Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Árboles rojinegros

Árboles rojinegros

Propiedades de un árbol rojinegro

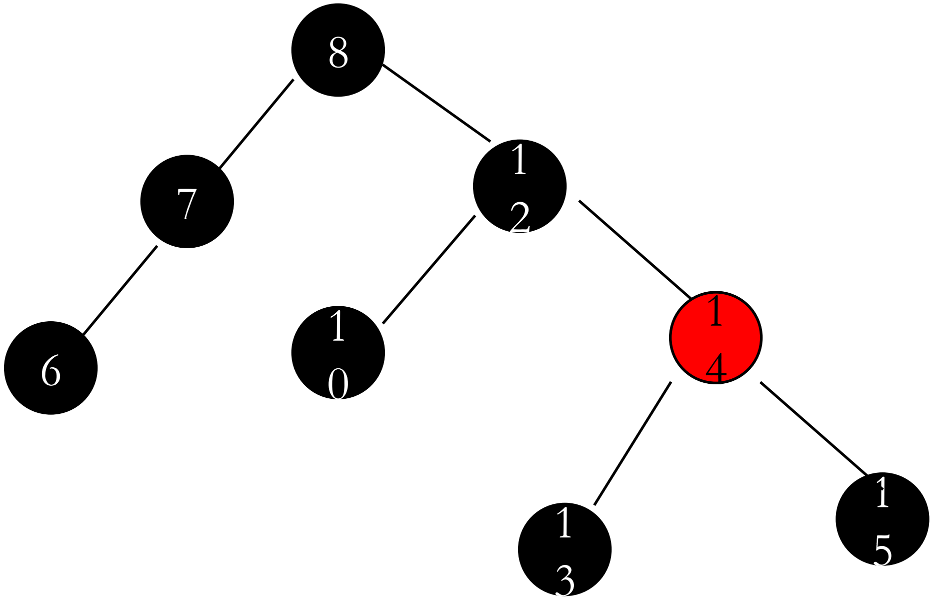
Rotaciones

Insertar borrar elementos de un árbol rojinegro

Árboles rojinegros

Árboles rojinegros

Un árbol rojinegro es un árbol de búsqueda binario en el que cada nodo tiene un bit extra para almacenar su color.



Árboles rojinegros

Árboles rojinegros

Un árbol rojinegro es un árbol de búsqueda binario en el que cada nodo tiene un campo extra para almacenar su color

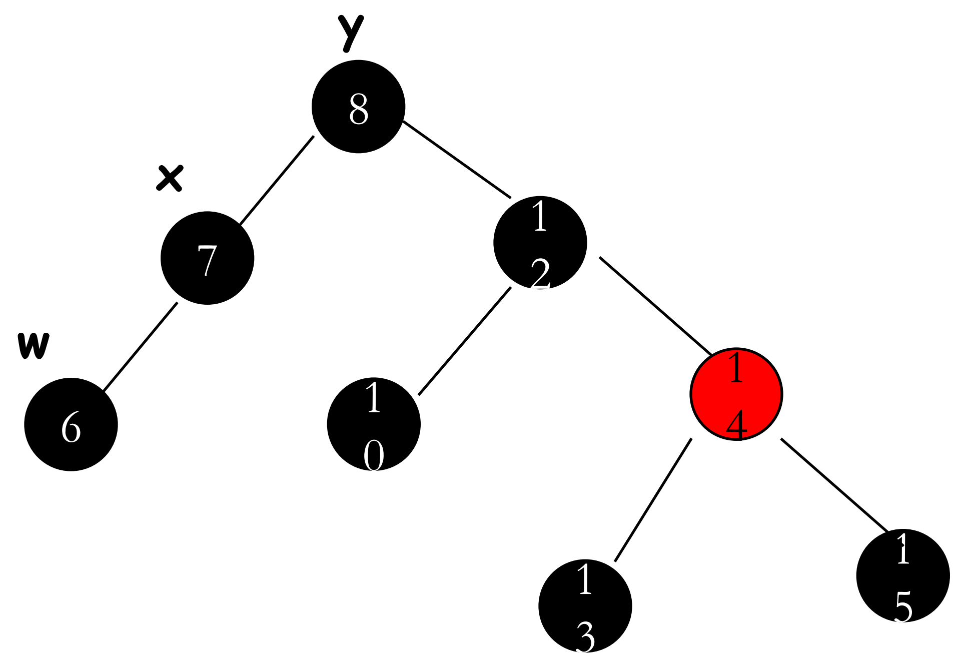
key[x]=7

p[x]=y

left[x]=w

right[x]=nil

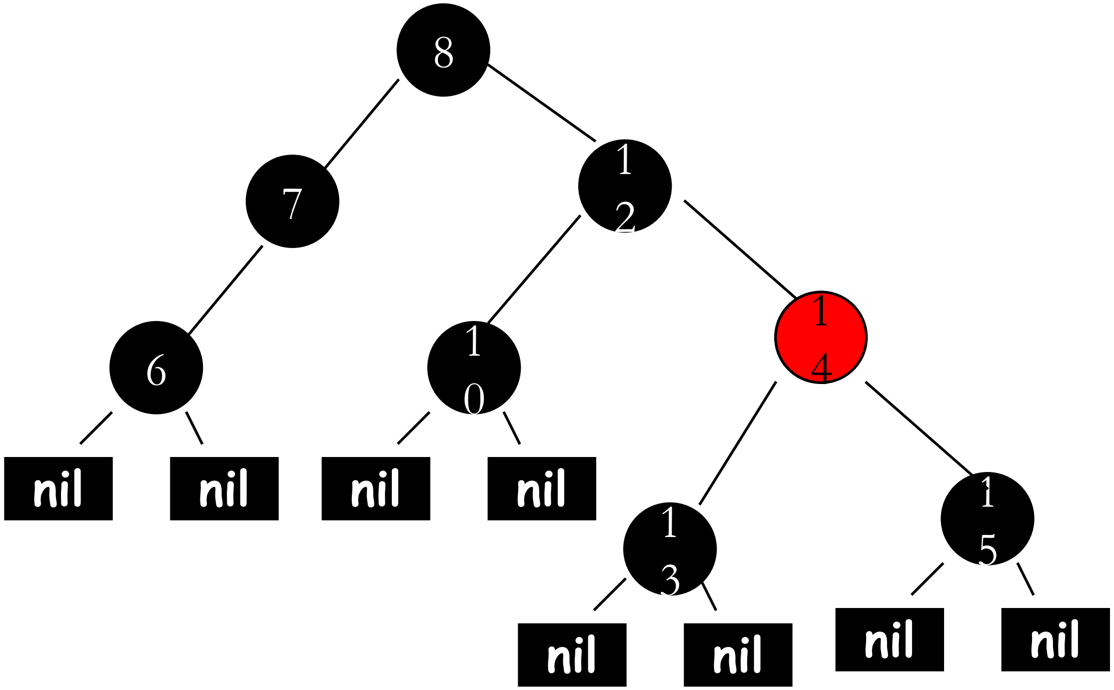
color[x]=black



Árboles rojinegros

Árboles rojinegros

En los árboles rojinegros se colocan las referencias a nil como nodos de color negro



Árboles rojinegros

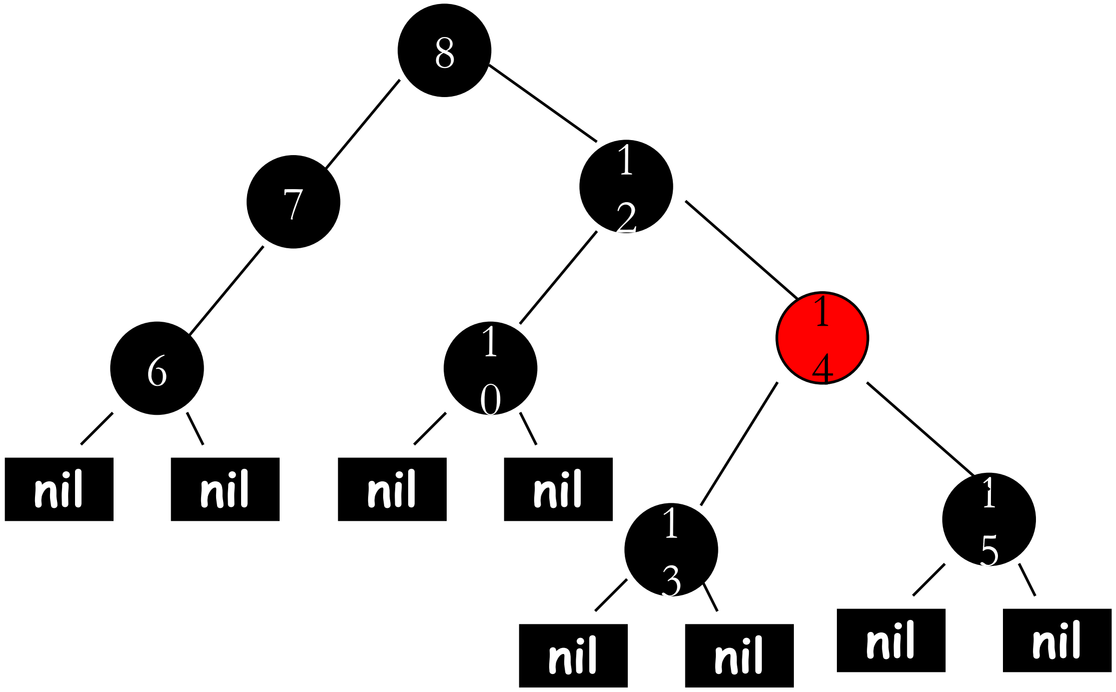
Propiedades de un árbol rojinegro

1. Todo nodo es rojo o negro
2. Toda hoja (nil) es negra
3. La raíz es negra
4. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos son negros
5. Cada camino de un nodo a sus hojas descendientes contienen el mismo número de nodos negros

Árboles rojinegros

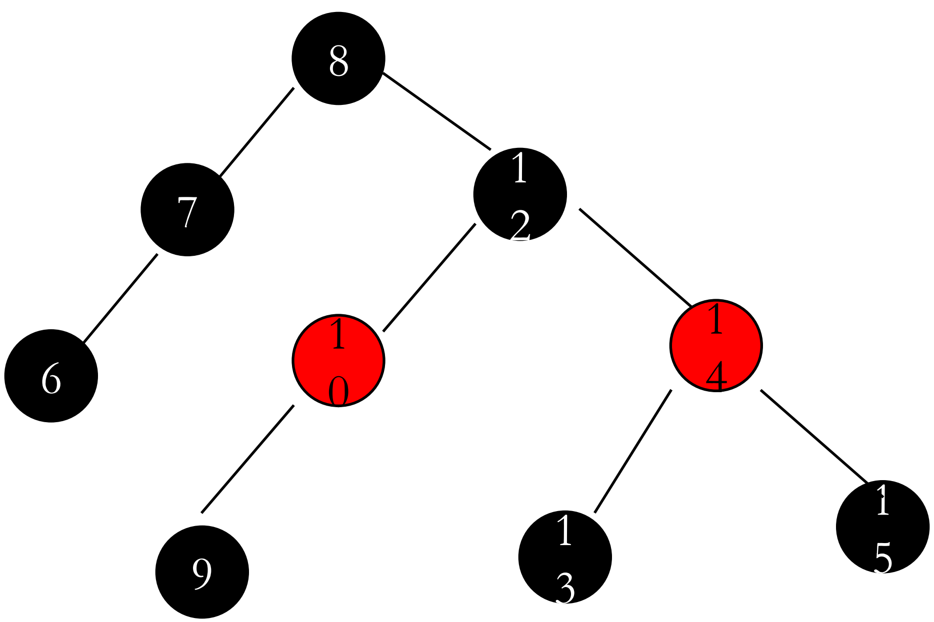
Propiedades de un árbol rojinegro

1. Todo nodo es rojo o negro
2. Toda hoja (nil) es negra
3. La raíz es negra
4. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos son negros
5. Cada camino de un nodo a sus hojas descendientes contienen el mismo número de nodos negros



Árboles rojinegros

Indique si el siguiente árbol es rojinegro

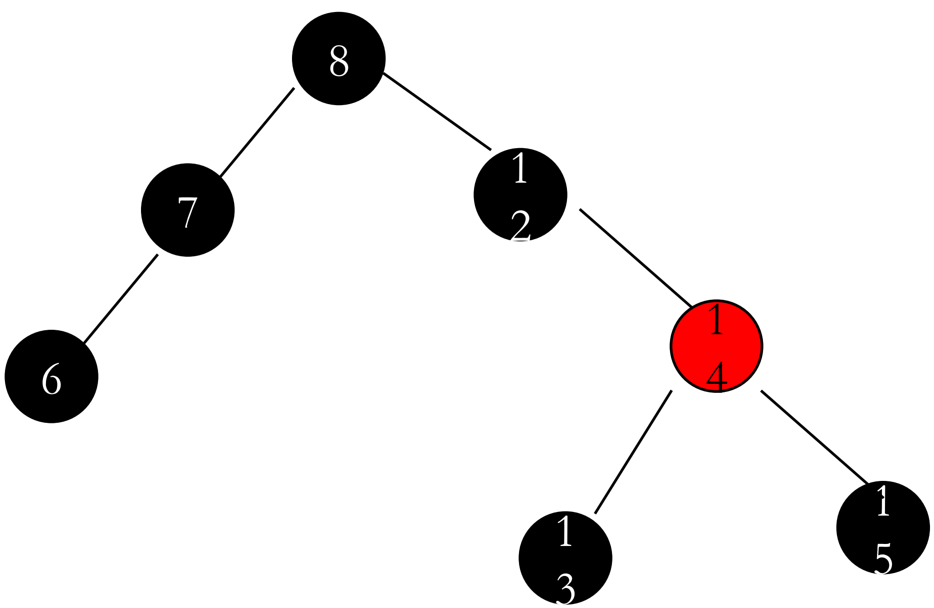


Propiedades de un árbol rojinegro

1. Todo nodo es rojo o negro
2. Toda hoja (nil) es negra
3. La raíz es negra
4. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos son negros
5. Cada camino de un nodo a sus hojas descendientes contienen el mismo número de nodos negros

Árboles rojinegros

Indique si el siguiente árbol es rojinegro

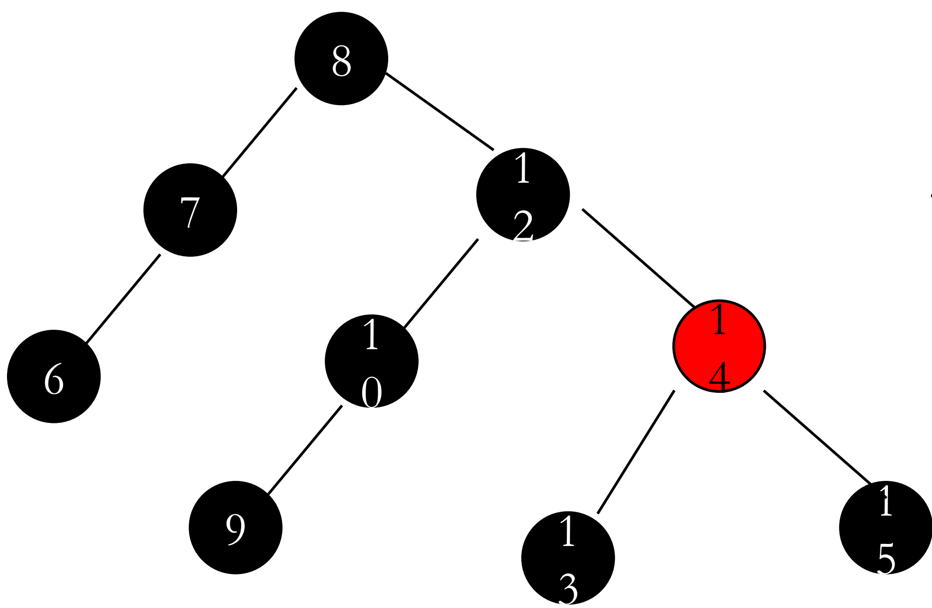


Propiedades de un árbol rojinegro

1. Todo nodo es rojo o negro
2. Toda hoja (nil) es negra
3. La raíz es negra
4. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos son negros
5. Cada camino de un nodo a sus hojas descendientes contienen el mismo número de nodos negros

Árboles rojinegros

Indique si el siguiente árbol es rojinegro



Propiedades de un árbol rojinegro

1. Todo nodo es rojo o negro
2. Toda hoja (nil) es negra
3. La raíz es negra
4. Si un nodo es rojo, entonces sus hijos son negros
5. Cada camino de un nodo a sus hojas descendientes contienen el mismo número de nodos negros

Árboles rojinegros

- Dibuje el árbol rojinegro completo de altura 3, dadas las llaves {1,2, …, 15}

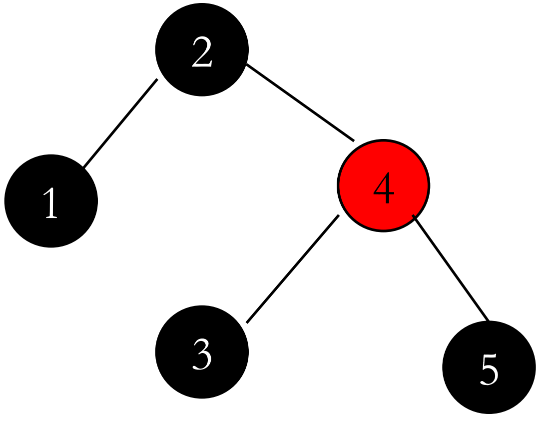
- Suponga que la raíz de un árbol rojinegro es de color rojo, Si se cambia a color negro, el árbol será rojinegro?

Árboles rojinegros

Black-height (bh)

La altura negra de un nodo x, bh(x), es el número de nodos negros en cualquier camino desde el nodo x (no incluido) hasta una hoja

Una árbol rojinegro con n nodos internos tiene altura, a lo más, de 2lg(n+1)



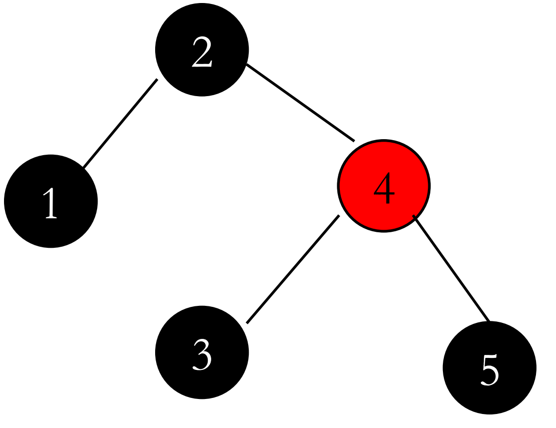
Árboles rojinegros

Black-height (bh)

La altura negra de un nodo x, bh(x), es el número de nodos negros en cualquier camino desde el nodo x (no incluido) hasta una hoja

Una árbol rojinegro con n nodos internos tiene altura, a lo más, de 2lg(n+1)

Las operaciones SEARCH, MINIMUM, MAXIMUN, SUCCESSOR, INSERT Y DELETE se pueden realizar en tiempo O(h), esto es, en el caso de árboles rojinegros, O(lgn)



Árboles rojinegros

Acerca de INSERT y DELETE

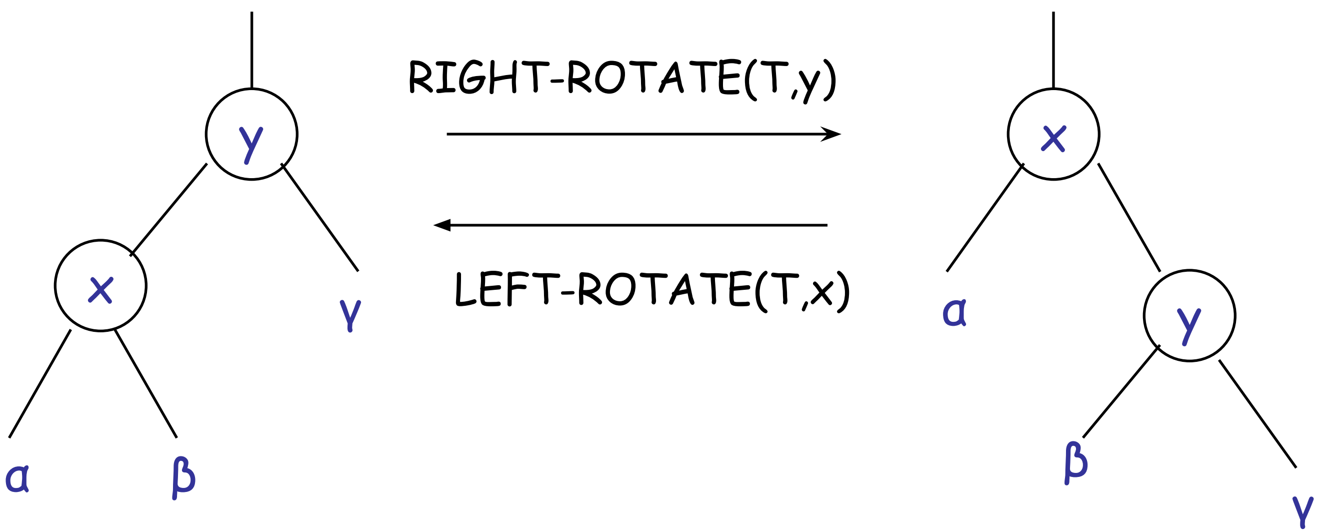
Si se utilizan los procedimientos definidos para los árboles de búsqueda binario se podría violar alguna de las reglas de los árboles rojinegros

Es necesario definir una operación adicional para rotar los nodos

Árboles rojinegros

Rotaciones

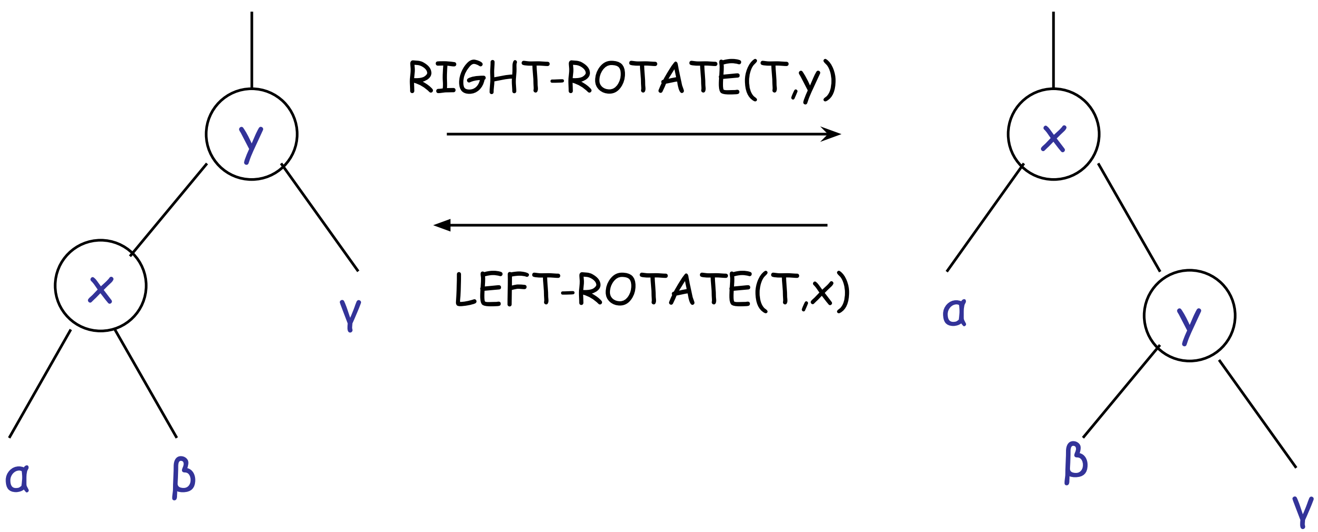
Existen dos procedimientos, uno para rotar a la izquierda y otro a la derecha



Árboles rojinegros

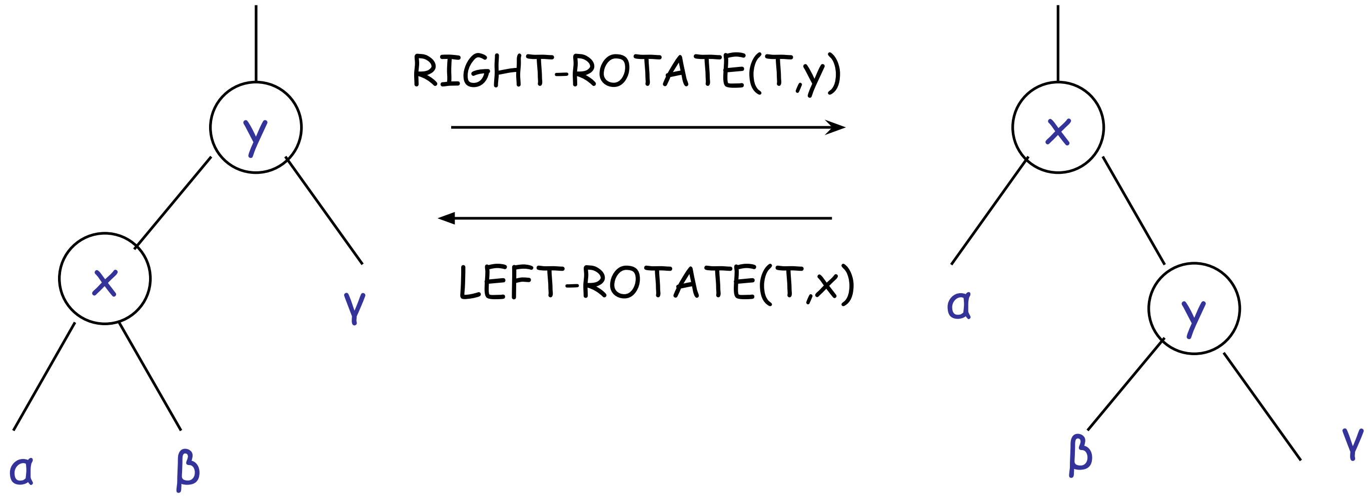
Rotaciones

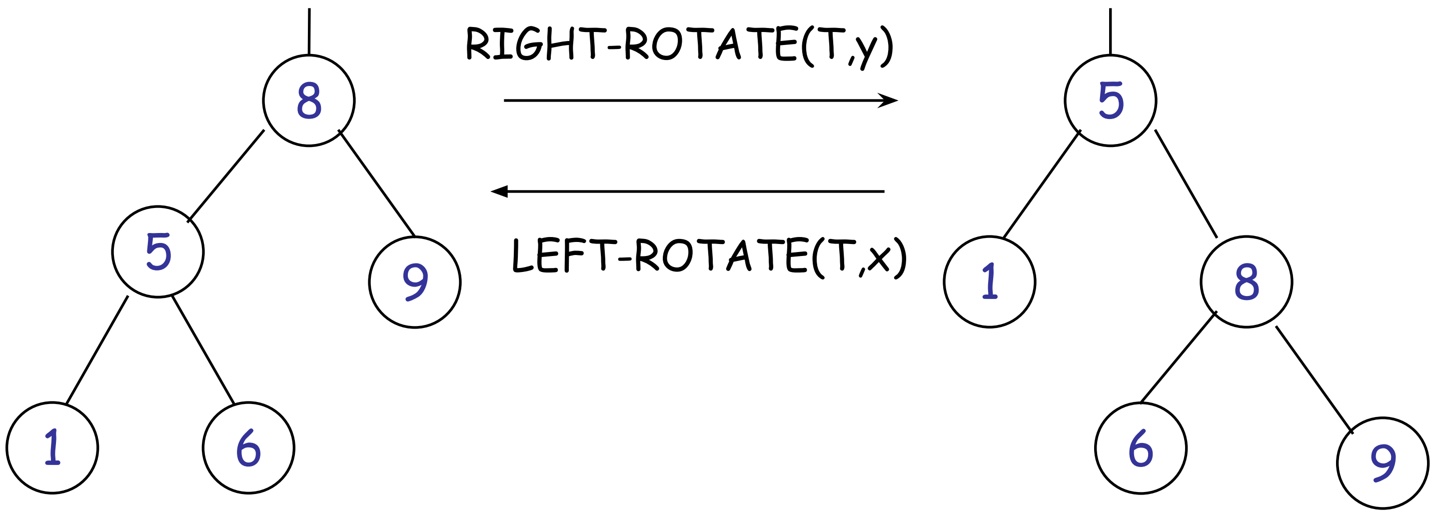
Existen dos procedimientos, uno para rotar a la izquierda y otro a la derecha



Con la rotación se preserva el orden del árbol de búsqueda binaria

Árboles rojinegros

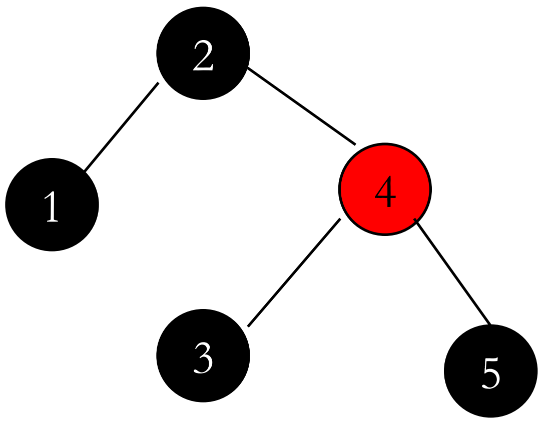




Con la rotación se preserva el orden del árbol de búsqueda binaria

Árboles rojinegros

Indique el resultado de LEFT-ROTATE(T, 4)



Árboles rojinegros

```
LEFT-ROTATE(T, x)
  y←right[x]
  right[x]←left[y]
  p[left[y]]←x
  p[y]←p[x]
  if p[x]=nil
     then root[T]←y
     else if x=left[p[x]]
       then left[p[x]]←y
       else right[p[x]]←y
 left[y]←x
 p[x]←y
```

Se asume que right[x]≠nil

Árboles rojinegros

```
LEFT-ROTATE(T, x)
  y←right[x]
  right[x]←left[y]
  p[left[y]]←x
  p[y]←p[x]
  if p[x]=nil
     then root[T]←y
     else if x=left[p[x]]
       then left[p[x]]←y
       else right[p[x]]←y
 left[y]←x
 p[x]←y
```

¿Cuál es la complejidad del algoritmo?

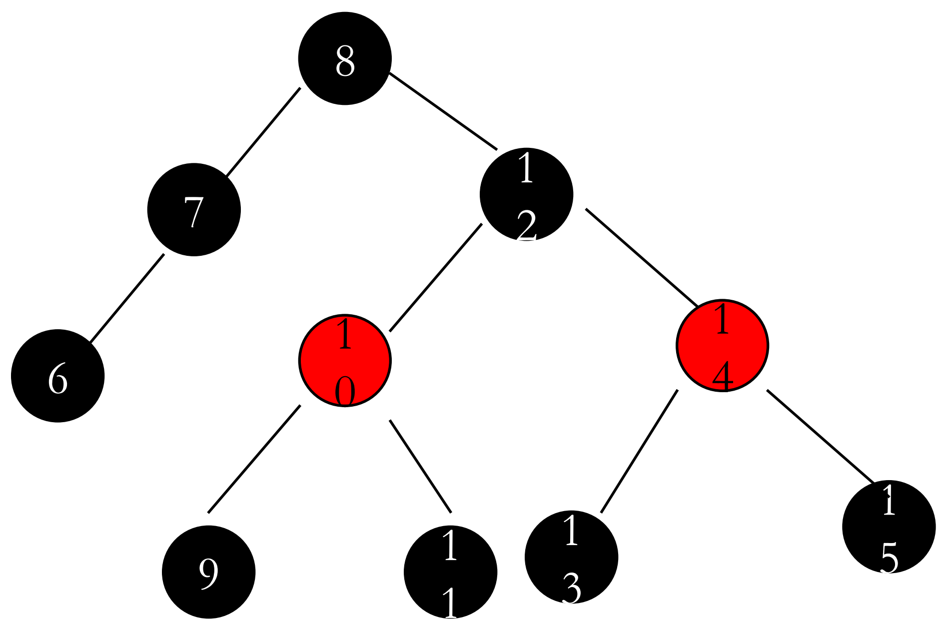
$O(1)$

Árboles rojinegros

```
LEFT-ROTATE(T, x)
  y←right[x]
  right[x]←left[y]
  p[left[y]]←x
  p[y]←p[x]
  if p[x]=nil
     then root[T]←y
     else if x=left[p[x]]
        then left[p[x]]←y
        else right[p[x]]←y
  left[y]←x
  p[x]←y
```

Siga el algoritmo

LEFT-ROTATE(T, 12)

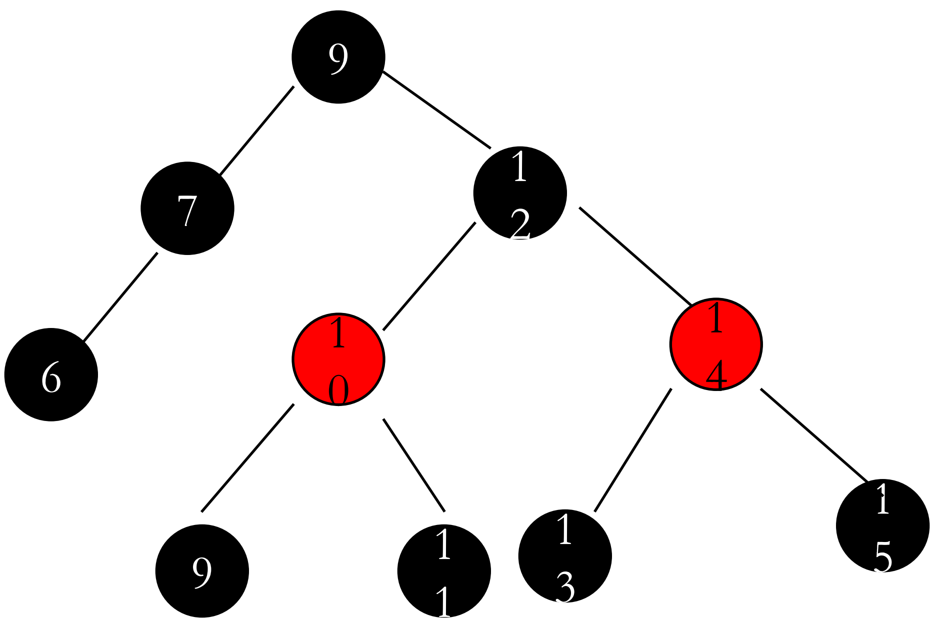


Árboles rojinegros

Insertar un nodo en el árbol

Se usa el procedimiento TREE-INSERT y se colorea x de rojo

Luego se modifica el árbol recoloreando nodos y haciendo rotaciones



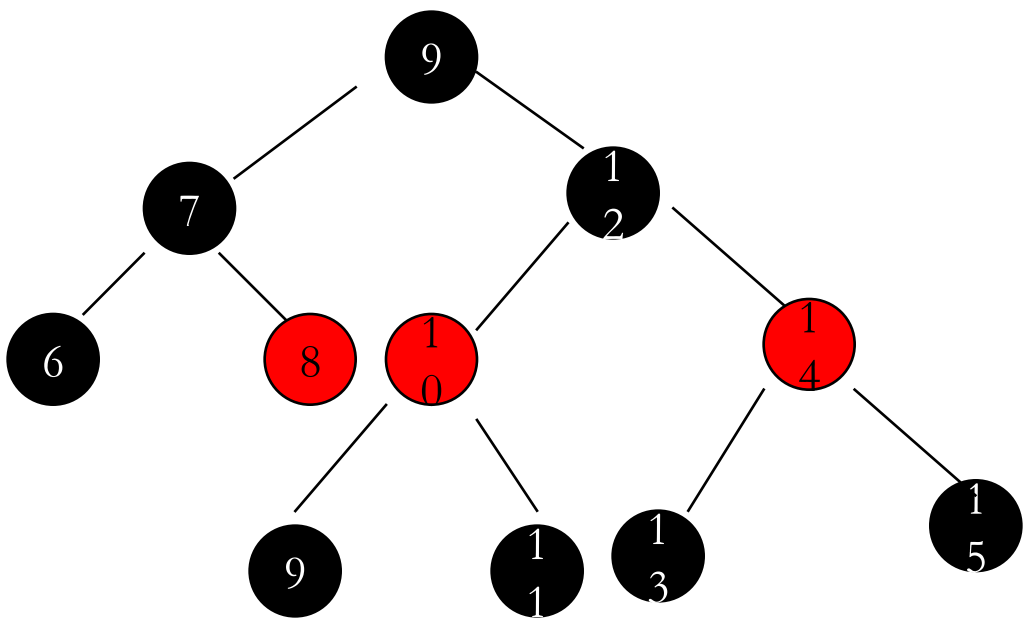
Qué pasa si se inserta el nodo con llave 8

Árboles rojinegros

Insertar un nodo en el árbol

Se usa el procedimiento TREE-INSERT y se colorea x de rojo

Luego se modifica el árbol recoloreando nodos y haciendo rotaciones



Qué pasa si se inserta el nodo con llave 8

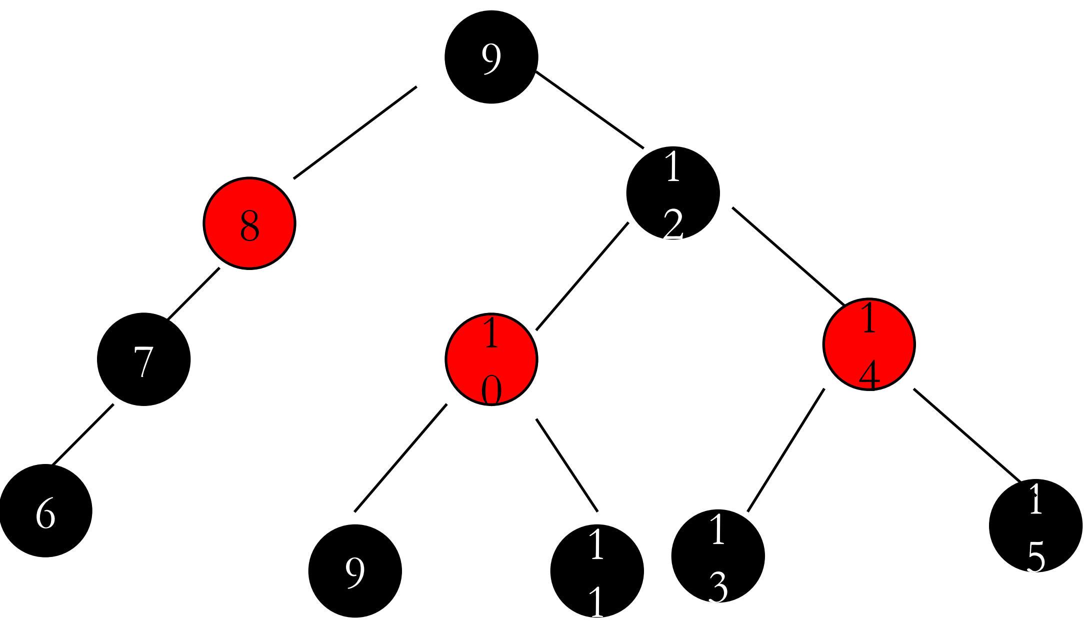
8 no puede ser rojo porque no tienes hijos negros

Árboles rojinegros

Insertar un nodo en el árbol

Se usa el procedimiento TREE-INSERT y se colorea x de rojo

Luego se modifica el árbol recoloreando nodos y haciendo rotaciones



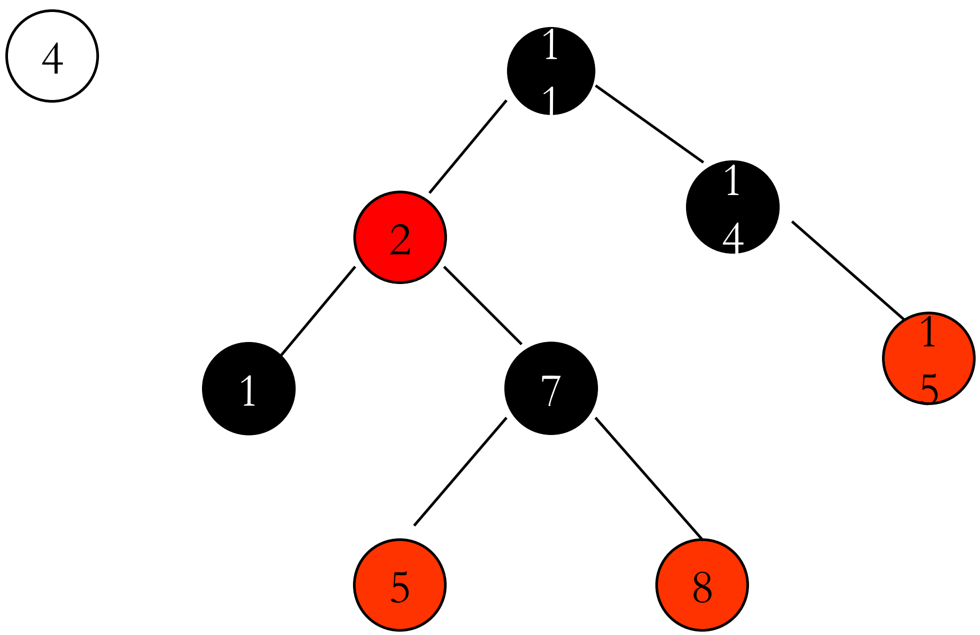
Qué pasa si se inserta el nodo con llave 8

Rotación a la izquierda, aun no es rojinegro …

```
RB-INSERT(T, x)
 TREE-INSERT(T,x)
 color[z]←RED
  while x≠root[T] and color[p[x]]=RED
     do if p[x]=left[p[p[x]]]
        then y←right[p[p[z]]]
               if color[y]=RED
                      then color[p[x]]←BLACK          #Caso1
                            color[y]←BLACK             #Caso1
                            color[p[p[x]]]←RED         #Caso1
                            x←p[p[x]]             #Caso1
                      else if x=right[p[x]]
                              then  x←p[x]             #Caso2
                            LEFT-ROTATE(T,x)           #Caso2
                           color[p[x]]←BLACK           #Caso3
                          color[p[p[x]]←RED            #Caso3
                          RIGHT-ROTATE(T,p[p[x]])          #Caso3
         else procedimiento simétrico cambiando “right” pot “left”
 color[root[T]]←BLACK
```

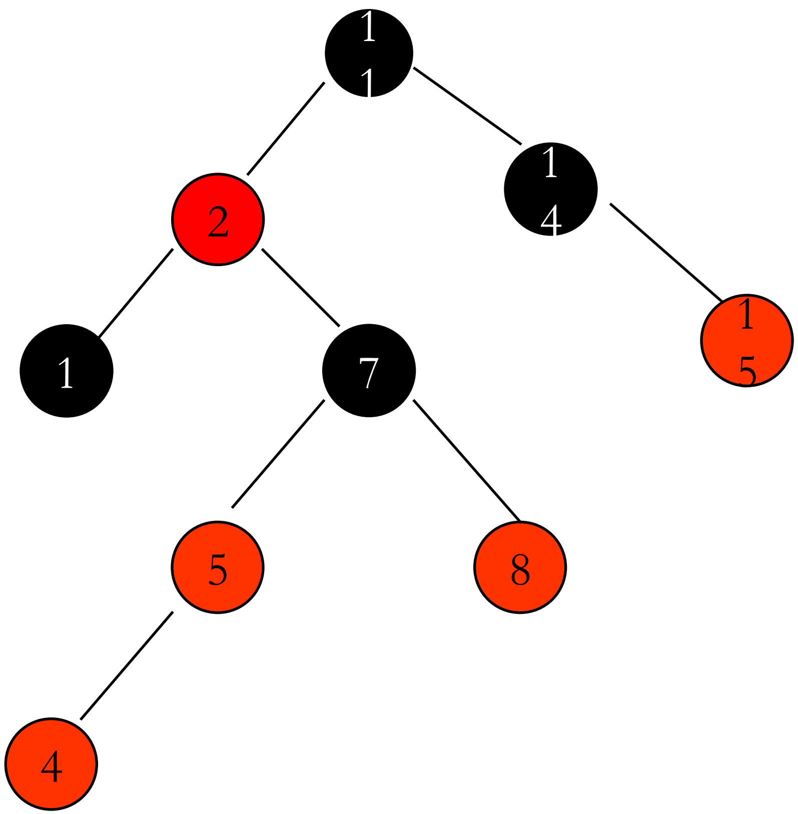
Árboles rojinegros

Dado el árbol T, se desea insertar x, key[x]=4



Árboles rojinegros

Dado el árbol T, se desea insertar x, key[x]=4

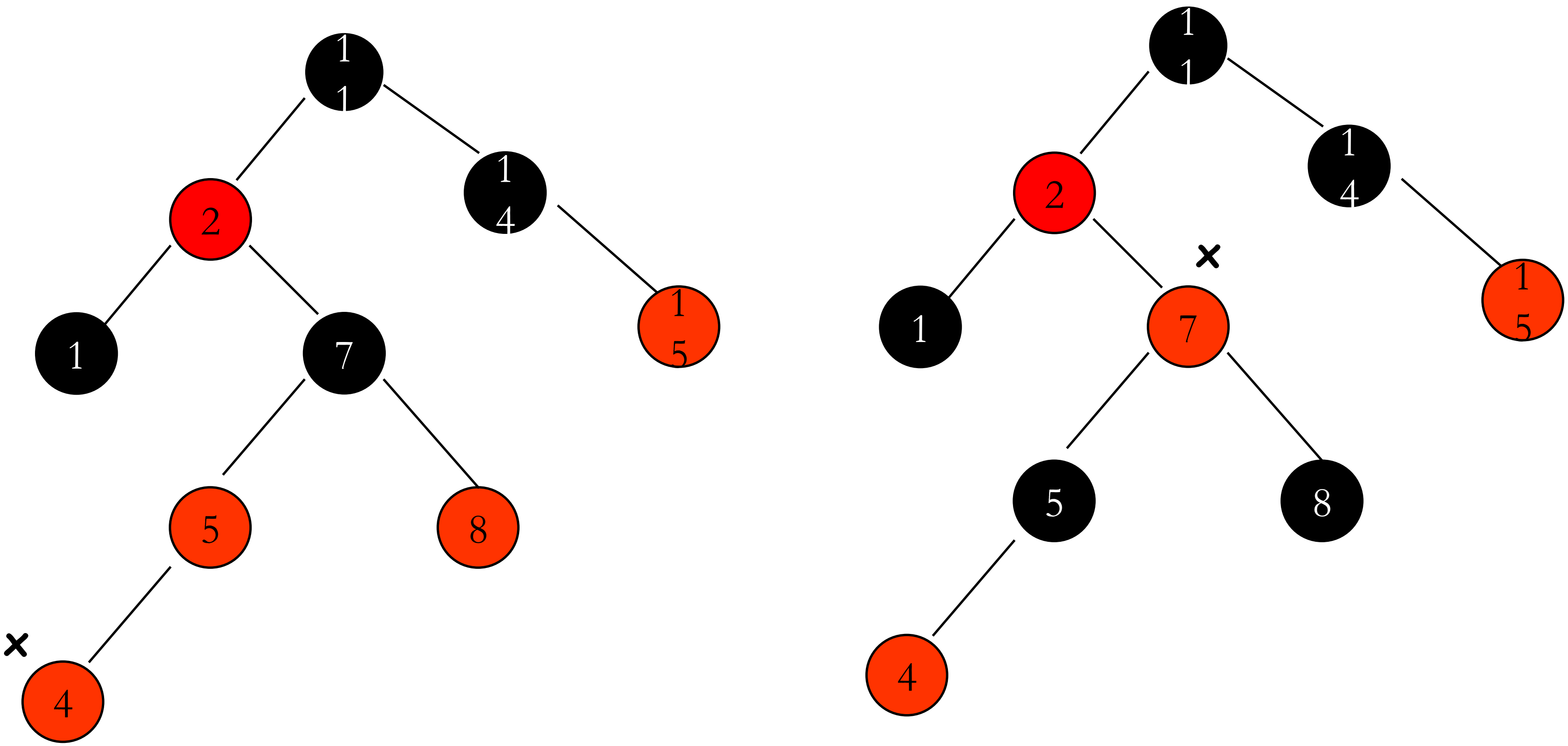


Se inserta y se colorea de rojo

El árbol resultante no es rojinegro

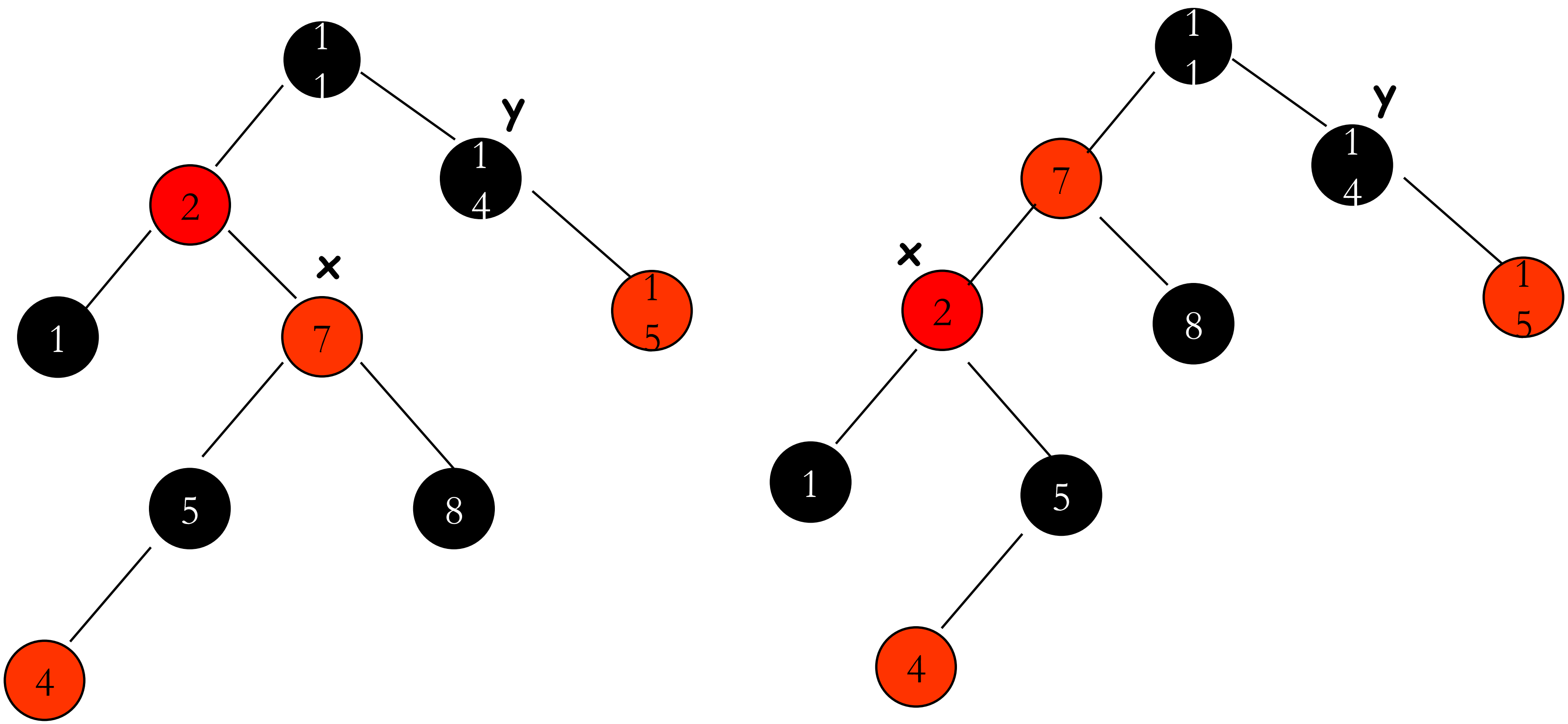
Árboles rojinegros

Caso 1: El tío de x es rojo, se pintan de negro padre y tío de x, el abuelo de x queda entonces de rojo



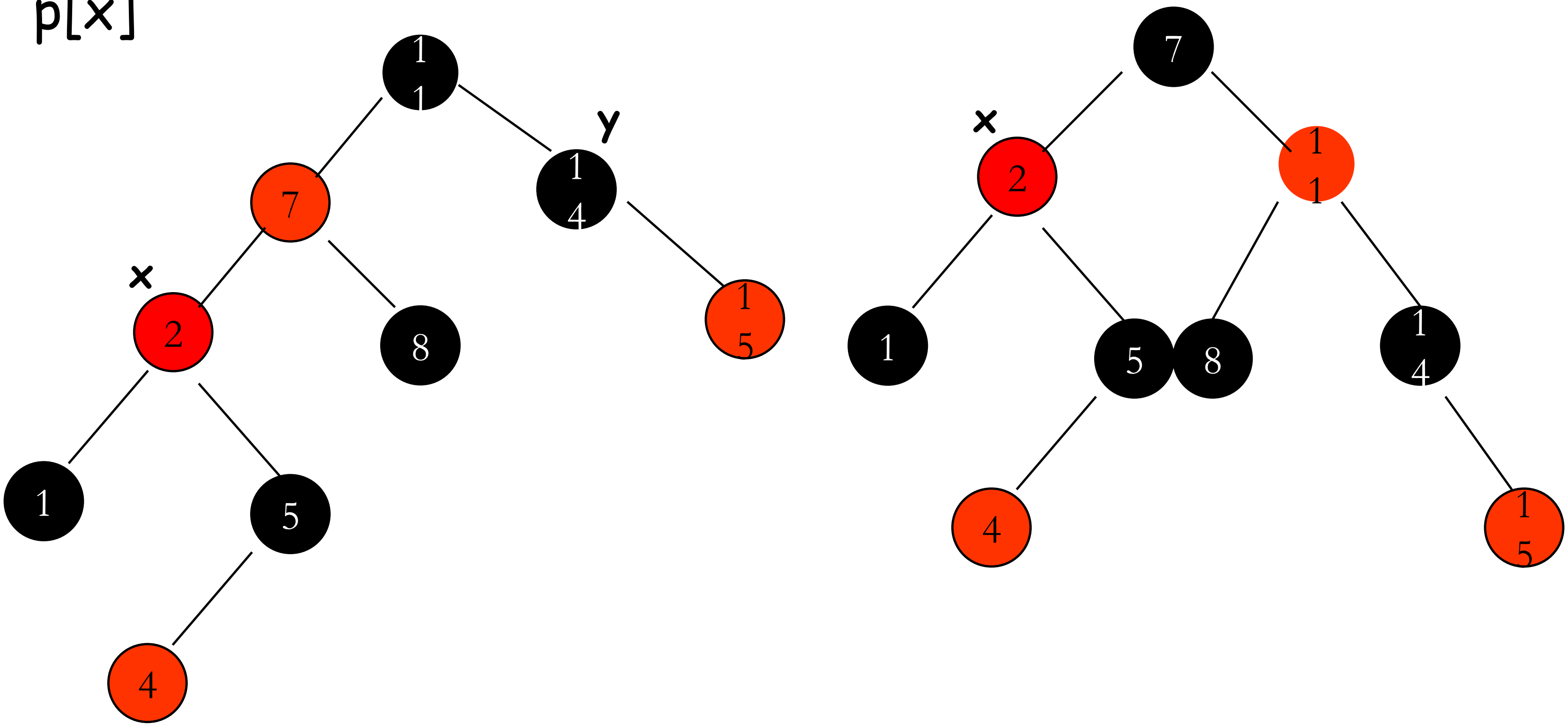
Árboles rojinegros

Caso 2: El tío de x, y, es ahora negro. Se rota a la izquierda p[x]



Árboles rojinegros

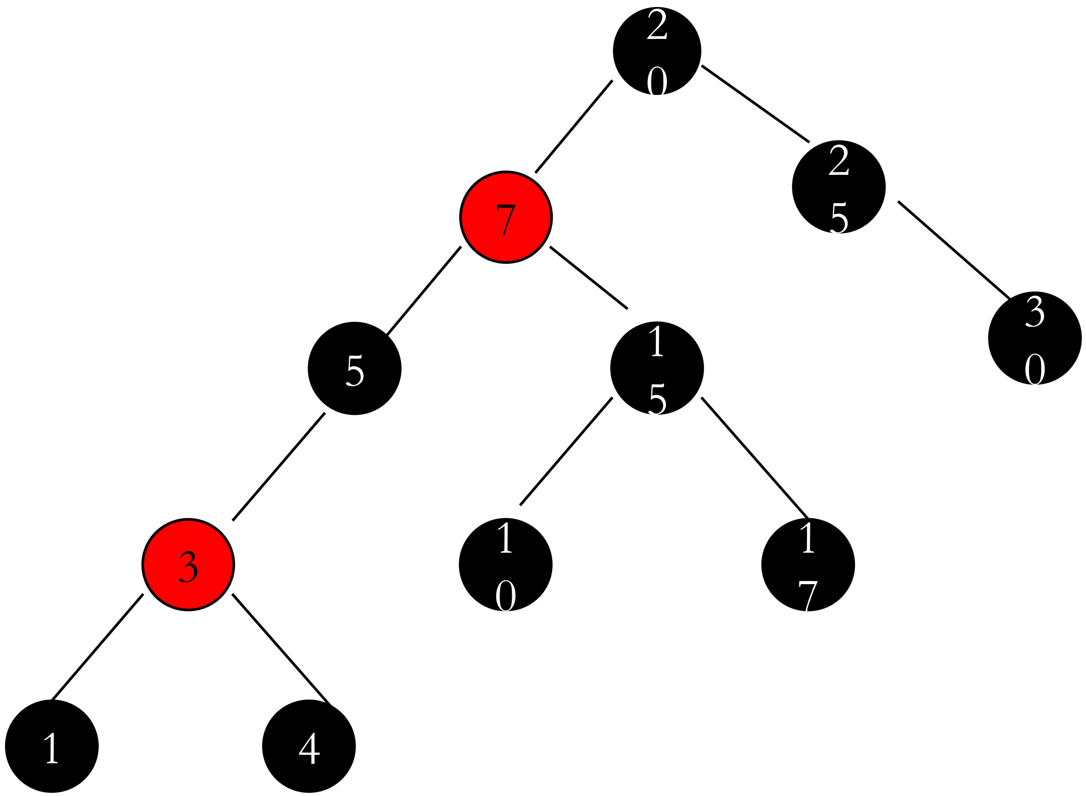
Caso 3: x(rojo) es el hijo izquierdo de un padre rojo. Se cambian los colores de p[x] y p[p[x]]. Se rota a la derecha p[x]



```
RB-INSERT(T, x)
 TREE-INSERT(T,x)
 color[z]←RED
  while x≠root[T] and color[p[x]]=RED
     do if p[x]=left[p[p[x]]]
        then y←right[p[p[z]]]
             if color[y]=RED
                  then color[p[x]]←BLACK          #Caso1
                       color[y]←BLACK             #Caso1
                       color[p[p[x]]]←RED         #Caso1
                       x←p[p[x]]          #Caso1
                  else if x=right[p[x]]
                         then  x←p[x]             #Caso2
                       LEFT-ROTATE(T,x)           #Caso2
                       color[p[x]]←BLACK          #Caso3
                      color[p[p[x]]←RED           #Caso3
                      RIGHT-ROTATE(T,p[p[x]])          #Caso3
         else procedimiento simétrico cambiando "right" pot "left"
 color[root[T]]←BLACK
```

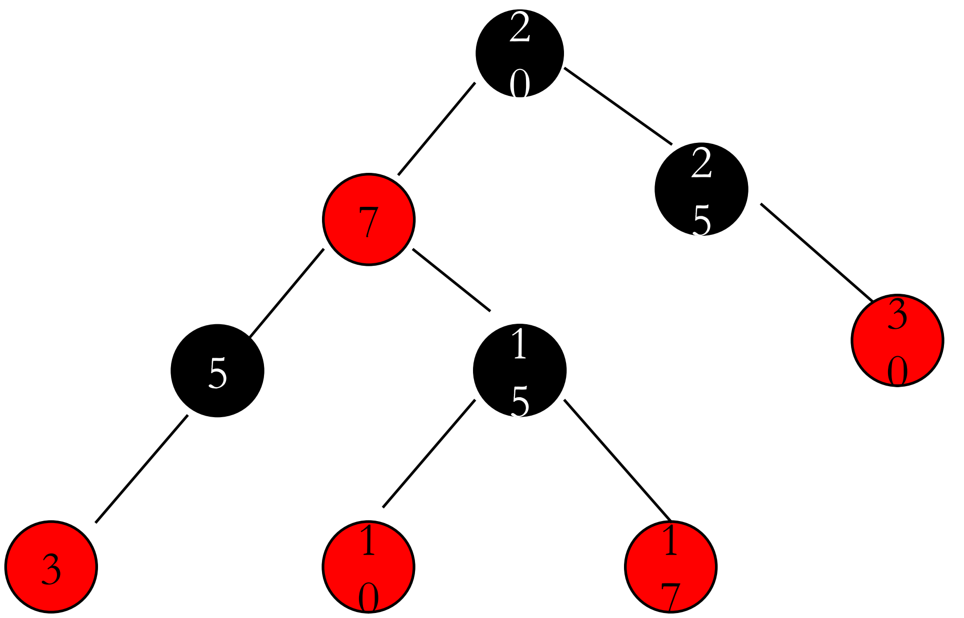
Árboles rojinegros

Siga el algoritmo RB-INSERT(T, x), donde key[x]=11



Árboles rojinegros

Siga el algoritmo RB-INSERT(T, x), key[x]=12



Árboles rojinegros

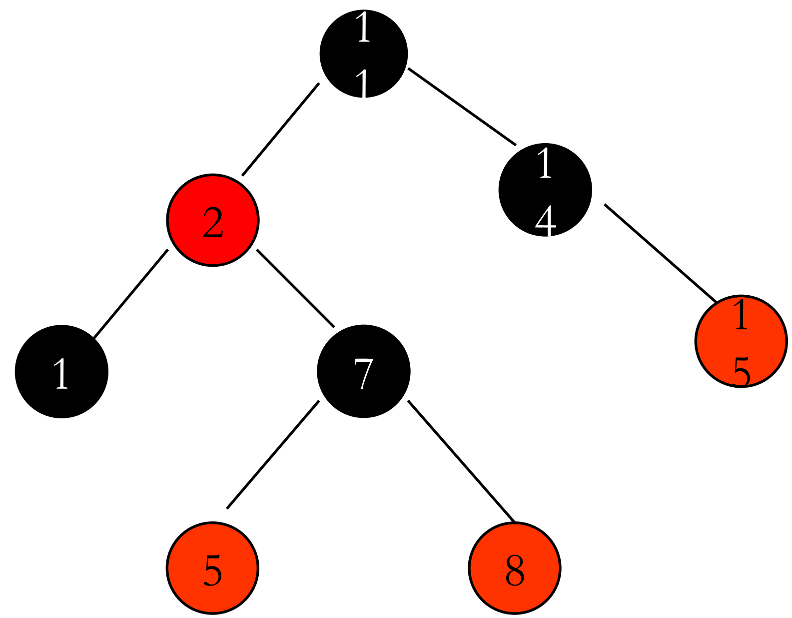
Eliminación

Es una modificación de TREE-DELETE:

- Todas las referencias a nil se reemplazan por un nodo centinela nil[T]. De esta forma, un nodo nil tiene un puntero a su padre

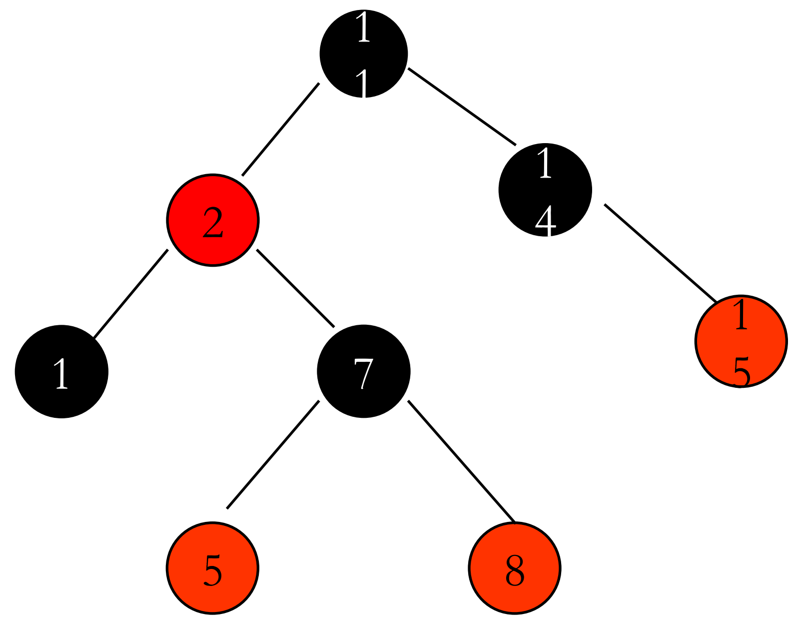
- Se debe hacer un llamado al procedimiento TREE-DELETE-FIXUP para cumplir con las condiciones de os árboles rojinegros

```
RB-DELETE(T, z)
if left[z]=nil or right[z]=nil[T]
     then y←z
     else y←TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y]≠nil[T]
    then x←left[y]
    else x←right[y]
p[x]←p[y]
if p[y]=nil[T]
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
      then left[p[y]]←x
      else right[p[y]]←x
if y≠z
   then key[z]←key[y]
if color[y]=BLACK
   then RB-DELETE-FIXUP(T,x)
return y
```



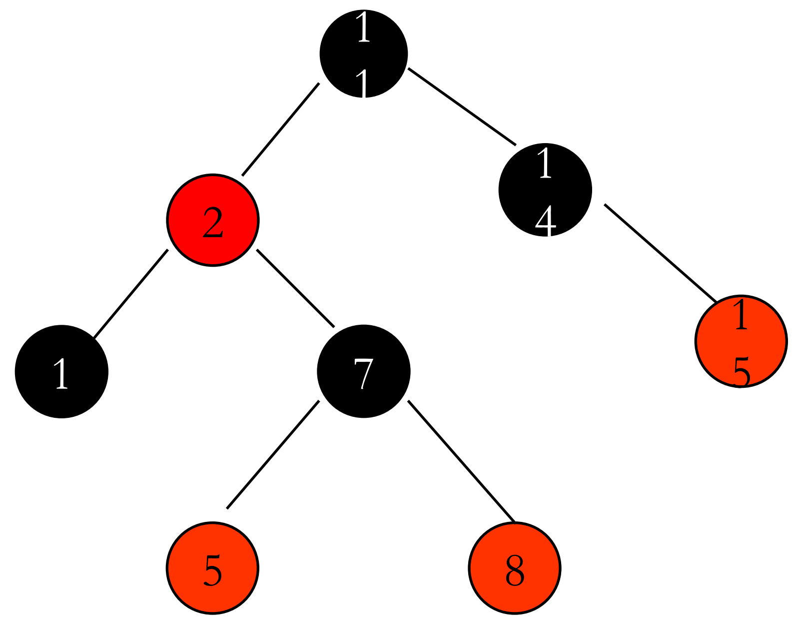
RB-DELETE(T, z)

```
if left[z]=nil or right[z]=nil[T]
    then y←z
    else y←TREE-SUCCESSOR(z)
if left[y]≠nil[T]
   then x←left[y]
   else x←right[y]
p[x]←p[y]
if p[y]=nil[T]
   then root[T]←x
   else if y=left[p[y]]
     then left[p[y]]←x
     else right[p[y]]←x
if y≠z
  then key[z]←key[y]
if color[y]=BLACK
  then RB-DELETE-FIXUP(T,x)
return y
```



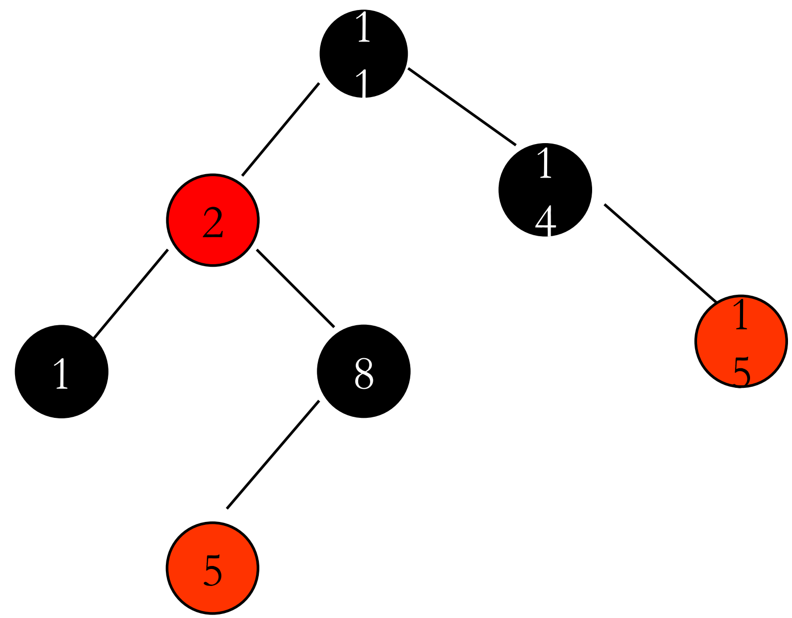
RB-DELETE(T,z), donde key[z]=5

```
RB-DELETE(T, z)
 if left[z]=nil or right[z]=nil[T]
      then y←z
      else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil[T]
     then x←left[y]
     else x←right[y]
 p[x]←p[y]
 if p[y]=nil[T]
     then root[T]←x
     else if y=left[p[y]]
       then left[p[y]]←x
       else right[p[y]]←x
 if y≠z
    then key[z]←key[y]
 if color[y]=BLACK
    then RB-DELETE-FIXUP(T,x)
 return y
```



RB-DELETE(T,z), donde key[z]=7

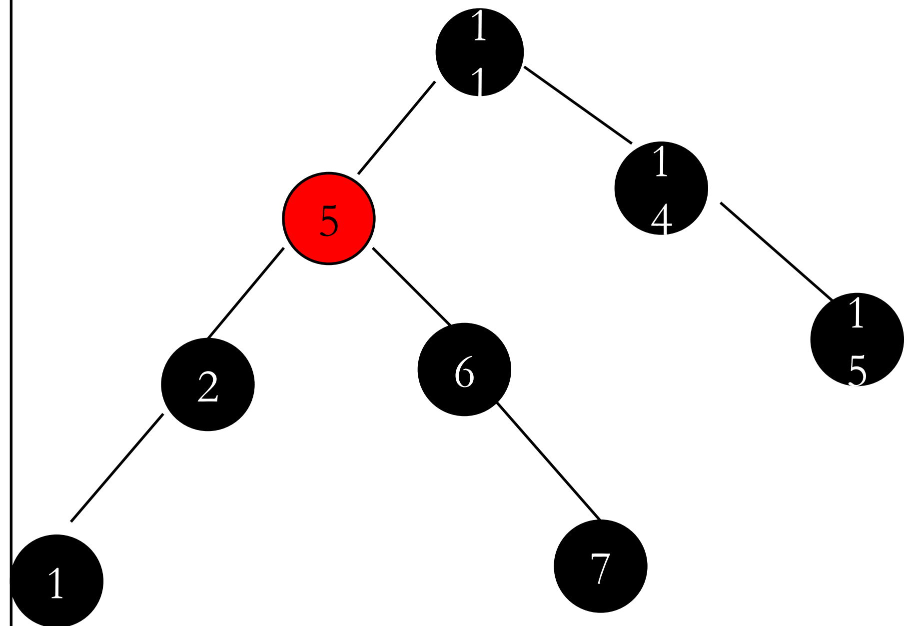
```
RB-DELETE(T, z)
 if left[z]=nil or right[z]=nil[T]
      then y←z
      else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil[T]
     then x←left[y]
     else x←right[y]
 p[x]←p[y]
 if p[y]=nil[T]
     then root[T]←x
     else if y=left[p[y]]
       then left[p[y]]←x
       else right[p[y]]←x
 if y≠z
    then key[z]←key[y]
 if color[y]=BLACK
    then RB-DELETE-FIXUP(T,x)
 return y
```



RB-DELETE(T,z), donde key[z]=7

Se cambian las llaves entre 7 y 8, y se deja de color negro el nodo (que ahora tiene el valor 8)

```
RB-DELETE(T, z)
 if left[z]=nil or right[z]=nil[T]
     then y←z
     else y←TREE-SUCCESSOR(z)
 if left[y]≠nil[T]
    then x←left[y]
    else x←right[y]
 p[x]←p[y]
 if p[y]=nil[T]
    then root[T]←x
    else if y=left[p[y]]
      then left[p[y]]←x
      else right[p[y]]←x
 if y≠z
   then key[z]←key[y]
 if color[y]=BLACK
   then RB-DELETE-FIXUP(T,x)
 return y
```



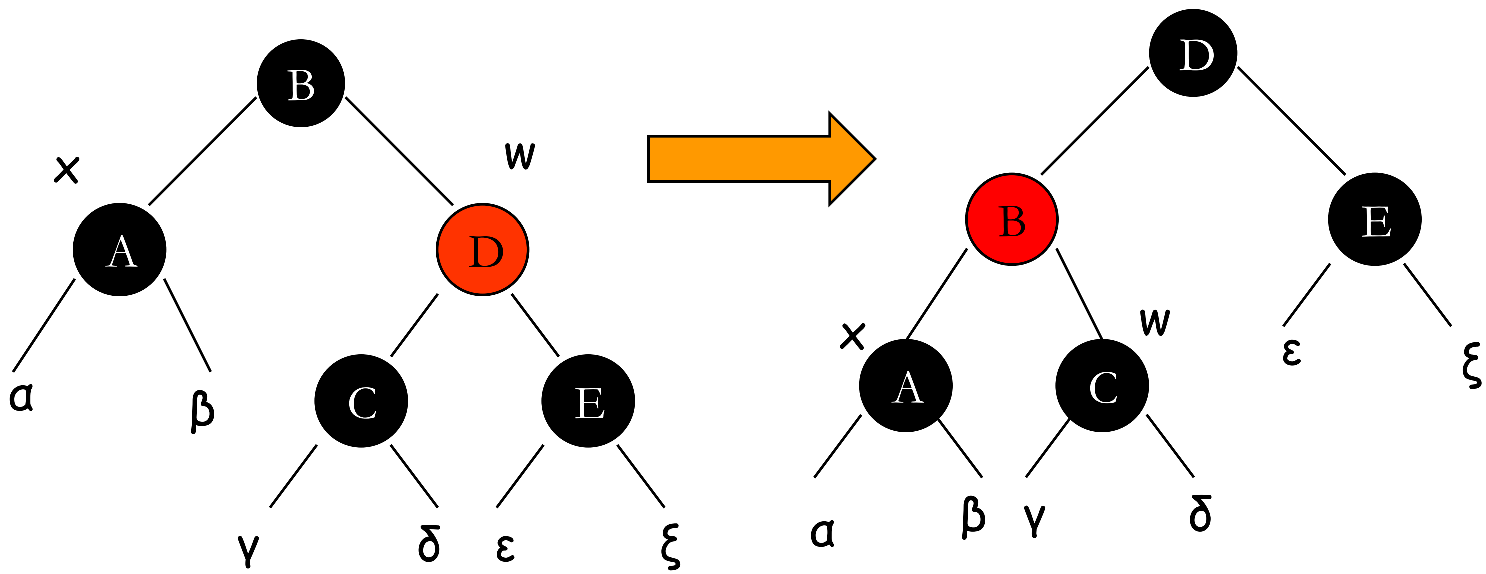
RB-DELETE(T,z), donde key[z]=1

Es necesario un ajuste

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)
 while x≠root[T] and color[x]=BLACK
    do if x=left[p[x]]
           then w←right[p[x]]
                   if color[w]=RED
                  then color[w]←BLACK
                    color[p[x]]←RED
                    LEFT-ROTATE(T, p[x])
                    w←right[p[x]]
               if color[left[w]]=BLACK and color[right[w]]=BLACK
                  then color[w]←RED
                    x←p[x]
                       else if color[right[w]]=BLACK
                        then color[left[w]]←BLACK
                                color[w]←RED
                                RIGHT-ROTATE(T, w)
                                w←right[p[x]]
                    color[w]←color[p[x]]
                    color[p[x]]←BLACK
                    color[right[w]]←BLACK
                    LEFT-ROTATE(T, p[x])
                    x←root[T]
          else #código simétrico intercambiando right y left
 color[x]←BLACK
```

Árboles rojinegros

Caso 1:

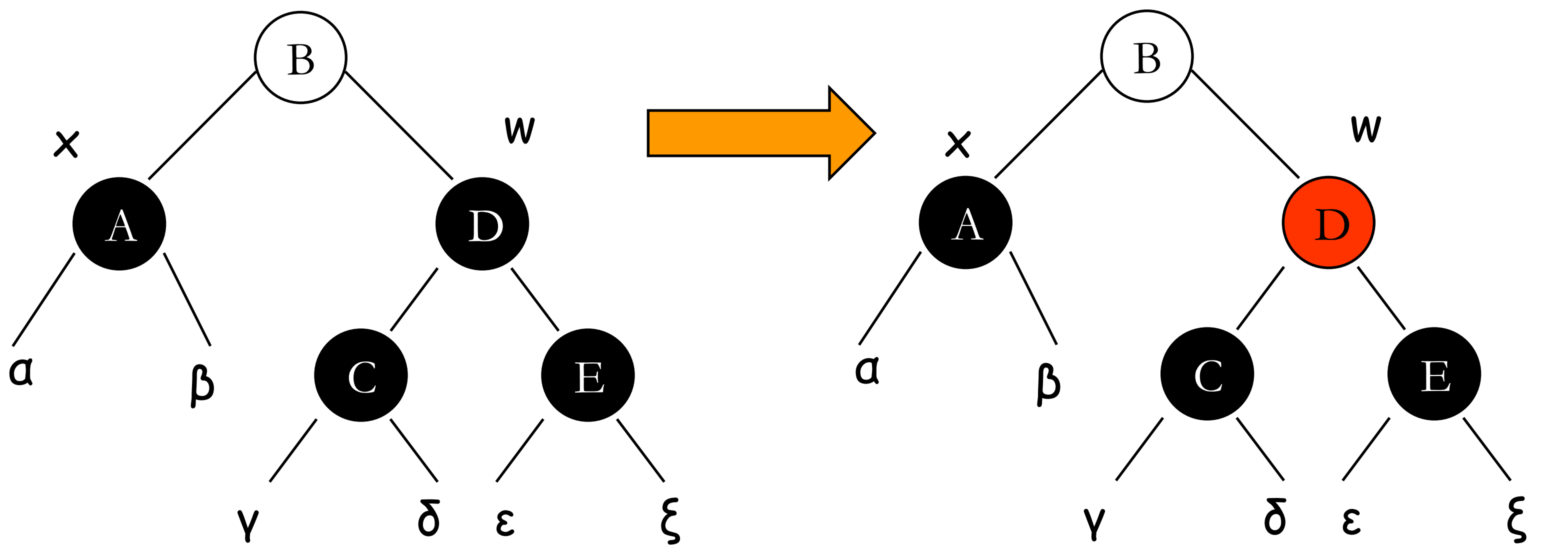


Se cambian los colores de B y D, y se realiza rotación a la izquierda

Este cambio genera uno de los 3 casos siguientes

Árboles rojinegros

Caso 2:

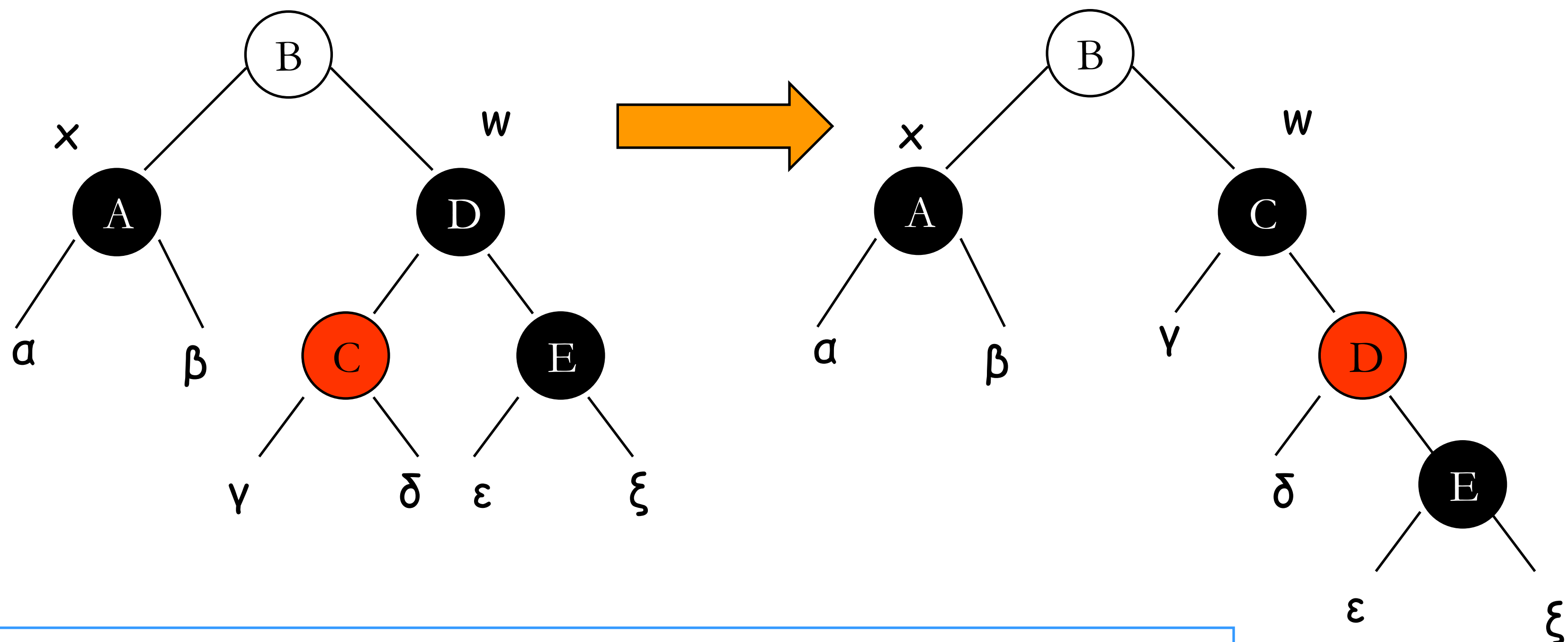


La estrategia del algoritmo consiste en considerar el nodo x como si tuviera un nodo extra, aumenta el conteo de negro en 2

En la rama de A, como se eliminó un nodo, el conteo de nodos negros se debe disminuir al lado derecho de B, para esto, se colorea de rojo el nodo con dos hijos negros

Árboles rojinegros

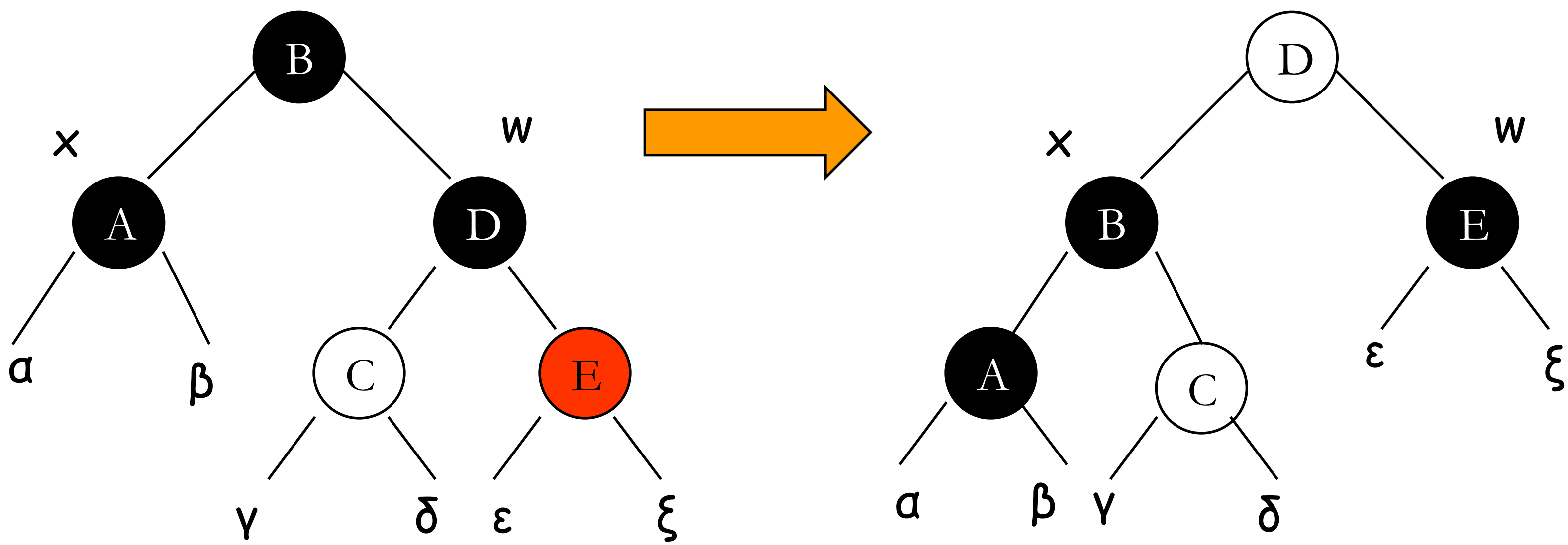
Caso 3:



Se ajusta el conteo creando una rama con hb=2, antes, la rama B-D-C no tenía conteo 2

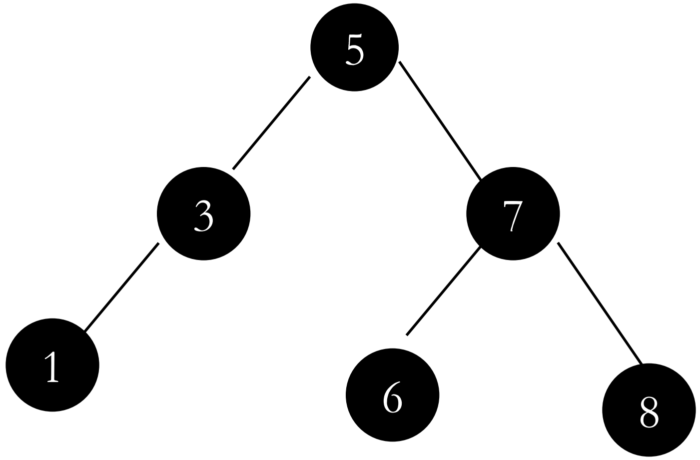
Árboles rojinegros

Caso 4:



Para completar el conteo por la rama de A, se rota a la izquierda B, el nodo E se cambia de color

```
RB-DELETE-FIXUP(T, x)
 while x≠root[T] and color[x]=BLACK
    do if x=left[p[x]]
          then w←right[p[x]]
               if color[w]=RED
               then color[w]←BLACK
                    color[p[x]]←RED
                    LEFT-ROTATE(T, p[x])
                    w←right[p[x]]
             if color[left[w]]=BLACK and color[right[w]]=BLACK
               then color[w]←RED
                    x←p[x]
                      else if color[right[w]]=BLACK
                       then color[left[w]]←BLACK
                               color[w]←RED
                               RIGHT-ROTATE(T, w)
                               w←right[p[x]]
                    color[w]←color[p[x]]
                    color[p[x]]←BLACK
                    color[right[w]]←BLACK
                    LEFT-ROTATE(T, p[x])
                    x←root[T]
         else #código simétrico intercambiando right y left
 color[x]←BLACK
```

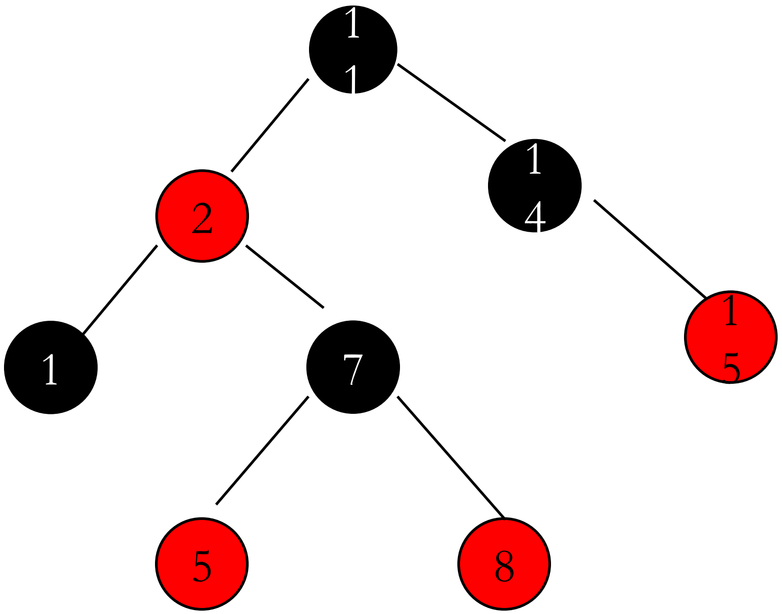


Siga el algoritmo
RB-DELETE(T, 1)

Árboles rojinegros

Eliminación

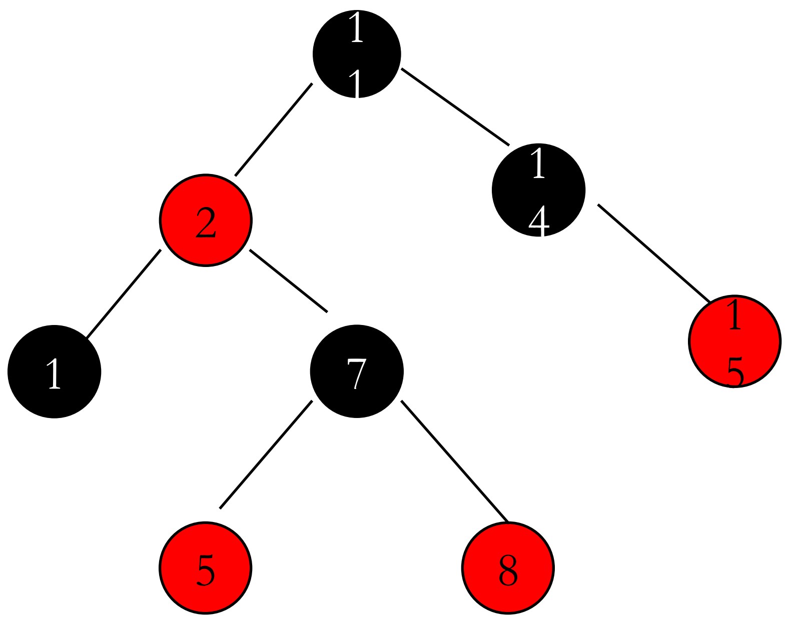
Dado T, siga el algoritmo RB-DELETE(T, 7)



Árboles rojinegros

Eliminación

Dado T, siga el algoritmo RB-DELETE(T, 7)



Árboles rojinegros

Eliminación

Dado T, siga el algoritmo RB-DELETE(T, 4)