

# Fundamentos de lenguajes de programación

## Semántica de los Conceptos Fundamentales de Lenguajes de Programación

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

# Procedimientos

- Nuestro lenguaje será extendido para incorporar creación y aplicación de procedimientos.
- El lenguaje consistirá de las expresiones especificadas anteriormente y de expresiones para creación de procedimientos `proc( ... ) ...` y de aplicación de procedimientos `(... ...)`.
- Para este lenguaje se extiende el conjunto de valores expresados y denotados de la siguiente manera:

Valor Expresado = Número + Booleano + ProcVal

Valor Denotado = Número + Booleano + ProcVal

Se añaden las siguientes producciones a la gramática:

$\langle \text{expresión} \rangle ::= \text{proc} (\{ \langle \text{identificador} \rangle \}^* (.)) \langle \text{expresión} \rangle$   
 $\text{proc-exp (ids body)}$

$::= (\langle \text{expresión} \rangle \{ \langle \text{expresión} \rangle \}^*)$   
 $\text{app-exp (rator rands)}$

# Procedimientos

Se deben añadir las siguientes producciones a la especificación de la gramática:

```
(expression ("proc" "(" (separated-list identifier ",")  
              ")"  
              expression)  
  proc-exp)  
(expression ("(" expression (arbno expression) ")")  
  app-exp)
```



# Procedimientos

De esta manera se puedan crear programas como:

```
let  
  f = proc (y, z) +(y, -(z, 5))  
in  
  (f 2 28)
```

Handwritten annotations: Red circles around `(y, z)` and `(f 2 28)`. A red box around `+(y, -(z, 5))`. A red arrow points from the box to the text `(extend-env '(y, z) (2, 28))`. A red arrow points from `(f 2 28)` to the text `→ 25`.

```
let  
  f = proc (z) *(z 2)  
  g = proc (x y) +(x y)  
in  
  (g (f 3) (f 4))
```

Handwritten annotations: Red arrows pointing to the `let` and `in` keywords. Red wavy lines under `(f 3)` and `(f 4)` with the text `6` and `8` below them. A red curly brace to the right of `(f 4)` with the text `14` next to it.

# Contenido

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

# Semántica de los procedimientos

- El valor de una expresión correspondiente a la creación de un procedimiento (`proc (ids) body`) es la representación interna del tipo de dato procedimiento.
- Para determinar el valor de una expresión de aplicación de un procedimiento (`(proc-exp exp1 exp2 ... expn)`) se debe evaluar la expresión `proc-exp` (correspondiente al procedimiento a aplicar) y las expresiones `exp1 exp2 ... expn` (correspondientes a los argumentos).

# Semántica de los procedimientos

- Posteriormente, debe crearse un nuevo ambiente que extiende el ambiente empaquetado en el procedimiento con la ligadura de los parámetros formales del procedimiento a los argumentos de la aplicación (valores de las expresiones  $exp1$   $exp2$  ...  $expn$ ).
- Finalmente, se evalúa el cuerpo del procedimiento en el nuevo ambiente extendido.

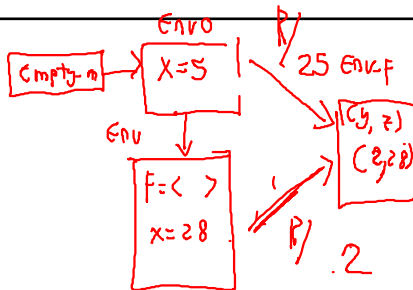
# Semántica de los procedimientos

Se tiene el siguiente programa:

```
let x = 5
in let f = proc (y, z) +(y, -(z, x))
    x = 28
in (f 2 x)
```

~~Env1~~

28



# Semántica de los procedimientos

Se tiene el siguiente programa:

```
let x = 5  
in let f = proc (y, z) +(y, -(z, x))  
    x = 28  
    in (f 2 x)
```

*Handwritten notes: A blue circle highlights 'let x = 5'. A blue arrow points from 'x' in the procedure body to 'x = 5'. A blue brace on the right indicates the scope of the internal declaration.*

- Cuando se llama a `f`, su cuerpo debe ser evaluado en un ambiente que liga `y` a 2, `z` a 28 y `x` a 5.
- `x` es ligado a 5 ya que el alcance de la declaración interna no incluye la declaración del procedimiento.
- Las variables que ocurren libres en el procedimiento se evalúan en el ambiente que envuelve al procedimiento.
- El valor de la expresión `(f 2 x)` es 25.

# Semántica de los procedimientos

- El valor de las expresiones que contemplan procedimientos depende en gran medida del ambiente en el cual son evaluadas.
- Por esta razón, un procedimiento debe empaquetar los parámetros formales de la función, la expresión correspondiente al cuerpo de la función y el ambiente en el que es creado el procedimiento.
- Este paquete es denominado Clausura (closure) y corresponde al conjunto de valores *ProcVal*.

# Semántica de los procedimientos

- La interfase del tipo de dato *closure* consiste de un procedimiento constructor y del procedimiento observador `apply-procedure` que determina como aplicar un valor de tipo procedimiento.
- La definición de este tipo de dato es la siguiente:

```
(define-datatype procval procval?  
  (closure  
    ↪ (ids (list-of symbol?))  
    ↪ (body expression?)  
    ↪ (env environment?)) ↪
```

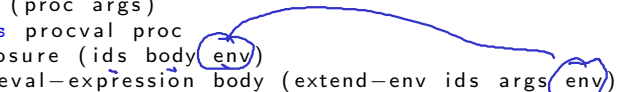
El ambiente donde se creo el  
procedimiento



# Semántica de los procedimientos

La definición del procedimiento `apply-procedure` es la siguiente:

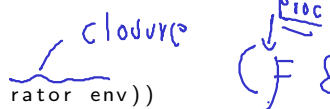
```
(define apply-procedure
  (lambda (proc args)
    (cases procval proc
      (closure (ids body env)
        (eval-expression body (extend-env ids args env))))))
```



# Semántica de los procedimientos

El comportamiento de las expresiones de creación y aplicación de procedimientos, se obtiene agregando las siguientes clausulas en el procedimiento eval-expression:

```
(proc-exp (ids body)
  (closure ids body env))
(app-exp (rator rands)
  (let |closure
    ((proc (eval-expression rator env))
     (args (eval-rands rands env)))
    (if (procval? proc)
      → (apply-procedure proc args)
      [ (eopl:error 'eval-expression
        "Attempt to apply non-procedure ~s" proc))]))
```



## 1 Procedimientos

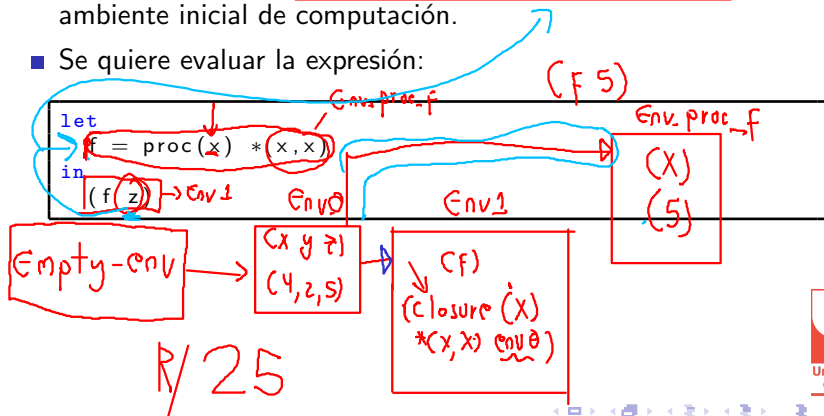
- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

# Ejemplos procedimientos

- Sea el ambiente  $env_0$  con símbolos ( $x$  y  $z$ ) y valores (4 2 5) el ambiente inicial de computación.
- Se quiere evaluar la expresión:



# Ejemplos procedimientos

- La expresión anterior corresponde a un `let` con la declaración de una variable `f` que es ligada a un procedimiento y con la aplicación de ese procedimiento como cuerpo del `let`.

# Ejemplos procedimientos

- La expresión anterior corresponde a un `let` con la declaración de una variable `f` que es ligada a un procedimiento y con la aplicación de ese procedimiento como cuerpo del `let`.
- Dada la semántica de las expresiones `let` se debe evaluar inicialmente la expresión `proc(x) *(x x)`.

# Ejemplos procedimientos

- La expresión anterior corresponde a un `let` con la declaración de una variable `f` que es ligada a un procedimiento y con la aplicación de ese procedimiento como cuerpo del `let`.
- Dada la semántica de las expresiones `let` se debe evaluar inicialmente la expresión `proc(x) *(x x)`.
- La expresión de creación de procedimiento `proc(x) *(x x)` es evaluada y el resultado es la creación de la clausura `closure(' (x) *(x x) env0 )`.

# Ejemplos procedimientos

- La expresión anterior corresponde a un `let` con la declaración de una variable `f` que es ligada a un procedimiento y con la aplicación de ese procedimiento como cuerpo del `let`.
- Dada la semántica de las expresiones `let` se debe evaluar inicialmente la expresión `proc(x) *(x x)`.
- La expresión de creación de procedimiento `proc(x) *(x x)` es evaluada y el resultado es la creación de la clausura `closure(' (x) *(x x) env0)`.
- Posteriormente se crea un nuevo ambiente `env1` que extiende el ambiente `env0` con la variable `f` y el valor `closure(' (x) *(x x) env0)`.



# Ejemplos procedimientos

- Luego, debe evaluarse el cuerpo del `let` (la expresión  $(f\ z)$ ) en el ambiente  $env_1$ .

# Ejemplos procedimientos

- Luego, debe evaluarse el cuerpo del `let` (la expresión  $(f\ z)$ ) en el ambiente  $env_1$ .
- Como esta expresión corresponde a una expresión de aplicación de procedimiento, se debe evaluar la subexpresión  $f$  para determinar cual procedimiento se debe ejecutar y la subexpresión  $z$  para saber con cuales argumentos.

# Ejemplos procedimientos

- Luego, debe evaluarse el cuerpo del `let` (la expresión  $(f\ z)$ ) en el ambiente  $env_1$ .
- Como esta expresión corresponde a una expresión de aplicación de procedimiento, se debe evaluar la subexpresión  $f$  para determinar cual procedimiento se debe ejecutar y la subexpresión  $z$  para saber con cuales argumentos.
- Al evaluar estas subexpresiones en el ambiente  $env_1$  se obtienen los valores  $closure(' (x) \ *(x\ x)\ env_0)$  y 5.

# Ejemplos procedimientos

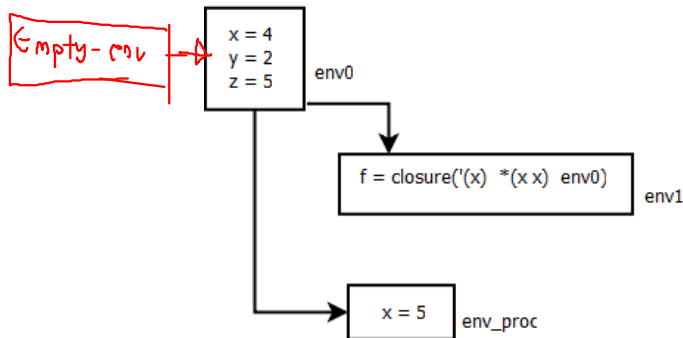
- Dada la semántica de la aplicación de procedimientos, se debe evaluar el cuerpo del procedimiento que corresponde a la expresión  $*(x\ x)$  en un ambiente nuevo que extiende el ambiente interno del procedimiento ( $env_0$ ) con la variable  $x$  y el valor de 5.

# Ejemplos procedimientos

- Dada la semántica de la aplicación de procedimientos, se debe evaluar el cuerpo del procedimiento que corresponde a la expresión  $*(x\ x)$  en un ambiente nuevo que extiende el ambiente interno del procedimiento ( $env_0$ ) con la variable  $x$  y el valor de 5.
- Finalmente, el valor de esta expresión y de la expresión original es 25.

# Ejemplos procedimientos

Los ambientes creados en la evaluación de la expresión anterior se pueden visualizar así:



# Ejemplos procedimientos

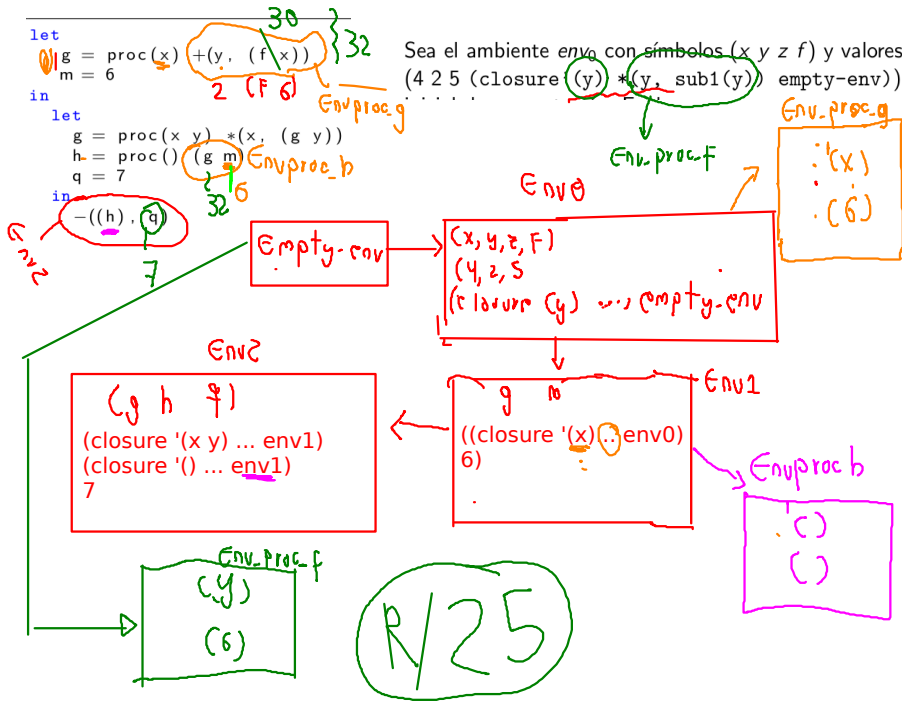
Sea el ambiente  $env_0$  con símbolos  $(x\ y\ z\ f)$  y valores  $(4\ 2\ 5\ (closure'(y)\ *(y, sub1(y))\ empty-env))$  el ambiente inicial de computación. Evaluar:

```
let
  g = proc(x) +(y, (f x))
  m = 6
in
  let
    g = proc(x y) *(x, (g y))
    h = proc() (g m)
    q = 7
  in
    -((h), q)
```

```

let
  g = proc(x) +(y, (f x))
  m = 6
in
  let
    g = proc(x y) *(x, (g y))
    h = proc() (g m)
    q = 7
  in
    -((h), q)
  
```

Sea el ambiente  $env_0$  con símbolos  $(x\ y\ z\ f)$  y valores  $(4\ 2\ 5\ (\text{closure } (y) * (y, \text{sub1}(y))\ \text{empty-env}))$ .





# Ejemplos procedimientos

- Dada la semántica de las expresiones `let` se debe evaluar inicialmente la parte derecha de las declaraciones que corresponden a las expresiones `proc(x) +(y, (f x))` y `6`.

# Ejemplos procedimientos

- Dada la semántica de las expresiones `let` se debe evaluar inicialmente la parte derecha de las declaraciones que corresponden a las expresiones `proc(x) +(y, (f x))` y `6`.
- La expresión de creación de procedimiento `proc(x) +(y, f(x))` es evaluada y el resultado es la creación de la clausura `(closure '(x) +(y, (f x)) env0)`.

# Ejemplos procedimientos

- Posteriormente se crea un nuevo ambiente  $env_1$  que extiende el ambiente  $env_0$  con las variables  $g$  y  $m$  y los valores  $(closure\ ' (x) +(y, (f\ x))\ env_0)$  y  $6$  respectivamente.

# Ejemplos procedimientos

- Posteriormente se crea un nuevo ambiente  $env_1$  que extiende el ambiente  $env_0$  con las variables  $g$  y  $m$  y los valores  $(\text{closure } 'x) + (y, (f \ x))$  en  $env_0$  y 6 respectivamente.
- Luego debe evaluarse la expresión

```
let
  g = proc(x y) *(x, (g y))
  h = proc() (g m)
  q = 7
in
  -((h) q)
```

en el ambiente  $env_1$ .

# Ejemplos procedimientos

- Nuevamente se evalúan las expresiones de la parte derecha de las declaraciones del `let`, pero esta vez en el ambiente  $env_1$ .

# Ejemplos procedimientos

- Nuevamente se evalúan las expresiones de la parte derecha de las declaraciones del `let`, pero esta vez en el ambiente  $env_1$ .
- La expresión de creación de procedimiento `proc(x) *(x, (g y))` es evaluada y el resultado es la creación de la clausura `(closure '(x) *(x, (g y)) env1)`.

# Ejemplos procedimientos

- Nuevamente se evalúan las expresiones de la parte derecha de las declaraciones del `let`, pero esta vez en el ambiente  $env_1$ .
- La expresión de creación de procedimiento `proc(x) *(x, (g y))` es evaluada y el resultado es la creación de la clausura `(closure '(x) *(x, (g y)) env1)`.
- La expresión de creación de procedimiento `proc() (g m)` es evaluada y el resultado es la creación de la clausura `(closure '() (g m) env1)`.

# Ejemplos procedimientos

- Luego se crea un nuevo ambiente  $env_2$  que extiende el ambiente  $env_1$  con las variables  $g$ ,  $h$  y  $q$  y los valores  $(\text{closure } ' (x) * (x, g(y)) env_1)$ ,  $(\text{closure } ' () (g m) env_1)$  y  $7$  respectivamente.



# Ejemplos procedimientos

- Luego se crea un nuevo ambiente  $env_2$  que extiende el ambiente  $env_1$  con las variables  $g$ ,  $h$  y  $q$  y los valores  $(\text{closure } ' (x) * (x, g(y)) env_1)$ ,  $(\text{closure } ' () (g m) env_1)$  y  $7$  respectivamente.
- Posteriormente debe evaluarse la expresión  $-((h) q)$  en el ambiente  $env_2$ .

# Ejemplos procedimientos

- Luego se crea un nuevo ambiente  $env_2$  que extiende el ambiente  $env_1$  con las variables  $g$ ,  $h$  y  $q$  y los valores  $(\text{closure } ' (x) * (x, g(y)) env_1)$ ,  $(\text{closure } ' () (g m) env_1)$  y  $7$  respectivamente.
- Posteriormente debe evaluarse la expresión  $-((h) q)$  en el ambiente  $env_2$ .
- Esta expresión corresponde a una expresión de aplicación de primitiva, por esta razón se deben evaluar los argumentos en el ambiente actual ( $env_2$ ).

# Ejemplos procedimientos

- El valor de la expresión  $q$  en el ambiente  $env_2$  es 7.

# Ejemplos procedimientos

- El valor de la expresión  $q$  en el ambiente  $env_2$  es 7.
- La expresión  $(h)$  corresponde a una expresión de aplicación de procedimiento, en este caso sin argumentos.

# Ejemplos procedimientos

- El valor de la expresión  $q$  en el ambiente  $env_2$  es 7.
- La expresión  $(h)$  corresponde a una expresión de aplicación de procedimiento, en este caso sin argumentos.
- Se debe evaluar la subexpresión  $h$  para determinar cual procedimiento se debe ejecutar.

# Ejemplos procedimientos

- El valor de la expresión  $q$  en el ambiente  $env_2$  es 7.
- La expresión  $(h)$  corresponde a una expresión de aplicación de procedimiento, en este caso sin argumentos.
- Se debe evaluar la subexpresión  $h$  para determinar cual procedimiento se debe ejecutar.
- Al evaluar esta subexpresión en el ambiente  $env_2$  se obtiene el valor  $(closure\ '() (g\ m)\ env_1)$ .

# Ejemplos procedimientos

- Dada la semántica de la aplicación de procedimientos, se debe evaluar el cuerpo del procedimiento que corresponde a la expresión  $(g \ m)$  en un ambiente nuevo  $env\_proc_h$  que extiende el ambiente interno del procedimiento ( $env_1$ ) sin añadir ninguna variable.

# Ejemplos procedimientos

- Dada la semántica de la aplicación de procedimientos, se debe evaluar el cuerpo del procedimiento que corresponde a la expresión  $(g\ m)$  en un ambiente nuevo  $env\_proc_h$  que extiende el ambiente interno del procedimiento  $(env_1)$  sin añadir ninguna variable.
- Para evaluar la expresión  $(g\ m)$ , se deben evaluar las subexpresiones  $g$  y  $m$  en el ambiente  $env\_proc_h$ .
- Los valores de estas expresiones son los valores  $(closure\ ' (x) + (y, (f\ x))\ env_0)$  y 6.



# Ejemplos procedimientos

- Nuevamente, debido a la semántica de la aplicación de procedimientos, se debe evaluar la expresión  $+(y, (f\ x))$  en un ambiente nuevo  $env\_proc_g$  que extiende el ambiente  $env_0$  con la variables  $x$  y el valor 6.

# Ejemplos procedimientos

- Nuevamente, debido a la semántica de la aplicación de procedimientos, se debe evaluar la expresión  $+(y, (f\ x))$  en un ambiente nuevo  $env\_proc_g$  que extiende el ambiente  $env_0$  con la variables  $x$  y el valor 6.
- La expresión  $+(y, (f\ x))$  corresponde a una expresión de aplicación de una primitiva, por lo que se deben evaluar cada uno de sus argumentos en el ambiente  $env\_proc_g$ .
- El valor de la expresión  $y$  en este ambiente es 2.

# Ejemplos procedimientos

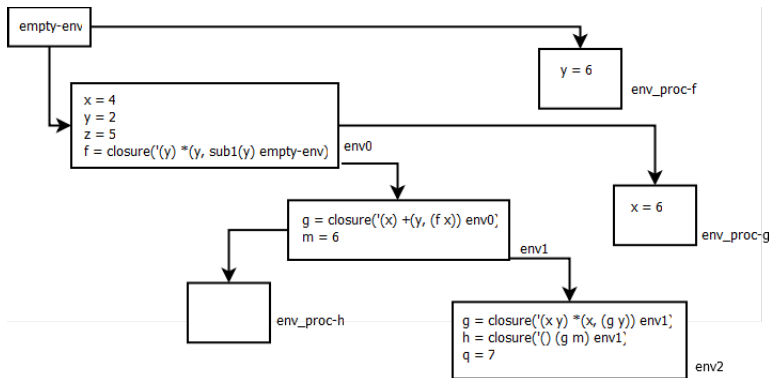
- Para evaluar la expresión  $(f\ x)$ , se deben evaluar las subexpresiones  $f$  y  $x$  en el ambiente  $env\_proc_g$ .
- Los valores de estas expresiones son los valores (closure '(y) \*(y, sub1(y)) empty-env) y 6.
- Posteriormente, se debe evaluar la expresión  $*(y, sub1(y))$  en un ambiente nuevo  $env\_proc_f$  que extiende el ambiente empty-env con la variable  $y$  y el valor 6.
- Luego, el valor de esta expresión y de la expresión  $(f\ x)$  es 30.

# Ejemplos procedimientos

- Luego el valor de la expresión  $+(y, (f \ x))$  es 32, dado que  $y$  vale 2 y  $(f \ x)$  vale 30.
- Finalmente, dado la evaluación en cadena de las expresiones el valor de la expresión original es 25.

# Ejemplos procedimientos

Los ambientes creados en la evaluación de la expresión anterior se pueden visualizar así:



# Ejemplos procedimientos

- Para evaluar una expresión, se puede hacer uso de una especificación que utiliza ecuaciones y las reglas definidas para cada tipo de expresión.
- $\langle\langle exp \rangle\rangle$  denota el árbol de sintaxis abstracta  $a$  asociado a la expresión  $exp$ .
- Se escribe  $[x = a, y = b]env$  en lugar de  $(\text{extend-env } ' (x\ y) ' (a\ b)\ env)$ .
- Evaluar la expresión del ejemplo anterior.

# Ejemplos procedimientos

```
(eval-expression
  <<let
    g = proc(x) +(y, (f x))
    m = 6
  in
    let
      g = proc(x y) *(x, (g y))
      h = proc() (g m)
      q = 7
    in
      -((h), q)>>
  env0)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (eval-expression
   <<let
     g = proc(x y) *(x, (g y))
     h = proc() (g m)
     q = 7
   in
     -((h), q)>>
   [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m=6]env0)
```



# Ejemplos procedimientos

```
= (eval-expression
   <<let
     g = proc(x y) *(x, (g y))
     h = proc() (g m)
     q = 7
   in
     -((h), q)>>
   [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m=6]env0)
```

```
= (eval-expression
   <<-((h), q)>>
   [g=(closure '(x y) << *(x, (g,y)) >>
     [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >>
       env0), m=6]env0),
   h=(closure '() << (g m) >>
     [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >>
       env0), m=6]env0),
   q=7] [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m=6]
   env0)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-
  (eval-expression
    <<(h)>>
    [g=(closure '(x y) << *(x, (g,y)) >>
      [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0),
        m=6]env0),
    h=(closure '() << (g m) >>
      [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0),
        m=6]env0),
    q=7] [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m
      =6]env0)
  (eval-expression
    <<q>>
    [g=(closure '(x y) << *(x, (g,y)) >>
      [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m
        =6]env0),
    h=(closure '() << (g m) >>
      [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m
        =6]env0),
    q=7] [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m
      =6]env0))
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-
  (apply-procedure
    (closure '() << (g m) >>
      [g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m=6]
      env0)
    '())
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-  
  (eval-expression  
    << (g m) >>  
    [[g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m=6]  
      env0)  
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-
  (eval-expression
    << (g m) >>
    [[g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m=6]
      env0)
  7)
```

```
= (-
  (apply-procedure
    (closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0)
    (eval-rands
      '(<< m >>)
      [[g=(closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0), m
        =6]env0))
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-  
  (apply-procedure  
    (closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0)  
    '(6))  
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-  
  (apply-procedure  
    (closure '(x) << +(y, (f x)) >> env0)  
    '(6))  
  7)
```

```
= (-  
  (eval-expression  
    << +(y, (f x)) >>  
    [x=6]env0)  
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-
    (+
      2
      (apply-procedure
        (closure '(y) *(y, sub1(y)) empty-env)
        (eval-rands '(<< x >>)
                     [x=6]env0)
      7)
  )
```



# Ejemplos procedimientos

```
= (-  
  (+  
    2  
    (apply-procedure  
      (closure '(y) *(y, sub1(y)) empty-env)  
      '(6))  
  )  
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-  
  (+  
    2  
    (apply-procedure  
      (closure '(y) *(y, sub1(y)) empty-env)  
      '(6))  
  )  
7)
```

```
= (-  
  (+  
    2  
    (eval-expression  
      << *(y, sub1(y)) >>  
      [y=6]empty-env)  
  )  
7)
```

# Ejemplos procedimientos

```
= (-  
  (+  
    2  
    (* 6 5))  
  7)
```

# Ejemplos procedimientos

$$= (-$$
$$(+$$
$$2$$
$$(* 6 5))$$
$$7)$$

$$= (-$$
$$(+ 2 30)$$
$$7)$$

# Ejemplos procedimientos

$$= (-$$
$$(+$$
$$2$$
$$(* 6 5))$$
$$7)$$

$$= (-$$
$$(+ 2 30)$$
$$7)$$

$$= (- 32 7)$$

# Ejemplos procedimientos

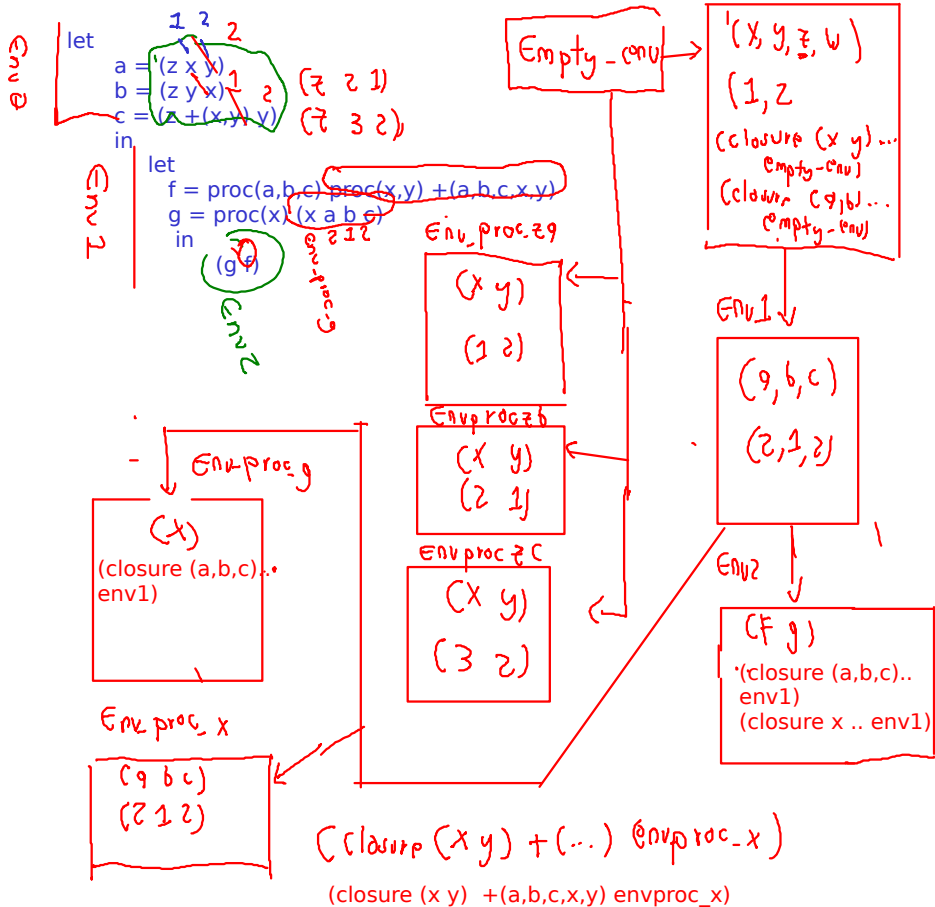
$$= (-$$
$$(+$$
$$^2$$
$$(* 6 5))$$
$$7)$$

$$= (-$$
$$(+ 2 30)$$
$$7)$$

$$= (- 32 7)$$

$$= 25$$

env0 '(x y z w) (1 2 (closure (x y) if x then y else +(x,y) empty-env)  
(closure (a b) +(a, \*(a,b)) empty-env)



Dado el ambiente ambiente inicial *env0* con identificadores (a b c g) y valores (2 3 4 (closure'(x y z) +(x,\* (y,z)) empty-env))

Dado el ambiente ambiente inicial *env0* con los  
 cadores (a b c g) y valores (2 3 4 (closure'(  
 +(x,\*(y,z)) empty-env))

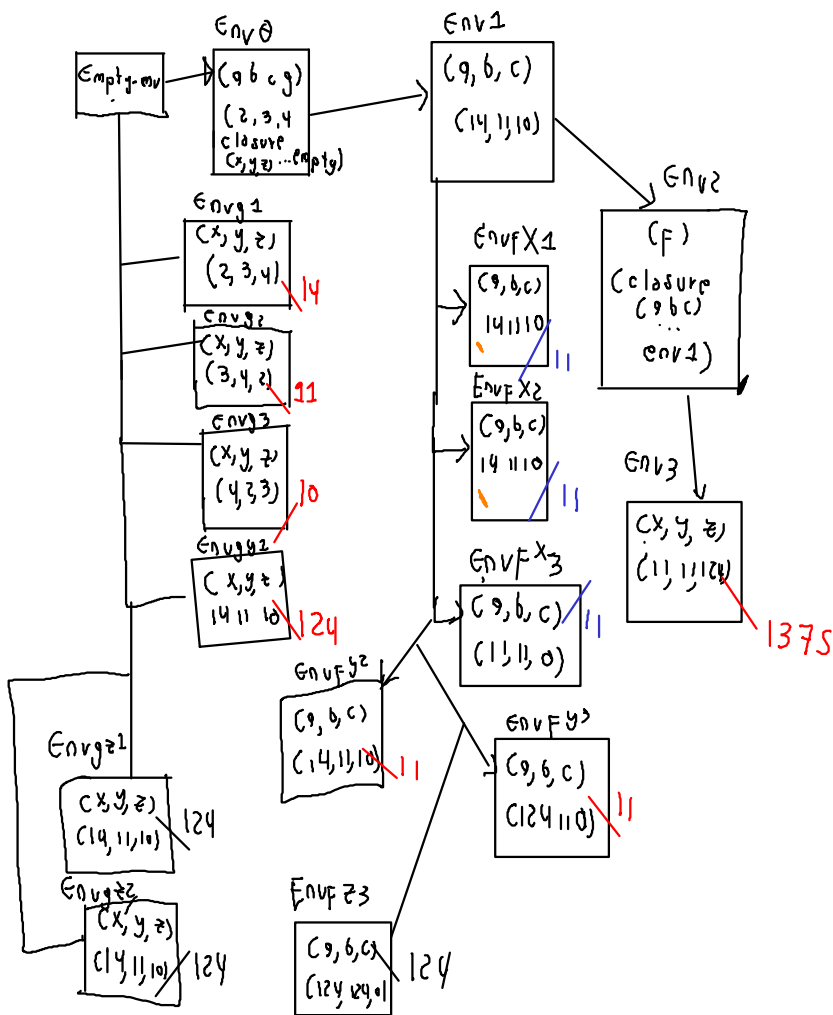
---

```

let
  a = (g a b c)
  b = (g b c a)
  c = (g c a b)
in
  let
    f = proc (a,b,c) if a then b else +(a,b)
  in
    let
      x = (f (f a b c) (f a b c) 0) → 11
      y = (f (g a b c) (f a b c) 0) → 11
      z = (f (g a b c) (g a b c) 0) → 12y
    in
      +(x,*(y,z))
  
```

1375





## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

# Procedimientos Recursivos

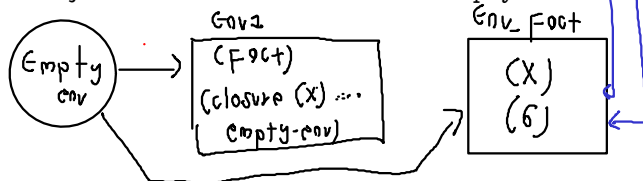
- Los procedimientos que pueden ser definidos en nuestro lenguaje hasta este punto, pueden tener invocaciones a otros procedimientos definidos en ambientes superiores a su propio ambiente.
- No obstante, estos procedimientos no pueden ser recursivos, esto es, no pueden invocarse a sí mismos en su definición.

# Procedimientos Recursivos

- Para ilustrar esto, evaluar la siguiente expresión:

```
let  
  fact = proc(x) if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1  
in  
  (fact 6)
```

Ejecutandose en el ambiente vacío empty-env.



# Procedimientos Recursivos

Tenemos

```
(eval-expression
  << let
      fact = proc(x) if x then *(x, (fact sub1(x)))
                  else 1
  in
    (fact 6) >>
  empty-env)
```

# Procedimientos Recursivos

Tenemos

```
(eval-expression
  << let
    fact = proc(x) if x then *(x, (fact sub1(x)))
              else 1
  in
    (fact 6) >>
  empty-env)
```

```
= (eval-expression
  << (fact 6) >>
  [fact=(closure '(x)
    << if x then *(x, (fact sub1(x)))
      else 1 >>
    empty-env)]
  empty-env)
```

# Procedimientos Recursivos

```
= (apply-procedure  
  (closure '(x)  
            << if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1 >>  
            empty-env)  
  '(6))
```



# Procedimientos Recursivos

```
= (apply-procedure  
   (closure '(x)  
             << if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1 >>  
             empty-env)  
   '(6))
```

```
= (eval-expression  
   << if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1 >>  
   [x =6]empty-env)
```

# Procedimientos Recursivos

```
= (if (eval-expression
      << x >>
      [x =6]empty-env)
  (eval-expression
    << *(x, (fact sub1(x))) >>
    [x =6]empty-env)
  (eval-expression
    << 1 >>
    [x =6]empty-env))
```

# Procedimientos Recursivos

```
= (eval-expression  
  << *(x, (fact sub1(x))) >>  
  [x =6]empty-env)
```

# Procedimientos Recursivos

```
= (eval-expression  
  << *(x, (fact sub1(x))) >>  
  [x =6]empty-env)
```

```
= * (  
  (eval-expression  
    << x >>  
    [x =6]empty-env)  
  (eval-expression  
    << (fact sub1(x)) >>  
    [x =6]empty-env))
```

# Procedimientos Recursivos

```
= * (  
    6  
    (eval-expression  
      << (fact sub1(x)) >>  
      [x =6]empty-env))
```

# Procedimientos Recursivos

```
= * (  
    6  
    (eval-expression  
      << (fact sub1(x)) >>  
      [x =6]empty-env))
```

- La expresión (fact sub1(x)) debe ser evaluada en el ambiente extendido con los argumentos del procedimiento.

# Procedimientos Recursivos

```
= * (  
  6  
  (eval-expression  
    << (fact sub1(x)) >>  
    [x =6]empty-env))
```

- La expresión `(fact sub1(x))` debe ser evaluada en el ambiente extendido con los argumentos del procedimiento.
- No obstante, en ese ambiente no se encuentra un procedimiento con el nombre `fact` (el mismo nombre de la función).
- Por esta razón, no es posible definir procedimientos que se invoquen a si mismos dado que el ambiente en el que se ejecutan no los contiene.

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos



# Procedimientos Recursivos

- Para añadir recursión a nuestro lenguaje, este será extendido con algunas características.
- El lenguaje consistirá de las expresiones especificadas anteriormente y de un nuevo tipo de expresión `letrec`.
- Esta expresión permitirá la creación de procedimientos recursivos.
- El tipo de dato ambiente será extendido para contemplar ambientes que faciliten la creación de procedimientos recursivos.

# Procedimientos Recursivos

Se añadirá la siguiente producción a la gramática:

$\langle \text{expresión} \rangle ::= \text{letrec}$   
     $\{ \langle \text{identificador} \rangle (\{ \langle \text{identificador} \rangle \}^{*(,)} = \langle \text{expresión} \rangle \}^*$   
     $\text{in } \langle \text{expresión} \rangle$   
     $\text{letrec-exp (proc-names idss bodies letrec-body)}$

# Procedimientos Recursivos

Se deben añadir las siguientes producciones a la especificación de la gramática:

```
(expression ("letrec"  
             (arbno identifier "(" (separated-list  
                                   identifier ",") ")"  
                                   "=" expression)  
             "in" expression)  
  letrec-exp)
```

# Procedimientos Recursivos

De esta manera se puedan crear programas como:

```
letrec
  fact(x) = if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1
in
  (fact 6)

letrec
  double(x) = if x then -((double sub1(x)), -2) else 0
in
  (double 4)
```

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

# Semántica de las expresiones letrec

- Para determinar el valor de una expresión letrec, es necesario crear un ambiente que extiende el ambiente original en el que se almacenen los nombres, parámetros y cuerpos de las declaraciones de procedimientos recursivos en la expresión.
- Posteriormente, se evalúa el cuerpo de la expresión en ese nuevo ambiente.

# Semántica de las expresiones letrec

El tipo de dato ambiente es modificado para admitir una nueva variante:

```
(define-datatype environment environment?
  (empty-env-record)
  (extended-env-record (syms (list-of symbol?))
                        (vals (list-of scheme-value?))
                        (env environment?))
  (recursively-extended-env-record
   (proc-names (list-of symbol?))
   (idss (list-of (list-of symbol?)))
   (bodies (list-of expression?))
   (env environment?)))
```

(F x y g)  
↓  
( ) (.) (.) (.)

# Semántica de las expresiones letrec

El comportamiento de `(apply-env e' name)` para la nueva variante del tipo ambiente es el siguiente:

Sea  $e' = (\text{extend-env-recursively proc-names idss bodies } e)$ , entonces

- 1 Si `name` es uno de los nombres en `proc-names`, se debe producir una clausura con los parámetros y cuerpo almacenados en  $e'$  para ese procedimiento. Así mismo esta clausura debe contener un ambiente en el cual `name` está ligado a este procedimiento. Este ambiente corresponde a  $e'$ .



# Semántica de las expresiones letrec

De esta manera  $(\text{apply-env } e' \text{ name}) = (\text{closure } \text{ids} \text{ body } e')$  donde ids y body corresponden a los parámetros y al cuerpo del procedimiento almacenados en  $e'$ .

- 2 En caso contrario,  $(\text{apply-env } e' \text{ name}) = (\text{apply-env } e \text{ name})$ .

# Semántica de las expresiones letrec

La definición del procedimiento apply-env es modificada de la siguiente manera:

```
(define apply-env
  (lambda (env sym)
    (cases environment env
      (empty-env-record ()
        (eopl:error 'empty-env "No binding for ~s" sym)
        )
      (extended-env-record (syms vals old-env)
        (let ((pos (list-find-position sym syms)))
          (if (number? pos)
              (list-ref vals pos)
              (apply-env old-env sym))))
      (recursively-extended-env-record (proc-names idss
                                              bodies old-env)
        (let ((pos (list-find-position sym proc-names)))
          (if (number? pos)
              (closure (list-ref idss pos)
                        (list-ref bodies pos)
                        env)
              (apply-env old-env sym))))))
```

# Semántica de las expresiones letrec

El comportamiento de la expresión de creación de procedimientos recursivos se obtiene agregando la siguiente clausula en el procedimiento eval-expression:

```
(letrec-exp (proc-names idss bodies letrec-body)
  (eval-expression letrec-body
    (extend-env-recursively
      proc-names idss bodies env)))
```

## 1 Procedimientos

- Sintaxis de los procedimientos
- Semántica de los procedimientos
- Ejemplos

## 2 Procedimientos Recursivos

- Introducción
- Sintaxis de los procedimientos recursivos
- Semántica de los procedimientos recursivos
- Ejemplos

# Ejemplos procedimientos recursivos

- Sea el ambiente  $env_0$  con símbolos ( $x$  y  $z$ ) y valores (4 2 5) el ambiente inicial de computación.
- Se quiere evaluar la expresión:

```
letrec
  fact(x) = if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1
in
  (fact 6)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

- Para determinar el valor de la expresión anterior, se debe crear un nuevo ambiente  $env_1$  (con la variante `recursively-extended-env-record`) que extiende el original con el nombre de procedimiento `fact`, el argumento `x` y el cuerpo `if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1`.

# Ejemplos procedimientos recursivos

- Para determinar el valor de la expresión anterior, se debe crear un nuevo ambiente  $env_1$  (con la variante `recursively-extended-env-record`) que extiende el original con el nombre de procedimiento `fact`, el argumento `x` y el cuerpo `if x then *(x, (fact sub1(x))) else 1`.
- Posteriormente se debe evaluar la expresión `(fact 6)` en el ambiente  $env_1$ . Para ello se deben evaluar las subexpresiones `fact` y `6`.

# Ejemplos procedimientos recursivos

- Dada la semántica de los ambientes como  $env_1$ , al evaluar la expresión `fact` se produce la clausura `(closure '(x) if x then +(x, (fact sub1(x))) else 1 env1)`.



# Ejemplos procedimientos recursivos

- Dada la semántica de los ambientes como  $env_1$ , al evaluar la expresión `fact` se produce la clausura (closure ' $x$ ) `if x then +(x, (fact sub1(x))) else 1`  $env_1$ ).
- Luego, se debe evaluar el cuerpo del procedimiento (la expresión `if x then +(x, (fact sub1(x))) else 1`) en un nuevo ambiente  $env\_fact_0$  que extiende a  $env_1$  con la variable  $x$  y el valor 6.

# Ejemplos procedimientos recursivos

- Dada la semántica de los ambientes como  $env_1$ , al evaluar la expresión `fact` se produce la clausura (closure ' $x$ ) if  $x$  then  $+(x, (fact\ sub1(x)))$  else 1  $env_1$ ).
- Luego, se debe evaluar el cuerpo del procedimiento (la expresión if  $x$  then  $+(x, (fact\ sub1(x)))$  else 1) en un nuevo ambiente  $env\_fact_0$  que extiende a  $env_1$  con la variable  $x$  y el valor 6.
- Dado que  $x = 6$ , se debe evaluar la expresión  $+(x, (fact\ sub1(x)))$  en el ambiente  $env\_fact_0$ .

# Ejemplos procedimientos recursivos

- El valor de la expresión  $x$  es 6.

# Ejemplos procedimientos recursivos

- El valor de la expresión  $x$  es 6.
- Nuevamente, al evaluar la expresión  $(\text{fact } 5)$ , se debe evaluar la subexpresión  $\text{fact}$ . Esta evaluación produce la clausura  $(\text{closure } '(x) \text{ if } x \text{ then } +(x, (\text{fact sub1}(x))) \text{ else } 1 \text{ env}_1)$ .

# Ejemplos procedimientos recursivos

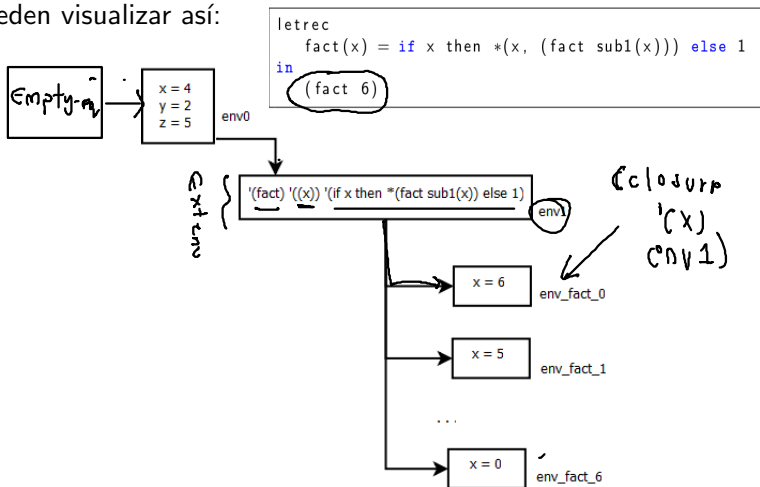
- El valor de la expresión  $x$  es 6.
- Nuevamente, al evaluar la expresión  $(\text{fact } 5)$ , se debe evaluar la subexpresión  $\text{fact}$ . Esta evaluación produce la clausura  $(\text{closure } '(x) \text{ if } x \text{ then } +(x, (\text{fact sub1}(x))) \text{ else } 1 \text{ env}_1)$ .
- Posteriormente se evalúa el cuerpo de esta clausura de la misma forma en que se hizo anteriormente en un nuevo ambiente  $\text{env\_fact}_1$  que extiende a  $\text{env}_1$  con la variable  $x$  y el valor 5.

# Ejemplos procedimientos recursivos

- El valor de la expresión  $x$  es 6.
- Nuevamente, al evaluar la expresión  $(\text{fact } 5)$ , se debe evaluar la subexpresión  $\text{fact}$ . Esta evaluación produce la clausura  $(\text{closure } '(x) \text{ if } x \text{ then } +(x, (\text{fact sub1}(x))) \text{ else } 1 \text{ env}_1)$ .
- Posteriormente se evalúa el cuerpo de esta clausura de la misma forma en que se hizo anteriormente en un nuevo ambiente  $\text{env\_fact}_1$  que extiende a  $\text{env}_1$  con la variable  $x$  y el valor 5.
- En algún momento, al evaluar el cuerpo del procedimiento (la expresión  $\text{if } x \text{ then } +(x, (\text{fact sub1}(x))) \text{ else } 1$ ), se evalúa la expresión 1 y se llega al final del cálculo obteniendo el valor 720.

# Ejemplos procedimientos recursivos

Los ambientes creados en la evaluación de la expresión anterior se pueden visualizar así:



# Ejemplos procedimientos recursivos

- Sea el ambiente  $env_0$  con símbolos ( $x$  y  $z$ ) y valores (4 2 5) el ambiente inicial de computación.
- Se quiere evaluar la expresión:

```
letrec
  double(x) = if x then -((double sub1(x)), -2) else 0
in
  (double 3)
```



# Ejemplos procedimientos recursivos

Tenemos

```
(eval-expression
 <<letrec
   double(x) = if x then -((double sub1(x)), -2) else 0
 in
   (double 3) >>
 env0)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (eval-expression  
  << (double 3) >>  
  ['(double) '((x))  
   '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]  
  env0)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (eval-expression
   << (double 3) >>
   ['(double) '((x))
    '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
   env0)
```

```
= (apply-procedure
   (eval-expression
    << double >>
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
      else 0 >>) ]env0)
   (eval-expression
    << 3 >>
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
      else 0 >>) ]env0))
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (apply-procedure
  (closure '(x) << if x then -((double sub1(x)), -2)
    else 0 >>
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
       else 0 >>) ]env0))
3)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (apply-procedure
  (closure '(x) << if x then -((double sub1(x)), -2)
    else 0 >>
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
       else 0 >>) ]env0))
3)
```

```
= (eval-expression
  << if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>
  [x=3]
  ['(double) '((x))
   '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
     else 0 >>) ]env0)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (if
  (eval-expression
    << x >>
    [x=3]
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
      else 0 >>) ]env0)
  (eval-expression
    << -((double sub1(x)), -2) >>
    [x=3]
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
      else 0 >>) ]env0)
  (eval-expression
    << 0 >>
    [x=3]
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2)
      else 0 >>) ]env0))
```



# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (eval-expression
   << -((double sub1(x)), -2) >>
   [x=3]
   ['(double) '((x))
    '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
   env0)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (eval-expression
  << -((double sub1(x)), -2) >>
  [x=3]
  ['(double) '((x))
   '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
  env0)
```

```
= (-
  (eval-expression
    << (double sub1(x)) >>
    [x=3]
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
    env0)
  (eval-expression
    << -2 >>
    [x=3]
    ['(double) '((x))
     '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
    env0))
```



# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-  
  (eval-expression  
    << (double sub1(x)) >>  
    [x=3]  
    ['(double) '((x))  
    '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0)  
  -2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-
  (apply-procedure
    (eval-expression
      << double >>
      [x=3]
      ['(double) '((x))
        '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0
      )
    (eval-expression
      << sub1(x) >>
      [x=3]
      ['(double) '((x))
        '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0
      ))
  -2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-  
  (apply-procedure  
    (closure '(x) << if x then -((double sub1(x)), -2) else  
      0 >>  
      ['(double) '((x))  
      '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0  
    )  
    2)  
  -2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-
  (apply-procedure
    (closure '(x) << if x then -((double sub1(x)), -2) else
      0 >>
      ['(double) '((x))
      '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0
    )
  2)
-2)
```

```
= (-
  (eval-expression
    << if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>
    [x=2]
    ['(double) '((x))
    '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0)
-2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (- (if
  (eval-expression
    << x >>
    [x=2]
    ['(double) '((x))
    '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0)
  (eval-expression
    << -((double sub1(x)), -2) >>
    [x=2]
    ['(double) '((x))
    '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0)
  (eval-expression
    << 0 >>
    [x=2]
    ['(double) '((x))
    '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0)
  )
-2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-  
  (eval-expression  
    << -((double sub1(x)), -2) >>  
    [x=2]  
    ['(double) '((x))  
    '(<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0)  
  -2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-  
  (-  
    (eval-expression  
      << (double sub1(x)) >>  
      [x=2]  
      ['(double) '((x))  
      '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0  
    )  
    (eval-expression  
      << -2 >>  
      [x=2]  
      ['(double) '((x))  
      '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]env0  
    )  
  -2)
```

# Ejemplos procedimientos recursivos

```
= (-
  (-
    (apply-procedure
      (eval-expression
        << double >>
        [x=2]
        ['(double) '((x))
        '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
        env0)
      (eval-expression
        << sub1(x) >>
        [x=2]
        ['(double) '((x))
        '((<< if x then -((double sub1(x)), -2) else 0 >>) ]
        env0))
    -2)
  -2)
```



# Ejemplos procedimientos recursivos

$$\begin{aligned} & \dots \\ = & (- \\ & (- \\ & \quad (- \ 0 \ -2) \\ & \quad \quad -2) \\ & \quad \quad \quad -2) \end{aligned}$$

# Ejemplos procedimientos recursivos

$$\begin{aligned} & \dots \\ = & (- \\ & (- \\ & \quad (- \ 0 \ -2) \\ & \quad \quad -2) \\ & \quad \quad -2) \end{aligned}$$

$$= (- \ (- \ 2 \ -2) \\ \quad \quad -2)$$

# Ejemplos procedimientos recursivos

$$\begin{aligned} & \dots \\ = & (- \\ & (- \\ & \quad (- \ 0 \ -2) \\ & \quad \quad -2) \\ & \quad \quad -2) \end{aligned}$$

$$= (- \ (- \ 2 \ -2) \\ \quad \quad -2)$$

$$= (- \ 4 \ -2)$$

# Ejemplos procedimientos recursivos

$$\begin{aligned} & \dots \\ = & (- \\ & (- \\ & \quad (- \ 0 \ -2) \\ & \quad \quad -2) \\ & \quad \quad -2) \end{aligned}$$

$$= (- \ (- \ 2 \ -2) \\ \quad \quad -2)$$

$$= (- \ 4 \ -2)$$

$$= 6$$

let

x = 6

y = 7

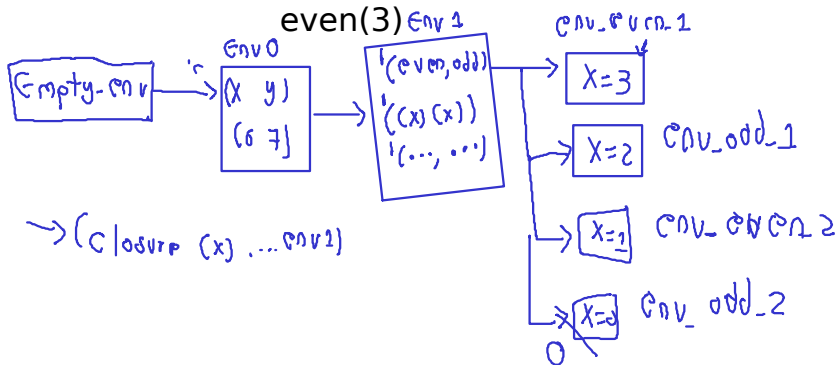
letrec

even(x) = if x then (odd -(x,1)) else 1

odd(x) = if x then (even -(x,1)) else 0

in

even(3)



## Resumen

### 1) Procedimientos normales

#### a) Declaración del procedimiento

`f = proc( ... ) ...`

¿Que genera? -> Una clausura que almacena el ids, el cuerpo y el AMBIENTE donde fue creado

#### b) Evaluación

Evalua el cuerpo de la función en un AMBIENTE EXTENDIDO que contiene los id, los valores que se enviaron en el llamado y existiendo del ambiente que está almacenado en la clausura

## Procedimientos recursivos

Cuando tengo un letrec

- Se va generar un ambiente extendido recursivo (extiende normalmente del anterior)

¿Que almacena?

- a) Nombres procedimientos
- b) Sus argumentos de entrada
- c) Sus cuerpos

El cuerpo del letrec es evaluado así,

Si invocamos un procedimiento se busca en los nombres y si lo encuentra, genera una CLAUSURA que contiene el ambiente extendido recursivo y evalúa igual que en procedimiento.

ambiente inicial (x, y, z, g) '(2 5 10 closure (x,y) +(x,\*(y,x))  
empty-env

```
let
  a = g(z,y)      901
  b = g(y,x)      902
  c = +(x,g(x,y))
in
  letrec
    g(x,y) = if x then +(y, g(sub1(x),y)) else 2
    f(x,y) = if y then +(x, f(x,sub1(y))) else 3
  in
    let
      x = +(g(a,b), f(a,b))  903
    in +(x,y,z)
      1845 5 10
```



Env3

(x, y)  
(2, 5)

Empty-env

Env0

(x, y, e, g)  
(2, 5, 10  
closure '(x y)  
+(x, +(y, x))  
empty-env)

Env1

(9, 6, c)  
(60, 15, 14)

Env2

(x, y)  
(5, 2)

Env1

(x, y)  
(10, 5)

Env3

(x)  
(1805)

Env2

(g, F) (x, y)  
(x, y)  
(if ...; if ...)

g(9, 6)

g(60, 15)

F(60, 15)

1820

$\rightarrow$  (x, y) (60, 15) EnvF1  
 $\rightarrow$  (x, y) (60, 14) EnvF2  
 $\vdots$   
 $\rightarrow$  (x, y) (60, 0) EnvF16

$$+(x, +(x \dots +(x, 3)))$$

$$\underbrace{60 + 60 + 60 + 3}_{15} \quad \underline{\underline{903}}$$

$\rightarrow$  (x, y) (60, 15) EnvF2  
 $\rightarrow$  (x, y) (59, 15) EnvF2  
 $\vdots$   
 $\rightarrow$  (x, y) (0, 15) EnvF61

$$+(15 \dots + (15, 2))$$

$$60 \times 15 + 2 \quad \underline{\underline{902}}$$

# Preguntas

?

# Próxima sesión

- Semántica de la asignación de variables.