la palabra PAPAYA

$$c) \quad \frac{6!}{2!3!} + \quad s)$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{P} & \frac{5!}{3!} + \\ \text{A} & \frac{5!}{2!2!} + \\ \text{Y} & \frac{5!}{1!4!} \end{array}$$

$$4) \quad \begin{array}{c|c|c} \text{P, P, A} & \frac{4!}{3!} + \leftrightarrow C(4, 3) \times C(2, 1) \\ \hline \text{P, A, Y} & \frac{4!}{2!} + \leftrightarrow C(4, 2) \times C(3, 2) \times C(2, 1) \\ \hline \text{P, Y, A} & \frac{4!}{3!} + \\ \hline \text{A, A, Y} & \frac{4!}{2!} + \\ \hline \text{A, Y, A} & \frac{4!}{2!2!} + \end{array}$$

Permutación. El orden me importa

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutaciones con repetición

$$\frac{n!}{a!b!c!...}$$

↓ Repeticiones

Combinatoria: El orden NO me importa

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ordenaciones

Combinatoria con repetición C(n+r-1,r)

n elementos distinguibles

r elementos que va tomar con repetición

Contenido

1 Principio de palomar

2 Permutaciones y combinaciones

- Permutaciones
- Permutaciones con repetición
- Permutaciones con objetos indistinguibles
- Combinaciones
- Combinaciones con repetición

3 Distinción de objetos y cajas

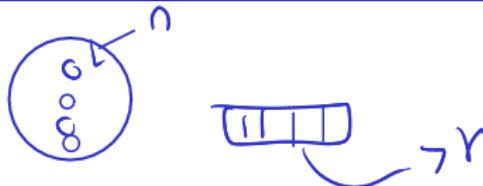
- Objetos y cajas distinguibles
- Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
- Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
- Objetos y cajas indistinguibles

4 Coeficiente binomial

Contenido

- 1 Principio de palomar**
- 2 Permutaciones y combinaciones**
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas**
 - Objetos y cajas distinguibles**
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial**

Objetos y cajas distinguibles



Introducción

Este aplica cuando tenemos objetos y cajas que son distinguibles entre sí. Un buen ejemplo es:

¿De cuántas formas se pueden distribuir 5 cartas a cada uno de 6 jugadores en un juego estándar de 52 cartas de póker?

Observación: Las cartas son diferentes entre sí y los jugadores son diferentes entre sí, es decir se pueden distinguir.

Objetos y cajas distinguibles

Ejemplo

¿De cuántas formas se pueden distribuir 5 cartas a cada uno de 6 jugadores en un juego estándar de 52 cartas de póquer?

La estrategia es empezar a distribuir las cartas a cada uno de los jugadores, dado que no nos interesa el orden en que les damos a cada jugador aplicamos combinación y regla de la multiplicación, dado que para completar la tarea debemos dar las cartas a todos los jugadores, tenemos:

$$C(52, 5)C(47, 5)C(42, 5)C(37, 5)C(32, 5)$$

1,382,019
?

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - **Objetos indistinguibles y cajas distinguibles**
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Objetos indistinguibles y cajas distinguibles

Introducción

Este caso aplica cuando tenemos problemas de colocar n objetos que son indistinguibles entre sí en k cajas que son distinguibles.

- Los objetos no los podemos distinguir entre sí, por lo que aplica combinación
- La repetición de elementos es permitida, ya que no podemos distinguir los objetos entre sí
- Existe una correspondencia de uno a uno entre objetos y caja (función inyectiva)
- Aplicamos combinación con repetición $C(n + r - 1, r)$

↓
distingw
↑
repetido

Objetos indistinguibles y cajas distinguibles

Ejemplo

¿De cuantas formas podemos colocar 10 bolas indistinguibles en 8 papeleras distinguibles?

$$C(8 + 10 - 1, 10) = C(17, 10)$$

En total tenemos $n = 8$ cajas distinguibles y $r = 10$ elementos con repetición.

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles**
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Objetos distinguibles y cajas indistinguibles

Introducción

Este es uno de los casos de conteo más complicados, ya que requiere analizar cómo se distribuyen los objetos en las cajas. No existe una fórmula cerrada que permita contar cómo se distribuyen objetos distinguibles en cajas indistinguibles.

Objetos distinguibles y cajas indistinguibles

Ejemplo

¿De cuantas formas podemos asignar tres oficinas a cuatro empleados diferentes A,B,C y D?

Para tratar este caso, debemos enumerar las posibilidades
 $\{\{A, B, C, D\}, \{\}, \{\}\}$, $\{\{A, B, C\}, \{D\}, \{\}\}$, ..., $\{\{\}, \{\}, \{A, B, C, D\}\}$
en total tenemos 14 formas de asignar.

Objetos distinguibles y cajas indistinguibles

Solución

Una forma de resolver el problema es usar la forma de los números de Stirling de primera clase, la cual permite realizar el conteo de n objetos distinguibles en k cajas indistinguibles.

$$\sum_{j=1}^k S(n, j)$$

Para cada caja, la formula es:

$$S(n, j) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i C(j, i) (j - i)^n$$

Objetos distinguibles y cajas indistinguibles

Ejemplo

¿De cuantas formas podemos asignar tres oficinas a cuatro empleados diferentes A,B,C y D?

$$S(4, 1) = \frac{1}{1!}((-1)^0 C(1, 0)(1 - 0)^4) = 1$$

$$S(4, 2) = \frac{1}{2!}((-1)^0 C(2, 0)(2 - 0)^4 + (-1)^1 C(2, 1)(2 - 1)^4) = \frac{1}{2!} * 14 = 7$$

$$\begin{aligned} S(4, 3) &= \frac{1}{3!}((-1)^0 C(3, 0)(3 - 0)^4 + (-1)^1 C(3, 1)(3 - 1)^4) + \\ &\quad (-1)^2 C(3, 2)(3 - 2)^4 = \frac{1}{3!} * 36 = 6 \end{aligned}$$

En total tenemos $S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) = 1 + 7 + 6 = 14$

Contenido

- 1 Principio de palomar**
- 2 Permutaciones y combinaciones**
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas**
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles**
- 4 Coeficiente binomial**

Objetos y cajas indistinguibles

Introducción

En este tipo de problemas, necesariamente se debe realizar un conteo de las diferentes formas de colocar n objetos indistinguibles en k cajas indistinguibles.

Ejemplo

¿De cuantas formas se pueden colocar seis copias del mismo libro dentro de cuatro cajas idénticas?

Para resolver el problema ¡Debemos evaluar todas las posibilidades!

Objetos y cajas indistinguibles

¿De cuantas formas se pueden colocar seis copias del mismo libro dentro de cuatro cajas idénticas?

6

5, 1

4, 2

4, 1, 1

3, 3

3, 2, 1

3, 1, 1, 1

2, 2, 2

2, 2, 1, 1

En total tenemos 9 formas. Este problema es conocido como el problema de la **partición**. Este será tratado en el curso de complejidad y optimización :)

Un palindromo tiene n caracteres.

¿Cuantas cadenas existen de tamaño n que sean palindromas?

Par

26 26 26 ... ; ... 26

$\frac{n}{2}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\frac{n}{2}$

Impar

$26^{\frac{n}{2}}$

$26^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

$\times 26$

$=$

$26^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$

26

1 1 1 1 1 1 1

AMOMA

$26^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

- Si la novia está en algún lugar al lado izquierdo del novio?

6 primos

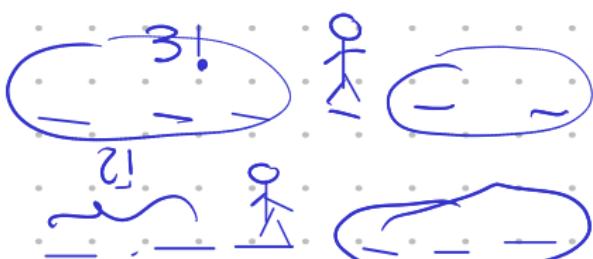
X N	P J M C
--------	------------------



$$5!$$

$$+ 4!$$

+



$$P(4,2) \times 3!$$

$$+ P(4,3) \times 2!$$



$$4! \times 1$$

+

Contenido

- 1 Principio de palomar
- 2 Permutaciones y combinaciones
 - Permutaciones
 - Permutaciones con repetición
 - Permutaciones con objetos indistinguibles
 - Combinaciones
 - Combinaciones con repetición
- 3 Distinción de objetos y cajas
 - Objetos y cajas distinguibles
 - Objetos indistinguibles y cajas distinguibles
 - Objetos distinguibles y cajas indistinguibles
 - Objetos y cajas indistinguibles
- 4 Coeficiente binomial

Coeficiente binomial

Definición

Estos ofrecen el desarrollo de potencias de expresiones binomiales. Una expresión binomial es la suma de dos términos por ejemplo $(x + y)^2$.

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Coeficiente binomial

Teorema del binomio

Sean x e y variables y n un entero no negativo. Se cumple que:

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n C(n, j)x^{n-j}y^j$$

$$= C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + C(n, 2)x^{n-2}y^2 + \dots + C(n, n-1)xy^{n-1} + C(n, n)y^n$$

$$(x+y)^8 = \sum_{j=0}^n C(n, j) x^{n-j} y^j$$

$$\begin{aligned} & C(8,0)x^8 + C(8,1)x^7y + C(8,2)x^6y^2 \\ & + C(8,3)x^5y^3 + C(8,4)x^4y^4 + C(8,5)x^3y^5 \\ & + C(8,6)x^2y^6 + C(8,7)xy^7 + C(8,8)y^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + \\ & - 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + \\ & 8xy^7 + y^8 \end{aligned}$$

Coeficiente binomial

Ejemplo

Cual es el desarrollo de $(x + y)^4$

Solución

Según el teorema del binomio:

$$(x + y)^4 = C(4, 0)x^4 + C(4, 1)x^3y + C(4, 2)x^2y^2 + C(4, 3)xy^3 + C(4, 4)y^4$$

$$(x + y)^4 = \frac{4!}{0!4!}x^4 + \frac{4!}{1!3!}x^3y + \frac{4!}{2!2!}x^2y^2 + \frac{4!}{3!1!}xy^3 + \frac{4!}{4!0!}y^4$$

$$(x + y)^4 = 4x^4 + 6x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Coeficiente binomial

$$= \sum_{j=0}^n C(n, j) x^{n-j} y^j$$

$$\text{C}(25, 13) x^{12} y^{13}$$

S 200300 x¹² y¹³

Ejercicio 1

Cual es el coeficiente $x^{12} y^{13}$ de $(x + y)^{25}$

Ejercicio 2

Cual es el coeficiente $x^{12} y^{13}$ de $(2x - 3y)^{25}$

$$5200300(2x)^{12}(-3y)^{13}$$

Coeficiente binomial

Solución ejercicio 1

Según el teorema del binomio:

$$C(2513) * x^{12}y^{13} = 5200300 * x^{12}y^{13}$$

Coeficiente binomial

Solución ejercicio 2

Reemplazando en la expresión del binomio:

$$(2x - 3y)^n = \sum_{j=0}^n C(n, j)(2x)^{n-j}(-3y)^j$$

El coeficiente de $x^{12}y^{13}$ se obtiene cuando $j = 13$ debido a que $n - j = 25 - 13 = 12$ es decir:

$$C(25, 13)(2x)^{25-13}(-3y)^{13} = \frac{25!}{13!12!}(-3)^{13}2^{12}x^{12}y^{13}$$

Coeficiente binomial

Identidad de pascal

Sean n y k positivos tales que $n \geq k$ entonces:

$$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k) \quad (1)$$

Con $C(n, 0) = 1$ y $C(n, n) = 1$.

$$k \leq n$$

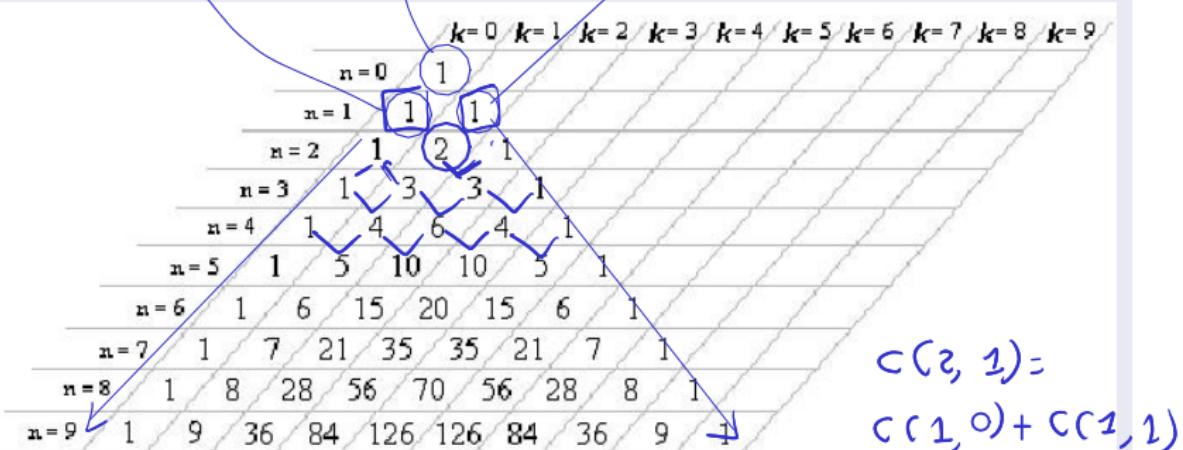
Coeficiente binomial

$$C(1,0)$$

$$C(0,0)$$

$$C(1,1)$$

Identidad de pascal



$$C(2, 1) =$$

$$C(1, 0) + C(1, 1)$$

Coeficiente binomial

Ejercicio 3

$$= \sum_{j=0}^n C(n, j) x^{n-j} y^j$$

Escribe el desarrollo de $(x + y)^6$

Ejercicio 4

Cual es el coeficiente de $x^{101} y^{99}$ en el desarrollo de $(2x - 3y)^{200}$

$$\begin{aligned} 2) & C(6, 0) x^6 + C(6, 1) x^5 y + C(6, 2) x^4 y^2 + C(6, 3) x^3 y^3 + \\ & C(6, 4) x^2 y^4 + C(6, 5) x y^5 + C(6, 6) y^6 \end{aligned}$$

$$x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6x y^5 + y^6$$

$$2) C(200, 99) 2^{101} (-3)^{99} x^{101} y^{99}$$

Coeficiente binomial

Solución ejercicio 3

$$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Solución ejercicio 4

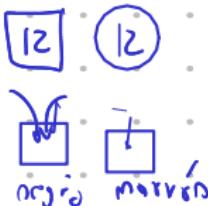
$$C(200, 99) * (2)^{101} (-3)^{99}$$

En un cajón hay una docena de calcetines marrones y una docena de calcetines negros sin marcar. Un hombre elige los calcetines al azar.

- (a) Cuántos calcetines debe elegir para asegurar que al menos dos deben ser del mismo color?
- (b) Cuántos calcetines debe elegir para asegurar que al menos dos son negros?

a) 3

b) 14



1€ 2€ ↘

16. ¿De cuántas formas se pueden elegir ocho monedas de una bolsa que contiene 100 monedas de un euro y 80 monedas de dos euros?

¿Cuales son los indistinguibles? Monedas de 1 euro y 2 euros. n=2, r=8

?

$$c(2+8-1,8) = C(9,8) = 9$$

2 2 2 2

How many ways are there to choose eight coins from a piggy bank containing 100 identical pennies and 80 identical nickels?

Referencias



Kenneth H. Rosen.

Discrete Mathematics and Its Applications.

McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.

Chapter 6.

Gracias

Próximo tema:
Recurrencias.