Complejidad y optimización

Reducción 3SAT a VertexCover

Facultad de Ingeniería. Universidad del Valle

Mayo 2019

Contenido

SAT → 3SAT
NPC

3SAT → VC
NPC

1 El problema del Vertex Cover

2 Demostración que Vertex Cover es NPC

Vertex Cover (VC)

Definición

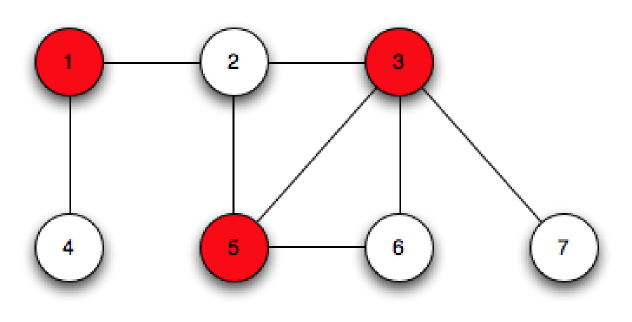
Una instancia es un grafo $G = (V, E)$ y un entero $k \leq |V|$

Pregunta

¿Existe un subconjunto de al menos k vértices, donde cada arista $e \in E$ tiene al menos uno de los vértices en el subconjunto?

Vertex Cover (VC)

Ejemplo



Ejemplo de vertex cover con $K = 3$

Vertex Cover (VC)

Demostración que es NP

Si tenemos una instancia $G = (V, E)$ con un k dado, debemos encontrar todos los conjuntos de vértices de tamaño mayor o igual que k. La complejidad de esta enumeración es $O(2^{|v|})$

$V = \{V_1, V_2, \ldots V_n\}$ ← K o mayor

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \{V_1\}\ \{V_2\}\ \ldots\ \{V_n\} \\ 2)\ \{V_1, V_2\}\ \{V_1, V_3\}\ \ldots\ \{V_{n-1}, V_n\} \\ \\ n)\ \{V_1, V_2\ \ldots\ V_n\} \end{array}\right\} 2^n$$

K

$O(2^n)$

NITND

$$K = \{\overbrace{V_i, V_j, \dots V_p}^{k}\}$$

$$\{V_k, V_m, V_q\}$$

$$\underbrace{\underline{n}\ \underline{n-1}\ \underline{n-2}\ \underline{\ \ }\ \underline{n-k}}_{k}$$

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Contenido

¿VC es NPC?

Demostración.

Postulado Vamos a demostrar que Vertex Cover (**VC**) es un problema NPC a partir de 3SAT que demostramos anteriormente es un NPC □

Importante

$$3 - SAT \leq_p VC$$

¿VC es NPC?

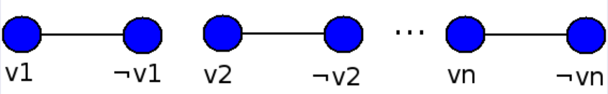
Procedimiento reducción

Tomando una instancia 3-SAT con n variables y c clausulas, vamos a construir un grafo con $2n + 3c$ vértices

¿VC es NPC?

Procedimiento reducción

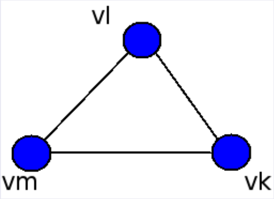
Paso 1: Para cada variable v_i se crea dos vértices conectados por una arista. Un vértice es v_i y el otro es $\neg v_i$.



¿VC es NPC?

Procedimiento reducción

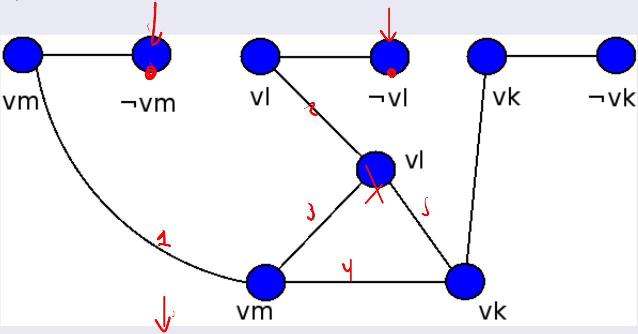
Paso 2: Tomamos cada clausula $c_i = \{v_k, v_l.v_m\}$. Creamos 3 vértices y los conectamos entre sí.



¿VC es NPC?

Procedimiento reducción

Paso 3: Finalmente, conectamos los vértices que creamos en los pasos 1 y 2. Conectamos los vértices que sean iguales. (Clausula y variables)



Tomamos $K = N + 2C$. Se realiza un cambio adicional, el vertex cover debe tener exactamente k vértices en la reducción.

3-SAT $\begin{cases} n & \text{variables} \\ c & \text{cláusulas} \end{cases}$

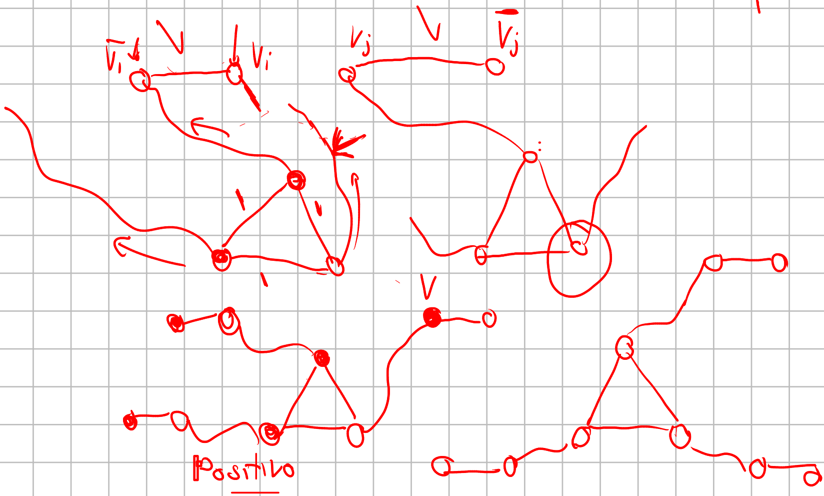
$v_i \quad \overline{v_i}$

1) $\overline{2}n + 3c = V$

2) ¿Conector? $e = n + 2c$

¿Se cumple la dualidad? V en SAT es V en VC
F en SAT es F en VC

$V = \{V_1, \ldots V_n\}$ $\quad C = \{V_i, V_j, V_k\} \ldots\ldots$ $\quad K = \underbrace{2C + n}$



¿Reducción se realiza en tiempo polinomial?

Si un 3-SAT tiene n variables y c clausulas la reducción se realiza en tiempo $2n + 3c$, lo que es claramente polinomial.

Demostración reducción

Para probar que la reducción es correcta se debe evaluar que una **respuesta positiva** en 3-SAT debe producir una **respuesta positiva** en VC y que una **respuesta negativa** en 3-SAT debe producir una **respuesta negativa** en VC.

¿VC es NPC?

Instancias positivas en 3-SAT son instancias positivas en VC

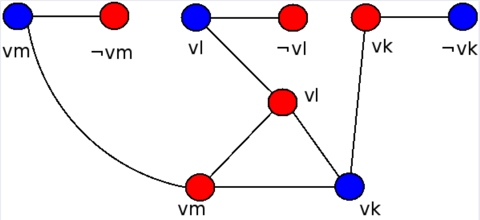
Una instancia positiva en SAT implica que existe un cubrimiento de vértices de tamaño $k = n + 2c$, es decir:

- Se debe seleccionar un vértice de la arista de v_i y $\neg v_i$
- Se deben seleccionar dos vértices del triangulo que genera cada clausula. No se puede selecciona uno ya que el triangulo no podrá ser cubierto.

¿VC es NPC?

Instancias positivas en 3-SAT son instancias positivas en VC

Debe tomar en cuenta que para que una clausula sea satisfactible, al menos una de las variables dentro de la clausula es verdadera.



En rojo los vértices seleccionados, suponemos que únicamente $v_k = V$. En la siguiente imagen se ve que se deben elegir los vértices dentro de la clausula que están conectados con vértices que son falsos en el SAT.

¿VC es NPC?

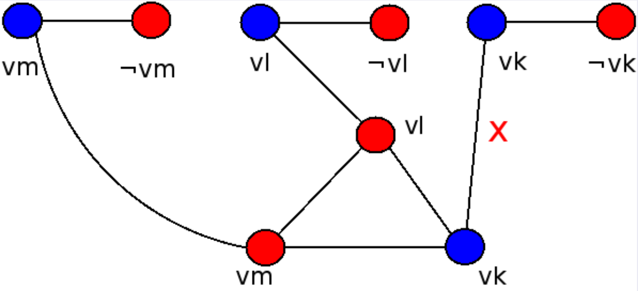
Instancias negativas en 3-SAT son negativas positivas en VC

Para este caso se debe tener en cuenta:

- Para que 3-SAT no pueda ser satisfactible al menos una de las clausulas debe ser falsa
- Para que esto suceda las 3 variables dentro de la clausulas tienen que ser falsas
- A continuación va observar que no es posible asignar los dos vértices dentro del triangulo que representa la cláusula de tal forma todas las aristas estén cubiertas.

¿VC es NPC?

Instancias negativas en 3-SAT son negativas positivas en VC



¿VC es NPC?

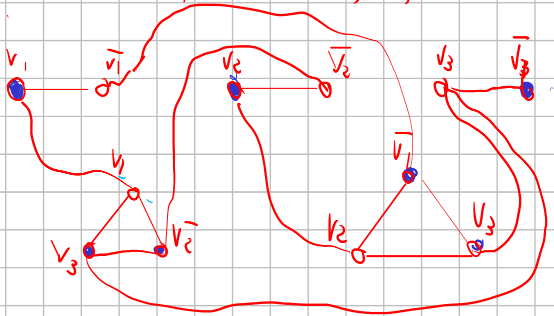
Ejemplo

Realicemos la reducción la instancia 3-SAT $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ $C = \{\{v_1, \neg v_2, v_3\}\{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$ a VC

- Una solución que satisface 3-SAT es $v_1 = V, v_2 = V, v_3 = F$
- Una solución que no satisface 3-SAT es $v_1 = F, v_2 = V, v_3 = F$

Universidad del Valle

$\{v_1, \bar{v}_2, v_3\} \{\bar{v}_1, v_2, v_3\}$

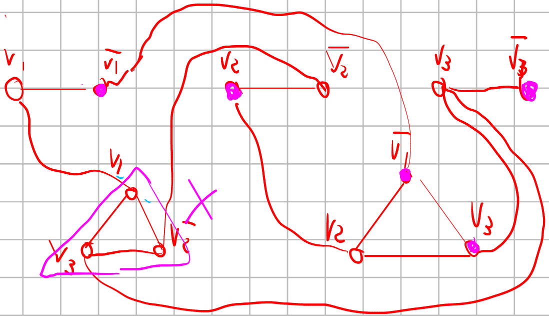


$V_1 = V$

$V_2 = V$

$V_3 = F$

$K = 2c + n$



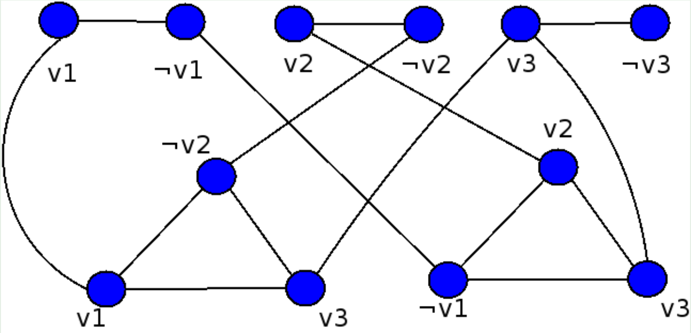
$V_1 = F$

$V_2 = V$

$V_3 = F$

¿VC es NPC?

Realizando la reducción

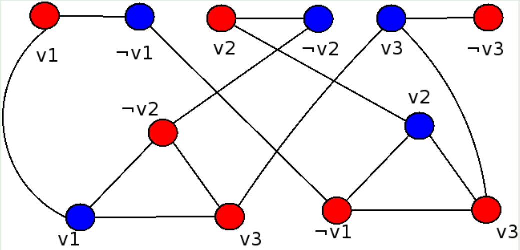


¿Si SAT se satisface hay VC? ¿Si SAT no se satisface no hay VC?

¿VC es NPC?

Instancias positivas de SAT

Una solución que satisface 3-SAT es $v_1 = V, v_2 = V, v_3 = F$



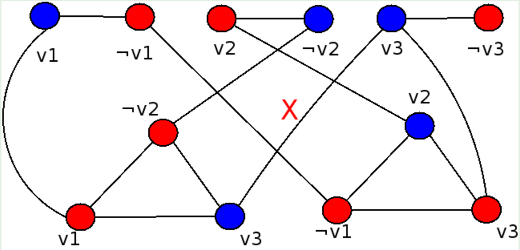
Como se ve se puede cubrir el grafo con $k = 3 + 2(2) = 7$ vértices seleccionados.

Universidad del Valle

¿VC es NPC?

Instancias negativas de SAT

Una solución que no satisface 3-SAT es $v_1 = F, v_2 = V, v_3 = F$



Como se ve NO es posible asignar los vértices de la primera clausula de tal forma se seleccionen todas las aristas.

¿VC es NPC?

Ejercicio

Realice la reducción de la siguiente instancia de 3-SAT a VC

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$C = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_1, v_2, v_4\}\}$$

Preguntas