Matemáticas discretas II: Teoría de Grafos II

Universidad del Valle
EISC

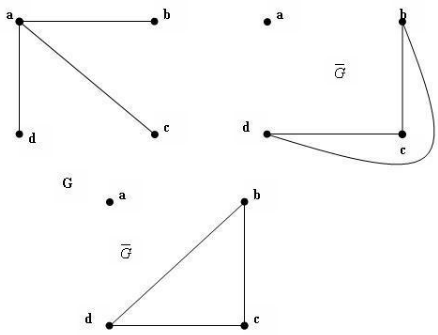
Septiembre 2022

Contenido

Grafos complementarios

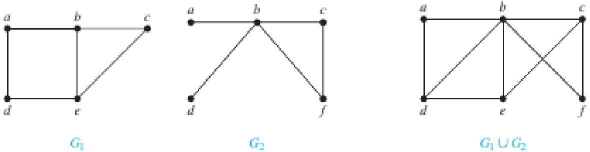
Grafo complementario

Sea G un grafo simple no dirigido sin bucles con n vértices. El complementario de G, se denota como $\overline{G}$. $\overline{G}$ de un grafo simple G tiene los mismos vértices que G. Dos vértices son adyacentes en $\overline{G}$ **sii** estos dos vértices no son adyacentes en G.
Si $G = K_n$, $\overline{G}$ es un grafo con n vértices y ninguna arista. A este grafo se le llama **grafo nulo**.



Unión de grafos

La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple con el conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ y el conjunto de aristas $E_1 \cup E_2$. La unión de G_1 y G_2 es denotada por $G_1 \cup G_2$.



Grafos complementarios y K_n

Teorema

Si G es un grafo simple con n vértices, entonces la unión de G y $\overline{G}$ es K_n

Dem// La unión de G y $\overline{G}$ contienen una arista entre cada par de n vértices. Por lo tanto, esta unión es K_n.

Ejercicio

Si la secuencia de grado de un grafo simple G es $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ¿Cuál es la secuencia de grado de $\overline{G}$?

$$n-1-d_n, n-1-d_{n-1}, \ldots, n-1-d_2, n-1-d_1$$

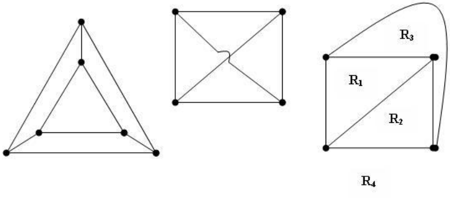
Problema

Si el grafo simple G tiene v vértices y e aristas, ¿Cuántas aristas tiene $\overline{G}$?

Contenido

Grafo plano.

Un grafo (o multigrafo) G es plano si podemos dibujar G en el plano de modo que sus aristas se intersectan sólo en los vértices de G. Este dibujo se conoce como una inmersión (*embedding*)de G.



Al igual que K_4 también K_1, K_2, K_3 son planos a diferencia de K_5 que no lo es.

Teorema

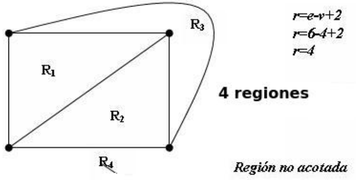
Sea G un grafo simple conexo con e aristas y v vértices. Sea r el número de regiones de una representación plana de G. Entonces, $r = e - v + 2$

Observación

Sea $G = (V, E)$ un grafo plano sin bucles con $\mid V \mid = v$, $\mid E \mid = e > 2$, y r regiones, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$

Ejemplo. El grafo K_4, tiene $\mid V \mid = 4$, $\mid E \mid = 6 > 2$, además cumple con las dos condiciones: (ver grafo)

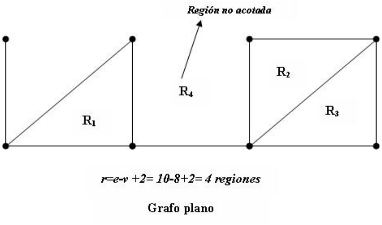
- $3r \leq 12 \rightarrow r \leq 4$
- $e \leq 3(4) - 6, \quad e \leq 6, 6 \leq 6$

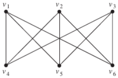


Ejemplo. Sea el grafo K_5, tiene $|\ V\ | = 5$, y $2e = 4 \cdot 5$, $e = 10$ no cumple con la condición:

- $e \leq 3(5) - 6, \quad e \leq 9$, $10 \leq 9$

Ejemplo. Cálculo de las regiones en un grafo planar.



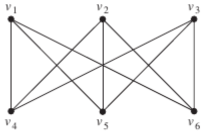


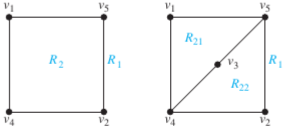
$|V| = 6$ y $|E| = 9$, $e \leq 3(6) - 6$,

$e \leq 12$ **Por lo tanto** $9 \leq 12$

y $r????$

¿Es $K_{3,3}$ plano?





(a) (b)

- Sea v_1, v_4, v_5, v_2 un subgrafo con dos regiones R_1 y R_2 que forman una curva cerrada, entonces, el vértice v_3 estaría en R_1 o en R_2. Cuando v_3 está en R_2 al interior de la curva cerrada, las aristas $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_3, v5\}$ separan a R_2 en dos regiones, R_{21} y R_{22}, sigue siendo plano.
- Entonces no hay manera de colocar el vértice v_6 sin cruzar, si v_6 está en R_1, entonces el lado $\{v_3, v_6\}$ no se puede dibujar sin cruzar. Si v_6 está en R_{21}, entonces $\{v_2, v_6\}$ no se puede ser dibujado sin cruzar. Si v_6 está en R_{22}, entonces $\{v_1, v_6\}$ no puede dibujar sin cruzar.
- De manera similar cuando $v_3 \in R_1$.

Contenido

Representación de grafos

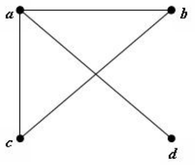
Matriz de Adyacencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$, la matriz de adyacencia es la **matriz booleana** de $n \times n$ tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- hay $n!$ matrices de adyacencia distintas para un grafo de n vértices.
- todos los grafos no dirigidos, incluyendo multigrafos, pseudografos, tienen matrices simétricas

Ejemplo. La matriz de adyacencia de un grafo simple



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

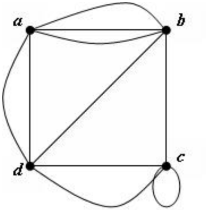
Representación de grafos

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido

La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido con bucles y con aristas paralelas tiene las siguientes características:

- Un bucle en el vértice a_i se representa por medio de un 1 en la posición (i, i) de la matriz.
- Cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana, ya que el elemento de la posición (i, j) es igual al número de aristas asociadas a $\{v_i, v_j\}$

Ejemplo. Matriz de adyacencia de un **pseudografo**.

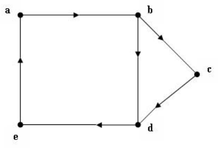


$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

La Matriz de adyacencia de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene 1 en la posición (i, j) si hay arista de v_i a v_j, siendo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido. entonces:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

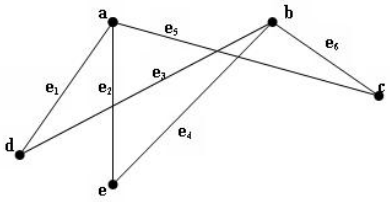


$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido, supongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vértices y $e_1, e_2, \ldots, e_m$ las aristas de G. Entonces, la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y E es la matriz $M = [m_{ij}]$ de $n \times m$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } \{e_j\} \text{ es incidente con } \{v_i\} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Contenido

Teorema

Sea $M_R = (m_{ij})$ *la matriz de adyacencia de un grafo.*

$M_R \bigotimes M_R = M_R^2$

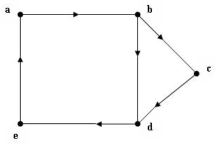
$M_R \bigotimes M_R \bigotimes M_R = M_R^3$

$\vdots$

$$\underbrace{M_R \bigotimes M_R \bigotimes M_R \ldots \bigotimes M_R}_{n} = M_R^n$$

- $\bigotimes$ es el producto booleano.
- 1 en M_R^n en un grafo dirigido significa que se puede ir del nodo i al j recorriendo exactamente n aristas en el grado.

Ejemplo Sea el siguiente grafo y su matriz de adyacencia.

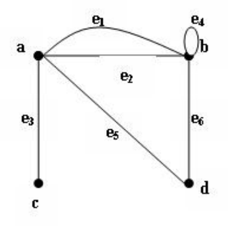


$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M_R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El 1 en $\mathbf{M_R^2}(1,3)$ significa que hay un camino de longitud 2 de a -c: a,b,c.

Ejemplo. Sea el siguiente pseudografo obtener la cuantía de los caminos de longitud 2.



$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M_R^2} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

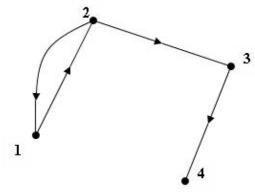
El 6 significa que hay 6 caminos de longitud 2 de a-a:

Matriz de Conectividad

La matriz de conectividad se define como:

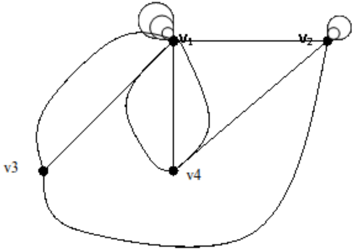
$$M_R^{\infty} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \ldots \vee M_R^n$$

Ejemplo Obtener la matriz de conectividad para el siguiente grafo.



$$\mathbf{M_R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M_R^{\infty}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de Pseudografos



	v1	v2	V3	v4
v1	3	1	2	3
v2	1	2	1	1
v3	2	1	0	0
v4	3	1	0	0

Conectividad

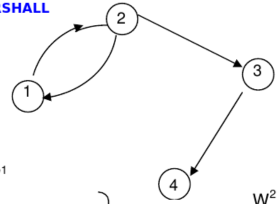
CONECTIVIDAD POR WARSHALL

$W^0 = M_R$

$W^1 = W^0 \vee (W^0_{i1} \wedge W^0_{1j})$ $i,j \geq 1,\ k \leq n$

$W^k = W^{k-1} \vee (W^{k-1}_{ik} \wedge W^{k-1}_{kj})$

$W^n = M_R^{\infty}$



$M_R = W^0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W^4

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

```
SUBROUTINE WARSHALL (M)
FOR K := 1 to N
   FOR I := 1 to N
      FOR J := 1 to N
           M[I,J] := M[I,J] OR M[I,K] AND M[K,J]
END SUBROUTINE;
```

Camino

Es una trayectoria que comienza en un vértice v_0 y termina en un vértice v_n donde se pueden repetir aristas y vértices.Un camino se puede representar como una sucesión de vértices $v_0, v_1 \dots v_{n-1}, v_n$ o como una sucesión de aristas

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2) \dots (v_{n-1}, v_n)$$

Camino simple

Es un camino que NO repite aristas.

Camino cerrado o circuito

Es un camino que comienza y termina en el mismo vértice y puede repetir aristas y vértices.

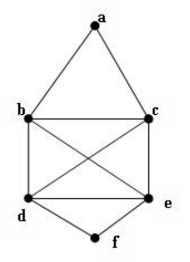
Circuito simple

Es un camino cerrado en el que no se pueden repetir aristas.

Conectividad

Longitud de un camino

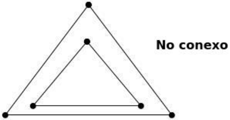
Es el número de aristas que recorre el camino. Un camino de longitud n debe tener $n+1$ vértices. Para el siguiente grafo:



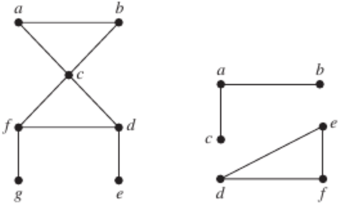
- Un camino simple de longitud 4 que empiece en b: b,a,c,e,f
- Un camino cerrado de longitud 5 que inicie en f: f,d,c,d,e,f
- Un camino de longitud 5 de d-c: d,b,c,b,c,d
- Un circuito simple de longitud 4 que empiece en c: c,b,d,e,c

Grafo conexo

Un grafo $G = (V, E)$ no dirigido es conexo si para cualquiera $a, b \in V$, existe un camino o trayectoria de cualquier longitud.



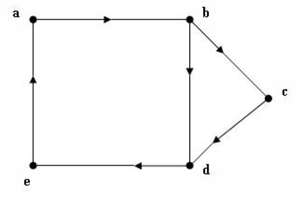
G_1 es conexo y G_2 no es conexo



G_1 G_2

Débilmente conexo

Se dice que un grafo dirigido es *débilmente conexo* si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.



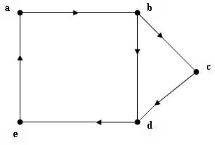
a-b: a,b	**b-a:** b,d,e,a	**a-e:** a,b,d,e
e-a: e,a	**a-c:** a,b,c	**c-a:** c,d,e,a
a-d: a,b,c,d	**d-a:** d,e,a	**c-b:** c,d,b
b-c: b,c		

Por lo tanto, también es débilmente conexo. si obtenemos el grafo no dirigido subyacente encontramos que existe un camino para cualquiera dos vértices.

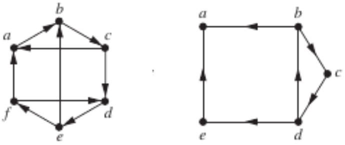
Grafo fuertemente conexo

Conexidad en grafos dirigidos

Se dice que un grafo dirigido es *fuertemente conexo* si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b en el grafo.

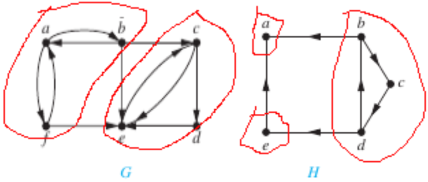


H es débilmente conexo y G es fuertemente conexo



G H

Componentes fuertemente conexos

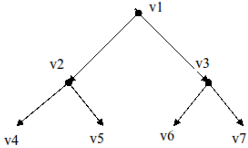


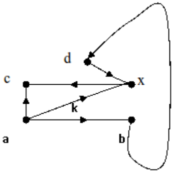
- El grafo H tiene 3 componentes fuertemente conexas; el vértice a y el vértice e por ser subgrafos y el componente que es un subgrafo consistente de los vértices $\{b, c, d\}$
- El grafo G tiene dos componentes fuertemente conexas que son los subgrafos formados por los vértices $\{a, b, f\}$ y $\{c, d, e\}$

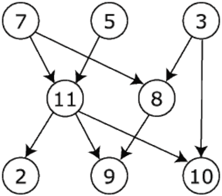
Conectividad

Grafo acíclico dirigido

Es un grafo que no tiene ciclos.



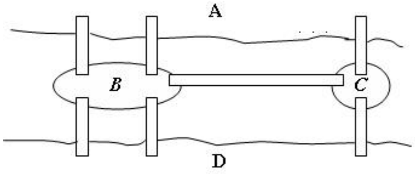


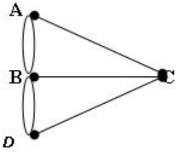


Conectividad

Problema de los puentes de Königsberg

Partir de cualquier lugar (A,B,C y D) caminar sobre cada puente exactamente una vez y regresar a la posición inicial de partida.

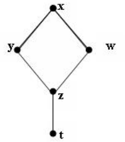




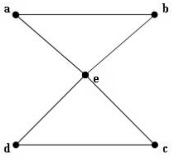
Circuito de Euler

Un **circuito de Euler** en un grafo G es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada arista de G. Un **camino de Euler** en G es un camino simple que pasa exactamente una vez por cada arista.

Conectividad



A

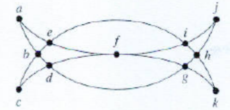


B

En el grafo A hay una *camino de Euler* t,z,w,x,y,z se pueden repetir vértices pero no aristas. En el grafo B hay un circuito euleriano: a,e,c,d,e,b,a

Teorema

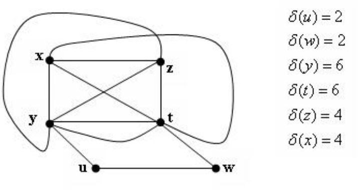
*Un **pseudografo** conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si, cada uno de sus vértices tiene grado par.*



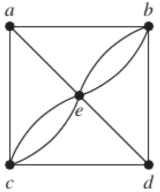
G

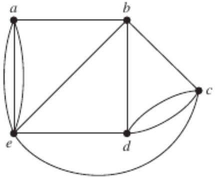
Conectividad

Ejemplo. Sea el siguiente grafo tiene un circuito euleriano z,y,t,y,x,z,t,x,t,w,u,y,z



Hay camino de Euler y circuito de Euler

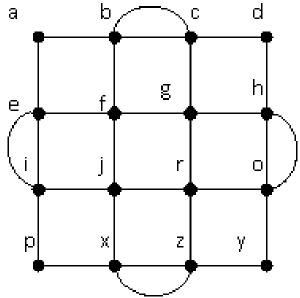




a,e,c,e,b,e,d,b,a,c,d

a,b,c,d,c,e,d,b,e,a,e,a

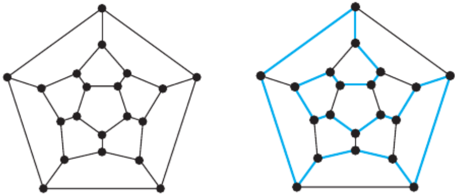
Un circuito de Euler.



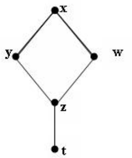
Circuito de Euler: a,b,c,b,f,g,c,d,h,g,r,o,h,o,y,z,r,j,x,z,x,p,i,j,f,e,i,e,a

Circuito de Hamilton

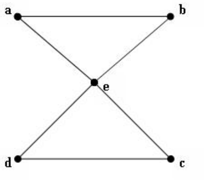
Un **camino de Hamilton** en un grafo G es un *camino simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice, y un **circuito de Hamilton** en un grafo G es un *circuito simple* que pasa exactamente una vez por cada vértice. Es decir, el camino simple $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ en el grafo $G = (V, E)$ es un camino de Hamilton si $V = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y un circuito simple $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 0)$ es un circuito de Hamilton si $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ es un camino de Hamilton.



20 ciudades son visitadas pasando exactamente una vez.

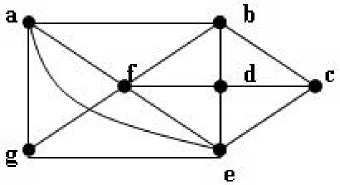


A



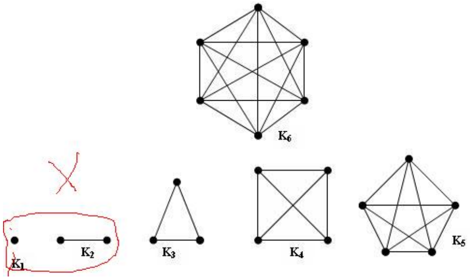
B

El grafo A tiene un camino hamiltoniano t,z,y,x,w y el grafo B tiene un camino hamiltoniano a,b,e,d,c. Ninguno de los dos grafos tiene circuito hamiltoniano.El siguiente grafo tiene el circuito hamiltoniano a,b,c,d,e,f,g,a



Hamilton y K_n

Muestre que K_n tiene un circuito de Hamilton siempre que $n \geq 3$



De los circuitos especiales se puede decir:

- Que son *circuitos simples*. En el caso del circuito de Euler se pueden repetir vértices pero en el caso del circuito de Hamilton NO.
- Los caminos especiales son *caminos simples*. En el camino de Euler se pueden repetir vértices. Pero en el camino de Hamilton no se pueden repetir vértices.

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 10. Graphs.