Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

* Inducción matemática
* Ejemplos

Técnicas de demostración

Inducción matemática

- Muchos teoremas establecen que P(n) es verdad para todos los enteros positivos n, donde P(n) es una expresión matemática

Técnicas de demostración

Inducción matemática

Una prueba por inducción matemática consiste de dos pasos

- **Paso base**. Se muestra que la proposición **P(1)** se cumple
- **Paso inductivo**. Se supone que P(n) es cierto y se intenta demostrar que P(n+1) también. **P(n)→P(n+1)**

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\boxed{\mathbf{1}}$**+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\boxed{1}$**+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1 \cdot 2/2 = 1$$

*

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

$$P(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Premisa cierta

- **Paso base.** P(1)

  1 = 1·2/2 = 1

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

  1+2+3+…+n = n·(n+1)/2 ⟹ 1+2+3+…+n+(n+1)

Sumatoria

P(n+1)

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

$$= n\cdot(n+1)/2 + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)/2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $\boxed{2}^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=\underline{2^{n+1}-1}$

Paso base $\quad P(0)$

$2^0 = 2^1 - 1 \quad \boxed{1 = \underline{1}}$

Paso inductivo $\quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

$\boxed{P(n+\underline{1}) = 2^{n+2}+\underline{1}}$

$\boxed{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+2^{n+1}$

$2^{n+1}-\underline{1}+2^{n+1}$

$2(2^{n+1})-\underline{1}$

$\boxed{2^{n+2}-\underline{1}}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

  $2^0 = 1$ y $2^{0+1}-1 = 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

  $2^0 = 1$ y $2^{0+1}-1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

  $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n+ 2^{n+1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+ 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1}-1) + 2^{n+1}$$

$$= 2\cdot 2^{n+1}-1$$

$$= 2^{(n+1)+1}-1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $\boxed{1}+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

$n \quad 1 \quad 2 \quad 3 \qquad n$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Paso base

$P(1) = 1 \qquad (1)^2 = 1$

Paso inductivo

$P(n) = n^2$

$P(n+1) = \boxed{(n+1)^2}$

$\boxed{1+3+5+\ldots+(2\boxed{n}-1)} + 2n+1$

$2(n+1)-1$

$2n+2-1$

n^2+2n+1

$(n-r_1)(n-r_2)$

$(n+1)(n+1)$

$\boxed{(n+1)^2}$

$$\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}$$

$$\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$$

$\boxed{-r = -1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow \ ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow 1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 + 3 + \ldots + (2n-1)} + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n+1)^2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $\boxed{1^2}+2^2+3^2+\ldots+n^2=\boxed{n(n+1)(2n+1)/6}$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} i^2$

$p(n)$

$2n+1$

$2(n+1)+1$

$2n+3$

Paso base

$$P(1) = 1^2$$

$$\frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Paso inductivo

$$p(n) \longrightarrow p(n+1)$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=0$$

$$\frac{(n+1)\boxed{(n+2)}(2n+3)}{6}$$

$$2n^2+7n+6$$

$$ax^2+6x+c$$

$$\frac{-7\pm\sqrt{49-4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$r=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4ac}}{2a}$$

$$\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}\to\frac{-7\pm\sqrt{1}}{4}$$

$$\frac{-7+1}{4}$$

$$\frac{-7-1}{4}$$

$$r_1=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

$$r_1=\frac{8}{4}=2$$

$$(n-r_1)(n-r_2)=0$$

$$n+\frac{3}{2}=0$$

$$\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)=0$$

$$n+\frac{3}{2}$$

$$\frac{2n}{2}+\frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{2n+3}{2}\right)=0$$

$$\frac{2n+3}{2}=0$$

$$\boxed{2n+3=0}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base**. P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

  $$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \;\Rightarrow\; 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+ (n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+ (n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

$$= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2$$

$$= (n+1)(\underline{2n^2+7n+6})/6$$

$$= (n+1)(2n+3)(n+2)/6$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}=P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

Paso base $P(1) = 1^3 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2$ $\boxed{1=1}$ ✓

Paso inductivo

$$P(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$P(n+1) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$P(n+1) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}_{P(n)} + \underbrace{(n+1)^3}_{P(n+1)}$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right)$$

$$(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

  $$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

  $$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

  $$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

$$= n^2(n+1)^2/4+(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2[n^2/4+(n+1)]$$

$$= (n+1)^2(n+2)^2/4 = [(n+1)(n+2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base**. P(1)

  $1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2)$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

  $1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow \underline{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)} + (n+1)\cdot(n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

  $1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2)$

$= n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)\cdot(n+2)$

$= (n+1)(n+2)[\, n/3 + 1]$

$= (n+1)(n+2)(n+3)/3$

$=P(n+1)$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot1! + 2\cdot2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

Paso base: $P(1) = 1.1! = (n+1)! - 1$

$1 = 2! - 1 \quad 1 = 2 - 1 \quad 1 = 1$ ✓

Paso inductivo

$$\underbrace{1.1! + 2.2! + \ldots + n \times n!}_{P(n)} + (n+1)(n+1)!$$

$P(n) = (n+1)! - 1$

$$\boxed{P(n+1) = (n+2)! - 1}$$

$$(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$(n+1)!(1 + n + 1) - 1$$

$$(n+1)!.(n+2) - 1$$

$$\boxed{(n+2)! - 1}$$

$n! = n \times (n-1) \times (n-$

$n! = n \times (n-1)!$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

$7! = 7 \times 6!$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

$$1\cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)![1 + (n+1)] - 1$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n pares es $n \cdot (n+1)$, es decir, $2+4+6+ \ldots + 2n = n \cdot (n+1)$