Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

Contenido

Recurrencias lineales no homogéneas

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + \boxed{F(n)}$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$

Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

$\boxed{a_n = 2a_{n-1}} + 1$

Universidad del Valle

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_n^{(h)} = A(2)^n \qquad r-2=0$$

$$\boxed{a_n^{(p)} = C}$$

$$C = 2C + 1$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_p^{(p)}$$

$$C = -1$$

$$a_n = A(2)^n - 1 \qquad a_1 = 1$$

$$1 = A2 - 1 \qquad 2 = 2A \qquad A = 1$$

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n \qquad a_0 = 69 \quad a_1 = 85$

$$\boxed{r^2 - 5r + 6} \qquad \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$r = 3, \quad r = 2$

$a_n^{(h)} = A(3)^n + B(2)^n$

$a_n^{(p)} = C7^n$

$C7^n = 5C7^{n-1} - 6C7^{n-2} + 7^n$

$C7^n = \frac{5C}{7}7^n - \frac{6C}{7^2}7^n + 7^n$

$C = \frac{5C}{7} - \frac{6C}{7^2} + 1$

$-1 = \left(\frac{5 \times 7}{7^2} - \frac{6}{7^2} - \frac{7^2}{7^2}\right)C \qquad -1 = \frac{-20}{7^2}C$

$$\boxed{C = \frac{7^2}{20}}$$

$a_n = A(3)^n + B(2)^n + \frac{7^{n+2}}{20}$

$69 = A + B + \frac{7^2}{20} \qquad 85 = 3A + 2B + \frac{7^3}{20}$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**
La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

Universidad del Valle

Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
n $+1$	$A_1n + A_0$
n^2	$A_2n^2 + A_1n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + \ldots + A_1n + A_0$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$\sin(\alpha n)$	$A\sin(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A\sin(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$
$n^tr^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n(A_tn^t + A_{t-1}n^{t-1} + \ldots + A_1n + A_0)$
$r^n\sin(\alpha n)$	$Ar^n\sin(\alpha n) + Br^n\cos(\alpha n)$
$r^n\cos(\alpha n)$	$Ar^n\sin(\alpha n) + Br^n\cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

Universidad del Valle

$$T(n) = T(n-1) + 3^n$$

$$T^p(n) = 3^n$$

$$T(n) = T(n-1) + n + 2$$

$$An + B$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n^3 + 4$$

$$An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

$$T(n) = T(n-1) + 4T(n-2) + n^2 + 3^n + 2^n + 2$$

$$An^2 + Bn + C + D3^n + E2^n$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 2^n + n2^n$$

$$T^h(n) = D(2^n) + E \cdot n(2^n) \qquad A2^n + 2^n(Bn + C)$$

$$\downarrow$$

$$An^2 2^n + n^3 2^n (Bn + C)$$

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

$r - 2 = 0$ $\quad$ $r = 2$

$a_n^{(h)} = A(2)^n$

$Bn + C = 2(B(n-1) + C) + n + 5$

$a_n^{(p)} = Bn + C$

$Bn + C = 2Bn - 2B + 2C + n + 5$

$\rightarrow B = 2B + 1 \quad B = -1$

$C = -2B + 2C + 5$

$-C = 7 \quad C = -7$

$a_n^{(1)} = A2^n - n - 7$

$4 = A - 7 \quad A = 11$

$$\boxed{a_n = 11 \times 2^n - n - 7}$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes
   $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

Universidad del Valle

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma
$$\underline{n^m}(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) S^n$$

$$T(n) = \dots + 2^n + n^4 2^n + 3^n$$

$r = 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3$

$$T^{(h)}(n) = A2^n + nB2^n + Cn^2 2^n + Dn^3 2^n + En^4 2^n + F3^n + Gn3^n$$

$$T^{(p)}(n) = n^5 2^n + n^6 2^n (Hn^4 + In^3 + Jn^2 + Kn + L) + Mn^2 3^n$$

$r = 2, 2, 2, 3, 3, 4, 1, 1, 1$ $\qquad F(n) = n + 1$

$$T^{(n)} = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + D3^n + En3^n + F4^n + G1^n + Hn1^n + Kn^2 1^n$$

$$T^{(p)} = \cancel{Ln + M} \qquad T^{(p)} = n^3(Ln + M)$$

$Ln^4 + Mn^3$

X

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$
\begin{aligned}
nC2^n + An + B = {} & 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\
& -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n
\end{aligned}
$$

Encontrar la solución general de la recurrencia

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$

$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

Universidad del Valle

Contenido

Estrategias de solución de recurrencias

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Estrategias de solución de recurrencias

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución
- Por iteración
- Funciones generatrices

Cambio de variable

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

$2^k/2 = 2^{k-1}$

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 2t_{k-1} + 2$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $\boxed{T(n) = \alpha n - 2}$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$n = 3^k$

$$T(3^k) = 3T(3^{k-1}) + 3^k$$

$$T_k = \underbrace{3T_{k-1}} + 3^k$$

$= r - 3 = 0$

$T_k^{(h)} = A3^k$

$T_k^{(p)} = Bk3^k$

$$Bk3^k = \cancel{3}B(k-1)\frac{3^k}{\cancel{3}} + 3^k$$

$$\hookrightarrow Bk3^k = Bk3^k - B3^k + 3^k$$

$k3^k \longrightarrow B = B$

$3^k \longrightarrow 0 = -B + 1 \longrightarrow B = 1$

$T_k = A3^k + k3^k$ $\qquad n = 3^k$ $\qquad k = \log_3(n)$

$$T(n) = A \times n + \log_3(n) \times n \longrightarrow O(n\log(n))$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$n = 2^k$

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k$$

$$\underline{T_k = 2T_{k-1}} + 2^k$$

$r - 2 = 0$

$$2^{k-1} = \frac{2^k}{2}$$

$T_k^{(h)} = A 2^k$

$$B k 2^k = \frac{2 B (k-1) 2^k}{2} + 2^k$$

$T_k^{(p)} = B k 2^k$

$k 2^k \longrightarrow \quad B = B$

$2^k = \quad 0 = -B + 1 \qquad B = \underline{1}$

$T_k = A 2^k + k 2^k \qquad n = 2^k \quad k = \log_2(n)$

$$T(n) = An + \log_2(n) \times n \longrightarrow O(n \log(n))$$

Cambio de variable

$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Recuerda: $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

$t_k = \alpha 5^k - 3/4$ $\quad n = 2^k$ $\quad k = \log_2(n)$

$t_k = \alpha 5^{\log_2(n)} - 3/4 \longrightarrow t_k = \alpha n^{\log_2 5} - 3/4$

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $\boxed{t_k = \alpha 5^k - 3/4}$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$ $\sim O(n^3)$

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1], A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ **es** $O(n \log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned} \log n &= \log 4^k \\ &= k \log_4 4 \\ \log n &= k \end{aligned}$$

n log n

$4^k \log 4^k$

$4^k \times k \log(4)$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak + B)4^k$

$$(Ak + B)4^k = 3[(A(k-1) + B)4^{k-1}] + 4^k k$$
$$(Ak + B)4^k = 4^k(3/4[(A(k-1) + B)] + k)$$
$$Ak + B = 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k$$

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n\log n)$

$n^{\log 3}$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 17 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que: $T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + cn^d}$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

Método Maestro

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$

  $a > b^d$, $9 > 3^1$

  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$

  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$

  $a < b^d$ $\quad 9 < 3^1$ ×

  $9 = 3$ ×

  $9 > 3$ ✓

  $O(n^{\log_3 9})$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$

  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$

  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$

  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$

  $a < b^d$ $\quad 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^0$

  $1 = 1$ ✓

- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$

  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$

  $O(n^{\log_2 5})$

  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

  $a < b^d$ $\quad 5 < 2^0$ ×

  $5 = 1$

  $5 > 1$ ✓

Universidad del Valle

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$a \geq 1$

$$T(n) = aT(n/b) + c \; n^d \qquad d = 0$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{array} \right\}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

Método Maestro

$a=3$ $b=\frac{3}{2}$ $c=22$ $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$\boxed{T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2}$$

$T(1)=6$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

Universidad del Valle

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.