

Cont'd

1) Regla multiplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \} \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{T_1} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{T_2} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{T_3} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 0 \ 0 \ 0 \\ \vdots \\ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Cuantos telefonos existen  
si los tenemos así.

1) Cod pairs — (2 digits)

2) Cod gr<sup>o</sup> - - - (3 digit aa)

3) Marcy - (0-7)

4) Telefono ———— (6 digits)

T {  $10^2$   $10^3$  8  $10^6$

T1: cad pg's. cad arp Marc9 T4 Telefono

$$\begin{array}{cccc} \underline{10} & \underline{10} & & \\ T_{11} & T_{12} & & \\ & & \underline{10} & \underline{10} & \underline{10} & \underline{8} \\ & & T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{31} \end{array}$$

74  
Telefono  
=  $8 \times 10^{11}$

Regla de la suma: Aplica para tareas mutuamente excluyentes

Variables: 1 carácter o de dos carácter  
¿Cuántas variables tengo?

$$\begin{aligned} T_1 &\rightarrow 1 \text{ carácter} & 26 \\ T_2 &\rightarrow 2 \text{ caracteres} & 26^2 \\ & & \boxed{26 + 26^2} \end{aligned}$$

Principio de inclusión - exclusión

En una Universidad tenemos que los estudiantes tienen sus código así:

- Pregrado: 1 letra + 6 números
- Posgrado:

D + 2 letras + 6 números  
M + 3 letras + 5 números  
E + 4 letras + 4 números

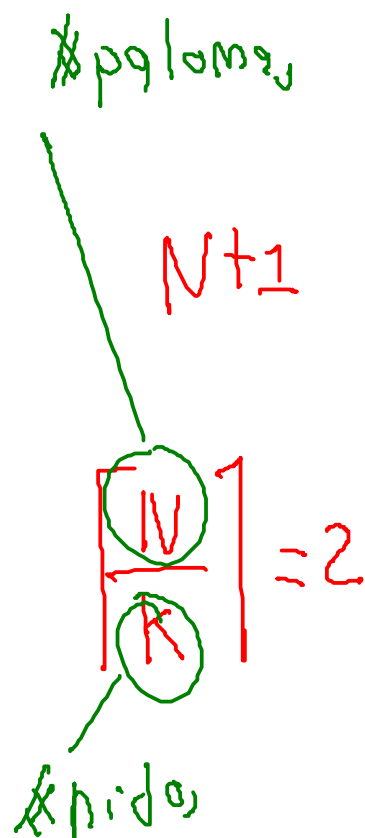
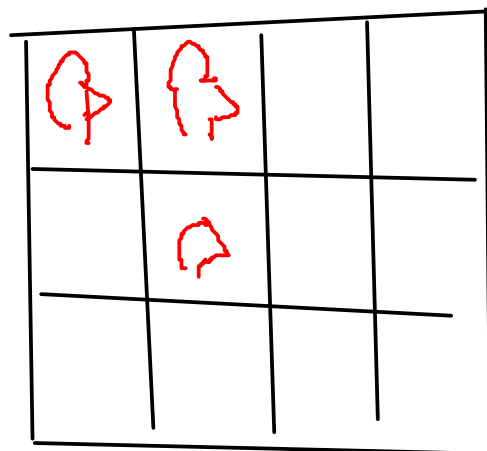
¿Cuántos códigos tenemos en la u?

$$T = \begin{cases} T_1 \rightarrow \text{Progrado} \\ + \\ T_2 \rightarrow \text{Posgrado} \end{cases}$$

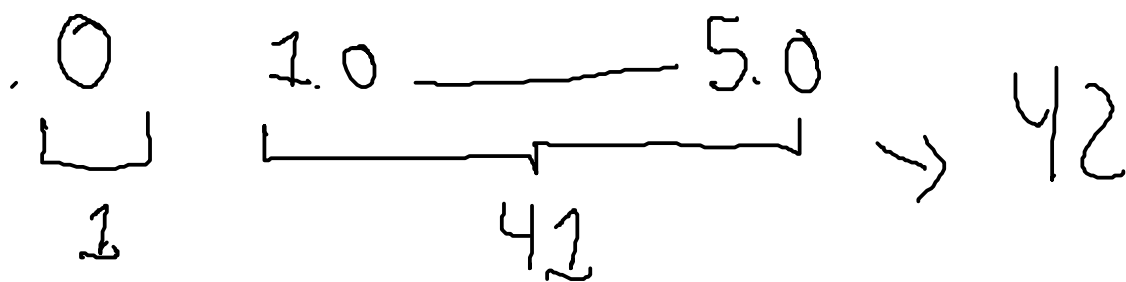
$$T_1 \rightarrow \begin{matrix} 26 \\ \text{Letra} \\ \hline T_{11} \end{matrix} \quad \underbrace{101010101010}_{\text{---}} \} 10^6 + 26 \times 10^6 T_{12}$$

$$T_2 \rightarrow \begin{cases} T_{21} \rightarrow D \\ T_{22} \rightarrow M \\ T_{23} \rightarrow E \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{Letra} \\ 26^2 \sqrt{\text{---}} \\ T_{211} + \frac{10^6}{T_{212}} \rightarrow 26^2 \times 10^6 \\ 26^3 \times 10^5 \\ 26^4 \times 10^4 \end{matrix}$$

# Principio de palomar



¿Cual es el mínimo número de estudiantes que se necesitan en MDII para garantizar que la menos 3 estudiantes saquen la misma nota?



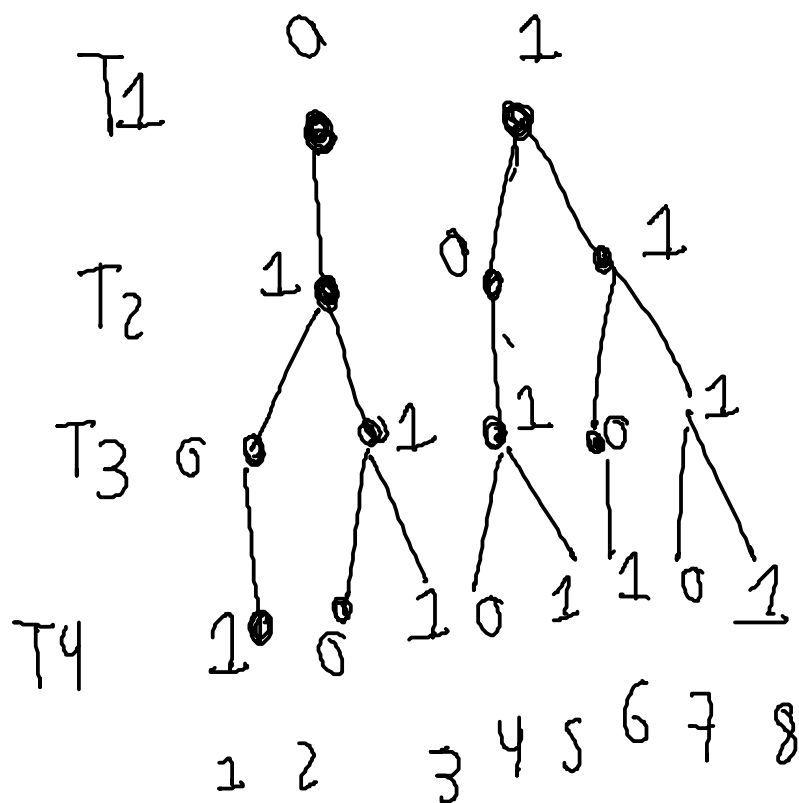
$$\left\lceil \frac{N}{K} \right\rceil = 3, \quad \left\lceil \frac{N}{42} \right\rceil = 3$$

$$\frac{N}{42} = 2$$

$$N = 84 + 1$$

$$N = 85$$

¿Cuántas cadenas de 4 bits existen en las cuales no pueden haber dos ceros consecutivos?



¿Cuántas personas tienen que vivir en Tuluá para garantizar que al menos 10 tengan lo siguiente:

- 1) Dos letras iniciales del nombre iguales
- 2) Tres letras iniciales del apellido iguales
- 3) Cumplan el mismo día

$$\begin{array}{ccc} \underline{26} \underline{26} \rightarrow 26^2 & \underline{26} \underline{26} \underline{26} \rightarrow 26^3 & \underline{366} \\ T_1 & T_2 & \end{array}$$

$$[26^5 \times 366]$$

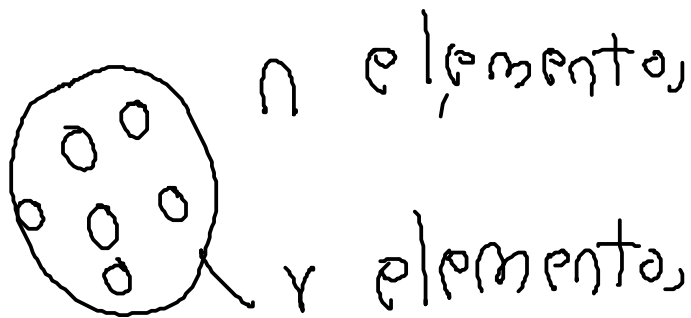
$$\left\lceil \frac{N}{26^5 \times 366} \right\rceil = 10$$

$$N = 9 \times 26^5 \times 366 + 1$$

¿Cuántos números debo elegir entre 1 y 7 para que al menos dos sumen 8?

$$(1, 7) (2, 6) (3, 5) \rightarrow \underline{4}$$

# Combinación y permutación



$$n = 10$$

$$r = 6$$

$$\frac{10!}{4!} \leftarrow \overset{n-1}{10} \times \overset{n-2}{9} \times \overset{n-2}{8} \times \overset{n-3}{7} \times \overset{n-4}{6} \times \overset{n-5}{5} [ \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 ]$$

6   5   4   3   2   1 ← ordenes.

$(10-6)!$

Permutación ← orden importa  $352 \neq 253$

Combinación ← orden no importa  $352 = 253$

$$P(n, r) = \frac{C(n, r)}{r!}$$

$$\underbrace{\overset{n}{\times} \overset{n-1}{\times} \overset{n-2}{\times} \dots \times \overset{n-r+1}{\times}}_{r \text{ elementos}} \times \overset{n-r}{\cancel{\times 3 \times 2 \times 1}} \rightarrow n!$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

¿De cuantas formas puedo escoger 3 manzanas de una docena de manzanas?

$$n = 12 \quad r = 3$$

a) Si me importa el orden en que me las dan

$$P(12, 3) = \frac{12!}{9!} = 1320$$

b) Si no me importa el orden en que me las dan

$$C(12, 3) = \frac{12!}{3! \times 9!} = 220$$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Objetos distinguibles



## Objetos indistinguibles

¿Cuántas palabras de 6 letras podemos generar?

$$\underline{26} \quad \underline{26} \quad \underline{26} \quad \underline{26} \quad \underline{26} \quad \underline{26}$$

$$P_{a,b,c} = \frac{n!}{a! \times b! \times c!}$$

Teniendo las letras a,b,c,d

¿Cuántas cadenas de tamaño 8 puedo generar, si cada una de las letras se puede repetir 2 veces?

$$P_{a,b,c,d} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 2520$$

$\begin{matrix} T_1 & T_2 \\ \uparrow & \uparrow \end{matrix}$

¿Cuántas palabras de tamaño 8 y 9 puedo formar con las letras de la palabra GARANTIAS?

$$\begin{matrix} T_2 \rightarrow & A=3 & \frac{9!}{3!} \\ T_1 \rightarrow & & \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} A=2 \quad \frac{8!}{2!} \\ A=3, E, R, N, T, S, I \\ 6 \times \frac{8!}{3!} \end{array} \right.$$

# Combinatorias con repetición

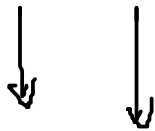
x, y, z

xy yy zz

xz yz

xx

3 2



$$C(n+r-1, r)$$

$$C(3+2-1, 2)$$

$$C(4, 2)$$

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

¿De cuantas formas se puede reordenar la palabra PARARSIPAGA?

A = 4

P = 2

R = 2

n = 11

$$C(14, 4)$$

n = 7

$$C(8, 2)$$

n = 5

$$C(6, 2)$$

n = 3

$$C(3, 3)$$

## Coeficiente binomial

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n C(n, j) x^{n-j} y^j$$

$$(x+y)^7$$


$$C(7,0)x^7y^0 + C(7,1)x^6y^1 + C(7,2)x^5y^2 + C(7,3)x^4y^3 + C(7,4)x^3y^4 + C(7,5)x^2y^5 + C(7,6)xy^6 + C(7,7)x^0y^7$$

$$(ax+by)^3 \rightarrow C(3,0)(ax)^3(by)^0 +$$

$$C(3,1)(ax)^2(by)^1 + C(3,2)(ax)(by)^2 +$$

$$C(3,3)(ax)^0(by)^3$$

$$T(n) = T(n-1) + 2$$



$$n=0$$



$$n=1$$



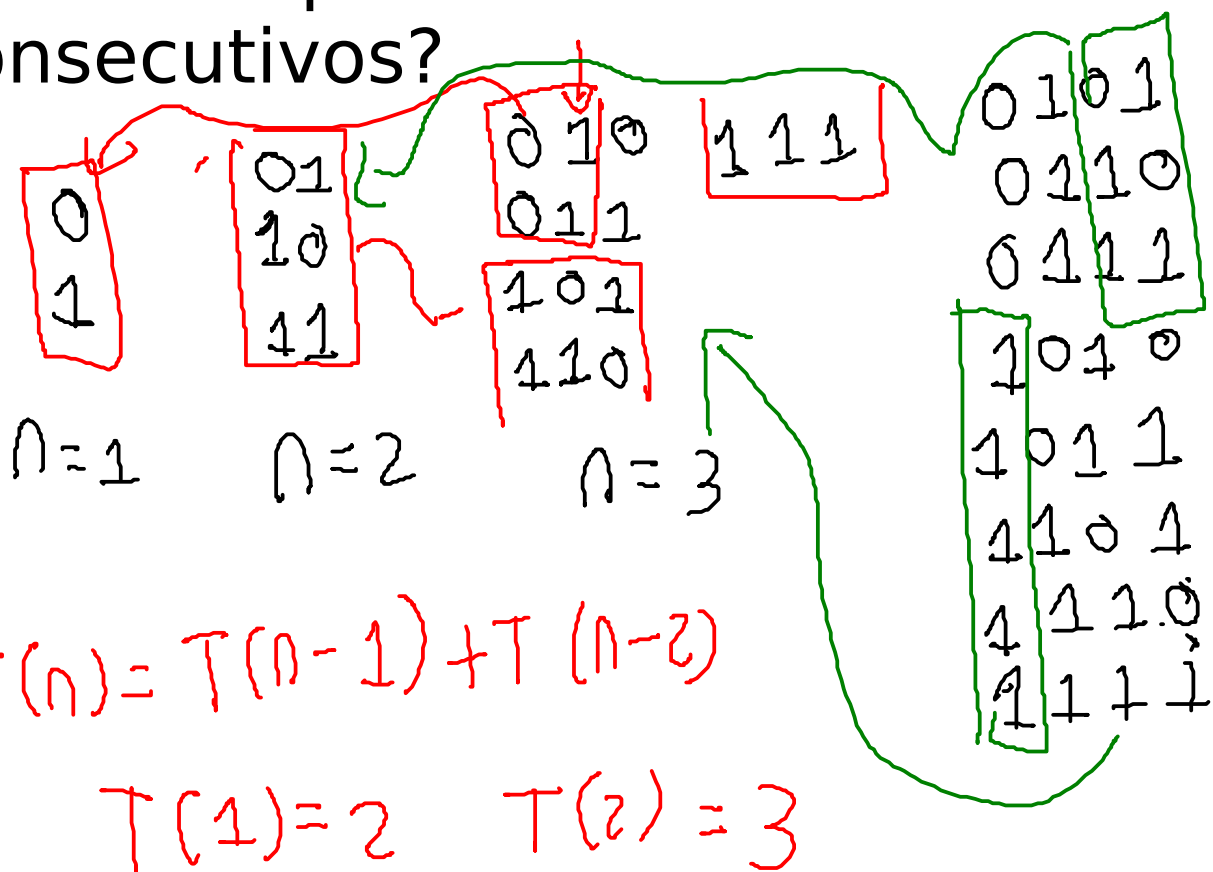
$$n=2$$

$$n=?$$

$$T(n) = 2 \times T(n-1)$$

$$T(0) = 2$$

¿Encuentre una R.R que permita contar las cadenas de  $n$  bits las cuales no permiten dos ceros consecutivos?



Homogeneous

$$T(n) = C_1 T(n-1) + C_2 T(n-2) + \dots + C_k T(n-k)$$



$$C_k \neq 0$$

$$r^k = C_1 r^{k-1} + C_2 r^{k-2} + \dots + C_k r^0$$

$$T(n) = 5T(n-1) + 6T(n-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} k=2 \end{array} \right.$$

$$T(0) = 2$$

$$T(1) = 6$$

$$r^2 - 5r - 6 = 0$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ -1 \end{array} \right.$$

$$T(n) = A(6)^n + B(-1)^n$$

$$2 = A + B$$

$$6 = 6A - B$$

$$\hline 8 = 7A$$

$$\boxed{A = \frac{8}{7}}$$

$$\frac{14}{7} = \frac{8}{7} + B$$

$$\boxed{\frac{6}{7} = B}$$

$$T(n) = \frac{8}{7}(6)^n + \frac{6}{7}(-1)^n$$

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) \quad T(0)=4, \quad T(1)=8$$

$$r^2 - 2r + 1 \begin{cases} r=1 \\ r=1 \end{cases}$$

$$T(n) = A(1)^n + Bn(1)^n$$

$$T(n) = A + Bn$$

$$T(n) = 4 + 4n$$

$$A=4$$

$$B=4$$

No homogeneous

$$T(n) = C_1 T(n-1) + C_2 T(n-2) + \dots + \underbrace{C_k T(n-k)}_{\text{particular}} + F(n)$$

Solution homogeneous

Solution particular

$$T(n) = 5T(n-1) + 6T(n-2) + n + 5^n + 6$$

$$T^h(n) = A(6)^n + B(-1)^n$$

$$F(n) = \underline{n} + \underline{6} + \underline{5^n}$$

$$Cn + D + E5^n$$

$$Cn + D + E5^n = 5(C(n-1) + D + E5^n) + 6(C(n-2) + D + \frac{E5^n}{5^2}) + n + 5^n + 6$$

$$5^n \mid \quad E5^n = E5^n + \frac{6E5^n}{25} + 5^n$$

$$\cancel{E} = \cancel{E} + E\frac{6}{25} + 1 \quad E = -\frac{25}{6}$$

$$n \mid \quad \begin{array}{l} 11Cn \\ Cn = 5Cn + 6Cn + n \\ C = 11C + 1 \quad -10C = 1 \quad C = -\frac{1}{10} \end{array}$$

$$Cte \mid \quad \begin{array}{l} D = -5C + 5D - 12C + 6D + 6 \\ D = \frac{5}{10} + 5D + \frac{12}{10} + 6D + 6 \quad D = -\frac{77}{100} \\ -10D = \frac{17}{10} + \frac{60}{10}n \end{array}$$

$$T(n) = A(6)^n + B(-1)^n - \frac{1}{10}n - \frac{77}{100} - \frac{25}{6}5^n$$

$$T(n) = -4T(n-1) + 5T(n-2) + 2n - 3 + 4 \times 5^n$$

$$T(0) = 3$$

$$T(1) = 9$$

$$r^2 + 4r - 5 = 0 \quad \begin{matrix} (-5) \\ (1) \end{matrix}$$

$$T(n) = A(-5)^n + B(1)^n$$

$$F(n) = 2n - 3 + 4 \times 5^n$$

$$\underbrace{Cn^2 + Dn}_{s_1} + \underbrace{E5^n}_{s_2}$$

$$Cn^2 + \underbrace{Dn}_{s_1} + E5^n = -4(C(n^2 - 2n + 1) + D(n-1) + \frac{E5^n}{5}) + 5(C(n^2 + 4n + 4) + D(n-2) + \frac{E5^n}{25}) + 2n - 3 + 4 \times 5^n$$

$$n^2 \quad C = -4C + 5C \quad C = C$$

$$n \quad D = 8C - 4D + 20C + 5D + 2$$

$$28C = -2 \quad C = \frac{-2}{28} = \frac{-1}{14}$$

$$cte \quad 0 = -4C + 4D + 20C - 10D - 3$$

$$0 = \frac{4}{14} + 4D - \frac{20}{14} - 10D - 3$$

$$6D = \frac{4}{14} - \frac{20}{14} - \frac{42}{14} = -\frac{58}{14}$$

$$D = -\frac{58}{84}$$

$$5^n \quad \frac{5}{5}E = -\frac{4}{5}E + \frac{E}{5} + 4$$

$$\frac{8}{5}E = 4 \quad E = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$T(n) = A(-5)^n + B(1)^n = \frac{1}{14}n^2 - \frac{58}{84}n + \frac{5}{2}5^n$$