Complejidad y optimización

1. COMPLEJIDAD

2. INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN

   2.1 Conceptos

   2.2 Programación lineal (Método simplex)

   2.3 Programación entera y mixta (Branch & Bound)

3. TÉCNICAS BASADAS EN INFERENCIA LÓGICA

   3.1 Modelación usando inferencia lógica

   3.2 Técnica Branch & Bound y inferencia lógica

Introducción: Programación matemática

Modelo de decisión

Para un problema dado existen varias alternativas de solución. Se quiere determinar cual es la "mejor" una forma que permite evaluar entre ellos.

Componentes de un modelo de decisión

- opciones de decisión
- restricciones del problema
- criterio objetivo

Ejemplo

Un profesor que vive en la ciudad Bogotá tiene un curso de verano durante 5 semanas en Cali. Por eso vuela a Cali los lunes y regresa los miércoles.

Un ticket ida y vuelto regular vale el 20 % más que un ticket que incluye un fin de semana. Un ticket en una sola dirección vale el 75 % de un ticket regular. El precio de un ticket regular es $450.000.

Como debe comprar el profesor sus tickets?

- Identificar opciones, restricciones y el criterio de decisión
- Solucionar el problema decisorio

Ejemplo (cont.)

Opciones:

1. comprar 5 tickets regulares, uno para cada semana

2. comprar uno de ida (primer lunes, Cali), 4 de ida - vuelta con descuento (desde Cali), uno de una sola dirección (Cali-Bogotá)

3. comprar 5 tickets con descuento, usarlos de manera intercalada.

Restricciones:

1. estar en Cali lunes a viernes. Miércoles

2. estar en Bogotá el resto de la semana

Todas las opciones son **soluciones factibles** (cumplen con los restricciones). Una solución no factible será por ejemplo comprar un solo ticket y quedarse en Cali todo el tiempo.

Criterio de decisión:

el costo total de los viajes

Solución del problema:

Opción 1 vale $\$5 \cdot 450{,}000 = 2'250{,}000$.

Opción 2 vale $\$4 \cdot 0{,}8 \cdot 450{,}000 + 2 \cdot 0{,}75 \cdot 450{,}000 = 2'115{,}000$.

Opción 3 vale $\$5 \cdot 0{,}8 \cdot 450{,}000 = 1'800{,}000$.

Solución óptima: Opción 3

Decisión: Comprar y viajar de acuerdo con opción 3.

Tipos de modelos decisorios

Optimización

Modelos Matemáticos	Simulación
programación lineal	simulación discreta
programación entera	simulación continua
programación dinámica	....
programación no lineal	
....	

- El tipo de modelo se selecciona de acuerdo a las dependencias entre los entidades involucrados y de las características de los datos

- Los métodos de solución dependen de la estructura del modelo

Proceso de solución de un problema decisorio

1. Definición del problema

2. Construcción del modelo (variables decisorias, función objetivo, restricciones)

3. Solución del modelo (solución óptima, valor de la función objetivo, análisis de sensibilidad)

4. Validación del modelo

5. Derivación de la solución del problema (decisión a tomar)

En lo siguiente, se muestra este proceso con un ejemplo

Definición del problema

Una pequeña fábrica produce pinturas para interiores y exteriores de casas. Se utilizan dos materias básicas, A y B para cada tipo de pintura.

La disponibilidad de A es de 6 toneladas diarias, la de B de 8 toneladas diarias.

Para producir una tonelada de pintura para el exterior se requieren 1 tonelada de material A y 2 de material B.

Para producir una tonelada de pintura para el interior se requieren 2 toneladas de material A y 1 de material B.

Un estudio de marcado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la de la pintura para exteriores en más de una tonelada. La demanda máxima de la pintura para el interior es limitada por 2 toneladas diarias.

El precio de venta es $3000 por tonelada para la pintura para el exterior, $2000 por tonelada para la pintura para el interior.

Cuánta pintura para el exterior y el interior debe producir la fábrica diariamente para maximizar el ingreso bruto?

Construcción del modelo

Variables: De qué dependen las alternativas de decisión?

- La empresa decide sobre las cantidades de pintura para el exterior y para el interior que se deben producir:

  x_e: cantidad de pintura para exterior a producir
  x_i: cantidad de pintura para interior a producir

Función objetivo: Cómo se evalúa una posible decisión (con las variables decisorias), cuál es el objetivo (la meta)?

- La empresa selecciona entre las alternativas evaluando el ingreso bruto, dado por $3x_e + 2x_i$(en miles de $). El ingreso bruto debe ser lo más alto posible:

$$\max z = 3x_e + 2x_i$$

Restricciones: No todos los valores son posibles para las variables decisorias, dado que hay limitaciones. Como se expresan estas limitaciones en términos de las variables decisorias?

1. Limitación en la disponibilidad de materias primas:

$$\begin{pmatrix} \text{uso de materias primas} \\ \text{en ambas pinturas} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \text{disponibilidad de} \\ \text{materias primas} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} x_e + 2x_i \leq 6 & \text{(material A)} \\ 2x_e + x_i \leq 8 & \text{(material B)} \end{array}$$

2. Limitación en la demanda de las pinturas:

$x_i \leq x_e + 1$

$$\begin{pmatrix} \text{exceso de pintura para interior} \\ \text{sobre pintuara para exterior} \end{pmatrix} \leq 1 \qquad x_i - x_e \leq 1$$

$$\left(\text{demanda de pintura para interior} \right) \leq 2 \qquad x_i \leq 2$$

3. Restricciones obvias:

las variables deben ser positivas

$$x_i \geq 0$$
$$x_e \geq 0$$

Modelo matemático

$$\max z = 3x_e + 2x_i$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcrcl} x_e & + & 2x_i & \leq & 6 \\ 2x_e & + & x_i & \leq & 8 \\ -x_e & + & x_i & \leq & 1 \\ & & x_i & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_e \geq 0;\ x_i \geq 0$$

Es un modelo de **programación lineal**, dado que la función objetivo y las restricciones son lineales.

Preguntas

1. Es una solución factible?

- $x_e = 1; x_i = 4.$ $x_e = 2; x_i = 2.$ $x_e = 1\frac{1}{3}; x_i = 3\frac{1}{3}.$
- $x_e = 2; x_i = 1.$ $x_e = 2; x_i = -1.$

2. Entre las soluciones anteriores que son factibles, cuál es la mejor?

3. Considerando la solución factible $x_e = 2; x_i = 2$. Determinar

   La cantidad de holgura (no usada) de material A.

   La cantidad de holgura (no usada) de material B.

4. Cuántas soluciones factibles hay?

   R/ Infinitas

Solución: Construcción de la región de soluciones factibles

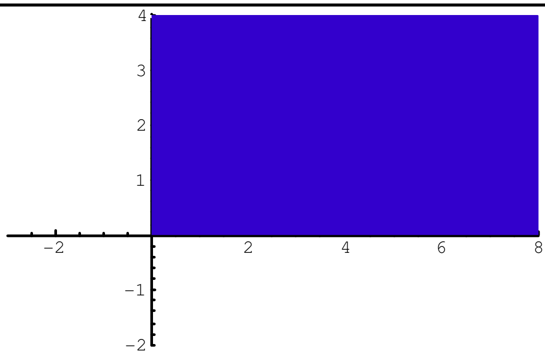
- Cada restricción define un semi-espacio que consiste de los puntos donde se cumple la restricción. El semi espacio está limitado por la recta que se obtiene reemplazando el signo $\leq$ de la restricción por $=$.

- Como se deben cumplir todas las restricciones, el conjunto de soluciones factibles es la intersección de los semi espacios

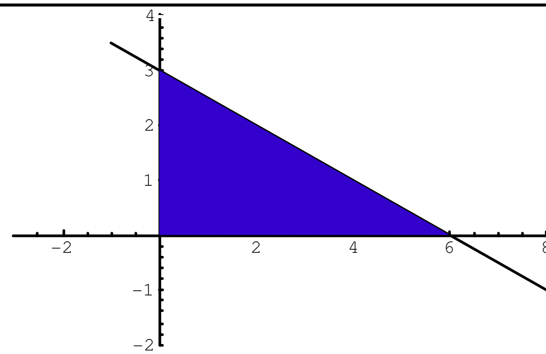
Dado que el ejemplo incluye sólo 2 variables decisorios, se puede construir la solución gráficamente.

Proceso

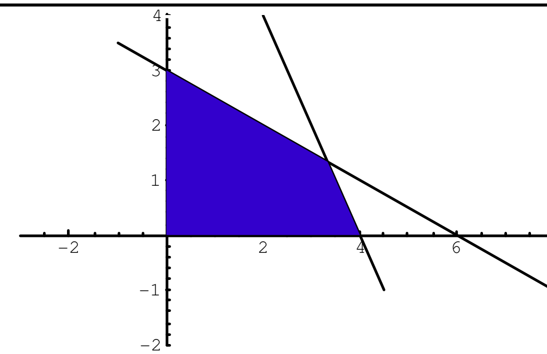
Paso a paso se reduce el espacio de soluciones a pedir que se cumpla otra restricción.



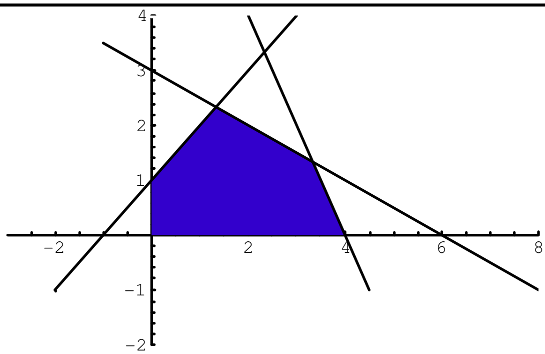
1. El cuadrante positivo: $x_e \geq 0;\ x_i \geq 0$



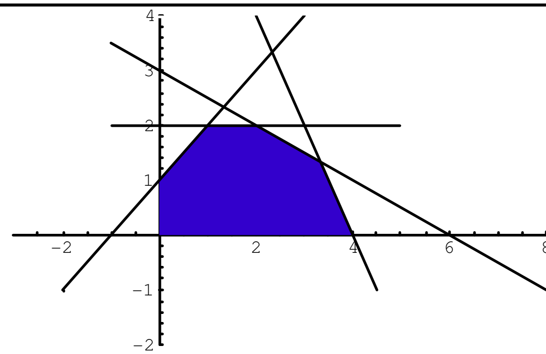
2. Agregando la restricción $x_e + 2x_i \leq 6$



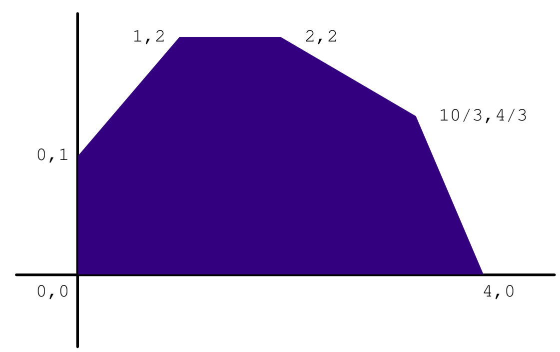
3. Agregando la restricción $2x_e + x_i \leq 8$



4. Agregando la restricción $-x_e + x_i \leq 1$



5. Agregando la restricción $x_i \leq 2$



Conjunto de soluciones factibles

Observaciones

- El conjunto de soluciones factibles es formado de la intersección de los semi espacios correspondientes a las restricciones

- Este tipo de conjunto se llama "Simplex". De ahí el nombre del método Simplex, que estudiaremos más adelante

- Un simplex es un conjunto **convexo** (un conjunto es convexo se contiene el segmento que conecta cada 2 de sus puntos)

- Un simplex tiene un número finito de puntos extremos (un punto de un conjunto convexo es punto extremo, si no hay un segmento dentro del conjunto, que contiene el punto como punto interior)

Solución del modelo: encontrar el óptimo de la función objetivo

- La función objetivo es una función continua. Si el simplex de soluciones factibles es compacto, asume su mínimo y máximo global (teorema de Weierstrass)

- La función objetivo es además lineal. Por eso se puede usar un teorema más fuerte:

Teorema. *Sea S un conjunto convexo compacto, entonces*
las funciones convexas $f : S \to \mathbb{R}$ toman su máximo en los puntos extremos de S;
las funciones cóncavas $f : S \to \mathbb{R}$ toman su mínimo en los puntos extremos de S.

- La función objetivo es lineal, es decir, tanto convexo como cóncavo.

  Si el simplex es compacto, se encuentra entre los puntos extremas tanto un máximo como un mínimo global. Es decir: la búsqueda de óptimos globales se puede restringir en este caso a los puntos extremos.

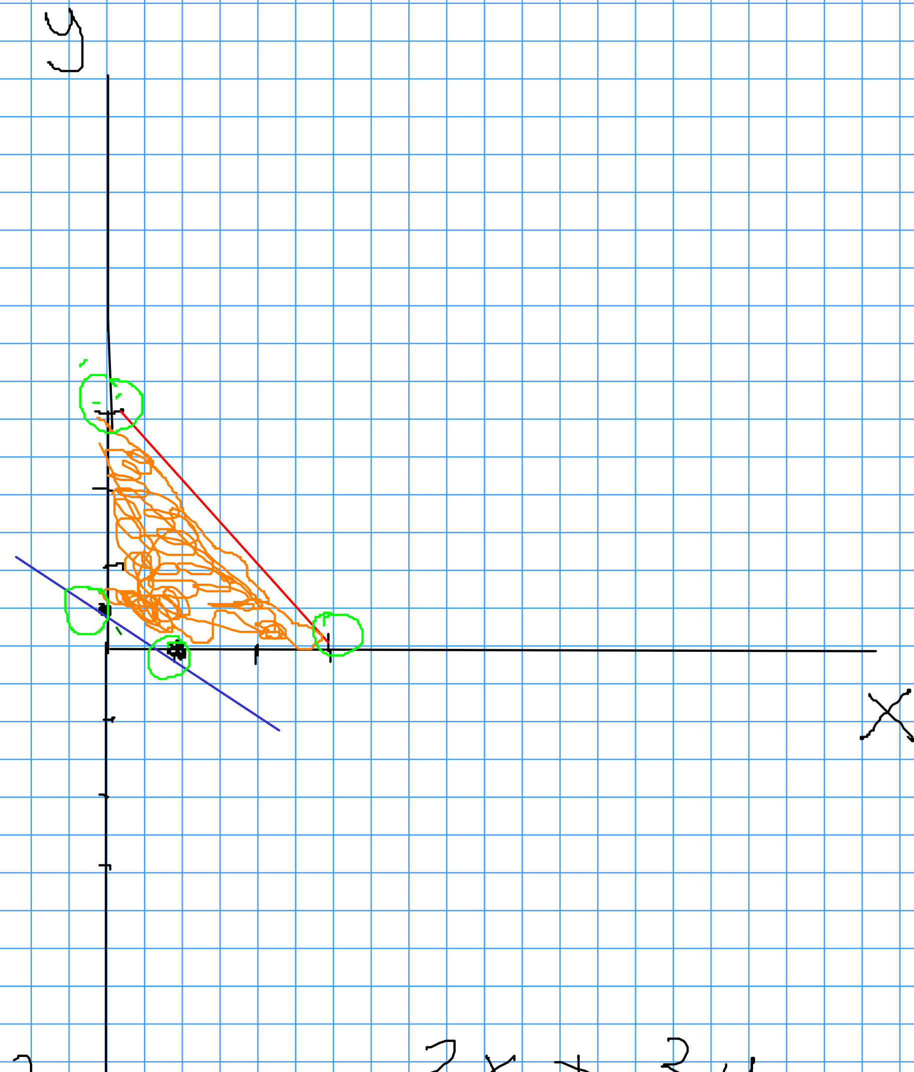
$$\text{Max } 2x + 3y$$

S.a.

1) $x + y \leq 3$

2) $2y + x \geq 1$

$x, y \geq 0$



Puntos factibles
optimos

$\boxed{(0, 3)}$ $(0, 0.5)$

$(1, 0)$ $(3, 0)$

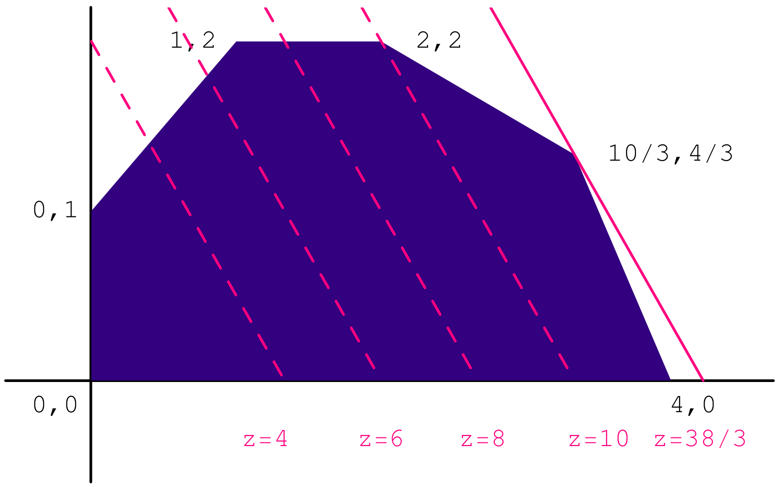
$$\text{Max } 2x + 3y$$

$$2(0) + 3(3) = 9$$

Procedimiento gráfico

Las líneas de nivel de la función objetivo son rectas paralelas. Se debe buscar la línea de nivel más alto.

función objetivo: $\max z = 3x_e + 2x_i$



Solución del modelo:

Solución óptima: $x_e^* = \dfrac{10}{3}; \;\; x_i^* = \dfrac{4}{3}\}$

Valor de la función objetivo en el óptimo: $z_{opt} = \dfrac{38}{3}$

Solución del problema:

Si se produce 3.33 toneladas de pintura para exterior y 1.33 toneladas de pintura para interior, se obtiene los ingresos óptimos de \$12.667.000.

Preguntas adicionales

Resolver a partir de la solución óptima (consultar la gráfica):

- Cuanto se gasta de cada materia prima si se utiliza el esquema óptimo de producción? Qué significa este resultado para la empresa?
- Si la empresa está dispuesta de aumentar el recurso A, cuál sería la cantidad recomendable?
- Se alcanza a satisfacer la demanda de pinturas para el interior?
- Da sentido para la empresa empezar una campaña para aumentar la demanda para pinturas para el interior?
- Si se espera que se disminuye la demanda, debe cambiarse el esquema óptimo de producción? Cuando?
- Si cambia el precio de la pintura para exterior, cómo se refleja esto en el modelo. En qué rango puede cambiarse sin afectar el esquema óptimo de producción?

El problema de programación lineal (forma general)

Variables de decisión: $x_1, x_2, ..., x_n$

Función objetivo:

$\text{máx}\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

(también puede ser un problema de minimización)

Restricciones:

de tipo $\leq$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1, ..., l)$

de tipo $\geq$: $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \geq b_j \quad (j = l+1, ..., l+r)$

de tipo $=$: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k \quad (j = l+r+1, ..., l+r+q)$

obvias: $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; ...x_n \geq 0$

(a veces algunas variables son irrestrictas en el signo)

Forma estándar de un problema de PL

1. El problema es de maximización

2. Los b_i (la mano derecha) son todos positivos.

   Si no se cumple, se multiplica la desigualdad con (-1) cambiando ek sentido de la desigualdad

3. Todas las restricciones son de tipo $=$.

   Se introducen nuevas variables positivas.

   - Si la restricción es de tipo $\leq$ se suma una nueva variable (variable de holgura)
   - Si la restricción es de tipo $\geq$ se resta una nueva variable (variable de exceso)

4. Todas las variables son positivas.

   Cada variable irrestricta en signo x_i se reemplaza en la función objetivo y en las restricciones por $x_i^+ - x_i^-$.

Ejemplo

Estandarizar el problema

$\min z = 8x_1 - 5x_2$

sujeto a

$x_1 - x_2 \geq -3$

$4x_1 + x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0$; x_2 irrestricta

1. Cambio del sentido de la optimización:

$$\min z = 8x_1 - 5x_2 \;\rightarrow\; \max y = -8x_1 + 5x_2$$

2. La mano derecha es positiva:

$$x_1 - x_2 \geq -3 \;\rightarrow\; -x_1 + x_2 \leq 3$$

3. Restricciones como igualdades:

$$-x_1 + x_2 \leq 3 \;\rightarrow\; -x_1 + x_2 + s_1 = 3$$

$$4x_1 + x_2 \geq 5 \;\rightarrow\; 4x_1 + x_2 - s_2 = 5$$

4. Todas las variables deben ser positivas:

   x_2 se debe sustituir en todas partes por $x_2^+ - x_2^-$

   $\max y = -8x_1 + 5x_2 \;\rightarrow\; \max y = -8x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^-$

   $-x_1 + x_2 + s_1 = 3 \;\rightarrow\; -x_1 + x_2^+ - x_2^- + s_1 = 3$

   $4x_1 + x_2 - s_2 = 5 \;\rightarrow\; 4x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_2 = 5$

Ejemplo (cont.)

Problema original

$\text{mín}\, z = 8x_1 - 5x_2$

sujeto a

$x_1 - x_2 \geq -3$

$4x_1 + x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0$; x_2 irrestricta

Forma estándar

$\text{máx}\, x = -8x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^-$

sujeto a

$-x_1 + x_2^+ - x_2^- + s_1 = 3$

$4x_1 + x_2^+ - x_2^- - s_2 = 5$

$x_1 \geq 0$; $x_2^+ \geq 0$; $x_2^- \geq 0$; $s_1 \geq 0$;$s_2 \geq 0$;

Forma estandarizada general

$$\max c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

sujeto a:

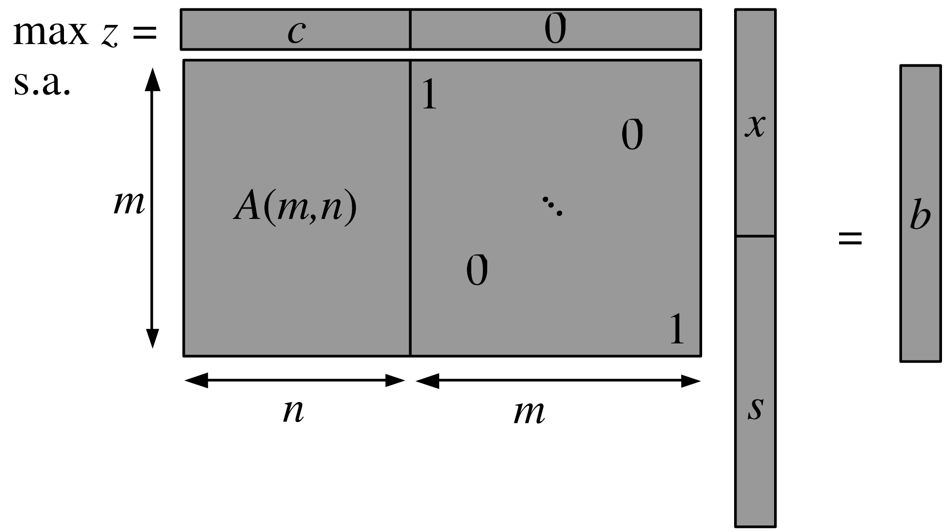
$$\begin{array}{rcccrcccccl}
a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & +s_1 & & & & = & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\
a_{l,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{l,n}x_n & & +s_l & & & = & b_l \\
a_{l+1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{l+1,n}x_n & & & -s_{l+1} & & = & b_{l+1} \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
a_{l+r,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{l+r,n}x_n & & & & -s_{l+r} & = & b_{l+r} \\
a_{l+r+1,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{l+r+1,n}x_n & & & & & = & b_{l+r+1} \\
\vdots & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
a_{l+r+q,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{l+r+q,n}x_n & & & & & = & b_{l+r+q}
\end{array}$$

Caso 1: Todas las restricciones son de tipo $\leq$

(La solución de la situación general se reduce a este caso)

Se simplifica la estructura del modelo:

- n variables $x_1, \ldots, x_n$
- m restricciones de tipo $\leq$
- m variables de holgura $s_1, \ldots, s_n$.



Se tiene un sistema lineal con $m + n$ variables y m ecuaciones linealmente independientes que tiene infinitas soluciones.

Se obtienen soluciones asignando a n variables el valor de 0 y resolviendo el sistema para las demás variables (**soluciones básicas**).

Las variables que están a nivel 0 se llaman **variables no básica**s, las otras son las **variables básicas**.

Ejemplo de las pinturas

$$\max 3x_e + 2x_i$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rcrcccccl}
x_e & + & 2x_i & +s_1 & & & & = & 6 \\
2x_e & + & x_i & & +s_2 & & & = & 8 \\
-x_e & + & x_i & & & +s_3 & & = & 1 \\
 & & x_i & & & & +s_4 & = & 2
\end{array}$$

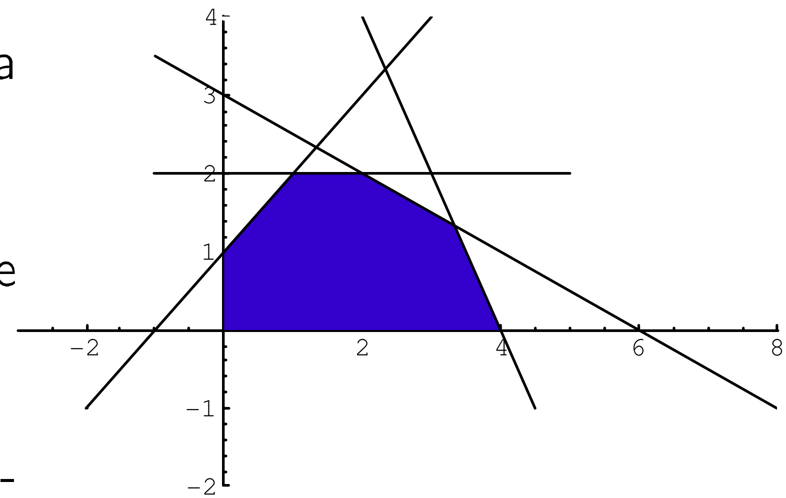
$$x_e \geq 0;\ x_i \geq 0;\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0;\ s_4 \geq 0$$

Cuales son las soluciones básicas?

Cuales son las soluciones básicas factibles?

Respuesta

Soluciones básicas:



- Si se iguala una variable de holgura s a 0, la correspondiente restricción se cumple con igual
- Si se iguala una de las variables originales x a 0, de restringe el problema un subespacio.
- Entonces las soluciones básicas son las intersecciones de 2 rectas, incluyendo las de positividad.

Soluciones básicas factibles:

- Las soluciones básicas son factibles, si todas las variables son positivas. Corresponde a los puntos extremos del simplex.

Principio general del método simplex

- Condición inicial: una solución básica factible (un punto extremo del simplex)
  - En el caso de que todas las restricciones son de tipo $\leq$, el punto $\overrightarrow{0}$ es factible. Corresponde a igualar a 0 todas las variables originales.
  - En el caso general, se debe aplicar un procedimiento general para encontrar una soluciona básica factible

- Iteración: pasar de la solución básica factible actual a una solución básica factible vecina (punto extremo vecino) que mejora la función objetivo
  - seleccionar una variable no básica para volverla básica tal que se mejora la función objetivo (**la variable que entra** en la base).
  - seleccionar una variable básica a volverse no básica (**la variable que sale** de la base), cuidando que la solución quede factible

- Condición de parada: no existe otra solución básica factible vecina que mejora la función objetivo

Ejemplo de las pinturas: el cálculo simplex (inicio)

$$\max 3x_e + 2x_i$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rcrrrrrcl}
x_e & + & 2x_i & +s_1 & & & & = & 6 \\
2x_e & + & x_i & & +s_2 & & & = & 8 \\
-x_e & + & x_i & & & +s_3 & & = & 1 \\
 & & x_i & & & & +s_4 & = & 2
\end{array}$$

$$x_e \geq 0;\ \ x_i \geq 0;\ \ s_1 \geq 0;\ \ s_2 \geq 0;\ \ s_3 \geq 0;\ \ s_4 \geq 0$$

Inicio: el punto $x_e = 0$, $x_i = 0$ es factible, es decir se selecciona como variables no-básicas x_e y x_i y se calcula inmediatamente las variables básicas: $s_1 = 6; s_2 = 8; s_3 = 1; s_4 = 2$.

Ejemplo de las pinturas: el cálculo simplex (iteración 1)

Determinar la variable que **entra** en la base: Se mejora la función objetivo, si la variable no-básica x_e se vuelve básica (pasa de 0 a un valor calculado ≥ 0) ó entra a la base.

Determinar la variable que **sale** de la base:

$$\begin{array}{rcccccccccl}
x_e & + & 2x_i & +s_1 & & & & = & 6 & ; & \text{caso1: } s_1 = 0\text{,entonces} \quad x_e = 6 \\
2x_e & + & x_i & & +s_2 & & & = & 8 & ; & \text{caso 2: } s_2 = 0\text{, entonces} \quad x_e = 4 \\
-x_e & + & x_i & & & +s_3 & & = & 1 & ; & \text{caso 3: } s_3 = 0\text{, entonces} \quad x_e = -1 \\
 & & x_i & & & & +s_4 & = & 2 & ; & \text{caso 4: } s_4 = 0\text{, entonces} \quad \text{no hay sol.}
\end{array}$$

Los casos 3 y 4 no pueden producir soluciones factibles.

Si se selecciona caso 1, la restricción 2 no se cumple.

En cambio, si se selecciona el caso con el **menor de los valores positivos** de x_e; es decir caso 2, la solucion queda factible.

Conclusion: x_e entra en la base, $s_2$sale de la base.

Ejemplo de las pinturas: el cálculo simplex (iteración 1)

Cálculo de la nueva solución: se transforma el sistema de ecuaciones de tal forma que x_e sólo queda en restricción 2 (Gauss)

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & + & 3/2x_i & +s_1 & -1/2s_2 & & & = & 2 & ; & \text{paso 2: fila 1 - nueva fila 2} \\
x_e & + & 1/2x_i & & +1/2s_2 & & & = & 4 & ; & \text{paso 1: el coeficiente de } x_e \text{ debe ser 1.} \\
 & + & 3/2x_i & & +1/2s_2 & +s_3 & & = & 5 & ; & \text{paso 3: fila 3 + nueva fila 2} \\
 & & x_i & & & & +s_4 & = & 2 & ; & \text{paso 4: } x_e \text{ ya tiene coeficiente 0}
\end{array}$$

se tranforma la función objetivo $z = 3x_e + 2x_i$ ó $z - 3x_e - 2x_i = 0$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
z & -3x_e & - & 2x_i & & = & 0 & ; & \text{función objetivo} \\
z & & - & 1/2x_i & +3/2s_2 & = & 12 & ; & \text{paso 5: función objetivo + 3*nueva fila 2.}
\end{array}$$

Ejemplo de las pinturas: el cálculo simplex (iteración 2)

La variable que **entra** es x_i ya que mejora la función objetivo

$$
\begin{array}{llllllllll}
z & - & 1/2x_i & & +3/2s_2 & & & = & 12 & \\
 & + & 3/2x_i & +s_1 & -1/2s_2 & & & = & 2 & \text{caso 1: } s_1 = 0 \quad \text{entonces } x_i = 4/3 \\
x_e & + & 1/2x_i & & +1/2s_2 & & & = & 4 & \text{caso 2: } x_e = 0 \quad \text{entonces } x_i = 8 \\
 & + & 3/2x_i & & +1/2s_2 & +s_3 & & = & 5 & \text{caso 3: } s_3 = 0 \quad \text{entonces } x_i = 10/3 \\
 & & x_i & & & & +s_4 & = & 2 & \text{caso 4: } s_4 = 0 \quad \text{entonces } x_i = 2
\end{array}
$$

El valor menor positivo de x_i se logra en el caso 1, por eso sale x_i.

Tranformación

$$
\begin{array}{llllllllll}
z & & & +1/3s_1 & +4/3s_2 & & & = & 12\frac{2}{3} & ; \quad \text{paso5 : función objetivo } +\frac{1}{2}\text{nueva fila1} \\
 & + & x_i & +2/3s_1 & -1/3s_2 & & & = & 4/3 & ; \quad \text{paso1: el coeficiente de } x_i \text{debe ser 1} \\
x_e & & & +1/3s_1 & +2/3s_2 & & & = & 10/3 & ; \quad \text{paso 2: fila 2 - } \frac{1}{2}\text{nueva fila 1} \\
 & & & -s_1 & +s_2 & +s_3 & & = & 3 & ; \quad \text{paso 3: fila 3 -} \frac{3}{2} \text{ nueva fila 1} \\
 & & & -2/3s_1 & +1/3s_2 & & +s_4 & = & 2/3 & ; \quad \text{paso 4: fila 4 - nueva fila 1}
\end{array}
$$

Ejemplo de las pinturas: el cálculo simplex (finalización)

No se puede mejorar la función objetivo,
ya que las variables todoas tienen coeficientes ≥ 0.

Por eso se termina, habiendo encontrado el óptimo.

Solución:

$x_e = 10/3$; $x_i = 4/3$; $s_3 = 3$; $s_4 = 2/3$ (variables básicas)

$s_1 = 0$; $s_2 = 0$ (variables no básicas)

$z = 12\frac{2}{3}$ (función objetivo)

Ejemplo de las pinturas: Tablero inicial

Se usan tableros para facilitar el procedimiento

Tablero inicial:

v. básicas	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	
z	**1**	-3	-2	**0**	**0**	**0**	**0**	0	(f.o.: $z - 3x_e - 2x_i$)
s_1	**0**	1	2	**1**	**0**	**0**	**0**	6	
s_2	**0**	2	1	**0**	**1**	**0**	**0**	8	
s_3	**0**	-1	1	**0**	**0**	**1**	**0**	1	
s_4	**0**	0	1	**0**	**0**	**0**	**1**	2	

El tablero corresponde al sistema de ecuaciones. Las variables básicas junto con la función objetivo z forman una matriz identidad.

$$z = 3X_e + 2X_i$$

$$z - 3X_e - 2X_i = 0$$

$$X_e + 2X_i + S_1 = 6$$

$$2X_e + X_i + S_2 = 8$$

$$-X_e + X_i + S_3 = 1$$

$$X_i + S_4 = 2$$

V.B	X_i	X_e	S_1	S_2	S_3	S_4	Z	b
z	-2	-3					1	0
S_1	2	1	1					6
S_2	1	2		1				8
S_3	1	-1			1			1
S_4	1					1		2

Ejemplo de las pinturas: Iteración

Seleccionar la variable que entre:

Al hacer básica una de las variable x_e o x_i, se mejora la función objetivo.

Generalmente se decide por la variable que tiene el coeficiente más negativo en caso de maximización (más positivo en caso de minimización).

En este caso: x_e.

Seleccionar la variable que sale:

1. Si la variable que sale es s_1, se igualaría s_1 a 0. La restricción 1 se convierte en $x_e = 6$. Para valores de x_e mayores que 8, la variable s_1 se vuelve negativo, es decir, se obtendrá una solución no factible. Es decir la condición de factibilidad obliga a $0 \leq x_e \leq 6$.
2. Si sale s_2, se obtiene por la restricción 2: $x_e = 4$. Para valores mayores de x_e, la variable s_2 se vuelve negativo, es decir, se obtendrá una solución no factible. En resumen $0 \leq x_e \leq 4$.
3. La variable s_3 no puede salir ya que daría una solución no factible
4. Igualmente, s_4 no puede salir por no factibilidad.

En resumen: Para mantener la factibilidad se debe seleccionar s_2 como variable que sale.

Actualización del tablero

Para actualizar el tablero

- se actualiza las variables básicas, reemplazando la variable que sale por la que entra;
- se convierte el sistema lineal por operaciones permitidas en uno **equivalente**, tal que la columna de la variable que entra es un vector unitario que tiene su 1 en la posición de la fila de la variable que sale (elemento pivote).

Las operaciones permitidas son:

- Multiplicar la fila de la nueva variable que entró con una constante (para conseguir el 1 en la posición del pivote)
- sumar a cada otra fila un múltiplo de la fila pivote (para conseguir el 0 en la posición correspondiente)

Tablero inicial:

v. básicas	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	cociente
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	-
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6	6/1=6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8	8/2=4 ←sale
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	- 1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	-
	↑entra								

Iteración 1: actualizar el tablero y seleccionar la variable que entra y la que sale.

v. básicas	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	cociente
z	1	**0**	-1/2	0	3/2	0	0	12	-
s_1	0	**0**	3/2	1	-1/2	0	0	2	4/3 ←sale
x_e	0	**1**	1/2	0	1/2	0	0	4	8
s_3	0	**0**	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3
s_4	0	**0**	1	0	0	0	1	2	2
			↑entra						

Iteración 1

v. básicas	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	cociente	
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	-	
s_1	0	0	**3/2**	1	-1/2	0	0	2	4/3	←sale
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	8	
s_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	10/3	
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	2	
			↑entra							

Iteración 2: actualizar el tablero y seleccionar la variable que entra y la que sale.

v. básicas	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	cociente
z	1	0	**0**	1/3	4/3	0	0	38/3	-
x_i	0	0	**1**	2/3	-1/3	0	0	4/3	
x_e	0	1	**0**	-1/3	2/3	0	0	10/3	
s_3	0	0	**0**	-1	1	1	0	3	
s_4	0	0	**0**	-2/3	1/3	0	1	2/3	

Se llegó al óptimo porque no hay variable entrante que pueda mejorar la función objetivo.

Solución óptima

Solución:

$x_i = 4/3$; $x_e = 10/3$; $s_3 = 6$; $s_4 = 2/3$ (variables básicas); $s_1 = s_2 = 0$ (variables no básicas);

$z_{opt} = 38/3$ (función objetivo)

Quedamos aquí.

Ejercicio en clase: Aplicar el método Simplex

Problema:

$$\begin{array}{rcrcl}
\text{máx}\, 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
2x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Forma estándar:

$$\text{máx}\, 2x_1 + x_2$$

z = 2x1 + x2 --> z- 2x1 - x2 = 0

$$\begin{array}{rcrcccl}
\text{s.a.} & & & & & & \\
2x_1 & - & x_2 & +s_1 & & & = 8 \\
x_1 & + & 2x_2 & & +s_2 & & = 14 \\
-x_1 & + & x_2 & & & +s_3 & = 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0$$

v. básicas	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	cociente	
z	1	-2	-1	0	0	0	0	-	entra x_1,
s_1	0	2	-1	1	0	0	8	4	sale s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	14	14	
s_3	0	-1	1	0	0	1	4	-4	
z	1	0	-2	1	0	0	8	-	entra x_2,
x_1	0	1	-1/2	1/2	0	0	4	-8	sale s_2
s_2	0	0	5/2	-1/2	1	0	10	4	
s_3	0	0	1/2	1/2	0	1	8	16	
z	1	0	0	3/5	4/5	0	16	se llegó	
x_1	0	1	0	2/5	1/5	0	6	al óptimo	
x_2	0	0	1	-1/5	2/5	0	4		
s_3	0	0	0	3/5	-1/5	1	6		

Solución:

$x_1 = 6$; $x_2 = 4$; $s_3 = 6$ (variables básicas); $s_1 = s_2 = 0$ (variables no básicas);

$z_{opt} = 16$ (función objetivo)

(w)

max $2x + 3y + 4z$

s.a

$2x + 3y \leq 8$

$6x + 4z \leq 7$

$2y - z \leq 3$

$x, y, z \geq 0$

max $2x + 3y + 4z$

s.a

$2x + 3y + S_1 = 8$

$6x + 4z + S_2 = 7$

$2y - z + S_3 = 3$

$x, y, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Base	w	x	y	z	S_1	S_2	S_3	b	RH
w	1	-2	-3	-4				0	
S_1		2	3		1			8	0:8
S_2		6		4		1		7	$7/4$
S_3			2	-1			1	3	-3

Tratamiento de modelos con restricciones de tipo $=$ o $\geq$.

- En esta situación no se tiene la ventaja de que el vector $\overrightarrow{0}$ es una solución inicial factible. Entonces se debe definir la forma como encontrar una solución factible inicial.

- Los métodos de encontrar la solución inicial, introducen variables artificiales al modelo, que permiten empezar con una solución inicial factible fácil.

- Cómo las variables artificiales no forman parte del problema (son meramente técnicas), se debe encontrar la forma de hacerlas 0 (es decir no básicas). Una vez que las variables artificiales están en el nivel 0, se encontró una solución factible del problema inicial y se puede seguir el método simplex sin tenerlas en cuenta.

Existen 2 métodos:

- el método de penalización (Gran M)

- el método de las 2 fases

Procedimiento: Método de penalización

1. Estandarizar el problema

2. Aumentar el problema por variables artificiales

   Agregar una variable artificial para cada **restricción** de tipo $=$ o $\geq$
   (con esto se consigue la matriz identidad en el primer tablero)

   Modificar la **función objetivo**, agregando el término de penalización: para cada variable A

   - Problema de minimización: se suma $M \cdot A$, donde M es muy grande
   - Problema de maximización: se resta $M \cdot A$, donde M es muy grande

3. Ajustar la función objetivo: Se expresa cada variable artificial en la función objetivo en términos de variables no básicas, usando la las restricción correspondiente

4. Aplicar el método simplex al problema aumentado.

   Si salieron todas las variables artificiales de la base, se encontró una solución factible inicial del problema original. En este caso se continua aplicando el método simplex ahora al problema original.

   Si no salieron las variables artificiales, el problema original no tiene ninguna solución

Método de penalización (ejemplo)

1. Estandarizar el problema

Problema:

$$\begin{array}{rcrcl}
\min 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Forma estándar:

$$\begin{array}{rcrrrcl}
\min 4x_1 & + & x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & -s_2 & & = & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & & +s_3 & = & 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0$$

2. Aumentar el problema por variables artificiales:

$$
\begin{array}{rcrrrrrcr}
\min 4x_1 & + & x_2 & & & +M\,A_1 & +M\,A_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & & & +A_1 & & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & -s_2 & & & +A_2 & = & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & & +s_3 & & & = & 4
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0;\ A_1 \geq 0\ A_2 \geq 0$$

3. Ajustar la función objetivo

En los tableros, los coeficientes de las variables básicas en la f.o. tienen que ser 0. Por eso se deben expresar las variables A_1 y A_2 en términos de x_1, x_2 y s_2:

Con las restricciones

$$3x_1 + x_2 + A_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 3 - 3x_1 - x_2$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_2 + A_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + s_2$$

En la función objetivo:

$$4x_1 + x_2 + M\,A_1 + M\,A_2 =$$

$$4x_1 + x_2 + M\,(3 - 3x_1 - x_2) + M\,(6 - 4x_1 - 3x_2 + s_2) =$$

$$x_1(4 - 3M - 4M) + x_2(1 - M - 3M) + s_2(M) + 3M + 6M =$$

$$x_1(4 - 7M) + x_2(1 - 4M) + s_2\,M + 9M$$

$$z - x_1(4 - 7M) - x_2(1 - 4M) - s_2\,M = 9M$$

4. Aplicar el método Simplex

v. b.	z	x_1	x_2	s_2	s_3	A_1	A_2	RHS	coc.	
z	1	-4+7M	-1+4M	-M	0	0	0	9M	-	entra x_1
A_1	0	3	1	0	0	1	0	3	1	sale A_1
A_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	3/2	
s_3	0	1	2	0	1	0	0	4	4	
z	1	0	(1+5M)/3	-M	0	(4-7M)/3	0	2M+4	-	entra x_2
x_1	0	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3	sale A_2
A_2	0	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5	
s_3	0	0	5/3	0	1	-1/3	0	3	9/5	
z	1	0	0	1/5	0			18/5	-	entra s_2
x_1	0	1	0	1/5	0			3/5	3	sale s_3
x_2	0	0	1	-3/5	0			6/5	-	
s_3	0	0	0	1	1			1	1	
z	1	0	0	0	-1/5			17/5	sol. óptima	
x_1	0	1	0	0	-1/5			2/5		
x_2	0	0	1	0	3/5			9/5		
s_2	0	0	0	1	1			1		

Solución óptima:

$x_1 = 2/5;\ x_2 = 9/5;\ s_2 = 1$ (variables básicas);
$s_1 = s_2 = 0$ (variables no básicas);
$z_{opt} = 17/5$ (función objetivo)

$$\max\ 2x+3y+4z$$

s.a

$$2x+3y \le 8$$

$$6x+4z \le 7$$

$$2y - z \ge 3$$

$$x,\ y,\ z \ge 0$$

w

$$\max\ 2x+3y+4z$$

s.a

$$2x+3y+S_1 = 8$$

$$6x+4z+S_2 = 7$$

$$\boxed{2y - z - S_3 = 3}$$

$$x,\ y,\ z,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \ge 0$$

$$\max\ 2x+3y+4z - MA$$

$$2y - z - S_3 + A = 3$$

$$A = 3 - 2y + z + S_3$$

$$\text{Max}\ \cancel{2x} + \cancel{3y} + \cancel{4z} - M(\cancel{3} - \cancel{2y} + \cancel{z} + \cancel{S_3})$$

Max $2x + y(3+2M) + z(4-M) - MS_3 - 3M$

$w - 2x - y(3+2M) - z(4-M) + MS_3 = -3M$

Base	w	x	y	z	S_1	S_2	S_3	A	b	c
w	1	-2	$-3-2M$	$-4+M$			M		$-3M$	
S_1		2	3		1				8	
S_2		6		4		1			7	
A			2	-1			-1	1	3	
w	1	-2	$-3-2M$	$-4+M$			M		$-3M$	
S_1		2	3		1				8	
z		$3/2$		1					$7/4$	
A			2	-1			-1	1	3	
w	1	$4-\frac{3}{2}M$	$-3-2M$				M		$7-\frac{19}{4}M$	
S_1		2	3		1				8	$8/3$
z		$3/2$		1					$7/4$	
A		$3/2$	2				-1	1	$19/4$	$19/8$

Borrador

$$\frac{3}{2}(4-m)=2$$

$$\frac{12}{2}-\frac{3}{2}m-2=4-\frac{3}{2}m$$

$$-3m+\frac{7}{4}(4-m)=$$

$$-3m+7-\frac{7}{4}m$$

$$-\frac{19}{4}m+7$$

Procedimiento: El método de las dos fases

1. Estandarizar el problema

2. Aumentar el problema por variables artificiales

   Agregar una variable artificial para cada **restricción** de tipo $=$ o $\geq$
   (con esto se consigue la matriz identidad en el primer tablero)

3. Fase 1: Encontrar una solución básica factible

   - Cambiar la función objetivo: minimizar la suma de las variables artificiales.
   - Ajustar los coeficientes en esta función objetivo: Se expresa cada variable artificial en la función objetivo en términos de variables no básicas, usando las restricción correspondientes
   - Aplicar el método simplex al problema con la nueva función objetivo
     Si las variables artificiales se volvieron no básicas, se encontró una solución básica factible del problema original.
     Si queda una variable artificial en la base, el problema original no tiene ninguna solución factible - terminar.

4. Fase 2: Encontrar la solución al problema original

   - ajustar los coeficientes de la función objetivo a la solución básica factible
   - aplicar el método simplex, partiendo de la solución básica inicial encontrada.

Método de las dos fases (Ejemplo)

1. Estandarizar el problema

Problema:

$$\begin{array}{rcrcr}
\min 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Forma estándar:

$$\begin{array}{rcrrrcr}
\min 4x_1 & + & x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & -s_2 & & = & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & & +s_3 & = & 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0$$

2. Aumentar el problema por variables artificiales:

$$
\begin{array}{rcrrrrrcr}
\min 4x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
& & & & & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & & & +A_1 & & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & -s_2 & & & +A_2 & = & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & & +s_3 & & & = & 4
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0;\ A_1 \geq 0\ A_2 \geq 0$$

3. Fase 1: Encontrar una solución inicial factible

- La función objetivo en esta fase es

$$\min A_1 + A_2$$

- Ajuste de los coeficientes de la función objetivo:

  Con las restricciones

  $3x_1 + x_2 + A_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 3 - 3x_1 - x_2$

  $4x_1 + 3x_2 - s_2 + A_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + s_2$

  $A_1 + A_2 = -7x_1 - 4x_2 + s_2 + 9$

- El problema de optimización en la fase 1 queda en

$$\min -7x_1 - 4x_2 + s_2 + 9$$

$$\begin{array}{rcrrrrrcc}
\min -7x_1 & - & 4x_2 & +s_2 & +9 & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & & & +A_1 & & = & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & -s_2 & & & +A_2 & = & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & & +s_3 & & & = & 4
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0;\ A_1 \geq 0\ A_2 \geq 0$$

- Aplicar el método Simplex

v. b.	z	x_1	x_2	s_2	s_3	A_1	A_2	RHS	coc.	
z	1	7	4	-1	0	0	0	9	-	entra x_1
A_1	0	3	1	0	0	1	0	3	1	sale A_1
A_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	3/2	
s_3	0	1	2	0	1	0	0	4	4	
z	1	0	5/3	-1	0	-7/3	0	2	-	entra x_2
x_1	0	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3	sale A_2
A_2	0	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5	
s_3	0	0	5/3	0	1	-1/3	0	3	9/5	
z	1	0	0	0	0	-1	-1	0	sol. óptima	
x_1	0	1	0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5	de fase 1	
x_2	0	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5		
s_3	0	0	0	1	1	1	-1	1		

Se minimizó la suma de las variables artificiales, las variables artificiales se volvieron no básicas; es decir $A_1 = 0$; $A_2 = 0$. Se encontró una **solución básica factible al problema original.**

4. Fase 2: Optimización del problema original

a partir de la solución factible inicial

La función objetivo del problema original es

$$\min\ 4x_1 + x_2$$

- Ajustar los coeficientes de la función objetivo:
  La f.o. debe expresarse en términos de las variables no básicas

  $x_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{3}{5}$, es decir $x_1 = -\frac{1}{5}s_2 + \frac{3}{5}$

  $x_2 - \frac{3}{5}s_2 = \frac{6}{5}$, es decir $x_2 = \frac{3}{5}s_2 + \frac{6}{5}$

  $\min\ z = 4x_1 + x_2 = 4(-\frac{1}{5}s_2 + \frac{3}{5}) + (\frac{3}{5}s_2 + \frac{6}{5}) = -\frac{1}{5}s_2 + \frac{18}{5}$

- Aplicar el método simplex al problema original

v. b.	z	x_1	x_2	s_2	s_3	RHS	coc.	
z	1	0	0	1/5	0	18/5		entra s_2
x_1	0	1	0	1/5	0	3/5	3	sale s_3
x_2	0	0	1	-3/5	0	6/5	-	
s_3	0	0	0	1	1	1	1	
z	1	0	0	0	-1/5	17/5	sol. óptima	
x_1	0	1	0	0	-1/5	2/5		
x_2	0	0	1	0	3/5	9/5		
s_2	0	0	0	1	1	1		

Solución óptima

$x_1 = 2/5$; $x_2 = 9/5$; $s_2 = 1$; (variables básicas);
$s_3 = 0$ (variable no básica);
$z_{opt} = 17/5$ (función objetivo)

Ejercicio

Aplicar el método de la gran M y el método de las 2 fases al problema:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
\max x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{s.a.} & & & & & & \\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\
-x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0; \;\; x_3 \geq 0$$

max $x_1 + x_2 + 2x_3 - MA_1 - MA_2$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + S_1 = 8$$

- $x_1 + x_2 + x_3 - S_2 + A_1 = 2$
- $-x_1 + x_2 + 2x_3 + A_2 = 1$

$$A_1 = 2 - x_1 - x_2 - x_3 + S_2$$
$$A_2 = 1 + x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 + 2x_3 - M(2 - \cancel{x_1} - x_2 - x_3 + S_2)$$
$$- M(1 + \cancel{x_1} - x_2 - 2x_3)$$

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 - M(3 - 2x_2 - 3x_3 + S_2)$$
$$Z = x_1 + (1+2M)x_2 + (2+3M)x_3 - MS_2 - 3M$$

$$\boxed{Z - x_1 - (1+2M)x_2 - (2+\underbrace{3M)}_{\text{V entra}}x_3 + MS_2 = -3M}$$

VB)	Z	x_3	
	S_1		(4)
	A_1		(2)
	A_2		(1/2)

2 Fases

$$\text{Min } A_1 + A_2$$

$$Z = 2 - \cancel{X_1} - X_2 - X_3 + S_2 + 1 + \cancel{X_1} - X_2 - 2X_3$$

$$Z = 3 - 2X_2 - 3X_3 + S_2$$

$$\boxed{Z + 2X_2 + 3X_3 - S_2 = 3}$$

Z

S_1

A_1

A_2

Por ejemplo,

$X_1 = 3$

$S_1 = 4$

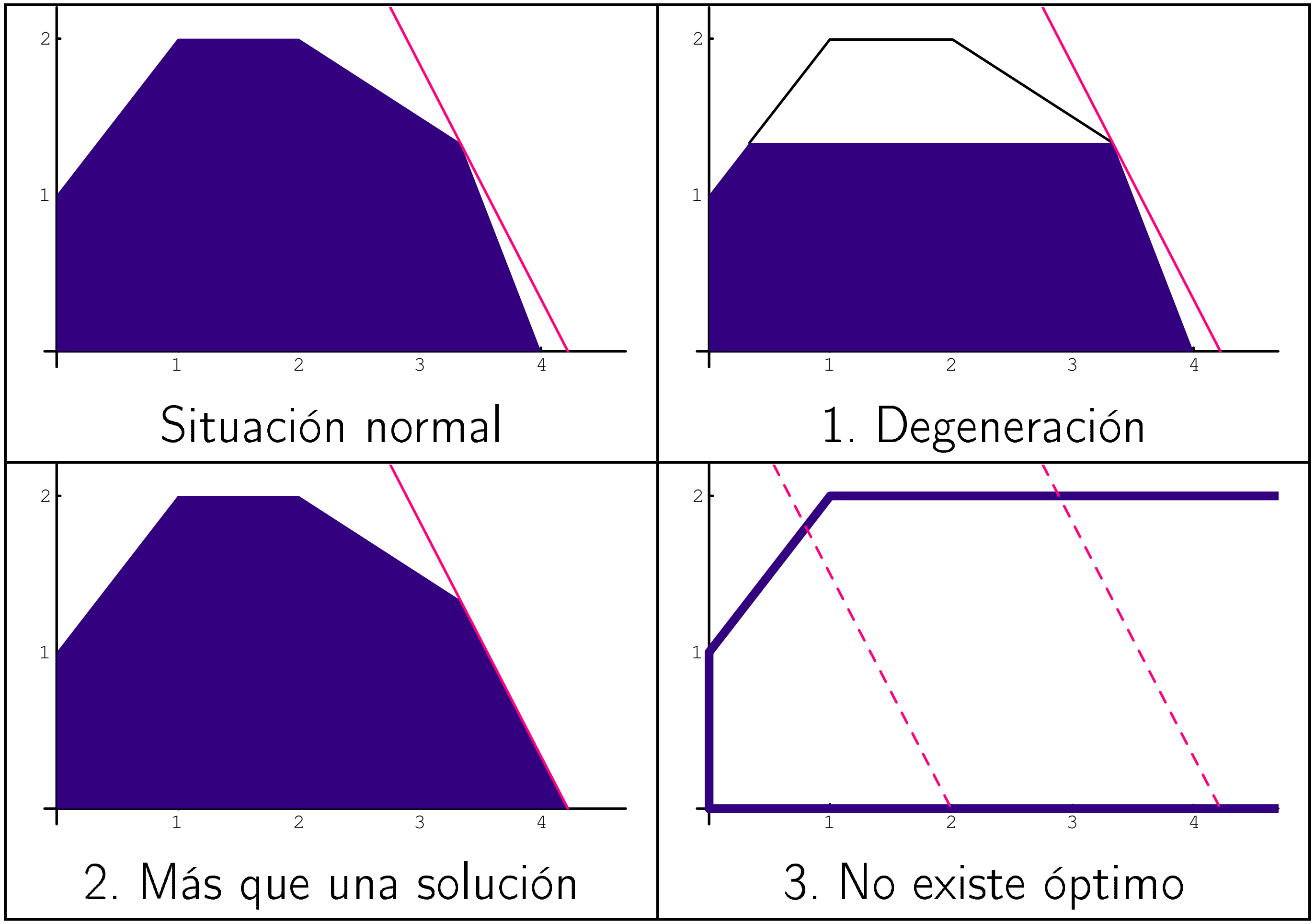
$S_2 = 8$

Casos especiales (1)

Como detecta el método simplex las situaciones siguientes?

1. Degeneración
2. Más que una solución óptima (opciones óptimas)
3. No existe óptimo (solución no acotada)
4. No existe ninguna solución factible (simplex vacío)

Casos especiales (2)



Situación normal — 1. Degeneración — 2. Más que una solución — 3. No existe óptimo

Casos especiales (3)

1. Degeneración:

   En el óptimo hay una variable básica con valor 0 en la RHS. Puede conducir teóricamente a un ciclo en el método simplex

2. Opciones óptimas:

   Una variable no básica tiene coeficiente 0 en la función objetivo. El otro extremo óptimo se puede determinar haciendo que esta variable entra en la base y se determina la que sale.

3. Solución no acotada:

   Si los coeficientes en las restricciones de una variable no básica son todos negativos o 0, esta variable no puede entrar en la base. Significa que esta variable no está acotada en el simplex. Si además el coeficiente de la función objetivo de esta variable es negativo (en el caso de maximización), la función objetivo no está acotada, es decir, no existe un máximo. (Generalmente un problema de modelación)

4. No existe solución factible:

   Hay una variable artificial que no sale de la base

Ejemplos: 1. Degeneración

$$\max 3x_1 + 9x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 4x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	coc.	
z	1	-3	-9	0	0	0		entra x_2
s_1	0	1	4	1	0	8	2	sale s_1
s_2	0	1	2	0	1	4	2	
z	1	-3/4	0	9/4	0	18		entra x_1
x_2	0	1/4	1	1/4	0	2	8	sale s_2
s_2	0	1/2	0	-1/2	1	0	0	
z	1	0	0	3/2	3/2	18	sol. óptima	
x_2	0	1	0	1/2	-1/2	2		
x_1	0	0	1	-1	2	0		

La variable básica x_1 tiene valor 0 en el óptimo, lo que significa que hay degeneración.

Ejemplos: 2. Opciones óptimas

$$\max\ 2x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	coc.	
z	1	-2	-4	0	0	0		entra x_2
s_1	0	1	2	1	0	5	5/2	sale s_1
s_2	0	1	1	0	1	4	4	
z	1	0	0	2	0	10		sol. óptima
x_2	0	1/2	1	1/2	0	5/2	5	entra x_1
s_2	0	1/2	0	-1/2	1	3/2	3	sale s_2
z	1	0	0	3/2	3/2	18	segunda sol. óptima	
x_2	0	1	0	1/2	-1/2	2		
x_1	0	0	1	-1	2	0		

La segunda iteración ya llega a una solución óptima, sin embargo, el coeficiente de la función objetivo de la variable x_1 queda en 0. Se encuentra otra solución alterna, entrando esta variable en la base.

Ejemplos: 3. Solución no acotada

$$
\begin{array}{rcrcl}
\max 2x_1 & + & x_2 & & \\
\\
\text{s.a.} & & & & \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 10 \\
2x_1 & & & \leq & 40
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	coc.	
z	1	-2	-1	0	0	0		entra x_1
s_1	0	1	-1	1	0	10	10	sale s_1
s_2	0	2	0	0	1	40	20	
z	1	0	-3	2	0	20		entra x_2
x_1	0	1	-1	1	0	10	-	sale s_2
s_2	0	0	2	-2	1	20	10	
z	1	0	0	-1	3/2	50		entra s_1
x_1	0	1	0	0	1/2	30		no hay variable que pueda salir
x_2	0	0	1	-1	1/2	10		

No hay variable que sale, por eso la solución es no acotado. (Lo podemos ver ya en el primer tablero, ya que hay una variable candidata a salir, x_1, que tiene puros coeficientes negativos o 0 en las restricciones)

Ejemplos: 4. No existe solución factible

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lcccl} \text{s.a.} & & & & \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \geq & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0$$

Estandarizado

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{lcccccccccl} \text{s.a.} & & & & & & & & & & \\ 2x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & - & s_2 & + & A & = & 12 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\; x_2 \geq 0;\; s_1 \geq 0;\; s_2 \geq 0;\; A \geq 0$$

Con $A = 12 - 3x_1 - 4x_2 + s_1$ se obtiene la f.o. :

$$\max 3x_1 + 2x_2 - M\,A = 3x_1 + 2x_2 - M(12 - 3x_1 - 4x_2 + s_1)$$
$$= x_1(3 + 3M) + x_2(2 + 4M) - s_1 M - 12M$$

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	A	RHS	coc.	
z	1	-3M-3	-2-4M	M	0	0	-12M		entra x_2
s_1	0	2	1	1	0	0	2	2	sale s_1
A	0	3	4	0	-1	1	12	3	
z	1	1+5M	0	2+4M	M	0	-4-M		sol. óptima
x_2	0	2	1	1	0	0	4	-	con variable artificial
A	0	-5	0	-4	-1	1	20	10	

No se puede mejorar la f.o., pero queda una variable artificial básica (valor mayor que 0). El simplex está vacío.

El método simplex revisado

- El algoritmo simplex como introducido hasta el momento, no es optimizado.
- Se gasta más espacio (la tabla) y más tiempo de computación (actualización de la tabla) que realmente se requiere.
- El método simplex revisado utiliza espacio y cálculo mínimo

Idea

Tablero inicial:

v. b.	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$\Downarrow$

Tablero final

v. b.	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	1	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
x_i	0	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
x_e	0	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
s_3	0	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

matriz identidad inicial correspondiente
a las variables básicas iniciales

$\Downarrow$ (operaciones elementales,
correspondientes en total
a multiplicación con una matriz B)

matriz identidad final correspondiente
a las variables básicas finales

Por debajo de la matriz identidad
inicial se obtiene B^{-1}

Idea: actualizar B^{-1} en cada iteración.

Notación

El método simplex en forma matricial:

$$\max c^T x$$
$$\text{s.a } Ax = b;\ x \geq 0$$

Dividir el problema en una parte básica y otra no básica:

$$c = c_B + c_N;\ x = x_B + x_N;\ A = [BN];$$

El problema se se escribe como

$$\max z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$
$$\text{s.a. } B\,x_B + N\,x_N = b;\ x \geq 0$$

Procedimiento

La solución en la iteración, x_B, se obtiene por multiplicación de la ecuación con B^{-1}:
$x_B = B^{-1}\, b - B^{-1} N\, x_N$;
Substituyendo x_B en la f.o se obtiene
$z = c_B^T\, B^{-1}\, b - c_B^T\, B^{-1} N\, x_N + c_N^T\, x_N = c_B^T\, B^{-1}\, b - (c_B^T\, B^{-1} N - c_N^T) x_N$

1. Se selecciona la variable x_j que entra (que tiene coeficiente más negativo en la f.o, en el caso de maximización), es decir, la componente más negativo del vector $(c_B^T\, B^{-1} N - c_N^T)$.

2. La variable que sale se determina por el cociente (más bajo positivo), es decir dividiendo los componentes de $B^{-1}\, b$ por los de la columna j de la matriz A, digamos seleccionando x_i.

3. Se actualiza las variables básicas x_B y no básicas x_N y ajusta c_B, c_N y N.

4. Se actualiza B^{-1}: se aplica las operaciones que convierten el vector x_j en el $i-$ésimo vector unitario.

Ejemplo (las pinturas)

$$\max 3x_e + 2x_i$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rcrcccccl}
x_e & + & 2x_i & +s_1 & & & & = & 6 \\
2x_e & + & x_i & & +s_2 & & & = & 8 \\
-x_e & + & x_i & & & +s_3 & & = & 1 \\
 & & x_i & & & & +s_4 & = & 2
\end{array}$$

$$x_e \geq 0;\ x_i \geq 0;\ s_1 \geq 0;\ s_2 \geq 0;\ s_3 \geq 0;\ s_4 \geq 0$$

Datos iniciales:

$$c_N^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix};\ N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$x_B = \{s_1, s_2, s_3, s_4\};\ x_N = \{x_1, x_2\}$$

Iteración 1:

1. Determinar la variable que entra: $(c_B^T B^{-1}N - c_N^T) = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & -2 \end{pmatrix}$. La primera componente es más negativo $(j = 1)$, se obtiene : entra la primera variable de x_N, es decir x_1

2. Determinar la variable que sale con el cociente entre

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } y = \left(B^{-1}N\right)_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se obtiene $i = 2$, sale la segunda variable de x_B, es decir s_2.

3. Actualizar variables básicas y no básicas (intercambiar x_1 y s_2): $x_B = \{s_1, x_1, s_3, s_4\}$; $x_N = \{s_2, x_2\}$; correspondientemente se obtiene:

$$c_B = \{0, 3, 0, 0\};\ c_N = \{0, 2\};\ N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Actualizar B^{-1}:

- dividir la fila i de B^{-1} por la i- ésima componente de y:

  Se obtiene $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- para las filas $k \neq i$: $fila_{nueva}(k) = fila_{actual}(k) - y_k \cdot fila(i)$.

  Se obtiene $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Iteración 2:

1. Determinar la variable que entra:

$$(c_B^T B^{-1} N - c_N^T) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La segunda componente es más negativo $(j = 2)$, se obtiene : entra la segunda variable de x_N, es decir x_2

2. Determinar la variable que sale con el cociente entre

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } y = \left(B^{-1}N\right)_j = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se obtiene $i = 1$, sale la primera variable de x_B, es decir s_1.

3. Actualizar variables básicas y no básicas (intercambiar x_1y s_2): $x_B = \{x_2, x_1, s_3, s_4\}$; $x_N = \{s_2, s_1\}$; correspondientemente se obtiene:

$$c_B = \{2, 3, 0, 0\};\ c_N = \{0, 0\};\ N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Actualizar B^{-1}:

- dividir la fila i de B^{-1} por la i- ésima componente de y: Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- para las filas $k \neq i$: $fila_{nueva}(k) = fila_{actual}(k) - y_k \cdot fila(i)$. Se obtiene:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 3:

1. Determinar la variable que entra:

$$(c_B^T B^{-1} N - c_N^T) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Dado que no hay componentes negativos, llegamos al óptimo.

Solución óptima:

Variables básicas: $x_B = \{x_2, x_1, s_3, s_4\}$; el RHS se obtiene por

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \text{ es decir: } \begin{array}{rcc} x_2 & = & 4/3 \\ x_1 & = & 10/3 \\ s_3 & = & 3 \\ s_4 & = & 2/3 \end{array}$$

Variables no básicas: $x_N = \{s_2, s_1\}$, es decir: $\begin{array}{rcc} s_2 & = & 0 \\ s_1 & = & 0 \end{array}$

Valor óptimo de la función objetivo:

$$z_{opt} = c_B^T \cdot x_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 38/3 \ .$$

El método simplex dual

Si muchas de las restricciones en el modelo son de tipo $\geq$, se deben introducir muchas variables artificiales, o sea se aumenta el tamaño del problema.

El método Simplex dual es una variante del método simplex:

	Método simplex	Método simplex dual
condición inicial:	una solución básica factible (no óptima)	una solución básica óptima (no factible)
iteración:	encontrar una solución básica vecina, que mejora el valor de la función objetivo, manteniendo la factibilidad	encontrar una solución básica vecina, que mejora la factibilidad, manteniendo la optimidad
condición de parada:	la solución obtenida es óptima	la solución obtenida es factible

Proceso

1. Estandarizar el problema:

- Las restricciones se cambian a igualdades, sumando una variable de holgura o restando una variable de exceso

- se hacen positivos los coeficientes de las variables de exceso (multiplicando la restric-ciones correspondientes con (-1)

- se substituyen en todo el modelo las variables irrestrictas x por $x^+ - x^-$.

Ejemplo

Problema:

$$
\begin{array}{rcrcl}
\min 3x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
3x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\
4x_1 & + & 3x_2 & \geq & 6 \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 3
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0$$

Forma estándar:

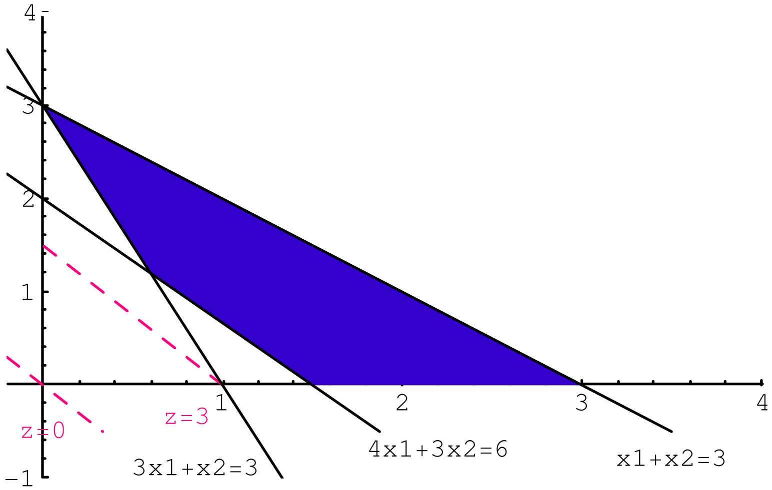
$$
\begin{array}{rcrcccl}
\min 3x_1 & + & 2x_2 & & & & \\
\text{s.a.} & & & & & & \\
-3x_1 & - & x_2 & +s_1 & & & = -3 \\
-4x_1 & - & 3x_2 & & +s_2 & & = -6 \\
x_1 & + & x_2 & & & +s_3 & = 3
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0; \; s_1 \geq 0; \; s_2 \geq 0; \; s_3 \geq 0$$

Se obtiene una solución inicial no factible: $s_1 = -3; \; s_2 = -6; \; s_3 = 3; \; x_1 = 0; \; x_2 = 0$.

La solución es óptima, ya que haciendo x_1 o x_2 estrictamente positivo, se empeora la función objetivo.

Método simplex dual: Solución gráfica



- Determinar la variable que sale (la más negativa)

- Determinar la variable que entra (se debe mantener optimidad)

Tabla simplex inicial

Tablero inicial:

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
s_1	0	-3	-1	1	0	0	0	-3
s_2	0	-4	-3	0	1	0	0	-6
s_3	0	1	1	0	0	1	0	3

- Determinar la variable que sale (la más negativa)

  candidatos son $s_1 = -3$ y $s_2 = -6$, entonces sale s_2.

- Determinar la variable que entra (se debe mantener optimidad)

  Formar el cociente entre z y la fila pivote, entre la variable con cociente >0 más pequeño. $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, por eso entra x_2.

- Actualizar la tabla simplex

Cálculo Simplex dual

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
s_1	0	-3	-1	1	0	0	0	-3
s_2	0	-4	-3	0	1	0	0	-6
s_3	0	1	1	0	0	1	0	3

sale s_2, entra x_2

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	1	-1/3	0	0	-2/3	0	0	4
s_1	0	-5/3	0	1	-1/3	0	0	-1
x_2	0	4/3	1	0	-1/3	0	0	2
s_3	0	-1/3	0	0	1/3	1	0	1

sale s_1, entra x_1

v. b.	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	1	0	0	-1/5	-3/5	0	0	21/5
x_1	0	1	0	-3/5	1/5	0	0	3/5
x_2	0	0	1	4/5	-3/5	0	0	6/5
s_3	0	0	0	-1/5	2/3	1	0	6/5

solución factible y óptima

Problema 1: La fábrica de muebles

(Todos los problemas están tomados de Taha, Investigación de operaciones)

Una pequeña fábrica de muebles produce mesas y sillas. tarda 2 horas en ensamblar una mesa y 30 minutos en armar una silla . En ensamblaje lo realizan 4 trabajadores sobre la base de un solo turna diario de 8 horas. Los clientes suelen comprar cuando menos 4 veces más sillas que mesas. El precio de venta es $135 por mesa y $50 por silla.

Determine la combinación de sillas y mesas en la producción diaria que maximice el ingreso diario de la fábrica.

Problema 2: Alimentación de animales

Un agricultor posee 200 cerdos que consumen 90 lb de comida especial todos los días. El alimento se prepare como mezcla de maíz y harina de soya con las siguientes composiciones (en libras):

	calcio (libra)	proteína (libra)	fibra (libra)	costo ($/libra)
maíz (libra)	0.001	0.09	0.02	0.20
soya (libra)	0.002	0.60	0.06	0.60

Los requerimientos diarios de los cerdos son:

cuando menos 1 % de calcio

por lo menos 30 % de proteína

mínimo 5 % de fibra.

Determine la mezcla con el costo mínimo por día.

Problema 3: Asignación de préstamos

Un banco asigna un máximo de \$20.000 para préstamos personales y para automóviles durante el mes siguiente. El banco cobra una tasa de interés de 14 % a prestamos personales y de 12 % a préstamos para automóviles. Ambos tipos de préstamos se saldan en períodos de 3 años. El monto de préstamos para automóviles debe ser cunado menos dos veces mayor que el de los préstamos personales. La experiencia ha demostrado que los adeudos no cubiertos constituyen el 1 % de todos los préstamos personales.

Cómo se deben asignar los fondos?

Problema 4: Conservas de tomate

Una compañía tiene un contrato de recibir 60.000 libras de tomates maduros a 7 centavos por libra, de los cuales producirá jugo de tomate y puré de tomate enlatados. Los productos enlatados se empacan n cajas de 24 latas cada uno. una lata de jugo requiere 1 lb de tomates, una de puré requiere solo 1/3 lb. La participación de la compañía en el mercado está limitada a 2.000 cajas de jugo y 6.000 de puré. Los precios al mayoreo por caja de jugo y de puré son $18 y$9 respectivamente.

Genere un programa de producción a esta empresa.

Problema 5: Ensamblaje de radios

En una línea de producción se ensamblan dos modelos de radio, HiFi-1 y HiFi-2. La línea consiste de tres estaciones. Los tiempos de ensamblaje de las estaciones de trabajo son:

estación de trabajo	HiFi-1 (min por unidad)	HiFi-2 (min por unidad)
1	6	4
2	5	5
3	4	6

Cada estación tiene una disponibilidad de 480 minutos por día. Sin embargo, las estaciones de trabajo requieren mantenimiento diario que contribuye al 10 %, 14 % y 12 % de los 480 minutes totales de que se disponen diariamente para las estaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

La compañía desea determinar las unidades diarias a ensamblar de HiFi-1 y HiFi-2 a fin de minimizar la suma de los tiempos no ocupados en las tres estaciones.

Problema 6: Asignación de aviones

Se tiene 3 tipos de aviones que se deben asignar a cuatro rutas.

Datos:

tipo de avión	capacidad (pasajeros)	números de aviones	número de viajes diarios ruta 1	ruta 2	ruta 3	ruta 4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
número de clientes			1000	2000	900	1200

tipo de avión	costo de operación por viaje ruta 1	ruta 2	ruta 3	ruta 4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
costo de penalización por cliente no transportado	40	50	45	70

Problema 7: Planes de inversión

Un ejecutivo de una empresa tiene la opción de invertir dinero en dos planes. Plan A garantiza que cada unidad monetaria invertida ganará 70 centavos de aquí a un año, y plan B garantiza que cada unidad invertida ganará \$2.00 de aquí a 2 años. En el plan B, sólo se permite inversiones en períodos que sean múltiplos de 2 años.

Cómo debe invertir el ejecutivo \$100.000 para maximizar los ingresos al cabo de tres años?

Solución 1: La fábrica de muebles

Modelación:

1. Definición de las variables (sobre qué se puede decidir)
   x_1 : cantidad de mesas a producir
   x_2 : cantidad de sillas a producir

2. Definición de la función objetivo (criterio de decisión)
   $\max z = 135x_1 + 50x_2$

3. Restricciones

   a) el tiempo requerido para la producción debe ser menro o igual al tiempo disponible
   $2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 32$

   b) Se produce por lo menos 4 veces más sillas que mesas
   $4x_1 \leq x_2$

   c) Restricciones obvias:
   $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$;

Modelo:

$$\min 4x_1 + x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 0{,}5x_2 & \leq & 32 \\ 4x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0$$

Método simplex revisado

Forma estándar:

$$\min 4x_1 + x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{rcrrrcl} 2x_1 & + & 0{,}5x_2 & +s_1 & & = & 32 \\ 4x_1 & - & x_2 & & +s_2 & = & 6 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0;\ \ s_1 \geq 0;\ \ s_2 \geq 0$$

Análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad se hace a partir de la solución óptima.
Se puede analizar:

- Solución óptima
- Estado de los recursos
- Precio dual (valor unitario de un recurso)
- Cambios en la disponibilidad de un recurso