

Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

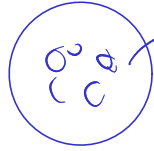
`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

`http://eisc.univalle.edu.co/~oscarbed/MD/`

* Notación O

Crecimiento de funciones

$[S \rightarrow 9 \mid B \mid 2]$
 $[S \rightarrow 7 \mid 9 \mid 12 \mid 13]$



Donald Knuth

- Cuando estaba en 8° grado participó en un concurso que consistía en formar palabras con las letras de la expresión "Ziegler's giant Bar" *Combinatorio*
- Estudió Física, matemáticas y ciencias
- Escribió The Art of Computer Programming
- Desarrolló TeX

Latex
→ documento

(1938 -)

¿Como puedo saber si un algoritmo es mejor que otro si solucionan el mismo problema?

Algoritmo A: Ordena

Algoritmo B: Ordena

El que use menos pasos, es decir tenga

MENOR COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

$$n^2 + 7n + 6$$

$$O(n^2)$$
$$\Omega(n^2)$$

$$\Theta(n^2)$$

$$O(n^2)$$

$$n^2$$

$$n = 100$$

$$10000$$

$$\log_2$$

$$n = 100$$

$$\Theta(n \log n)$$

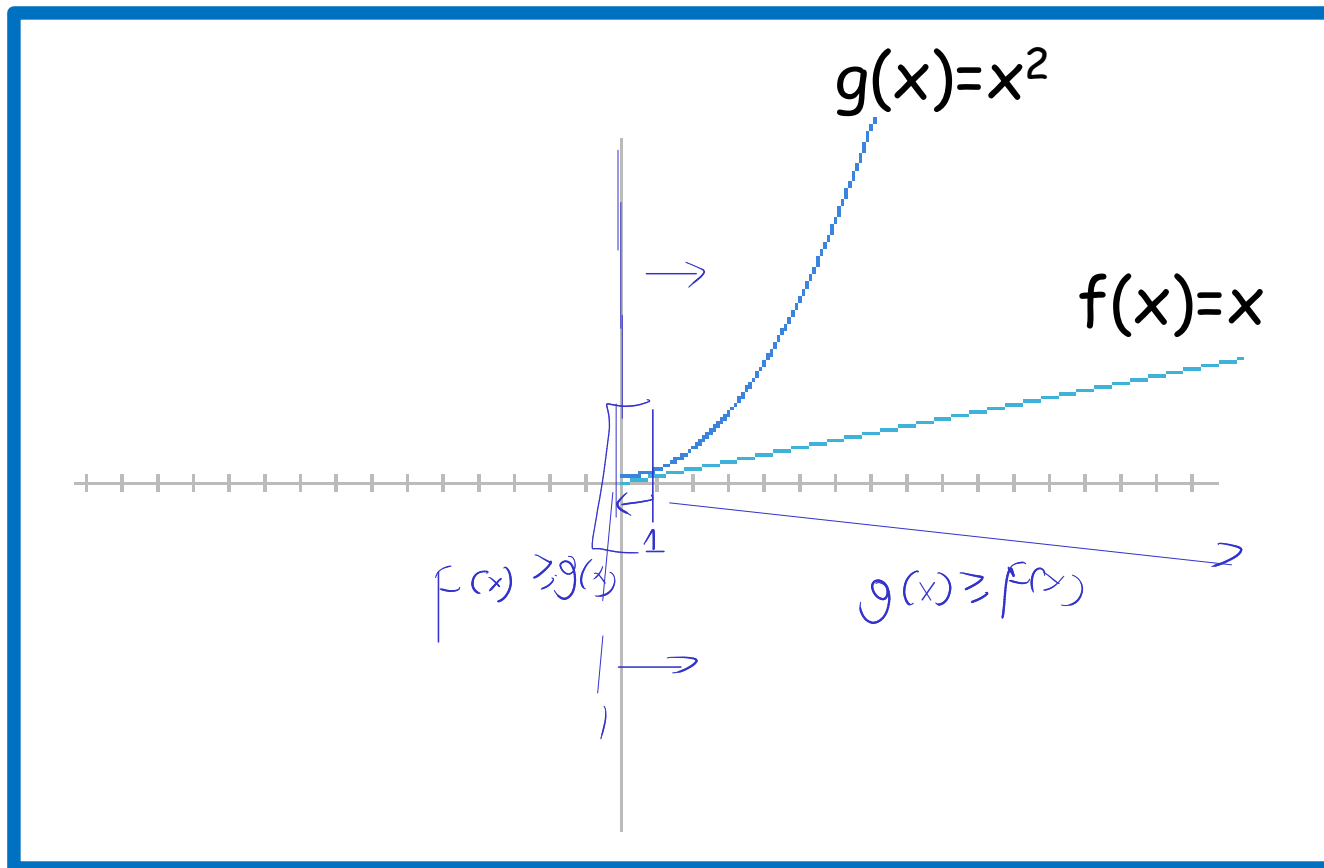
$$n \log n$$

$$100 \log_2(100)$$

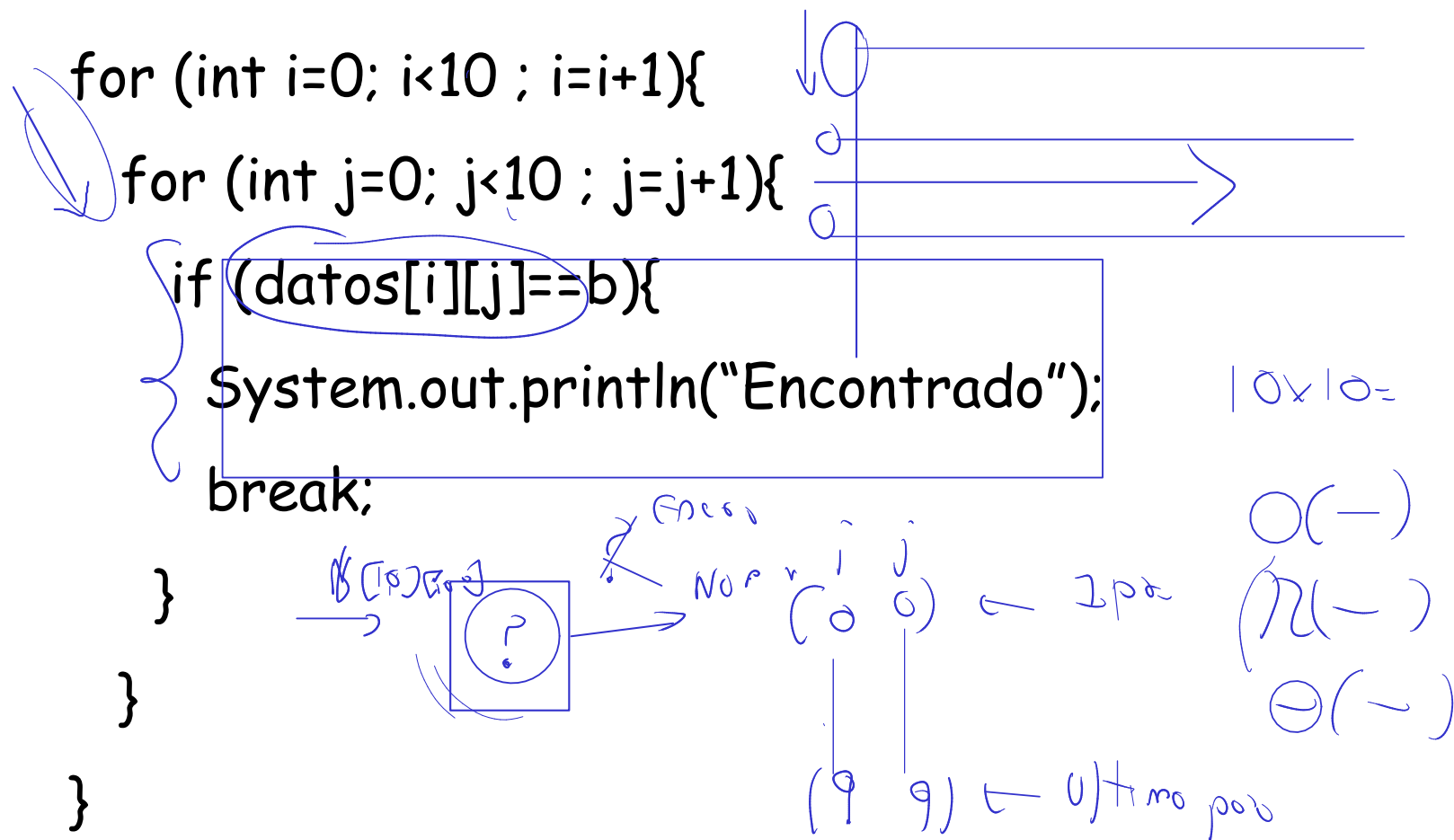
$$780$$

Crecimiento de funciones

El análisis de crecimiento de funciones se basa en comparar el comportamiento de dos o más funciones



Considere el siguiente programa que busca el número b en una matriz:



Considere el siguiente programa que busca el número b en una matriz:

i

j

$pos = 10$

-8	12	-9	65	34	56	-54	55	14	7
-9	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
-56	-56	13	95	-87	77	99	87	77	-3

10x10

$b=7$

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

7	12	-9	65	34	56	-54	55	14	-65
-34	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
-56	-56	13	95	-87	77	99	87	77	-3

1

10x10

b=7

Considere el siguiente programa que busca el número b en una matriz:

-8	12	-9	65	34	56	-54	55	14	-65
-35	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
7	-56	13	95	-87	77	99	87	77	-3

10x10

$b=7$

92
11

Considere el siguiente programa que busca el número b en una matriz:

-8	12	-9	65	34	56	-54	55	14	-65
-35	34	90	56	87	94	31	45	88	99
43	98	34	65	54	65	52	54	76	55
14	13	31	46	15	9	41	-8	11	13
89	32	23	13	41	23	77	80	88	-9
19	56	34	23	25	55	99	14	11	56
14	34	56	43	-78	25	77	25	22	95
94	-6	94	14	80	-6	67	95	-8	-76
89	80	-34	76	89	-4	13	11	78	15
32	-56	13	95	-87	77	99	87	77	7

200

10x10

$b=7$

La complejidad computacional es la cantidad de pasos que requiere un algoritmo para resolver un problema

Práctica: La complejidad exacta es muy difícil de obtener es mejor dar un estimado $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$

$O(n \log(n))$ Complejidad de Sort en Java ✓

Considere el siguiente programa que busca el número **b** en una matriz:

```
for (int i=0; i<10 ; i=i+1){  
    for (int j=0; j<10 ; j=j+1){  
        if (datos[i][j]==b){  
            System.out.println("Encontrado");  
            break;  
        }  
    }  
}
```

Considere el siguiente programa que busca el número b en una matriz:

```
for (int i=0; i<n ; i=i+1){  
    for (int j=0; j<n ; j=j+1){  
        if (datos[i][j]==b){  
            System.out.println("Encontrado");  
            break;  
        }  
    }  
}
```

En el peor caso, ¿cuántas comparaciones hará el programa para una matriz de tamaño $n \times n$?

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34
----	----	---	---	---	----	----	----	----	----

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34
----	----	---	---	---	----	----	----	----	----

b=7

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34
----	----	---	---	---	----	----	----	----	----

b=34

Problema: Dado un arreglo ordenado encontrar el valor b

-3	-2	0	3	7	11	14	22	26	34
----	----	---	---	---	----	----	----	----	----

b=-3

Programa 1:

```
public void buscar(){  
    for(int i=1; i<=n; i=i+1){  
        if (datos[i]==b){  
            System.out.println("Encontrado");  
            break;  
        }  
    }  
}
```

Programa 1:

```
public void buscar(){  
    for(int i=1; i<=n; i=i+1){  
        if (datos[i]==b){  
            System.out.println("Encontrado");  
            break;  
        }  
    }  
}
```

En el peor caso, ¿cuántas comparaciones hará el programa para un arreglo de tamaño n ?

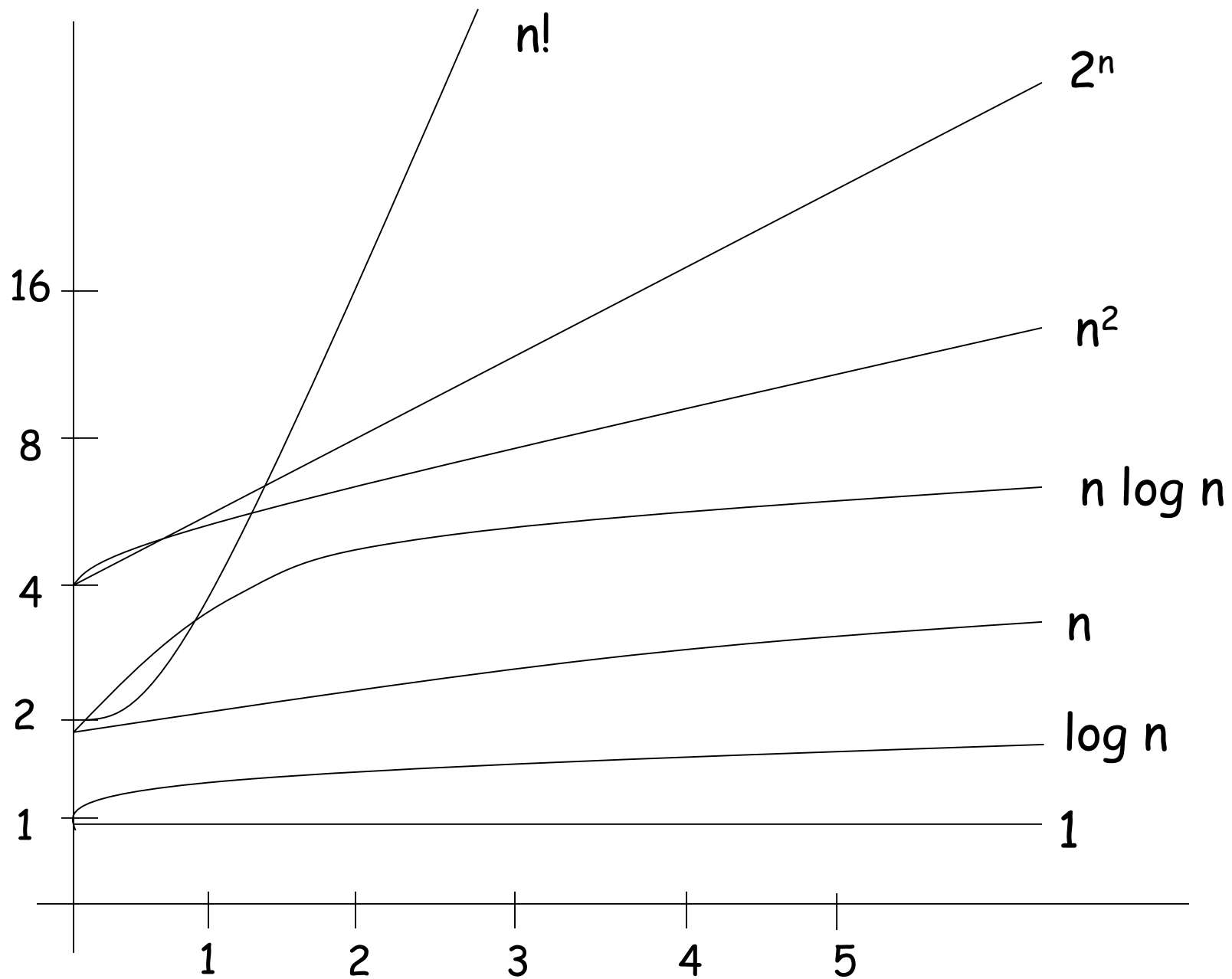
Programa 2:

```
public void buscar(int i, int j){  
    medio=(i+j)/2;  
    if (a[medio]==b){  
        System.out.println("Encontrado");  
        break;  
    }  
    if (a[medio]<b)  
        buscar(medio,j);  
    if (a[medio]>b)  
        buscar(i,medio);  
}
```

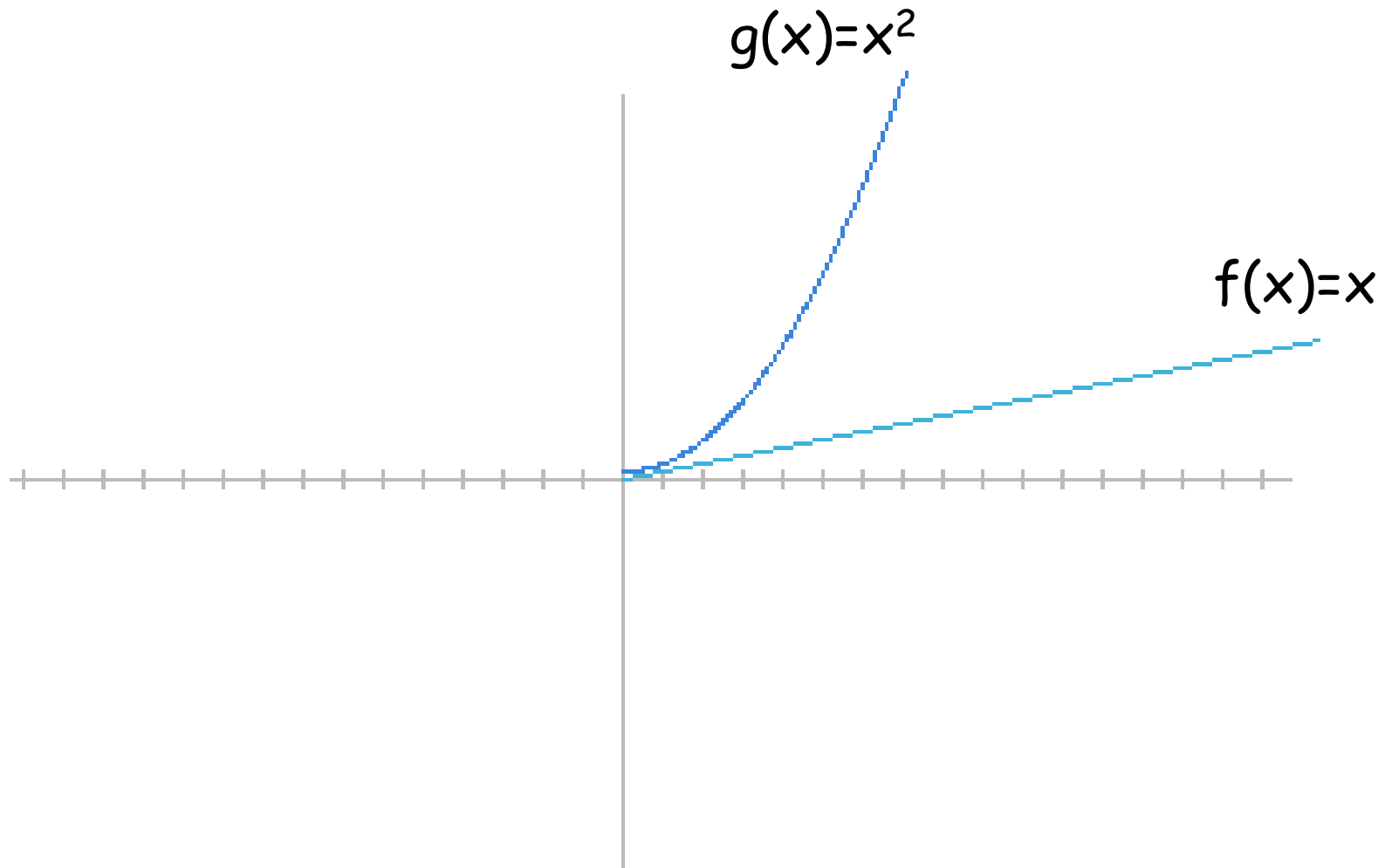
Programa 2:

```
public void buscar(int i, int j){  
    medio=(i+j)/2;  
    if (a[medio]==b){  
        System.out.println("Encontrado");  
        break;  
    }  
    if (a[medio]<b)  
        buscar(medio,j);  
    if (a[medio]>b)  
        buscar(i,medio);  
}
```

En el peor caso, ¿cuántas comparaciones hará el programa para un arreglo de tamaño n ?

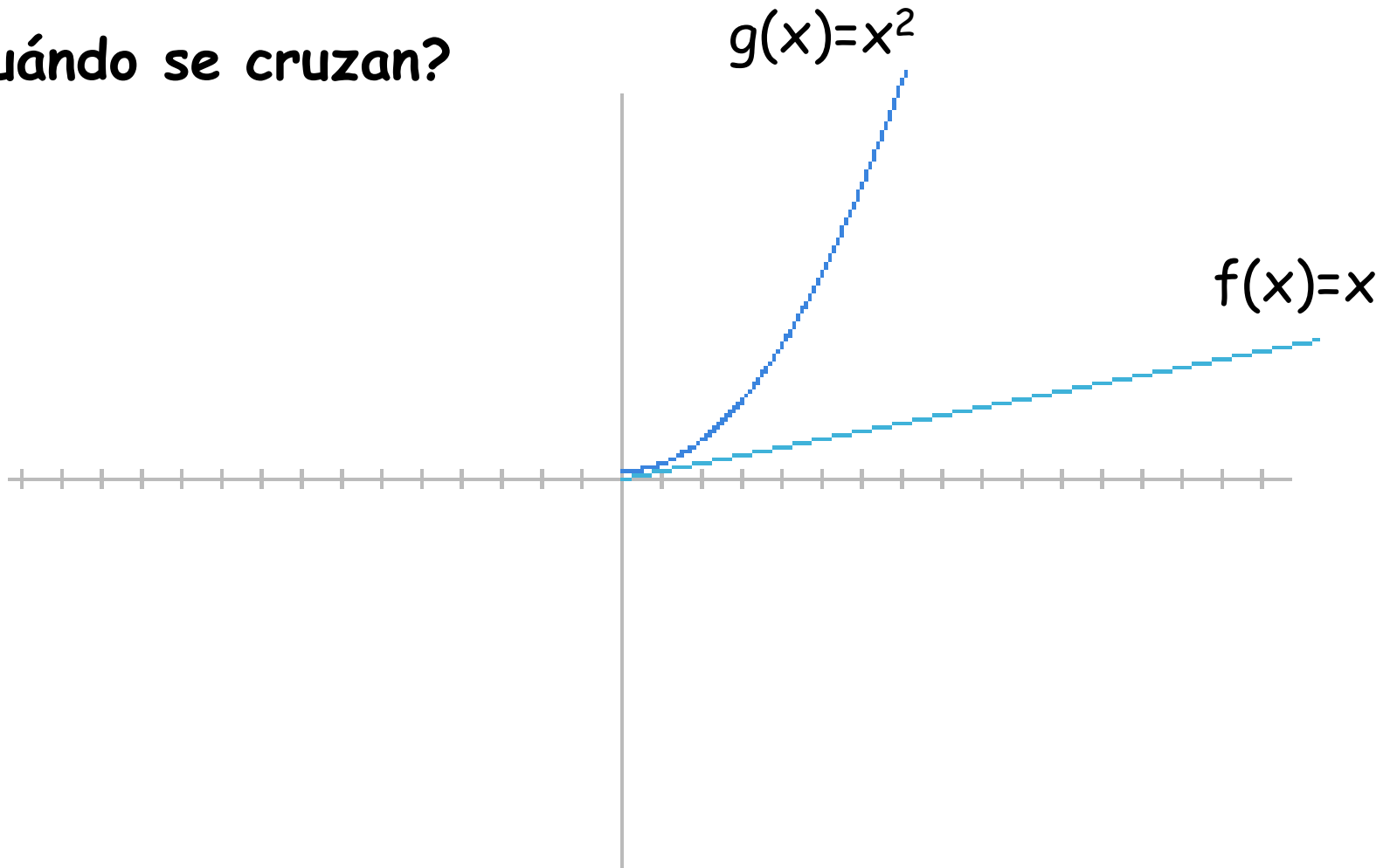


Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

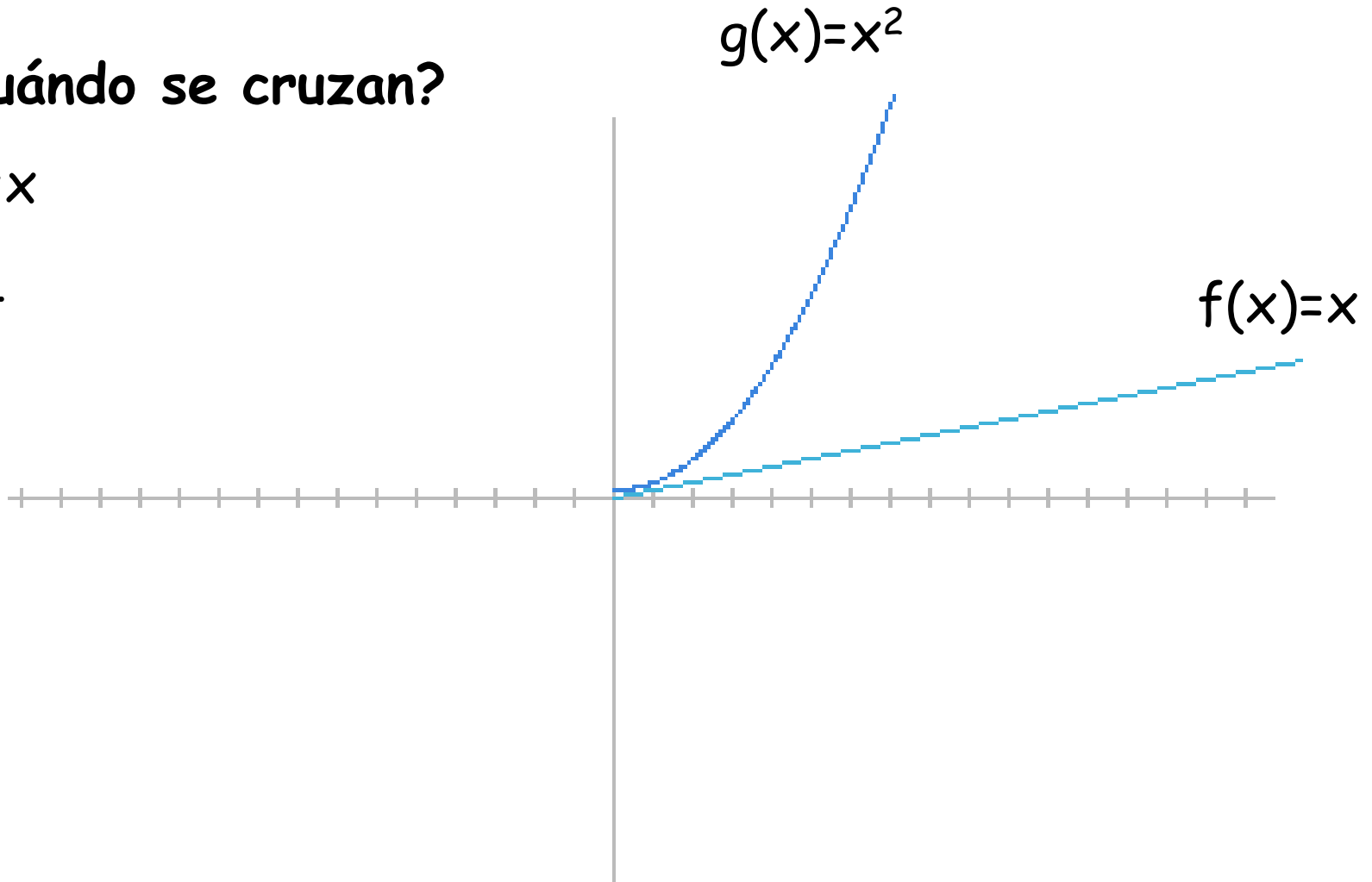


Crecimiento de funciones

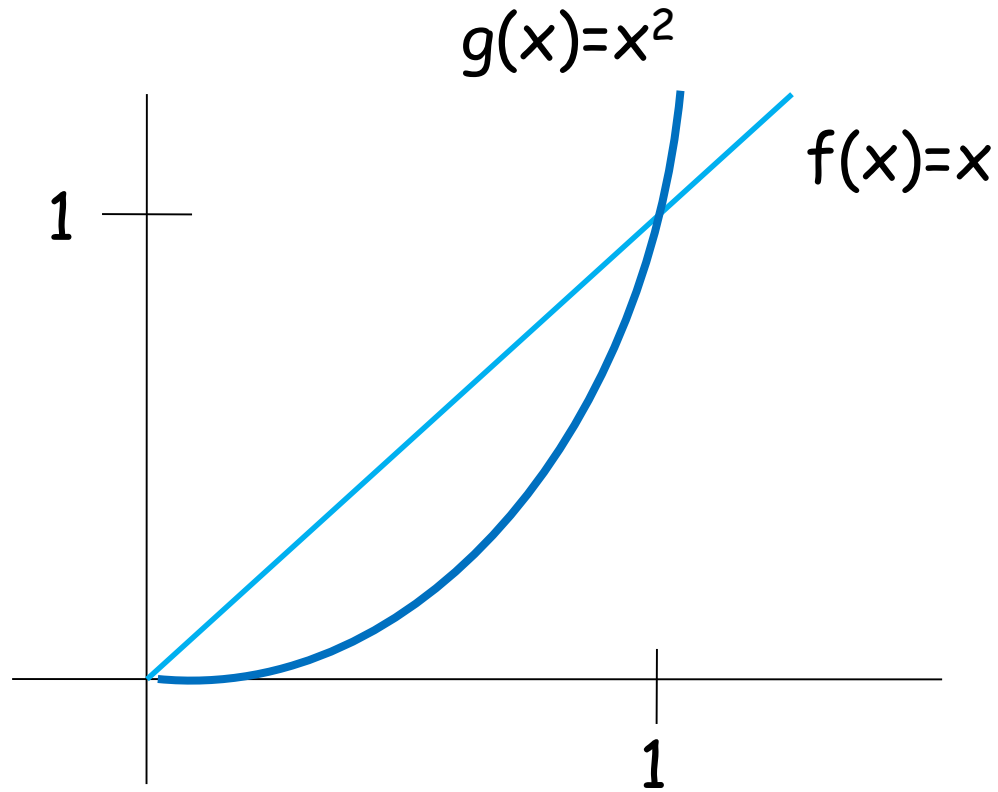
¿Cuándo se cruzan?

$$x^2 = x$$

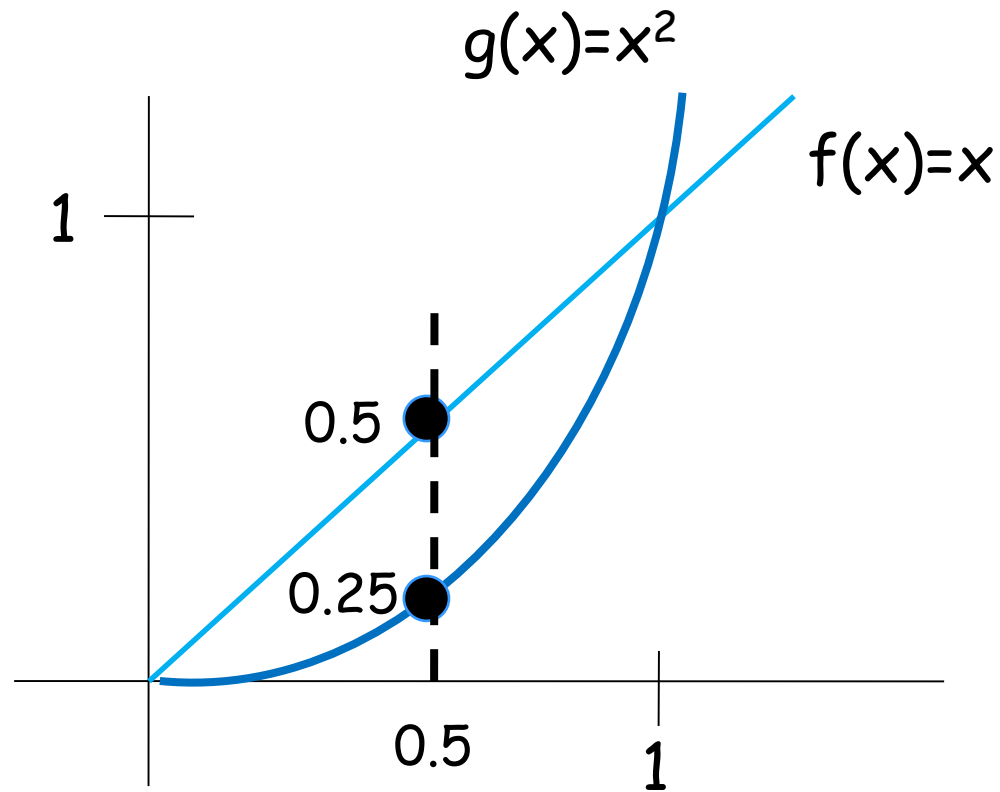
$$x = 1$$



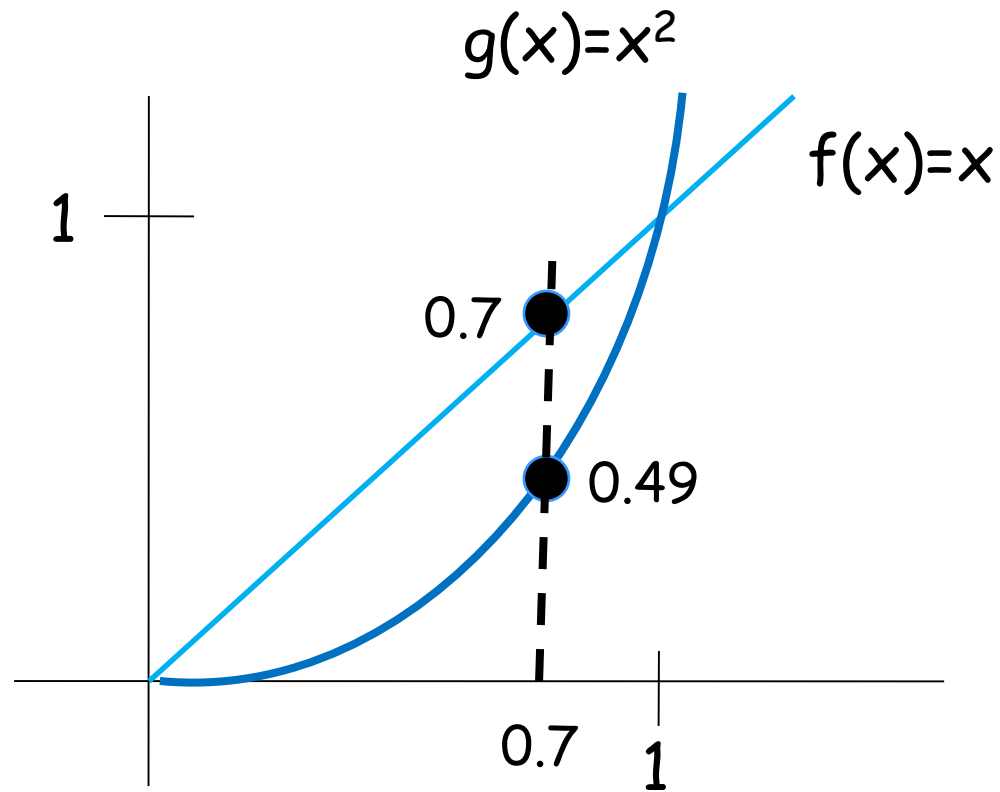
Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

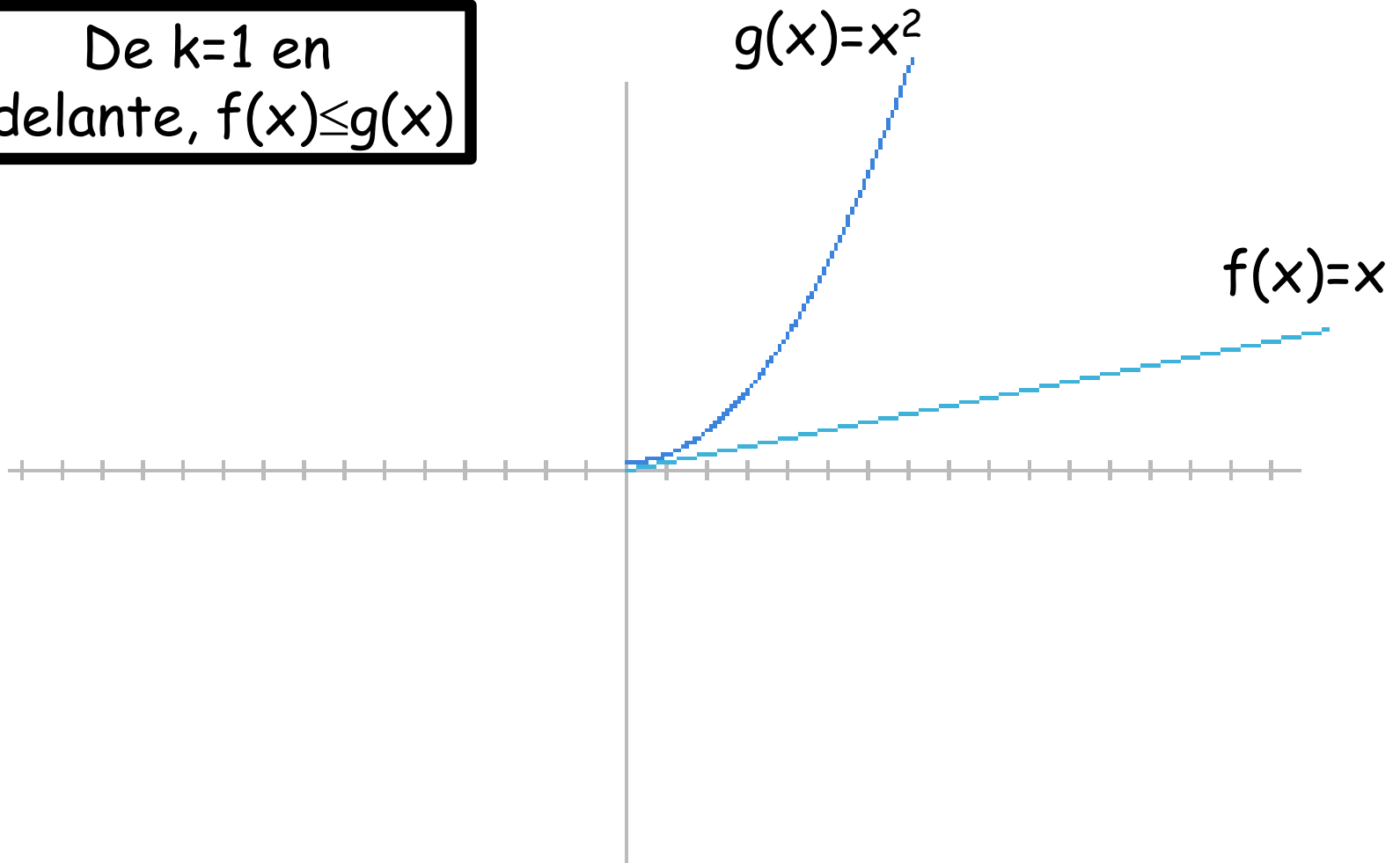


Crecimiento de funciones



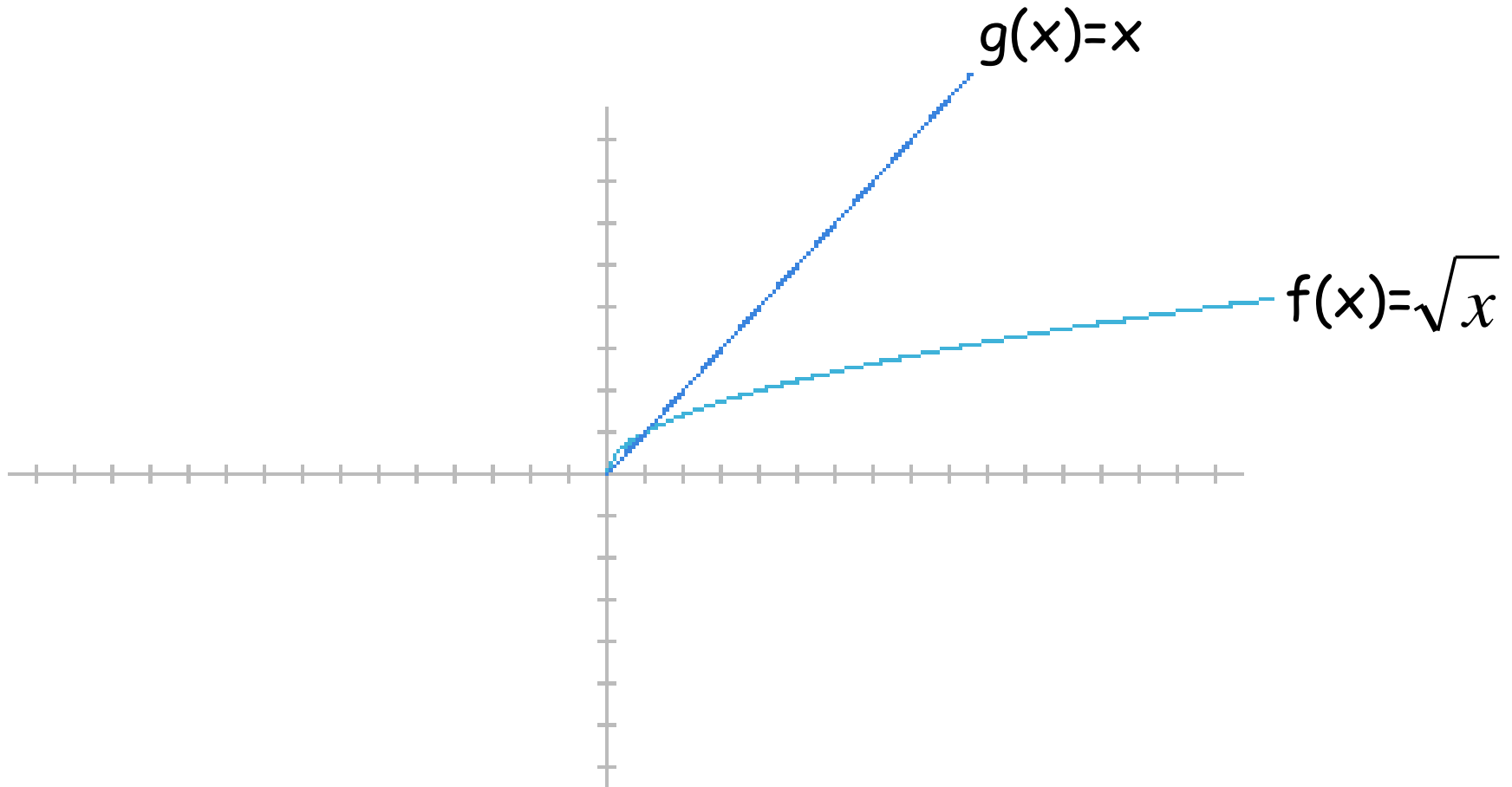
Crecimiento de funciones

De $k=1$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



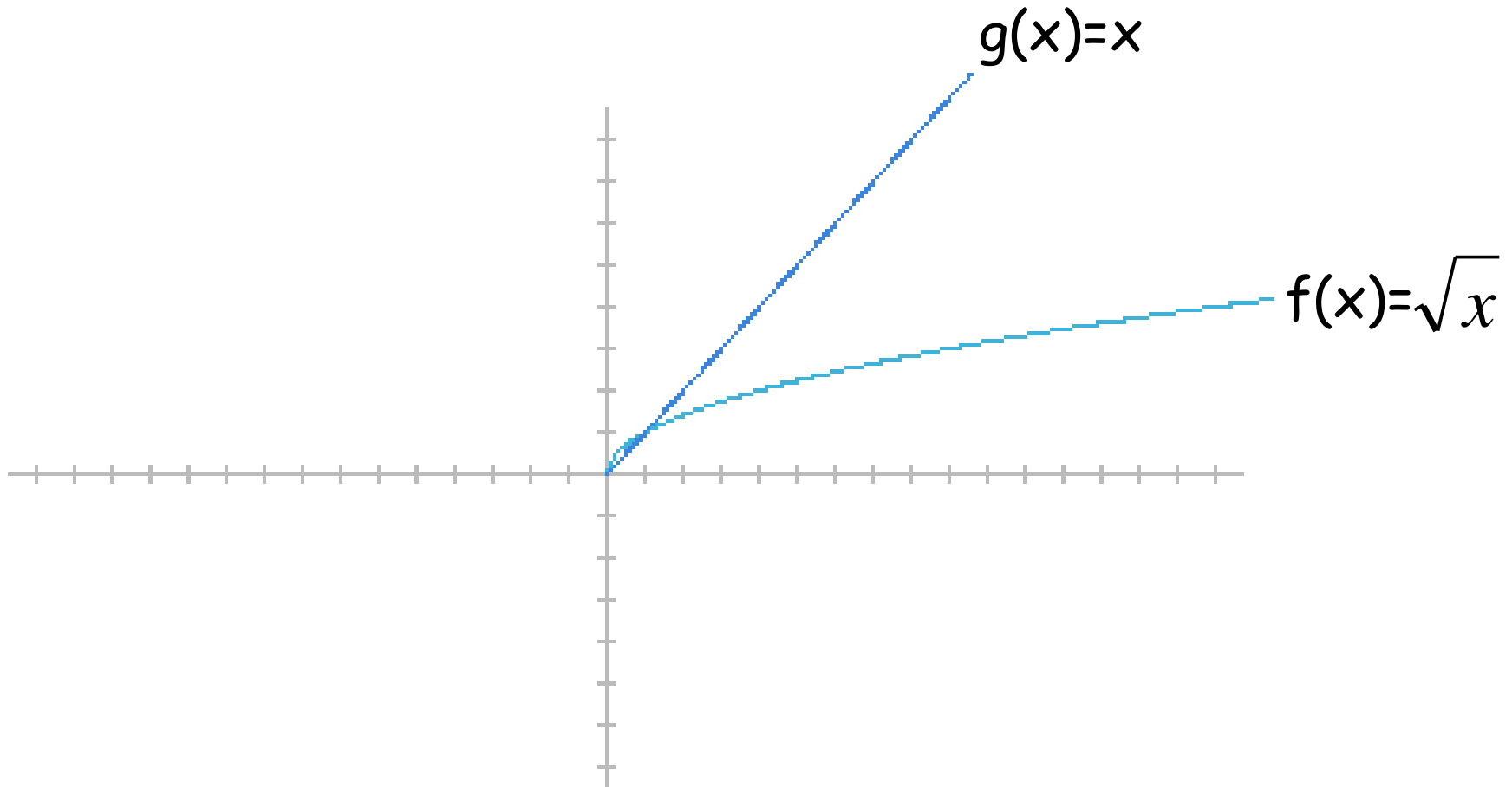
Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

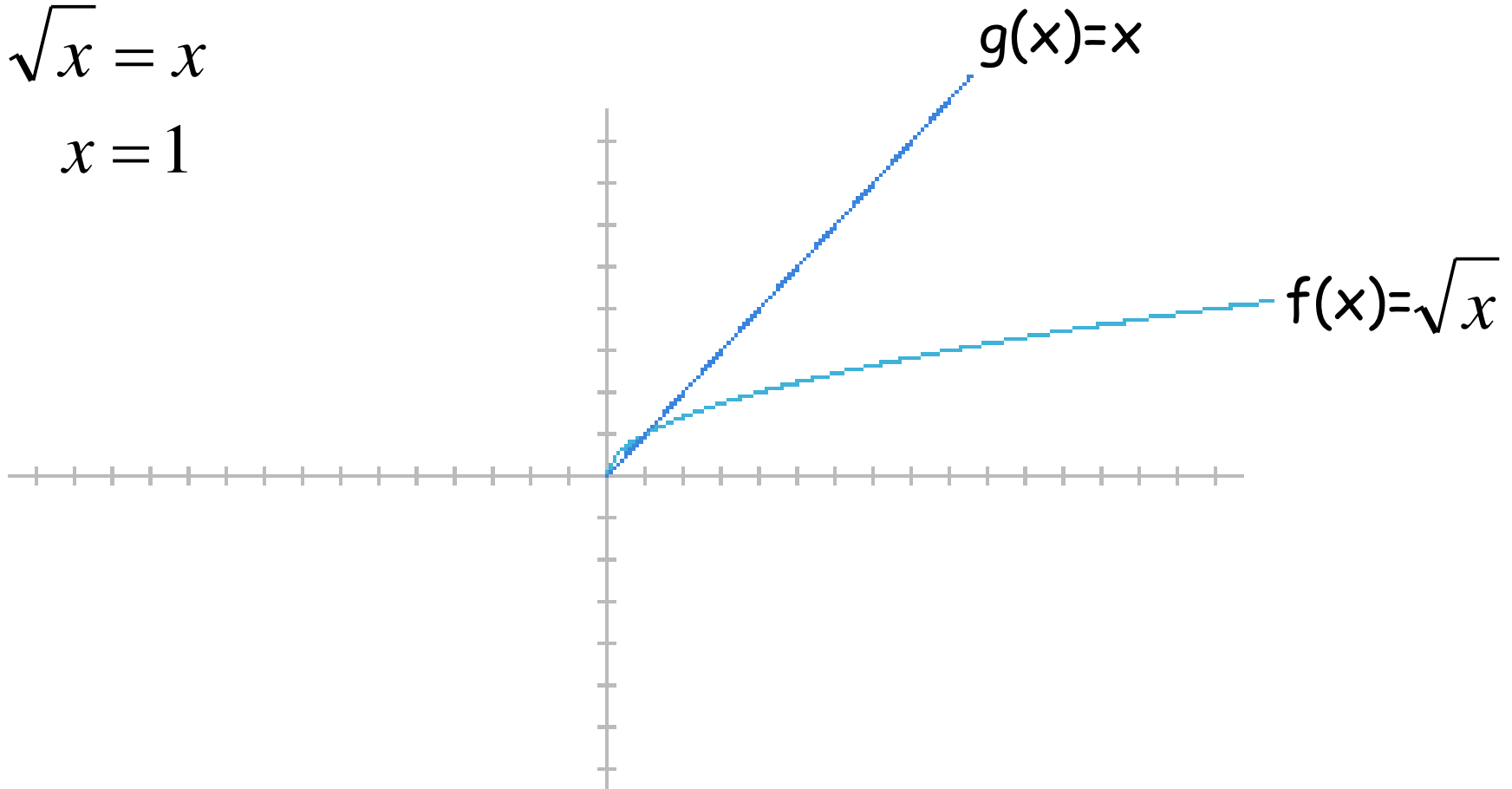


Crecimiento de funciones

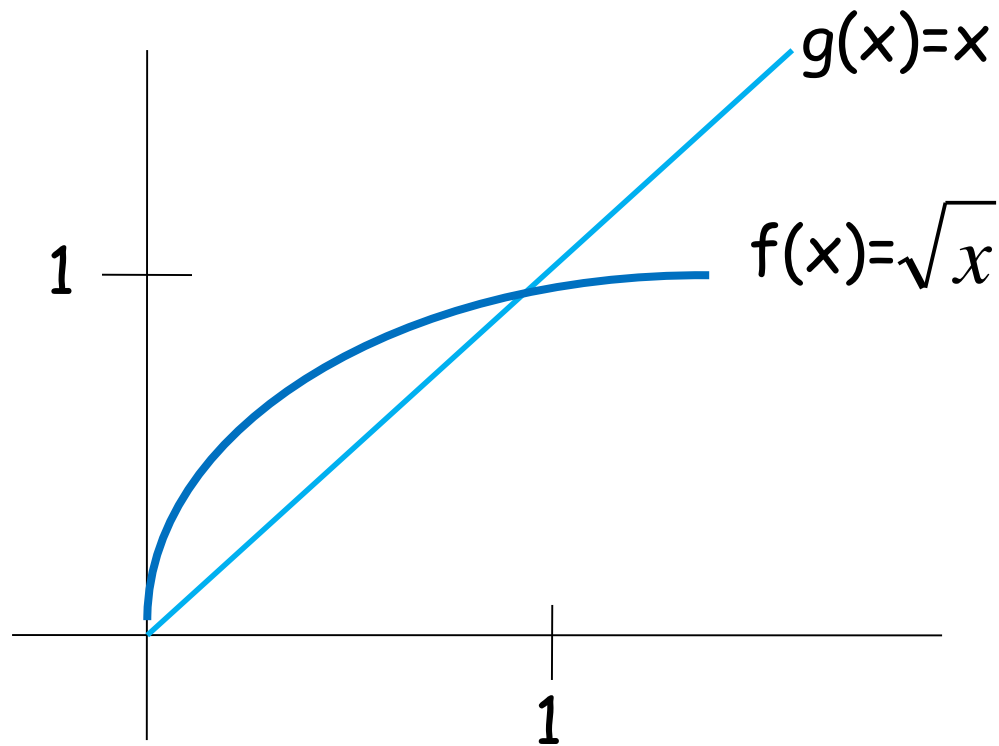
¿Cuándo se cruzan?

$$\sqrt{x} = x$$

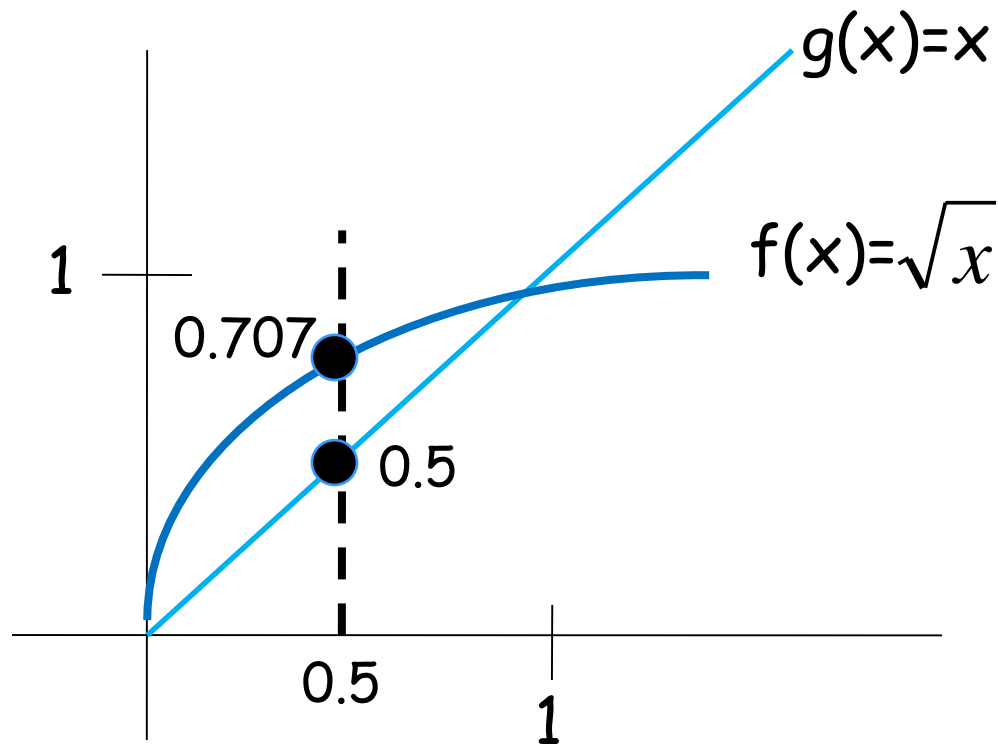
$$x = 1$$



Crecimiento de funciones

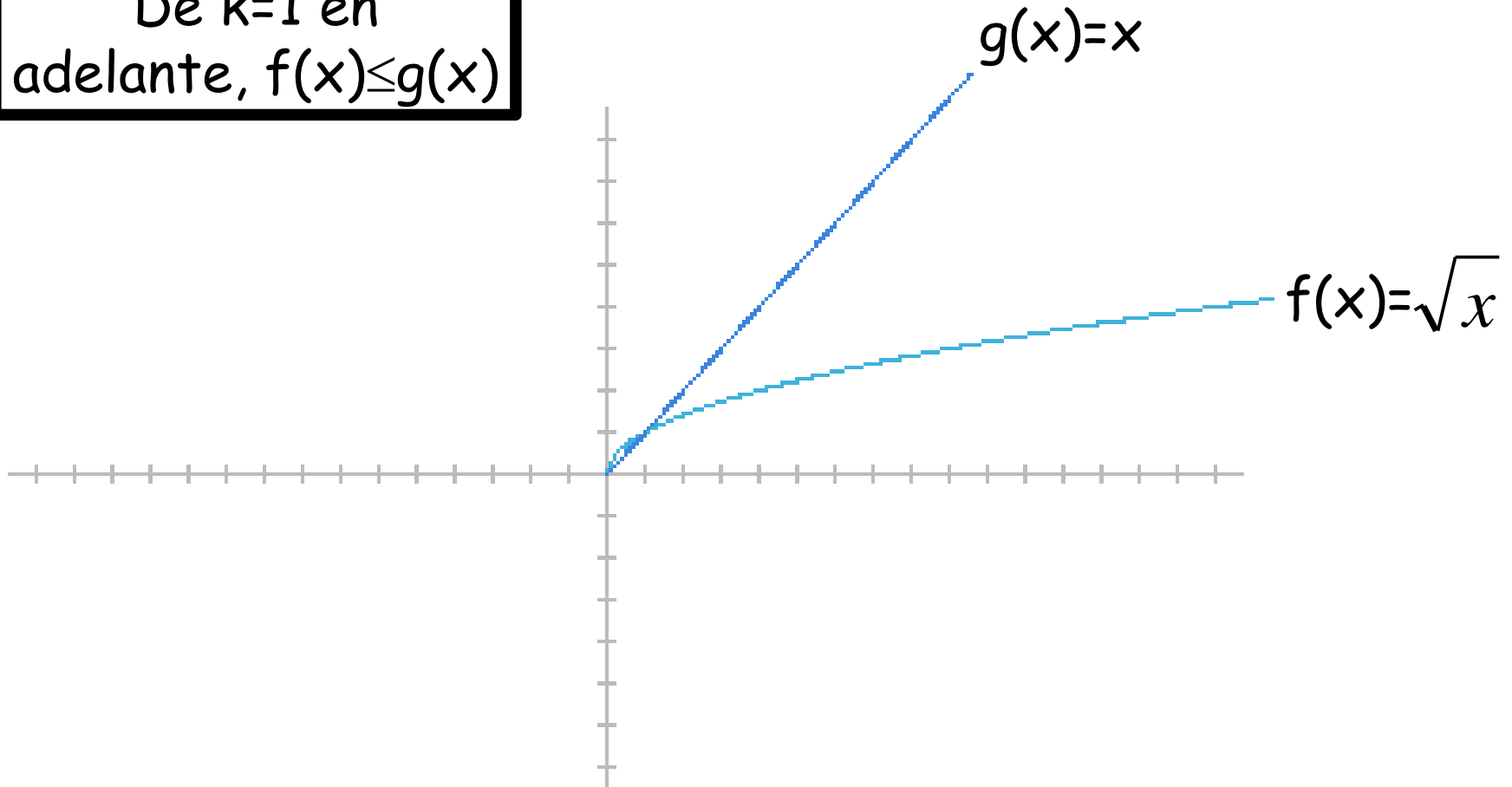


Crecimiento de funciones



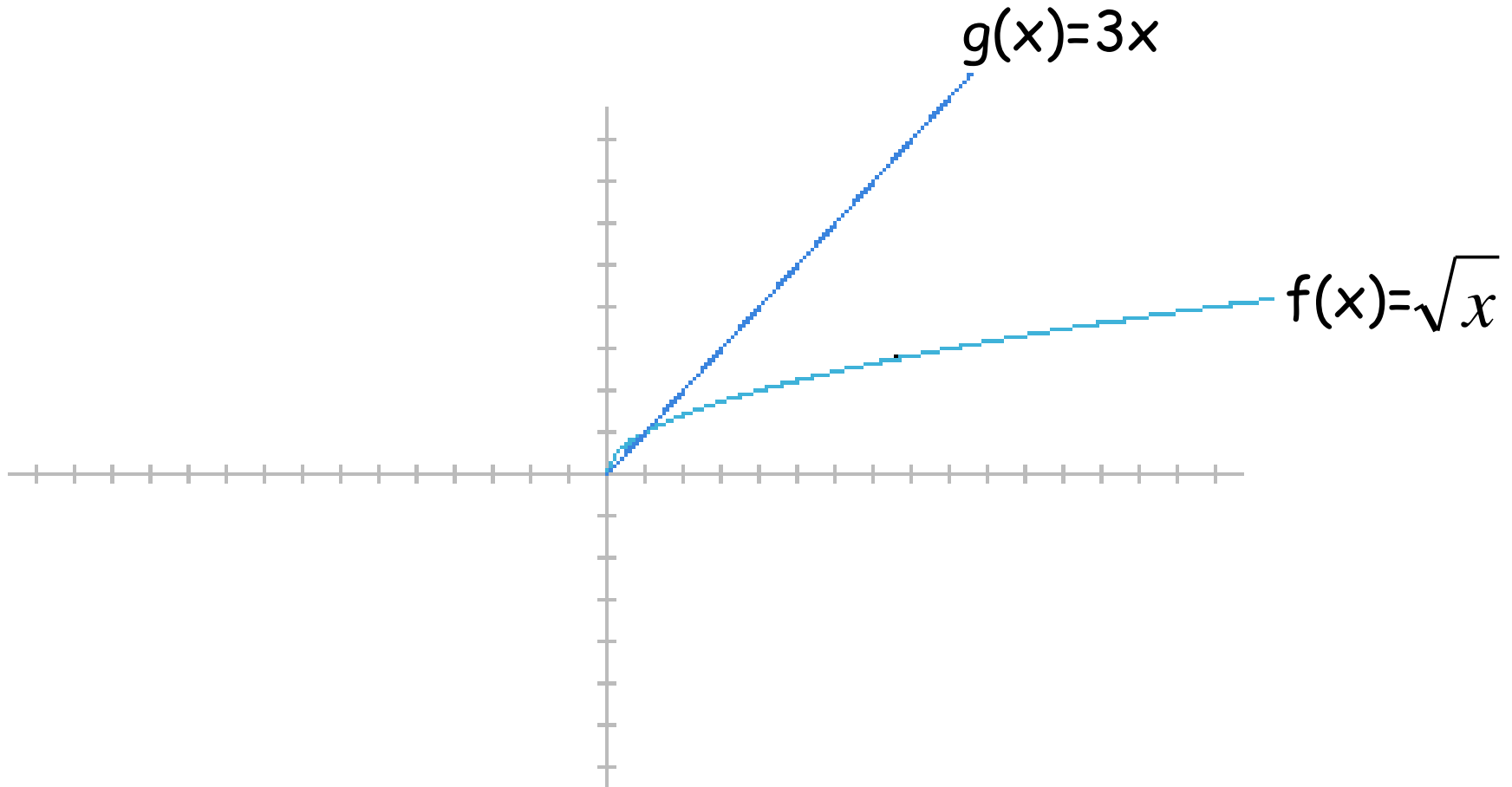
Crecimiento de funciones

De $k=1$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



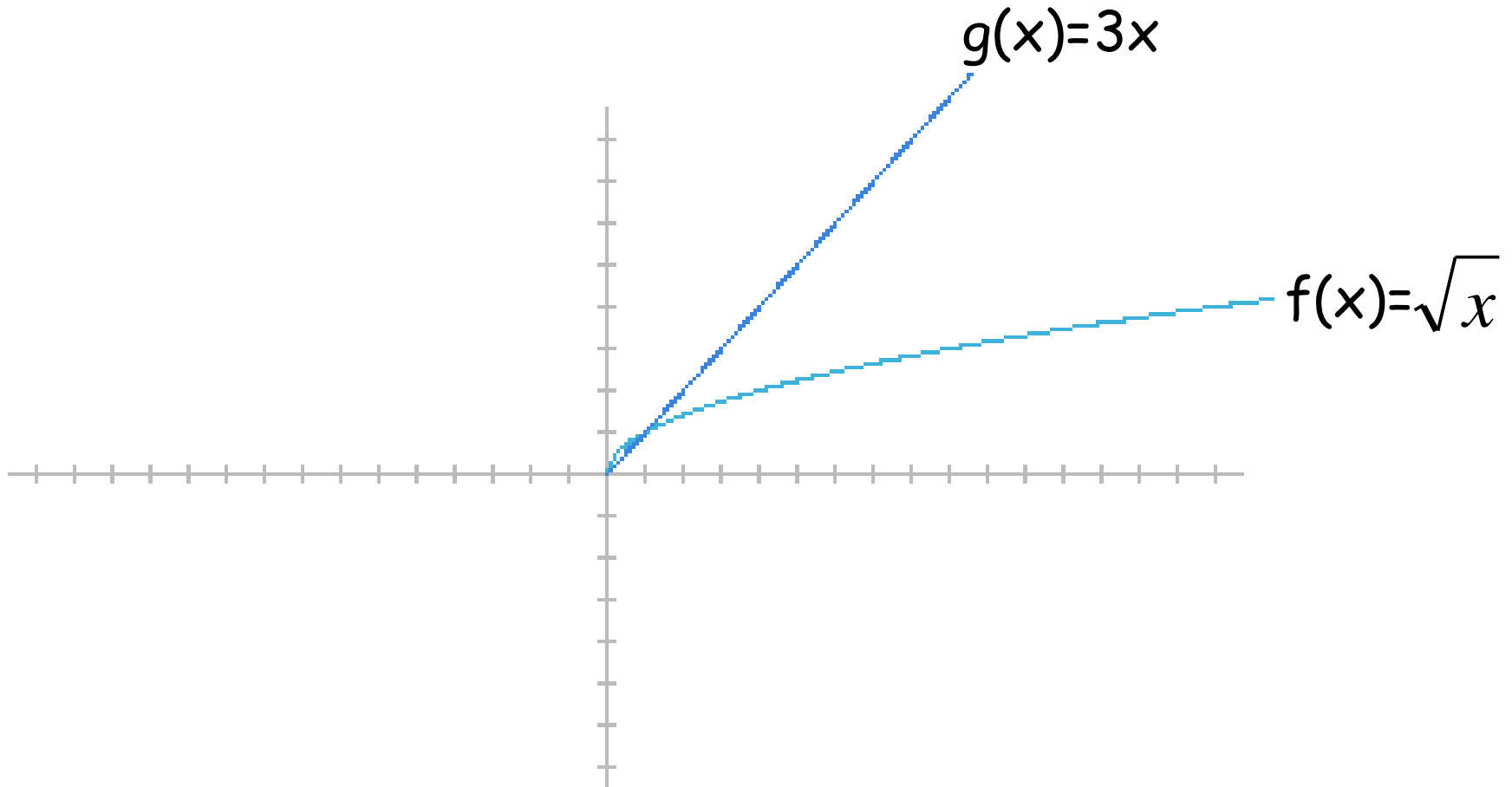
Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



Crecimiento de funciones

¿Cuándo se cruzan?

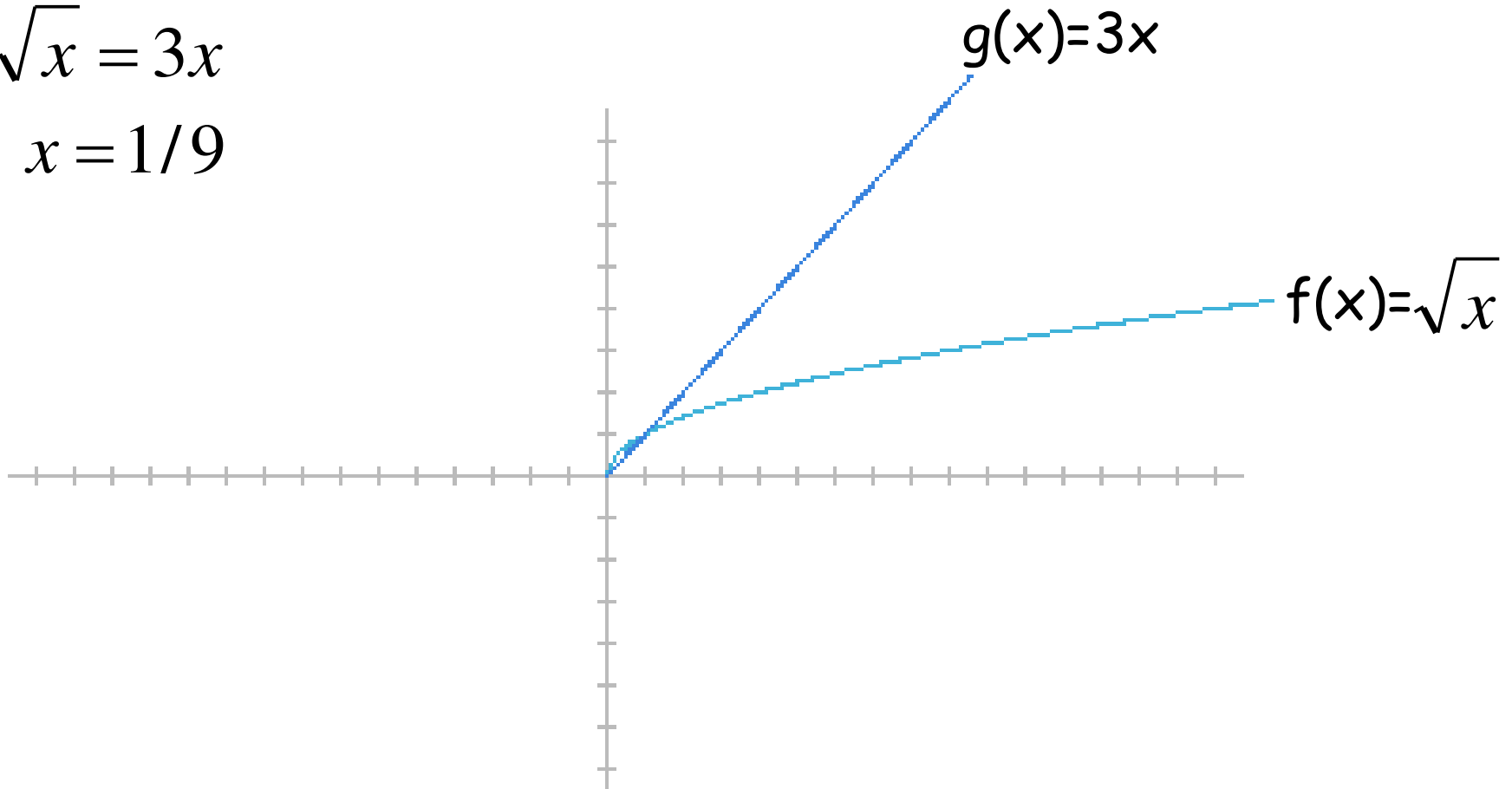


Crecimiento de funciones

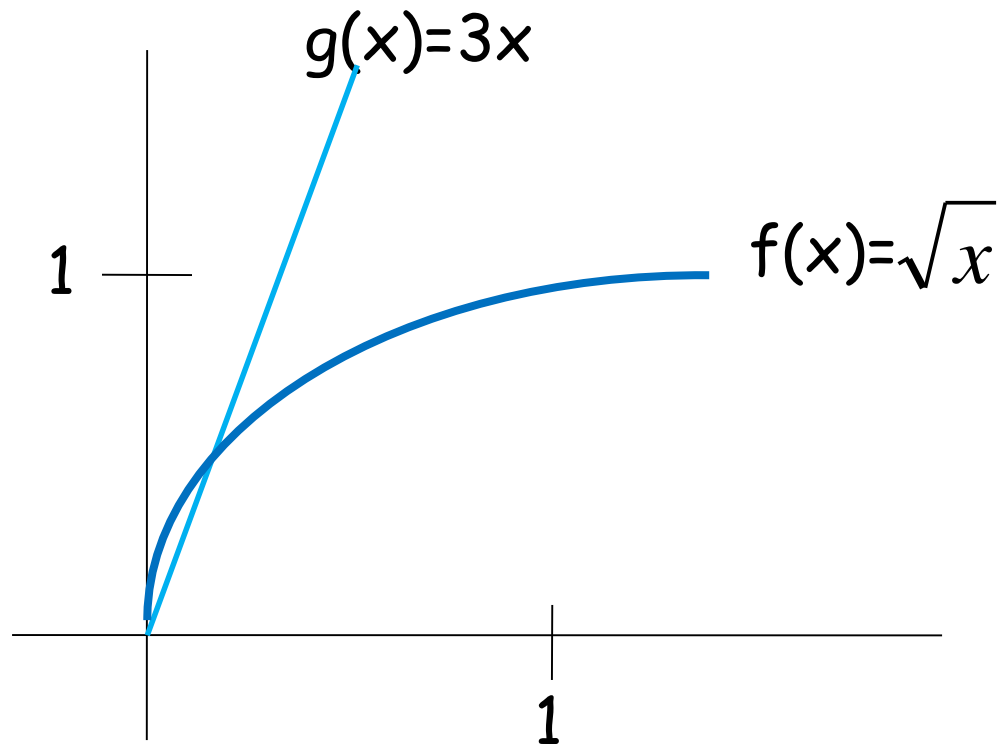
¿Cuándo se cruzan?

$$\sqrt{x} = 3x$$

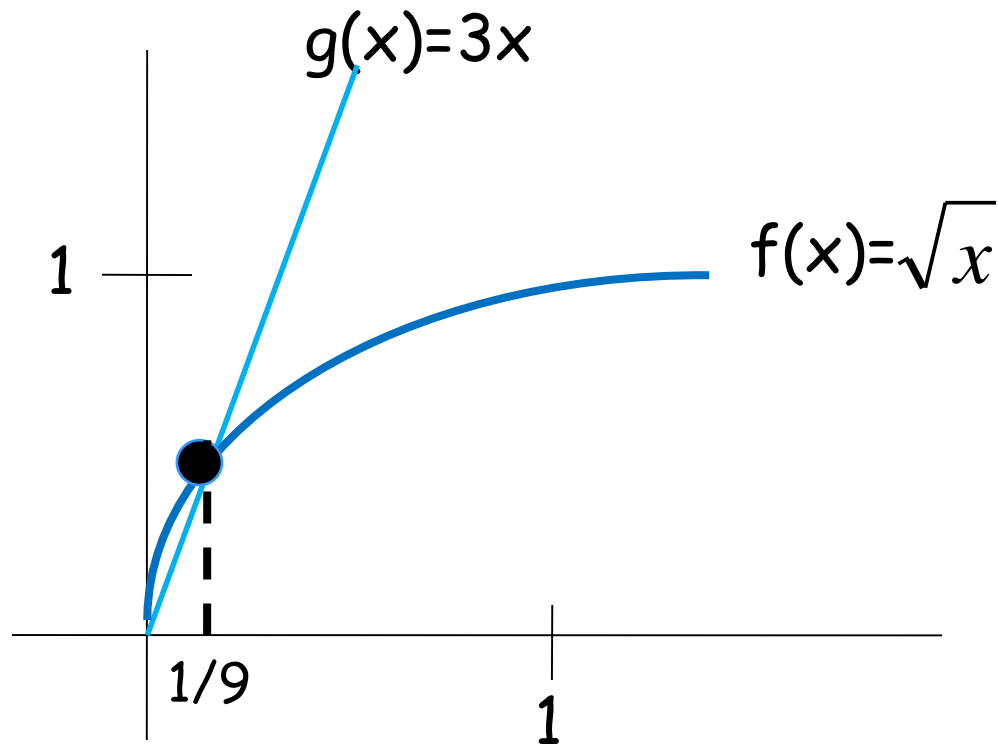
$$x = 1/9$$



Crecimiento de funciones

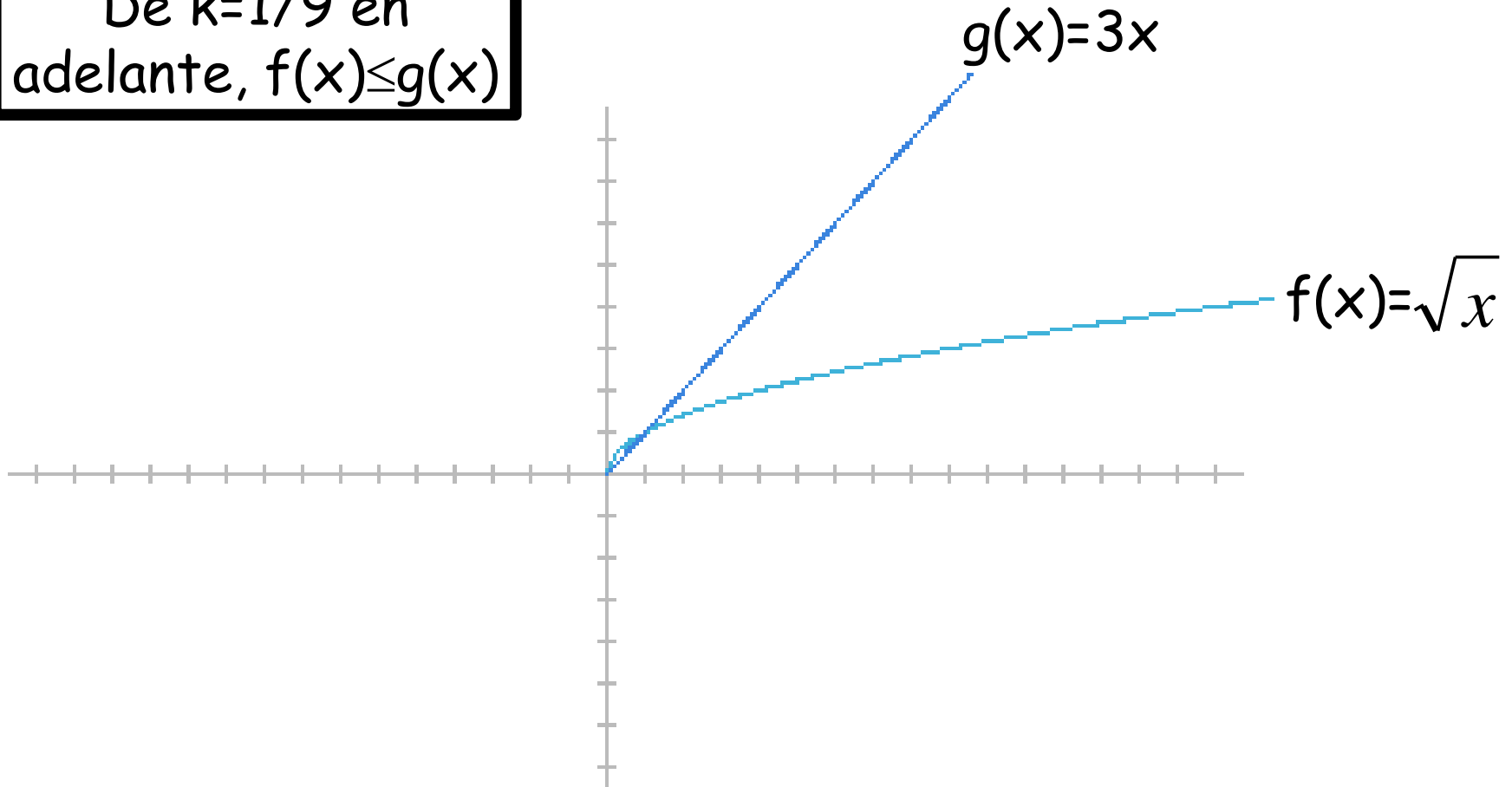


Crecimiento de funciones



Crecimiento de funciones

De $k=1/9$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$$g(x)=x^2$$

$$f(x)=x+2$$

Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$$g(x)=x^2$$

$$f(x)=x+2$$

De $k=2$ en
adelante, $f(x) \leq g(x)$

Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

$$g(x)=x^2$$

$$f(x)=2x+24$$

Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones

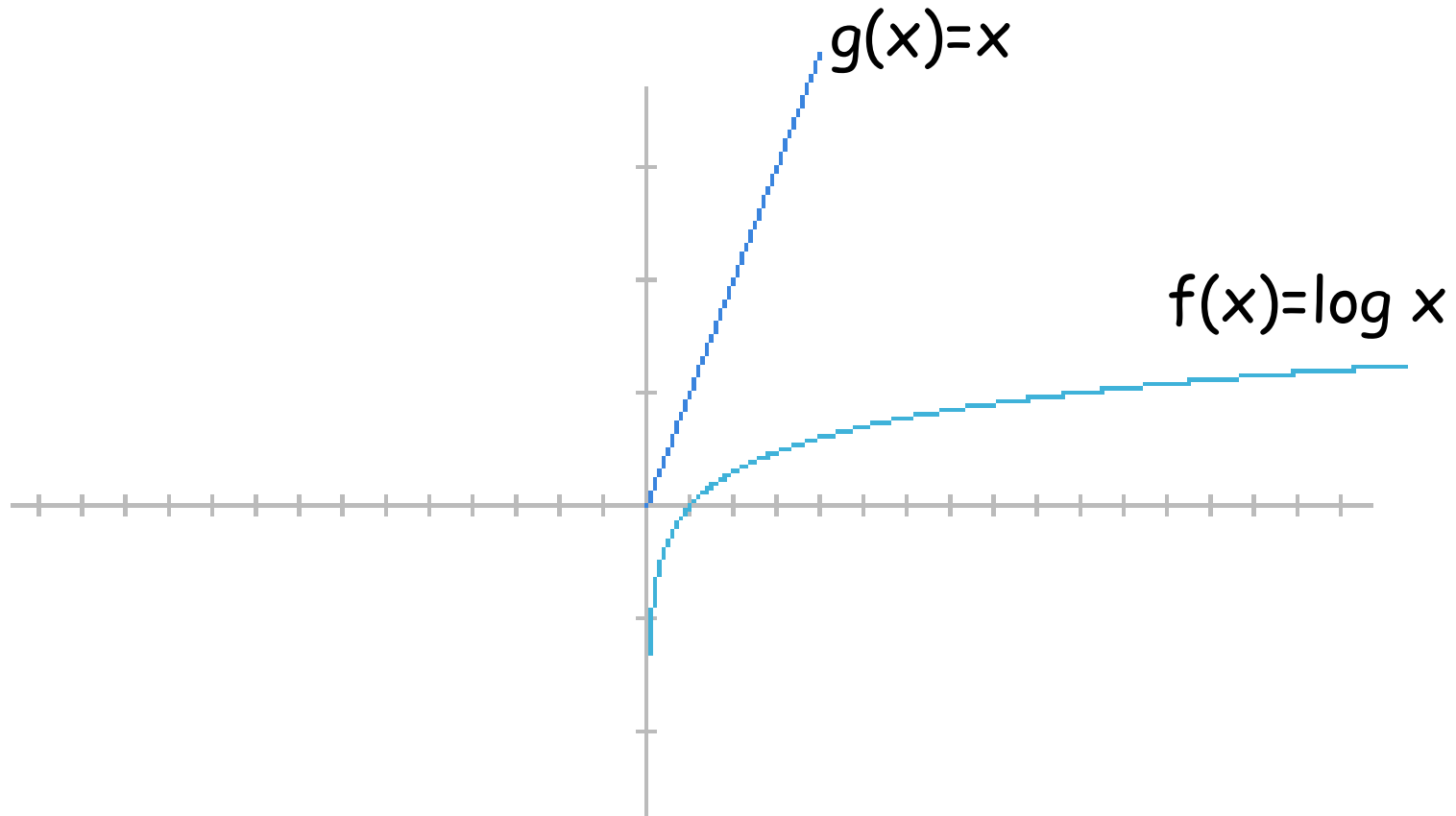
$$g(x)=x^2$$

$$f(x)=2x+24$$

De $k=6$ en
adelante, $f(x) \leq g(x)$

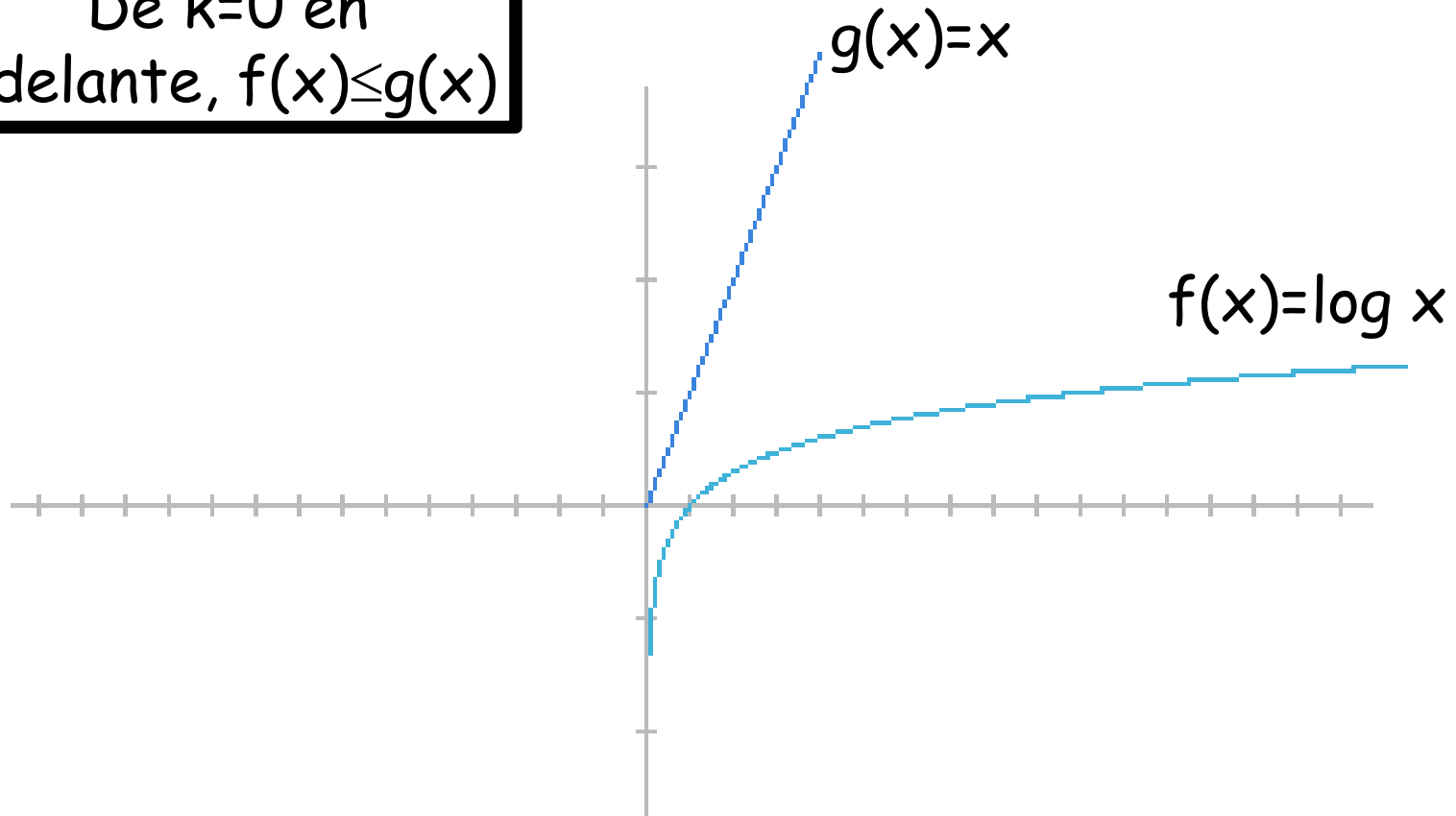
Crecimiento de funciones

Analice el crecimiento de las siguientes funciones



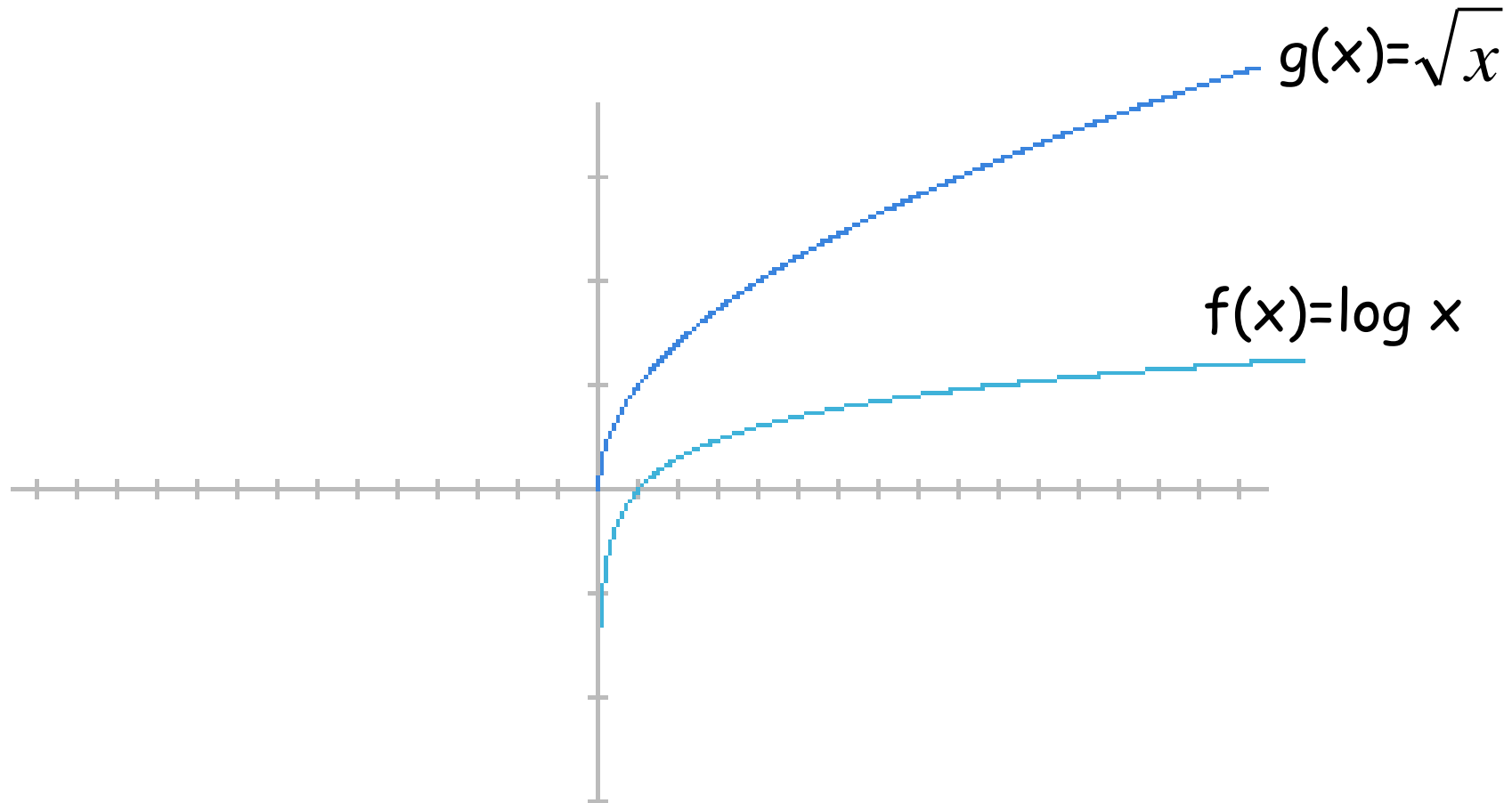
Crecimiento de funciones

De $k=0$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$



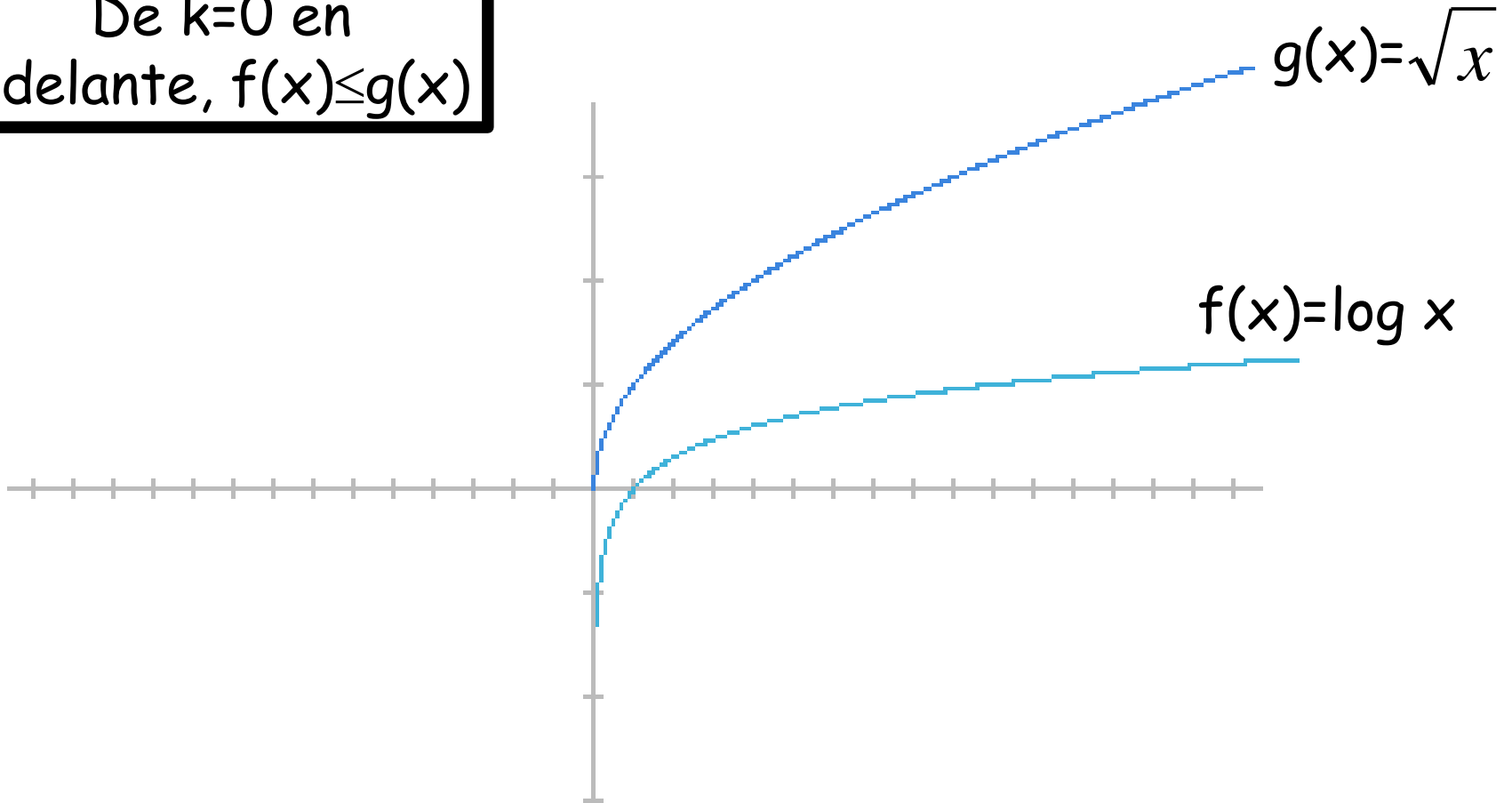
Crecimiento de funciones

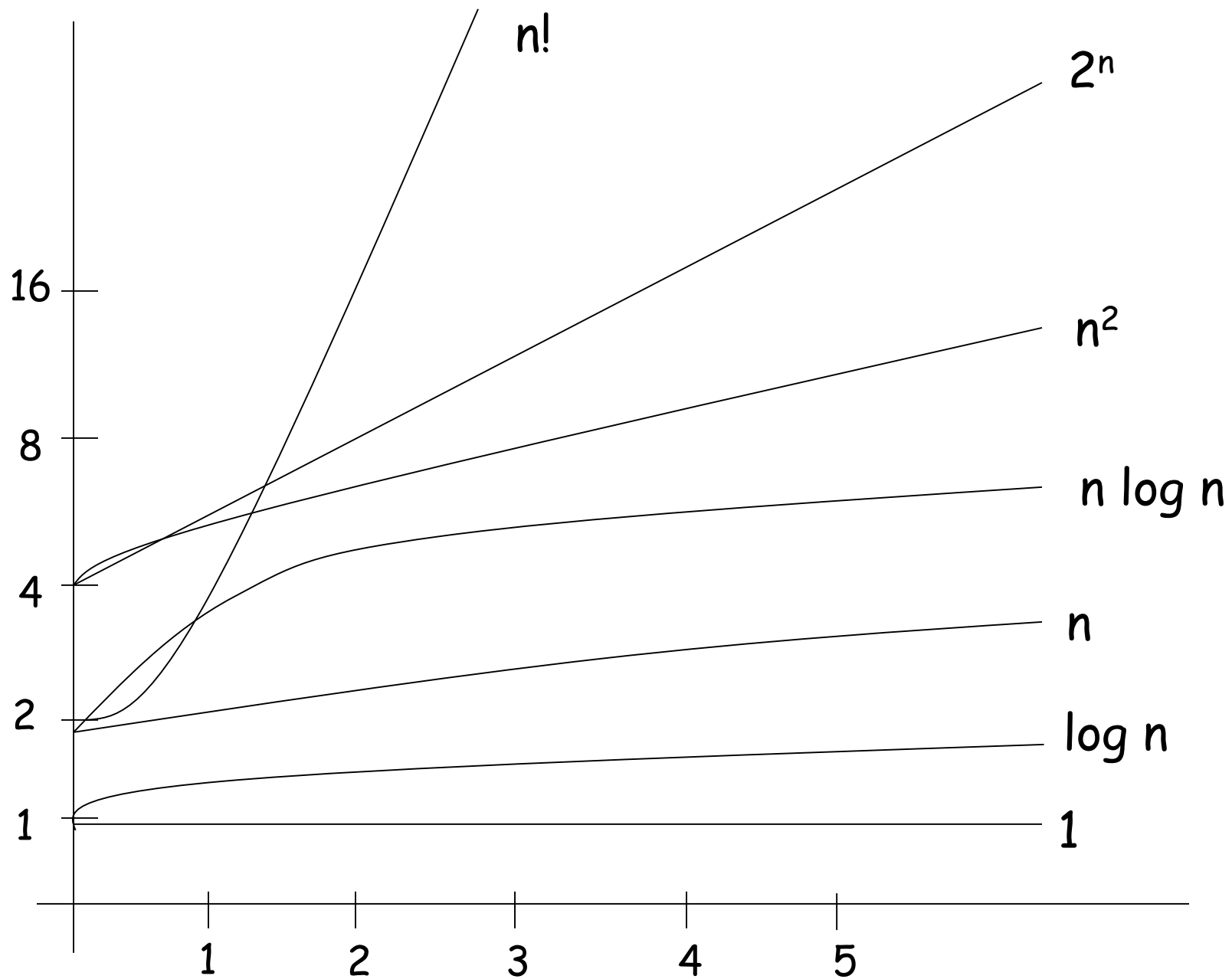
Analice el crecimiento de las siguientes funciones



Crecimiento de funciones

De $k=0$ en adelante, $f(x) \leq g(x)$





Crecimiento de funciones

Notación O

Sean f y g dos funciones, se dice que $f(x)=O(g(X))$ si se cumple que

$$f(x) \leq g(x)$$

para $x > k$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2 = O(x^3)$

Crecimiento de funciones

Muestre que $7x^2 = O(x^3)$

$$7x^2 < x^3, \text{ para } x > 7$$

Crecimiento de funciones

Muestre que $2x-1=O(x^2)$

Crecimiento de funciones

Muestre que $2x-1=O(x^2)$

$$2x-1 < x^2, \text{ para } x>1$$

Crecimiento de funciones

Muestre que $3x+10=O(x^2)$

Crecimiento de funciones

Muestre que $3x+10=O(x^2)$

$$3x+10 < x^2, \text{ para } x>5$$

Crecimiento de funciones

Muestre el valor de k para el cual se cumple cada una de las siguientes relaciones:

- $6x+16=O(x^2)$

- $\sqrt{6x} = O(3x)$

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

- Suponga que tiene dos algoritmos cuyos tiempos de ejecución están acotados de la siguiente forma:
 - $T_1(n) = O(n^2)$
 - $T_2(n) = O(\log n)$
- ¿Cuál algoritmo escogería?

Crecimiento de funciones

Aplicación

La notación O permite establecer una cota superior al tiempo dado por un algoritmo

- Suponga que tiene dos algoritmos cuyos tiempos de ejecución están acotados de la siguiente forma:
 - $T_1(n) = O(n^2)$
 - $T_2(n) = O(\log n)$
- ¿Cuál algoritmo escogería? **El algoritmo 2**