Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

* Inducción matemática
* Ejemplos

Técnicas de demostración

Inducción matemática

• Muchos teoremas establecen que $P(n)$ es verdad para todos los enteros positivos n, donde $P(n)$ es una expresión matemática

Técnicas de demostración

Inducción matemática

Una prueba por inducción matemática consiste de dos pasos

- **Paso base**. Se muestra que la proposición **P(1)** se cumple
- **Paso inductivo**. Se supone que P(n) es cierto y se intenta demostrar que P(n+1) también. **P(n)→P(n+1)**

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\mathbf{1+2+3+\ldots+n}$ es $\mathbf{n \cdot (n+1)/2}$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** P(1)

  $1 = 1\cdot2/2 = 1$

*

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** $P(1)$

  $1 = 1\cdot 2/2 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

  $1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \Rightarrow$?

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1 \cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\underbrace{\boxed{1+2+3+\ldots+n}}_{}^{P(n)} = n \cdot (n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\boxed{1+2+3+\ldots+n}}^{P(n+1)}+(n+1)$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+...+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1 \cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

$$1+2+3+\ldots+n = \boxed{n\cdot(n+1)/2} \Rightarrow \underbrace{\underline{1+2+3+\ldots+n}}_{}+(n+1)$$

P(n)

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

$$= n\cdot(n+1)/2 + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)/2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

$n=0$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$$

Si para $n \rightarrow n+1$

Paso base $n=0$

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 \qquad 2^{0+1}-1 = 2-1 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$$

$$2^{n+1}-1+2^{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2}-1$$

$$2 \times 2^{n+1}-1$$

$$2^{n+2}-1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \Rightarrow \ ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\boxed{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+}}^{P(n)}\ 2^{n+1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{2^0+2^1+2^2+...+2^n}+ 2^{n+1}$$

$$2^{n+2}-1$$

$$= (2^{n+1}-1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1}-1$$

$$= 2^{(n+1)+1}-1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

$$\sum_{i=1}^{n} (2n-1) = n^2$$

$$P(1) \quad \sum_{i=1}^{1} (2n-1) = 1 \qquad n^2 = (1)^2 = 1$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} (2n-1) = n^2$$

$$\downarrow n = n+1$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2n-1) = (n+1)^2$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (2n-1)} + 2(n+1) - 1$$

$$n^2 + 2(n+1) - 1$$

$$n^2 + 2n + 2 - 1$$

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

;)

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. $P(1)$

  $1 = 1^2$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

  $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow$?

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base.** P(1)

  $1 = 1^2$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1)$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow \underline{1 + 3 + \ldots + (2n-1)} + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n + 1)^2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$P(1) \quad \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 \qquad \frac{(1)(2)(3)}{6} = 1 \quad ;)$$

$$P(n) \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xRightarrow{n+1} \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$P(n) + (n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6}{6}(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{(n+1)\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\left(2(2n^2)+7(2n)+12\right)}{6}\frac{1}{2}$$

$$\frac{(n+1)\left((2n+4)(2n+3)\right)}{6}\frac{1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base**. P(1)

$$1^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

  $1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

$$= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2$$

$$= (n+1)(2n^2+7n+6)/6$$

$$= (n+1)(2n+3)(n+2)/6$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3$$

Paso base $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 \qquad \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 < \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + (n+1)^3$$

$$(n+1)^2\left(\left(\frac{n^2}{4}\right)+(n+1)\right)$$

$$\frac{(n+1)^2}{}\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2\left(\frac{(n+2)(n+2)}{4}\right)$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

  $$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

$$= n^2(n+1)^2/4 +(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2[n^2/4 +(n+1)]$$

$$= (n+1)^2(n+2)^2/4 = [(n+1)(n+2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i(i+1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$n = 1$ $\quad \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(2) = 2 \qquad \frac{1(2)(\cancel{3})}{\cancel{3}} = 2$:)

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad P(n)$$

$$P(n+1) \quad \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \underbrace{\boxed{\sum_{i=1}^{n} i(i+1)}} + \overbrace{(n+1)(n+2)} \qquad P(n+1)$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\boxed{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base**. P(1)

  $1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \quad \Rightarrow \quad 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow \underline{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)} + (n+1) \cdot (n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base**. $P(1)$

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

- **Paso inductivo**. $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2)$$

$$= n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)\cdot(n+2)$$

$$= (n+1)(n+2)[\, n/3 + 1]$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)/3$$

$$=P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que 1·1! + 2·2! +...+n·n! = (n+1)!-1

$$\sum_{i=1}^{n} i \times i! \qquad \boxed{(n+2)! - 1}$$

$$P(1) \quad \sum_{i=1}^{1} i \times i! = 1 \times 1! = 1 \qquad (n+1)! - 1$$

$$2! - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$P(n) \longrightarrow P(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \times i! = \boxed{\sum_{i=1}^{n} i \times i!} + (n+1)(n+1)!$$

$$(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$(n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$$

$$(n+1)!\,(n+2) - 1$$

$$(n+2)! - 1$$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n \times (n+1)$$

$$(n+2)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n \times (n+1) \times (n+2)$$

$$(n+1)! \times (n+2) = (n+2)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base**. $P(1)$

  $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!-1$

- **Paso base.** P(1)

  $1\cdot 1! = (1+1)!-1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)!-1 \Rightarrow \underline{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)![1 + (n+1)] - 1$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n pares es $n \cdot (n+1)$, es decir, $2+4+6+ \ldots + 2n = n \cdot (n+1)$