Complejidad y optimización

Reducciones desde Vertex Cover

Carlos Andrés Delgado S.

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Junio 2019

Universidad del Valle

Contenido

Universidad del Valle

Contenido

Problema Clique

Definición

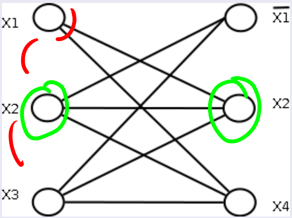
Esta vez realizaremos una reducción desde 3-SAT para demostrar que clique es un NPC. Para esto se debe cumplir:

$$3 - SAT \leq_p Clique$$

Problema Clique

Definición

La estrategia de reducción consiste en tomar cada clausula (x_1, x_2, x_3) y crear 3 vértices. Realizamos este paso para cada clausula y conectamos con todos los vértices **de otras clausulas**, exceptuando su negación. Por ejemplo, para el 3-SAT $(x_1, x_2, x_3), (\neg x_1, x_2, x_4)$ tenemos:



El k se toma igual.

Problema Clique

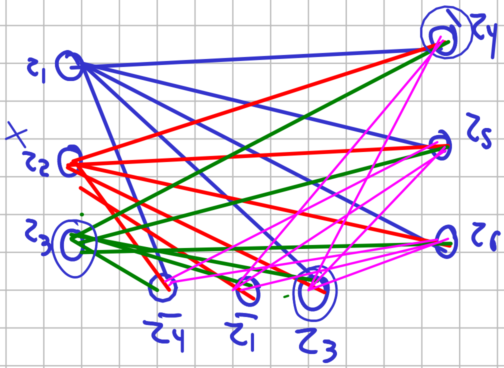
Vertices

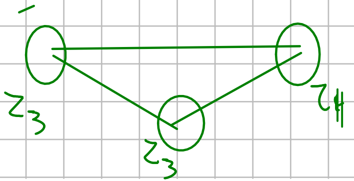
¿Se realiza en tiempo polinomial la reducción?

Suponga se tienen m variables y c clausulas, la complejidad de la reducción es para crear las ~~aristas~~ $3c$ y para crear las aristas, asumiendo que se conectan todas es de aproximadamente $\frac{3c(3c-1)}{2} - \cancel{3}$ que es el caso del grafo completo menos los 3 vértices de la misma clausula que no se conectan. Por lo que, en cualquier caso la reducción se realiza en tiempo polinomial.

$2c$ $\approx$

$\{ \quad \{z_1, z_2, z_3\} \{z_4, z_5, z_6\} \{\bar{z}_4, \bar{z}_1, z_3\}$





Problema Clique

Instancias positivas de SAT llevan a instancias positivas en Clique

En efecto, para que un 3-SAT con k clausulas sea satisfecho se necesita que todas sean satisfechas, lo que implica que al menos una de las variables es verdadera. Si se seleccionan k vértices los cuales son verdaderos en 3-SAT se obtiene un clique de grado k.

$\{z_i, z_j, z_k\} \wedge \{z_w, z_p, z_l\}$

Universidad del Valle

Problema Clique

Instancias negativas de SAT llevan a instancias negativas en Clique

Se puede verificar por dos estrategias:

1. Si el SAT es insastifactible, no va existe un grafo de grado k internamente, ya que no será posible conectar exitosamente entre sí las k clausulas.
2. O bien, al realizar la sección de una instancia en el cual una clausula no se satisface, se va encontrar un grafo completo pero de tamaño $k - 1$

Contenido

Universidad del Valle

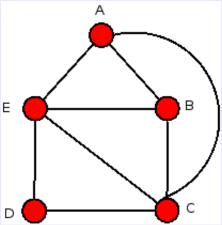
Ciclo hamiltoniano

Definición

El ciclo hamiltoniano consiste en encontrar en un grafo $G(V, E)$ un camino simple en el cual se pasa una vez por cada uno de los vértices desde un vértice hasta sí mismo. Por definición, un camino simple no permite que se repitan aristas.

Ciclo hamiltoniano

Definición



En el anterior grafo existe un ciclo hamiltoniano de A-B-C-D-E-A.

Ciclo hamiltoniano

$O(n2^n)$

¿Porque ciclo Hamiltoniano es NP?

- Su solución requiere analizar todas las posibles secuencias de caminos desde un vértice hasta si mismo. Si suponemos que hay n vértices y cada una se conecta con m vecinos, la complejidad es $O(m^n)$
- Su verificación puede hacerse en tiempo polinomial, una vez se obtiene el camino consiste en verificar que se recorre sólo una vez cada vértices y no se repiten aristas. Dada que la solución contiene n vértices, esta verificación se hace en tiempo lineal.

Ciclo hamiltoniano

Estrategia de reducción

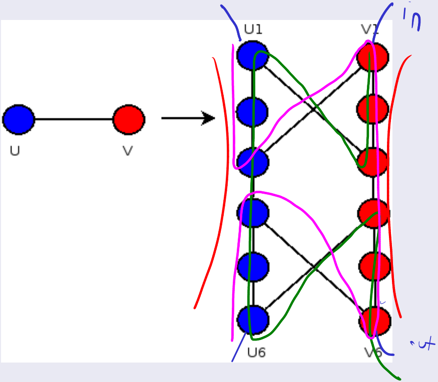
Vamos a comprobar que el ciclo hamiltoniano (HC) es NPC, a partir de Vertex Cover (VC), se debe establecer primero que:

$$VC \leq_p HC \tag{1}$$

Y VC es un problema NPC conocido.

Estrategia de reducción

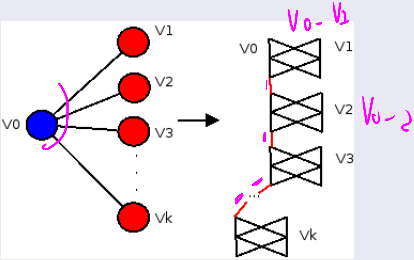
Para cada arista (u, v) generamos el siguiente componente:



Ciclo hamiltoniano

Estrategia de reducción

Al finalizar la creación de los componentes conectamos todos aquellos que están asociados al mismo vértice:

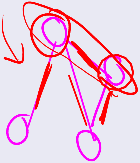


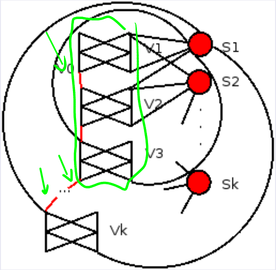
Haciendo esto se crean n cadenas interconectadas con n puntos de entrada y n salidas.

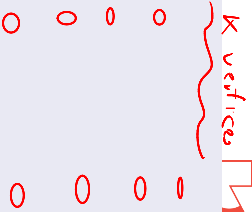
Ciclo hamiltoniano

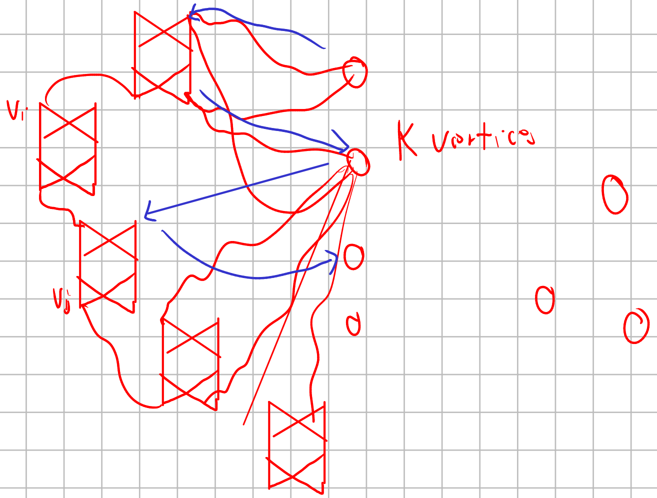
Estrategia de reducción

Con esta reducción hemos codificado la información del grafo inicial. Sin embargo necesitamos k vértices adicionales para codificar los n puntos de inicio y n puntos de finalización de cada cadena interconectada. Creamos una arista de cada uno de estos vértices con la entrada y salida de cada componente.









v_i
v_j
K vertices

Ciclo hamiltoniano

¿Reducción se realiza en tiempo polinomial?

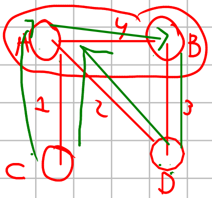
El tamaño total del nuevo grafo, tomando como punto de partida el grafo de VC $G(V,E)$ es $|V||E| + k$ vértices y $12|E| + 2k|V| + 2|E|$ aristas. Por lo que, la construcción es en tiempo polinomial.

Ciclo hamiltoniano

Fix

Instancias positivas en VC llevan a instancias positivas en HC

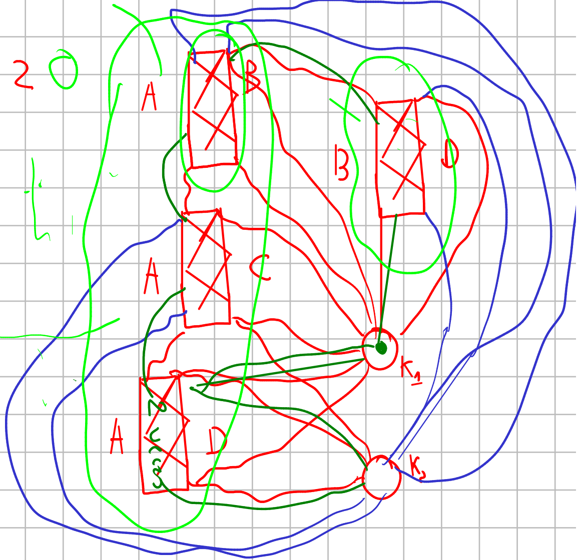
Suponga que $G = (V, E)$ tiene un cobertura de tamaño ~~V~~ K el cual corresponde a $U = (u_1, u_2, .., u_k)$. Vamos a formar un ciclo hamiltoniano en el grafo construido en la reducción G'. Este incluye todos lo s componentes de los vértices en el conjunto U. El ciclo visita una o dos veces cada componente dependiendo del nodo de entrada, dado que U es una cobertura de G cada arista es incidente sobre algún vértice de U y así visita cada vértice en G'. Para garantizar exista un ciclo hamiltoniano en los vértices seleccionados se agregan los k vértices selectores que los acompañan.



$k = 2$

VC

$\leq$



HC

Ciclo hamiltoniano

Instancias negativas en VC llevan a instancias negativas en HC

Al no existir una cobertura de tamaño k en el grafo, no se tiene el número suficiente de vértices adicionales para recorrer el grafo sin repetir los vértices seleccionados en VC. La selección de vértices en VC indica que existe un camino que permite pasar por todos los vértices de tamaño k y en este sentido la reducción construye el grafo.

Contenido

Estrategia

A tener en cuenta

Probar que los problema son difíciles es un arte e algo de ingenio. Sin embargo, existe un sucio secreto de las demostraciones de que un problema es NP completo, es que estas son más fáciles de recrear que explicar. Es lo mismo que sucede cuando se intenta reescribir código antiguo en lugar de entenderlo.

Estrategia

A tener en cuenta

Algunos consejos:

1. Haga su problema lo más fácil posible, como es el caso de restringirlo.
2. Nunca use un problema complicado como punto de partida, como es el caso del agente viajero. Un buen punto de partida son problemas más fáciles de entender como 3-SAT o VC.
3. No se preocupe de añadir restricciones adicionales o hacer su problema más complicado, es muy difícil una reducción no se haga en tiempo polinomial.

Universidad del Valle

Estrategia

A tener en cuenta

Para demostrar seleccione un problema apropiado:

- 3-SAT, es el más confiable dado que es la fuente de los otros problemas NP. Pero la reducción puede ser engorrosa.
- Partición entera (IP). Es muy bueno para problemas que requieren numeros grandes
- Vertex Cover (VC). Es una excelente estrategia para problemas de grafos cómo el caso del número cromático o algun caso de selección vértices o aristas.
- Ciclo hamiltoniano (HC) Es un buen problema para estudiar casos de problemas de routeo o programación de tareas.

Estrategia

A tener en cuenta

A considerar para realizar una reducción

- La reducción busca traducir un problema a otro. Una buena estrategia es agregar penalidades o castigar alguna situación que se desvie de la solución propuesta.
- Estudie como son las soluciones de A y B para pensar en una buena estrategia de mapeo de ambos casos, es decir cómo forzar que una entrada de A de el mismo resultado en B.
- Aveces, probar que un algoritmo es difícil es argumentar que no existe una solución eficiente para hacerlo en tiempo polinomial. Cuando no se puede probar que un problema es NPC, probablemente vale la pena cambiar su forma de pensar al menos por un tiempo para ser honesto.

Preguntas

Universidad del Valle