Redes Neuronales

Perceptrón y Adeline

Universidad San Buenaventura, Cali

Junio de 2021

Contenido

1 Perceptrón (MPL)

2 Limitaciones del perceptrón

3 Adeline

4 Ejercicios

Contenido

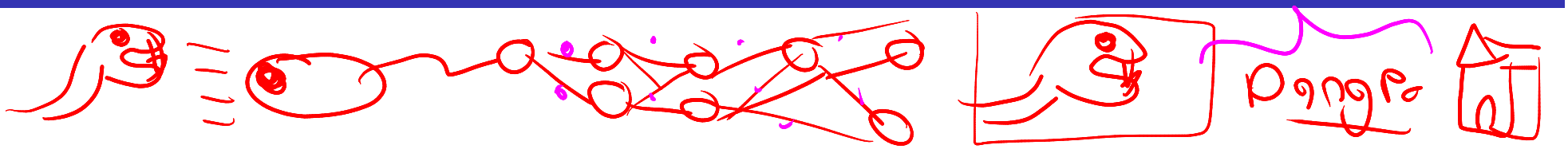
1 Perceptrón

2 Limitaciones del perceptrón

3 Adeline

4 Ejercicios

Perceptrón



Definición

- Fue introducido por Rossenblat a finales de los año 50
- Se inspira en los procesos de aprendizaje de los animales (ejemplo la visión), en los cuales la información va atravesando diferentes capas de neuronas
- Es un modelo unidireccional, compuesto por dos capas de neuronas, una de entrada y otra de salida
- La operación de este tipo puede darse con n neuronas de entrada y m de salida

Perceptrón

Definición

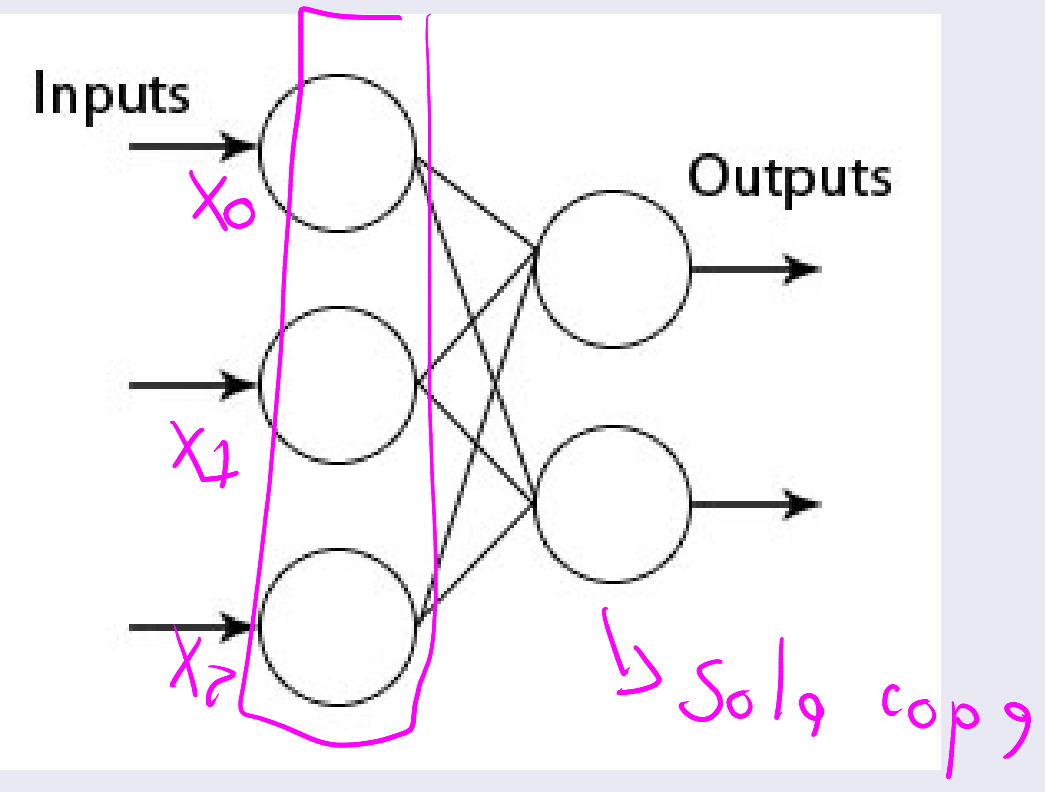
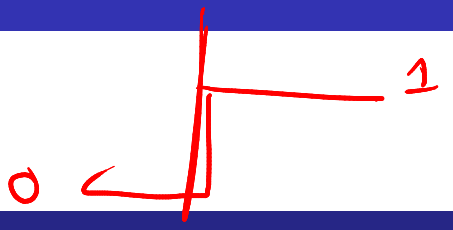


Figura 1: Modelo de Perceptrón, tomado de
`http://neuroph.sourceforge.net/tutorials/Perceptron.html`

Perceptrón



Definición

- Las neuronas de entrada no realizan ningún computo
- Se consideran señales discretas 0 o 1
- La operación para n neuronas de entrada y m de salida puede considerarse así:

$$y_i = H\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j - \Theta_i\right), \forall i, 1 \leq i \leq m$$

Donde H(x) es la función escalón.

Perceptrón

Definición

- El Perceptrón permite clasificar dos conjuntos linealmente separables en un plano o hiperplano
- La respuesta de la neurona es 1 si pertenece a la clase o 0 si no pertenece

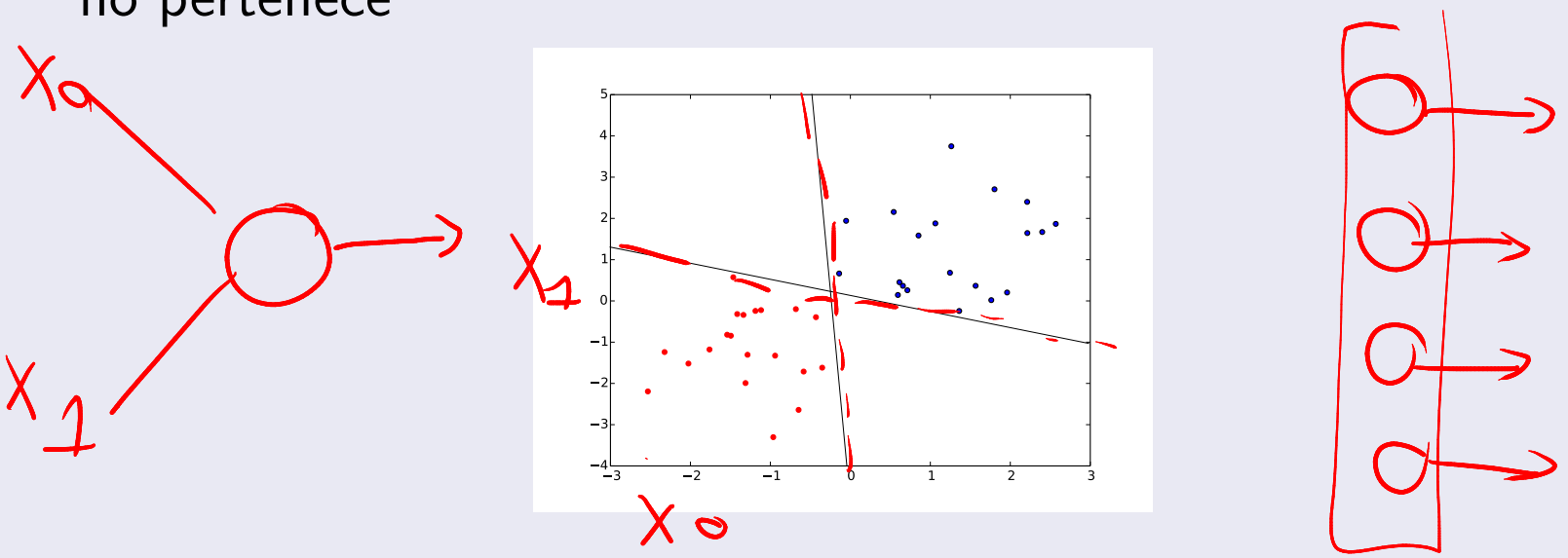


Figura 2: Conjunto linealmente separable, tomado de `https://en.wikipedia.org/`

Perceptrón

Ejemplo

- Sea una neurona tipo perceptron con entrada x_1 y x_2
- Entonces la operación se define como:

$$y = H(w_1 x_1 + w_2 x_2 - \Theta)$$

Perceptrón

Ejemplo

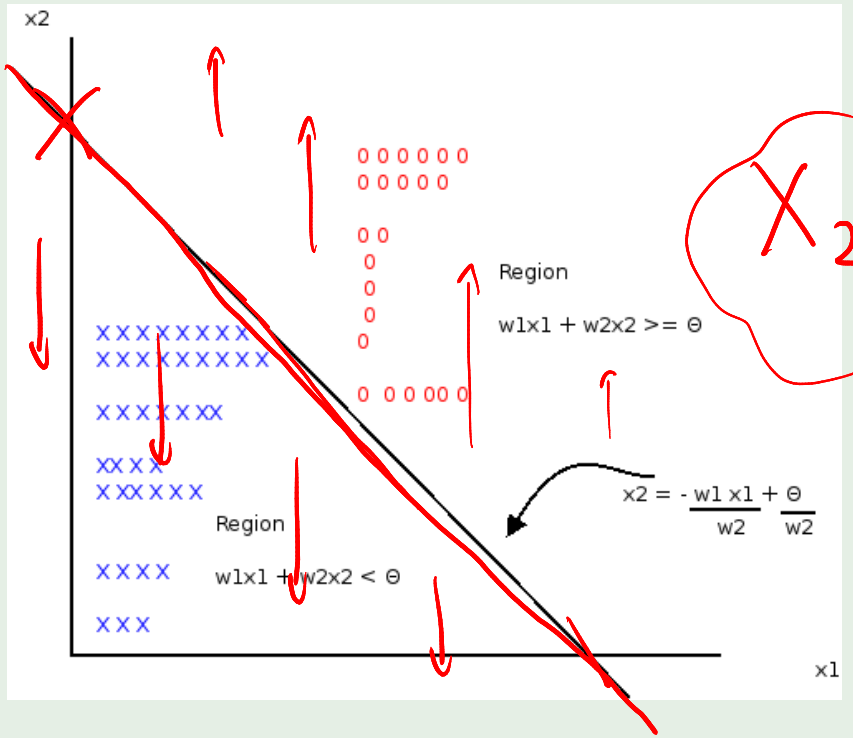
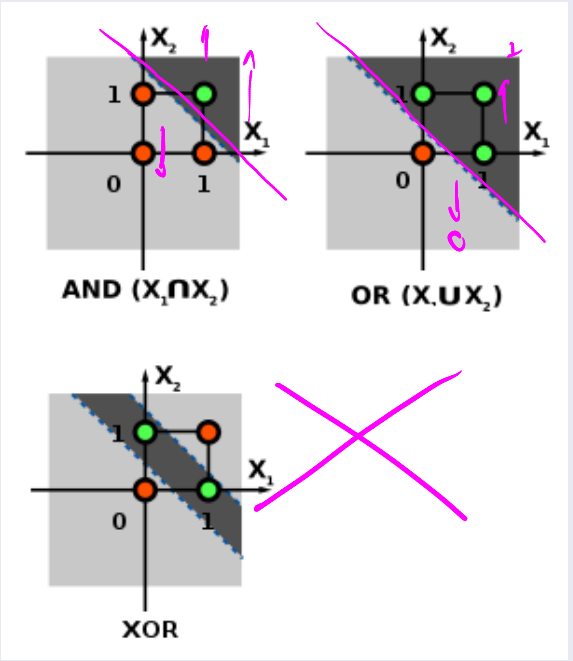


Figura 3: Regiones de decisión del plano, tomado de [Brio and Molina, 2005]

Perceptrón

Definición

Como se puede ver se divide el plano en dos regiones. Como se puede ver se requiere que el problema a solucionar tenga **solución lineal**



X_1	X_2	$X_1 \oplus X_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Figura 4: Casos de compuertas `https://en.wikipedia.org/`

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

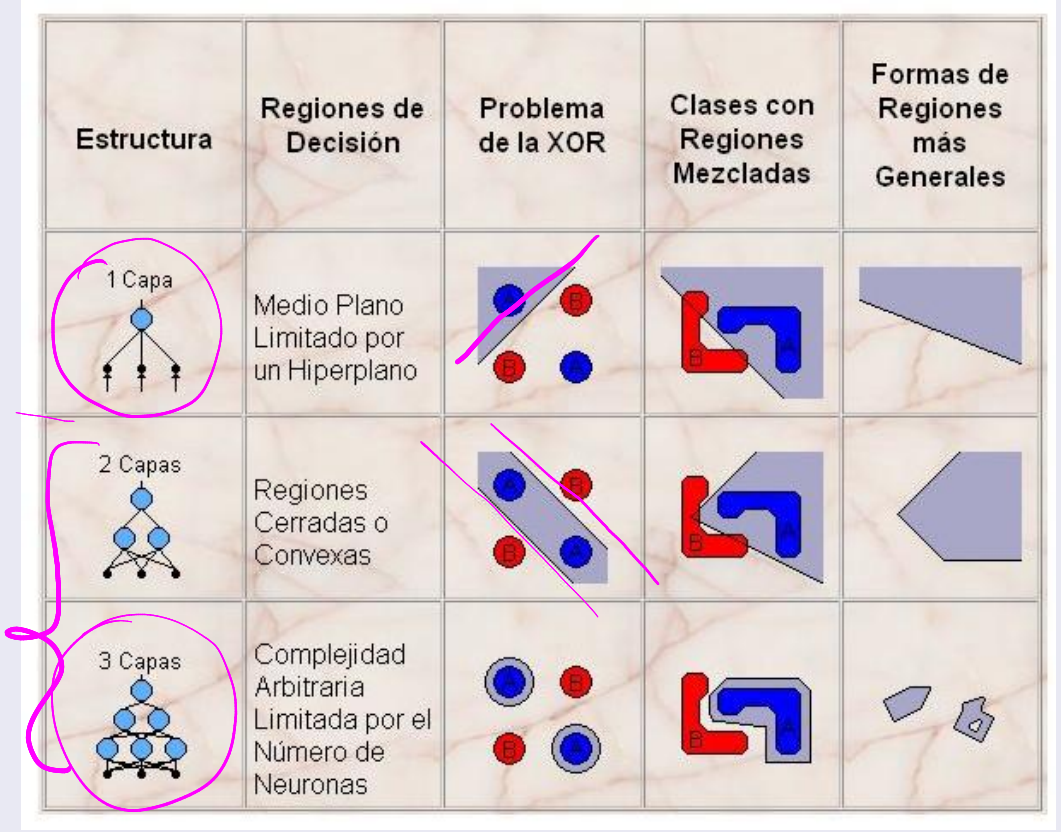


Figura 5: Regiones de decisión perceptron [Lippmann, 1988]

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

Vamos a trabajar el perceptrón de una capa

- Se basa en la corrección de errores
- Vamos a introducir una tasa de aprendizaje η: Indica el ritmo de aprendizaje
- Dados unos patrones x^u, salidas obtenidas y^u y salidas deseadas t^u
- Los pesos iniciales son aleatorios entre -1 y 1.
- Se examina cada patrón y aplicamos la relación de cambio:

$$\Delta w_{ij}^u(t) = \eta \cdot (t_i^u - y_i^u) x_j^u$$

$$w_{ij} = w_{ij} + \Delta w_{ij}$$

A esto se le conoce como **regla del perceptrón**

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

Vamos a trabajar el perceptrón de una capa

- Se basa en la corrección de errores
- Vamos a introducir una tasa de aprendizaje η: Indica el ritmo de aprendizaje
- Dados unos patrones x^u, salidas obtenidas y^u y salidas deseadas t^u

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

Vamos a trabajar el perceptrón de una capa

- Los pesos iniciales son aleatorios entre -1 y 1. Se utiliza la función de activación f como escalón o sigmoide. Las entradas están en el conjunto $\{0, 1\}$.
- Se examina cada patrón y aplicamos la relación de cambio:

$$\Delta w_{ij}^u = \eta.(t_i^u - y_i^u)x_j^u$$

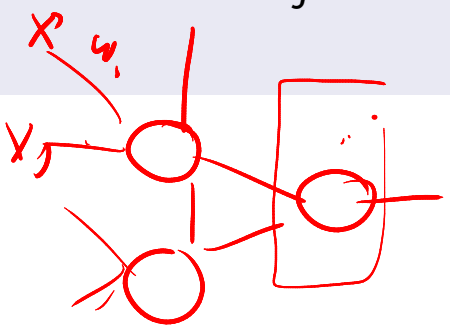
A esto se le conoce como **regla del perceptrón**

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

Para comprender el Perceptrón se mostrará en una forma gráfica

$$y_i^u = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j^u - \Theta_i\right) = f(||w_i||.||x^u||cos(\phi))$$



Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

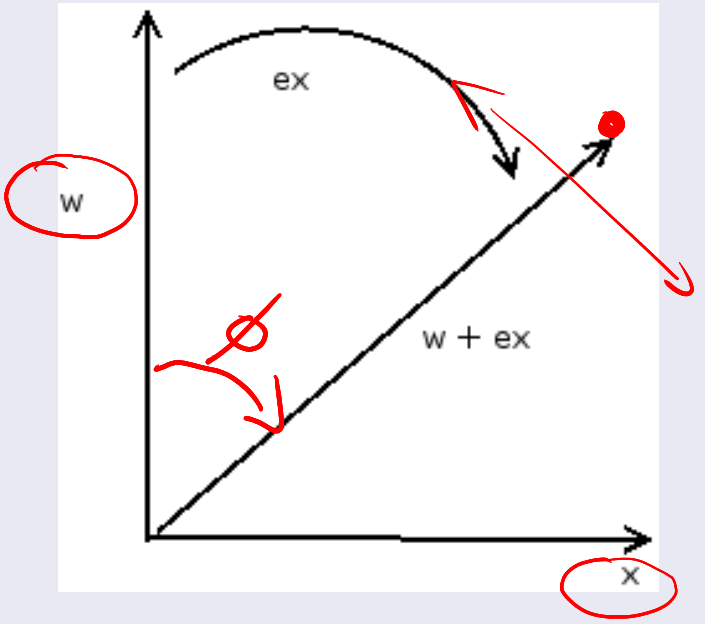


Figura 6: Aplicación regla perceptron [Brio and Molina, 2005]

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

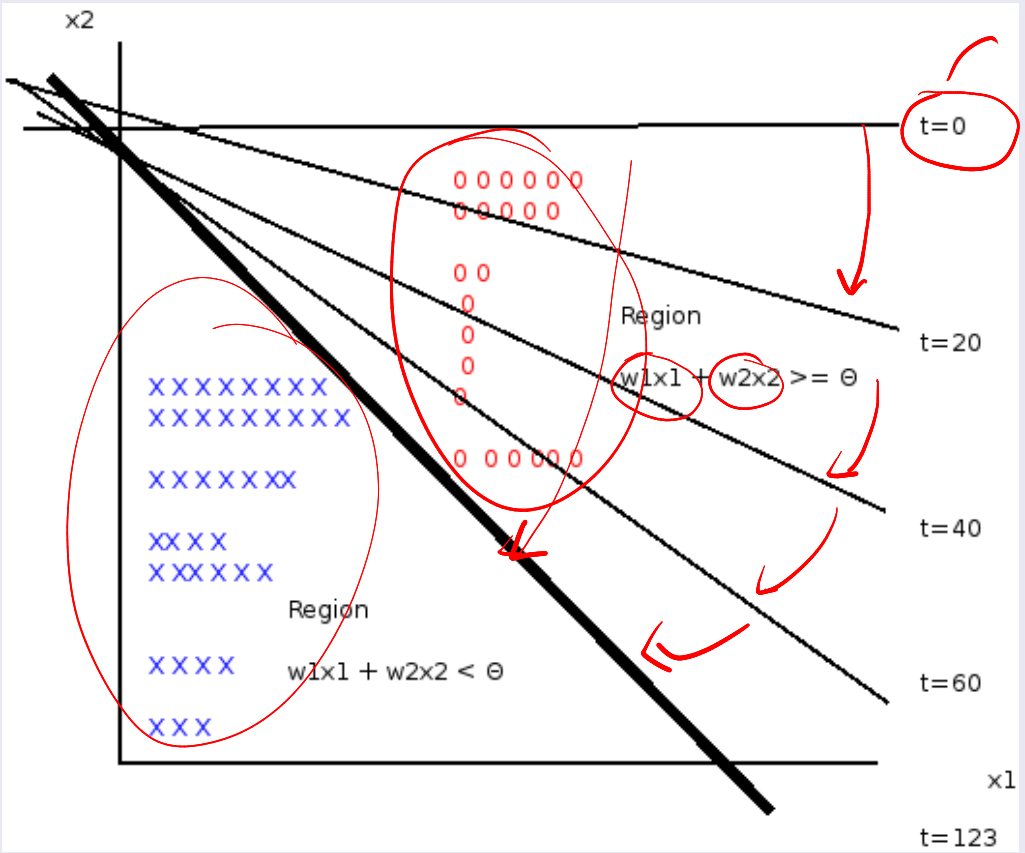


Figura 7: Aplicación iterativa de las reglas de decision [Brio and Molina, 2005]

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

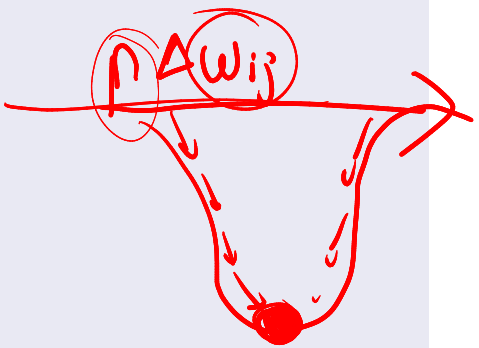
Es un algoritmo para clasificación binaria (0 o 1).

1. Inicializar los pesos aleatoriamente entre [-1 y 1]
2. Para el estado t. Calcular:

$$y^u(k) = f\left(\sum_{j=1}^{n} (w_j x_j)\right)$$

3. Corregir pasos sinápticos (Si $t_j^u \neq y_j^u$)

$$w_j = w_j + \eta[t_j^u - y_j^u]x^u$$



4. Para si no se han modificado los pesos en los últimos p patrones o se ha llegado a un número de iteraciones especificado.

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

Miremos la compuerta AND

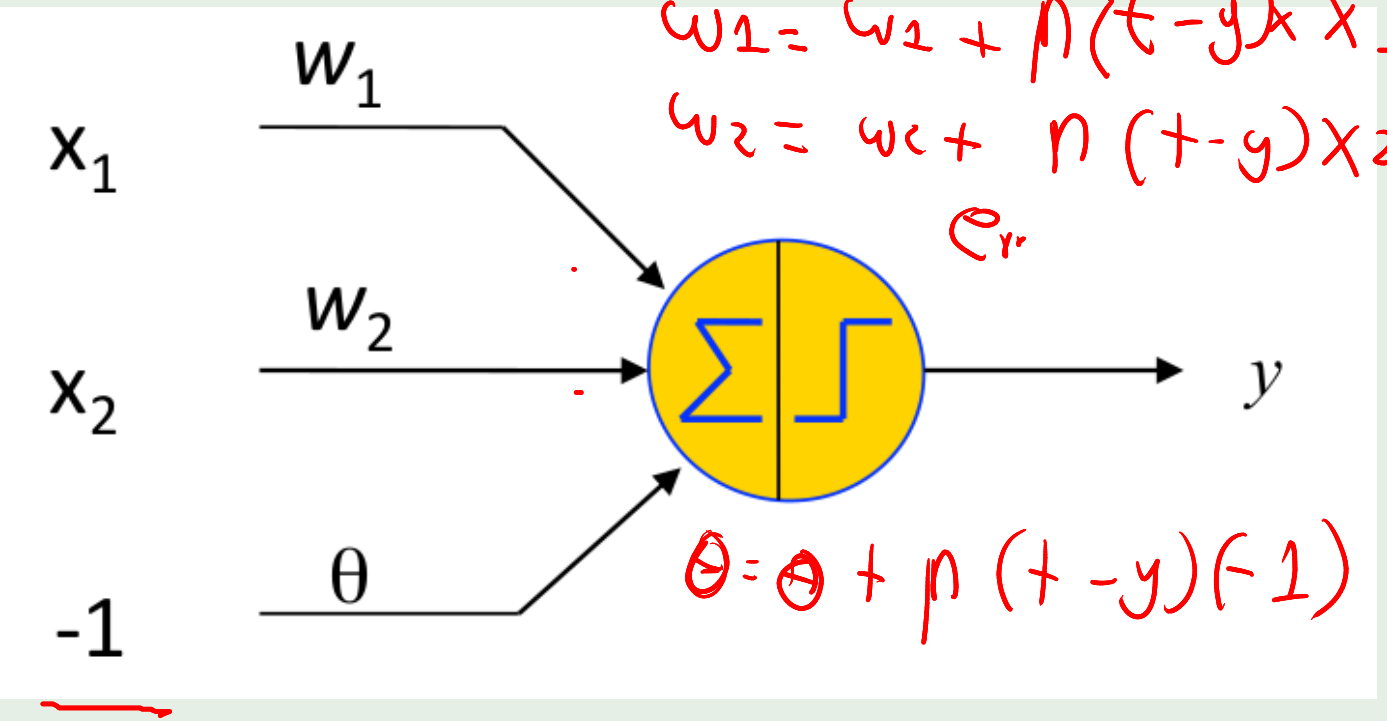


Figura 8: Perceptrón compuesta AND

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

Miremos la compuerta AND

Entrada	**Salida** $t^u(k)$
(0,0)	0
(0,1)	0
(1,0)	0
(1,1)	1

Cuadro 1: Función AND con lógica función signo

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

1. Inicialización de pesos. Elegimos $\eta = 0{,}5$

$$w_1 = 0{,}4, w_2 = -0{,}2, \Theta = 0{,}6$$

2. Con t = 1, patrón (0,0), $y^u = f(-0{,}6) = 0$. Igual a salida esperada.
3. Para t = 1, patrón (0,1), $y^u = f(-0{,}8) = 0$. Igual a salida esperada.

Perceptrón

$w_1 = 0.4$ $w_2 = -0.2$ $\Theta = 0,6$

Algoritmo de aprendizaje

4. Para t = 1, patrón (1,0), $y^u = f(-0,2) = 0$ Igual a salida esperada.
5. Para t = 1, patrón (1,1), $y^u = f(-0,4) = 0$ Debemos corregir los pesos, ya que la salida debe ser 1. Recordando $w_j = w_j + \eta[t_j^u - y_j^u]x^u$

$$w_1 = 0,4 + 0,5[1 - 0](1) = 0,9$$
$$w_2 = -0,2 + 0,5[1 - 0](1) = 0,3$$
$$\Theta = 0,6 + 0,5[1 - 0](-1) = 0,1$$

Perceptrón

Algoritmo de aprendizaje

$$w_1 = 0{,}9,\ w_2 = 0{,}3,\ \Theta = 0{,}1$$

6. Para t $= 2$; patrón $(1,1)$, $f(1{,}1) = 1$. Correcto
7. Para t $= 2$; patrón $(1,0)$, $f(0{,}8) = 1$. Correcto
8. Para t $= 2$; patrón $(0,1)$, $f(0{,}2) = 1$. Correcto
9. Para t $= 2$; patrón $(0,0)$, $f(-0{,}1) = 0$ Correcto

Contenido

1 Perceptrón

2 Limitaciones del perceptrón

3 Adeline

4 Ejercicios

Limitaciones del perceptrón

Limitaciones

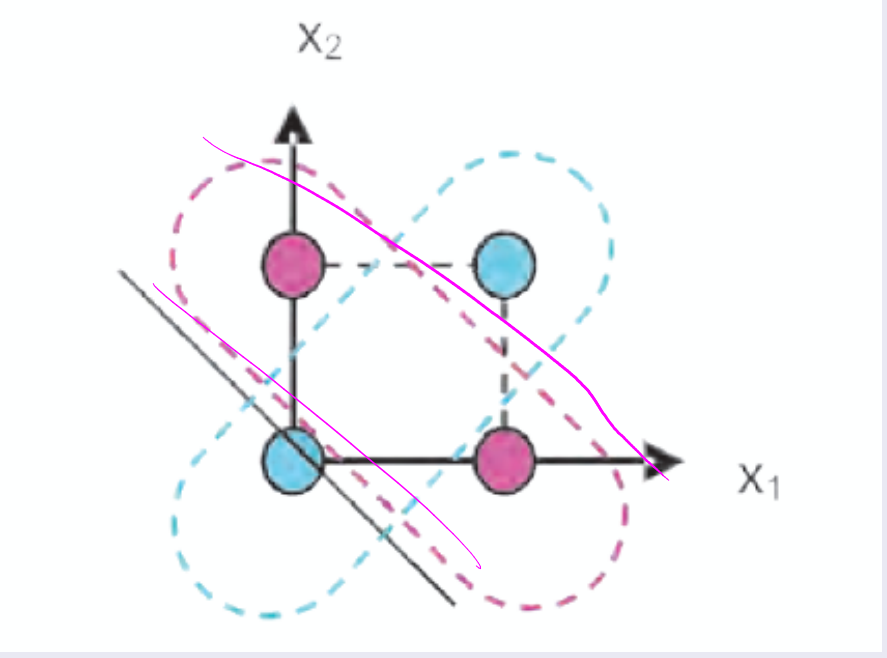
1. El perceptrón monocapa no puede trabajar con problemas que no sean linealmente separables
2. Para esto utilizamos el perceptrón multicapa, la cual cuenta con una capa de entrada, capas ocultas y una capa de salida

Limitaciones del perceptrón

Limitaciones

Para el caso de la función XOR, tenemos el siguiente problema:

Figura 9: Problema del perceptrón con compuerta XOR, tomado de [Eduardo and Jesus Alfonso, 2009]



Contenido

1 Perceptrón

2 Limitaciones del perceptrón

3 Adeline

4 Ejercicios

Adeline

Definición

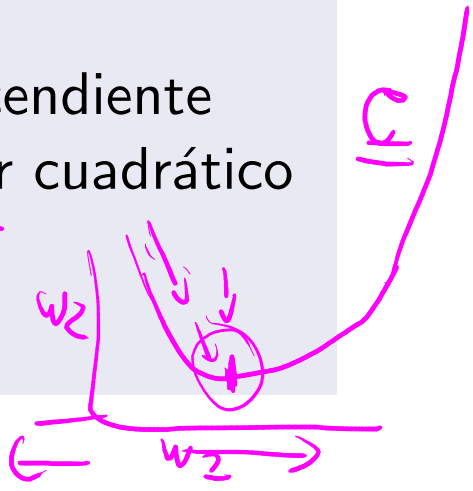
- Fue introducido por Widrow [Widrow and Hoff, 1988], [Widrow and Winter, 1988] entre 1959 y 1988.
- Es de respuesta lineal a diferencia del perceptrón
- Puede trabajar con entradas continuas
- Se incorpora un elemento adicional llamado **bias** u **umbral** Θ. La cual se suma a la entrada (usualmente es -1)
- Utiliza mínimos cuadrados para el cálculo del error.
- Se tiene una tasa de aprendizaje η

Adeline

Regla del gradiente descendiente

- Si las entradas tiene vectores de entrada ortogonales, se podrá llegar a asociaciones perfectas
- La salida de la neurona es $y = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j + \Theta$. Ya que la función de activación es lineal
- El cambio se basa en el cálculo del gradiente descendiente para los patrones de entrada. En este caso el error cuadrático

$$Err = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} (t^u(j) - y^u(j))^2$$



Adeline

Regla del gradiente descendiente

- Lo que se busca es modificar los valores de forma iterativa mediante la regla del descenso del gradiente:

$$\Delta_p w_j = -\eta \frac{\partial Err^P}{\partial w_j}$$

factor de entrenamiento

Adeline

Regla del gradiente descendiente

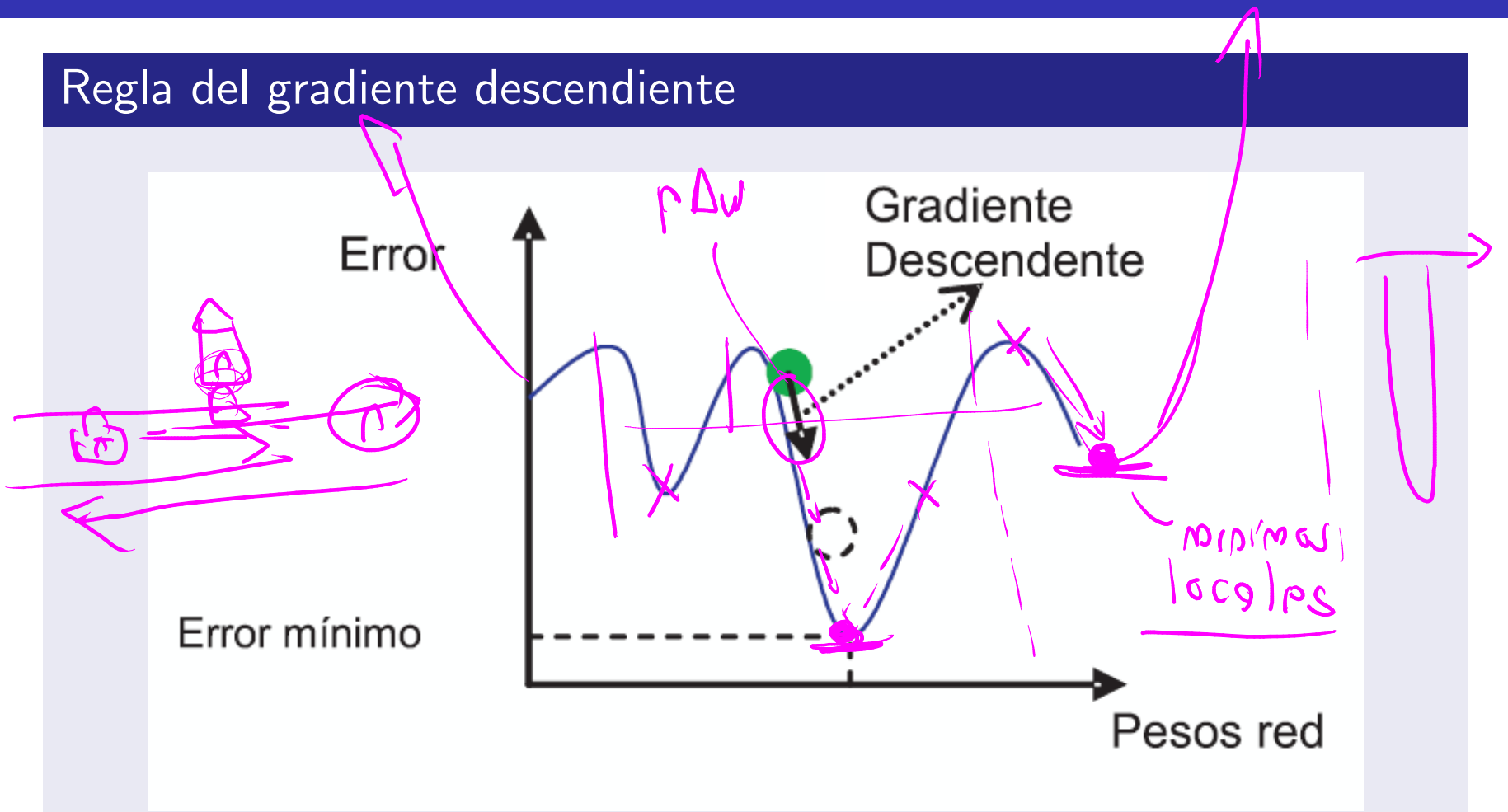
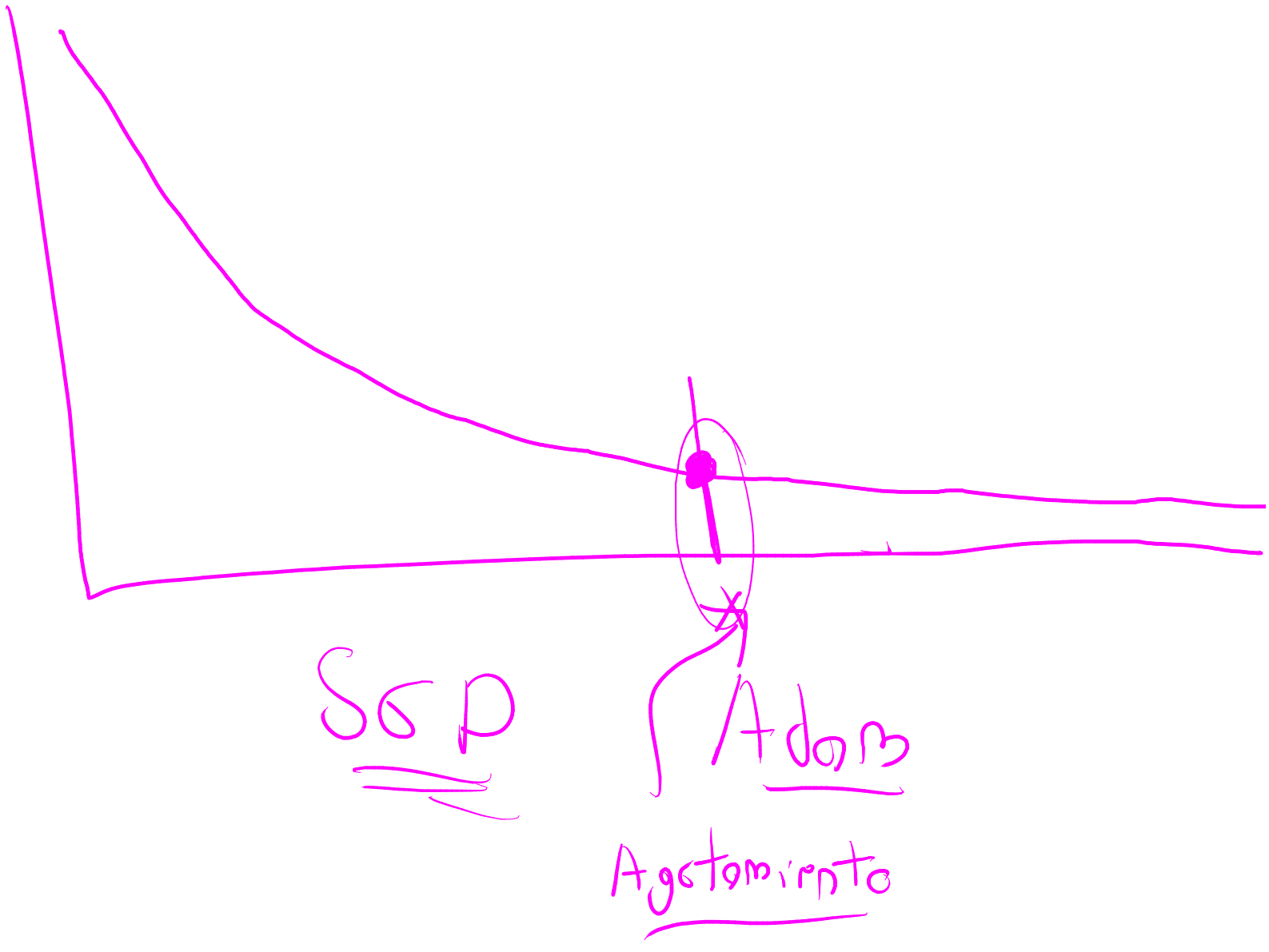
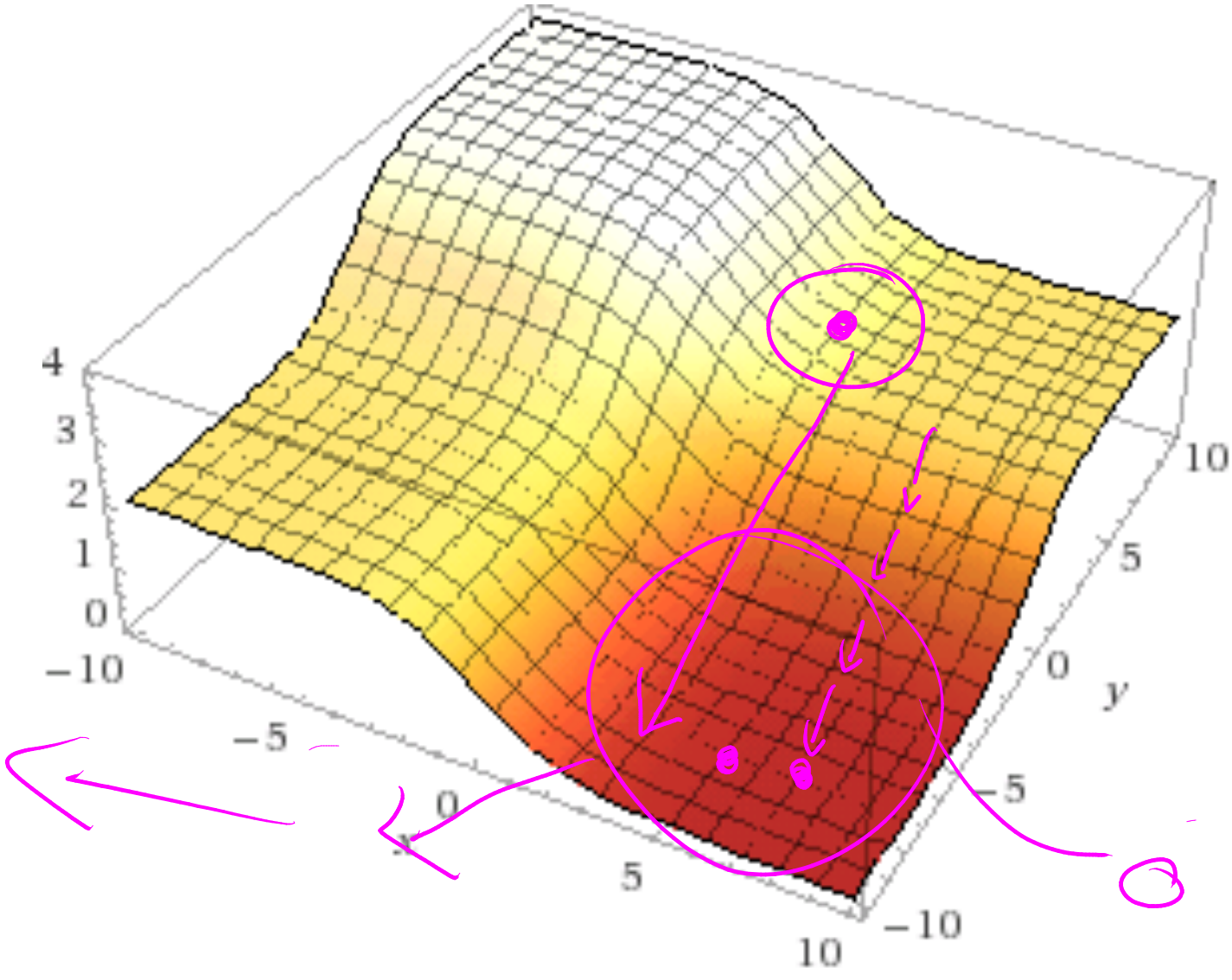


Figura 10: Regla del gradiente descendiente, tomado de [Eduardo and Jesus Alfonso, 2009]


Sep
Adam
Agotamiento

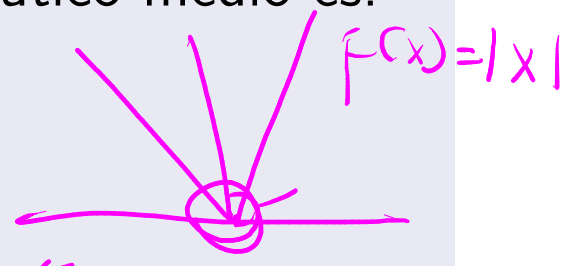

4
3
2
1
0
−10
−5
0
5
10
−10
−5
0
5
10
y

Adeline

Regla del gradiente descendiente

- Tomando en cuenta que el error global cuadrático medio es:

$$E = \frac{1}{2}(t^u - y^u)^2$$

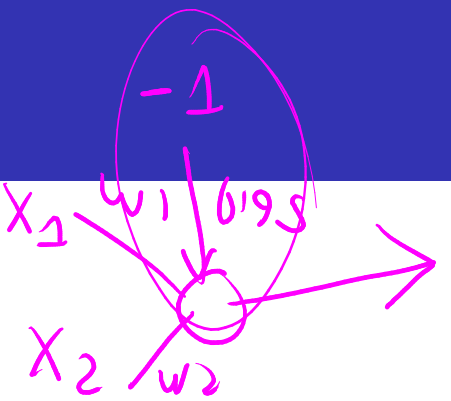


- La regla del gradiente descendiente busca el mínimo global, aplicando la regla en un patrón p cualquiera de la siguiente forma:

$$\Delta w_j = -\eta \frac{\partial E^p}{\partial w_j}$$

Esta va en sentido contrario, ya que deseamos hacer la derivada del error igual a 0

Adeline

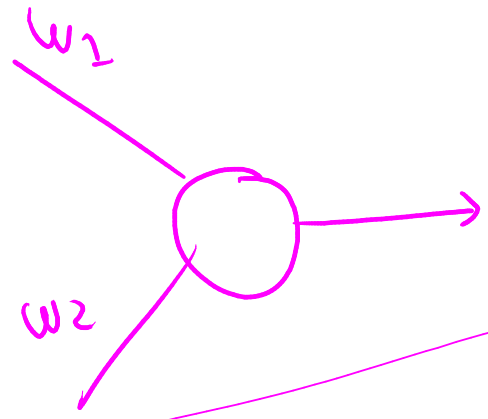


Regla del gradiente descendiente

- Al aplicar la derivada obtenemos que:

$$\Delta w_j = \alpha(t^u - y^u) * x_j$$

Como se puede ver está regla corresponde a la regla perceptrón. La diferencia es que podemos trabajar con valores en todo el dominio de los números reales.



$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \eta \times (t_0 - y_0) \times \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Adeline

Algoritmo de aprendizaje

1. Inicialice los pesos aleatorios
2. Para cada patrón, actualice los pesos a razón de:

$$w_i = w_i + \eta \times \Delta w_i$$

3. Actualizamos los pesos y Θ
4. Puede detenerse cuando todos los patrones cumplen la salida deseada o bien se han cumplido cierto número de iteraciones.

Contenido

1 Perceptrón

2 Limitaciones del perceptrón

3 Adeline

4 Ejercicios

Perceptrón y adeline

Ejercicio 1

Utilizar Perceptrón para reconocer la función binaria de 5 bits a,b,c,d,e:

1. (a AND b) OR (c AND d) OR (NOT d AND e)
2. (a AND b AND c) OR (d AND e)

Utilice 16 entradas para entrenar. Genere otras 16 para probar y grafique el error de entrenamiento y de prueba.

Perceptrón y adeline

Ejercicio 2

Utilizar Adeline para crear un codificador binario-decimal.

x_1	x_2	y
0	1	1
1	0	2
1	1	3

Cuadro 2: Codificador binario a decimal

Referencias I


Brio, B. and Molina, A. (2005).
Redes neuronales y sistemas difusos.
Textos universitarios. Alfaomega.
Pages 41–63.


Eduardo, C. and Jesus Alfonso, L. (2009).
Una aproximación práctica a las redes neuronales artificiales.
Colección Libros de Texto. Programa Editorial Universidad del Valle.


Lippmann, R. P. (1988).
An introduction to computing with neural nets.
SIGARCH Comput. Archit. News, 16(1):7–25.

Referencias II

Widrow, B. and Hoff, M. E. (1988).
Neurocomputing: Foundations of research.
chapter Adaptive Switching Circuits, pages 123–134. MIT Press, Cambridge, MA, USA.

Widrow, B. and Winter, R. (1988).
Neural nets for adaptive filtering and adaptive pattern recognition.
Computer, 21(3):25–39.

¿Preguntas?

Próximo tema:
Perceptrón multicapa