Métodos Numéricos

Introducción

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

February 8, 2015

Agenda

Modelo Matemático.
Ecuación General.

- Un modelo matemático es una ecuación que expresa las características esenciales de un proceso

$$vd = f(vi, params, ie)$$

Donde:
vd = variable dependiente
vi = variables independientes
params = parámetros
ie = influencias externas

Modelo Matemático.
Caso de Estudio.

- Segunda Ley de Newton

$$F = ma$$

Donde:
F = fuerza actuando sobre el cuerpo (N ó $kg\frac{m}{s^2}$)
m = masa del objeto (kg)
a = aceleración ($\frac{m}{s^2}$)

Modelo Matemático.
Caso de Estudio.

- Despejando la aceleración

$$a = \frac{F}{m}$$

Donde:
a = variable dependiente
F = influencia externa
m = parámetro

Modelo Matemático.
Caso de Estudio.

- La formula anterior:
  - Describe un proceso natural en términos matemáticos
  - Simplifica la realidad
  - Permite realizar una predicción

Fricción
Resistencia del aire
Estructura del objeto

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Segunda Ley de Newton para calcular la velocidad terminal de un objeto en caída libre

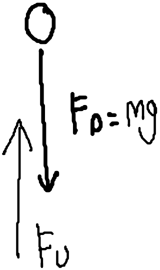
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

- La aceleración aumenta si la fuerza es positiva
- La aceleración disminuye si la fuerza es negativa
- La velocidad es constante si la fuerza es cero

Modelo Matemático.
Caso de Estudio.

- Es posible expresar F en términos de dos fuerzas opuestas

$$F = F_D + F_U$$
$$F_D = mg$$
$$F_U = -c_d v$$



Donde:
$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$
c_d = coeficiente de arrastre ($\frac{kg}{s}$)

Modelo Matemático.

Caso de Estudio.

- Combinando las ecuaciones

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$$F = F_D + F_U$$

Se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_D + F_U}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - c_d v}{m}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v}{m}}$$

Modelo Matemático.
Solución Analítica.

- **Problema**: Obtenga una solución por medio del cálculo para la ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v}{m}$$

$$\frac{g - c_d v}{m} = \frac{dv}{dt}$$

- **Integral**:

$$\int \frac{1}{a - bx}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{b} \ln |a - bx|$$

$$\frac{dv}{g - c_d v} = \frac{1}{m} dt$$

$a = g$

$b = c_d$

$$\frac{dv}{g - c_d v} = \frac{1}{m} dt \qquad \int \frac{dv}{g - c_d v} = \int \frac{1}{m} dt$$

$$-\frac{1}{c_d} \ln(|g - c_d v|) = \frac{t}{m} + C$$

$t = 0 \quad v = v_0$

Modelo Matemático.
Solución Analítica.

- **Solución**:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{gm - c_d v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - kv$$

$$\frac{dv}{gm - C_d V} = \frac{1}{m} dt$$

$$\frac{dv}{g - kv} = dt$$

$$\frac{-1}{C_d} \ln(|gm - C_d v|) = \frac{t}{m} + C$$

$$\frac{-1}{k} \ln |g - kv| = t + B$$

$$|g - kv| = e^{-kt} e^{-kB}$$

C

$$\frac{-1}{c_d}\ln(|gm-c_dv|)=\frac{t}{m}+c$$

$$\ln(|gm-c_dv|)=-\frac{c_d}{m}t+c$$

$$gm-c_dV=e^{-\frac{c_d}{m}t+c}$$

$$gm-c_dv=e^{-\frac{c_d}{m}t}e^{c}$$

$$V=\frac{e^{-\frac{c_d t}{m}}e^{c}-gm}{-c_d}$$

$V=0$

$t=0$

$$0=\frac{1e^{c}}{c_d}-\frac{gm}{c_d}$$

$$\cancel{1e^{c}}=gm$$

c

$$V=\frac{e^{-\frac{c_d t}{m}}gm-gm}{-c_d}$$

$$\boxed{V=\frac{gm}{c_d}\left(1-e^{-\frac{c_d t}{m}}\right)}$$

Modelo Matemático.
Solución Analítica.

- Considerando que el objeto en $t = 0$, está en reposo $v = 0$

$$|g - 0| = e^{-0} e^{-kB}$$

V = V0

$$\boxed{g = e^{-kB}}$$

Reemplazando

$$g - kv = e^{-kt} g$$

$$-kv = e^{-kt} g - g$$

$$-kv = g(e^{-kt} - 1)$$

$$v = \frac{g}{-k}(e^{-kt} - 1)$$

$$\rightarrow v = \frac{gm}{c_d}(1 - e^{-(\frac{c_d}{m})t})$$

Modelo Matemático.
Solución Analítica.

- Note que la ecuación resultante está en la forma general

$$v = \frac{gm}{c_d}(1 - e^{-(\frac{c_d}{m})t})$$

Donde:
v = variable dependiente
t = variable independiente
m y c_d = parámetros
g = influencia externa

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

$V_0 = 0$

- **Problema**: Un paracaidista de masa 68.1*kg* salta de un globo estacionario. Encuentre su velocidad antes de abrir el paracaídas. El coeficiente de arrastre es igual a $12.5\frac{kg}{s}$

$t = 10 seg$

$$V = \frac{gm}{cd}\left(1 - e^{-\left(\frac{cd}{m}\right)t}\right)$$

$$V = \frac{9.8\,m/s^2 \times 68.1\,kg}{12.5\,kg/s}\left(1 - e^{-\left(\frac{12.5\,kg/s}{68.1\,kg}\right)\times 10\,s}\right) = 44.87\,\frac{m}{s}$$

Modelo Matemático.
Solución Analítica.

- **Solución**

$$v(t) = \frac{9.8(68.1)}{12.5}(1 - e^{-(\frac{12.5}{68.1})t})$$

Modelo Matemático.
Solución Analítica.

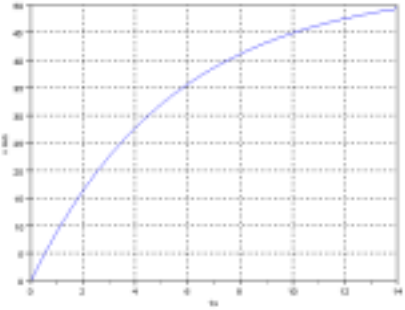
- **Instrucciones Scilab**

```
t = 0:2:12;
v = ((9.8*68.1)/(12.5))*(1-exp(-(12.5/68.1)*t));
plot(t,v)
```

Modelo Matemático.

Solución Analítica.

t en seg	v en $\frac{m}{s}$
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39



Modelo Matemático.

Solución Analítica.

- La ecuación anterior es llamada una solución exacta o analítica por que satisface exactamente la ecuación diferencial original
- Hay muchos modelos matemáticos que no pueden ser solucionados exactamente. En la mayoría de casos la única alternativa es encontrar una solución empleando métodos numericos que sea aproximada

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- En los métodos numericos el modelo matemático es reformulado para que pueda solucionarse por medio de operaciones aritméticas

Métodos Numéricos.
Método de Euler.

$$\frac{dx}{dy} = ?$$

- El cambio de velocidad respecto al tiempo en la Segunda Ley de Newton puede ser aproximado por

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

- Esta ecuación es llamada una aproximación por diferencias finitas en el tiempo t_i

Métodos Numéricos.
Método de Euler.

- Igualando las ecuaciones:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d v(t_i)}{m}$$

$V(0) = V_0$

Se tiene:

$$\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c_d v(t_i)}{m}$$

$$\boxed{v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c_d v(t_i)}{m}\right](t_{i+1} - t_i)}$$

Métodos Numéricos.

Método de Euler.

- La ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación que permite conocer la velocidad en el instante t_{i+1} a partir de valores previos de t y v

Métodos Numéricos.
Método de Euler.

- **Problema**: Un paracaidista de masa $68.1kg$ salta de un globo estacionario. El coeficiente de arrastre es igual a $12.5\frac{kg}{s}$. Emplee el método de Euler con intervalos de tiempo de 2 segundos para encontrar su velocidad antes de abrir el paracaídas.

Métodos Numéricos.
Método de Euler.

$v(t_0)=0$

- **Solución**

$$v(t_1) = v(t_0) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_0)\right](t_1 - t_0)$$

$t=2$

$$v(t_1) = 0 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(0)\right](2-0) = 19.60\frac{m}{s}$$

$$v(t_2) = v(t_1) + \left[g - \frac{c_d}{m} v(t_1)\right](t_2 - t_1)$$

$t=4$

$$v(t_2) = 19.60 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(19.60)\right](4-2) = 32.00\frac{m}{s}$$

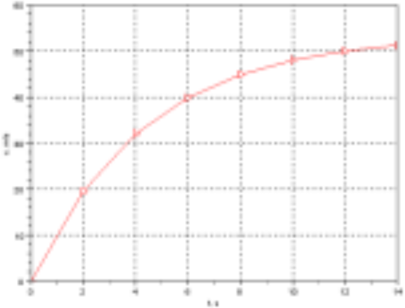
Métodos Numéricos.
Método de Euler.

- **Instrucciones Scilab**

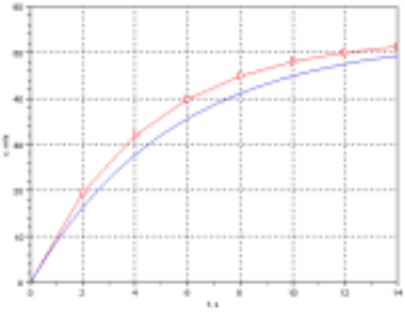
```
t = 0:2:12;
v(1) = 0;
//v = zeros(1,length(t));
for i = 1:length(t)-1
v(i+1) = v(i) + (9.81-(12.5/68.1)*v(i))*(t(i+1)-t(i));
end
plot(t,v,'color','red','marker','>');
```

Métodos Numéricos.
Método de Euler.

t en seg	v en $\frac{m}{s}$
0	0.00
2	19.60
4	32.00
6	39.85
8	44.82
10	47.97
12	49.96
∞	53.39

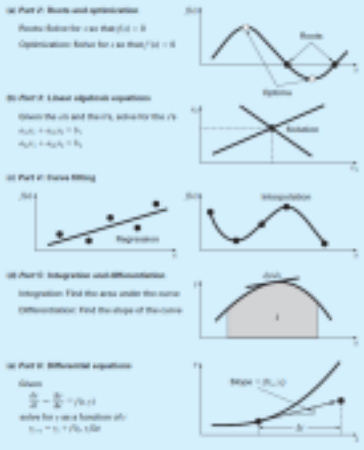


Métodos Numéricos.
Solución analítica Vs Solución Aproximada.



Métodos Numéricos en Ingeniería.

Métodos Numéricos.



Métodos Numéricos en Ingeniería.

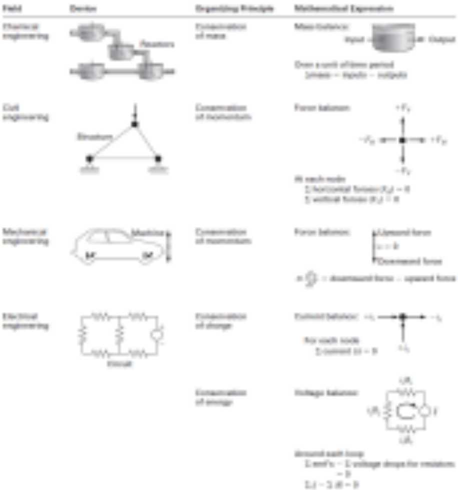
Algunas Aplicaciones.

- Las leyes de conservación son importantes en Ingenieria por que permiten **predecir** cambios con respecto al tiempo

$$\textit{cambios} = \textit{incrementos} - \textit{decrementos}$$

Métodos Numéricos en Ingeniería.

Algunas Aplicaciones.



Problemas I

$t=0$

$V=0$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{C_d V}{m}}$$

$$\int \frac{1}{a-bx}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{b} \ln|a-bx|$$

- **Problema**: Un primer paracaidista tiene una masa de 70*kg* y un coeficiente de arrastre de 12kg/s. Un segundo paracaidista tiene una masa de 80kg y un coeficiente de arrastre de 15kg/s. ¿Cuanto tiempo le tardará al segundo paracaidista alcanzar la misma velocidad que el primer paracaidista alcanza en 9 segundos?

$$\frac{V(t_{i+1})-V(t_i)}{t_{i+1}-t_i} = g - \frac{C_d V}{m}$$

$t=12$

$$V = \frac{gm}{Cd}\left(1 - e^{-\frac{Cd}{m}t}\right)$$

$$V = \frac{9.8 \times 70}{12}\left(1 - e^{-\frac{12}{70}(9)}\right) = 44.98$$

$$t = 12$$

Problemas I

mg

$\frac{dv}{dt} = F_D + F_U$

m

- **Problema**: En lugar de emplear una relación lineal para el coeficiente de arrastre, se recomienda modelar la fuerza hacia arriba como una relación de segundo orden, $F_U = -c_d v^2$, donde c_d es un coeficiente de arrastre de segundo orden (kg/m)

$a = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}$

  - Obtenga la solución analítica para el caso donde el paracaidista esta inicialmente en reposo
  - Realice una tabla con las velocidades para un paracaidista de masa 68.1kg, coeficiente de arrastre de $0.225 kg/m$, para un tiempo desde $t = 0s$ a $t = 12s$. Realice una gráfica con los datos

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_D + F_U}{m} = \frac{mg - C_d v^2}{m} \qquad q = \sqrt{\frac{gm}{C_d}}$$

$$\frac{m}{C_d}\frac{dv}{dt} = \frac{m}{C_d}\left(\frac{mg - C_d V^2}{m}\right) \rightarrow \frac{m}{C_d}\cdot\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{C_d} - V^2$$

$$\frac{m}{C_d}\frac{dv}{dt} = q^2 - V^2 \longrightarrow \frac{dv}{q^2 - V^2} = \frac{C_d}{m}dt$$

$$\frac{1}{q}\tanh^{-1}\left(\frac{V}{q}\right) = \frac{C_d}{m}t + C \qquad t = 0 \quad V = 0$$

$$\frac{1}{q}\cancel{\tanh^{-1}}(0) = C \qquad C = 0$$

0

$$\frac{1}{q}\tanh^{-1}\left(\frac{V}{q}\right) = \frac{C_d t}{m} \rightarrow \tanh^{-1}\left(\frac{V}{q}\right) = \frac{q C_d}{m}t \qquad \sqrt{\frac{gm}{C_d}} \times \frac{C_d}{m}$$

$$\frac{V}{q} = \tanh\left(q\frac{C_d}{m}t\right)$$

$$V = \sqrt{\frac{gm}{C_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gC_d}{m}}\,t\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_D + F_U}{m} = \frac{mg - C_d v^2}{m}$$

$$\frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{\Delta t} = \frac{mg - C_d (V(t_i))^2}{m}$$

$$V(t_{i+1}) = \Delta t \left(\frac{mg - C_d (V(t_i))^2}{m} \right) + V(t_i)$$

Problemas I

- **Problema**: Un paracaidista de masa $68.1kg$ salta de un globo estacionario. El coeficiente de arrastre es igual a $0.225\frac{kg}{m}$. Emplee el método de Euler con intervalos de tiempo de 2 segundos para encontrar su velocidad antes de abrir el paracaídas.

Integrales I

$$\int \frac{1}{a-bx}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{b}\ln|a-bx|$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$$

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.

Obtener solución análitica y por método de Euler. Con paso de 2 obtener los valores de t desde 0 hasta 6.

$$\frac{dT}{dt} = k(T-60)$$

$T_0 = 80$ $t=0$ $k=-0.35$ $T \geq 60$

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln(|x+a|) + C \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{dT}{(T-60)} = k\,dt$$

$$\ln(|T-60|) = kt + c \rightarrow T-60 = e^{kt} \times e^{c}$$

$$T = e^{kt} \times e^{c} + 60$$

$$80 = e^{-0.35(0)} \times e^{c} + 60 \qquad e^{c} = 20 \qquad T = 20 \times e^{-0.35t} + 60$$

t	T
0	80
2	69.93
4	64.932
6	62.45

$$\frac{dT}{dt} = k(T-60) \rightarrow \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t} = k(T(t_i) - 60)$$

$$T(t_{i+1}) = 2(-0.35(T(t_i) - 60)) + T(t_i)$$

$T(0) = 80$

t	T
0	80
2	66
4	61.8
6	60.54

$$\frac{dx}{dt} = t(1+x) \qquad x_0 = 100 \qquad t=0 \qquad x \geq 0$$

$$\frac{dx}{1+x} = t\,dt \to \ln(|1+x|) = \frac{t^2}{2} + c$$

$$1+x = e^{\frac{t^2}{2}} \times e^c$$

$$x = e^{\frac{t^2}{2}} \times e^c - 1 \qquad 100 = e^c - 1$$

$$e^c = 101$$

$$x = 101\, e^{\frac{t^2}{2}} - 1$$

t	x
0	100
2	745.3
4	301 075.75
6	6 631 656.88

$$\frac{dx}{dt} = t(1+x) \qquad \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t} = t_i(1 + x(t_i))$$

$$x(0) = 100 \qquad x(t_{i+1}) = 2\, \underline{t_i}\,(1 + x(t_i)) + x(t_i)$$

t	x
0	100
2	100
4	504
6	2524