

Fundamentos de programación

Datos complejos I: Recursión numérica, listas arbitrariamente largas y estructuras recursivas

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Octubre de 2018

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

1 Recursión numérica

2 Listas arbitrariamente largas

3 Estructuras recursivas (Árboles)

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

1 Recursión numérica

2 Listas arbitrariamente largas

3 Estructuras recursivas (Árboles)

Definición

Los números naturales se pueden definir de la siguiente forma:

- 1 0 es un natural
- 2 Si n es un numero natural ($\text{add1 } n$) también lo es

$(n + 1)$

Definición

Los números naturales se pueden definir de la siguiente forma:

- 1 0 es es un natural
- 2 Si $n = 0$ ($\text{add1 } 0$) = 1 es también natural
- 3 Si $n = 1$ ($\text{add1 } 1$) = 2 es también natural
- 4 Si $n = 2$ ($\text{add1 } 2$) = 3 es también natural

Definición

Los números naturales se pueden definir de la siguiente forma:

1 0 es el primer número \leftarrow base

2 Si $n = 0$ $(\text{add1 } 0) = 1$

3 Si $n = 0$ $(\text{add1 } (\text{add1 } 0)) = 2$

4 Si $n = 0$ $(\text{add1 } (\text{add1 } (\text{add1 } 0))) = 3$

$(\text{add1 } (\text{add1 } (\text{add1 } (\text{add1 } 0))))$

base

$(\text{first } (\text{rest } (\text{rest } (\text{rest } (\text{list } A))))))$

terminar

Definición

Si se observa un número natural se puede definir haciendo un llamado varias veces de la función **add1** a esto lo vamos a conocer como **definición recursiva**

Definición

Esto también aplica para casos de funciones, por ejemplo el **factorial** que se define de la siguiente forma:

$$fact(n) = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * \overset{1!}{1}, fact(0) = 1 \quad (1)$$

1! 0!

Si observa es una secuencia de multiplicaciones.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \overset{1!}{1}$$

0!

Definición

Si observamos la forma podemos definir una función para calcular el factorial ¿Como sería?

```
;;Contrato factorial: numero -> numero
(define (factorial n)
  ....
)
```

$$f^{oct}(n) \Rightarrow n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

$$\downarrow$$

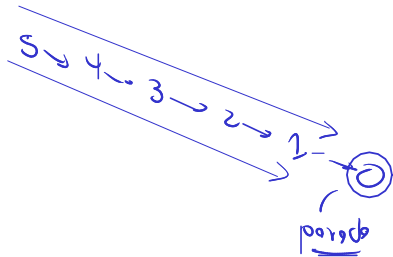
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \Rightarrow 5! = 5 \times 4!$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{fact}(n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$\text{fact}(n) = n \times (\text{fact}(n-1))$$

$$n! = n \times (n-1)!$$



$$5! = 5 \times 4!$$

$$100! = 100 \times 99!$$

$$\text{fact}(5) = 5 \times (\text{fact}(4))$$

$$\text{fact}(4) = 4 \times (\text{fact}(3))$$

$$\text{fact}(3) = 3 \times (\text{fact}(2))$$

$$\text{fact}(2) = 2 \times (\text{fact}(1))$$

$$\text{fact}(1) = 1 \times (\text{fact}(0))$$

$$\text{fact}(0) = 1 \quad (\text{paraiba / base})$$

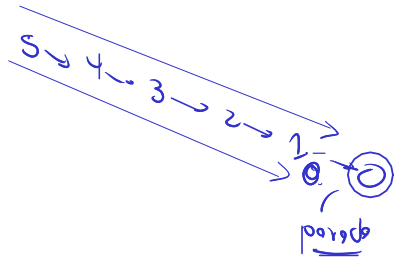
$$\text{fact}(n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$\text{fact}(n) = n \times (\text{fact}(n-1))$$

$$n! = n \times (n-1)!$$

$$5! = 5 \times 4!$$

$$100! = 100 \times 99!$$



$$\text{fact}(5) = 5 \times (\text{fact}(4))$$

$$\text{fact}(4) = 4 \times (\text{fact}(3))$$

$$\text{fact}(3) = 3 \times (\text{fact}(2))$$

$$\text{fact}(2) = 2 \times (\text{fact}(1))$$

$$\text{fact}(1) = 1 \times (\text{fact}(0))$$

$$\text{fact}(0) = 1 \quad (\text{— Params / base})$$

Definición

Empezamos a analizar, si $n = 1$ el factorial es 1

```
;;Contrato factorial: numero -> numero
(define (factorial n)
  (cond
    [(= n 1) 1]
    ...
  )
```

op que va repetir

cambio
de 1
condado

Definición

Empezamos a analizar, si $n = 1$ el factorial es $1*1$, y si $n = 2$ entonces $1*1*2$, **empezamos a ver un patrón**

```
;;Contrato factorial: numero -> numero
(define (factorial n)
  (cond
    [(= n 1) 1]
    [else (* n (factorial (- n 1)))]
  )
)
```

Handwritten annotations:

- Contrato factorial: numero -> numero** (boxed in pink)
- Parado** (pink arrow pointing to the base case)
- ← Trivial** (pink arrow pointing to the base case)
- cambio de 1, contrato** (green text next to the base case)
- se sigue el patrón** (green text under the recursive call)

Definición

Estas funciones que se llaman así mismas son llamadas **funciones recursivas** debe tener en cuenta:

- 1 Una condición de parada, para que no se llame infinitamente. Es el caso inicial. \leftarrow trivial
- 2 La función debe siempre retornar el mismo tipo de dato
- 3 Un llamado a la misma función, utilizando alguna función para unir las salidas (una operación matemática)

multiplicacion $\times(5, 4) \equiv + (5 \times 5 5 5)$

¿trivial? ¿base?

$$\times(5, 1) = 5$$

$$+ (5 \times (5 \times 3))$$

$$+ (5 + 5 \times (5 \times 2))$$

$$*(a \ b) = +(a \ *(a \ (-b \ 1)))$$

$$*(5 \ 6) = (+ \ 5 \ (* \ 5 \ 5))$$

Operacion
que se repite

entonces b
disminuye
1

Funcion $b \rightarrow \dots \rightarrow 0$

$$*(5 \ 4) = (5 \pm 5 \pm 5 \pm 5)$$

$$0 \quad b = 0$$

b llega a 0

$$*(5 \ 0) = 0$$

$$*(5 \ 1) = +(5 \ *(5 \ 0))$$

$$*(5 \ 2) = +(5 \ *(5 \ 1))$$

$$*(5 \ 3) = +(5 \ *(5 \ 2))$$

$$*(a \ b) = +(a \ *(a \ (b - 1)))$$

Def recursive

$b \geq 0$

op que
se repite

Parada/Cond inicial

$$5^4 = 5 \times \boxed{5 \times 5 \times 5}$$

$$5^4 = 5 \times 5^3$$

$$5^8 = 5 \times 5^7$$

$$a^b = a \times a^{b-1}$$

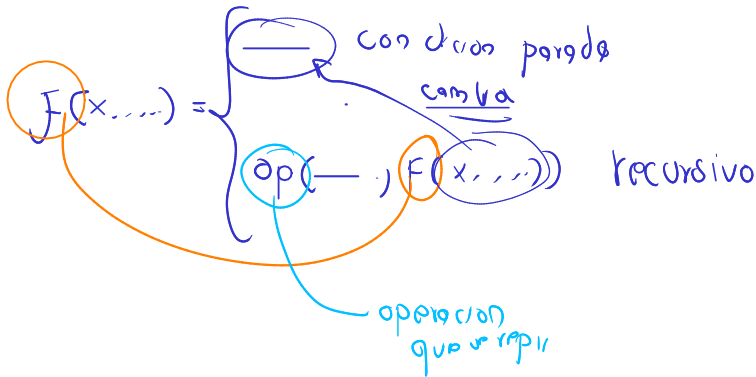
$b=0$ paradoja 0^0

$$\frac{a \times a^{b-1}}{\text{recursiva}}$$

combinación de la entrada

$$a^b = \begin{cases} 1 & \\ \text{otro caso} & \end{cases}$$

$a > 0 \quad b \geq 0$



Ejemplo

- 1 Diseñe una función **multiplicación**, la cual recibe dos números (a y b) esta retorna el resultado de sumar b veces a
- 2 Diseñe una función **eleva**, la cual recibe dos números (a y b), esta retorna el resultado de multiplicar b veces a

$$\begin{aligned}
 \text{multiplicacion } \times(5, 4) &\equiv + (5 \boxed{5 \ 5 \ 5}) \\
 &\quad \text{cálculo? ¿base?} \\
 &\quad \times(5 \ 1) = \boxed{5} \\
 &\quad + (5 \times(5 \ 3)) \\
 &\quad + (5 \neq 5 \times(5 \ 2))
 \end{aligned}$$

$$*(a \ b) = +(a \ *(a \ (-b \ 1)))$$

$$*(5 \ 6) = (+ \ 5 \ (* \ 5 \ 5))$$

Operación
que se repite

entonces b
disminuye
1

Función $b \rightarrow \dots \rightarrow 0$

$$*(5 \ 4) = (5 \pm 5 \pm 5 \pm 5)$$

$$0 \quad b = 0$$

b llega a 0

$$*(5 \ 0) = 0$$

$$*(5 \ 1) = +(5 \ *(5 \ 0))$$

$$*(5 \ 2) = +(5 \ *(5 \ 1))$$

$$*(5 \ 3) = +(5 \ *(5 \ 2))$$

$$*(a \ b) = +(a \ *(a \ (b - 1)))$$

Def recursive

$b \geq 0$

op que
se repite

Parada/Cond inicial

$$5^4 = 5 \times \boxed{5 \times 5 \times 5}$$

$$5^4 = 5 \times 5^3$$

$$5^8 = 5 \times 5^7$$

$$a^b = a \times a^{b-1}$$

parada 0^0

$$b=0$$

$$a^b = \begin{cases} 1 \\ \text{otro caso} \end{cases}$$

$$a \times a^{b-1}$$

caso de la entrada

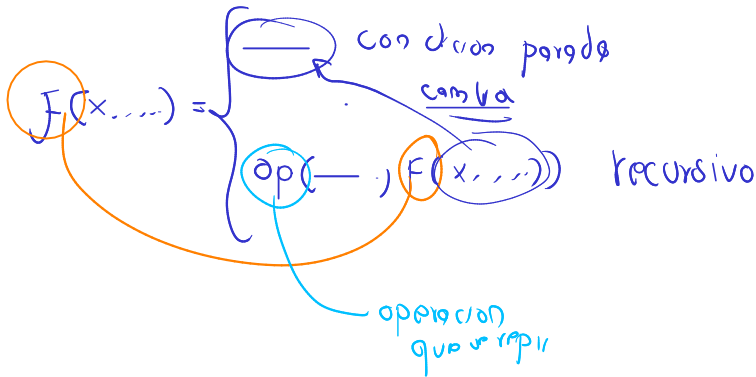
$$a > 0 \quad b \geq 0$$

recursiva

define lista Ccons 4 Ccons 3 (cons 2 (cons 1 empty)))

(+
 (first listaA)
 (first (rest listaA))
 (first (rest (rest listaA)))
 (first (rest (rest (rest listaA))
)

Indicate the
recursion



Ejemplo

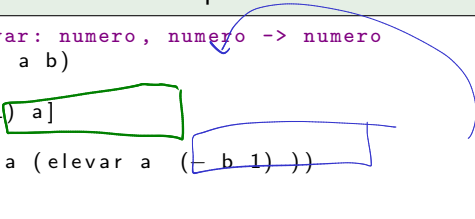
Diseñe una función **multiplicación**, la cual recibe dos números (a y b) esta retorna el resultado de sumar b veces a

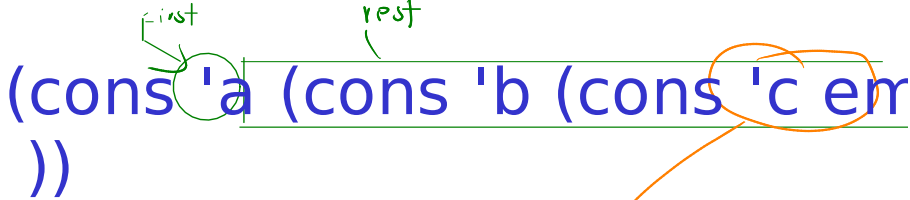
```
;;Contrato multiplicacion: numero, numero -> numero
(define (multiplicacion a b)
  (cond
    [(= b 1) a]
    [else
     (+ a (multiplicacion a (- b 1) ))]
  )
)
```

Ejemplo

Diseñe una función **elevar**, la cual recibe dos números (a y b), esta retorna el resultado de multiplicar b veces a

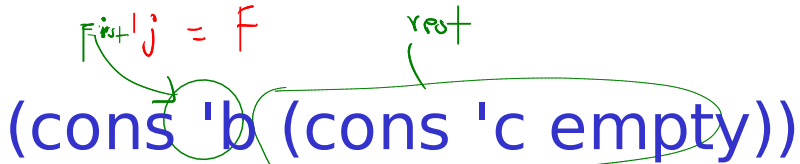
```
;;Contrato elevar: numero, numero -> numero
(define (elevar a b)
  (cond
    [(= b 1) a]
    [else (* a (elevar a (- b 1)))]
  )
)
```

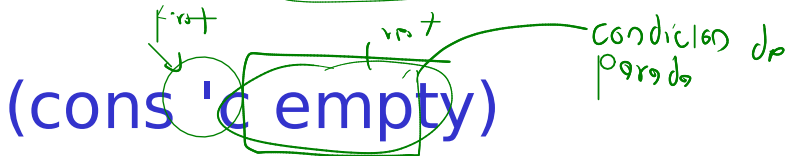



(cons 'a (cons 'b (cons 'c empty)))

'b = V

'c = F


(cons 'b (cons 'c empty))


(cons 'c empty)

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

1 Recursión numérica

2 Listas arbitrariamente largas

← trivial

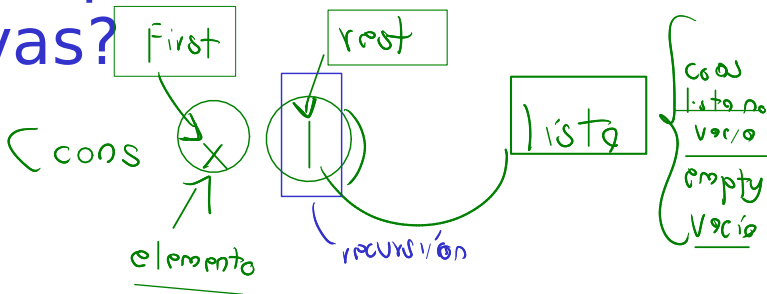
3 Estructuras recursivas (Árboles)

.

(_____)

(_____)

¿Porque las listas son recursivas?



define listaA (cons 4 (cons 3 (cons 2 (cons 1 empty))))

(+

(first listaA)

(first (rest listaA))

(first (rest (rest listaA)))

(first (rest (rest (rest listaA))))

)

Indicate the
recursion

→ first

→ empty

rest

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

Hasta el momento hemos trabajado con listas de un tamaño dado, pero que sucede si trabajamos con listas de diferente tamaño. Por ejemplo una función que recibe listas de símbolos y se desea encontrar uno, podríamos diseñar una función así.

```
;; Contrato buscar-simbolo: lista-de-simbolos, simbolo ->
   booleano
(define (buscar-simbolo lista nombre)
  (cond
    [(eqv? (first lista) nombre) #t]
    [else ... ]
  )
)
```

Handwritten annotations: A blue bracket on the left of the code block spans from the contract line to the function definition. A blue arrow points from the word "lista" in the contract to the variable "lista" in the function definition. A blue arrow points from the word "simbolo" in the contract to the variable "nombre" in the function definition. A blue arrow points from the word "booleano" in the contract to the return value "#t" in the function definition. A blue arrow points from the word "simbolo" in the contract to the return value "#f" in the function definition.

Aquí miramos si el primer elemento de la lista es lo que buscamos, sin embargo, ¿Como verificamos el segundo, y los otros elementos?

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

Una idea sería analizar el resto de la lista (que es una lista que contiene los otros elementos)

```
;;Contrato buscar-simbolo: lista-de-simbolos, simbolo ->  
    booleano  
(define (buscar-simbolo lista nombre)  
  (cond  
    [(eqv? (first lista) nombre) #t]  
    [else ... (rest lista) ...]  
  )  
)
```

¿Observan algo en el contrato? ¿El resto de la lista que es?

```
(cons 2 (cons 3 (cons 4  
(cons 5 (cons 6 empty)))))
```

¿Sumar los elementos de la lista?

```
(+ (first lst) (first (rest lst)) _ _ _)
```

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

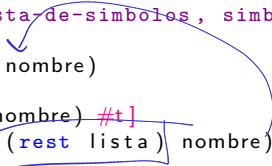
Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

Podríamos enviar el resto de la lista a la misma función (para que siga buscando) y mirar si el símbolo está:

```
;;Contrato buscar-simbolo: lista-de-simbolos, simbolo ->
  booleano
(define (buscar-simbolo lista nombre)
  (cond
    [(eqv? (first lista) nombre) #t]
    [else (buscar-simbolo (rest lista) nombre)]
  )
)
```



Pero, hay algo que está mal ¿Que pasa si el elemento no está en la lista?

(cons 'a (cons 'b (cons 'c empty)))

$'b = V$
 $'c = F$

(cons 'b (cons 'c empty))

(cons 'c empty)

condition de para

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

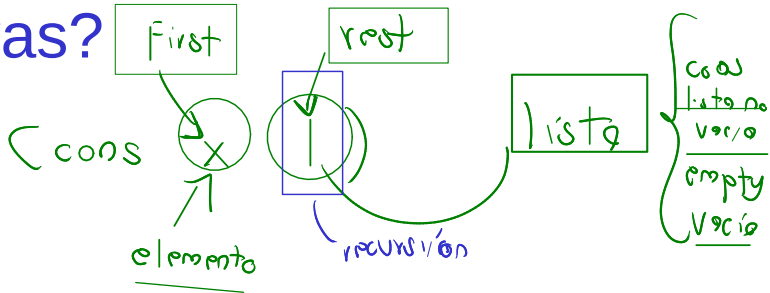
Definición

El problema es que si seguimos buscando, ¿Que hacemos cuando llegamos al final de la lista (empty)?

```
;;Contrato buscar-simbolo: lista-de-simbolos, simbolo ->  
    booleano  
(define (buscar-simbolo lista nombre)  
  (cond  
    [(empty? lista) #f] ← +vivir/  
    [(eqv? (first lista) nombre) #t]  
    [else (buscar-simbolo (rest lista) nombre)])  
)
```

Debemos verificar que si llega al final de la lista

¿Porque las listas son recur-



Definición

Para el diseño de funciones que trabajan sobre listas arbitrariamente grandes debe tener en cuenta:

- 1 Analizar el primer elemento de la lista: **Verificación.** → first
- 2 Tener en cuenta que la lista termina cuando esta es **empty**. Condición de parada ← Empty
- 3 Analizar el resto de la lista, llamando la misma función.

Condición de llamado recursivo

→ rest

Ejemplo

- 1 Diseñe una función **buscar-numero** que recibe un número y una lista de números. Esta función indica que el número está en la lista de números
- 2 Diseñe una función **buscar-persona-nombre** que recibe una lista de estructuras persona que tiene tres atributos: nombre, edad y cargo; y recibe un nombre. Esta función indica si hay alguna persona con el nombre indicado

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

Diseñe una función **buscar-numero** que recibe un número y una lista de números. Esta función indica que el número está en la lista de números

```
;;Contrato buscar-numero: lista-de-numeros, numero ->  
    booleano  
(define (buscar-numero numero listan)  
  (cond  
    [(empty? listan) #f]  
    [(eqv? (first listan) numero) #t]  
    [else (buscar-numero numero (rest listan))])  
)
```

Definición

Diseñe una función **buscar-persona-nombre** que recibe una lista de estructuras persona que tiene tres atributos: nombre, edad y cargo; y recibe un nombre. Esta función indica si hay alguna persona con el nombre indicado

```
;;Contrato buscar-numero: lista-de-personas , simbolo ->
    booleano
(define-struct persona (nombre edad cargo))
(define (buscar-persona-nombre nombre listaPersonas)
  (cond
    [(empty? listaPersonas) #f]
    [(eqv? (persona-nombre (first listaPersonas))
           nombre) #t]
    [else (buscar-persona-nombre nombre (rest
                                       listaPersonas))])
  )
)
```

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

También podemos ir más allá, por ejemplo podemos realiza la suma de elementos en una lista de números observe:

```
;;Contrato sumar-lista: lista-de-numeros -> numero
(define (sumar-lista listan)
  (cond
    [(empty? listan) 0]
    [else (+ (first listan) (sumar-lista (rest listan)))]
  )
)
```

¿Que puede decir el comportamiento de esta función?
Analicemos el caso **(cons 1 (cons 2 (cons 3 empty)))**

Definición

Cuando llamamos la función con la lista **(cons 1 (cons 2 (cons 3 empty)))**.

```
;;Contrato sumar-lista: lista-de-numeros -> numero
(define (sumar-lista listan)
  (cond
    [(empty? listan) 0]
    [else (+ (first listan) (sumar-lista (rest listan)))]
  )
)
```

La lista no está vacía por ende, se ejecuta la clausula **else** y queda lo siguiente:

(+ 1 (sumar-lista (cons 2 (cons 3 empty))))

Definición

En el siguiente llamado se tiene **(cons 2 (cons 3 empty))**.

```
;;Contrato sumar-lista: lista-de-numeros -> numero
(define (sumar-lista listan)
  (cond
    [(empty? listan) 0]
    [else (+ (first listan) (sumar-lista (rest listan)))]
  )
)
```

La lista no está vacía por ende, se ejecuta la clausula **else** y queda lo siguiente:

(+ 1 (+ 2 sumar-lista (cons 3 empty))))

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

En el siguiente llamado se tiene (**cons 3 empty**).

```
;;Contrato sumar-lista: lista-de-numeros -> numero
(define (sumar-lista listan)
  (cond
    [(empty? listan) 0]
    [else (+ (first listan) (sumar-lista (rest listan)))]
  )
)
```

La lista no está vacía por ende, se ejecuta la clausula **else** y queda lo siguiente:

(+ 1 (+ 2 (+ 3 (sumar-lista empty))))

Definición

En el siguiente llamado se tiene **empty**.

```
;;Contrato sumar-lista: lista-de-numeros -> numero
(define (sumar-lista listan)
  (cond
    [(empty? listan) 0]
    [else (+ (first listan) (sumar-lista (rest listan)))]
  )
)
```

La lista está vacía por ende, retorna 0 y se tiene
(+ 1 (+ 2 (+ 3 0))) y se obtiene 6.

Definición

También podemos generar listas, observe:

```
;;Contrato doble-lista: lista-de-numeros ->  
    lista-de-numeros  
(define (doble-lista listan)  
  (cond  
    [(empty? listan) empty]  
    [else (cons (* (first listan) 2) (doble-lista (  
      rest listan)))]  
  )  
)
```

Listas arbitrariamente largas

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Ejemplo

- 1 Diseñe una función **multiplicar-lista** que recibe una lista de números. Esta función retorna los números de la lista multiplicados entre sí.
- 2 Diseñe una función **suma-lista-dobles** que recibe una lista de números y un número, esta retorna la suma de la multiplicación de cada uno de los elementos de la lista por el número.
- 3 Diseñe una función **elevar-cuadrado-lista** recibe una lista de números y esta retorna esa misma lista pero con los elementos elevados al cuadrado

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

1 Recursión numérica

2 Listas arbitrariamente largas

3 Estructuras recursivas (Árboles)

Estructuras recursivas (Árboles)

Fundamentos
de
programación

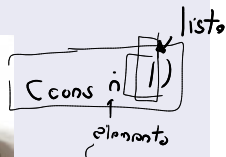
Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

Existen estructuras cuyos campos pueden definirse con una estructura, un buen ejemplo de ello es una **muñeca rusa**



Estructuras recursivas (Árboles)

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

¿Como definiríamos una estructura que sea una muñeca rusa:

```
(define-struct rusa-doll  
  (doll-interna)  
)
```

Estructuras recursivas (Árboles)

Fundamentos
de
programación

Recursión
numérica

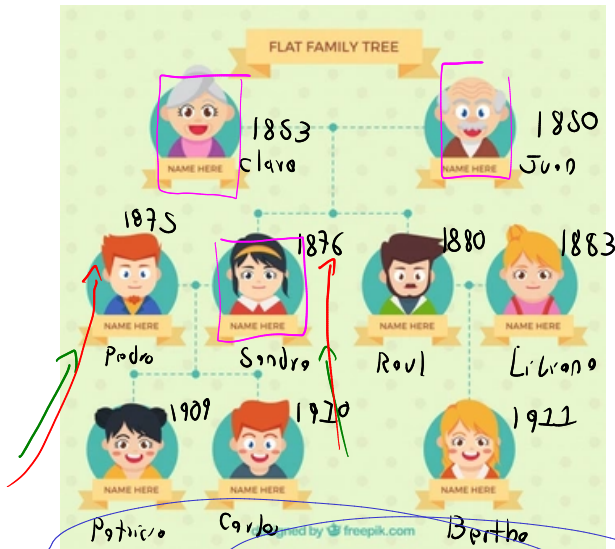
Listas arbitra-
riamente
largas

Estructuras
recursivas
(Árboles)

Definición

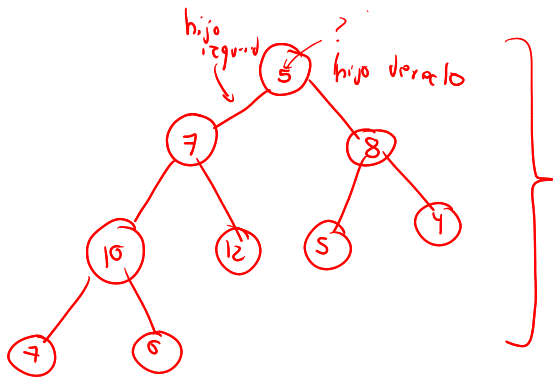
Si queremos una muñeca que contenga otras dos adentro sería.

```
(make-rusa-doll  
  (make-rusa-doll  
    (make-rusa-doll empty)))
```



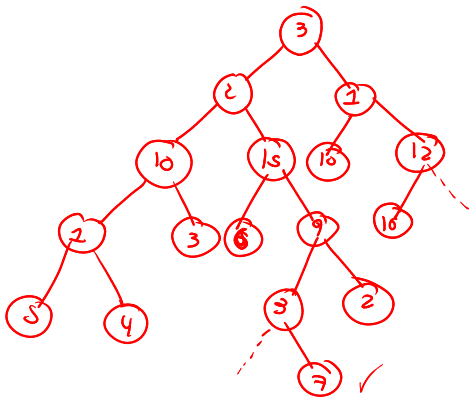
(define-struct persona (nombre fecha-nacimiento madre padre))

Simbolo numero persona persona



s

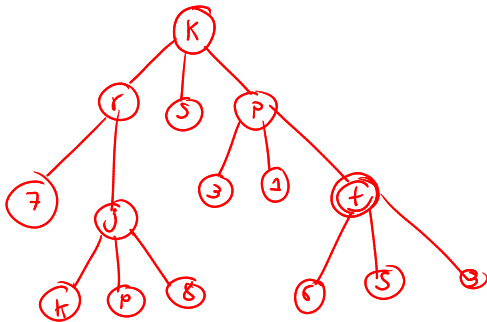
(define-struct arbol (valor hizq hder))



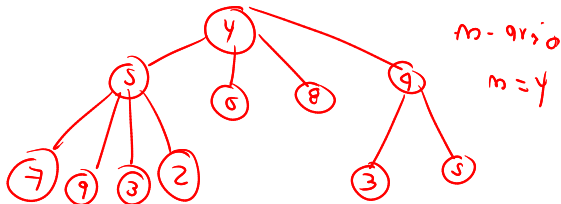
Arbolos Binarios

das

arbol m-arbol
1
3



```
(define-struct arbolT (hij1 hij2 hij3))
```



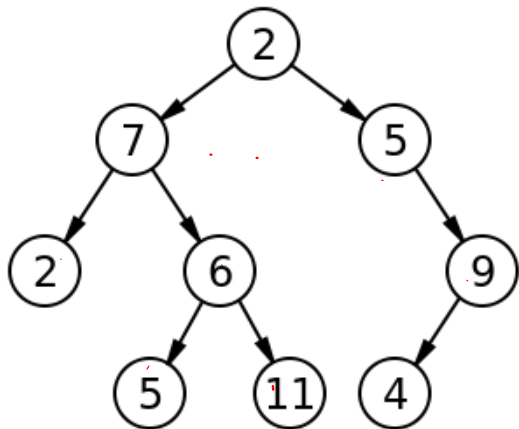
```
(define-struct arbolm4  
  (valor hij1 hij2 hij3 hij4))
```

Recorrido preorden

Recorrido inorden

Recorrido posorden





1) R

2) I

3) D^*

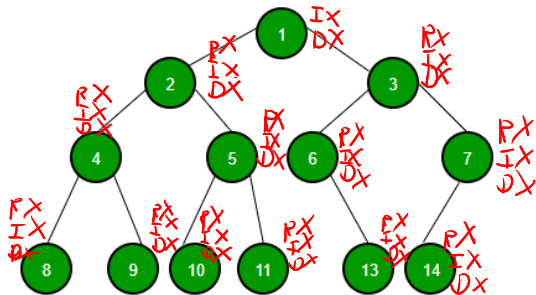
(2, 7, 2, 6, 5, 11, 5, 9,
4)

Recorrido preorden

- 1) Explore la raíz
- 2) Explore el hijo izquierdo
- 3) Explore el hijo derecho

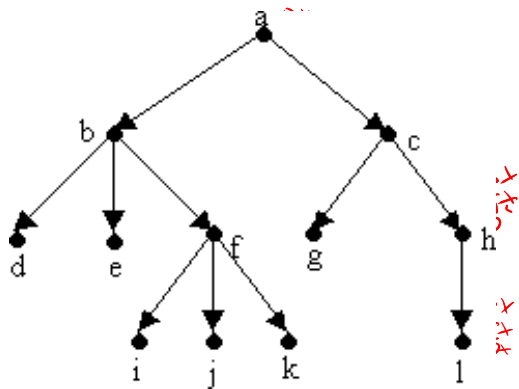
recorrido-inorden: arbol -> lista de <elementos>

continúa
el árbol



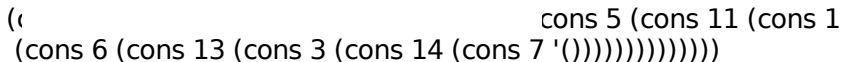
(1, 2, 4, 8, 9, 5, 10,
11, 3, 6, 13, 7, 14)

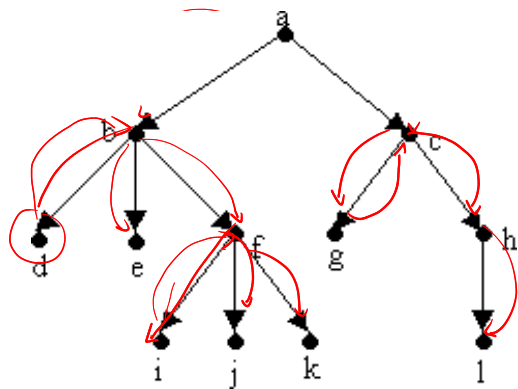
R
I
D Se recorren
de Izquierda
a derecha



(a, b, d, e, f, i, j, k, c, g, h, l)

3) Visite el hijo derecho (o hijos derechos de izquierda a derecha)

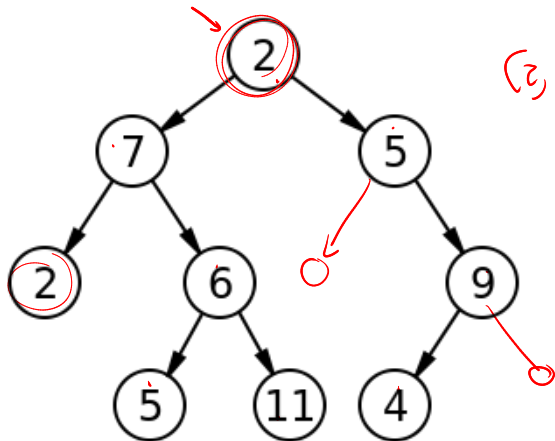




(d, b, e, i, f, j, k, a,
g, c, l, h)

```

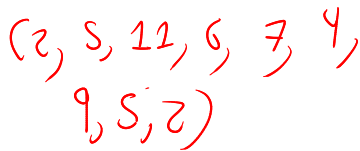
(cons 'd (cons 'b (cons 'e (cons 'i (cons 'f (cons 'j
  (cons 'k (cons 'a (cons 'g (cons 'c (cons l (cons 'h '()))))))))))))
  
```



(2, 7, 5, 6, 11, 2, 5, 4, 9)

```

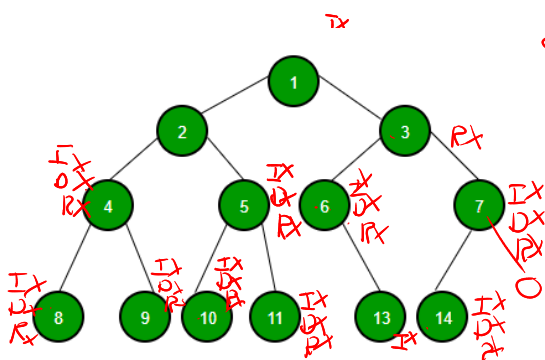
(cons 2 (cons 7 (cons 5 (cons 6 (cons 11
  (cons 2 (cons 5 (cons 4 (cons 9 '())))))))))
  
```



```
(cons 2 (cons 5 (cons 11 (cons 6 (cons 7
  (cons 4 (cons 9 (cons 5 (cons 2 '())))))))))
```

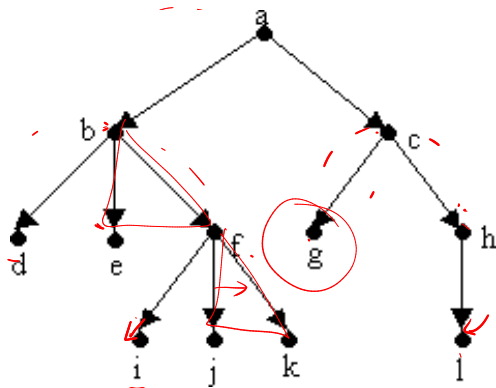
Recorrido posorden

- 1) Recorra el izquierdo
- 2) Recorra el derecho (o derechos de izquierda a derecha)
- 3) Recorra la raíz



8, 9, 4, 10, 11, 5, 2,
13, 6, 14, 7, 3, 1)

```
(cons 8 (cons 9 (cons 4 (cons 10 (cons 11 (cons 5 (cons 2  
(cons 13 (cons 6 (cons 14 (cons 7 (cons 3 (cons 1 '()))))))))))))
```

(d, e, i, j, k, f, b,
g, l, h, c, a)

```

(cons 'd (cons 'e (cons 'i (cons 'j (cons 'k
(cons 'f (cons 'b (cons 'g (cons l (cons 'h
(cons 'c (cons 'a '()))))))))))))

```

¿Como puedo comparar dos árboles?

- 1) Transformar a listas (haciendo la recursion)) <--Recorrido inorden
- 2) Comparar elemento vs elemento
- 3) Si todos los elementos son los mismo los arboles son IGULES <-- Recorrido inorden/posorden