



# Exámenes opcionales Matemáticas discretas II Duración 3 horas

Carlos Andres Delgado S, Msc  
`carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co`

17 de Diciembre de 2021

## Reglas

- Debe entregar un archivo en formato PDF con la solución de su examen adjunto al enlace de entrega, el cual **sólo acepta un archivo en este formato**.
- Usted puede tomar fotos a los procedimientos realizados a mano o bien usar el editor de ecuaciones y así estructurar su documento.
- Integre estas capturas en el archivo de entrega, **no se aceptan bajo ninguna circunstancia enlaces externos**.
- Las capturas de los puntos deben estar en buena calidad, **si alguna no se entiende no se le valdrá**.
- Sea ordenado en las capturas de sus puntos, **no se valdrán puntos desorganizados y que no sea fácil entender su respuesta**.
- Debe explicar el procedimiento realizado en cada uno de los puntos, no se considera válido únicamente escribir la respuesta. **Es decir, toda respuesta debe ir argumentada y sustentada** de acuerdo a los conceptos vistos en el curso.
- El examen puede ser realizado en parejas, hacer **un sólo envío por pareja**. Si los dos envían, calificaré únicamente el primer envío que reciba.
- El examen debe ser entregado en el formulario de Google especificado por el docente vía correo electrónico. **No se aceptarán entregas por otro medio**.
- En el formulario de google debe colocar los nombres y códigos de los estudiantes. **No se aceptarán reclamos por omisión de esta información**.

- El examen tiene una duración de 2 horas, es decir que va hasta las 10:00:00am, de allí se dan 60 minutos de gracia para entregarlo, es decir se recibe sin penalización hasta las 12:00:00pm.
- Usted puede entregar a partir de las 12:00:01pm pero cada 5 minutos de retraso o fracción le descontaré 0.3 en la nota. Por ejemplo, si entrega a partir de las 12:05:01pm la penalización es 0.6. **Se debe entender que es un tiempo extra para la organización de la entrega.**

## Recomendaciones

- Si tiene una cámara que toma fotos en alta calidad, se recomienda trabajar en 720p para que el archivo no resulte de gran tamaño
- Puede utilizar aplicaciones como CamScanner, las cuales permiten funciones premium con su correo institucional. Estas aplicaciones optimizan el tamaño y calidad de las imágenes.
- En caso de trabajar en parejas puede usar una herramienta colaborativa como Google Docs para integrar su trabajo, estas permiten integrar fácilmente su trabajo y exportar directamente en PDF.
- No se recomienda que comparta sus fotos en herramientas de mensajería, ya que estas le reducen la calidad en gran medida
- En caso de que su archivo PDF es grande, puede usar la impresora PDF como estrategia para reducir su tamaño.
- Tenga en cuenta que los 30 minutos que doy son para organizar su entrega teniendo en cuenta los posibles dificultades de conexión. Esta regla depende de su situación en particular y usted debe ser consciente de usar correctamente este tiempo.

**Importante:** Recuerde que es imprescindible mostrar el procedimiento realizado, sólo mostrar respuestas sin su respectivo soporte no será tomado en cuenta para la calificación.

## 1. Primer opcional: Conteo y recurrencias

1. (25 puntos) Para la R.R  $T(n) = 9T(n-1) - 27T(n-2) + 27T(n-3) + n3^n + 8$ . Indique:
  - Solución homogénea
  - Forma de la solución particular
2. (25 puntos) Para la RR  $T(n) = 6T(\frac{n}{3}) - 9T(\frac{n}{9}) + n + 2\log_3(n)$  Indique:
  - Solución homogénea en términos de  $k$
  - Forma de la solución particular en términos de  $k$
3. (25 puntos) Indique el número de cadenas de tamaño 5,6 o 7 que se pueden formar con las letras de la palabra CABALLO. Muestre claramente el proceso usando permutación con repetición y combinaciones explicando lo que hace en cada paso.
4. (25 puntos) Tomando una función que va de un conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}, n \geq 1$  a un conjunto  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
  - (12.5 puntos) ¿Cuántas funciones hay en total en términos de  $n$ ? Explique su respuesta.
  - (12.5 puntos) ¿Cuántas funciones inyectivas hay en total en términos de  $n$ ? Explique su respuesta.

¡Éxitos!

$$1) \quad T(n) = 9T(n-1) - 27T(n-2) + 27T(n-3) + n3^n + 8$$

$$a) \quad r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0$$

$$(r-3)^3 = 0$$

$$T^h(n) = A3^n + Bn3^n + Cn^23^n$$

$$b) \quad T^h(n) = n^3(Dn+E)3^n + F$$

$$2) \quad T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) - 9T\left(\frac{n}{9}\right) + n + 2\log_3(n)$$

$$n = 3^k$$

$$T_k = 6T_{k-1} - 9T_{k-2} + 3^k + 2k$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad (r-3)^2 = 0$$

$$a) \quad T_k^h = A3^k + B_k3^k$$

$$b) \quad T_k^{p''} = Ck^23^k + Dk + E$$

$$3) \quad \text{CABALLO} \quad A=2 \quad L=2 \quad C, B, O$$

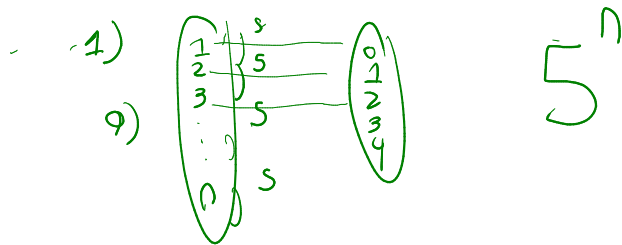
$$\# 7 \quad \frac{7!}{2!2!}$$

$$\# 6 \quad A \circ L + C(2,1) \times \frac{6!}{2!} + C, B, O \quad C(3,1) \frac{6!}{2!2!}$$

$$\# 5 \quad AA \quad \frac{5!}{2!} + LL \quad \frac{5!}{2!} + A \begin{Bmatrix} C \\ B \\ O \end{Bmatrix} C(3,1) \frac{5!}{2!}$$

$$+ L \begin{Bmatrix} C \\ B \\ O \end{Bmatrix} C(3,1) \frac{5!}{2!} + \begin{Bmatrix} C \\ B \\ O \end{Bmatrix} \times 2 \quad C(2,2) \frac{5!}{2!2!}$$

4)



b)

$n=1$	$5$	$n > 5$	$0$	no is possible
$n=2$	$5 \times 4$			
$n=3$	$5 \times 4 \times 3$			
$n=4$	$5 \times 4 \times 3 \times 2$			
$n=5$	$5!$			

## 2. Segundo opcional: Grafos

Responda esta sección del examen de acuerdo a la definición de grafo hipercubo, este es un grafo regular con  $2^n$  que se presenta de la siguiente manera:

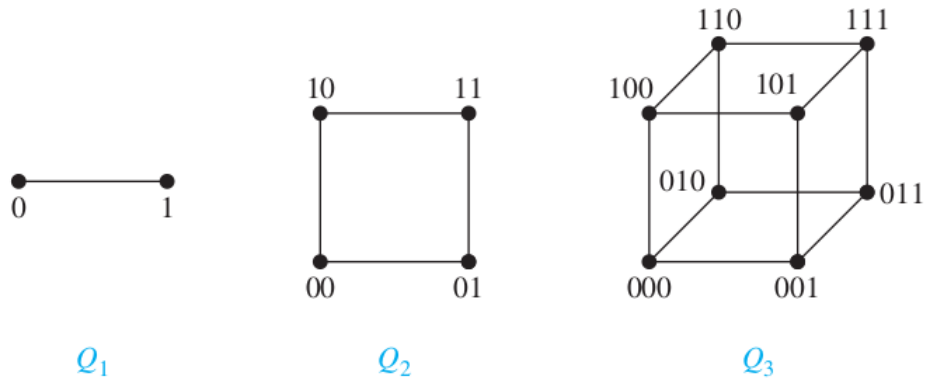


Figura 1: Grafo hipercubo para valores de  $n$  1,2 y 3

De acuerdo a esto responda lo siguiente:

1. (25 puntos) Usando el teorema de Handshaking indique el número de aristas. Explique claramente cómo lo calcula.
2. (25 puntos) Explique si este grafo es bipartito de acuerdo al valor de  $n$ .
3. (25 puntos) Explique claramente la existencia o no de:
  - Circuitos eulerianos
  - Circuitos hamiltonianos
4. (25 puntos) Explique claramente cual es el número cromático de este grafo en términos de  $n$ .

¡Éxitos!

1)  $\underbrace{\{n, n, n, \dots, n\}}_{2^n}$  Secuencia de grado  $\left[ \begin{array}{l} \sum_{i \in V} \delta(i) = n2^n \quad e = \frac{n2^n}{2} \end{array} \right]$

2) Por su estructura no tenemos  $K_3$  como subgrafo  
Siempre es bipartito

a) Euleriano SÍ, con  $n$  par

b) Hamiltoniano, SÍ par  $n \geq 2$

$\phi_1$  NO

$\phi_2$  SÍ

$\phi_3$  SÍ

4) Para todo  $n$   
es 2

$\phi_1$   
2

$\phi_2$   
2

$\phi_3$   
2

Nunca tendremos  
 $K_3$

### 3. Tercer opcional: Lenguajes y gramáticas

Para este examen recuerde:

- AFD: Automata finito determinista
- AFN: Automata finito no determinista

1. (50 puntos) Considere el alfabeto  $\Sigma = \{a, b, c\}$  y el lenguaje de las cadenas no vacías que no pueden tener dos a consecutivas, de:

- (25 puntos) Diagrama de estados del AFD
- (25 puntos) Descripción formal de este AFD

Si el AFD diseñado es incorrecto, ambos puntos se calificaran de acuerdo al error que se presente.

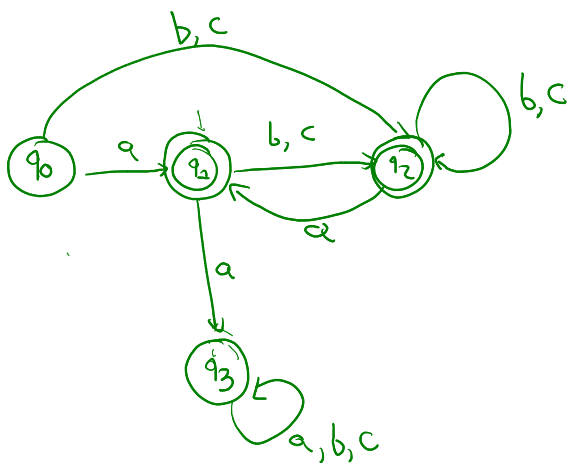
2. (50 puntos) Considere el alfabeto de los dígitos decimales  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

- (25 puntos) El lenguaje de las cadenas que son múltiplos de 3 ¿Es un lenguaje regular?. Pista: Los múltiplos de 3 son aquellas cadenas cuyos dígitos dan un múltiplo de 3, por ejemplo 111 es múltiplo de 3 porque  $1+1+1 = 3$ .
- (25 puntos) Indique el diagrama del AFN que reconoce las cadenas de números no vacías que no tienen 111.

¡Éxitos!



1)



$q_1$ : lleva una a, si llega otra a  
NO se acepta

Descripcion Formal

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$T = \{q_1, q_2\}$$

$$F(s, q_i) \quad s \in \Sigma$$

$q_i$	a	b	c
$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_2$
$q_1$	$q_3$	$q_2$	$q_2$
$q_2$	$q_1$	$q_2$	$q_2$
$q_3$	$q_3$	$q_3$	$q_3$

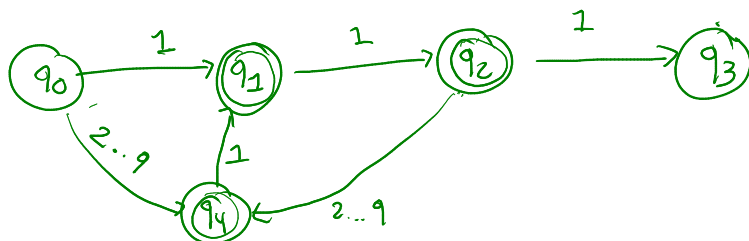
2) a) No se puede definir con cerraduras ni operaciones de union o concatenacion entre lenguajes regulares.

Además, debe memorizarse la suma, por lo que no podemos usar AFN ni AFD.

Por lo tanto, no es un lenguaje regular

2.. 9 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

b)



$q_1$  = llevo 1

$q_2$  = llevo 11

$q_3$  = llevo 111 ← no acepto