Métodos Numéricos

Raíces y Optimización

Daniel Barragán [1]

[1] Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

March 30, 2015

Agenda

Raíces.
Introducción.

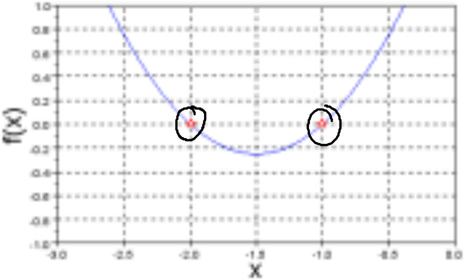
- La fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Permite encontrar las raíces o ceros de la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Raíces.
Introducción.



Raíces.
Introducción.

- Existen funciones donde las raíces no se encuentran fácilmente

Raíces.
Introducción.

- **Problema:** ¿Cómo determinar la masa para la cual ~~después de~~ 4 segundos de caída la velocidad excede los 36 m/s?

$t = 4$

$$v(t) = \boxed{\sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)}$$

Raíces.
Introducción.

- **Solución:**

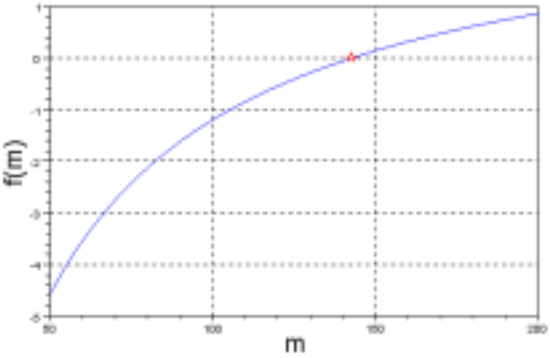
$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right) - v(t)$$

La respuesta corresponde al valor de m que hace la función $f(m)$ igual a cero. El problema ahora es encontrar las raíces de la ecuación $f(m)$

Raíces.
Introducción.

- **Instrucciones Scilab:**
    - scriptmasa.sce

Raíces.
Introducción.



Raíces.

Introducción.

- Los métodos gráficos carecen de precisión
- Los métodos por ensayo y error son ineficientes

Raíces.
Introducción.

- Los métodos numéricos emplean estrategias sistemáticas para encontrar las raíces

Métodos de Encierro.

Introducción.

- Los métodos de encierro se basan en escoger dos puntos de partida que encierran la raíz
- Convergen lentamente a la solución

Métodos de Encierro.

Búsqueda Incremental.

- Si $f(x)$ es real y continua en el intervalo de x_l a x_u y si $f(x_l)$ y $f(x_u)$ tienen signos opuestos, entonces:

$$f(x_l)f(x_u) < 0$$

Existe al menos una raíz real entre x_l y x_u

Métodos de Encierro.
Búsqueda Incremental.

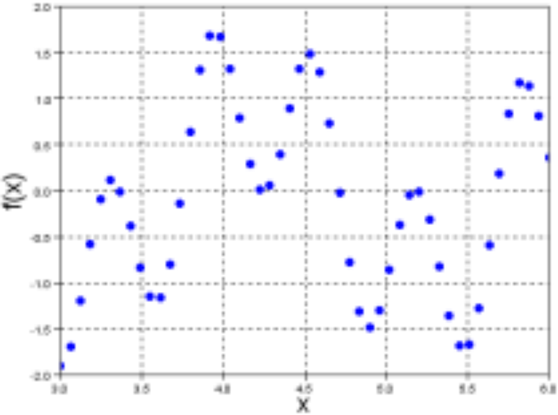
- **Instrucciones Scilab:**
  - busquedaincremental.sce

Métodos de Encierro.

Búsqueda Incremental.

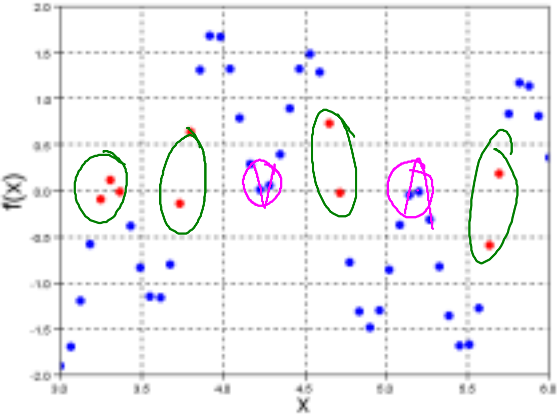
- **Problema:** Empleando el método de búsqueda incremental identifique las raíces de la función: $f(x) = sin(10x) + cos(3x)$. Use el intervalo [3,6]

Métodos de Encierro.
Búsqueda Incremental.

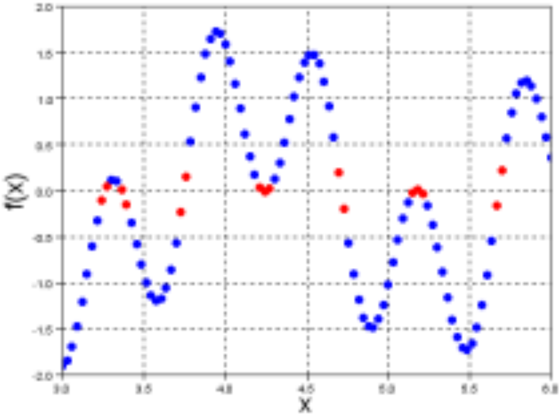


Métodos de Encierro.

Búsqueda Incremental.



Métodos de Encierro.
Búsqueda Incremental.



Métodos de Encierro.

Búsqueda Incremental.

- En el anterior ejercicio se pasa de 50 a 100 divisiones y se logra obtener la totalidad de las raíces
- Al ejecutar el algoritmo de búsqueda incremental puede ocurrir:
  - No hay raíces en el intervalo
  - Existe un cambio de signo en la función, pero el incremento es muy grande y no se detecta el cambio

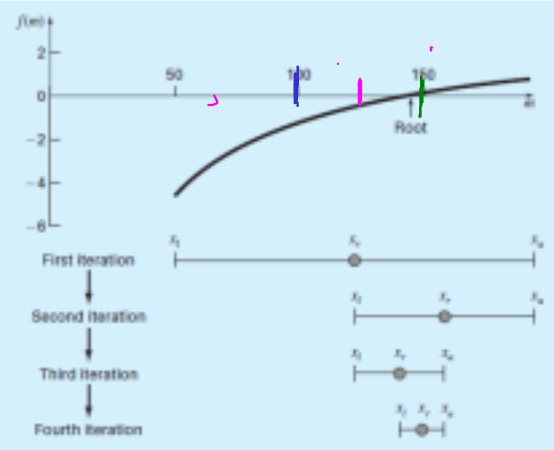
Métodos de Encierro.

Bisección.

- En el método de bisección al encontrar un intervalo x_l a x_u con cambio de signo, se evalua el valor de la función en la mitad del intervalo $x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$.
- Si $f(x_l)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos, se asigna para la siguiente iteración $x_u = x_r$
- Si $f(x_r)$ y $f(x_u)$ tienen signos opuestos, se asigna para la siguiente iteración $x_l = x_r$

Métodos de Encierro.
Bisección.

$$\frac{x_1 + x_0}{2}$$



Métodos de Encierro.
Bisección.

- Es posible conocer el número de iteraciones a realizar para obtener un error deseado

$$n = \log_2 \left(\frac{\Delta x^0}{E_{a,d}} \right)$$

Donde:
n es el número de iteraciones
Δx^0 es la separacion inicial entre xl y xu
$E_{a,d}$ es el error deseado

Métodos de Encierro.

Bisección.

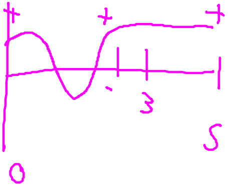
- **Instrucciones Scilab:**
  - biseccion.sce

$x^2 - 10x + 1$ $[0 , 5]$

1) $f(0) = 1$

$f(5) = 1$

$f(2.5) = -17.75$



2) $\overset{+}{[0}, \overset{-}{2.5]}$

3) $[0, 1.25]$

$f(1.25) = -9$

$f(0{,}625) = -4.8$

4) $[0, 0{,}625]$

...

$\log_2(x) = \dfrac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$

$E_a = 0{,}5\%$

$n = \log_2\left(\frac{5}{0.5}\right) = 3{,}32$

$2x^2 - 5x - 1$ $\qquad [0, 10]$ $\qquad n = 4$

2.6861

1) ε_a

2) ε_r

raiz

	X_l	X_u	X_r	ε_a	ε_r
0	0	10	5	--	86%
1	0	5	2.5	100%	6,9%
2	2.5	5	3.75	33%	39.6%
3	2.5	3.75	3.125	20%	16,34%
4	2.5	3.125	2.8125	11%	4,7%

$F(0) = -1$

$F(10) = 149$

$F(5) = 24$

$F(2.5) = -1$

$F(3.75) = 8.375$

$F(3.125) = 2.9$

Métodos de Encierro.

Bisección.

$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right) - v(t)$$

- **Problema:** Empleando el método de bisección, determinar la masa para la cual después de 4 segundos de caída la velocidad excede los 36 m/s en el intervalo [50, 200].

  El coeficiente de arrastre es $0.25 kg/m$.
  La aceleración de la gravedad es de 9.81 m/s^2

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{F_D + F_U}{m} = \frac{gm - c_d V^2}{m}$$

Métodos de Encierro.

Falsa Posición.

$$X_r = \frac{X_l + X_u}{2}$$

$F(X_l) = -2.2$
$F(X_u) = 4.5$

- En el método de falsa posición la raíz x_r se localiza en el punto de intersección entre la línea que une $f(x_l)$ y $f(x_u)$ con el eje x
- La siguiente iteración se decide igual que en el método de bisección
- El método de falsa posición es superior al de bisección en la mayoría de los casos, sin embargo existe casos en los que no lo es

Métodos de Encierro.

Falsa Posición.

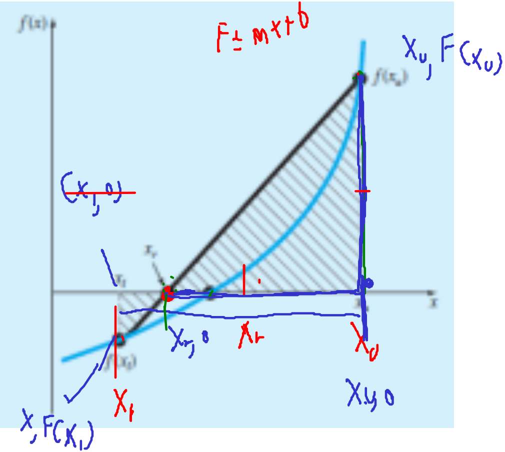
X_l —— X_u

Por ley de triangulos:

$$\frac{x_u - x_r}{f(x_u)} = \frac{(x_u - x_l)}{f(x_u) - f(x_l)}$$

Reordenando:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$



Métodos de Encierro.

Falsa Posición.

- **Instrucciones Scilab:**
  - falsaposicion.sce

Métodos de Encierro.

Falsa Posición.

- **Problema:** Empleando el método de falsa posición, determinar la masa para la cual después de 4 segundos de caída la velocidad excede los 36 m/s. Use el intervalo [50, 200].

  El coeficiente de arrastre es 0.25kg/m.
  La aceleración de la gravedad es de 9.81 m/s^2

1) Problemas que se solucionan encontrando las raices. Ejemplo tengo f(x) = a .. b .. c (independientes)

2) Métodos graficos. Dibuje la función y busque el corte por cero. Impreciso.

3) Métodos incrementales. Dividir el intervalo en n puntos y comparar punto i con punto i+1, f(i)*f(i+1)<0 hay cambio de signo. r = (p(i+1)+p(i))/2 (p punto)

4) Método de la biseccion xu, xl, xr = (xu+xl)/2

5) Método de la falsa posición xr = xu - f(xu)*(xl-xu)/
f(xl-xu)

Desventajas. Imprecisos, costos computaciones y muy sensibles a errores de redondeo e incertudumbre.

Métodos Abiertos.
Introducción.

- Los métodos abiertos se basan en escoger uno o dos puntos de partida, sin embargo no es necesario que estos puntos encierren la raíz
- Convergen más rápido que los métodos de encierro
- No funcionan en todos los casos

Métodos Abiertos.

Iteración del Punto Fijo.

- El método de iteración del punto fijo establece que dada una ecuación $f(x) = 0$, es posible transformarla en otra equivalente del tipo $x = g(x)$
- Un número a tal que $a = g(a)$ se dice punto fijo de la función g.
- El punto fijo a es importante ya que es raíz de $f(x)$

$$F(x) = 2x^2 - 5x - 1$$

$r_1 = 2.6861$

$r_2 = -0,1861$

$$2x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$5x = 2x^2 - 1 \qquad x = \frac{2x^2 - 1}{5}$$

$$x_{i+1} = \underline{2x_i^2 - 1} \qquad x_0 = 2$$

	x_i	ε_a	ε_s
1	1.4	42%	852%
2	0,584	58,28%	413%
3	-0,0635	1019%	65%
4	-0,1983	67%	6%
5	-0,1842	6.%	1%
6	-0,1864	1,18%	0,16%

Métodos Abiertos.
Iteración del Punto Fijo.

- **Instrucciones Scilab:**
  - puntofijo.sce

Métodos Abiertos.

Iteración del Punto Fijo.

$x_{i+1} = e^{-x_i}$

- **Problema:** Empleando el método de iteración de punto fijo encuentre la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$. Use una estimación inicial de $x_0 = 0$

i	x_i	$f(x_i)$	E_a
0	0	1	-
1	1	-0,6321	100%
2	0,36	0,3376	177,77%
3	0,6976	-0,1998	97%
4	0,4977	0,1102	40%
5	0,6079	-0,063	18%

$f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$

$$X_{i+1} = \frac{-2X^3 + 11.7x^2 + 5}{17.7}$$

Con el método de iteración simple de punto fijo (tres iteraciones, Xo = 3).

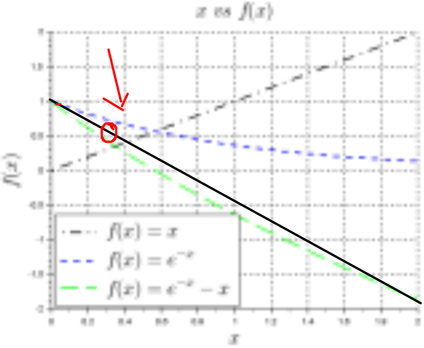
i	X_i	$F(x_i)$	Ea
0	3	-3,2	--
1	3.18	-2.71	5,66%
2	3.33	-1.95	4.5%
3	3.44	-1,15	3,19%

Métodos Abiertos.
Iteración del Punto Fijo.

- **Solución:**

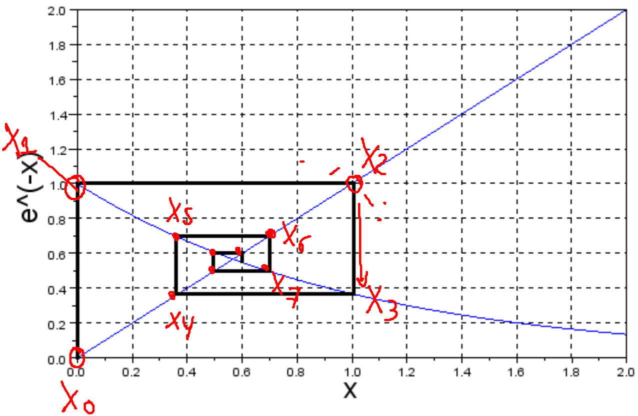
$$f(x) = e^{-x} - x$$
$$x = e^{-x}$$

$$X_{i+1} = e^{-X_i}$$



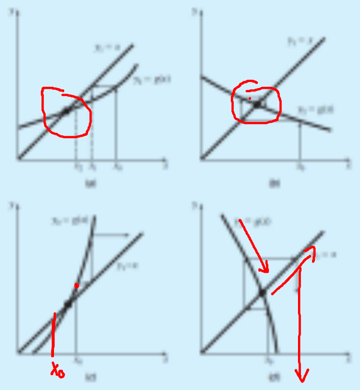
Métodos Abiertos.

Iteración del Punto Fijo.



Métodos Abiertos.
Iteración del Punto Fijo.

- Convergencia y Divergencia



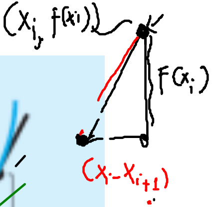
Métodos Abiertos.

Método de Newton-Raphson.

- El método de Newton-Raphson establece que si se parte de una raíz inicial x_i, entonces se puede extender una tangente desde el punto $[x_i, f(x_i)]$.
- El punto donde cruza la tangente con el eje x, constituye una mejora en la estimación de la raíz

Métodos Abiertos.

Método de Newton-Raphson.



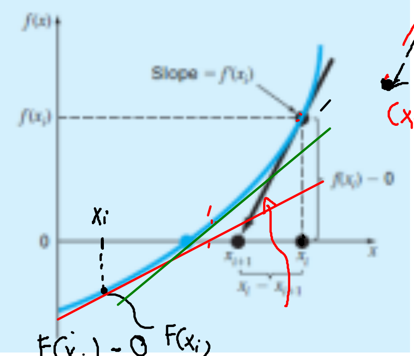
Encontrando la tangente en el punto x_i

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

Recta tangente

Reordenando:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



$$F'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

Métodos Abiertos.

Método de Newton-Raphson.

- El error aproximado puede ser usado como un criterio de parada del algoritmo. Un análisis teórico del error, muestra un comportamiento de convergencia cuadrática:

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)} E_{t,i}^2$$

$E_o = F''(X_r) \rightarrow$ raiz verdadera

Métodos Abiertos.
Método de Newton-Raphson.

- **Instrucciones Scilab:**
  - newtonraphson.sce

Métodos Abiertos.

Método de Newton-Raphson.

$$X_{i+1} = X_i - \frac{F(X_i)}{F'(X_i)}$$

$$F'(x) = -e^{-x} - 1 \; ;$$
$$F''(x) = e^{-x}$$

- **Problema:** Empleando el método de Newton-Raphson encuentre la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$. Use una estimación inicial de $x_0 = 0$

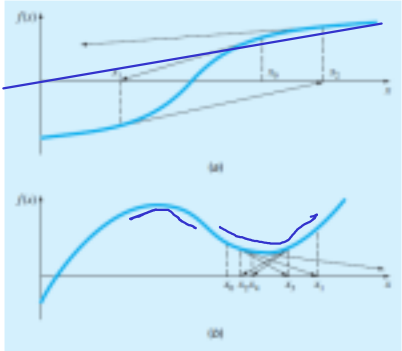
i	X_i	$F(X_i)$	E_a^p
0	0	1	--
1	0.5	0.1065	
2	0.566	1.79×10^{-3}	
3	0.567	2.247×10^{-4}	

3 it

$$E_{x_{i+1}} = \frac{-F''(x_i)}{2F'(x_i)} E_{tx_i}^2$$

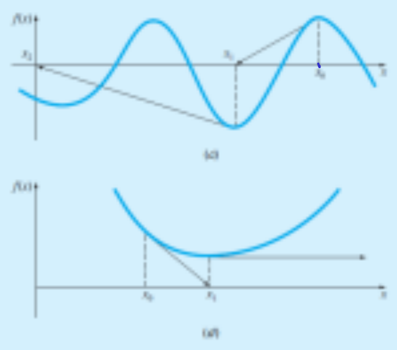
Métodos Abiertos.
Método de Newton-Raphson.

- Convergencia y Divergencia



Métodos Abiertos.
Método de Newton-Raphson.

- Convergencia y Divergencia



Métodos Abiertos.

Método de la Secante.

- El método de la secante tiene en cuenta los casos donde es difícil calcular la derivada.
- Para estos casos, la derivada se puede aproximar por medio de:

$X_{i+1} = X_i + \delta X_i$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

Donde δ se conoce como fracción de perturbación

Métodos Abiertos.
Método de la Secante.

- **Instrucciones Scilab:**
  - secante.sce

Métodos Abiertos.

Método de la Secante.

- **Problema:** Empleando el método de la secante, determinar la masa para la cual después de 4 segundos de caída la velocidad excede los 36 m/s. Use una estimación inicial de 50kg y una fracción de perturbación de $1x10^{-6}$

  El coeficiente de arrastre es $0.25 kg/m$.
  La aceleración de la gravedad es de 9.81 m/s^2

$F(x) = e^{-x} - x$

$\delta = 1 \times 10^{-6}$

$x_0 = 1$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

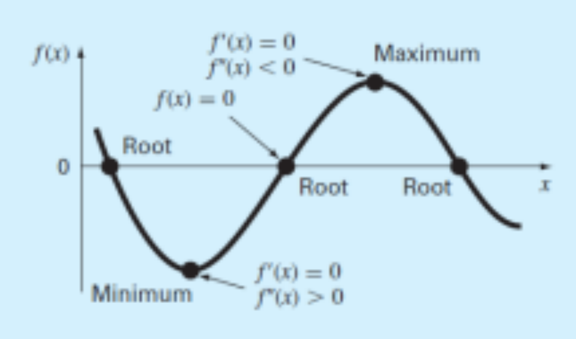
i	x_i	$F(x_i)$	E_a
0	1	-0.632	---
1			

Hasta aqui llega el parcial.

Optimización.
Introducción.

- Optimización es el proceso de crear algo tan eficiente como sea posible
- En términos matemáticos la optimización consiste en encontrar el mínimo o máximo de una función (puntos extremos)

Optimización.
Introducción.



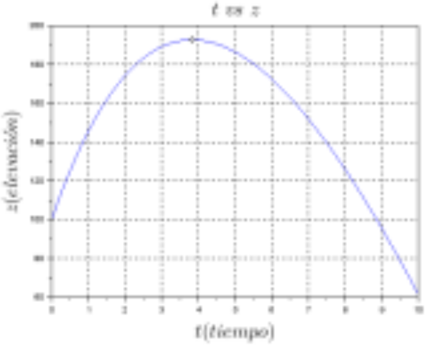
Optimización.
Introducción.

- **Problema:** Determinar el tiempo y elevación máxima para un objeto que se proyecta hacia arriba empleando un coeficiente lineal de arrastre

$$z = z_0 + \frac{m}{c}\left(v_0 + \frac{mg}{c}\right)\left(1 - e^{-(c/m)t}\right) - \frac{mg}{c}t$$

Donde:
$g = 9.81 m/s^2, z_0 = 100m, v_0 = 55m/s, m = 80kg$ y
$c = 15kg/s$

Optimización.
Introducción.

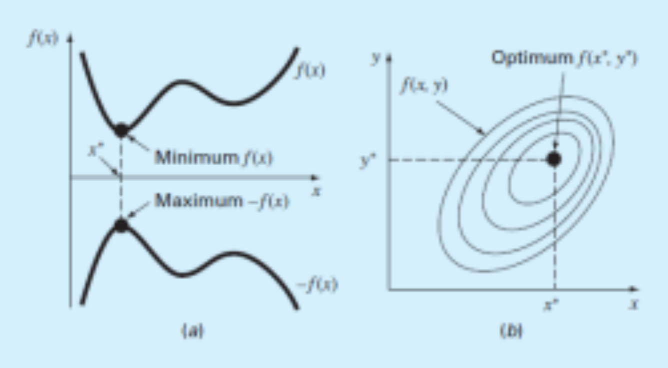


Optimización.

Introducción.

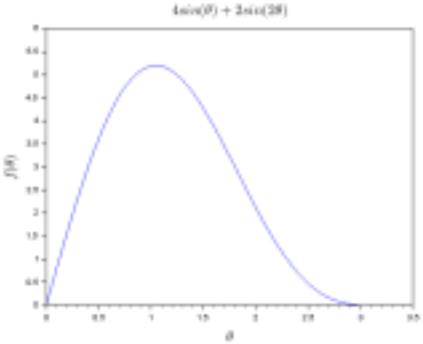
- El problema anterior podría ser resuelto por medio de alguna de las técnicas para encontrar las raíces de funciones
- Existen otro tipo de métodos numéricos para solucionar problemas de optimización

Optimización.
Introducción.



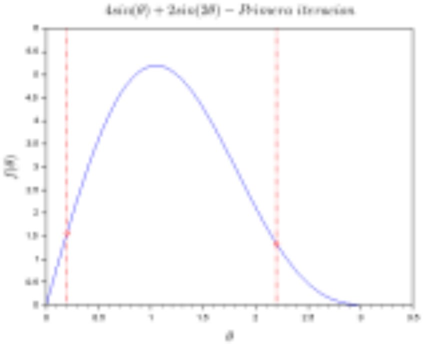
Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.



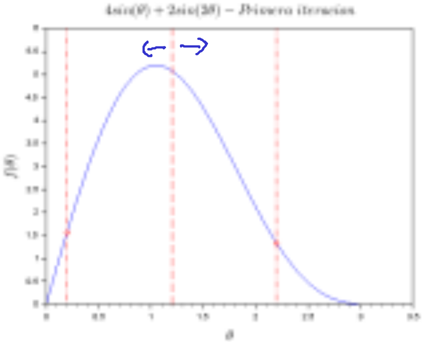
Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.



Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.



Métodos de Encierro.

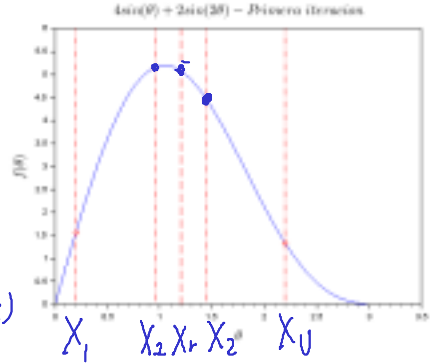
Método del Intervalo Igual.

$F(X_1)$

$F(X_r)$

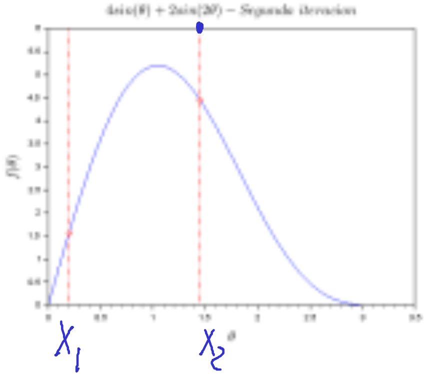
$F(X_2)$

$F(x_1) > F(x_2)$



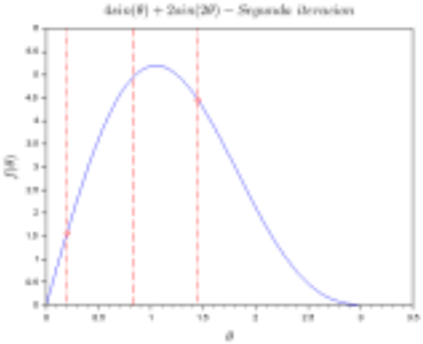
Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.



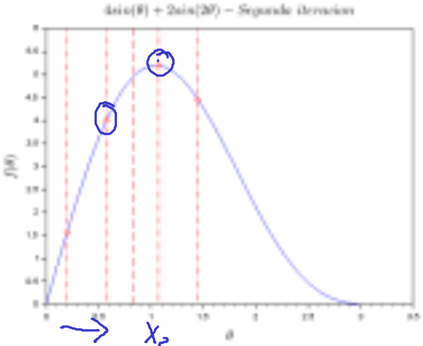
Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.



Métodos de Encierro.
Método del Intervalo Igual.

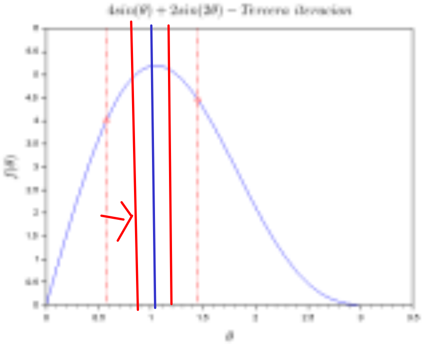
$f(x_1) < f(x_2)$



x_2

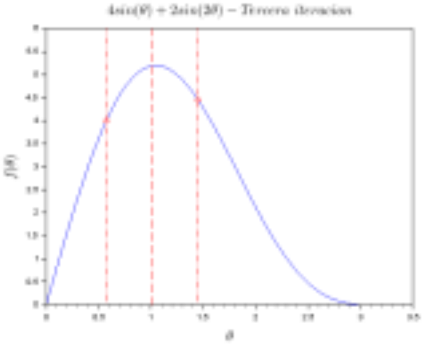
Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.

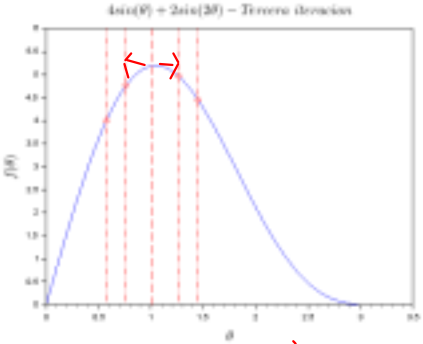


Métodos de Encierro.

Método del Intervalo Igual.



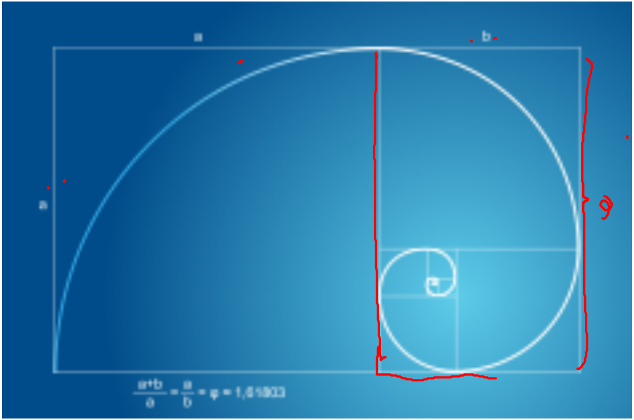
Métodos de Encierro.
Método del Intervalo Igual.



$X_1 = X_r - ?$ $\qquad$ $X_2 = X_r + ?$

Métodos de Encierro.
Búsqueda de la Sección Dorada.

a + b



Métodos de Encierro.

Búsqueda de la Sección Dorada.

A continuación se presenta el desarrollo matemático para obtener el numero ϕ ($\phi = a/b$)

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = 0$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

Métodos de Encierro.

Búsqueda de la Sección Dorada.

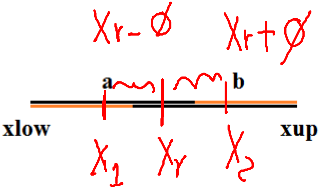
Solucionando la ecuación cuadrática se tiene:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.61803398874989...$$

Métodos de Encierro.
Búsqueda de la Sección Dorada.

- **Problema:** Plantee la fórmula que permita encontrar la longitud del segmento a (segmento largo), conociendo los valores del rango x_{low}, x_{up} y el valor de ϕ



Métodos de Encierro.
Búsqueda de la Sección Dorada.

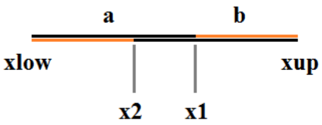
- **Solucion:**

$$\frac{a+b}{a} = \phi$$
$$a+b = x_{up} - x_{low}$$

$$\frac{x_{up} - x_{low}}{a} = \phi$$
$$x_{up} - x_{low} = \phi \cdot a$$
$$\frac{x_{up} - x_{low}}{\phi} = a$$

Métodos de Encierro.
Búsqueda de la Sección Dorada.

- Para aplicar el método de la sección dorada se evalua la función en dos puntos x_1 y x_2 que se obtienen de la siguiente manera:



$$x_1 = x_{low} + a$$
$$x_2 = x_{up} - a$$

Métodos de Encierro.

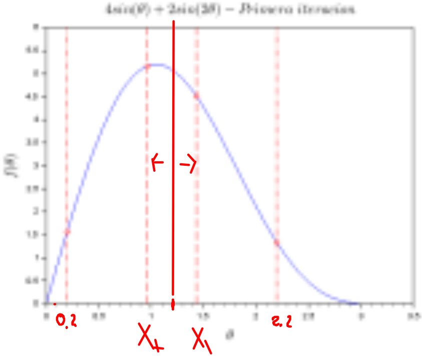
Búsqueda de la Sección Dorada.

- Una vez evaluada la función en x_1 y x_2 se debe tener en cuenta:
  - Si $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x_2)$ es el maximo. x_1 pasa a ser $x_{\cancel{up}}$ Xlow
  - Si $f(x_2) < f(x_1)$, $f(x_1)$ es el maximo. x_2 pasa a ser $x_{\cancel{low}}$ Xup

Métodos de Encierro.

Búsqueda de la Sección Dorada.

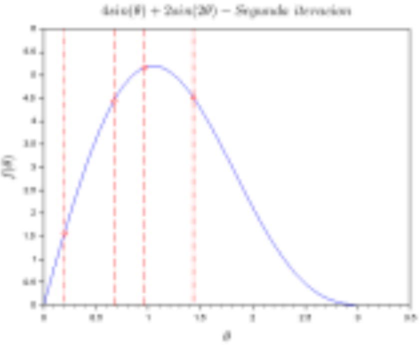
- En la imagen $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x_2)$ es el maximo. x_1 pasa a ser x_{up}



Métodos de Encierro.

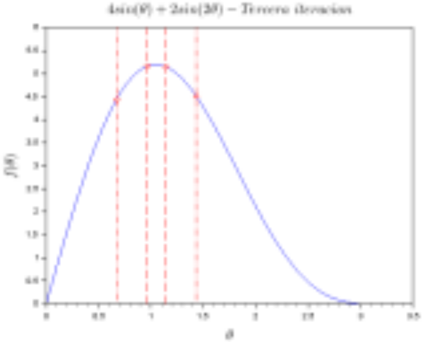
Búsqueda de la Sección Dorada.

- En la imagen $f(x_2) < f(x_1)$, $f(x_1)$ es el maximo. x_2 pasa a ser x_{low}



Métodos de Encierro.
Búsqueda de la Sección Dorada.

- En la imagen $f(x_2) > f(x_1)$, $f(x_2)$ es el maximo. x_1 pasa a ser x_{up}



Métodos de Encierro.

Búsqueda de la Sección Dorada.

- Tener en cuenta en cada iteración calcular el valor de a sobre el nuevo rango (x_{low} a x_{up}) y encontrar los valores nuevos para x_1 y x_2

Métodos de Encierro.

Búsqueda de la Sección Dorada.

- El error aproximado se debe calcular con la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_a = (2 - \phi)\left|\frac{x_u - x_l}{x_{opt}}\right| \times 100$$

Métodos de Encierro.
Búsqueda de la Sección Dorada.

- **Instrucciones Scilab:**
  - golden.sce

Métodos de Encierro.

Búsqueda de la Sección Dorada.

- **Problema:** Empleando el método de búsqueda de la sección dorada, encuentre el mínimo de la función $f(x) = x^2/10 - 2sin(x)$. Use el intervalo [0, 4]

Métodos de Encierro.

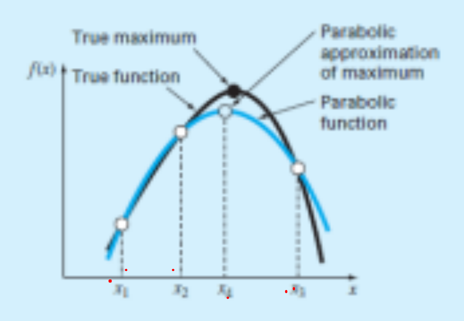
Interpolación Parabólica.

- Un polinomio de segundo orden frecuentemente proporciona una buena aproximación a la forma de una función $f(x)$ cerca a un óptimo
- Asi como dos puntos determinan una línea, tres puntos determinan una parábola

Métodos de Encierro.

Interpolación Parabólica.

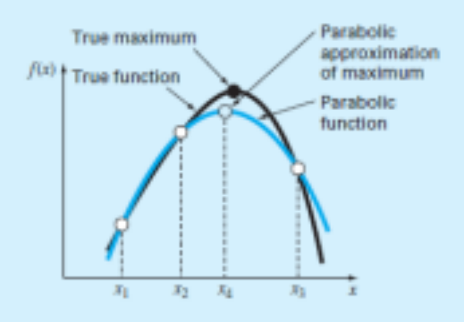
$$x_4 = x_2 - \frac{1}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2[f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3)^2[f(x_2) - f(x_1)]}{(x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_3)] - (x_2 - x_3)[f(x_2) - f(x_1)]}$$



Métodos de Encierro.

Interpolación Parabólica.

- Una vez evaluada la ecuación anterior para una función $f(x)$ y tres puntos dados $x_1 > x_2 > x_3$, se obtiene el valor estimado para el optimo x_4



Métodos de Encierro.

Interpolación Parabólica.

- A continuación se descarta alguno de los valores extremos x_1 ó x_3.
- Si $x4 > x2$ entonces $x1 = x2$, $x2 = x4$
- Si $x4 < x2$ entonces $x3 = x2$, $x2 = x4$
- Proceder a la siguiente iteración

Métodos de Encierro.

Interpolación Parabólica.

- **Instrucciones Scilab:**
  - interpolacionparabolica.sce

Métodos de Encierro.

Interpolación Parabólica.

- **Problema:** Empleando interpolación parabólica, aproxime el mínimo de la función $f(x) = x^2/10 - 2sin(x)$. Use como estimación inicial $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 4$

Optimización Multidimensional

Generalidades.

- Las técnicas para optimización multidimensional se pueden clasificar de distintas formas.
- Una clasificación establece:
    - Las técnicas que requieren derivadas son llamadas de gradiente ascendente ó descendente.
    - Las técnicas que no requieren derivadas son llamadas de NO gradiente ó directas.
- En problemas de optimización multidimensional es posible aplicar métodos gráficos para encontrar el valor óptimo

$x \; y \; z$ $\quad \frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial z}$

Problemas I

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

- **Problema:** Use el método de bisección y el método de falsa posición para encontrar la raíz de $f(x) = x^{10} - 1$. Use el intervalo [0, 1.3]. ¿Qué puede concluir al respecto?

X_l	X_u	X_r	$F(X_r)$

X_l	X_u	X_r	$F(X_r)$

Problemas I

- **Problema:** Use el método de iteración de punto fijo para encontrar la raíz de $f(x) = sin(\sqrt{x}) - x$. Use una aproximación inicial de $x = 0.5$ e itere hasta $\varepsilon_a \leq 0.01\%$. Muestre gráficamente la convergencia lineal de la solución
- **Problema:** Use el método de Newton-Raphson para encontrar la raíz de $f(x) = x^{10} - 1$. Use una aproximación inicial de $x = 0.5$ ¿Qué puede concluir al respecto?

Problemas I

- **Problema:** Empleando los siguientes métodos encuentre el máximo de la función
  $f(x) = 4x - 1.8x^2 + 1.2x^3 - 0.3x^4$

  (a). Búsqueda de la sección dorada.
  Use el intervalo [-2, 4] y $\varepsilon_a = 1\%$
  (b). Interpolación parabólica. Use como estimación inicial
  $x_1 = 1.75$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 2.5$ y 5 iteraciones

Bibliografía I

S. Chapra.
Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.
Mac Graw Hill, 2010.