

Métodos Numéricos

Integración y Derivación

Daniel Barragán ¹

¹Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle

May 29, 2015

Agenda

1 Integración y Derivación

- Introducción

2 Integración

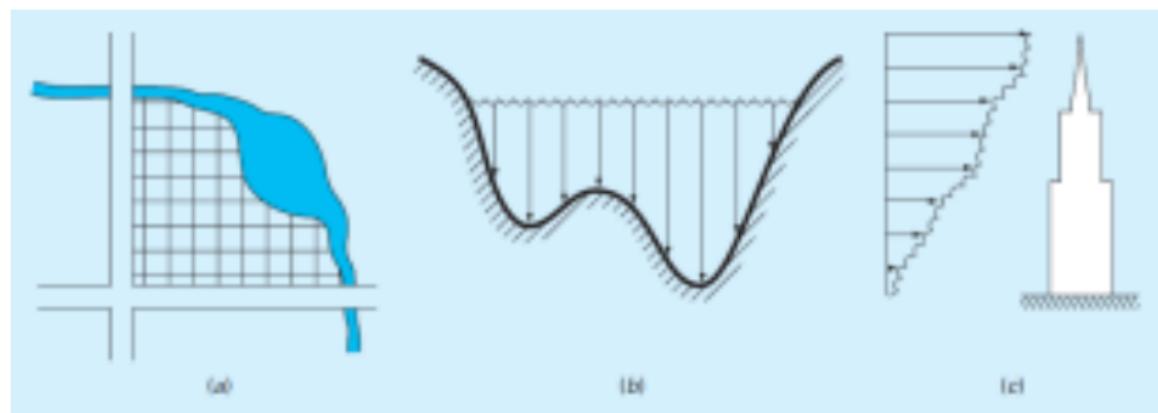
- Integracion Cerrada y Abierta.
- Extrapolación de Richardson
- Cuadratura de Gauss

3 Derivación

- Diferencias Finitas
- Diferencias Finitas de Alto Orden y Alta Exactitud
- Extrapolación de Richardson

Integración y Derivación.

Introducción.



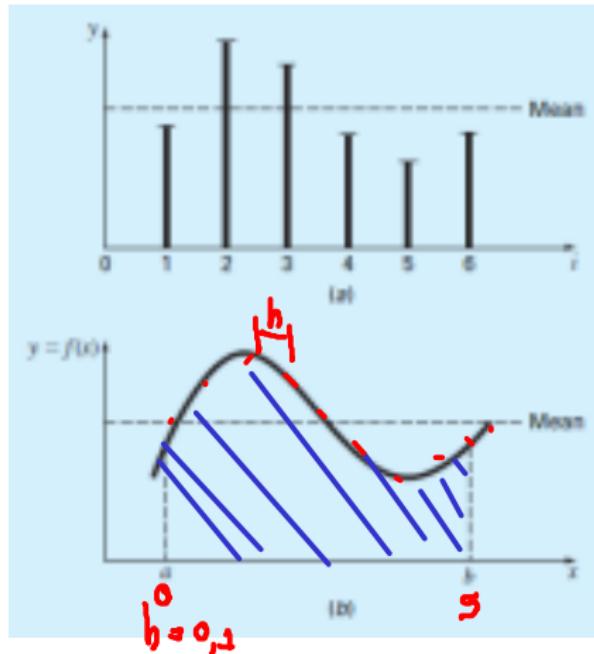
Integración y Derivación.

Introducción.

- En esta sección se trata el problema de encontrar el valor de integrales y derivadas empleando métodos numéricos (solución aproximada)
- La importancia de los métodos numéricos se hace evidente en el caso de funciones para las cuales no es posible encontrar su integral/derivada por medio de las técnicas clásicas del cálculo (solución analítica)

Integración y Derivación.

Introducción.



Integración y Derivación.

Introducción.

Promedio de una función discreta

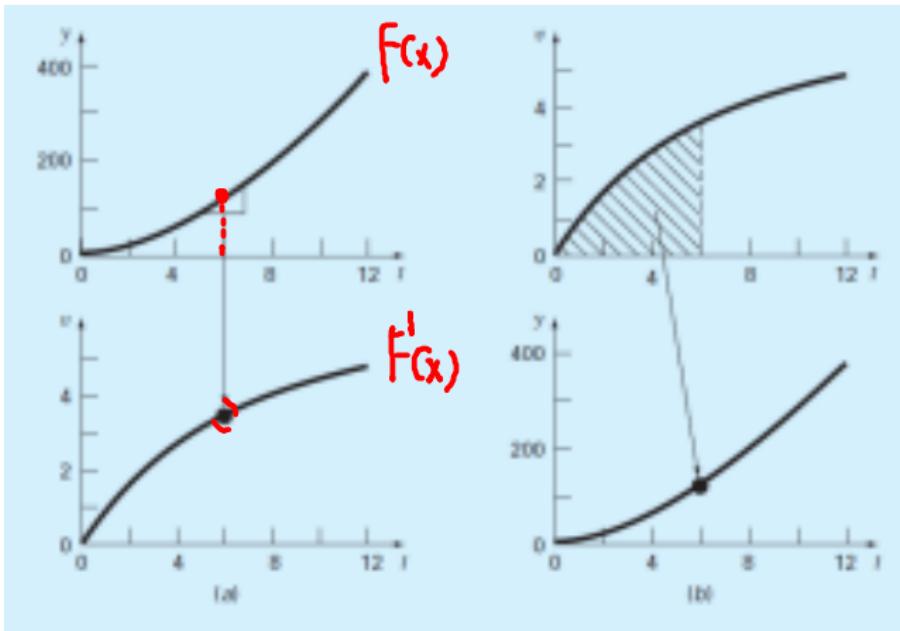

$$\text{Mean} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

Promedio de una función continua

$$\text{Mean} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

Integración y Derivación.

Introducción.



Fórmulas de Newton-Cotes.

Introducción.

- Las fórmulas de Newton-Cotes son los esquemas de integración numérica mas comunes

Fórmulas de Newton-Cotes.

Introducción.

- Este método se basa en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio que sea fácil de integrar

$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b f_n(x) dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

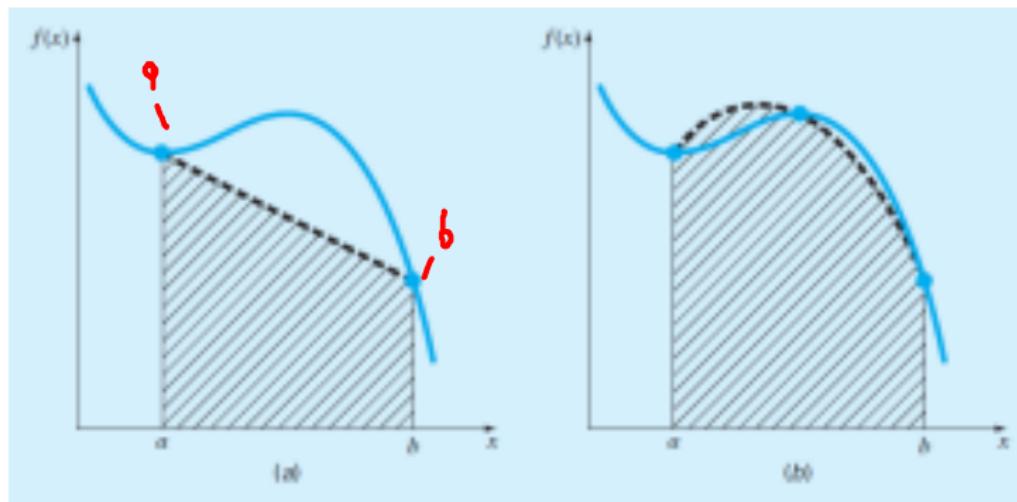
Donde:

n es el orden del polinomio

Fórmulas de Newton-Cotes.

Introducción.

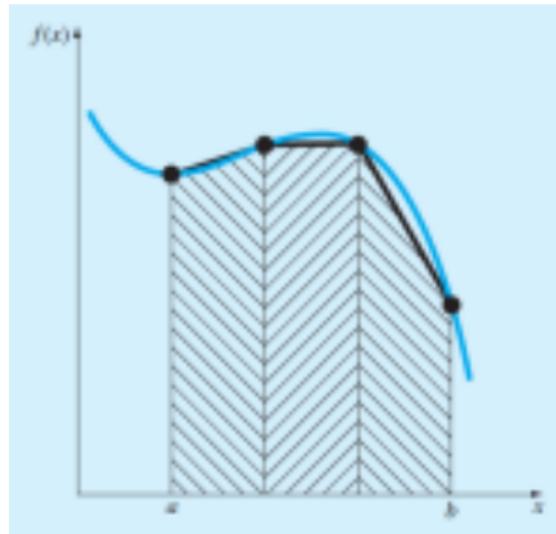
- Aproximación de integral por el área bajo la curva de una línea y una parábola



Fórmulas de Newton-Cotes.

Introducción.

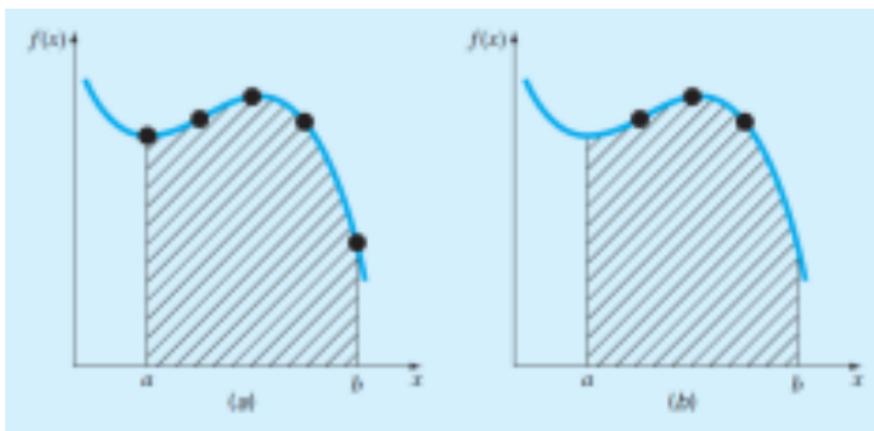
- Aproximación de integral por el área bajo la curva de tres segmentos de línea



Fórmulas de Newton-Cotes.

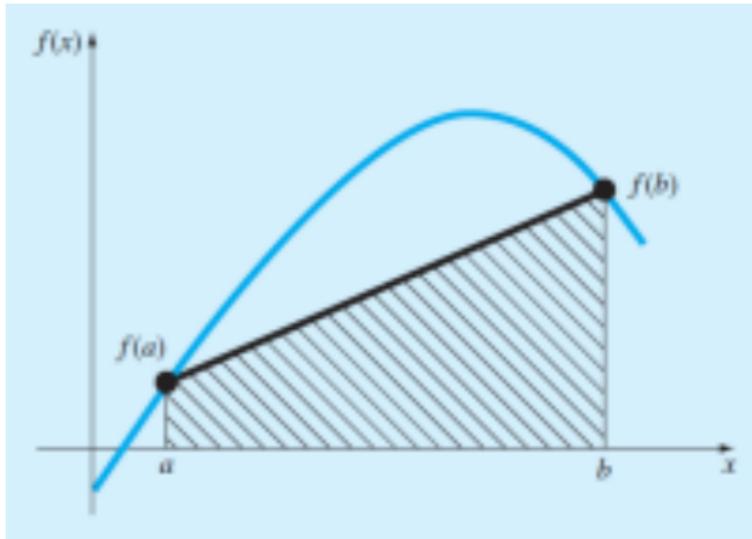
Introducción.

- Existen fórmulas de Newton-Cotes para cuando se conocen los datos en los límites de integración y cuando no se conocen los datos en los límites de integración



Regla Trapezoidal.

Introducción.



Regla Trapezoidal.

Introducción.

- La regla trapezoidal corresponde al caso de un polinomio de primer orden

$$I = \int_a^b f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) dx$$

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Regla Trapezoidal.

Error de Truncamiento.

- El error de truncamiento al aplicar la regla trapezoidal es

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

[9 6]

$$E_a = -\frac{1}{12} \bar{f}''(x)(b-a)^3$$

X valor que buscando

$$f''(\xi) \approx \bar{f}''(x)$$

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b f''(x) dx}{b-a}$$

Regla Trapezoidal.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla trapezoidal desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

$$I = (b-a) \frac{F(a)+F(b)}{2} = (0.8) \frac{(0.2 + 0.232)}{2} = I$$

Regla Trapezoidal.

Problema.

● Solución:

$$I = (0.8 - 0) \frac{0.2 + 0.232}{2} = \underline{\underline{0.1728}}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 0.1728}{1.640533} 100 = \boxed{89.5\%}$$

Regla Trapezoidal.

Problema.

● Solución:

$$E_a = -\frac{1}{12} \bar{f}''(x)(b-a)^3$$

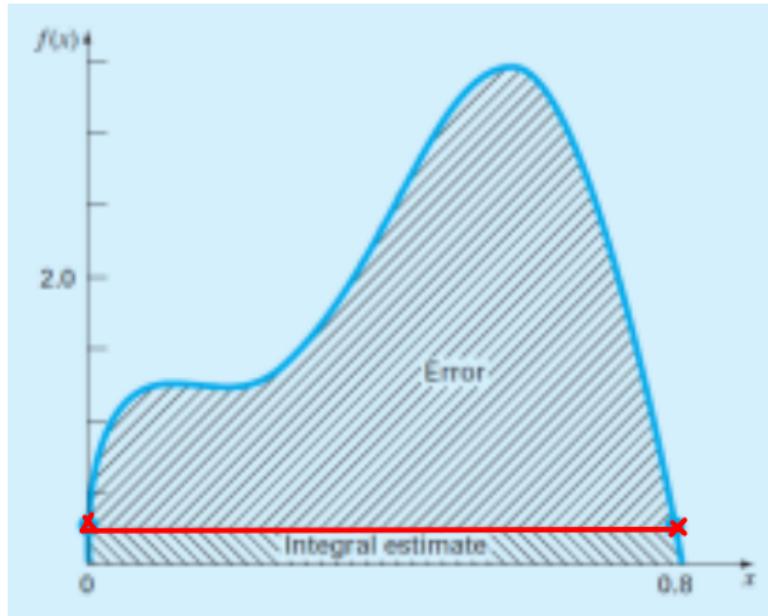
$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8} (-400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3) dx}{0.8 - 0} = -60$$

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60)(0.8)^3 = 2.56$$

E_a e 81,5%

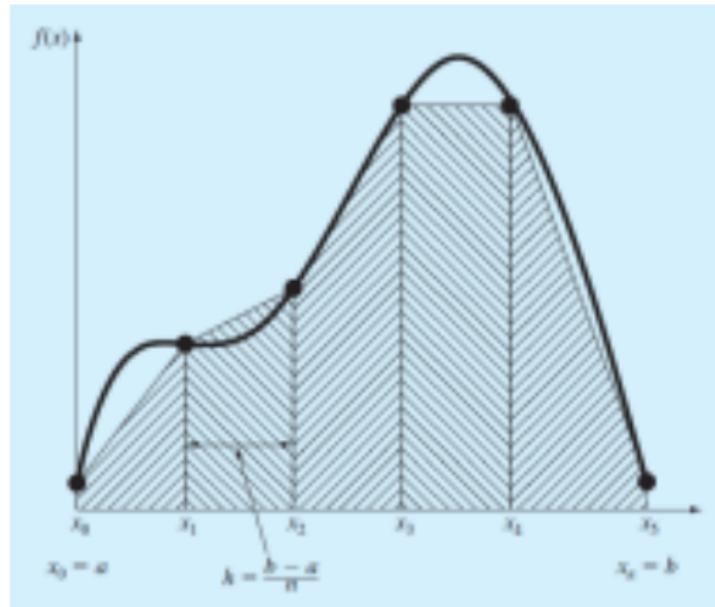
Regla Trapezoidal.

Problema.



Regla Trapezoidal Compuesta.

Introducción.



Regla Trapezoidal Compuesta.

Introducción.

- Para mejorar la exactitud del método trapezoidal, se puede dividir el intervalo a, b en varios segmentos y aplicar el método a cada segmento
- Para obtener el resultado total se suman las áreas estimadas de cada segmento

Regla Trapezoidal Compuesta.

Introducción.

- La longitud de los segmentos teniendo en cuenta que se tienen $n+1$ puntos equidistantes $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ es

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Regla Trapezoidal Compuesta.

Introducción.

- La integración total se puede encontrar de la siguiente manera

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

$$I = h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx$$

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}$$

Regla Trapezoidal Compuesta.

Error de Truncamiento.

- El error para la regla trapezoidal compuesta se obtiene mediante la suma de los errores individuales de cada segmento

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i)$$

$$\sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \approx n \bar{f}''(x)$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}''(x)$$

Regla Trapezoidal Compuesta.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla trapezoidal compuesta con dos segmentos desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

$$h = \frac{0.8 - 0}{2} = 0.4$$

0 y 0.4
0.4 y 0.8

$$(b-a) \frac{F(a)+F(b)}{2} \quad | \quad f(0) = 0.2, f(0.4) = 2.456, f(0.8) = 0.232$$

$$1) \quad \begin{matrix} 0 \\ 9 \\ 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$

$$0.4 \frac{(0.2 + 2.456)}{2} = 0.5312$$

$$2) \quad \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{matrix} \text{ y } \begin{matrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ \hline 0.4 \left(\frac{2.456 + 0.232}{2} \right) = 0.5376 \\ \hline \end{matrix}$$

1,0688

Regla Trapezoidal Compuesta.

Problema.

● Solución:

Para $n = 2$ ($h = 0.4$)

$$f(0) = 0.2, f(0.4) = 2.456, f(0.8) = 0.232$$

$$\{ I = 0.8 \frac{0.2 + 2(2.456) + 0.232}{4} = \underline{\underline{1.0688}}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.0688}{1.640533} 100 = 34.9\%$$

$$E_a = -\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60) = 0.64$$

Resumen sobre la regla trapezoidal

1) Calculamos la integral entre a y b.

$$I = (b-a)(f(a)+f(b))/2$$

2) Para mejorar la precisión de la regla
¿Qué hacemos? Dividimos el intervalo en n partes

$$h = (b-a)/n$$

Aplicamos la regla para cada intervalo y luego sumamos

Regla de Simpson.

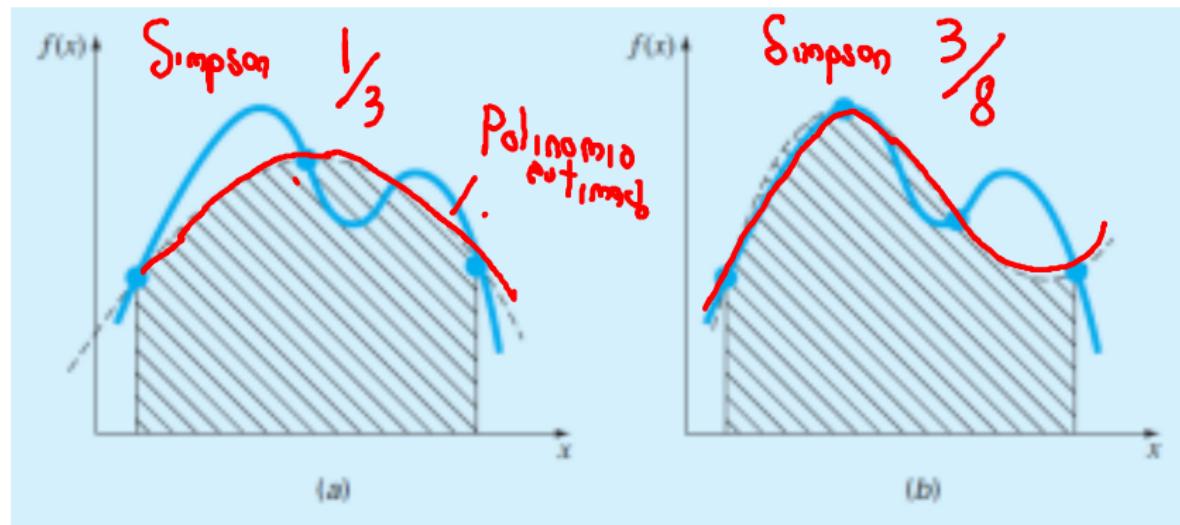
Introducción.

- Otra forma de obtener mayor exactitud en la integral, es emplear polinomios de mayor orden para la conexión de los puntos
- Si se tienen tres puntos equidistantes es posible emplear un polinomio de segundo orden (parábola) para la integración (Simpson 1/3)
- Si se tienen cuatro puntos equidistantes es posible emplear un polinomio de tercer orden para la integración (Simpson 3/8)



Regla de Simpson.

Introducción.



Regla de Simpson.

Introducción.

- La longitud de los segmentos teniendo en cuenta que se tienen 3 puntos equidistantes (x_0, x_1, x_2) es

$$h = \frac{b - a}{2}$$

a, a+b, b

Regla de Simpson 1/3.

Introducción.

- La integración total se puede encontrar de la siguiente manera

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

$C_1 f(x_0) + C_2 f(x_1) + \dots + C_n f(x_n)$

$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$3/8 \quad x_0, x_1, x_2, x_3$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$

+ . . . +

Regla de Simpson 1/3.

Error de Truncamiento.

- El error de truncamiento al aplicar la regla de Simpson 1/3 es

$$E_t = -\frac{1}{90} h^5 f^4(\xi)$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880} \bar{f}^4(x)$$

$$\bar{f}^4(x) = \frac{\int_a^b f^4(x) dx}{b-a}$$

Regla de Simpson 1/3.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 1/3 desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Regla de Simpson 1/3.

Problema.

$$b = 0.8 \quad a = 0 \\ x_0 = 0 \quad x_1 = 0.4 \quad x_2 = 0.8$$
$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

- Solución:

Para $n = 2$ ($h = 0.4$):

$$f(0) = 0.2, f(0.4) = 2.456, f(0.8) = 0.232$$

$$I = 0.8 \frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6} = 1.367467$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.367467}{1.640533} = 16.6\%$$

Regla de Simpson 1/3.

Problema.

● Solución:

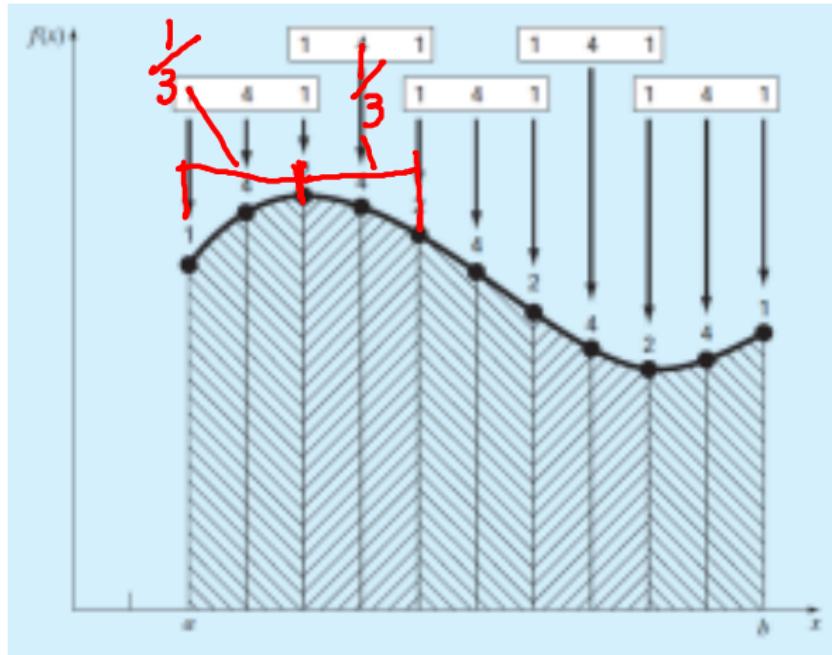
$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880} \bar{f}^4(x)$$

$$\bar{f}^4(x) = \frac{\int_0^{0.8} (-21600 + 48000x) dx}{0.8}$$

$$E_a = -\frac{0.8^5}{2880} (-2400) = 0.2730667$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.

Introducción.



Regla de Simpson 1/3 Compuesta.

Introducción.

- Para mejorar la exactitud de la regla de Simpson 1/3, se puede dividir el intervalo a, b en varios segmentos y aplicar el método a cada segmento
- Para obtener el resultado total se suman las áreas estimadas de cada segmento

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.

Introducción.

- La integración total se puede encontrar de la siguiente manera

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

$$I = 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \dots + 2h \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.

Error de Truncamiento.

- El error para la regla de Simpson 1/3 compuesta se obtiene mediante la suma de los errores individuales de cada segmento

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \bar{f}^{(4)}(x)$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 1/3 compuesta con 4 segmentos (5 puntos) desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

$$q=0 \quad b=0.8 \quad 4 \text{ segments} \quad n=4$$

$$h = \frac{b-a}{4} = \underline{0.2}$$

$$\underline{x_0=0 \quad x_1=0.2 \quad x_2=0.4 \quad x_3=0.6 \quad x_4=0.8}$$

1
3

1
3

$$f(0) \quad f(0.2) \quad f(0.4) \quad \dots$$

$$\rightarrow f(0) = 0.2 \quad q=0 \quad I = (b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$\rightarrow f(0.2) = 1.288 \quad b=0.4 \quad I=0.4 \left(\frac{0.2+4 \times 1.288 + 2.456}{6} \right)$$

$$q=0.4 \quad b=0.8$$

$$I(0 \text{ y } 0.4) = 0.5205333$$

$$f(0.4) \quad f(0.6) \quad f(0.8)$$

$$\rightarrow f(0.6) = 3.464$$

$$I(0.4 \text{ y } 0.8) = 1.1029333$$

$$\rightarrow f(0.8) = 0.232$$

$$I(0 \text{ y } 0.8) = 1.6234666$$

Regla de Simpson 1/3 Compuesta.

Problema.

● Solución:

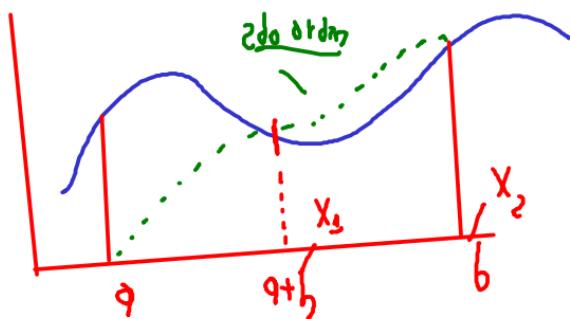
$$f(0) = 0.2, f(0.2) = 1.288, f(0.4) = 2.456,$$

$$f(0.6) = 3.464, f(0.8) = 0.232$$

$$I = 0.8 \frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12} = 1.62346\overline{7}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.623467}{1.640533} = 1.04\%$$

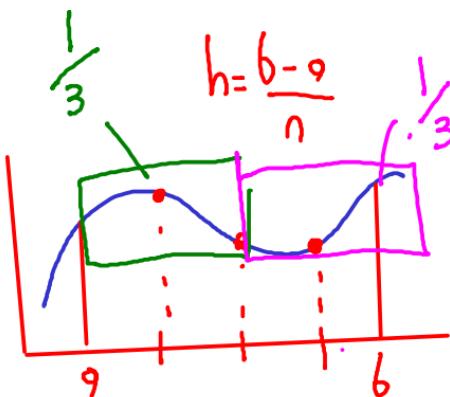
$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{180(4)^4}(-2400) = 0.017067$$



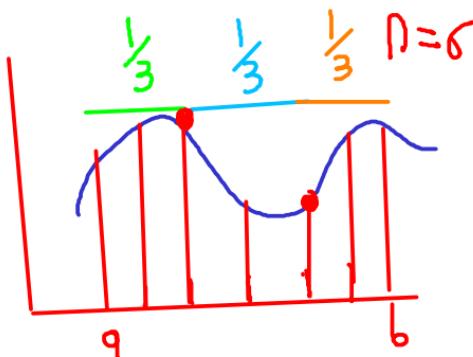
$$I = \frac{(b-a)(F(x_0) + 4F(x_1) + F(x_2))}{6}$$

Tomar más segmentos

$$\overline{n=4}$$



$$\left. \begin{array}{l} n=8 \\ n=4 \\ n=6 \\ n=8 \\ \vdots \end{array} \right\} \frac{3}{c}$$



Regla de Simpson 3/8.

Introducción.

- Un polinomio de tercer orden de Lagrange se puede ajustar a cuatro puntos e integrar para obtener una aproximación de la integral de una función

Regla de Simpson 3/8.

Introducción.

- La longitud de los segmentos teniendo en cuenta que se tienen 4 puntos equidistantes (x_0, x_1, x_2, x_3) es

$$h = \frac{b - a}{3}$$

Regla de Simpson 3/8.

Introducción.

- La regla de Simpson 3/8 se aplica por medio de la siguiente ecuación

$$I = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$
$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

Regla de Simpson 3/8.

Error de Truncamiento.

- El error de truncamiento al aplicar la regla de Simpson 3/8 es

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

Regla de Simpson 3/8.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 3/8 desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto y el error de truncamiento

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Regla de Simpson 3/8.

Problema.

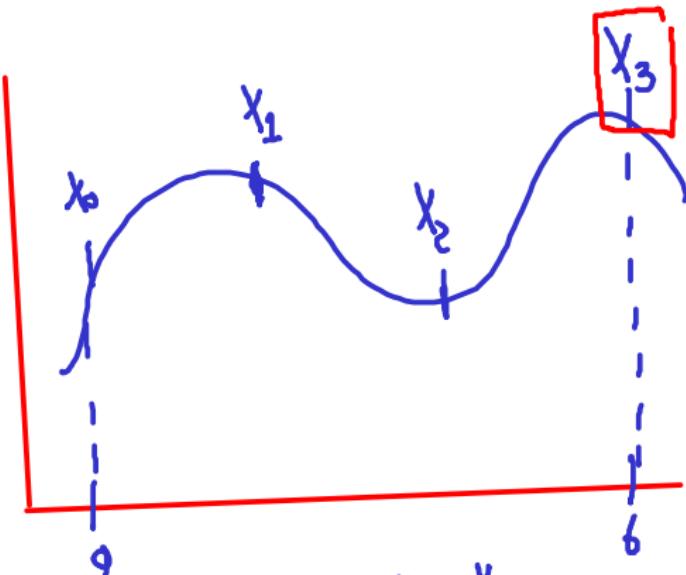
$$0 _ 0.8$$

$$\frac{0+0.8}{3} = 0.2667$$

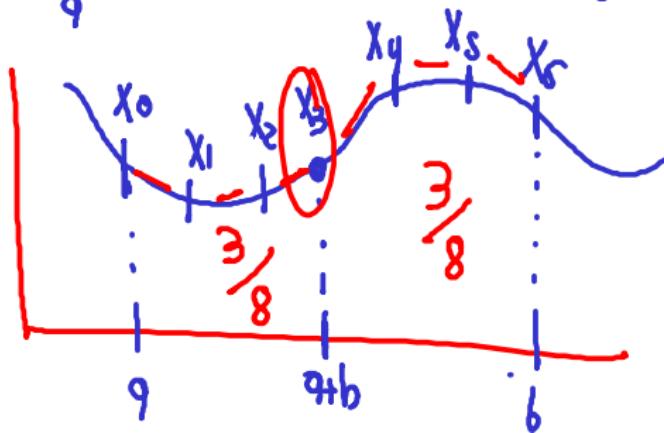
- **Solución:** Simpson 3/8 requiere 4 puntos igualmente espaciados

$$f(0) = 0.2, f(0.2667) = 1.43272, \\ f(0.5333) = 3.487177, f(0.8) = 0.232$$

$$I = 0.8 \frac{0.2 + 3(1.432724 + 3.487177) + 0.232}{8} = 1.51970$$



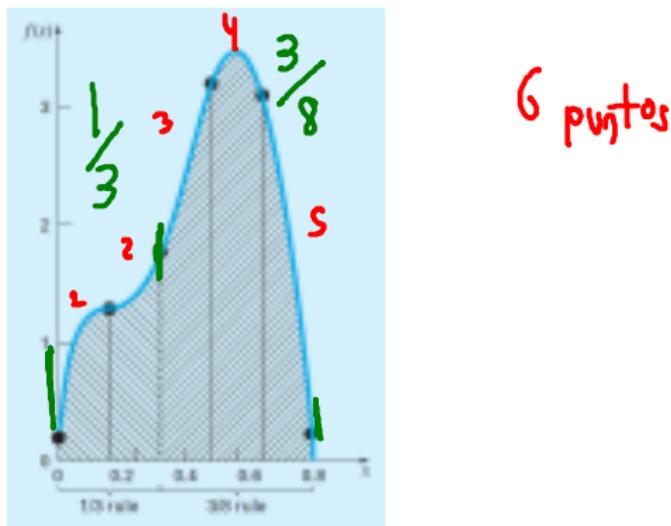
$$\left. \begin{array}{l} n=3 \\ n=6 \\ n=9 \\ n=12 \end{array} \right\} \frac{3}{4} \omega$$



Regla de Simpson 1/3 y 3/8.

Introducción.

- Cuando el número de segmentos es impar, se pueden emplear en conjunto la regla de Simpson 1/3 y 3/8 para la estimación de la integral



Regla de Simpson 1/3 y 3/8.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la regla de Simpson 1/3 y 3/8 con 5 segmentos (6 puntos) desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Regla de Simpson 1/3 y 3/8.

Problema.

$$\frac{0,8-0}{6}$$

- **Solución:** Simpson 1/3 y 3/8 requiere 6 puntos igualmente espaciados

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad | \quad 1 \quad \frac{3}{8}$$

$$f(0) = 0.2, f(0.16) = 1.296919, f(0.32) = 1.743393,$$
$$f(0.48) = 3.186015, f(0.64) = 3.181929, f(0.80) = 0.232$$

$$I = 0.32 \frac{0.2 + 4(1.296919) + 1.743393}{6} = 0.3803237$$

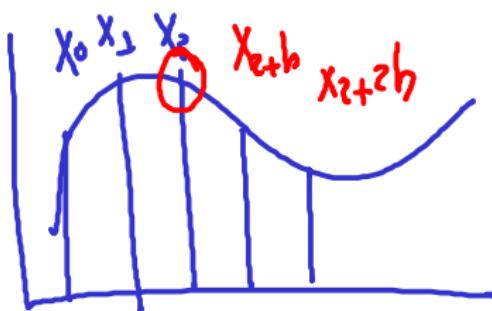
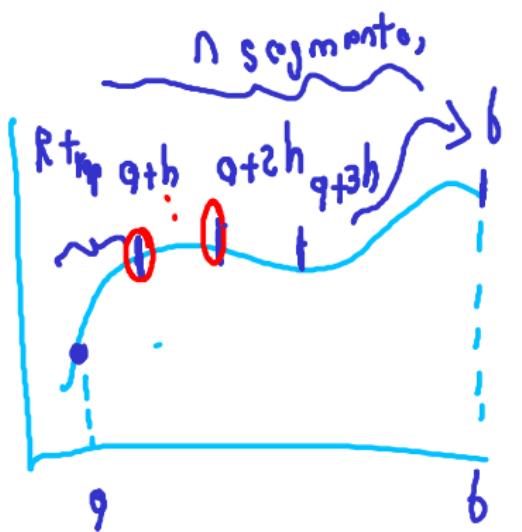
$$I = 0.48 \frac{1.743393 + 3(3.186015 + 3.181929) + 0.232}{8} = 1.264754$$

$$I_{total} = 0.3803237 + 1.264754 = 1.645077$$

Integración Cerrada - Resumen

Introducción.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
1	2	Trapezoidal rule	$(b-a) \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$	$-(1/12)a^3 f'''(b)$
2	3	Simpson's 1/3 rule	$(b-a) \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$	$-(1/90)a^5 f''''(b)$
3	4	Simpson's 3/8 rule	$(b-a) \frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$	$-(3/80)a^7 f''''''(b)$
4	5	Boole's rule	$(b-a) \frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$	$-(8/945)a^9 f''''''''(b)$
5	6		$(b-a) \frac{10f(x_0) + 75f(x_1) + 50f(x_2) + 50f(x_3) + 75f(x_4) + 10f(x_5)}{288}$	$-(275/12,096)a^{11} f''''''''''(b)$

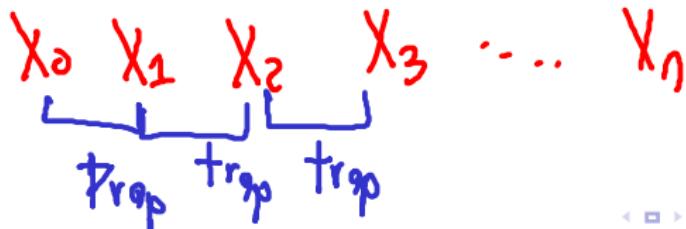


Datos No Equidistantes.

Introducción.

- Para el caso de datos no equidistantes, es posible aplicar la regla trapezoidal a cada segmento

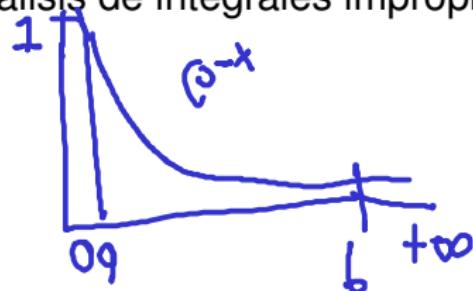
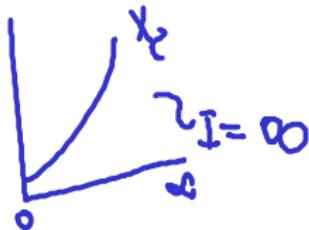
$$I = h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + h_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$



Fórmulas de Newton-Cotes - Integración Abierta.

Introducción.

- Las fórmulas de integración para intervalos abiertos se emplean cuando los límites se extienden mas allá del rango de los datos
- Se emplean para el análisis de integrales impropias $(-\infty, \infty)$



Integración Abierta - Resumen.

Introducción.

Segments (n)	Points	Name	Formula	Truncation Error
2	1	Midpoint method	$(b-a)f(x_1)$	$(1/2)\theta^3 f''(ξ)$
3	2	<i>trapezoidal rule</i>	$(b-a) \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$	$(1/4)\theta^3 f''(ξ)$
4	3		$(b-a) \frac{2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)}{3}$	$(14/45)\theta^5 f'''(ξ)$
5	4		$(b-a) \frac{11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)}{24}$	$(95/144)\theta^7 f^{(8)}(ξ)$
6	5		$(b-a) \frac{11f(x_1) - 14f(x_2) + 26f(x_3) - 14f(x_4) + 11f(x_5)}{20}$	$(41/140)\theta^9 f^{(10)}(ξ)$

Integrales Múltiples.

Introducción.

- La ecuación general para estimar el promedio de una función de dos dimensiones es:

$$\bar{f} = \frac{\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)}{(d - c)(b - a)}$$

El numerador corresponde a una integral doble

Integrales Múltiples.

Introducción.

- El orden de integración no altera el resultado

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Integrales Múltiples.

Introducción.

- **Problema:** La temperatura de una platina rectangular está definida por la función

$$T(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2 + 72$$

Si la platina tiene de largo 8m (eje x) y de ancho 6m (eje y),
encuentre la temperatura promedio

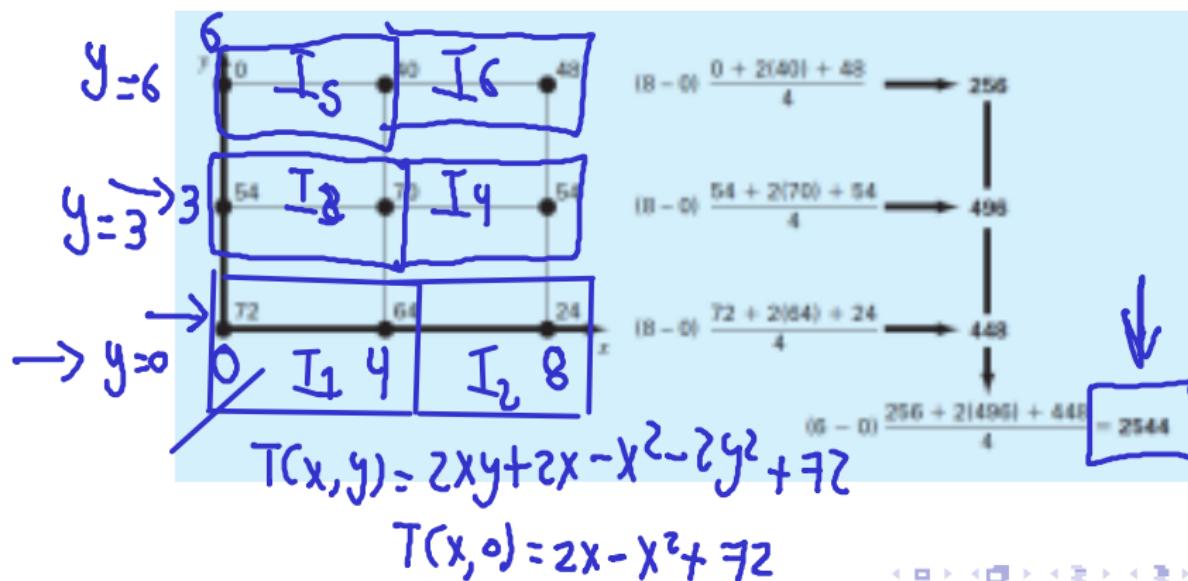
La solución analítica es 58.66667

$$\begin{aligned} X &\rightarrow 0 \text{ -- } 8 \\ y &\rightarrow 0 \text{ -- } 6 \end{aligned}$$

Integrales Múltiples.

Introducción.

- Solución:** Empleando la regla trapezoidal



$$I_2 = (4-0) \left(\frac{T(0,0) + T(4,0)}{2} \right)$$

$$I_2 = (8-4) \left(\frac{T(4,0) + T(8,0)}{2} \right)$$

$$I_3 = (4-0) \left(\frac{T(0,3) + T(4,3)}{2} \right)$$

Integrales Múltiples.

Introducción.

● Solución:

Aplicando la regla trapezoidal como se muestra en la gráfica anterior el resultado es:

$$I = \frac{2544}{6 \times 8} = 53$$

Aplicando la regla de Simpson 1/3 el resultado es:

$$I = \frac{2816}{6 \times 8} = 58.66667$$

Extrapolación de Richardson.

Introducción.

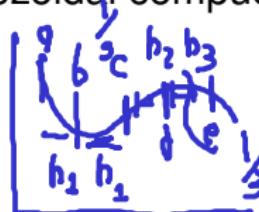
- La extrapolación de Richardson es un método para combinar dos estimaciones numéricas de una integral, para obtener una más exacta

Extrapolación de Richardson.

Introducción.

- La estimación de la integral y el error aproximado empleando el método de la regla trapezoidal compuesta se puede expresar como

$$I = I(h) + E(h)$$



- Si se realizan dos estimaciones de la misma integral con valores de h_1 y h_2 se tiene

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

Extrapolación de Richardson.

Introducción.

- Recordando la fórmula para el error de la regla trapezoidal compuesta

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''(x)$$

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$E(h_1) \cong E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2$$

Extrapolación de Richardson.

Introducción.

- Sustituyendo y despejando

$$I(h_1) + E(h_2) \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 = I(h_2) + E(h_2)$$
$$E(h_2) = \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2}$$

- La estimación del error encontrada depende de la estimación de la integral y los valores de h_1 y h_2

Extrapolación de Richardson.

Introducción.

- Sustituyendo en la ecuación inicial

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

$$I = I(h_2) + \frac{1}{(\frac{h_1}{h_2})^2 - 1} [I(h_2) - I(h_1)]$$

- Para el caso especial donde $h_2 = h_1/2$

$$0 - 6$$

$$a=0 \quad b=6 \quad h=\underline{1}$$

$$a=0, \quad b=3-6 \quad h=\underline{2}$$

$$I = \frac{4}{3} \underline{I(h_2)} - \frac{1}{3} \underline{I(h_1)}$$

$$\boxed{h_2 = h_1/2}$$

$$\text{Simp } \frac{1}{3} \quad h_2=1$$

$$\text{Simp } \frac{1}{3} \quad h_2=2$$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando extrapolación de Richardson desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- **Solución:** Por medio de la regla trapezoidal se evalua la integral

Segments	h	Integral	ε_t
1	0.8	0.1728	89.5 %
2	0.4	1.0688	34.9 %
4	0.2	1.4848	9.5 %

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- Combinando los resultados con 1 y 2 segmentos

$$I = \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.367467}{1.640533} 100 = 16.6\%$$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- Combinando los resultados con 2 y 4 segmentos

$$I = \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

$$\varepsilon_t = \frac{1.640533 - 1.623467}{1.640533} 100 = 1.0\% \quad \underline{\underline{}}$$

Extrapolación de Richardson.

Mejora de la estimación.

- Dos resultados obtenidos con orden de error $O(h^4)$ se pueden combinar para obtener una solución mas exacta con orden de error $O(h^6)$

$$I = \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$$

- Dos resultados con orden de error $O(h^6)$ se pueden combinar para obtener una solución mas exacta con orden de error $O(h^8)$

$$I = \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$$

Cuadratura de Gauss.

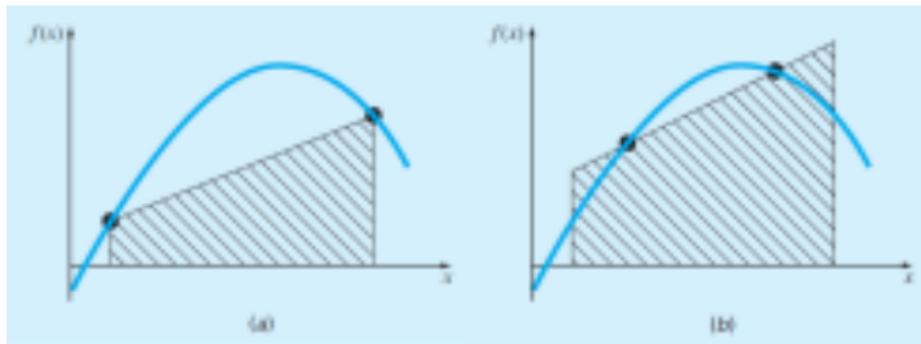
Introducción.

- Hasta el momento los métodos estudiados realizan la integración sobre valores igualmente espaciados dentro de un intervalo $[a,b]$
- El método de Cuadratura de Gauss se basa en la determinación del área bajo la línea que pasa a través de un conjunto de puntos intermedios

Cuadratura de Gauss.

Introducción.

- El conjunto de puntos intermedios se escoge de forma que se balanceen los errores positivos y negativos en la estimación de la integral



Cuadratura de Gauss.

Introducción.

- La ecuación general para la regla de cuadratura de Gauss de n puntos es la siguiente

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \dots + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

Cuadratura de Gauss.

Introducción.

Al aplicar el método debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- Una función se desea integrar en los límites $[a,b]$
- Los límites $[a,b]$ son distintos a los límites expresados en la ecuación de cuadratura de Gauss $[-1,1]$
- Para aplicar el método se debe realizar una transformación de los límites $[a,b]$ hacia los límites $[-1,1]$

Cuadratura de Gauss.

Regla Trapezoidal.

- El método de la regla trapezoidal se puede obtener a partir del método de cuadratura de Gauss
- A continuación se presenta una forma de obtener la ecuación para el método de la regla trapezoidal por medio del método de cuadratura de Gauss

Cuadratura de Gauss.

Regla Trapezoidal.

- Teniendo en cuenta que en el método de la regla trapezoidal los límites de integración son $[a,b]$ y que la aproximación a la función se hace a través de un polinomio de primer orden, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b a_0 + a_1 x \\ \int_a^b a_0 + a_1 x &= a_0 x \Big|_a^b + a_1 \frac{x^2}{2} \Big|_a^b \\ &= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Cuadratura de Gauss.

Regla Trapezoidal.

- Partiendo del método de cuadratura de Gauss para un polinomio de primer orden se tiene

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

$$\begin{aligned}c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) &= c_0(a_0 + a_1 x_0) + c_1(a_0 + a_1 x_1) \\&= a_0(c_0 + c_1) + a_1(c_0 x_0 + c_1 x_1)\end{aligned}$$

- En el método de la regla trapezoidal los límites de integración son $[a,b]$, por tanto $x_0 = a$ y $x_1 = b$

$$= a_0(c_0 + c_1) + a_1(c_0 a + c_1 b)$$

Cuadratura de Gauss.

Regla Trapezoidal.

- Igualando las ecuaciones que se obtuvieron anteriormente se tiene

$$c_0 + c_1 = b - a$$

$$c_0 a + c_1 b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

- El sistema de ecuaciones anterior posee dos ecuaciones y dos incógnitas, al solucionar el sistema se tiene

$$c_0 = c_1 = \frac{b - a}{2}$$

Cuadratura de Gauss.

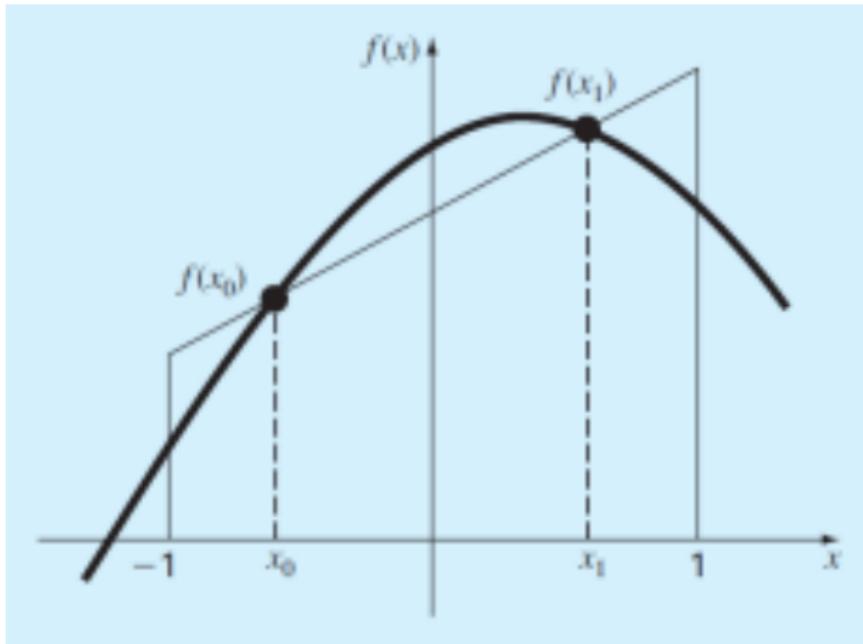
Regla Trapezoidal.

- Sustituyendo en la ecuación para la cuadratura de Gauss con los valores encontrados de c_0 y c_1 se tiene

$$I = \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b)$$
$$I = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.



Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Para este caso a diferencia de la regla trapezoidal, los puntos intermedios x_0 y x_1 son desconocidos, por tanto se tienen cuatro incognitas: x_0, x_1, c_0, c_1

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos Gauss-Legendre.

- Teniendo en cuenta que se requieren cuatro ecuaciones para solucionar el sistema, la aproximación a la función se hace a través de un polinomio de tercer orden

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ \int_a^b a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= a_0x \Big|_a^b + a_1 \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + a_2 \frac{x^3}{3} \Big|_a^b + a_3 \frac{x^4}{4} \Big|_a^b \\ &= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right) \end{aligned}$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos Gauss-Legendre.

- Para simplificar los cálculos y llegar a una ecuación general se emplean como límites de integración [-1,1]; es decir; $a = -1$ y $b = 1$

$$\begin{aligned} &= a_0(b-a) + a_1\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + a_3\left(\frac{b^4-a^4}{4}\right) \\ &= a_0(1+1) + a_1\left(\frac{1-1}{2}\right) + a_2\left(\frac{1+1}{3}\right) + a_3\left(\frac{1-1}{4}\right) \\ &= a_0(2) + a_1(0) + a_2\left(\frac{2}{3}\right) + a_3(0) \end{aligned}$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos Gauss-Legendre.

- Partiendo del método de cuadratura de Gauss para un polinomio de tercer orden se tiene

$$\begin{aligned}I &\cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \\&= c_0(a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3) + c_1(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3) \\&= a_0(c_0 + c_1) + a_1(c_0 x_0 + c_1 x_1) + a_2(c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2) + a_3(c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3)\end{aligned}$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos Gauss-Legendre.

- Igualando las ecuaciones que se obtuvieron anteriormente

$$c_0 + c_1 = 2$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = 0$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = 0$$

- El sistema de ecuaciones tiene como solución

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773503 \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula de Dos Puntos de Gauss-Legendre.

- Sustituyendo en la ecuación para la cuadratura de Gauss con los valores encontrados de c_0 , c_1 , x_0 y x_1 se tiene

$$I = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Cuadratura de Gauss.

Límites de Integración.

- Dados los límites de integración de una función $[a,b]$, para aplicar el método de cuadratura de gauss se deben transformar a $[-1,1]$
- La siguiente ecuación permite realizar la transformación de los límites de integración

$$x = m x_d + c$$

Donde m es una fracción de contracción y c corresponde a un desplazamiento

Cuadratura de Gauss.

Límites de Integración.

- Si el límite inferior $x = a$ corresponde a $x_d = -1$ y el límite superior $x = b$ corresponde a $x_d = 1$

$$a = m(-1) + c$$

$$b = m(1) + c$$

- Reordenando las ecuaciones

$$c - m = a$$

$$c + m = b$$

Cuadratura de Gauss.

Límites de Integración.

- El sistema de ecuaciones tiene como solución

$$c = \frac{b+a}{2} \quad m = \frac{b-a}{2}$$

- Sustituyendo en la ecuación inicial

$$x = \frac{(b-a)}{2}x_d + \frac{(b+a)}{2}$$
$$dx = \frac{b-a}{2}dx_d$$

Cuadratura de Gauss.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la fórmula de dos puntos de Gauss-Legendre desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Cuadratura de Gauss.

Problema.

• Solución:

Empleando las fórmulas para sustituir los límites entre -1 y +1

$$x = 0.4 + 0.4x_d$$

$$dx = 0.4dx_d$$

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5) dx$$

$$\int_{-1}^1 (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5) 0.4dx_d$$

Cuadratura de Gauss.

Problema.

$$f(x_d) = (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5)0.4$$

$$x_d = -1/\sqrt{3}, f(x_d) = 0.516741$$

$$x_d = 1/\sqrt{3}, f(x_d) = 1.305837$$

$$I = 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$$

$$\varepsilon_t = -11.1\%$$

Cuadratura de Gauss.

Fórmula General.

- La siguiente tabla muestra versiones de la fórmula de Gauss-Legendre para una mayor cantidad de puntos

Cuadratura de Gauss.

Fórmula General.

Points	Weighting Factors	Function Arguments	Truncation Error
1	$c_0 = 2$	$x_0 = 0.0$	$\approx f^{(12)}(0)$
2	$c_0 = 1$ $c_1 = 1$	$x_0 = -1/\sqrt{3}$ $x_1 = 1/\sqrt{3}$	$\approx f^{(4)}(0)$
3	$c_0 = 5/9$ $c_1 = 8/9$ $c_2 = 5/9$	$x_0 = -\sqrt{3}/3$ $x_1 = 0.0$ $x_2 = \sqrt{3}/3$	$\approx f^{(8)}(0)$
4	$c_0 = (18 - \sqrt{30})/35$ $c_1 = (18 + \sqrt{30})/35$ $c_2 = (18 + \sqrt{30})/35$ $c_3 = (18 - \sqrt{30})/35$	$x_0 = -\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$ $x_1 = -\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$ $x_2 = \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$ $x_3 = \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	$\approx f^{(16)}(0)$
5	$c_0 = (322 - 13\sqrt{70})/900$ $c_1 = (322 + 13\sqrt{70})/900$ $c_2 = 128/225$ $c_3 = (322 + 13\sqrt{70})/900$ $c_4 = (322 - 13\sqrt{70})/900$	$x_0 = -\sqrt{245 + 14\sqrt{70}}/21$ $x_1 = -\sqrt{245 - 14\sqrt{70}}/21$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}/21$ $x_4 = \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}/21$	$\approx f^{(32)}(0)$
6	$c_0 = 0.171324492379170$ $c_1 = 0.360761573048139$ $c_2 = 0.467913934572691$ $c_3 = 0.467913934572691$ $c_4 = 0.360761573048139$ $c_5 = 0.171324492379170$	$x_0 = -0.932469514203152$ $x_1 = -0.661209386466265$ $x_2 = -0.238519186083197$ $x_3 = 0.238519186083197$ $x_4 = 0.661209386466265$ $x_5 = 0.932469514203152$	$\approx f^{(12)}(0)$

Cuadratura de Gauss.

Problema.

- **Problema:** Integre la siguiente función empleando la fórmula de tres puntos de Gauss-Legendre desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Encuentre el error absoluto

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

El valor exacto de la integral es 1.640533

Cuadratura de Gauss.

Problema.

● Solución:

A partir de la fórmula con los límites sustituidos y con base en la tabla general

$$f(x_d) = (0.2 + 25(0.4 + 0.4x_d) - 200(0.4 + 0.4x_d)^2 + 675(0.4 + 0.4x_d)^3 - 900(0.4 + 0.4x_d)^4 + 400(0.4 + 0.4x_d)^5)0.4$$

$$I = 0.5555556f(-0.7745967) + 0.8888889f(0) + 0.5555556f(0.7745967)$$

$$I = 0.2813013 + 0.8732444 + 0.4859876 = 1.640533$$

Diferencias Finitas.

Introducción.

- La definición matemática de la derivada con una aproximación por diferencias es

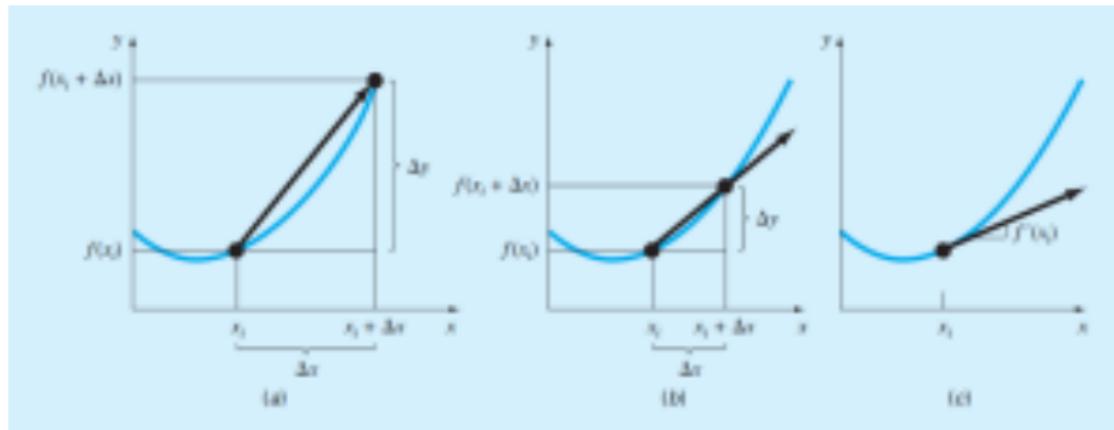
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i))}{\Delta x}$$

- Si Δx tiende a cero, la diferencia se torna en una derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i))}{\Delta x}$$

Diferencias Finitas.

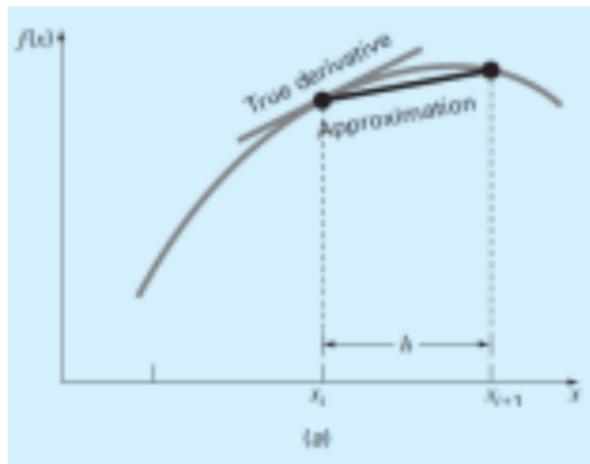
Introducción.



Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Adelante.

- La siguiente gráfica corresponde al tipo de diferencia finita hacia adelante



Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Adelante.

- En este tipo de diferencia finita se emplea el valor siguiente x_{i+1} y el valor actual x_i para estimar la pendiente
- La deducción de la ecuación comienza a partir de la expansión en Series de Taylor hacia adelante

Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Adelante.

- Expansión hacia adelante

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots$$

- Despejando $f'(x_i)$

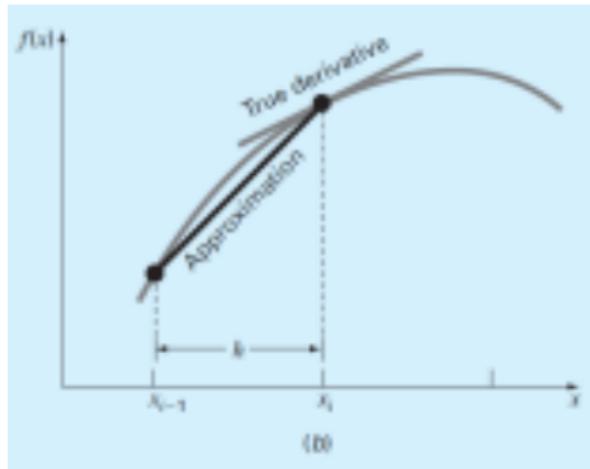
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + \dots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Atras.

- La siguiente gráfica corresponde al tipo de diferencia finita hacia atras



Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Atras.

- En este tipo de diferencia finita se emplea el valor anterior x_{i-1} y el valor actual x_i para estimar la pendiente
- La deducción de la ecuación comienza a partir de la expansión en Series de Taylor hacia atras

Diferencias Finitas.

Diferencia hacia Atras.

- Expansión hacia atras

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \dots$$

- Despejando $f'(x_i)$

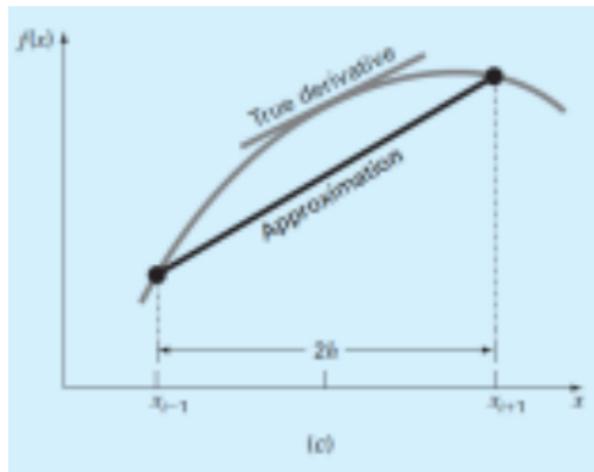
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{f''(x_i)}{2}h - \dots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h)$$

Diferencias Finitas.

Diferencia Centrada.

- La siguiente gráfica corresponde al tipo de diferencia finita centrada



Diferencias Finitas.

Diferencia Centrada.

- En este tipo de diferencia finita se emplea el valor siguiente x_{i+1} y el valor anterior x_{i-1} para estimar la pendiente
- La deducción de la ecuación comienza a partir de la resta de la expansión en Series de Taylor hacia adelante de la expansión en Series de Taylor hacia atrás

Diferencias Finitas.

Diferencia Centrada.

- Expansion hacia adelante

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots$$

- Expansión hacia atrás

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \dots$$

- Resta de expansiones

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f''(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

Diferencias Finitas.

Diferencia Centrada.

- Despejando $f'(x_i)$

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f^3(x_i)}{3!}h^3 + \dots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^3(x_i)}{6}h^2 + \dots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

Diferencias Finitas.

Problema.

- **Problema:** Emplee diferencias finitas (primer orden) hacia atrás, adelante y centrada para estimar la primera derivada de la función en $x = 0.5$ usando un valor de $h = 0.25$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

El valor verdadero corresponde a $f'(0.5) = -0.9125$

Diferencias Finitas.

Problema.

- **Solución:** Se requieren los siguientes datos

$$x_{i-1} = 0.25, \quad f(x_{i-1}) = 1.1035156$$

$$x_{i+1} = 0.75, \quad f(x_{i+1}) = 0.6363281$$

$$x_i = 0.5, \quad f(x_i) = 0.925$$

Diferencias Finitas.

Problema.

La diferencia hacia adelante con exactitud de $O(h)$

$$f'(0.5) = \frac{0.6363281 - 0.925}{0.25} = -1.155$$
$$\varepsilon_t = -26.5\%$$

La diferencia hacia atras con exactitud de $O(h)$

$$f'(0.5) = \frac{0.925 - 1.1035156}{0.25} = -0.714$$
$$\varepsilon_t = 21.7\%$$

Diferencias Finitas.

Problema.

La diferencia centrada con exactitud de $O(h^2)$

$$f'(0.5) = \frac{0.6363281 - 1.1035156}{2(0.25)} = -0.934$$
$$\varepsilon_t = -2.4\%$$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Adelante.

- Es posible obtener una diferencia hacia adelante para la segunda derivada
- La deducción de la ecuación parte de expresar una expansión en Series de Taylor hacia adelante para $f(x_{i+2})$ en términos de $f(x_i)$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Adelante.

- Expansión hacia adelante para $f(x_{i+2})$ en términos de $f(x_i)$

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \dots$$

- Expansión hacia adelante multiplicada por 2

$$2f(x_{i+1}) = 2f(x_i) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \dots$$

- Resta de expansiones

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \dots$$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Adelante.

- Despejando $f''(x_i)$

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \dots$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Diferencias Finitas de Alto Orden.

Diferencia hacia Atras y Centrada.

- Un análisis similar permite obtener la diferencia finita hacia atras para la segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h^2)$$

- Un análisis similar permite obtener la diferencia finita centrada para la segunda derivada

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

- Es posible mejorar los resultados obtenidos por medio de diferencias finitas, introduciendo términos adicionales de la Serie de Taylor

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!} h^3 + \dots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2} h - \frac{f'''(x_i)}{6} h^2 - \dots$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2} h + O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

- La ecuación anterior presenta un término de segunda derivada $f''(x_i)$ que puede ser reemplazado por alguna de las ecuaciones que se plantearon para diferencias de alto orden

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

- Diferencia hacia adelante para la segunda derivada

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

- Diferencia hacia adelante de alta exactitud

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

- Reemplazando

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2)$$

$$f'(x_i) \cong \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Adelante.

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Error

$O(h)$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$$

$O(h^2)$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$O(h)$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$$

$O(h^2)$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$O(h)$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$$

$O(h^2)$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

$O(h)$

$$f''''(x_i) = \frac{-2f(x_{i+4}) + 11f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 26f(x_{i+1}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$$

$O(h^2)$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia hacia Atras.

First Derivative

$$f'(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

Error

$O(h)$

$$f'(x) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

$O(h^2)$

Second Derivative

$$f''(x) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

$O(h)$

$$f''(x) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$$

$O(h^2)$

Third Derivative

$$f'''(x) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$$

$O(h)$

$$f'''(x) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$$

$O(h^2)$

Fourth Derivative

$$f''''(x) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$$

$O(h)$

$$f''''(x) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$$

$O(h^2)$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Diferencia Centrada.

First Derivative

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

Error

$O(h^2)$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$$

$O(h^4)$

Second Derivative

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

$O(h^2)$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$$

$O(h^4)$

Third Derivative

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$$

$O(h^2)$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$$

$O(h^4)$

Fourth Derivative

$$f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$$

$O(h^2)$

$$f''''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$$

$O(h^4)$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

- **Problema:** Emplee diferencias finitas de alta exactitud (segundo orden) hacia atrás, adelante y centrada para estimar la primera derivada de la función en $x = 0.5$ usando un valor de $h = 0.25$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

El valor verdadero corresponde a $f'(0.5) = -0.9125$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

● Solución:

Se requieren los siguientes datos:

$$x_{i-2} = 0, \quad f(x_{i-2}) = 1.2$$

$$x_{i-1} = 0.25, \quad f(x_{i-1}) = 1.1035156$$

$$x_i = 0.5, \quad f(x_i) = 0.925$$

$$x_{i+1} = 0.75, \quad f(x_{i+1}) = 0.6363281$$

$$x_{i+2} = 1, \quad f(x_{i+2}) = 0.2$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

La diferencia hacia adelante con exactitud de $O(h^2)$

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 4(0.6363281) - 3(0.925)}{2(0.25)} = -0.859375$$
$$\varepsilon_t = 5.82\%$$

La diferencia hacia atras con exactitud de $O(h^2)$

$$f'(0.5) = \frac{3(0.925) - 4(1.1035156) + 1.2}{2(0.25)} = -0.878125$$
$$\varepsilon_t = 3.77\%$$

Diferencias Finitas de Alta Exactitud.

Problema.

La diferencia centrada con exactitud de $O(h^4)$

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8(0.6363281) - 8(1.1035156) + 1.2}{12(0.25)} = -0.9125$$
$$\varepsilon_t = 0\%$$

Extrapolación de Richardson.

Introducción.

- De modo similar a la integración de Romberg, se puede deducir una ecuación para la estimación de la derivada

$$D = \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1)$$
$$h_2 = h_1/2$$

- La ecuación anterior aplica para diferencias centradas con $O(h^2)$, la aplicación de la fórmula produce un resultado con $O(h^4)$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

- **Problema:** Emplee extrapolación de Richardson para evaluar la primera derivada de la función en $x = 0.5$ empleando un valor de $h_1 = 0.5$ y $h_2 = 0.25$

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

El valor verdadero corresponde a $f'(0.5) = -0.9125$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

● Solución:

La primera derivada se puede estimar a partir de las diferencias centradas para $h_1 = 0.5$ y $h_2 = 0.25$

$$D(0.5) = \frac{0.2 - 1.2}{1} = -1.0$$

$$\varepsilon_t = -9.6\%$$

$$D(0.25) = \frac{0.6363281 - 1.103516}{0.5} = -0.934375$$

$$\varepsilon_t = -2.4\%$$

Extrapolación de Richardson.

Problema.

• Solución:

La estimación mejorada se puede determinar a partir de la fórmula de Extrapolación de Richardson

$$D = \frac{4}{3}(-0.934375) - \frac{1}{3}(-1) = -0.9125$$
$$\varepsilon_t = 0\%$$

Bibliografía I



S. Chapra.

Applied Numerical Methods with MATLAB For Engineers and Scientists, Sixth Edition.

Mac Graw Hill, 2010.