Primer Examen - NP-Completitud Complejidad y Optimización Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación Universidad del Valle



Nombre:	
Código:_	

El problema de Partición (PRT)

- Entrada: Un conjunto de enteros positivos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}.$
- Salida: 1 si existe una partición de \mathcal{A} , es decir dos conjutnos \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 tales que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ y $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, tales que

$$\sum_{a_i \in \mathcal{A}_1} a_i = \sum_{a_i \in \mathcal{A}_2} a_i.$$

0 en caso contrario.

El problema de la suma de subconjuntos(SS)

- Entrada: Un conjunto $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ de n números, y una constante C.
- ${\color{red}\bullet}$ Salida: 1 si existe un subconjunto M' de M tal que

$$\sum_{m \in M'} m = C$$

El objetivo de este examen es demostrar que \mathcal{SS} es NP-Completo.

1. Entendimos los problemas [30 pts.]

- a) [2 pts.] Cual es la salida de SS para la entrada $n = 7, A = \{7, 5, 19, 1, 12, 8, 14\}, C = 33.$
- b) [2 pts.] Cual es la salida de SS para la entrada $n = 5, A = \{7, 5, 19, 8, 14\}, C = 52.$
- c) [2 pts.] Cual es la salida de \mathcal{PRT} para la entrada $\mathcal{A} = \{8, 3, 1, 4, 10\}.$
- d) [2 pts.] Cual es la salida de \mathcal{PRT} para la entrada $\mathcal{A} = \{5, 6, 9, 3\}.$
- e) [6 pts.] Describa tres instancias de SS para las que la respuesta sea positiva.

- f) [5 pts.] Describa tres instancias de SS para las que la respuesta sea negativa.
- Escojo _____
- g) [5 pts.] Describa tres instancias de \mathcal{PRT} para las que la respuesta sea positiva.
- Justifique porqué descarta cada una de las otras dos:
- h) [6 pts.] Describa tres instancias de \mathcal{PRT} para las que la respuesta sea negativa.
- Descarto _____porque:

Descarto _____porque:

- 2. [70 pts.] Demuestre que SS es NP-completo, suponiendo que PRT lo es. Es decir:
 - a) [10 pts.] Demuestre que SS es NP

2) [10 pts.] Muestre que entiende la reducción, es decir:

- b) [60 pts.] Demuestre que SS es NP-Hard:
 - 1) [10 pts.] Escoja entre las tres reducciones siguientes la que utilizará para su demostración.

RedA $\mathcal{PRT} \preceq \mathcal{SS}$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, tal que n = p y $m_i = a_i$, para i = 1...n, y $\uparrow = A$ 1 y A2

$$C = \lceil \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} \rceil$$

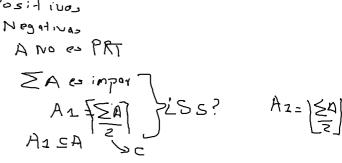
RedB $\mathcal{PRT} \leq \mathcal{SS}$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, tal que n = p y $m_i = a_i$, para i = 1..n, y

$$C = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} & \text{Si } \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ es par} \\ 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i & \text{Si no} \end{cases}$$

RedC $\mathcal{PRT} \leq \mathcal{SS}$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, tal que n = p y $m_i = a_i$, para i = 1..n, y

$$C = \lfloor \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} \rfloor$$

a' [5 pts.] Para una de las instancias positivas del problema del lado izquierdo muestre claramente la instancia que le corresponde según la reducción, y verifique que ésta sea una instancia positiva para el problema del lado derecho.



b' [5 pts.] Para una de las instancias negativas del problema del lado izquierdo muestre claramente la instancia que le corresponde según la reducción, y verifique que ésta sea una instancia negativa para el problema del lado derecho.

- 3) [30 pts.] Demuestre que la reducción es correcta, es decir:
 - a' [15 pts.] Instancias positivas del problema del lado izquierdo se reducen siempre en instancias positivas del problema del'lado derecho.

b' [15 pts.] Instancias negativas del problema del lado izquierdo se reducen siempre en instancias negativas del problema del lado derecho.

4) [10 pts.] Demuestre que la reducción se hace en tiempo polinomial.