

Matemáticas Discretas II

Oscar Bedoya

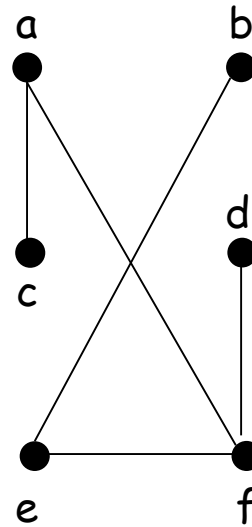
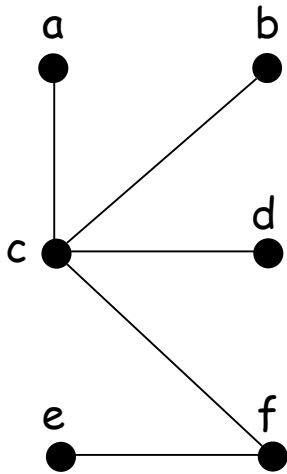
`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- Árboles
- Aplicaciones de los árboles
- Recorridos de los árboles
- Algoritmo de Prim
- Algoritmo de Kruskal

Árboles

Árboles

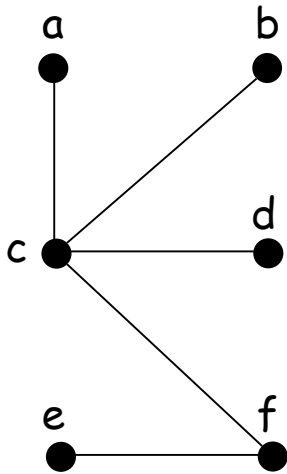
Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



Árboles

Árboles

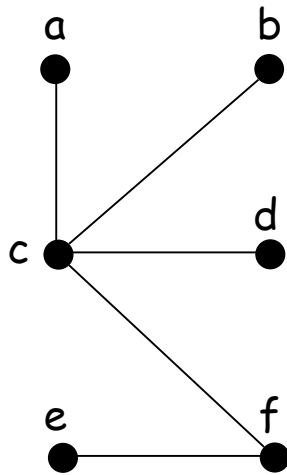
Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



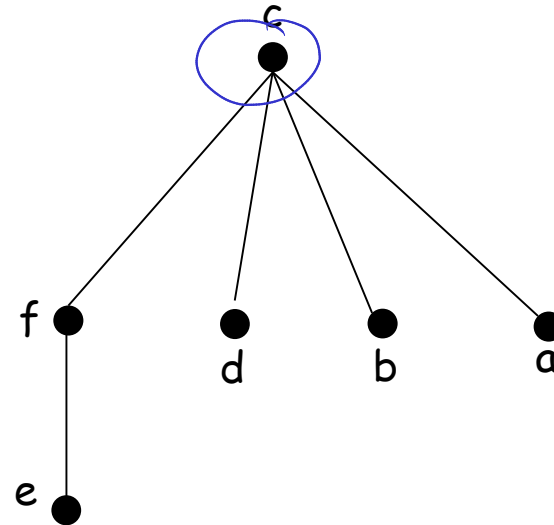
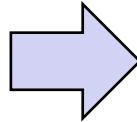
Árboles

Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos

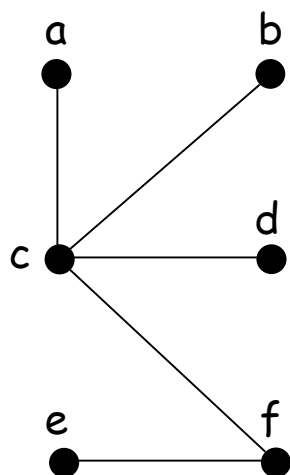


Árbol

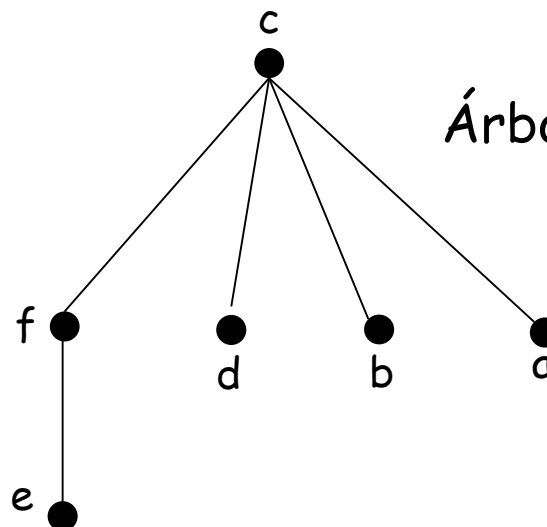
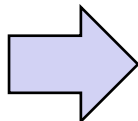


Árbol con raíz en c

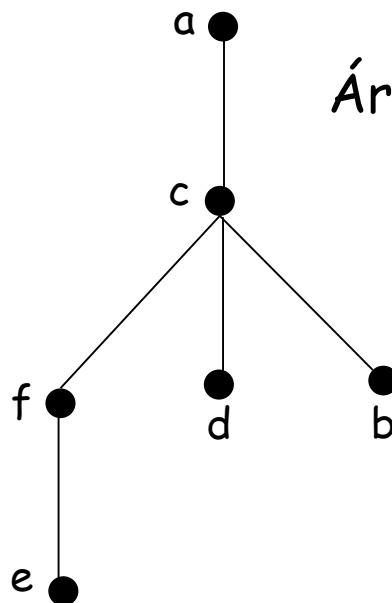
Árboles



Árbol



Árbol con raíz en c

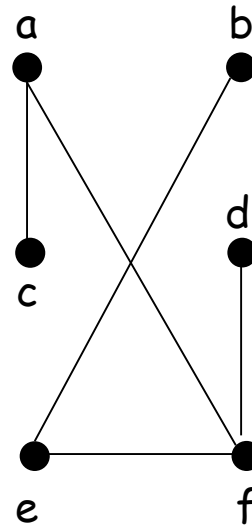
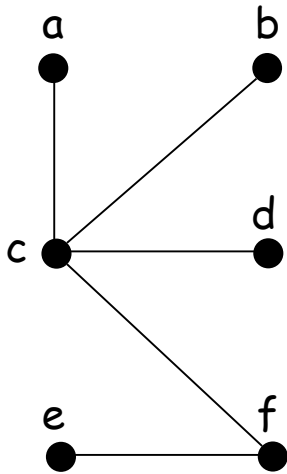


Árbol con raíz en a

Árboles

Árboles

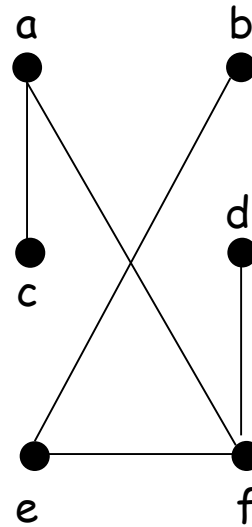
Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



Árboles

Árboles

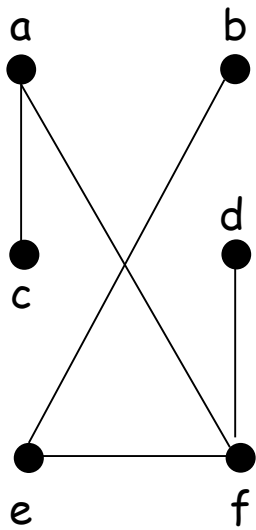
Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



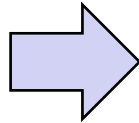
Árboles

Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



Árbol

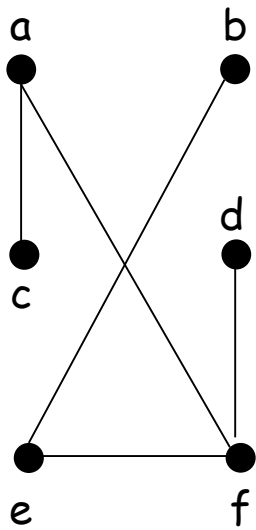


Árbol con raíz en e

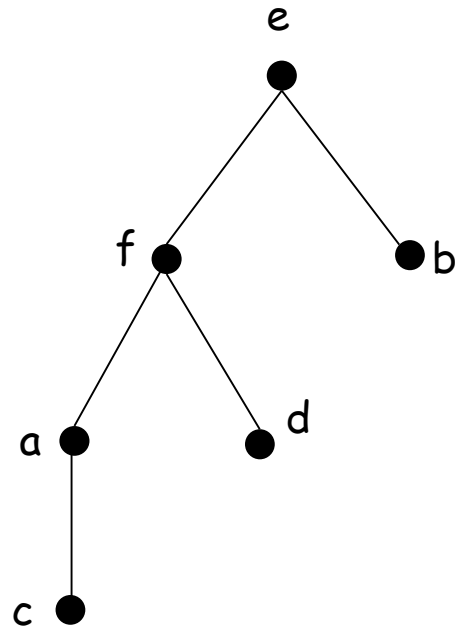
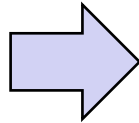
Árboles

Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



Árbol

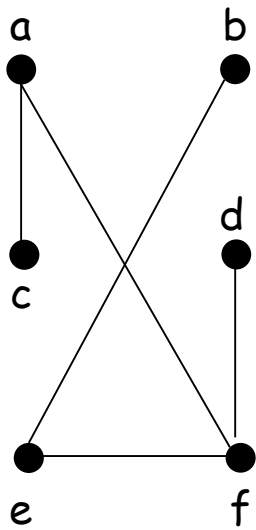


Árbol con raíz en e

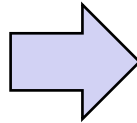
Árboles

Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



Árbol

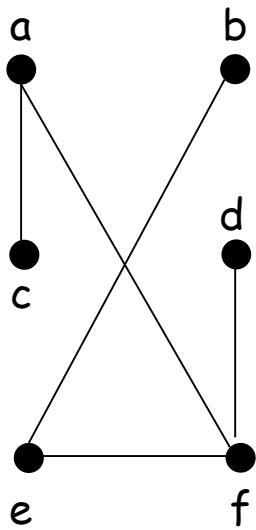


Árbol con raíz en a

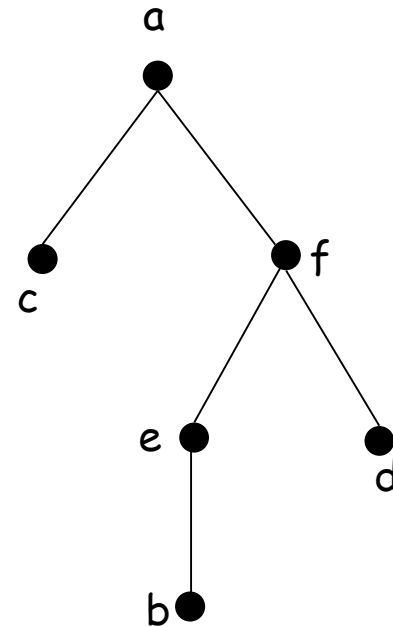
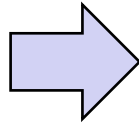
Árboles

Árboles

Un árbol es un grafo conexo que no tiene circuitos



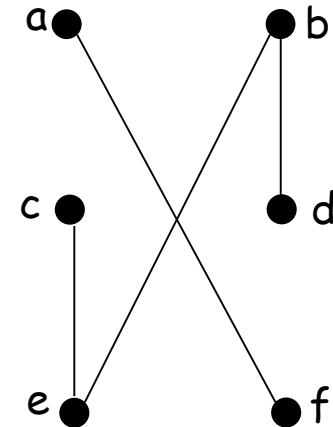
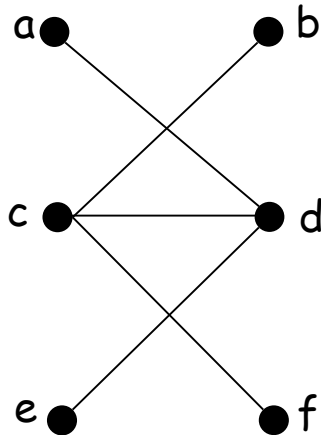
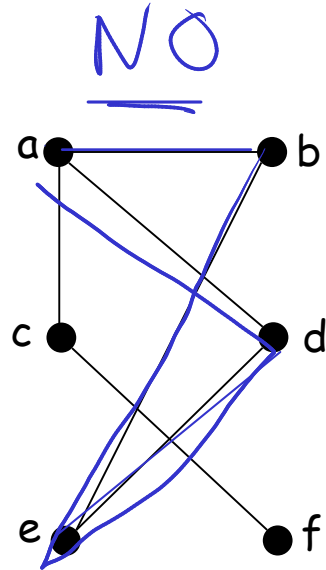
Árbol



Árbol con raíz en a

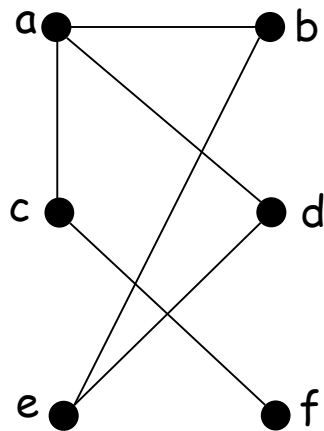
Árboles

Indicar cuáles de los siguientes grafos son árboles

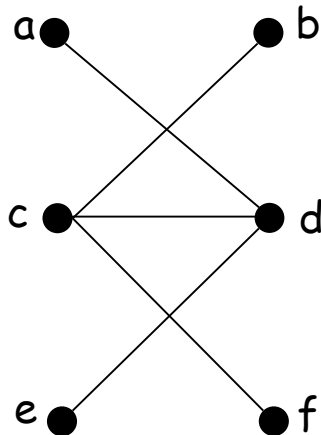


Árboles

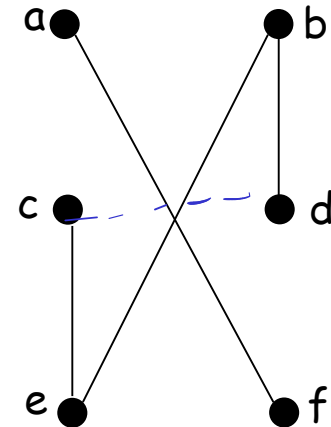
Indicar cuáles de los siguientes grafos son árboles



No es árbol porque
hay un circuito
($a \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow a$)

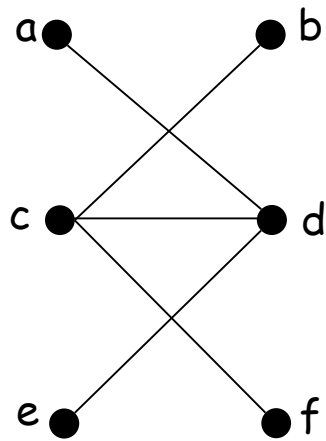


Es un árbol

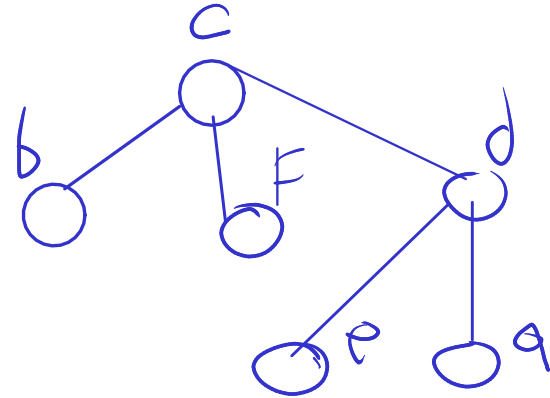
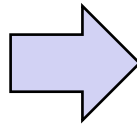


No es árbol porque
no es conexo

Árboles

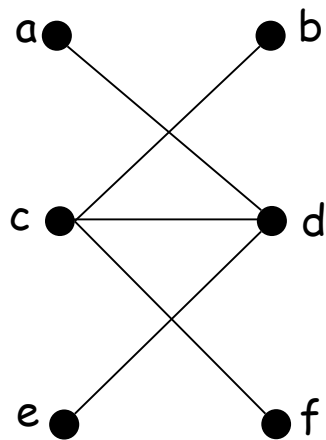


Es un árbol

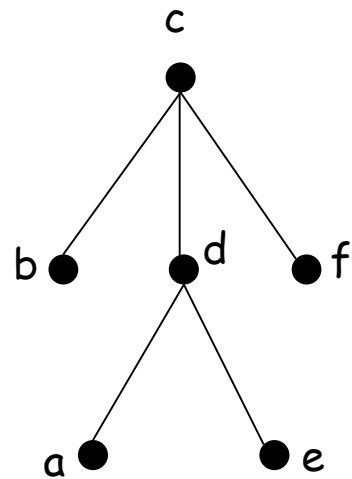
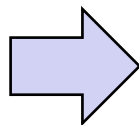


Árbol con raíz en c

Árboles

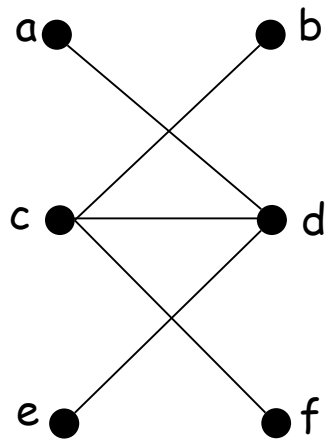


Es un árbol

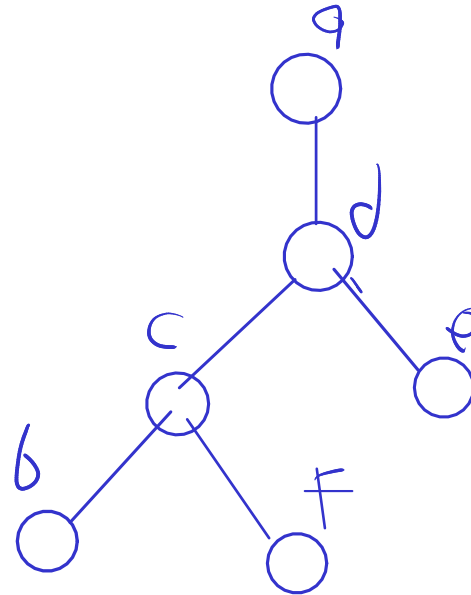
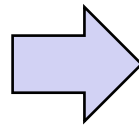


Árbol con raíz en c

Árboles

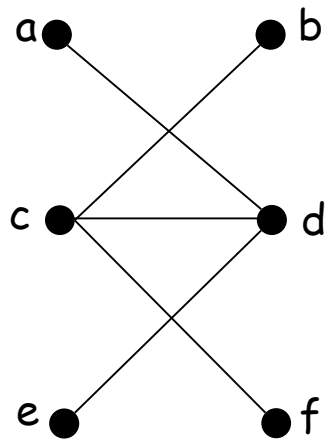


Es un árbol

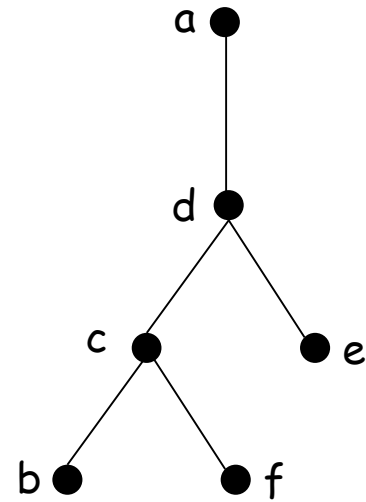
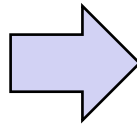


Árbol con raíz en a

Árboles

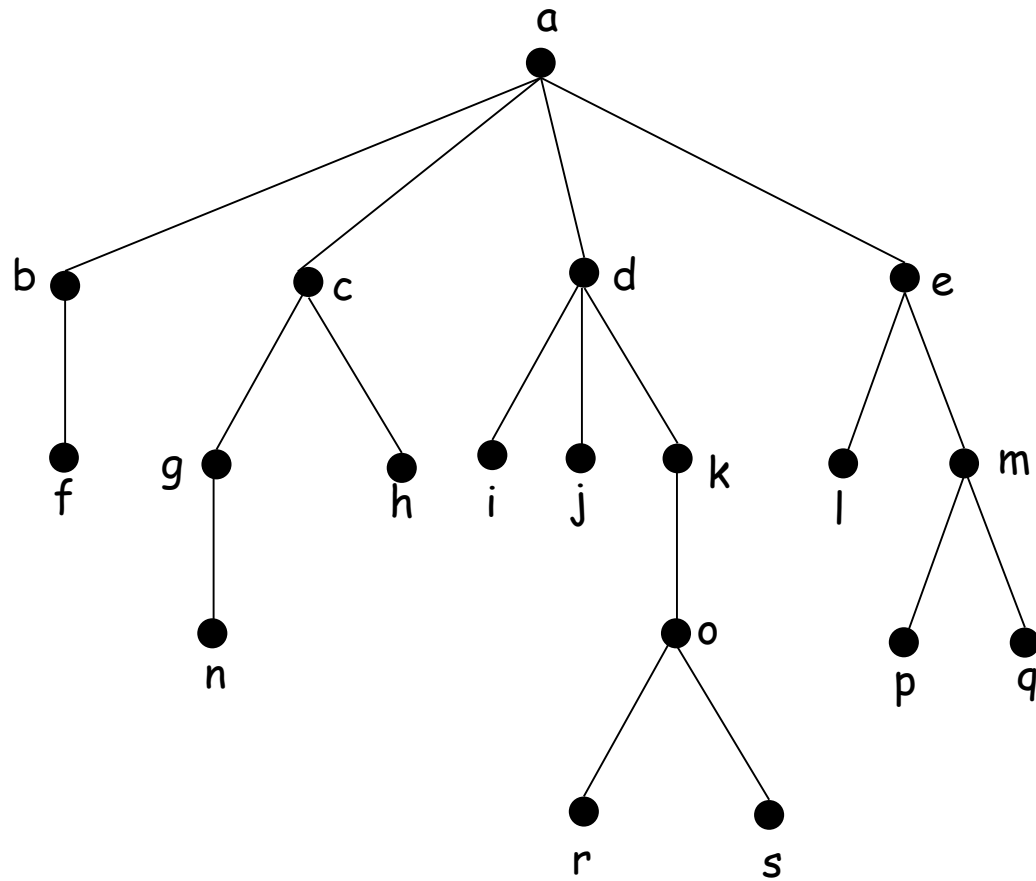


Es un árbol

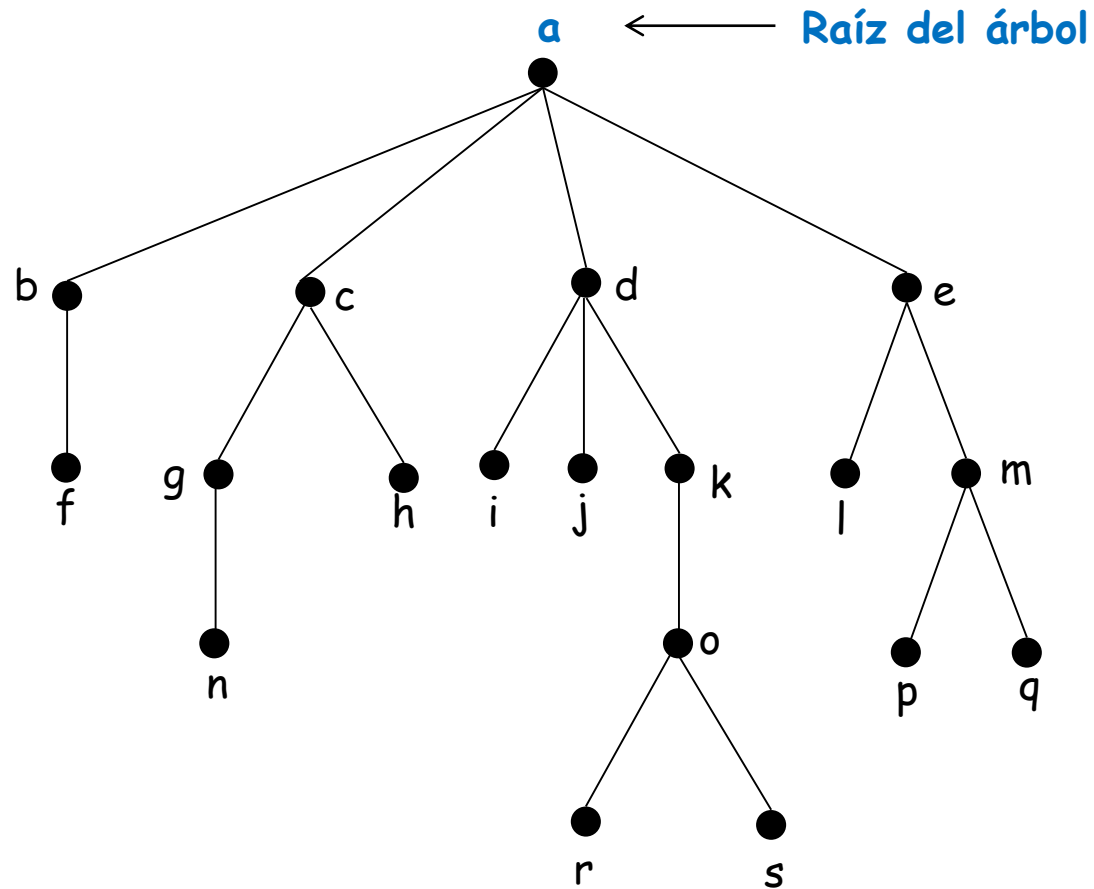


Árbol con raíz en a

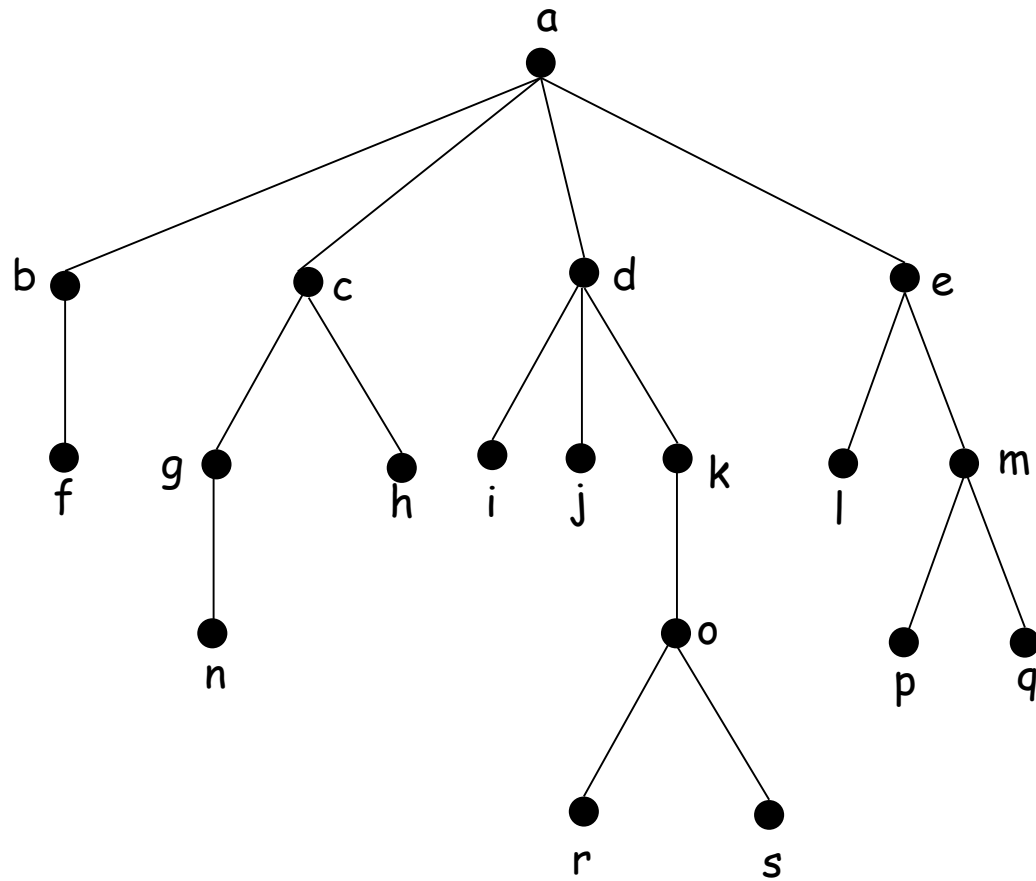
Árboles



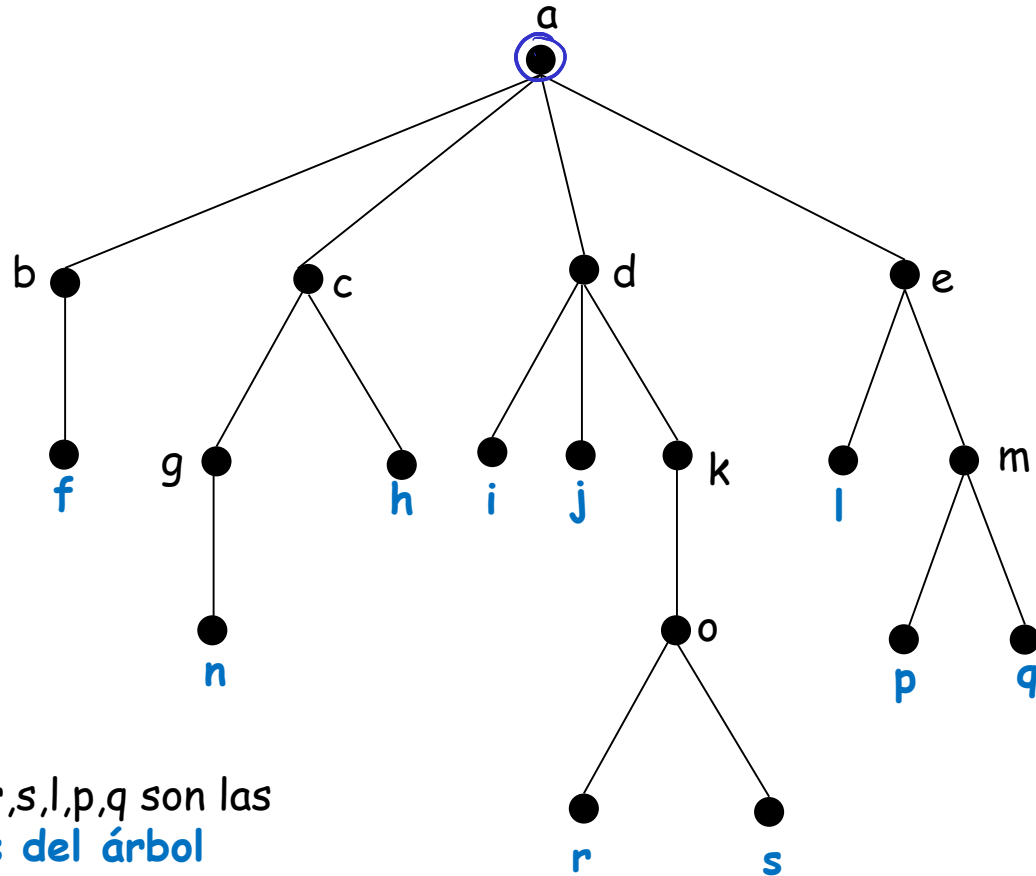
Árboles



Árboles

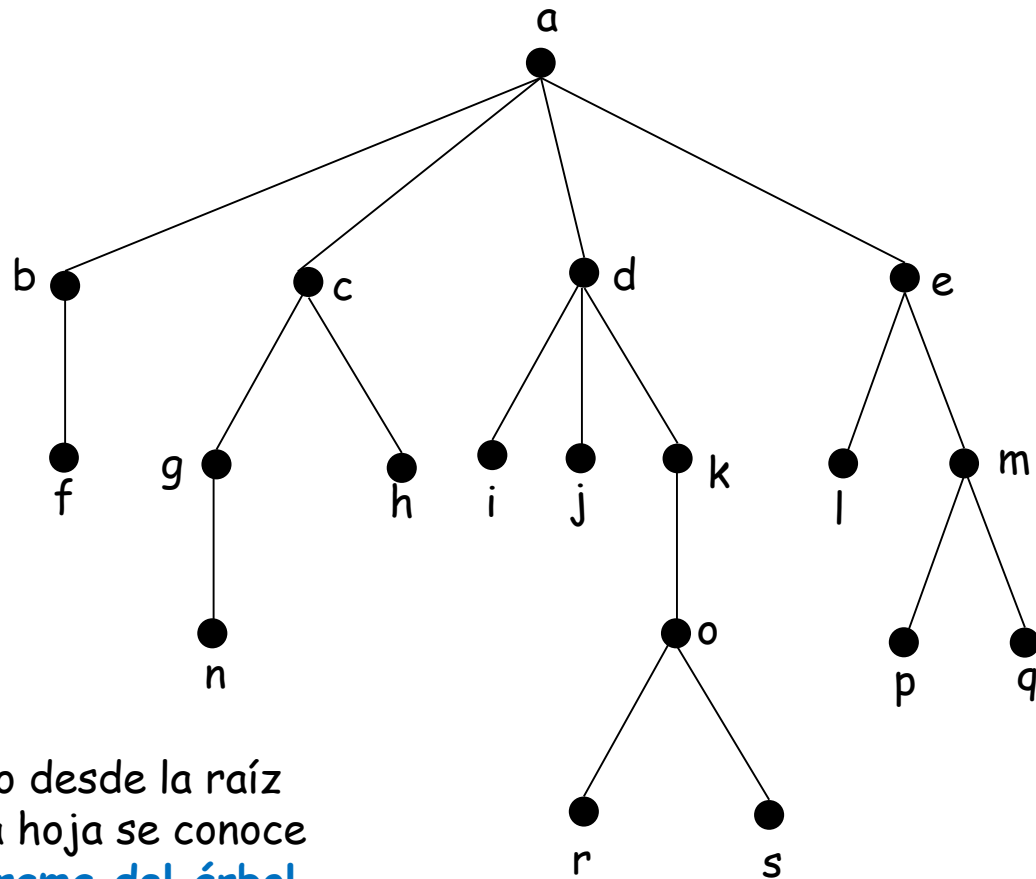


Árboles



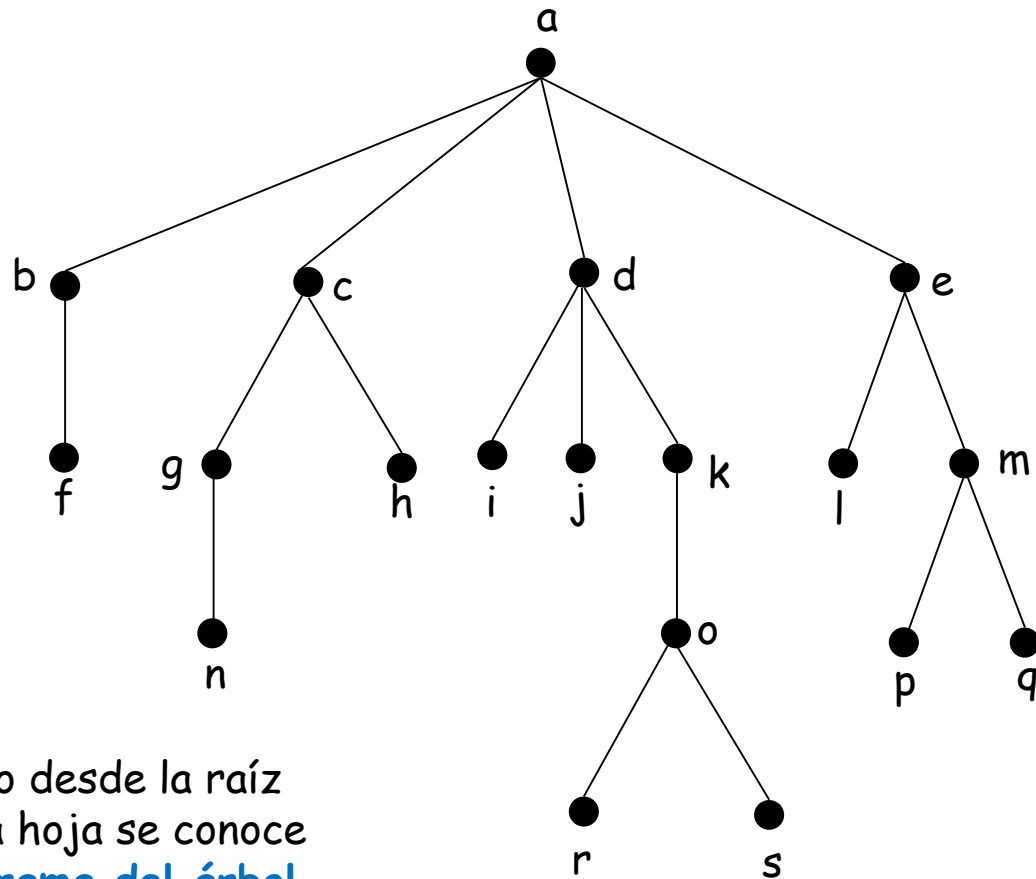
f,n,h,i,j,r,s,l,p,q son las
hojas del árbol

Árboles



Un camino desde la raíz hasta cada hoja se conoce como una **rama del árbol**

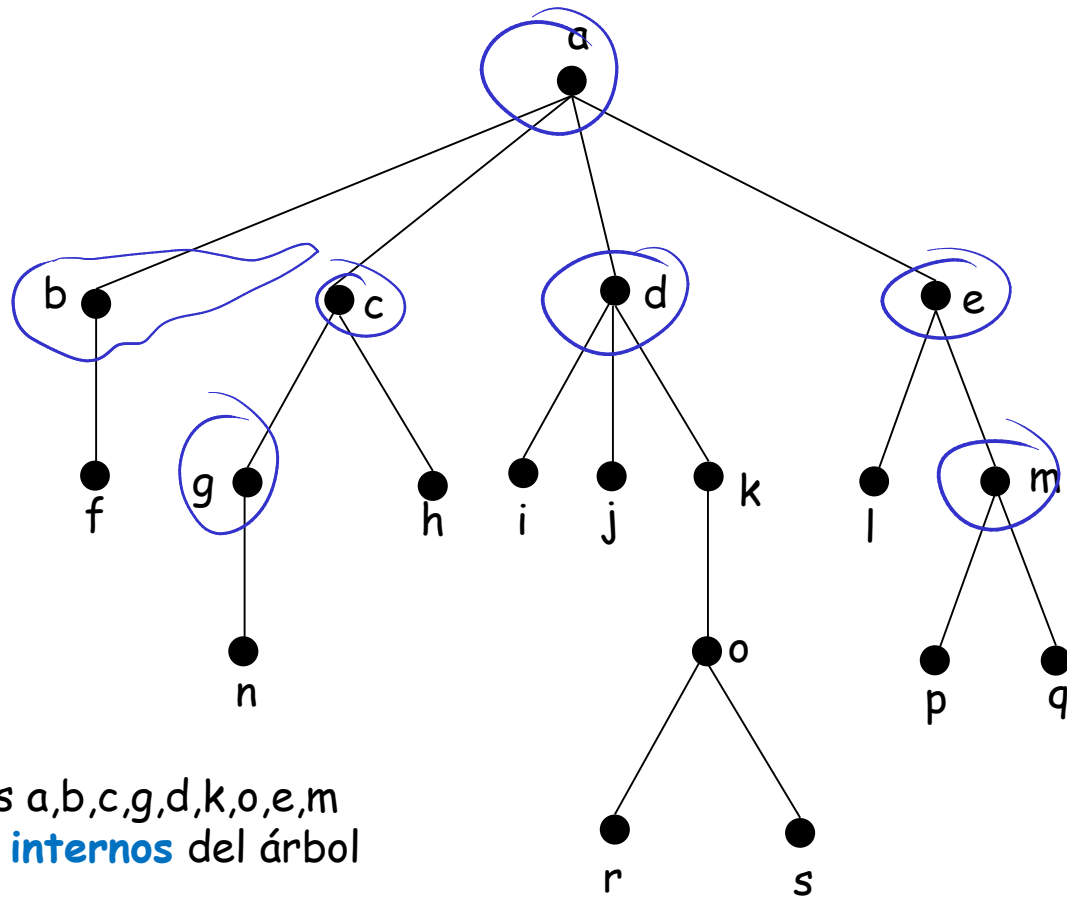
Árboles



Un camino desde la raíz
hasta cada hoja se conoce
como una **rama del árbol**

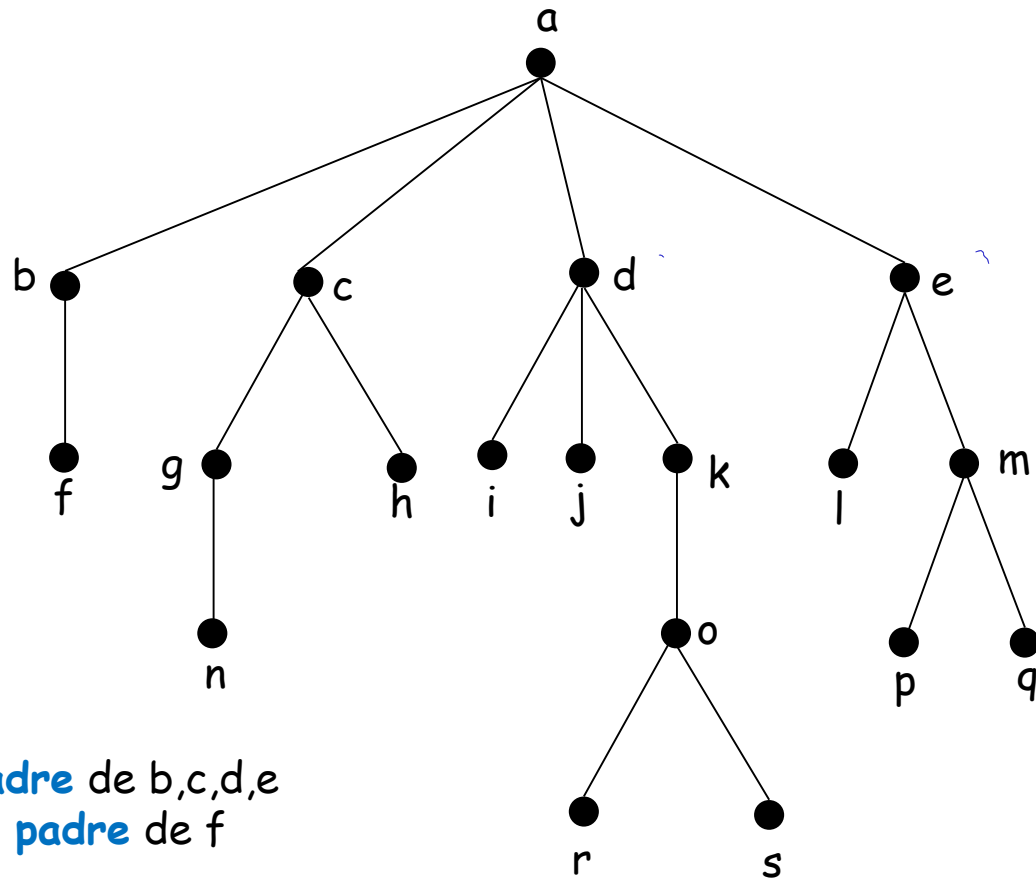
$a \rightarrow b \rightarrow f$
 $a \rightarrow d \rightarrow k \rightarrow o \rightarrow s$

Árboles



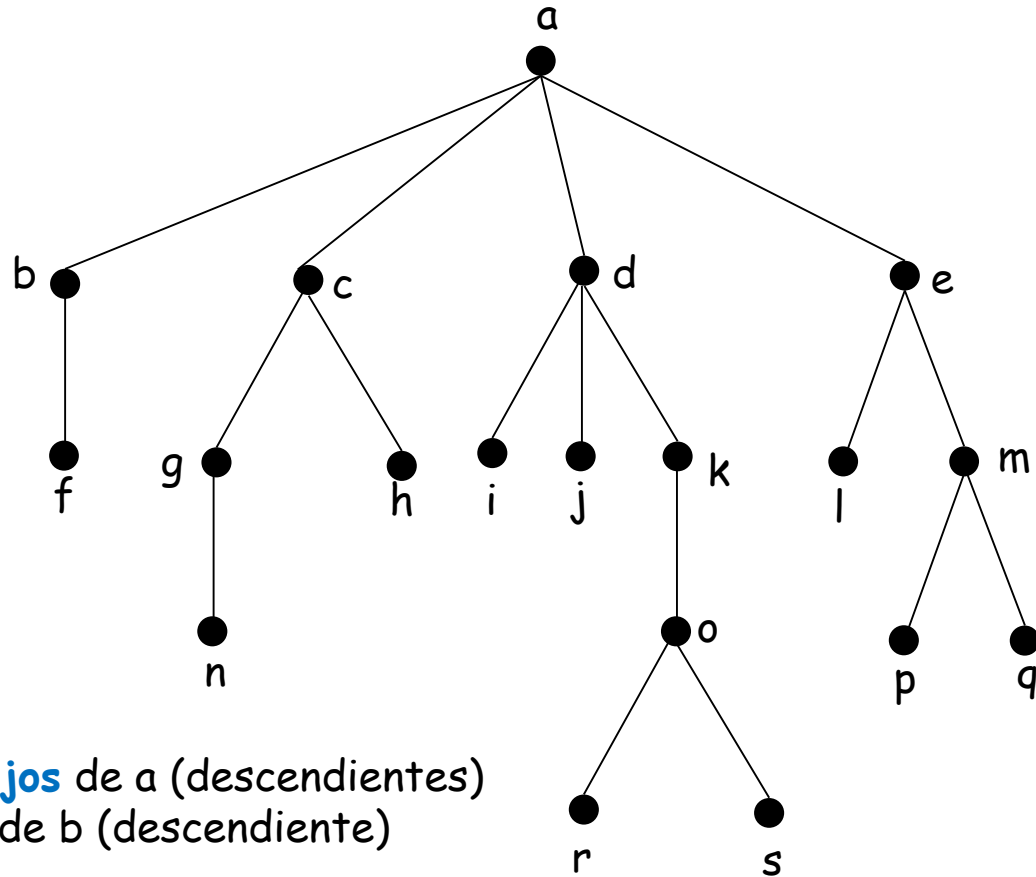
Los nodos a,b,c,g,d,k,o,e,m
son **nodos internos** del árbol

Árboles



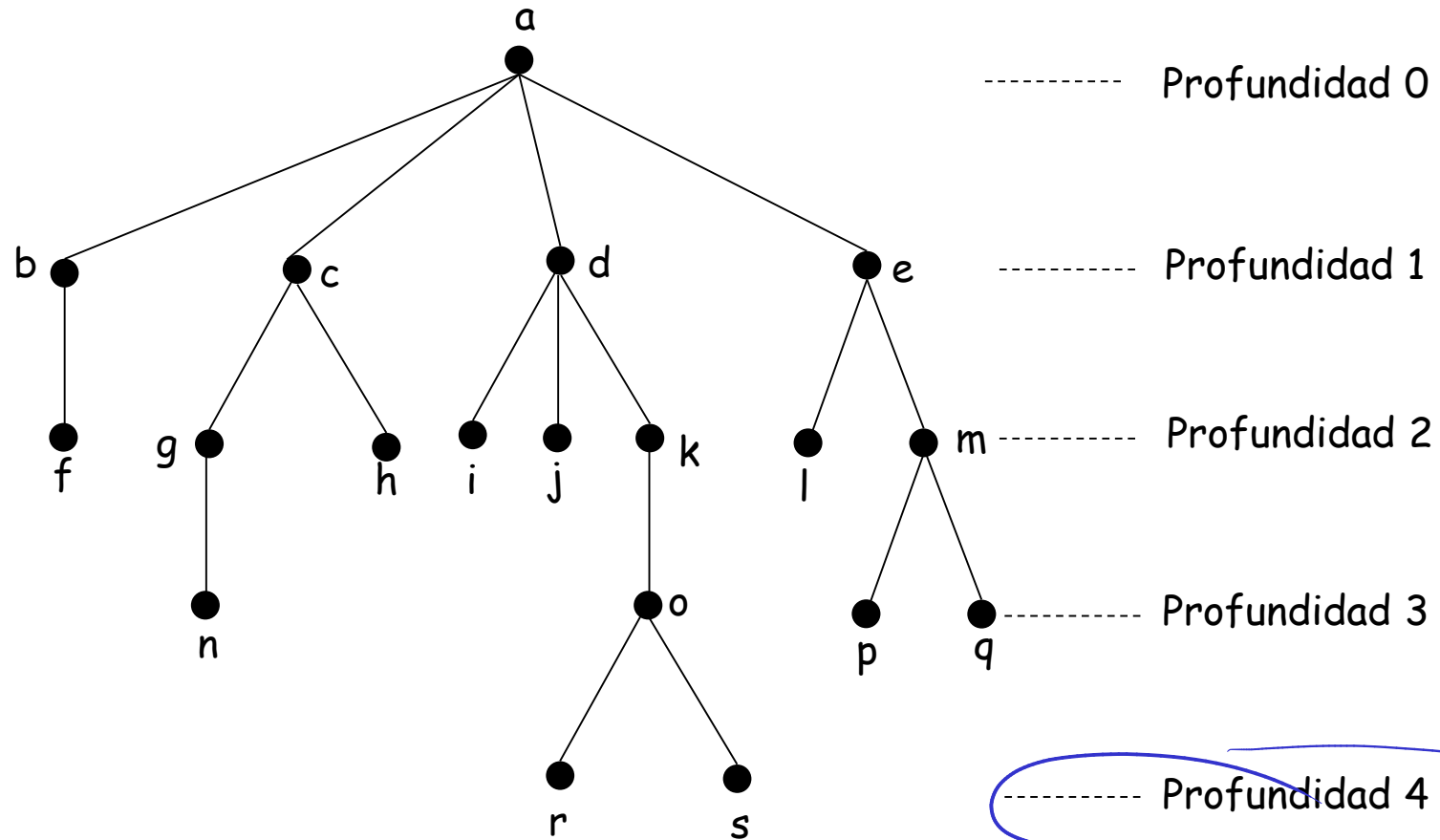
a es el **padre** de b,c,d,e
b es el **padre** de f

Árboles

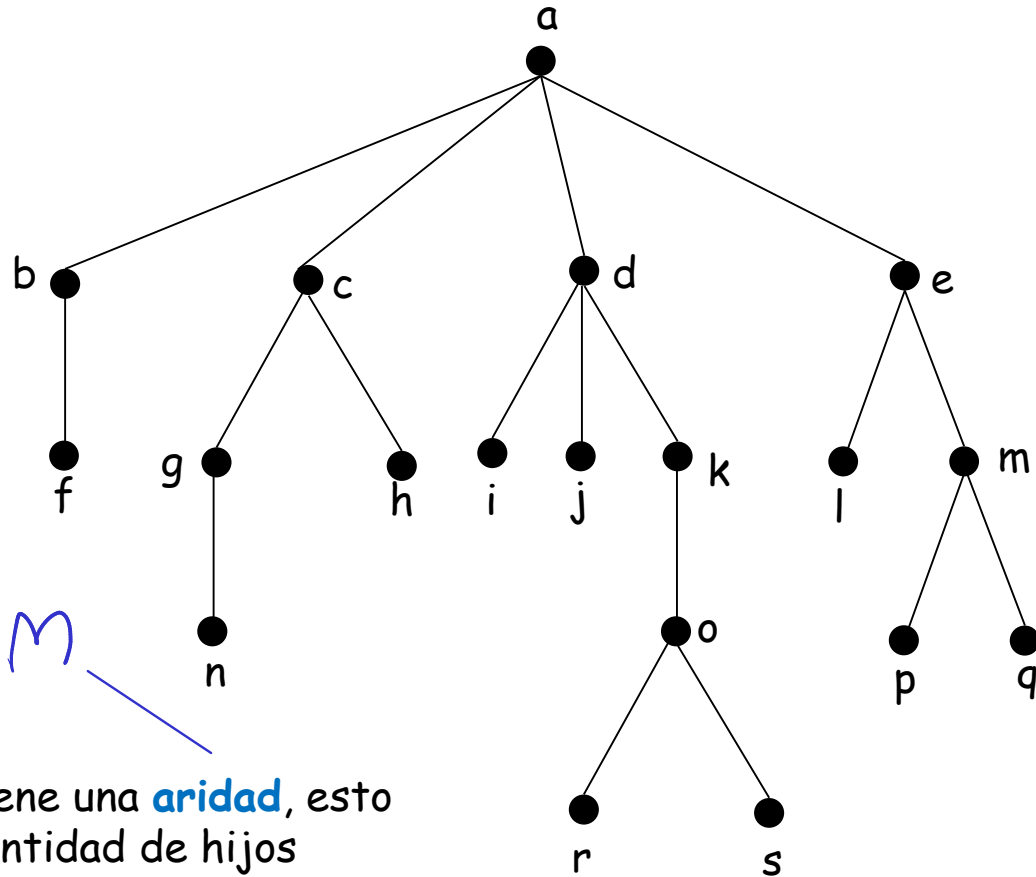


b,c,d,e son los **hijos** de a (descendientes)
f es el **hijo** de b (descendiente)

Árboles



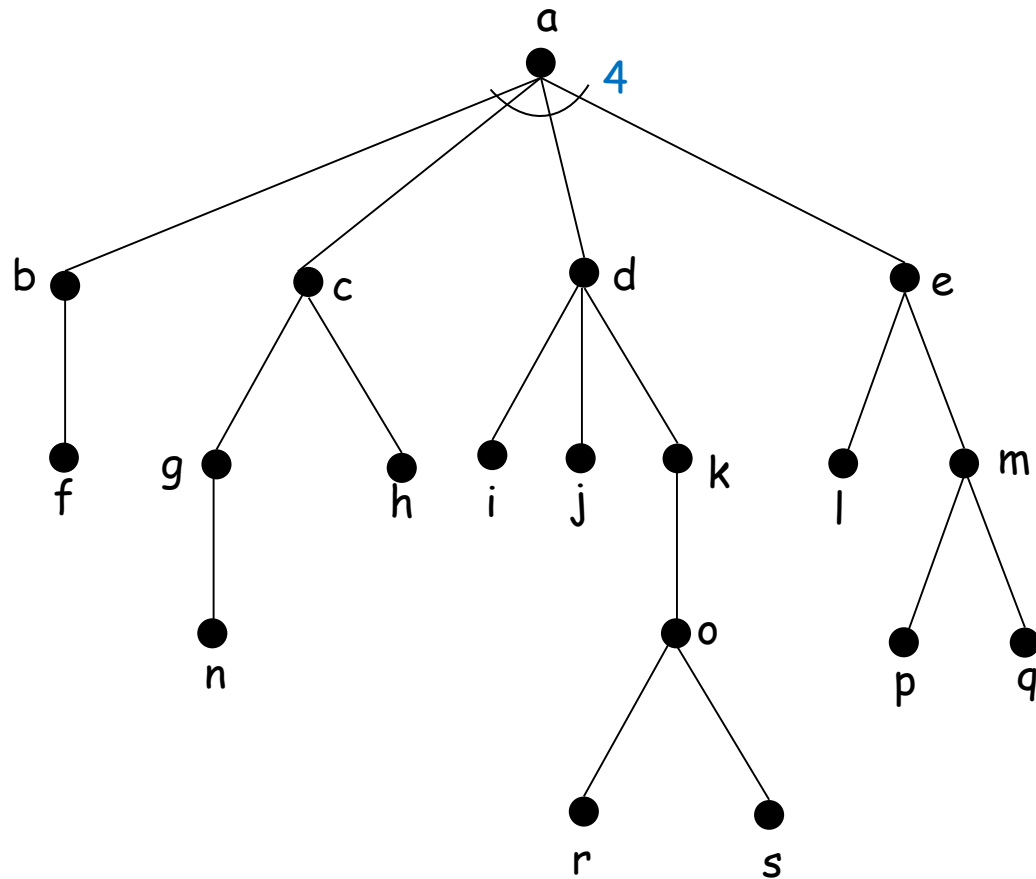
Árboles



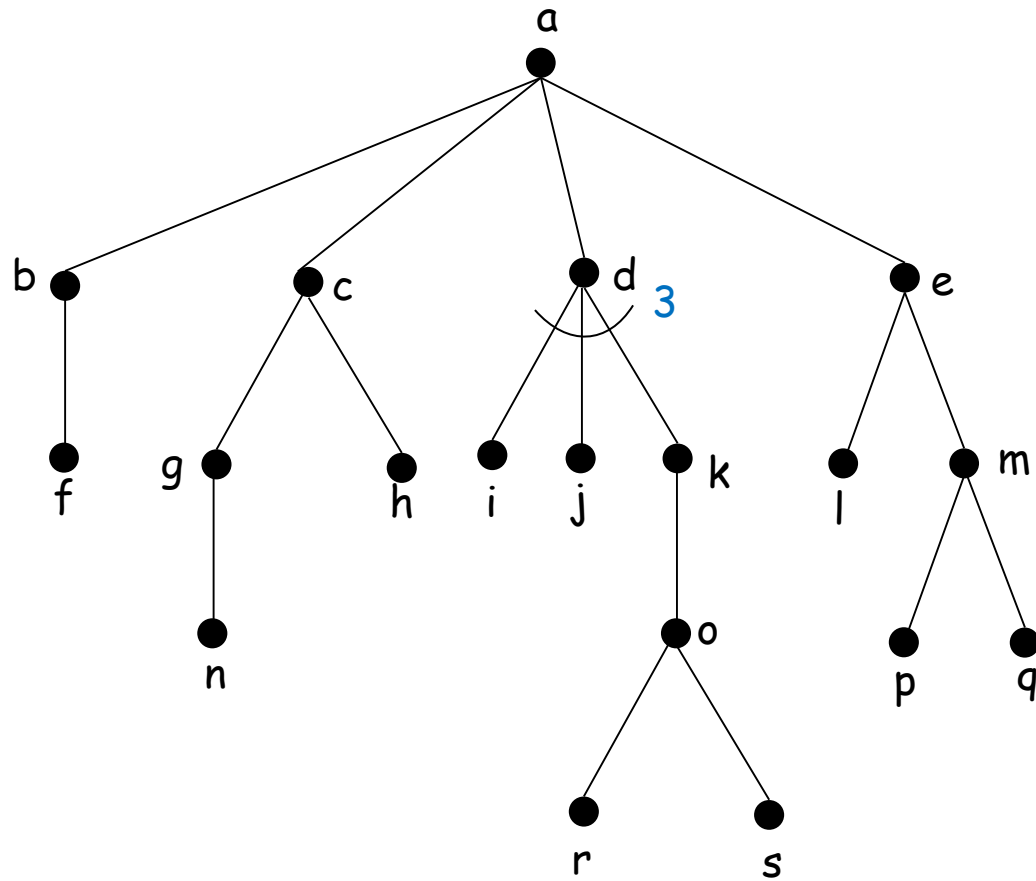
M

Cada nodo tiene una **aridad**, esto es, la cantidad de hijos

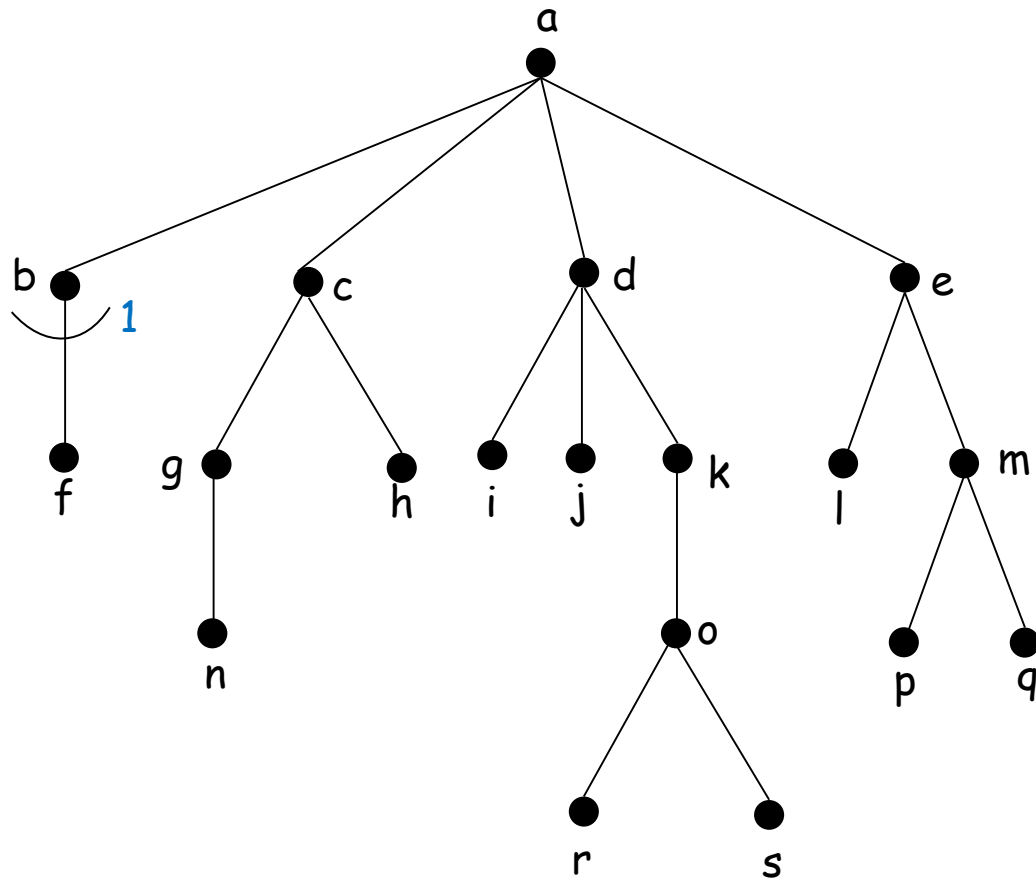
Árboles



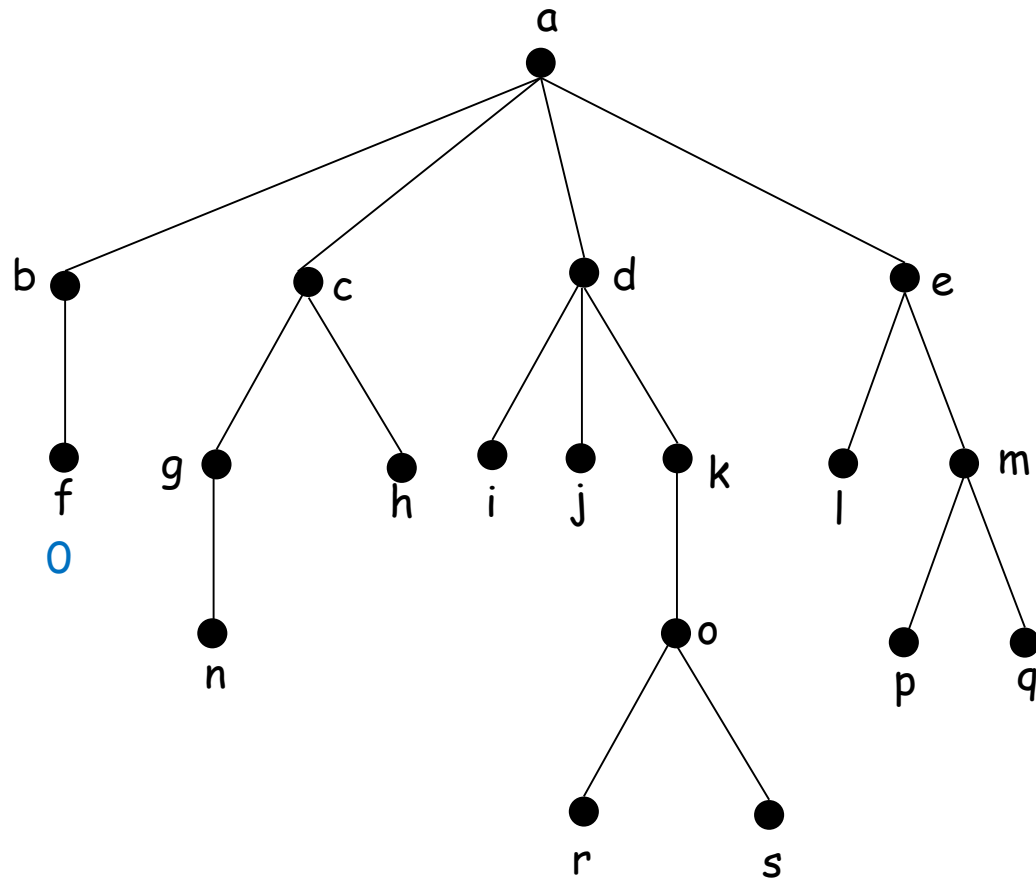
Árboles



Árboles



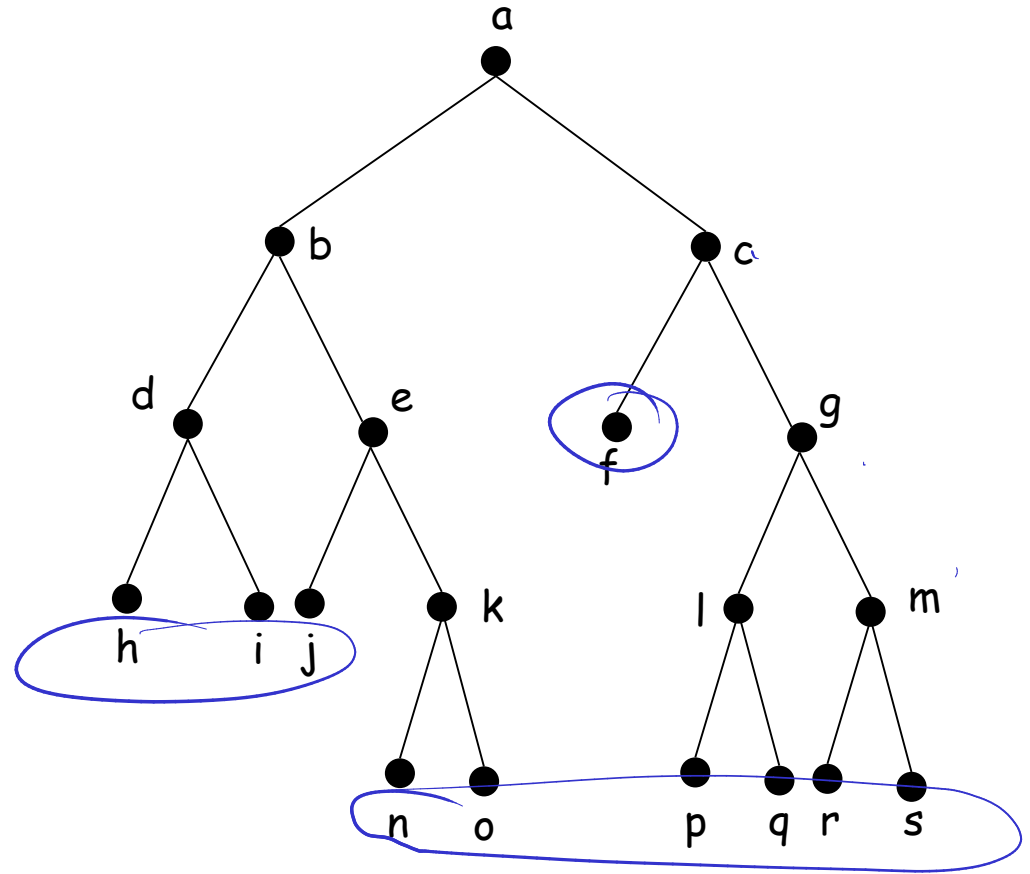
Árboles



Árboles

Dado el siguiente árbol indique:

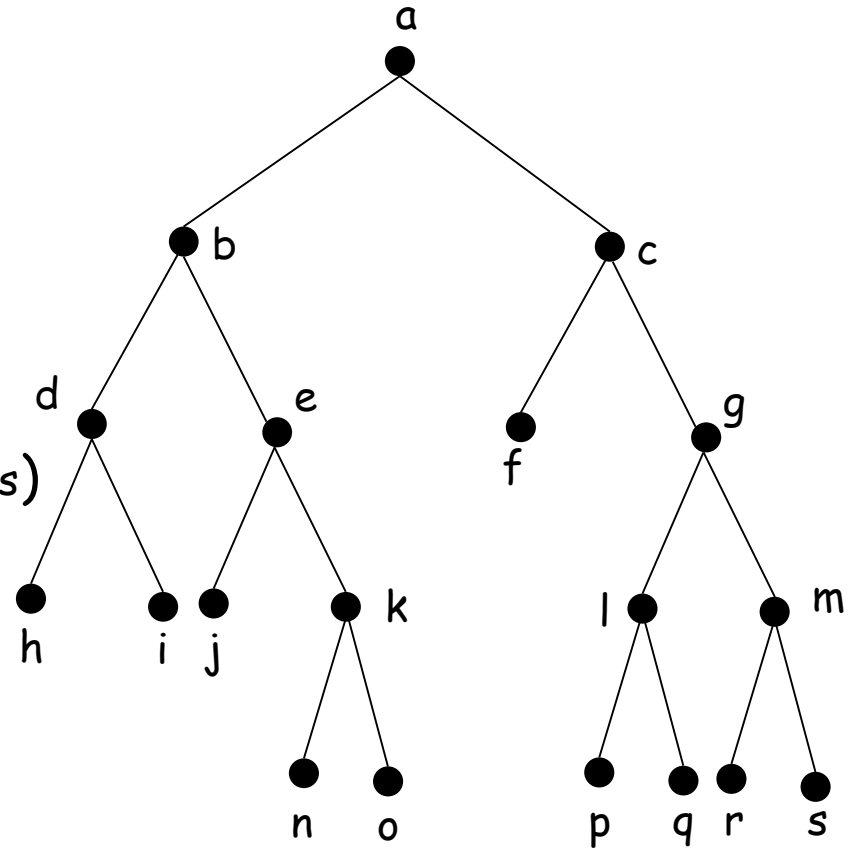
- La raíz del árbol a
- El padre de e b
- Los hijos de g l, m
- Las hojas del árbol
- La profundidad de m 3
- La profundidad de b 1
- La aridad de c 2
- La aridad de j 0



Árboles

Dado el siguiente árbol indique:

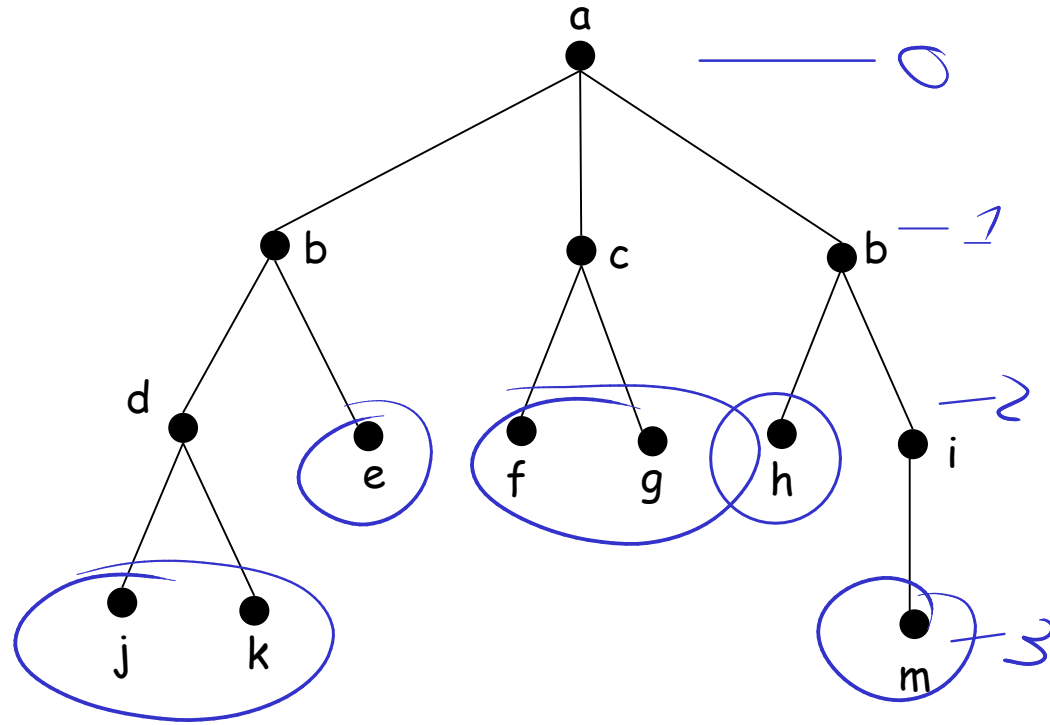
- La raíz del árbol (a)
- El padre de e (b)
- Los hijos de g (l,m)
- Las hojas del árbol (h,i,j,n,o,f,p,q,r,s)
- La profundidad de m (3)
- La profundidad de b (1)
- La aridad de c (2)
- La aridad de j (0)



Árboles

Dado el siguiente árbol indique:

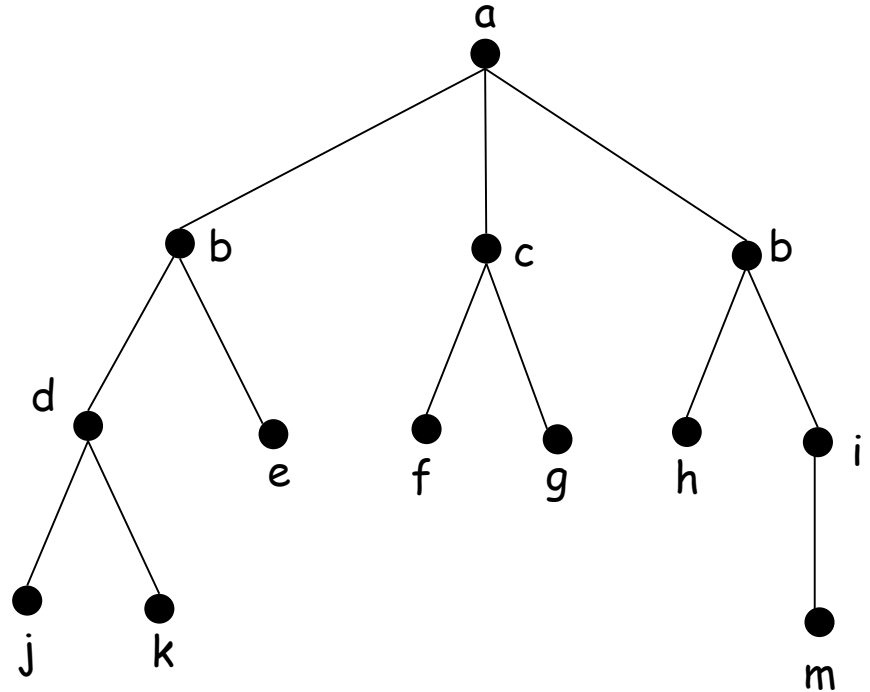
- La raíz del árbol **a**
- El padre de i **b**
- Los hijos de d **j k**
- Las hojas del árbol
- La profundidad de e **2**
- La profundidad de a **0**
- La aridad de i **1**
- La aridad de a **3**



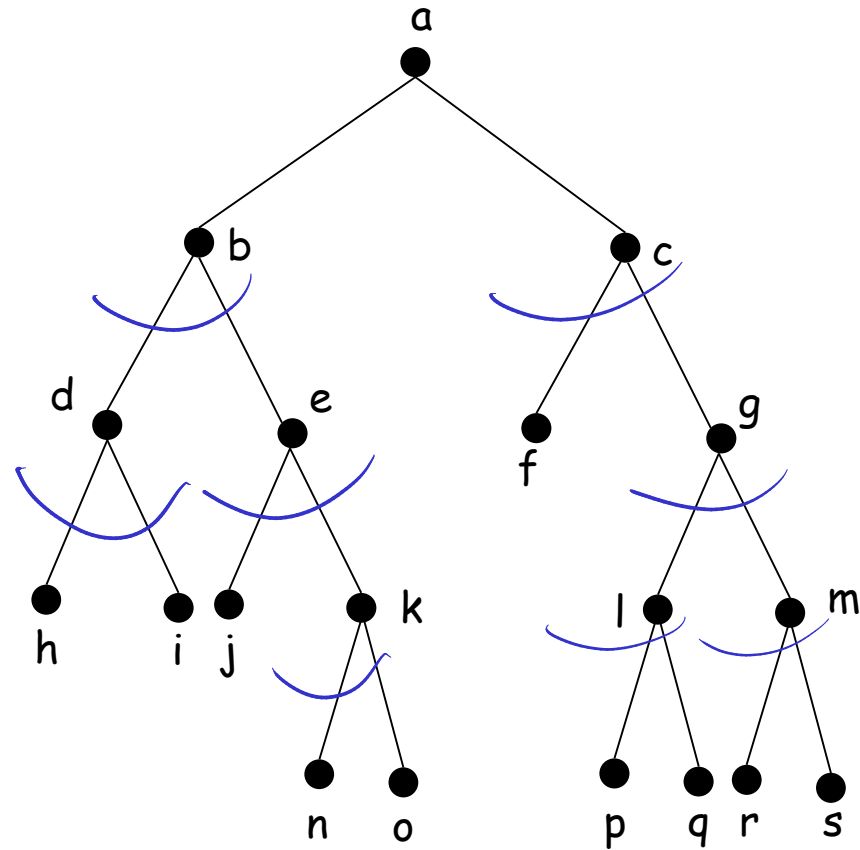
Árboles

Dado el siguiente árbol indique:

- La raíz del árbol (a)
- El padre de i (b)
- Los hijos de d (j,k)
- Las hojas del árbol (j,k,e,f,g,h,m)
- La profundidad de e (2)
- La profundidad de a (0)
- La aridad de i (1)
- La aridad de a (3)

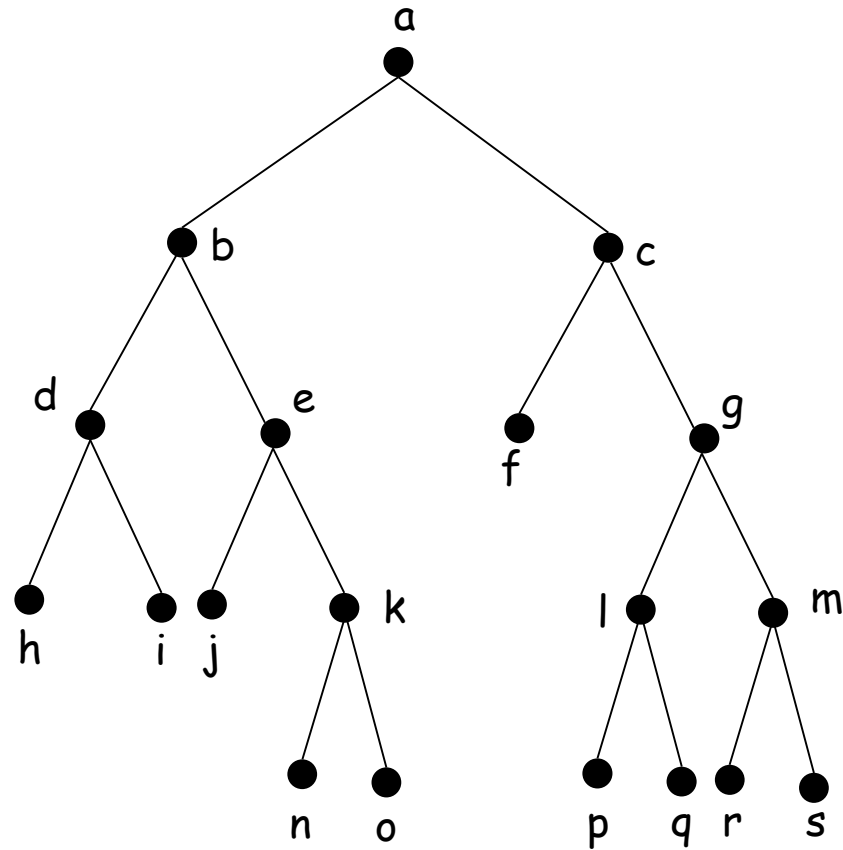


Árboles



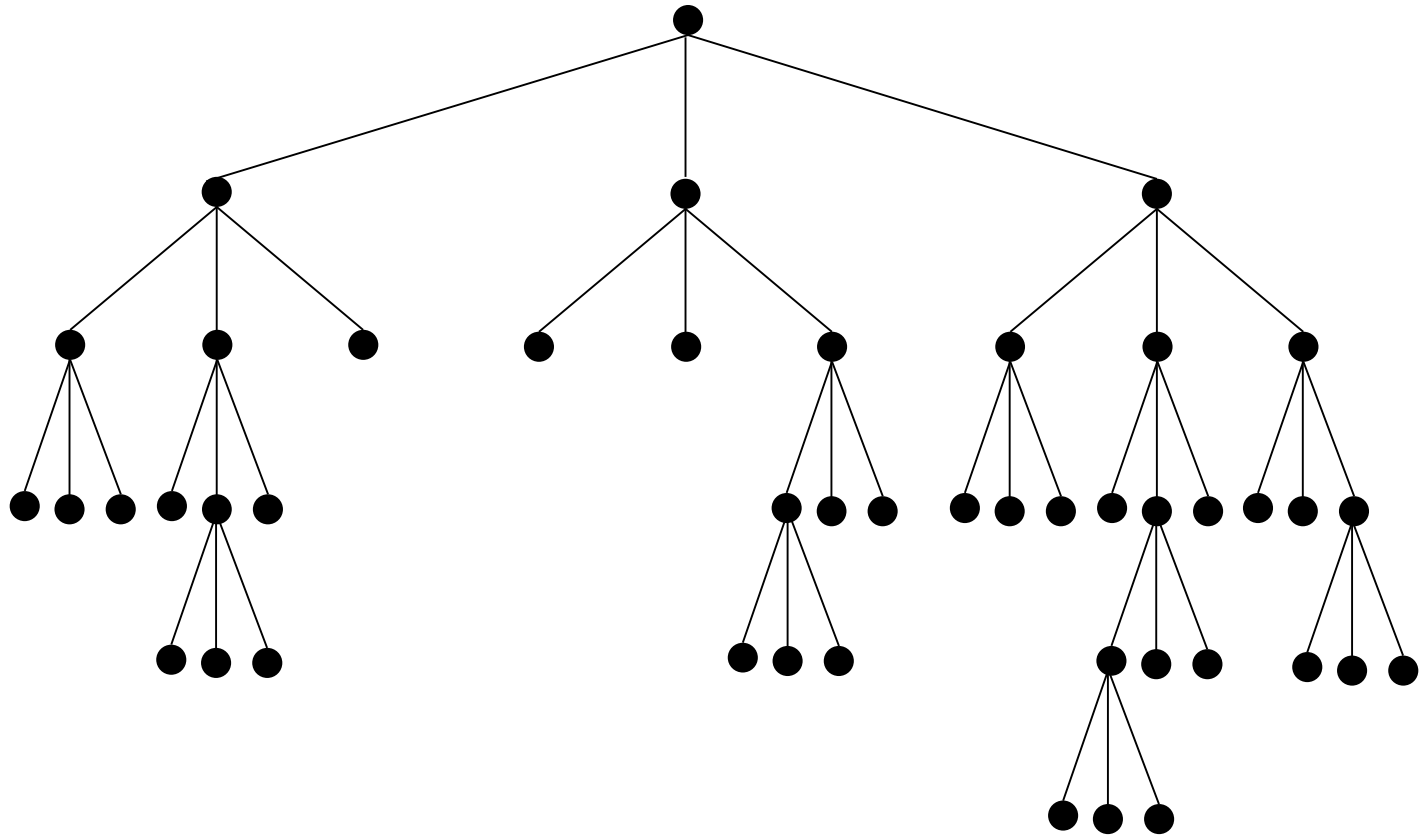
Cuál es la aridad de los nodos internos

Árboles



Todos los nodos internos tienen la misma aridad

Árboles

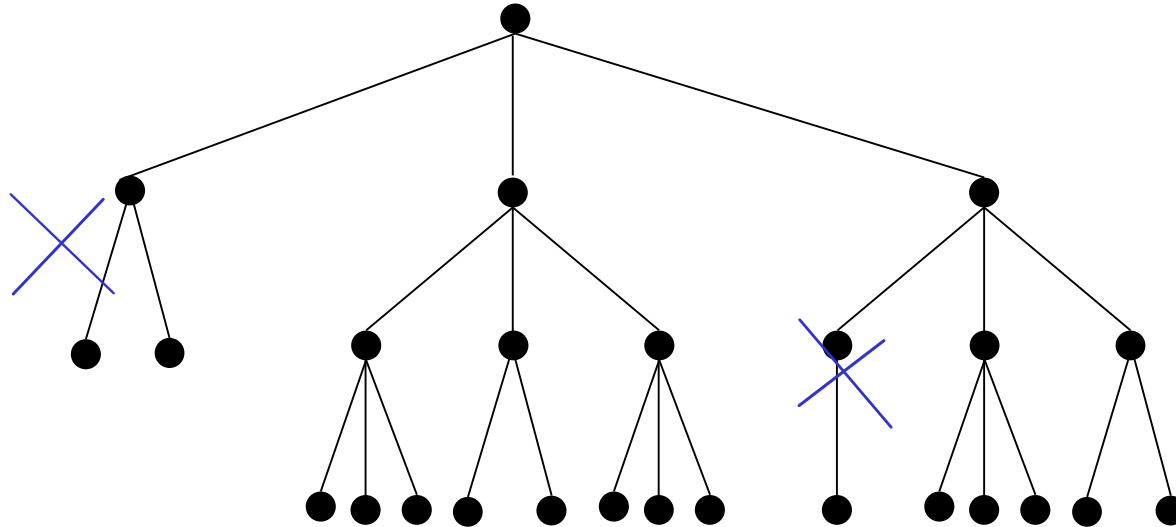


Árboles

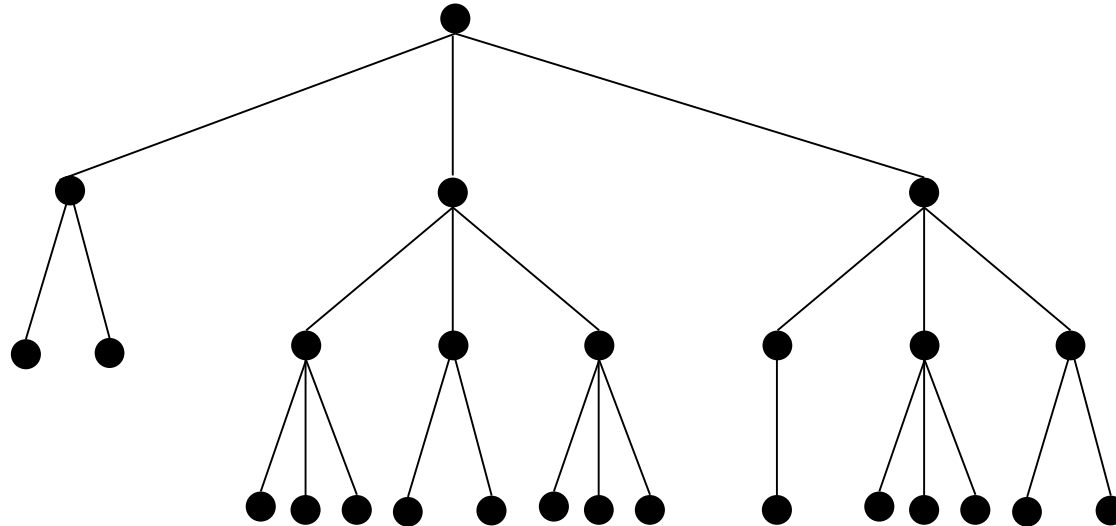
Árbol n -ario completo

Un árbol es n -ario completo si cada nodo interno tiene exactamente n hijos

Árboles



Árboles



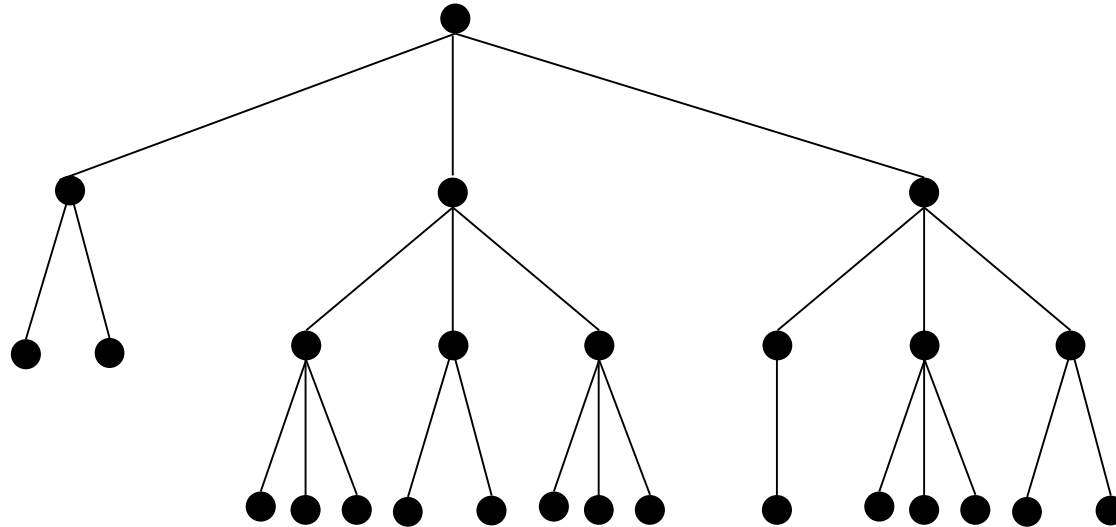
Cada nodo interno tiene aridad 1, 2, o 3

Árboles

Árbol n -ario

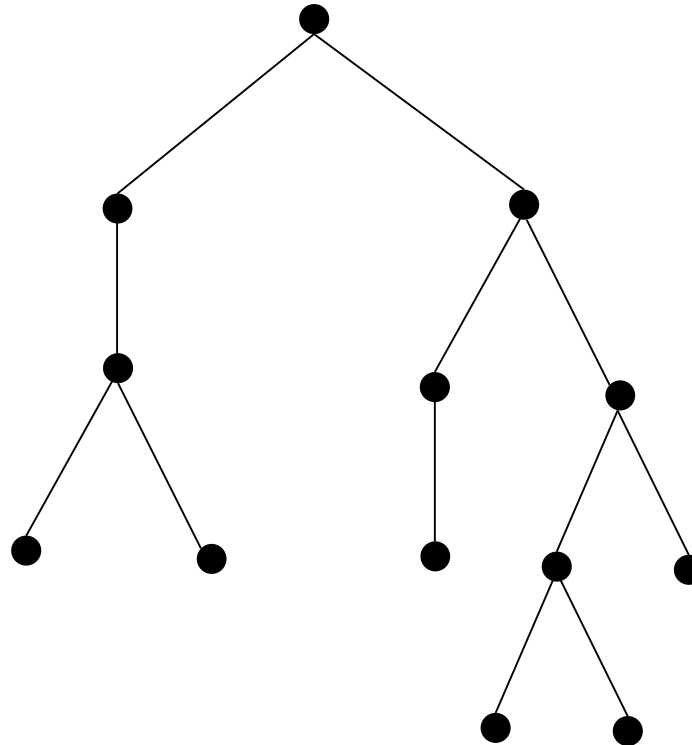
Un árbol es n -ario si cada nodo interno no tiene más de n hijos

Árboles

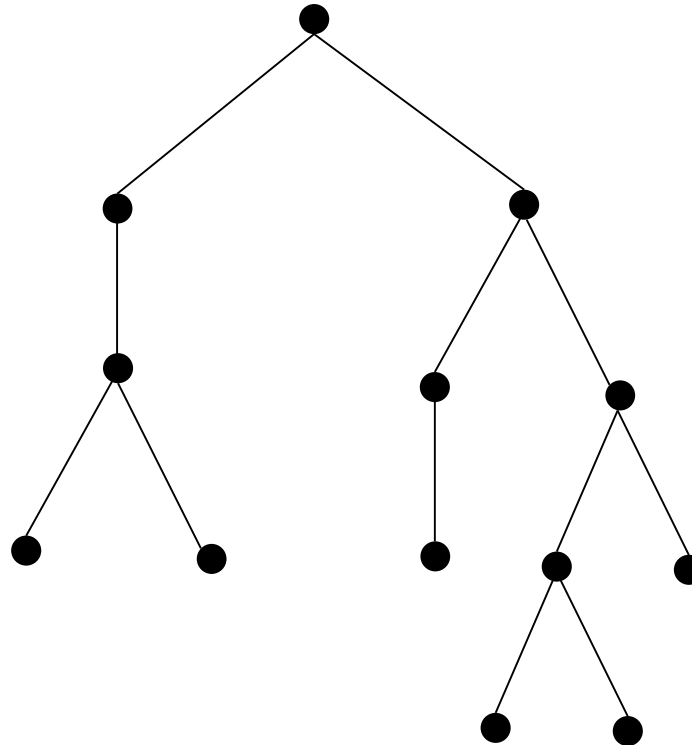


Árbol 3-ario

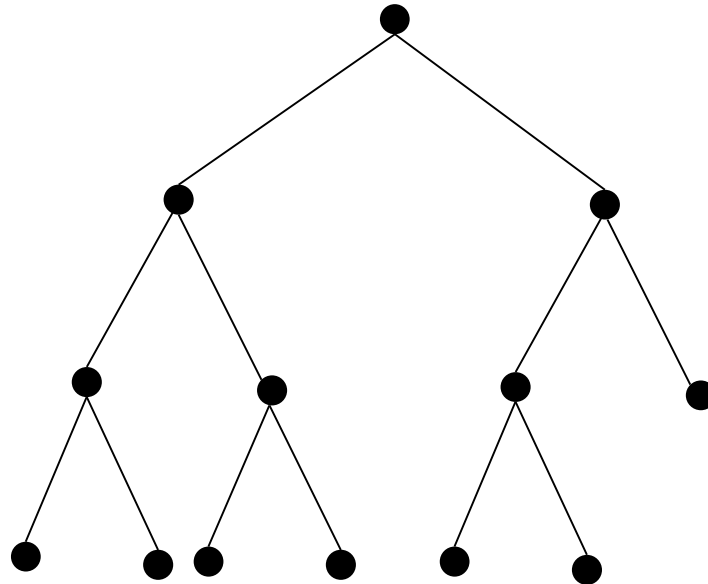
Árboles



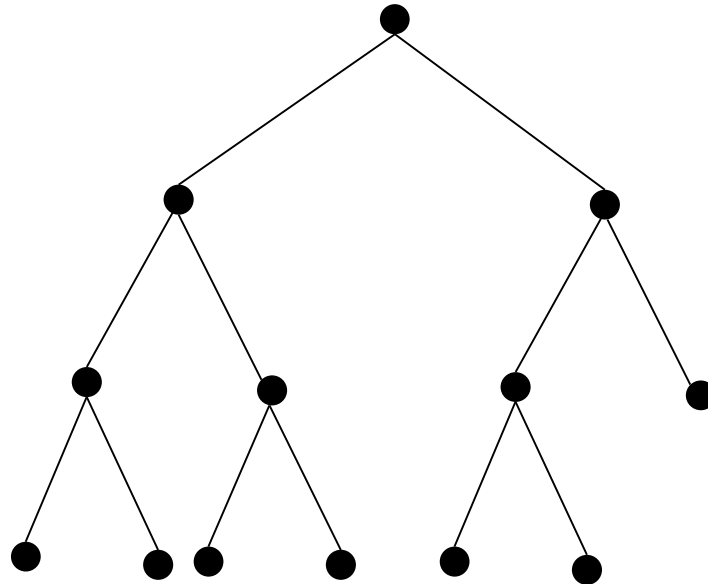
Árboles



Árbol 2-ario o binario

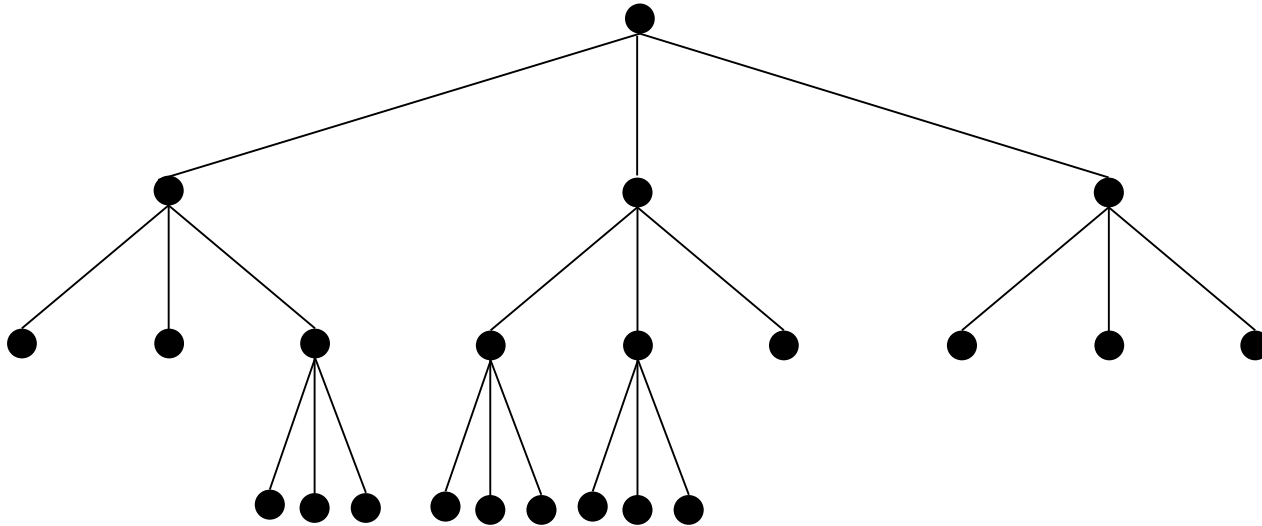


Árboles

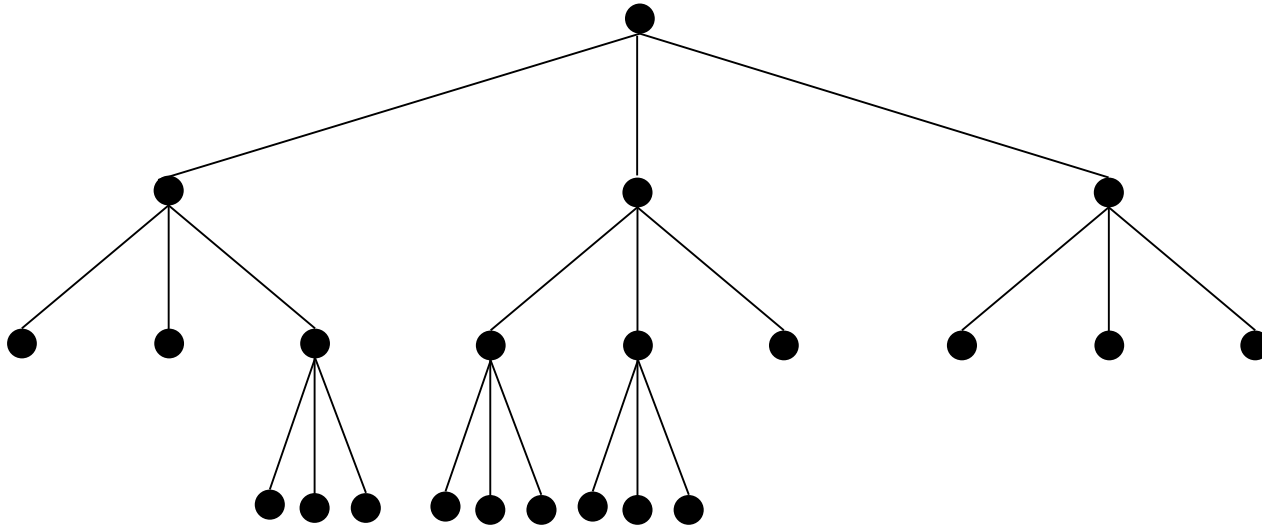


Árbol binario completo

Árboles



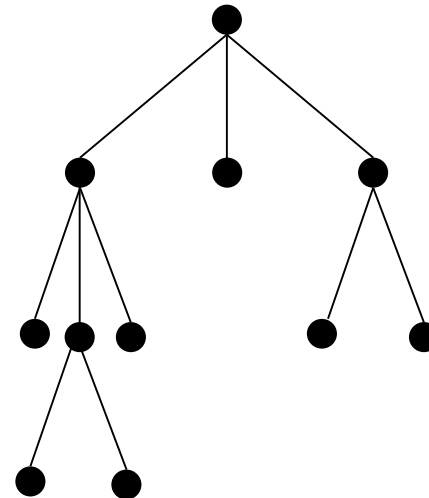
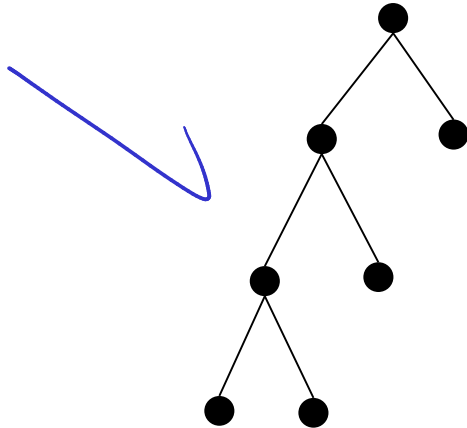
Árboles



Árbol 3-ario completo

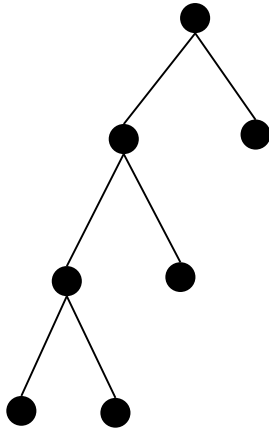
Árboles

Indique cuáles de los siguientes árboles son n -arios completos y cuáles n -arios

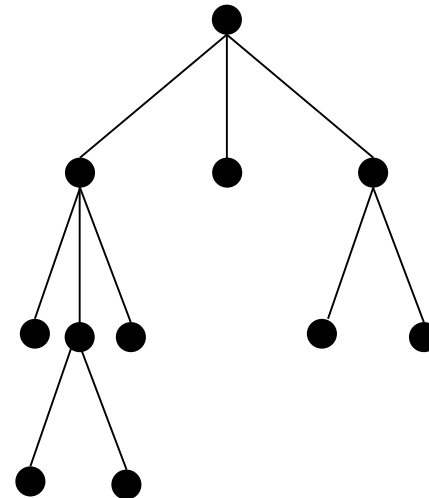


Árboles

Indique cuáles de los siguientes árboles son n -arios completos y cuáles n -arios



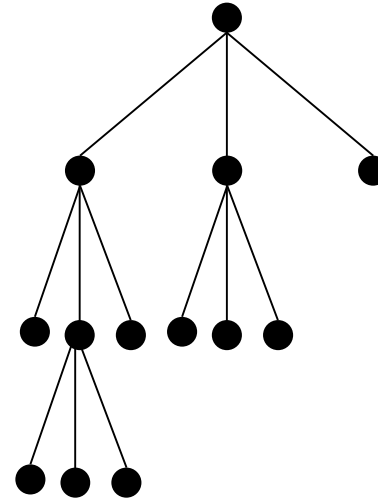
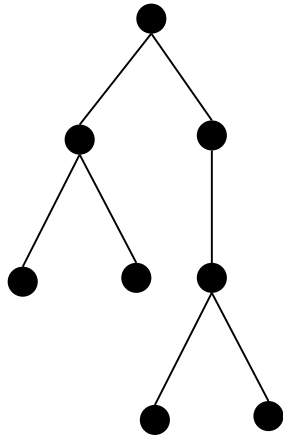
Árbol binario
completo



Árbol 3-ario

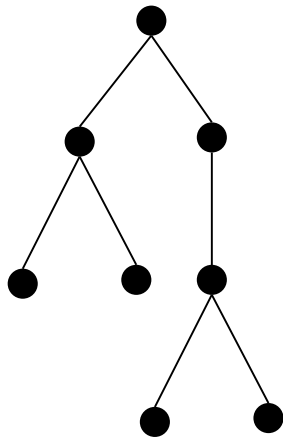
Árboles

Indique cuáles de los siguientes árboles son n -arios completos y cuáles n -arios

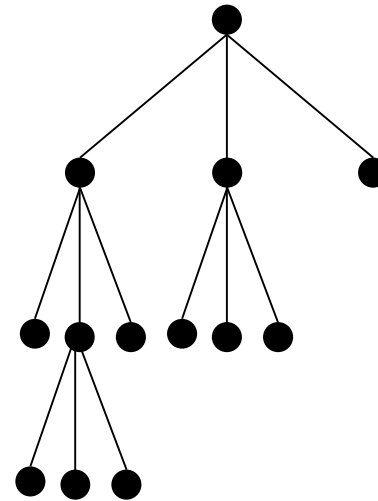


Árboles

Indique cuáles de los siguientes árboles son n -arios completos y cuáles n -arios



Árbol binario

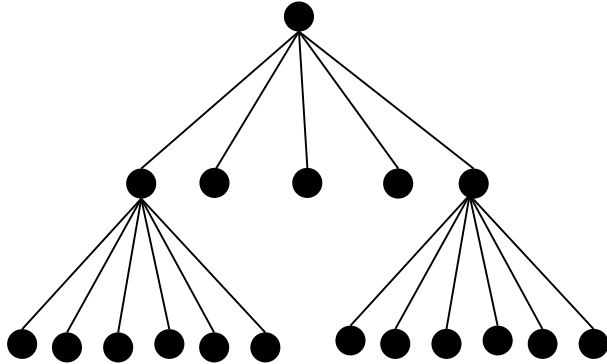


Árbol 3-ario
completo

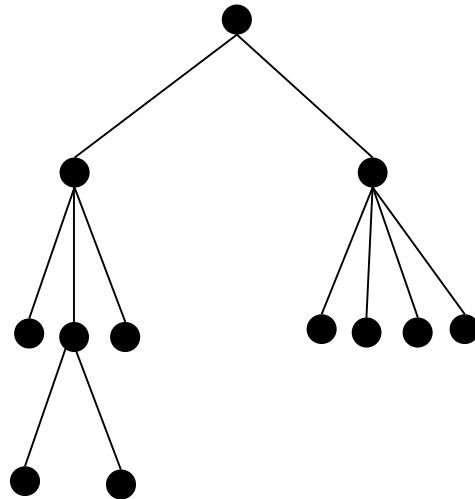
Árboles

Indique cuáles de los siguientes árboles son n -arios completos y cuáles n -arios

6-ario

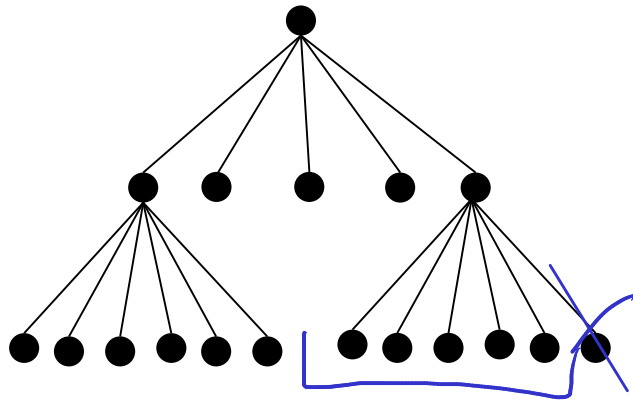


4-ario

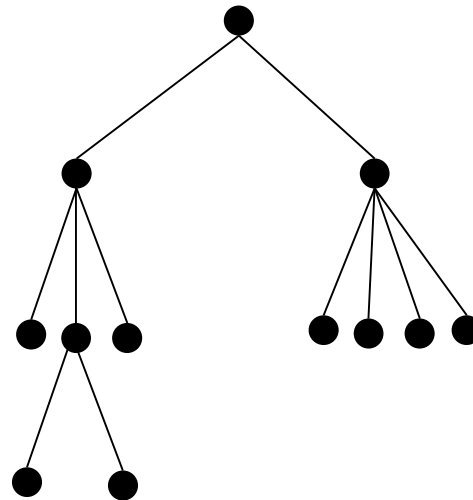


Árboles

Indique cuáles de los siguientes árboles son n -arios completos y cuáles n -arios



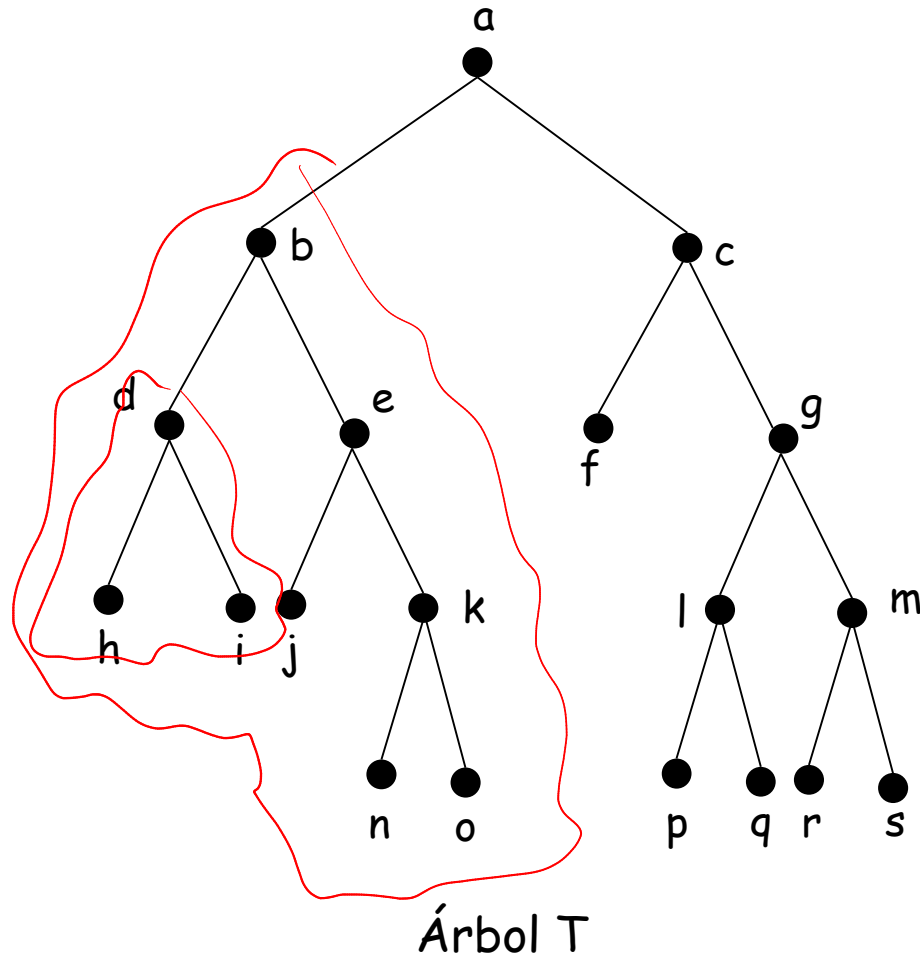
Árbol 5-ario completo



Árbol 4-ario

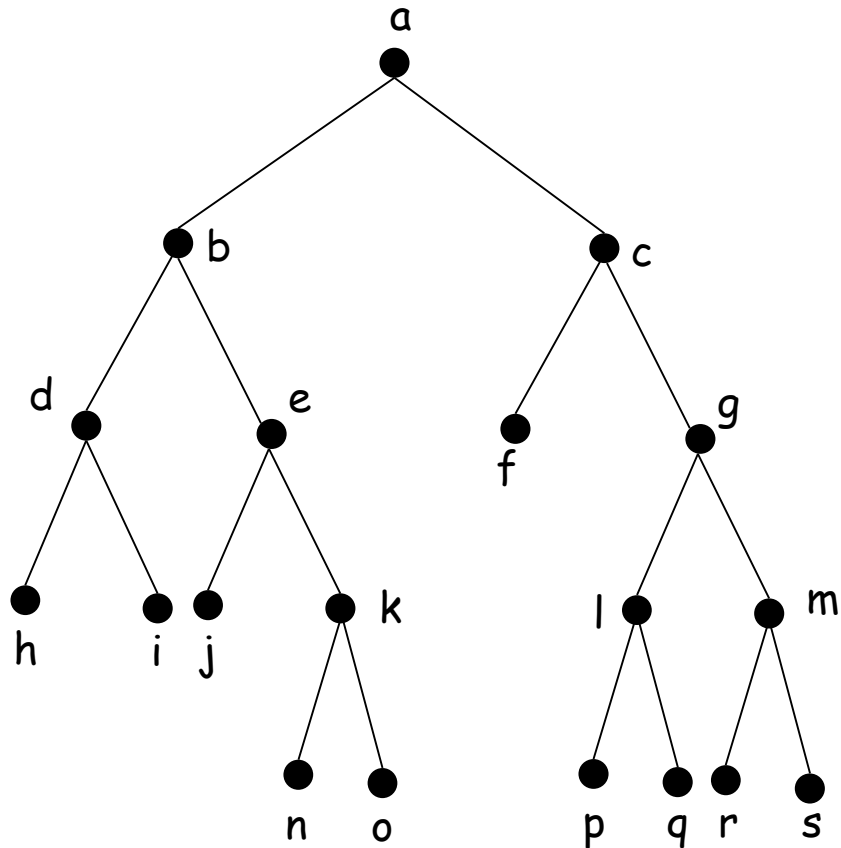
Árboles

Subárboles

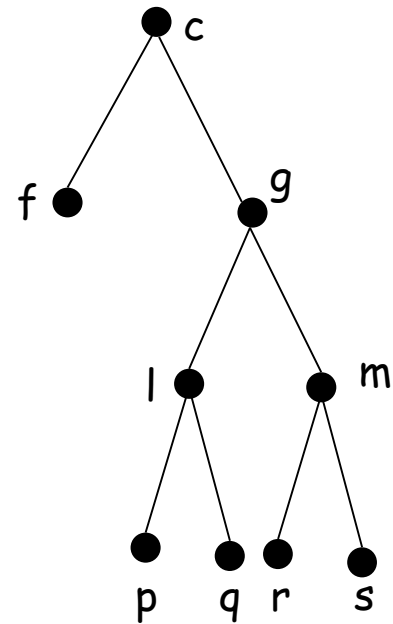


Árboles

Subárboles



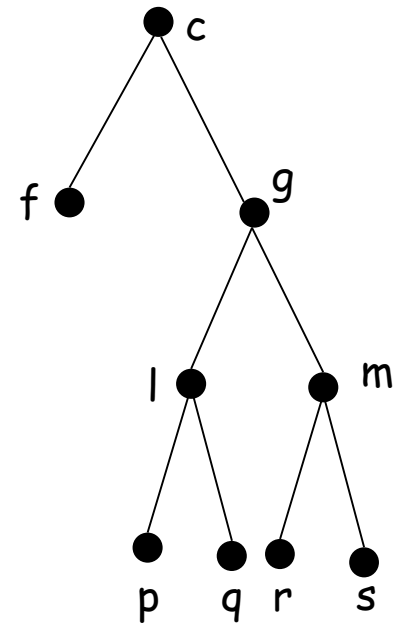
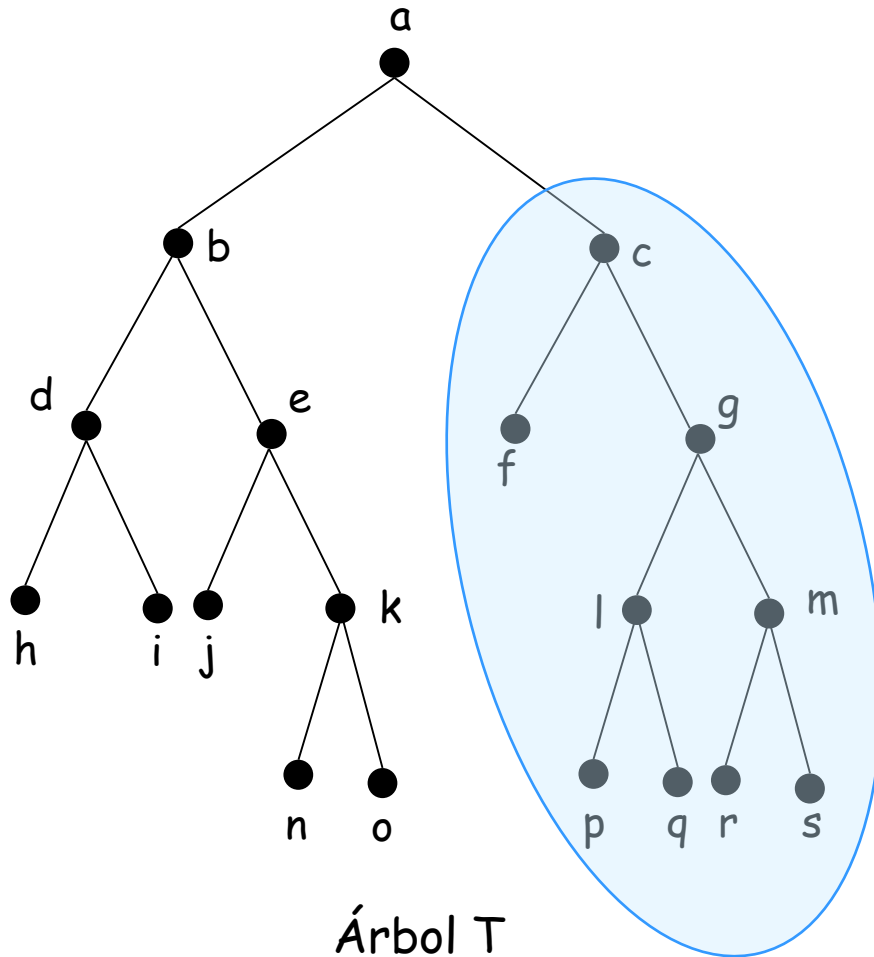
Árbol T



Subárbol de T con raíz en c

Árboles

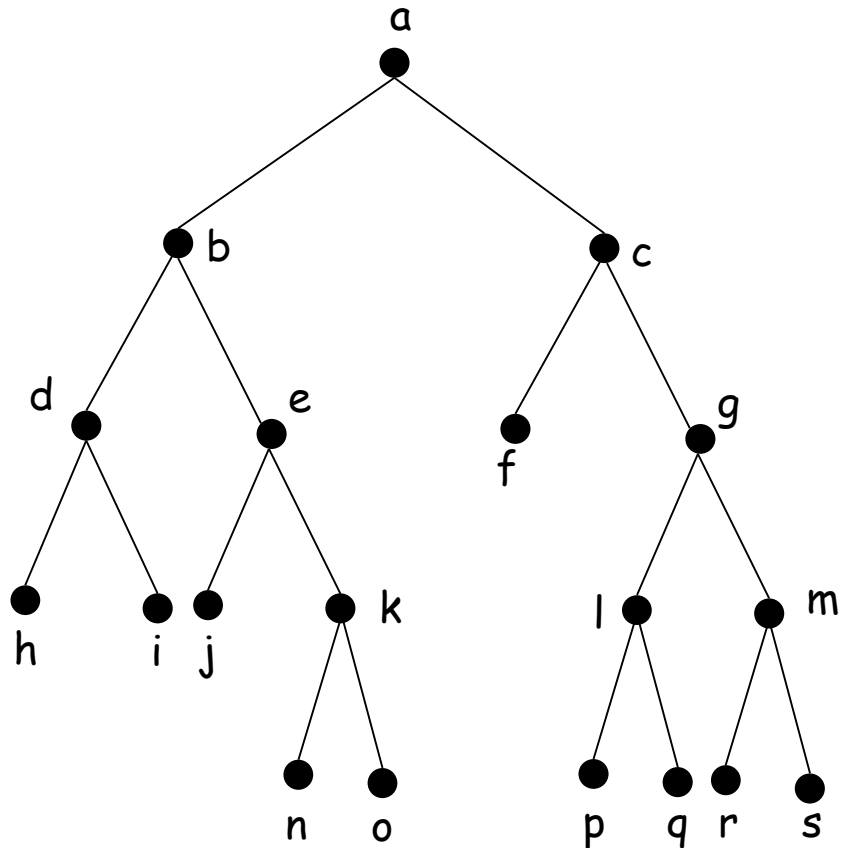
Subárboles



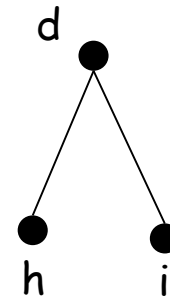
Subárbol de T con raíz en c

Árboles

Subárboles



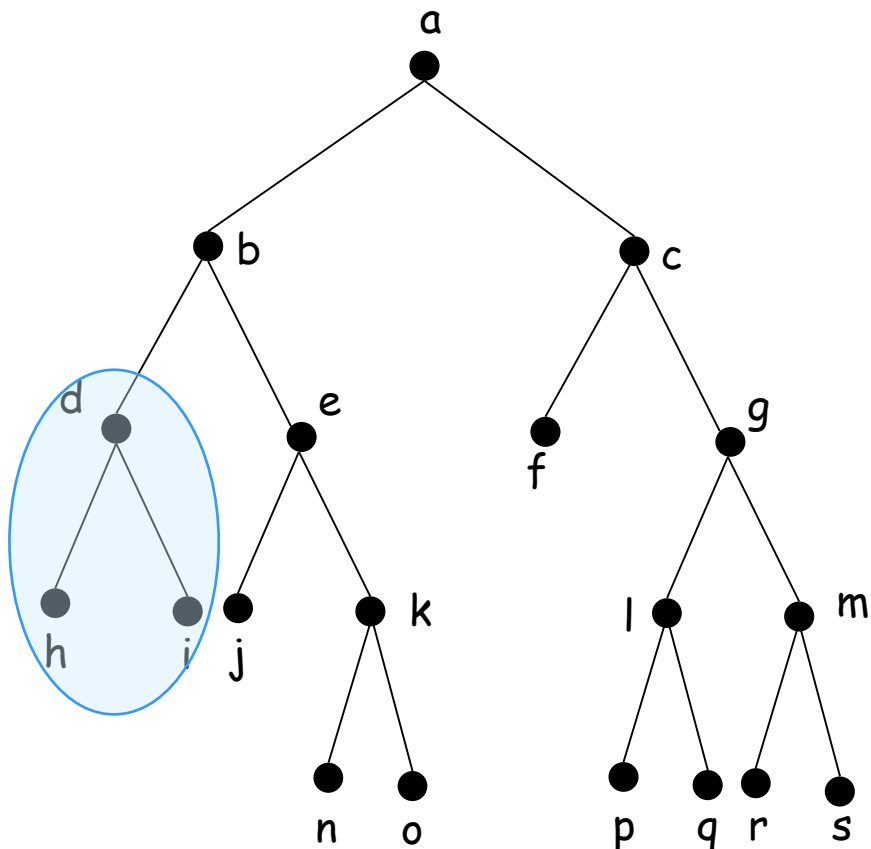
Árbol T



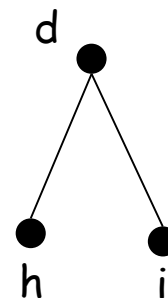
Subárbol de T con raíz en d

Árboles

Subárboles



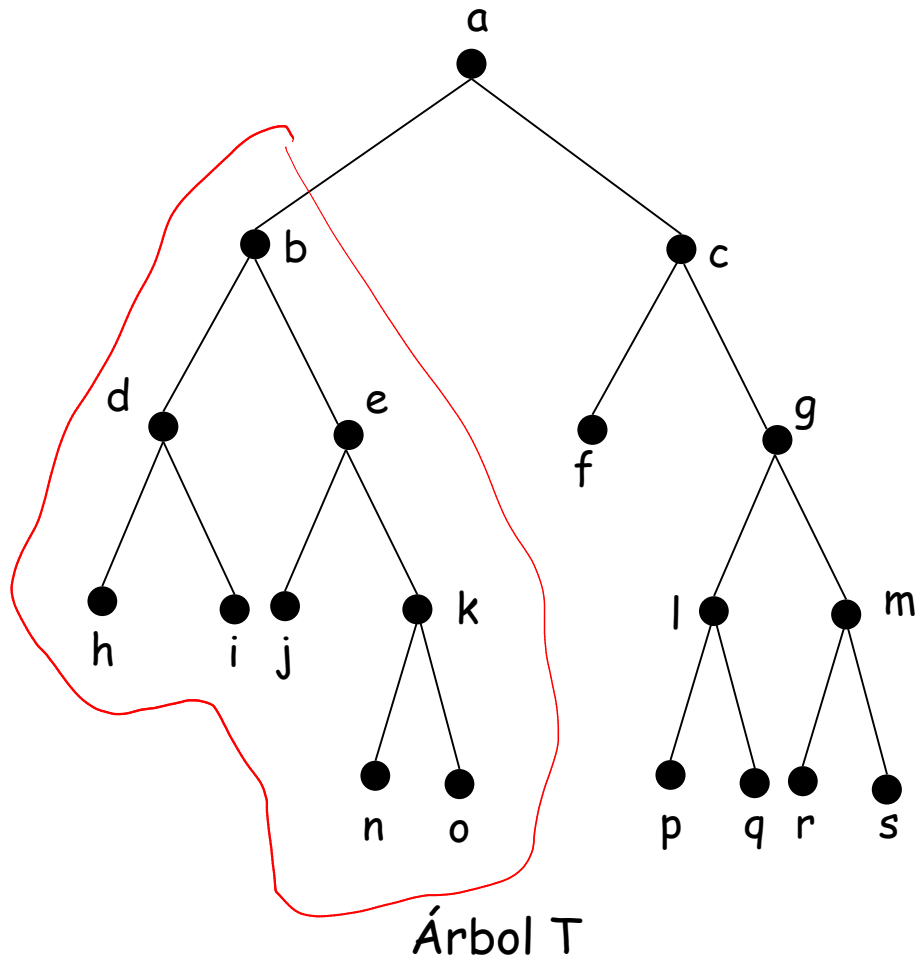
Árbol T



Subárbol de T con raíz en d

Árboles

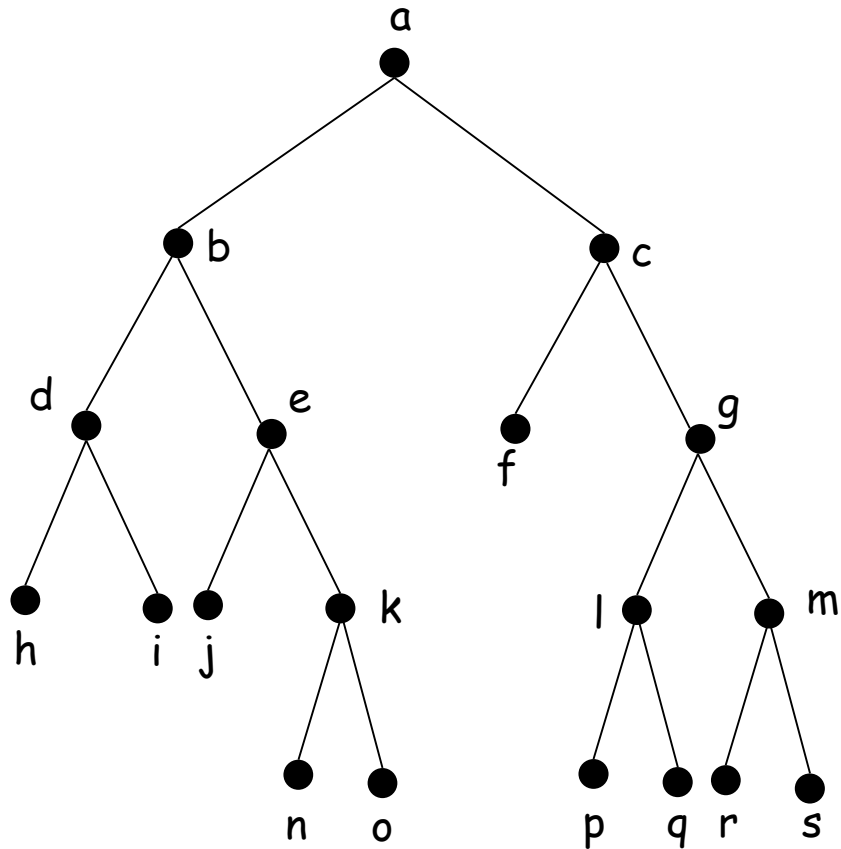
Subárboles



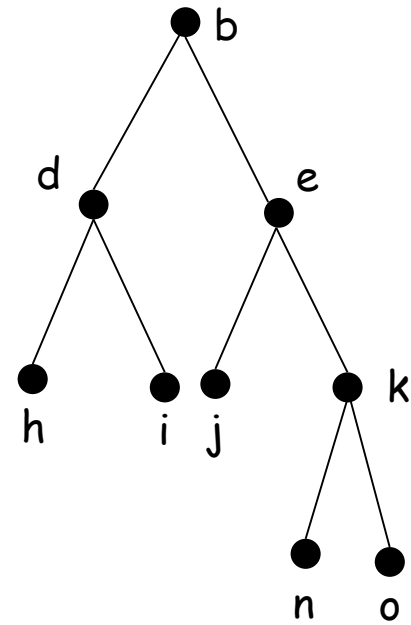
Subárbol de T con raíz en b

Árboles

Subárboles



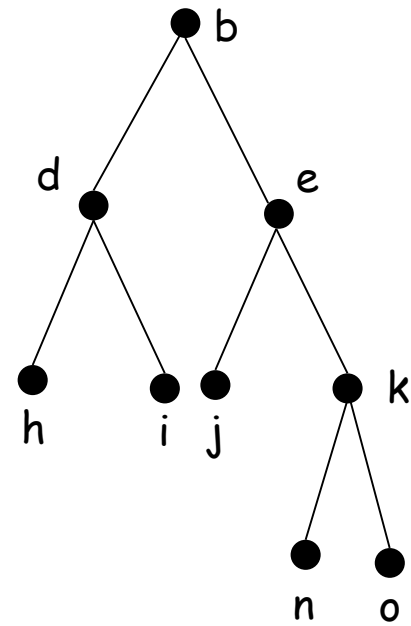
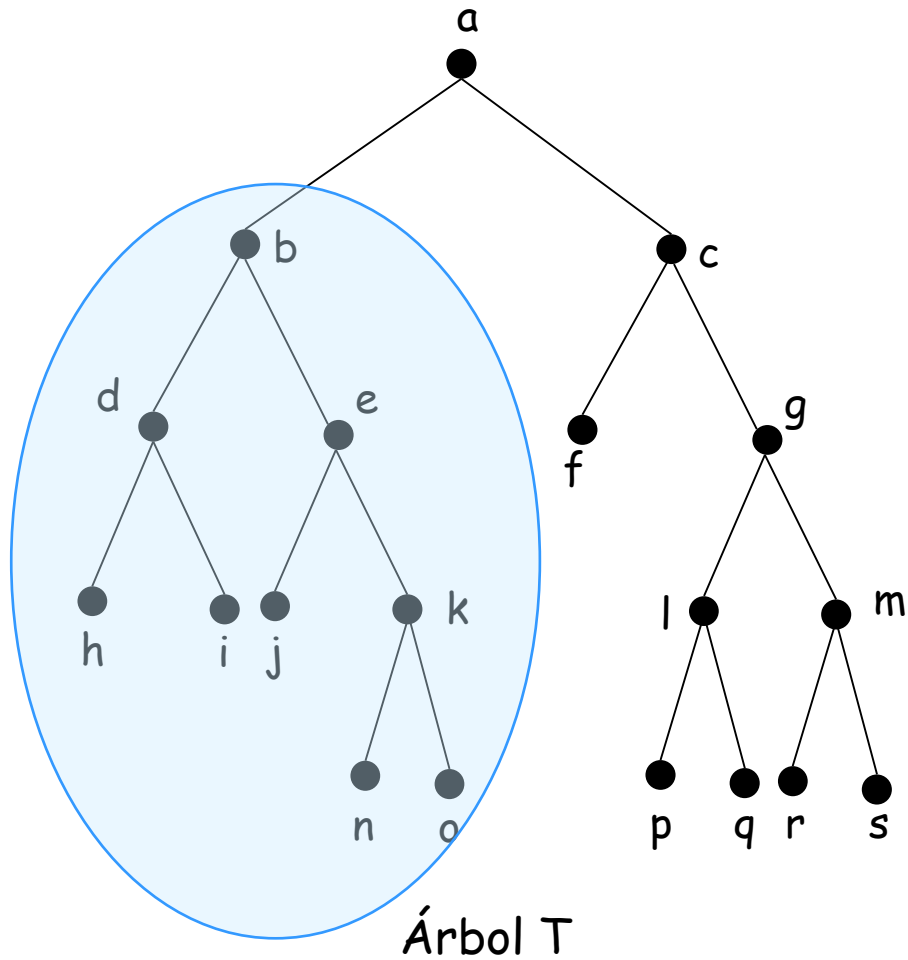
Árbol T



Subárbol de T con raíz en b

Árboles

Subárboles



Subárbol de T con raíz en b

Árboles

Aplicaciones de los árboles

- Árboles de juego ✖
- Árboles binarios de búsqueda
- Árboles de decisión

Árboles

Árboles de juego

- Se modelan los posibles movimientos de cada jugador en un juego con adversario
- Sirve para analizar el efecto de las jugadas

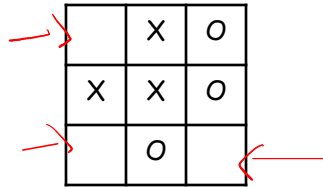
Árboles

Teoría de juegos

- Construir el árbol de juego
- Analizar el árbol

Árboles

Construir el árbol de juego



A 3x3 tic-tac-toe board with the following state:

	X	O
X	X	O
	O	

Red arrows point to the empty cells at (1,1), (3,1), and (3,3), indicating the possible moves for player X.

- La jugada es de (X)

	X	O
X	X	O
	O	

	X	O
X	X	O
	O	

X	X	O
X	X	O
	O	

	X	O
X	X	O
X	O	

	X	O
X	X	O
	O	X

	X	O
X	X	O
	O	

X	X	O
X	X	O
	O	

	X	O
X	X	O
X	O	

	X	O
X	X	O
	O	X

X	X	O
X	X	O
O	O	

X	X	O
X	X	O
	O	O

	X	O
X	X	O
	O	

X	X	O
X	X	O
	O	

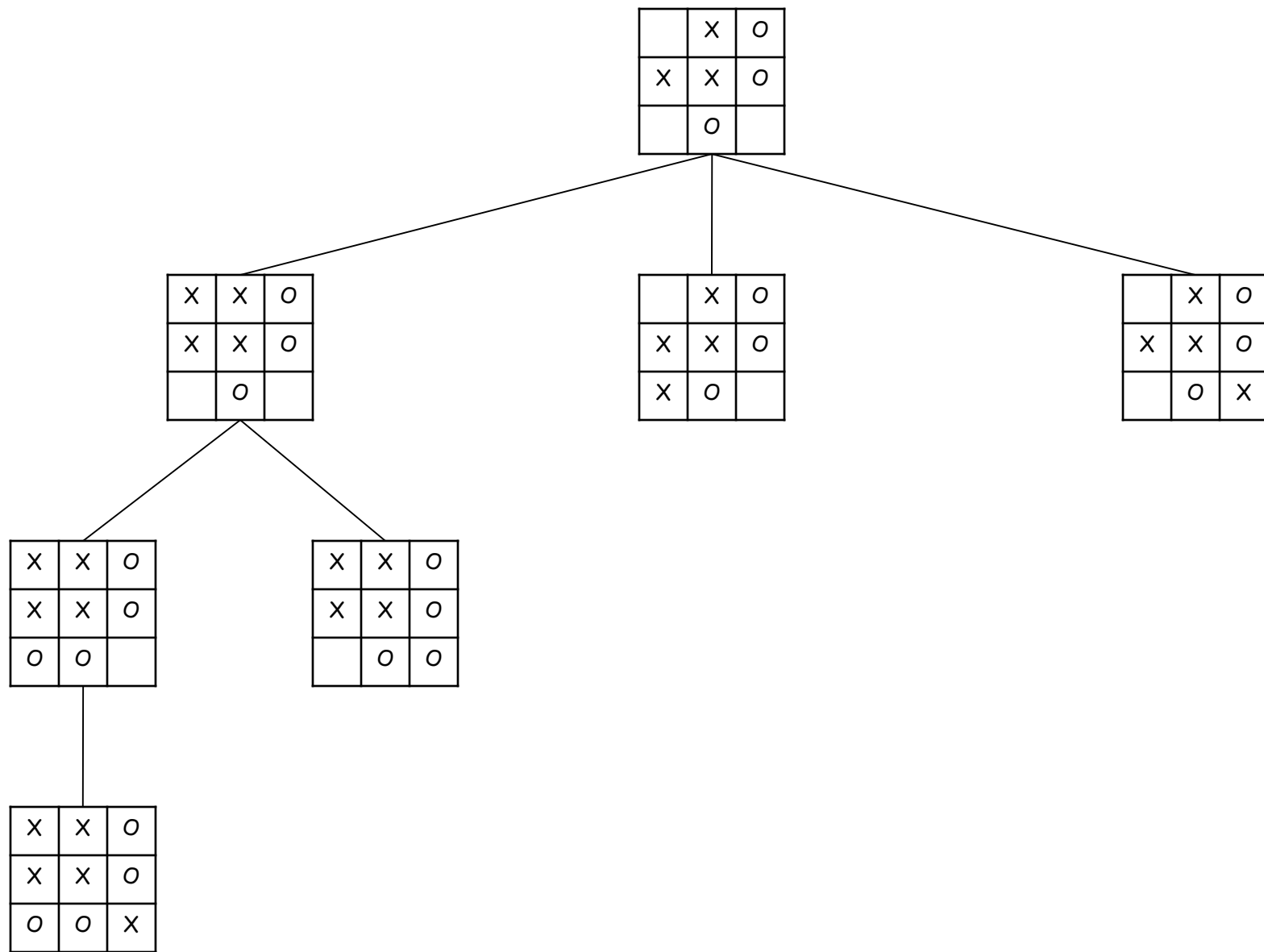
	X	O
X	X	O
X	O	

	X	O
X	X	O
	O	X

X	X	O
X	X	O
O	O	

X	X	O
X	X	O
	O	O

X	X	O
X	X	O
O	O	X



**Gana
jugador1**

	X	O
X	X	O
	O	

X	X	O
X	X	O
	O	

	X	O
X	X	O
X	O	

	X	O
X	X	O
	O	X

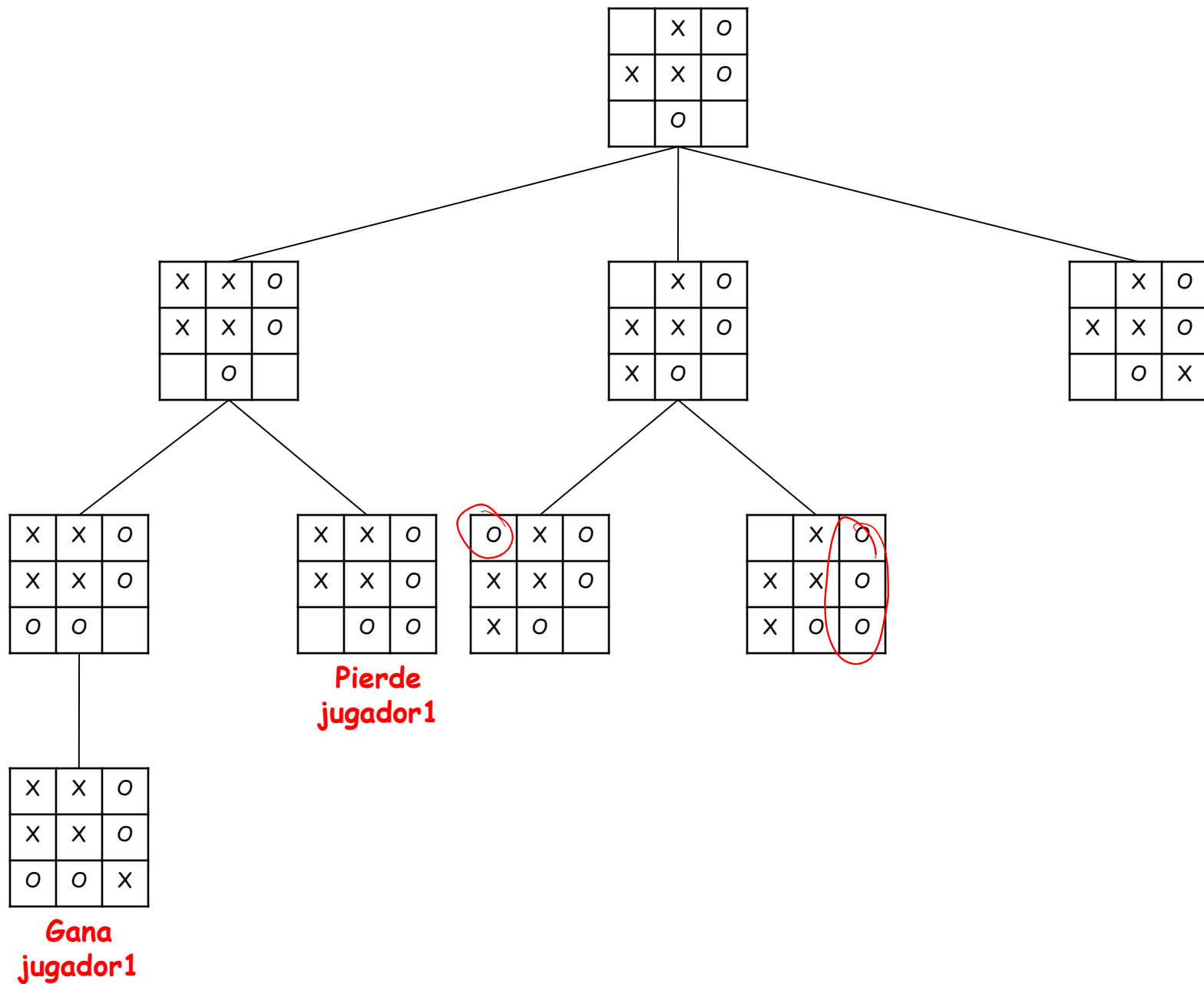
X	X	O
X	X	O
O	O	

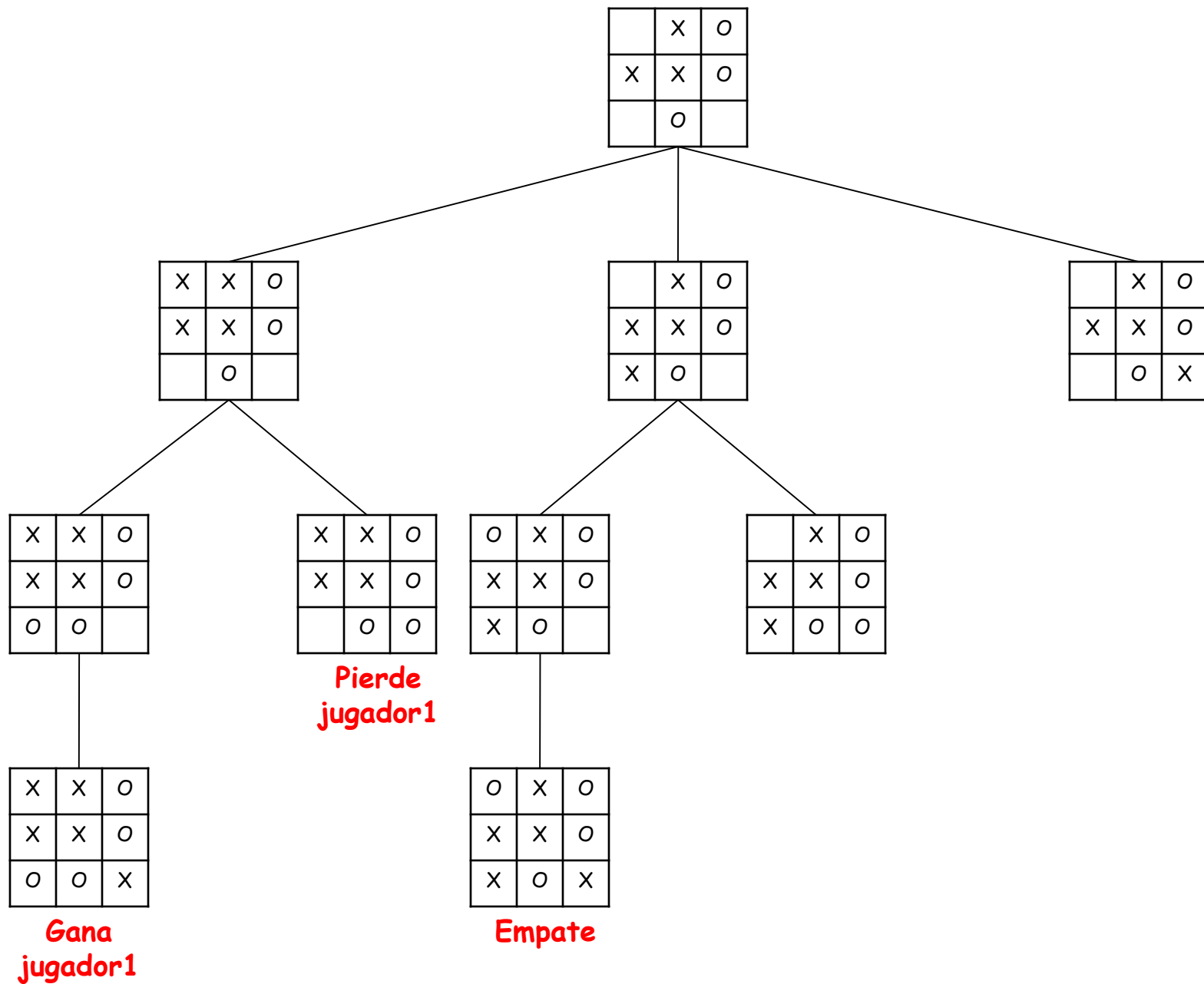
X	X	O
X	X	O
	O	O

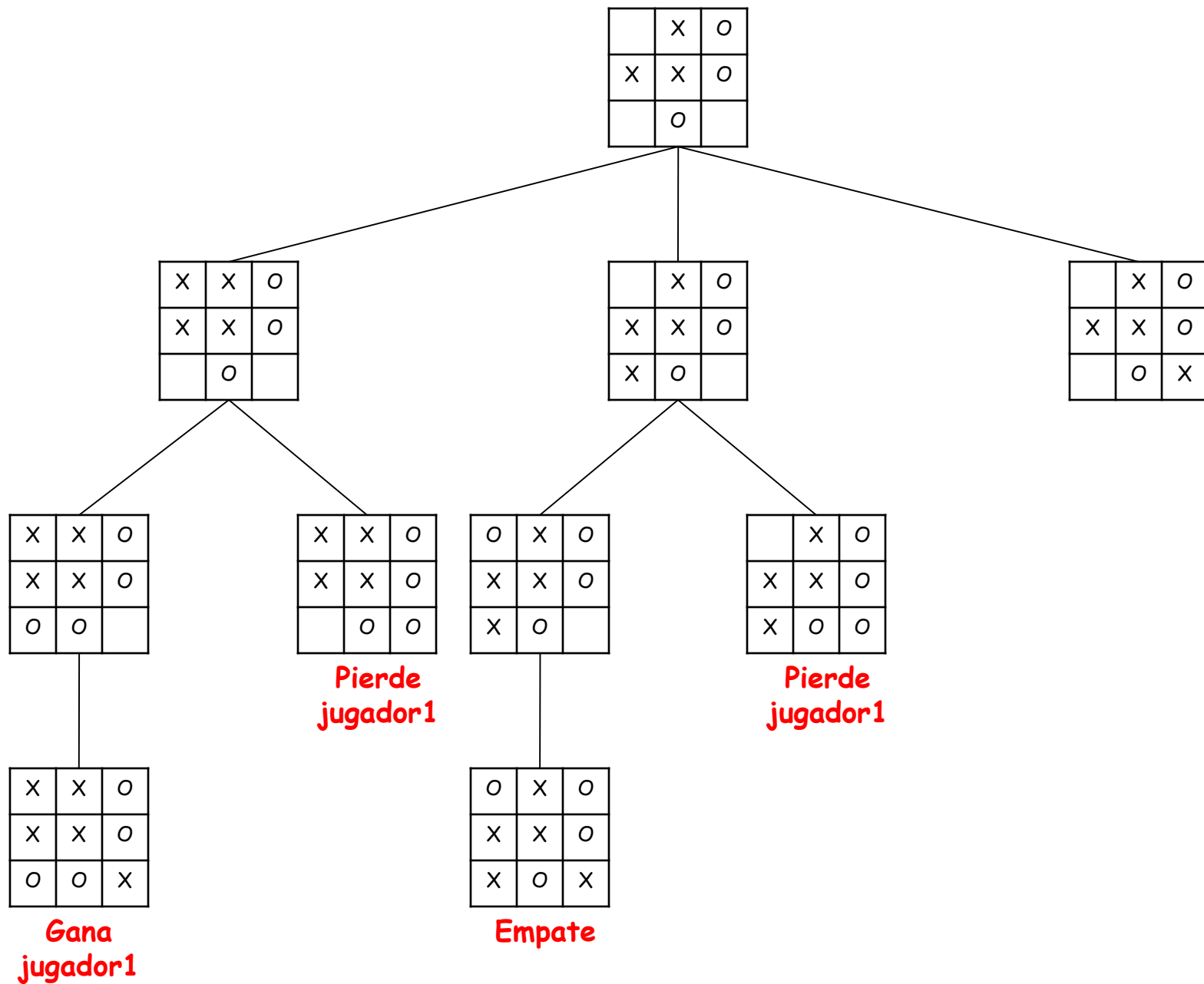
**Pierde
jugador1**

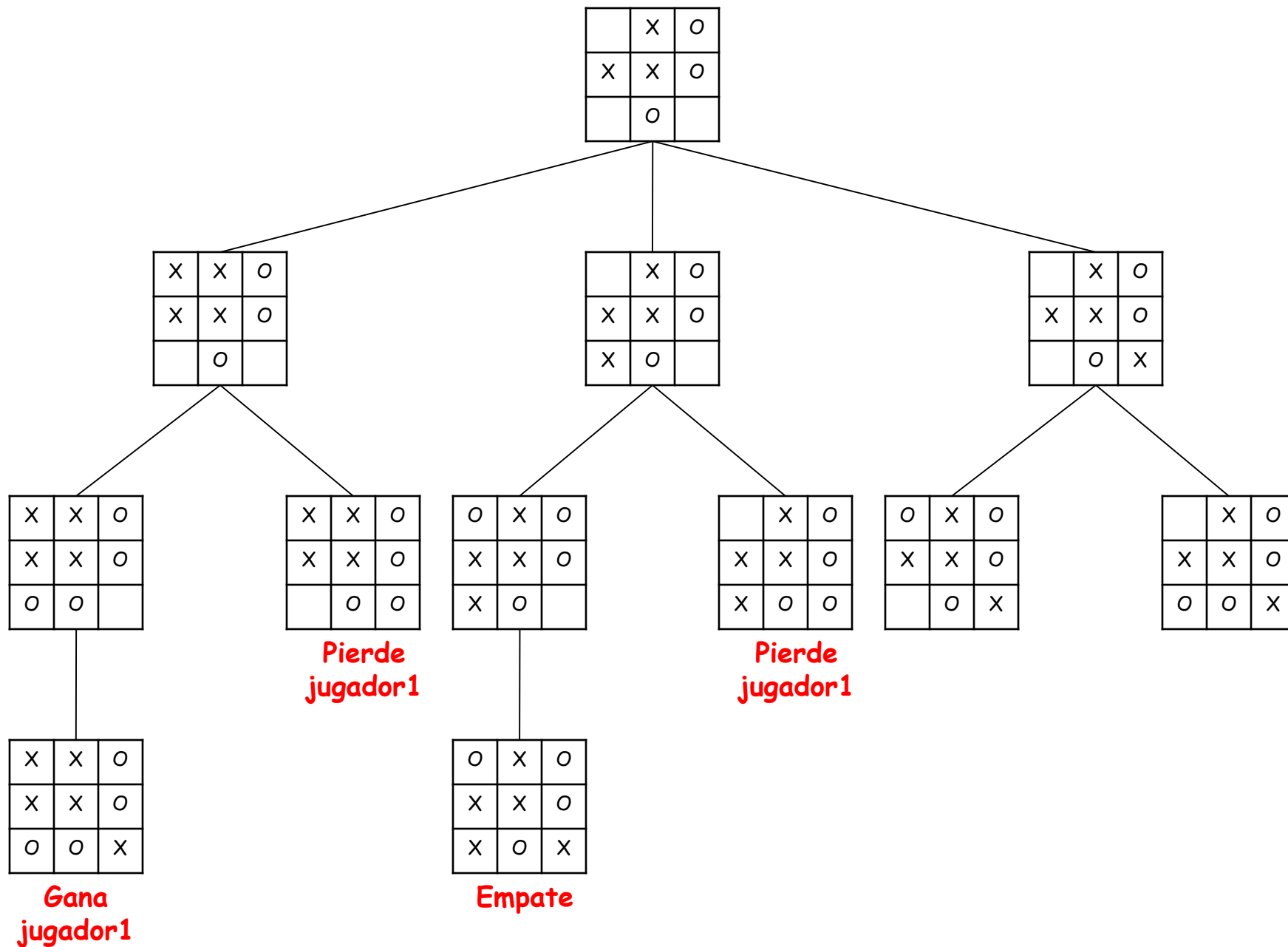
X	X	O
X	X	O
O	O	X

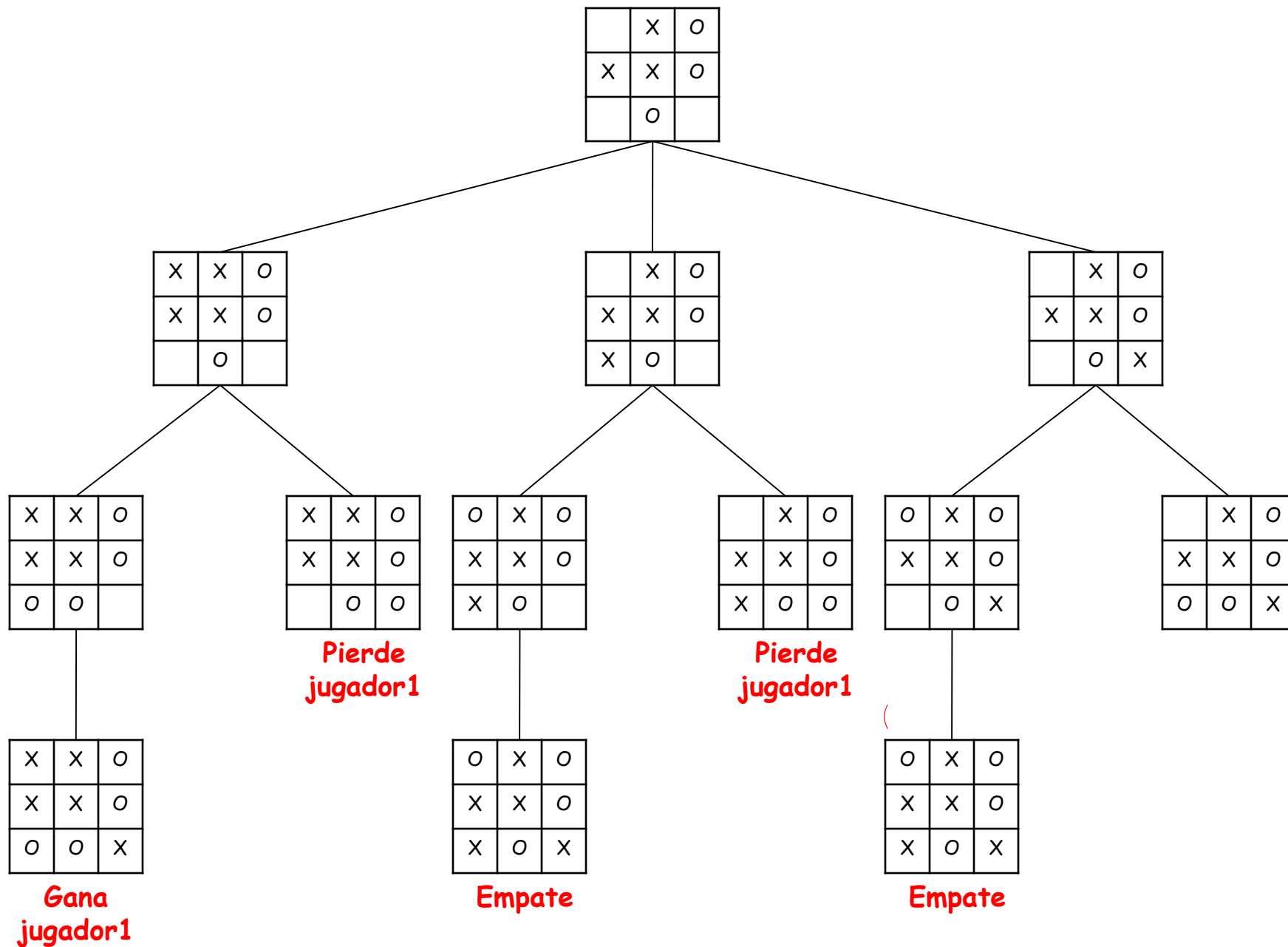
**Gana
jugador1**

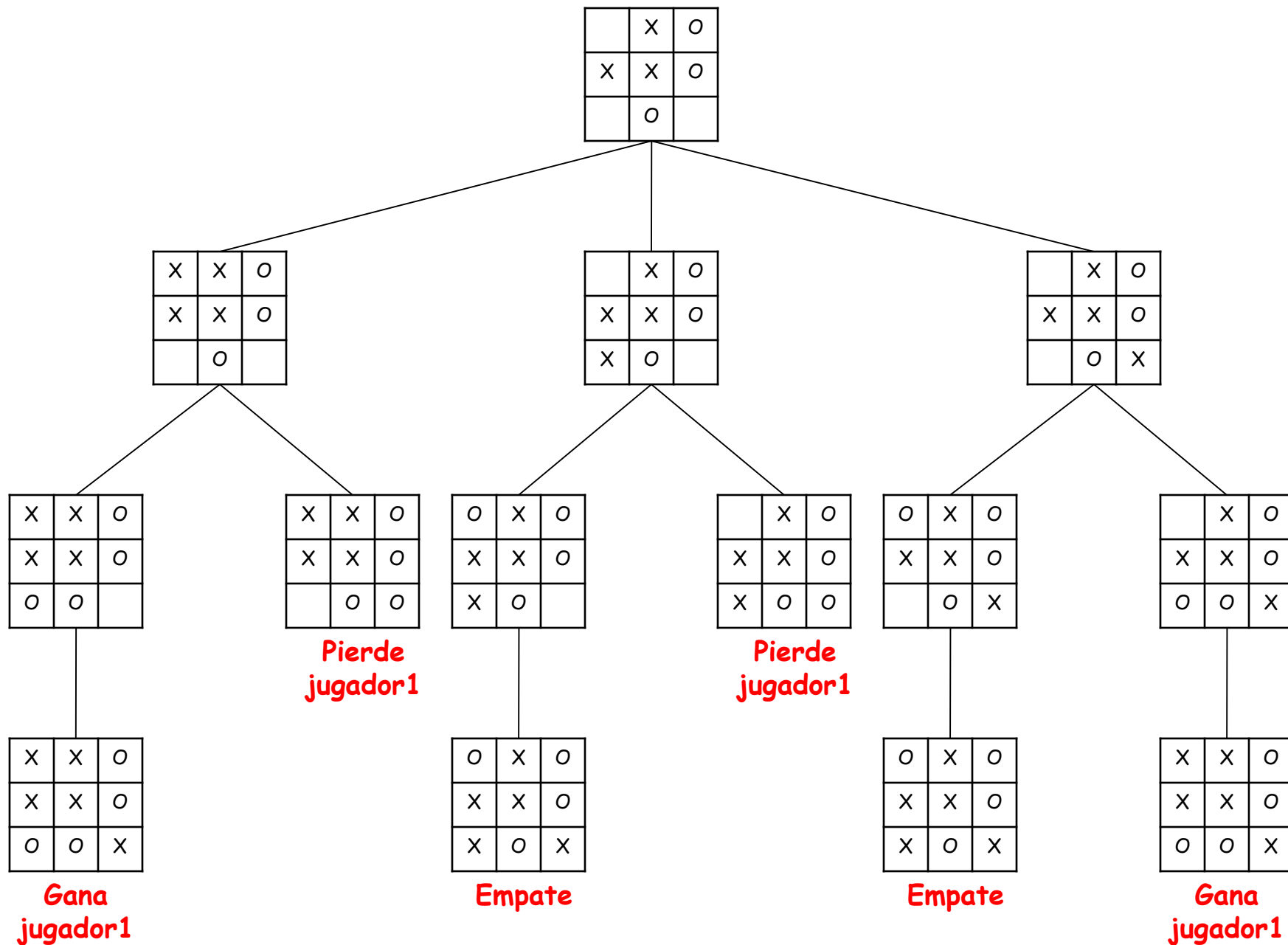




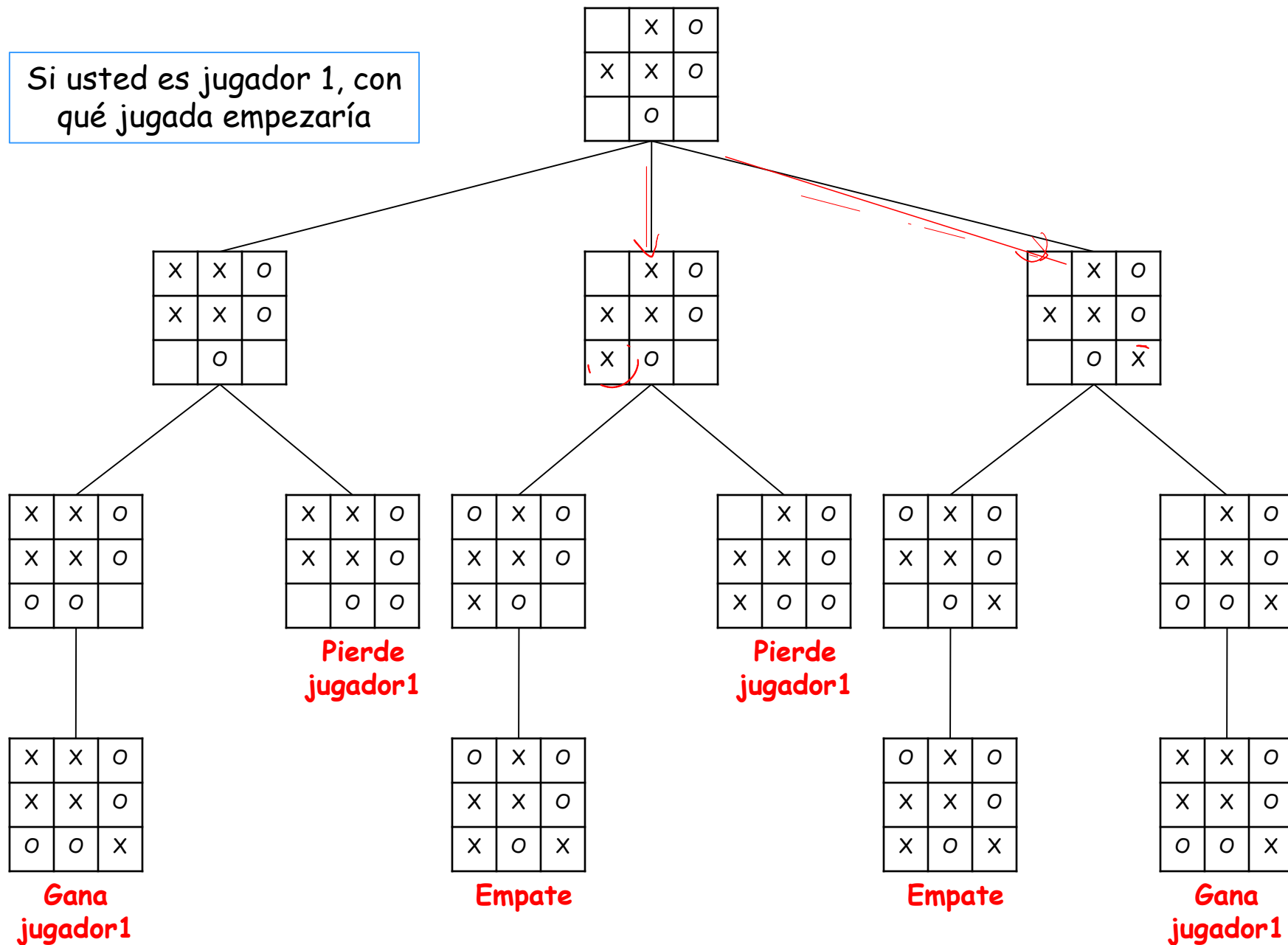








Si usted es jugador 1, con
qué jugada empezaría



J1 ➡

	X	O
X	X	O
	O	

J2 ➡

X	X	O
X	X	O
	O	

	X	O
X	X	O
X	O	

	X	O
X	X	O
	O	X

J1 ➡

X	X	O
X	X	O
O	O	

X	X	O
X	X	O
	O	O

O	X	O
X	X	O
X	O	

	X	O
X	X	O
X	O	O

O	X	O
X	X	O
	O	X

	X	O
X	X	O
O	O	X

Pierde
jugador1

Pierde
jugador1

J2 ➡

X	X	O
X	X	O
O	O	X

O	X	O
X	X	O
X	O	X

O	X	O
X	X	O
X	O	X

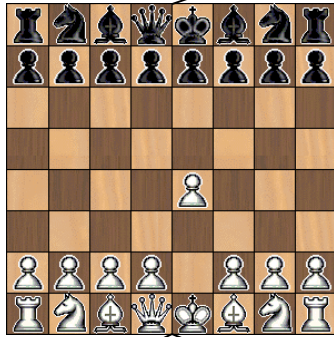
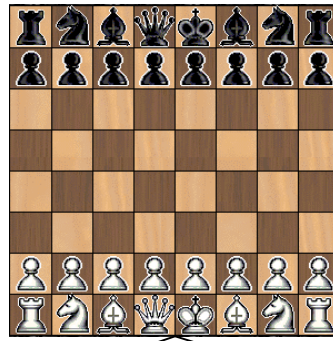
X	X	O
X	X	O
O	O	X

Gana
jugador1

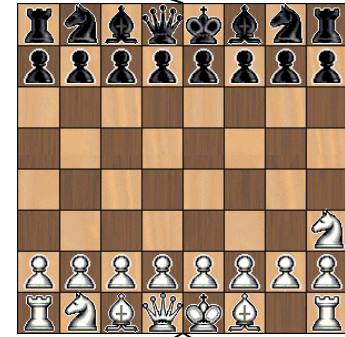
Empate

Empate

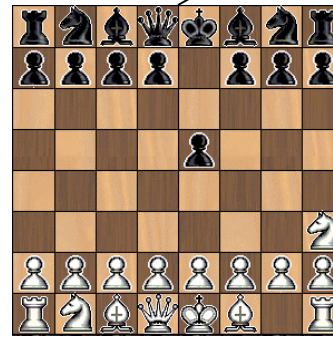
Gana
jugador1



...



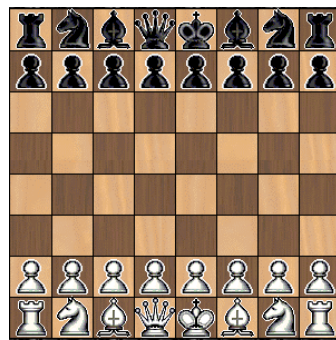
...



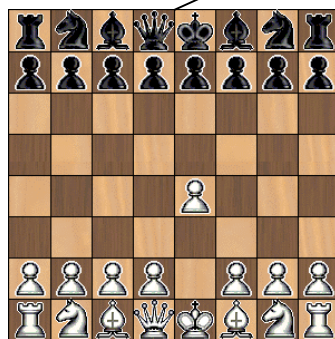
...



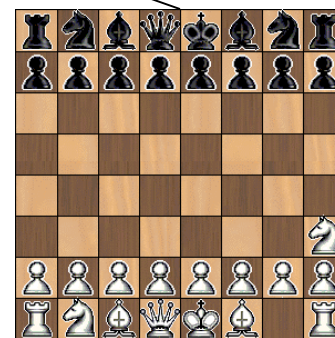
Jugador1 →



Jugador2 →



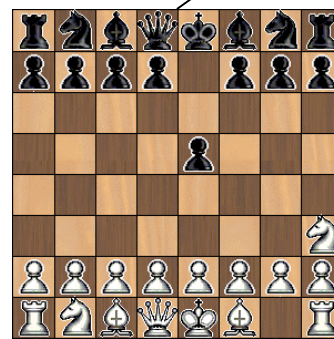
...



Jugador1 →



...



...

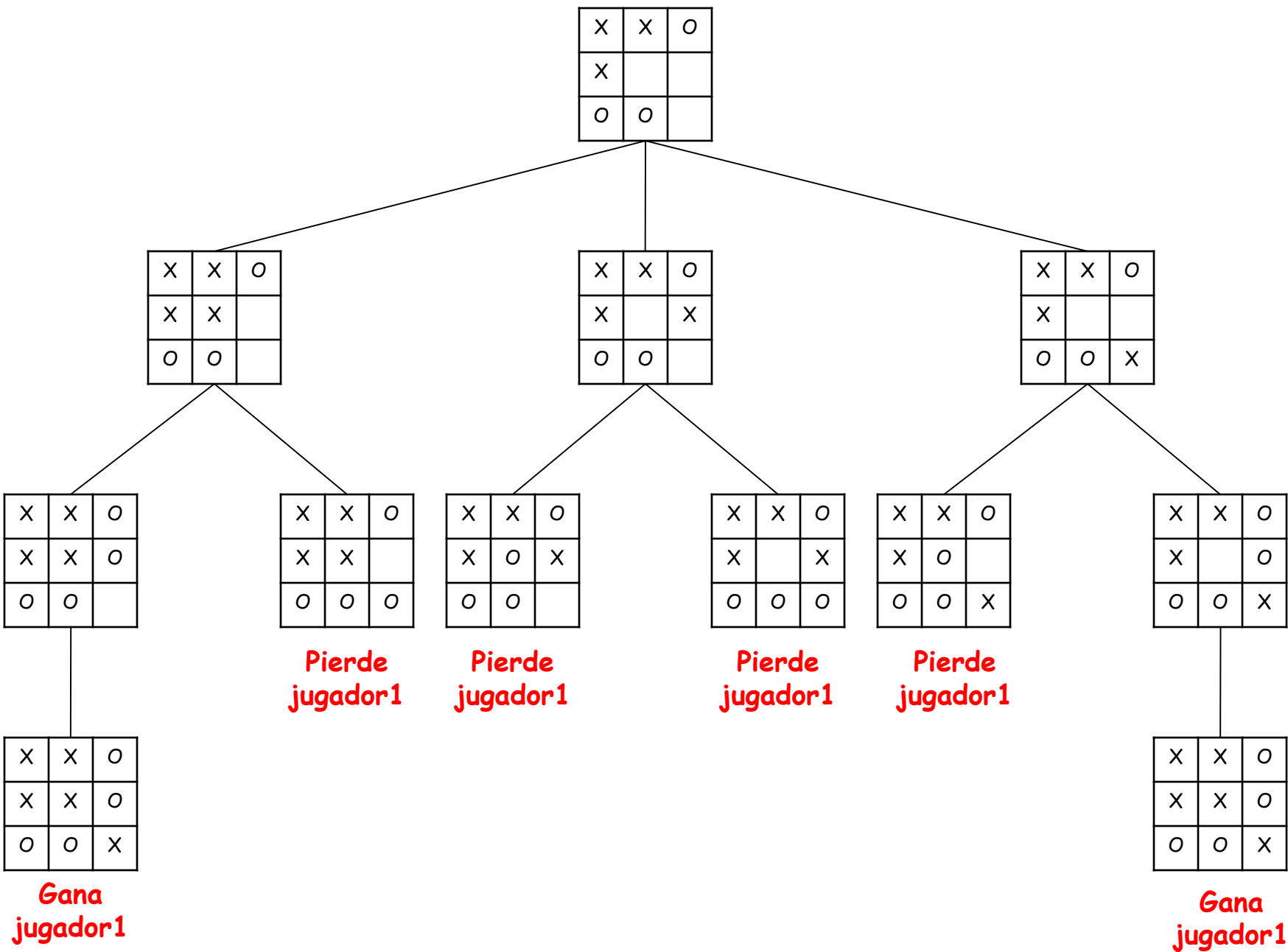


Árboles

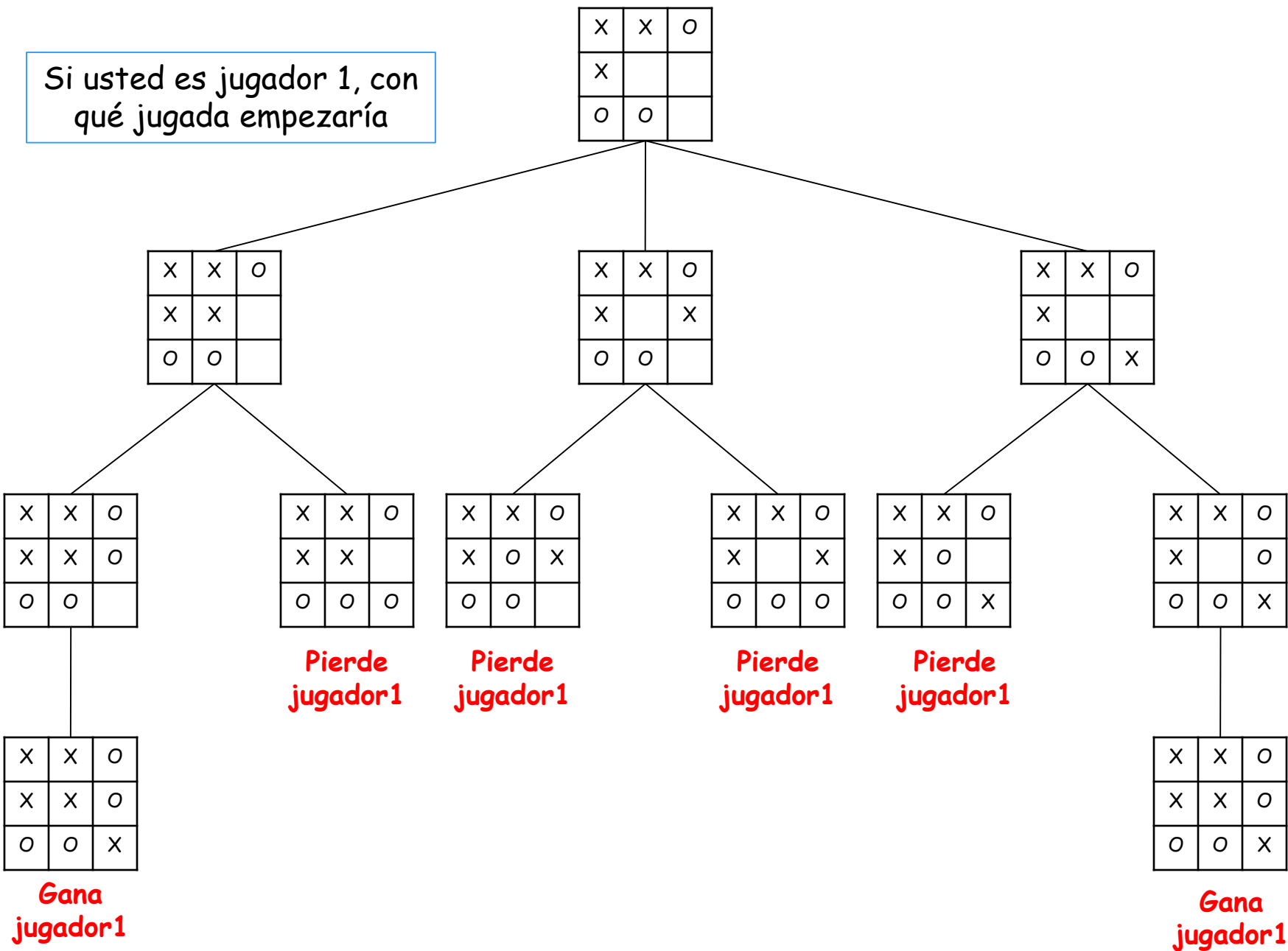
Construir el árbol de juego

x	x	o
x		
o	o	

- La jugada es de (X)



Si usted es jugador 1, con
qué jugada empezaría



Árboles

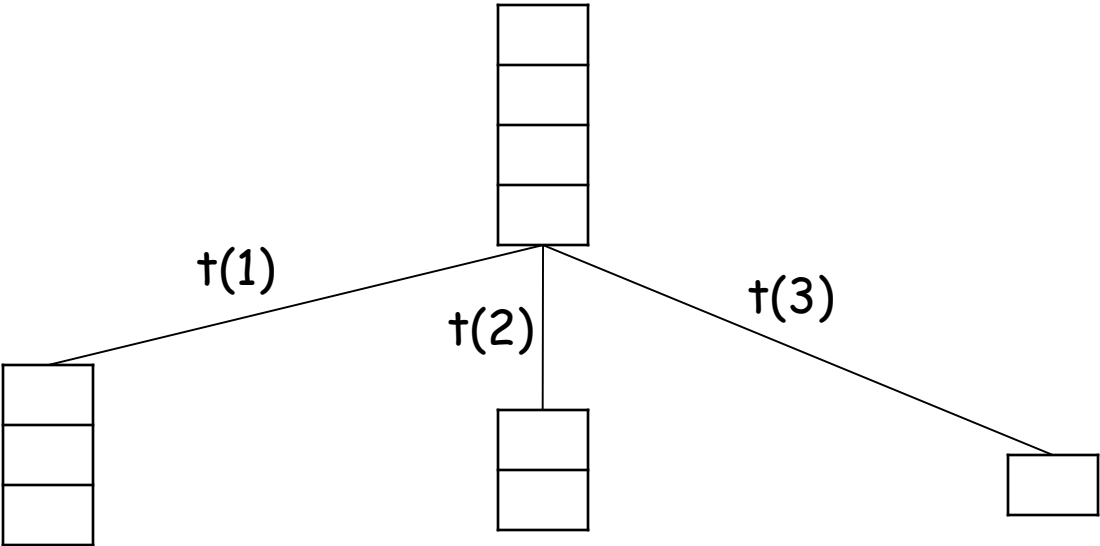
Construir el árbol de juego



- **El juego del NIM.** Se tiene una pila de 4 fichas de la cual cada jugador puede tomar 1, 2 ó 3. El objetivo de cada jugador es obligar a su adversario a tomar la última ficha. Como los elementos están apilados, solo se pueden tomar fichas de su tope

J1 →

J2 →



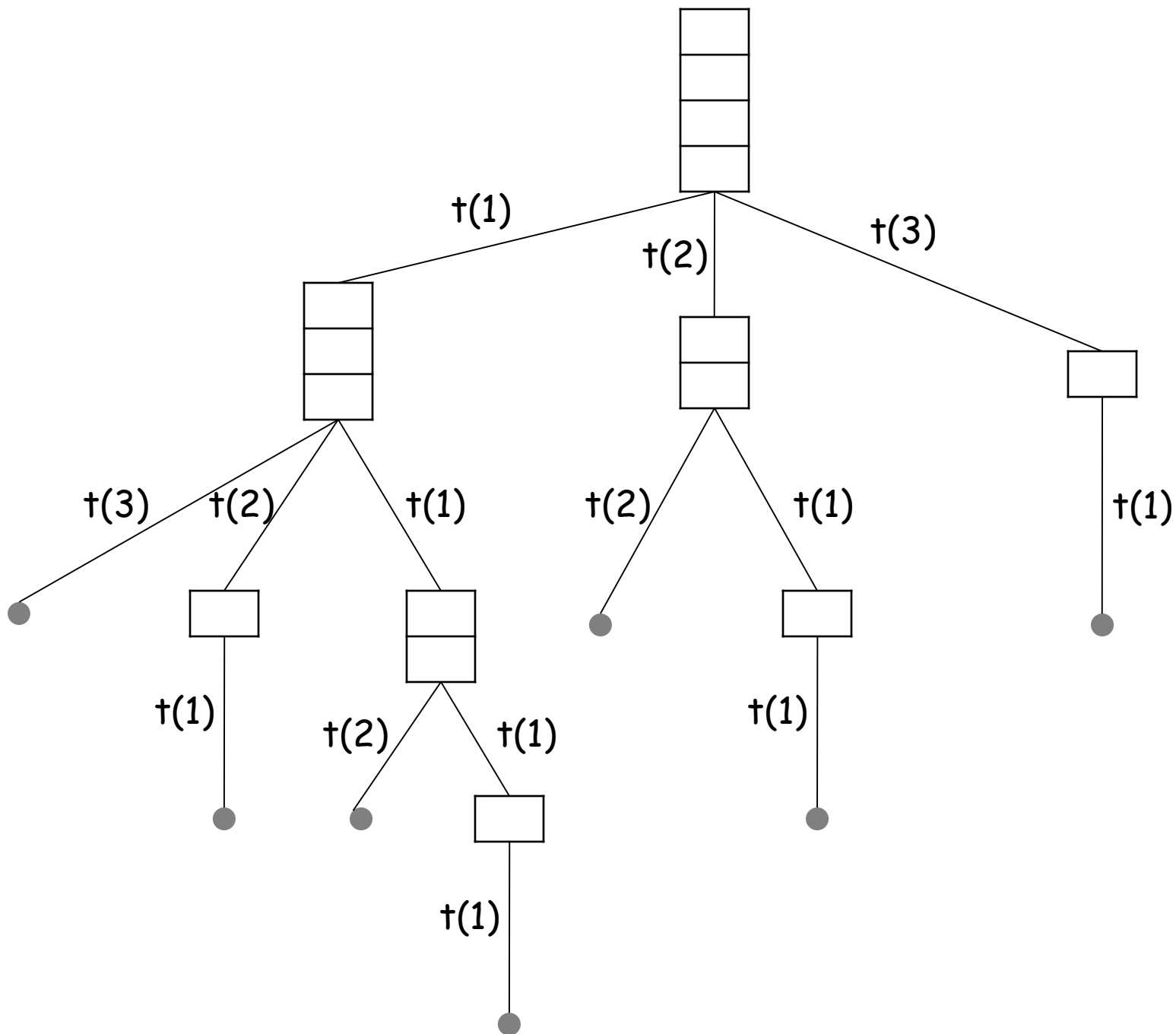
J1 →

J2 →

J1 →

J2 →

J1 →



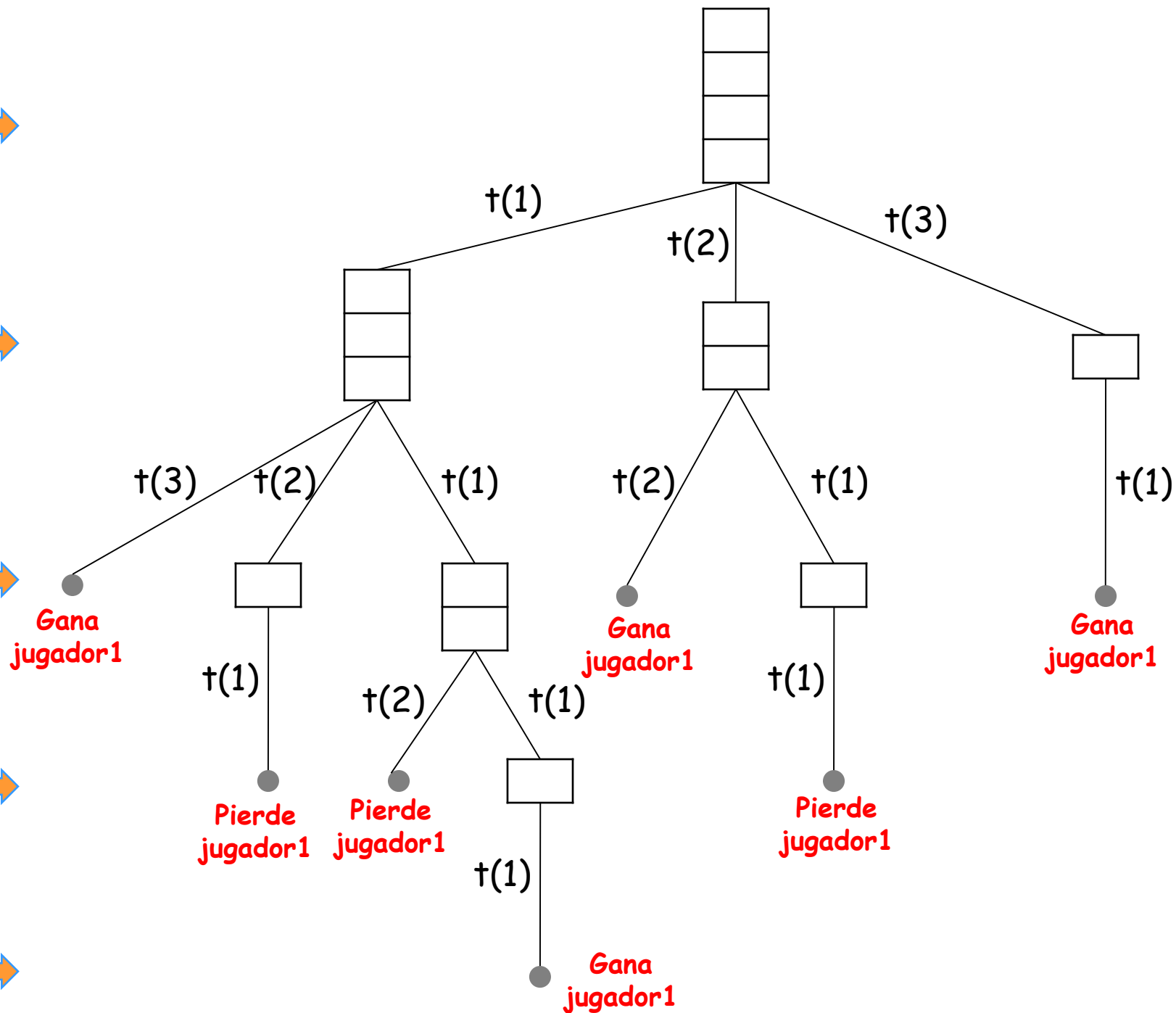
J1 →

J2 →

J1 →

J2 →

J1 →



Árboles

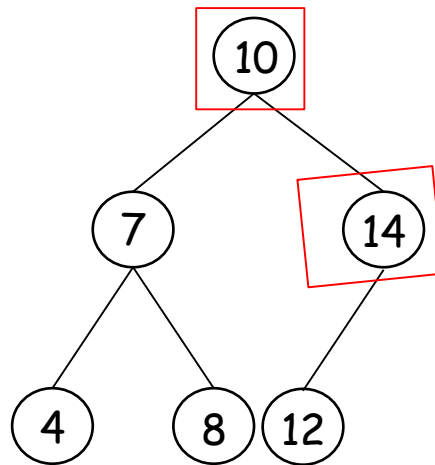
Aplicaciones de los árboles

- Árboles de juego
- Árboles binarios de búsqueda
- Árboles de decisión

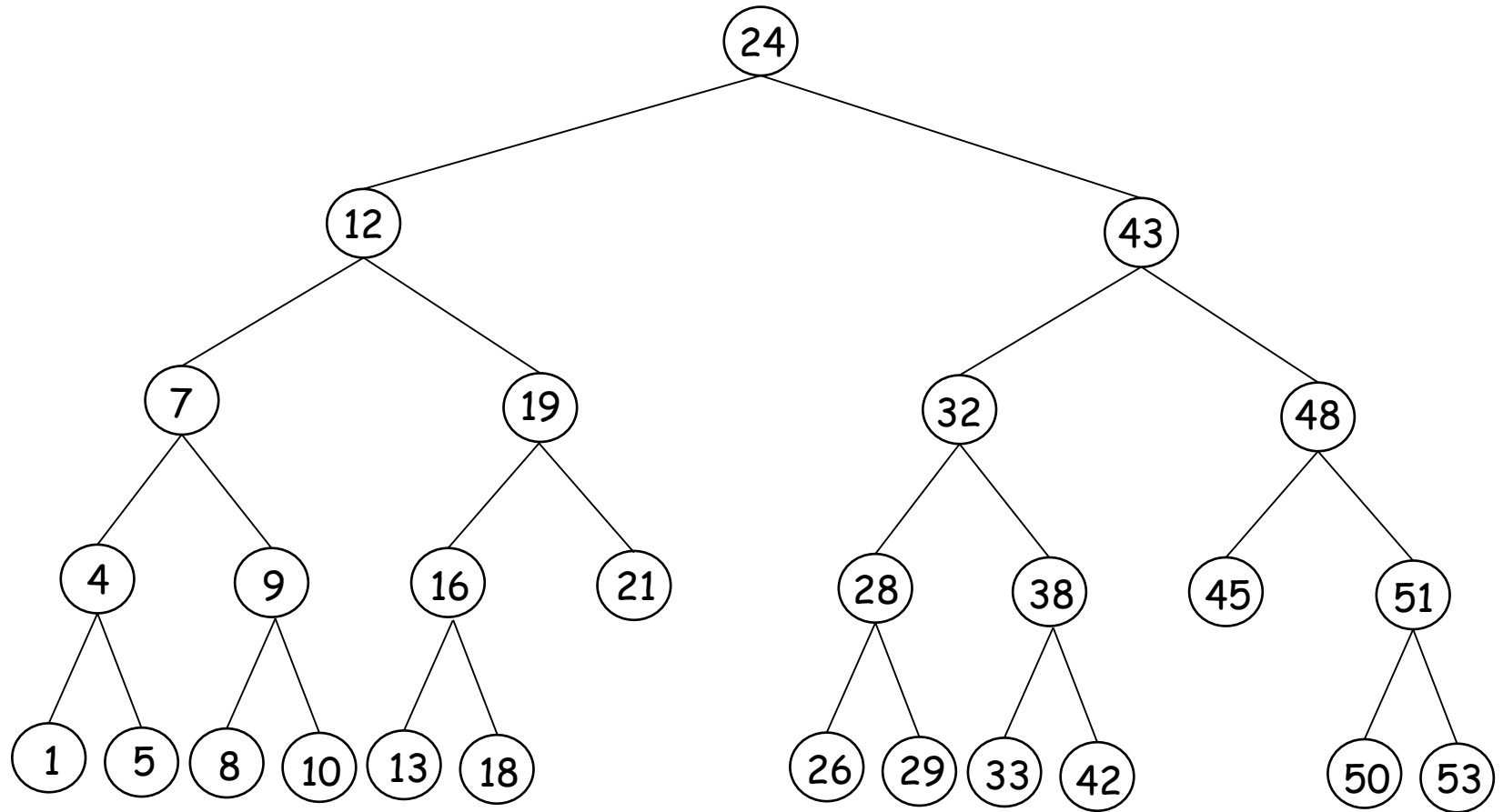
Árboles

Árboles binarios de búsqueda

Es un árbol binario en el que cada vértice tiene una llave. La llave de un vértice es mayor que las llaves de los vértices del subárbol izquierdo y menor que las llaves de los vértices del subárbol derecho



Árboles

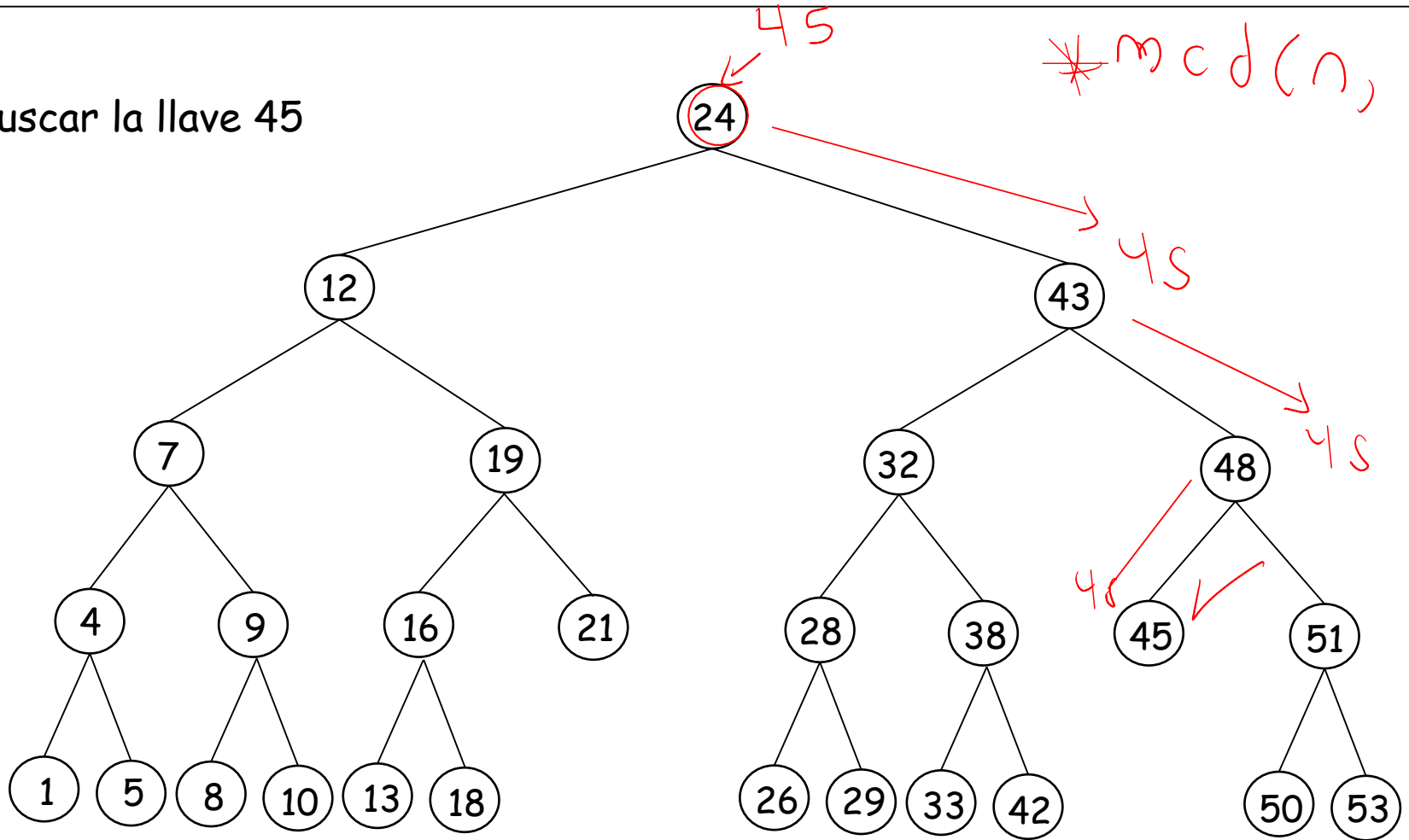


Árboles

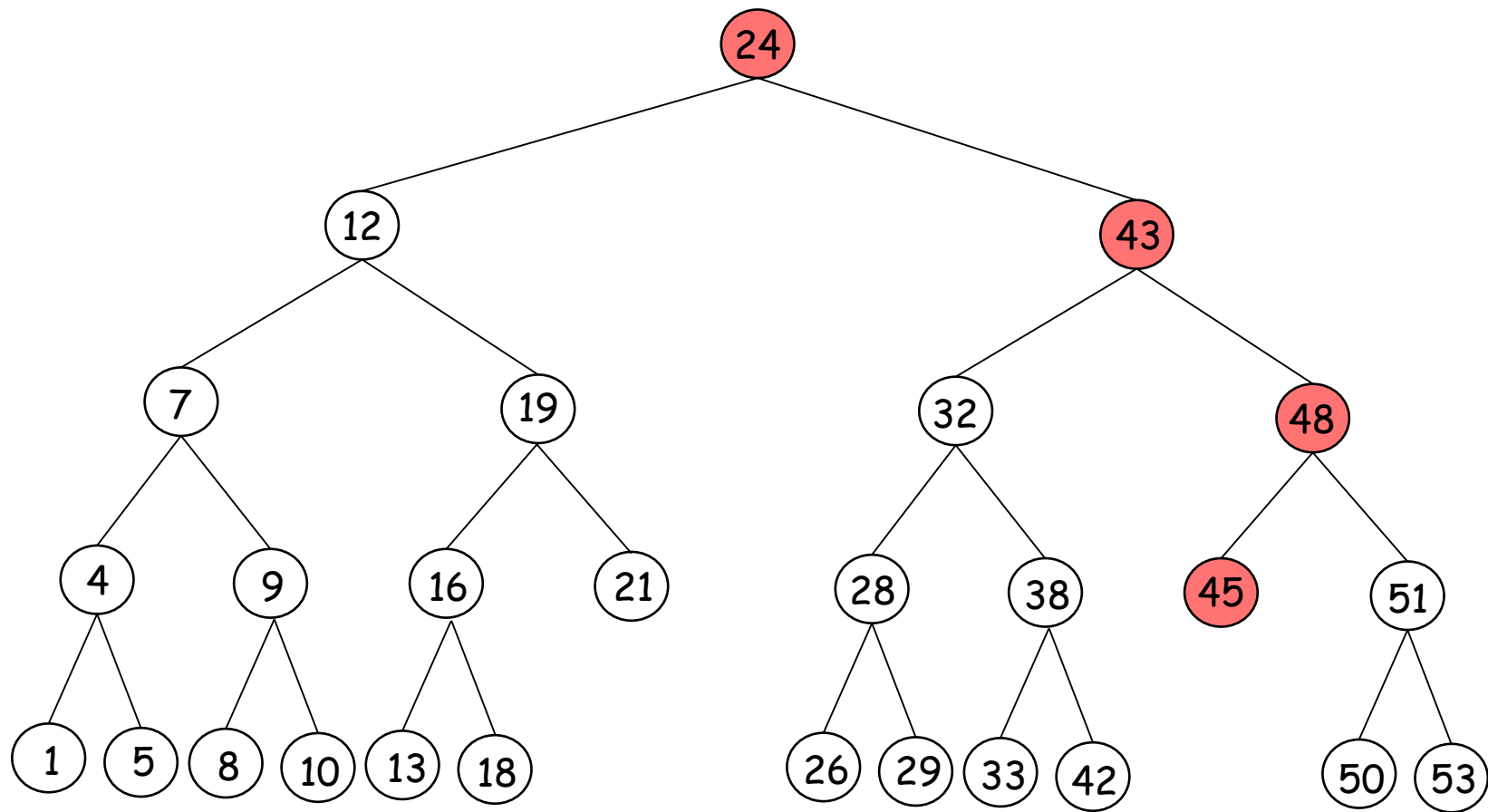
$$2 - \sqrt{n} = x$$

$$\gcd(n, x) = 1$$

Buscar la llave 45



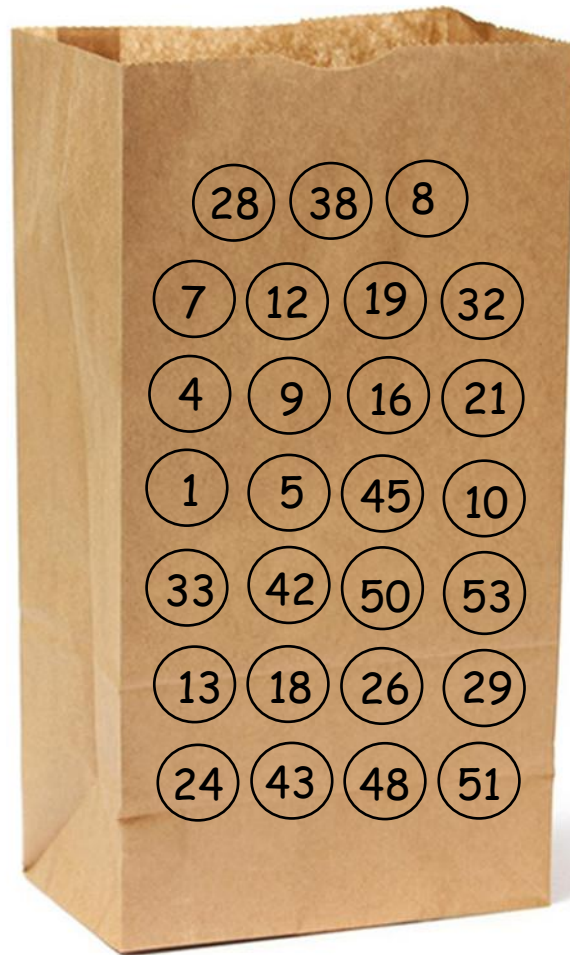
Árboles



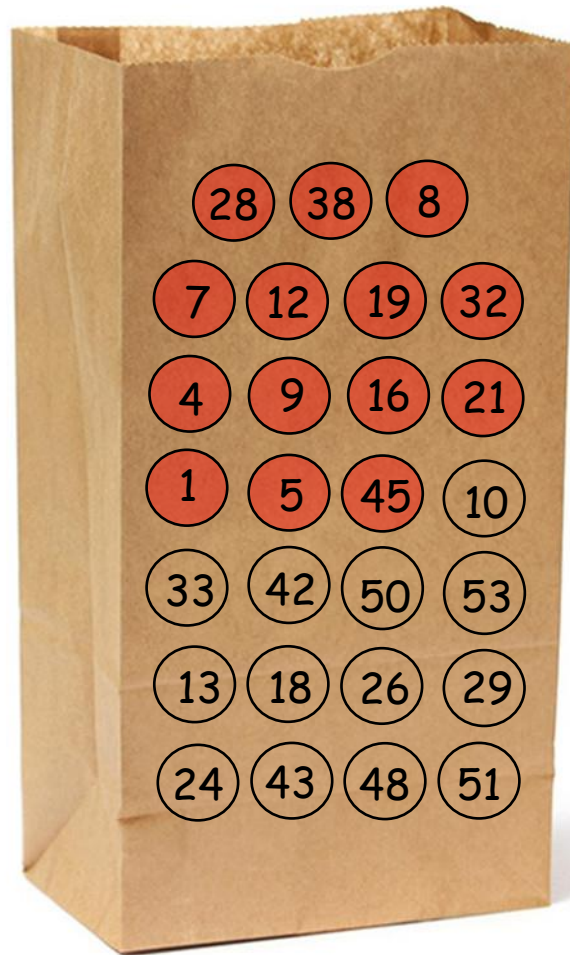
Se necesitan 4 comparaciones

Árboles

Buscar la llave 45



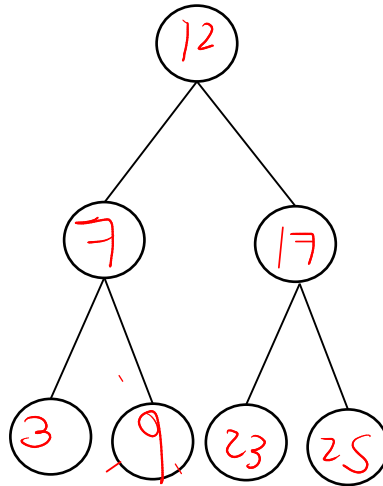
Árboles



Se necesitan 14 comparaciones

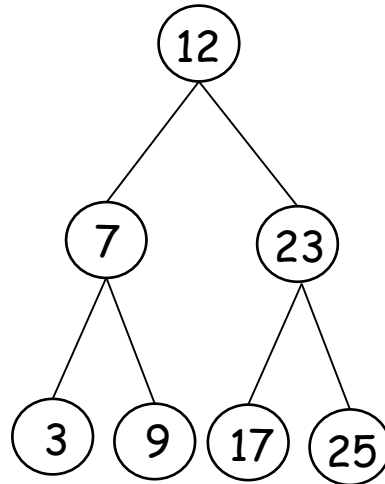
Árboles

Crear un árbol de búsqueda binaria con las llaves 3,7,9,12,17,23,25 que tenga la siguiente estructura



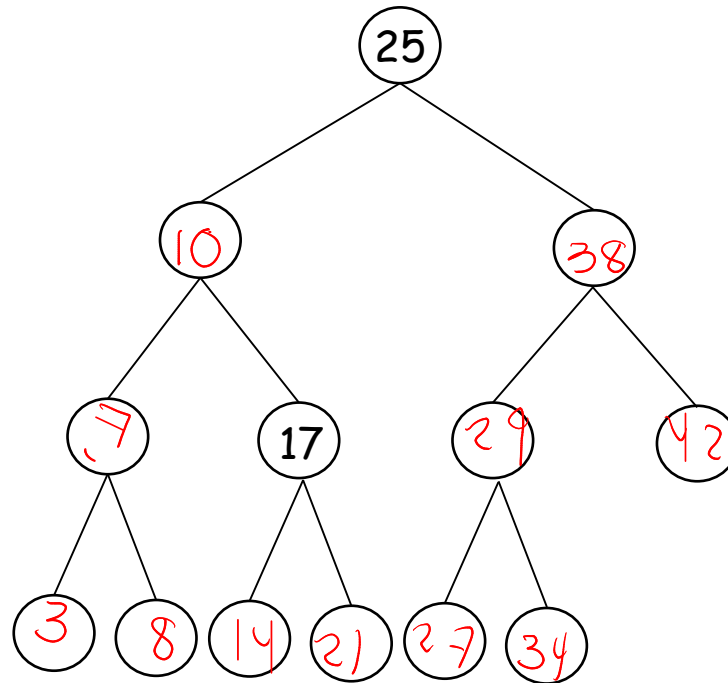
Árboles

Crear un árbol de búsqueda binaria con las llaves 3,7,9,12,17,23,25 que tenga la siguiente estructura



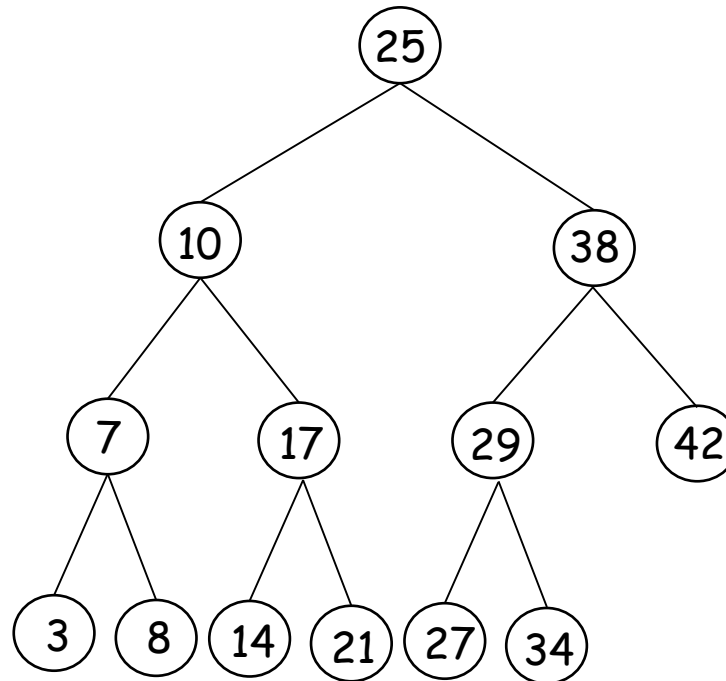
Árboles

Crear un árbol de búsqueda binaria con las llaves
3,7,8,10,14,17,21,25,27,29,34,38,42 que tenga la siguiente
estructura



Árboles

Crear un árbol de búsqueda binaria con las llaves
3,7,8,10,14,17,21,25,27,29,34,38,42 que tenga la siguiente
estructura



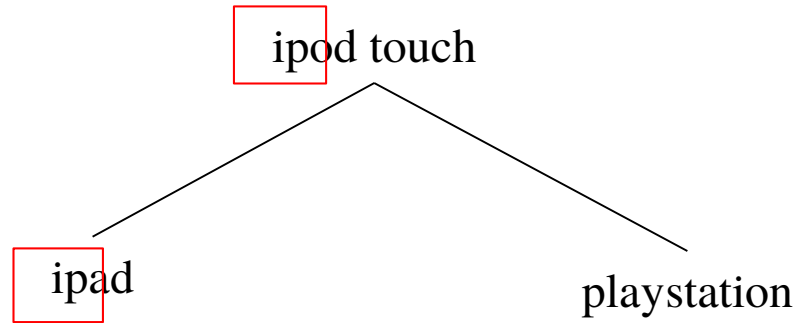
Árboles

Crear un árbol de búsqueda binaria con las siguientes llaves:

- apple tv
- ipad
- iphone
- ipod touch
- nintendo wii
- playstation
- smart tv

Árboles

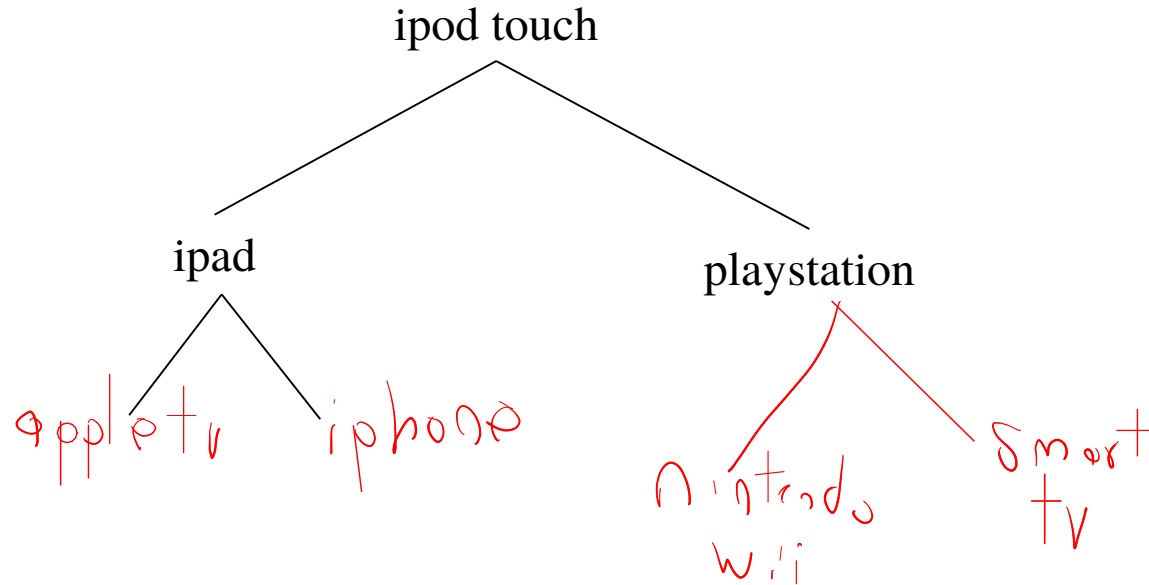
apple tv
~~ipad~~
iphone
~~ipod touch~~
nintendo wii
~~playstation~~
smart tv



Árboles

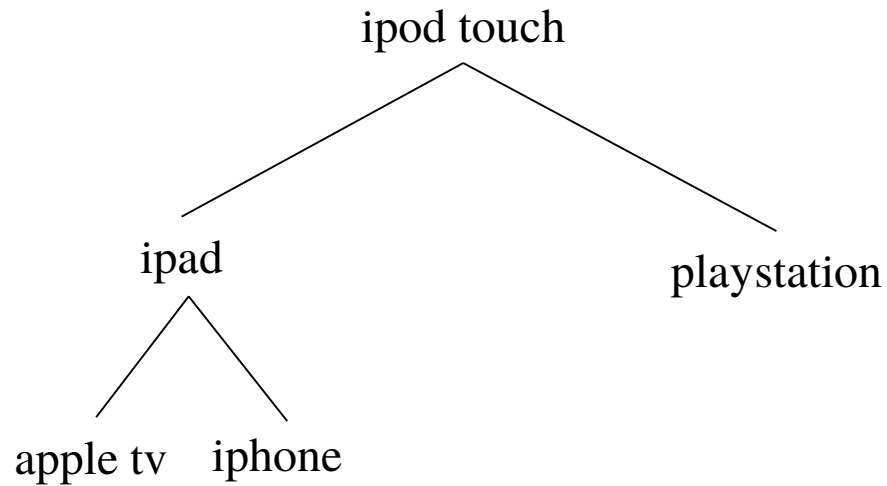
gr bolcs B-trer

apple tv
~~ipad~~
iphone
~~ipod touch~~
nintendo wii
~~playstation~~
smart tv



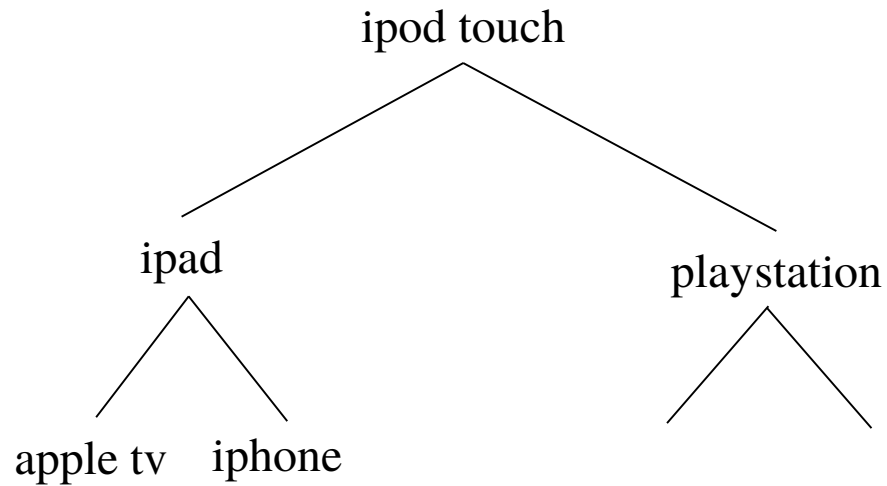
Árboles

~~apple tv~~
~~ipad~~
~~iphone~~
~~ipod touch~~
nintendo wii
~~playstation~~
smart tv



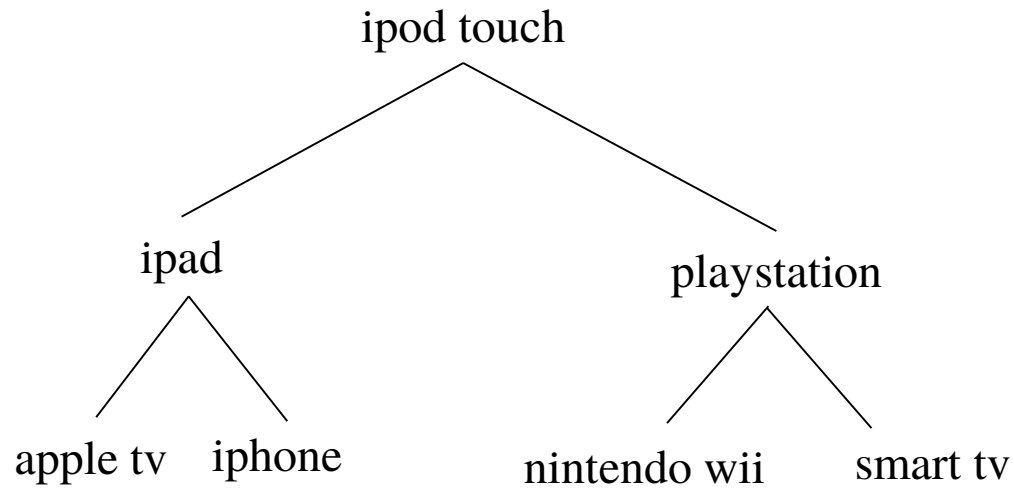
Árboles

~~apple tv~~
~~ipad~~
~~iphone~~
~~ipod touch~~
nintendo wii
~~playstation~~
smart tv

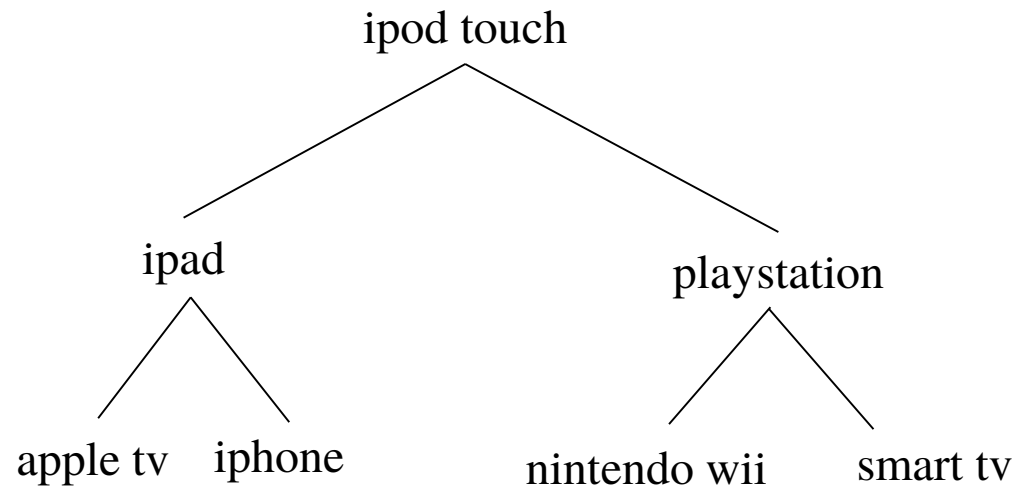


Árboles

~~apple tv~~
~~ipad~~
~~iphone~~
~~ipod touch~~
~~nintendo wii~~
~~playstation~~
~~smart tv~~

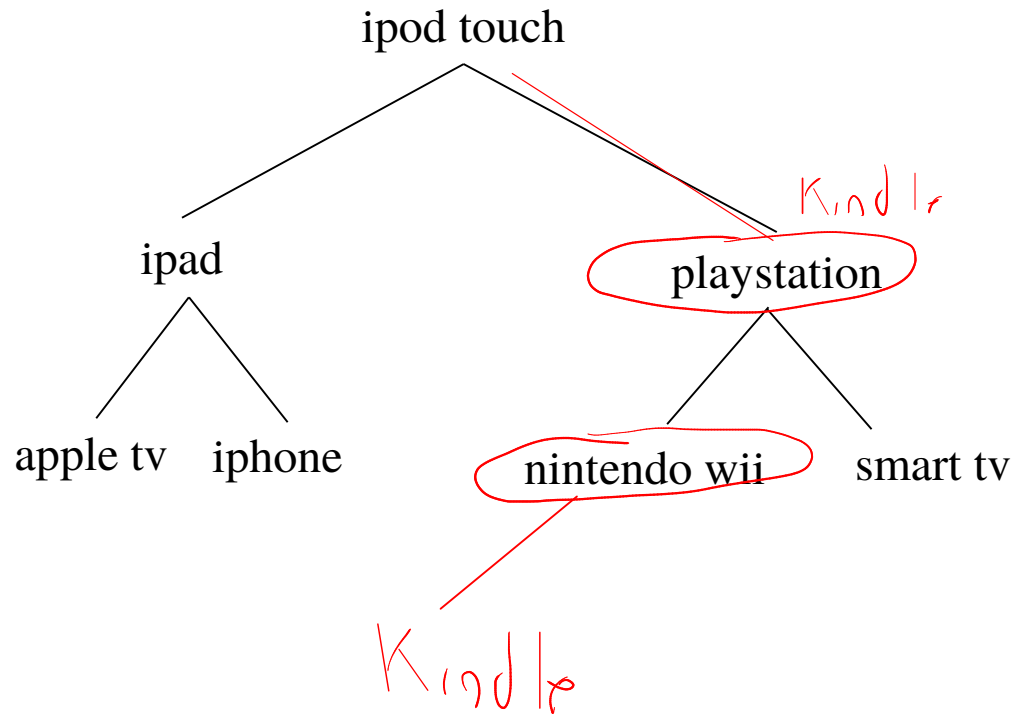


Árboles



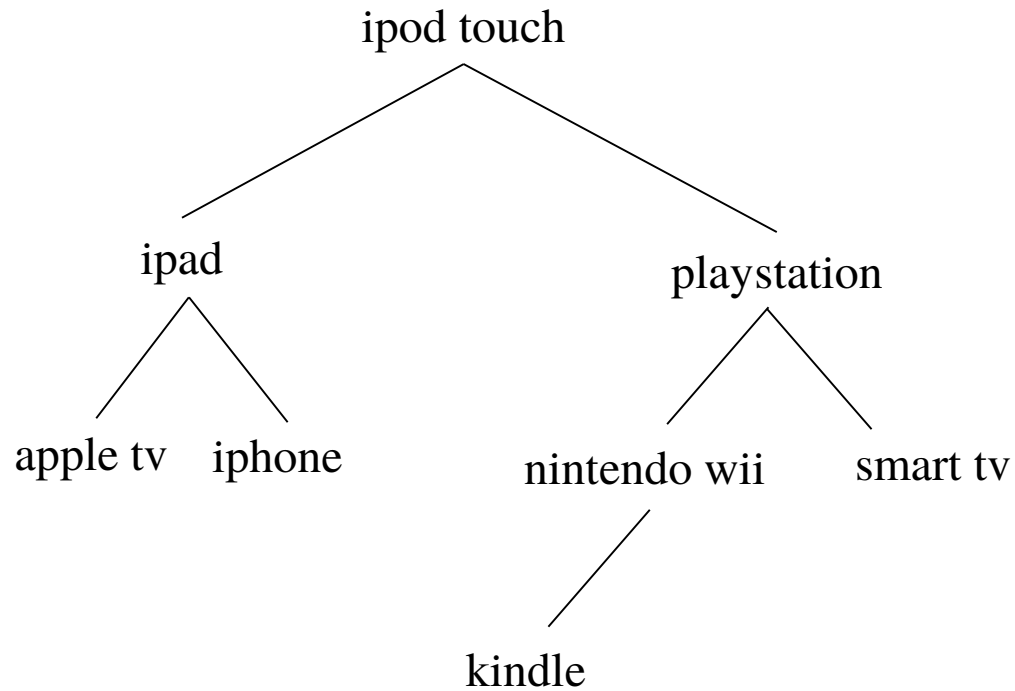
Árboles

Insertar la llave kindle



Árboles

Insertar la llave kindle



Árboles

Aplicaciones de los árboles

- Árboles de juego
- Árboles binarios de búsqueda
- Árboles de decisión

Árboles

Árboles de decisión

Es un árbol en cuyos vértices se tienen condiciones y en las hojas decisiones sobre un problema particular

$\{a, b, c\}$

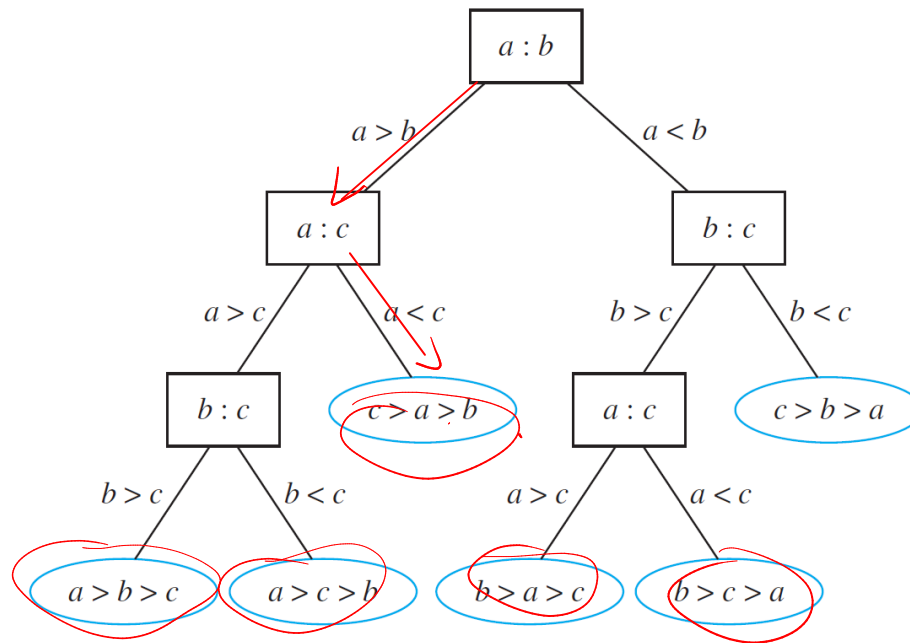
$a < b$

$a > b$

$a < c$

$O(n!)$

$3!$



Árbol de decisión para
ordenar 3 elementos

Árboles

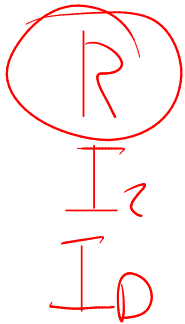
Recorridos de los árboles

- Preorden
- Inorden
- Postorden

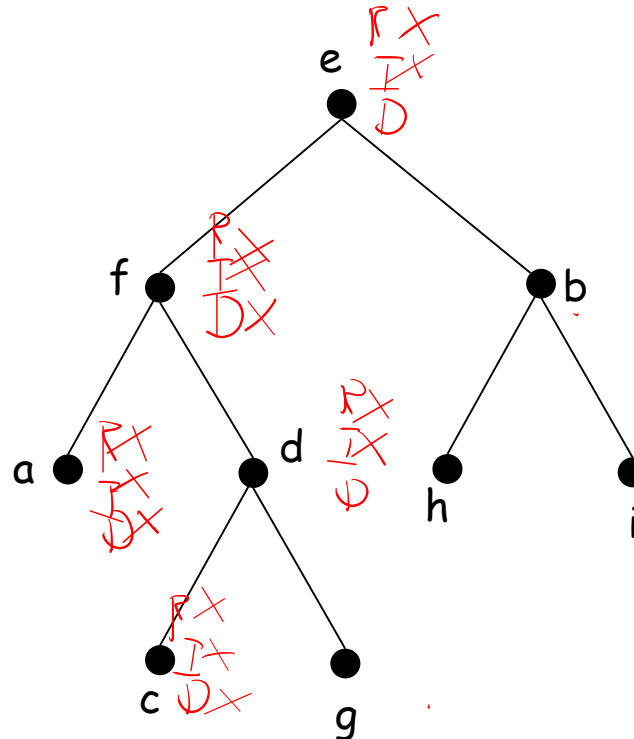
Árboles

Recorridos en preorden

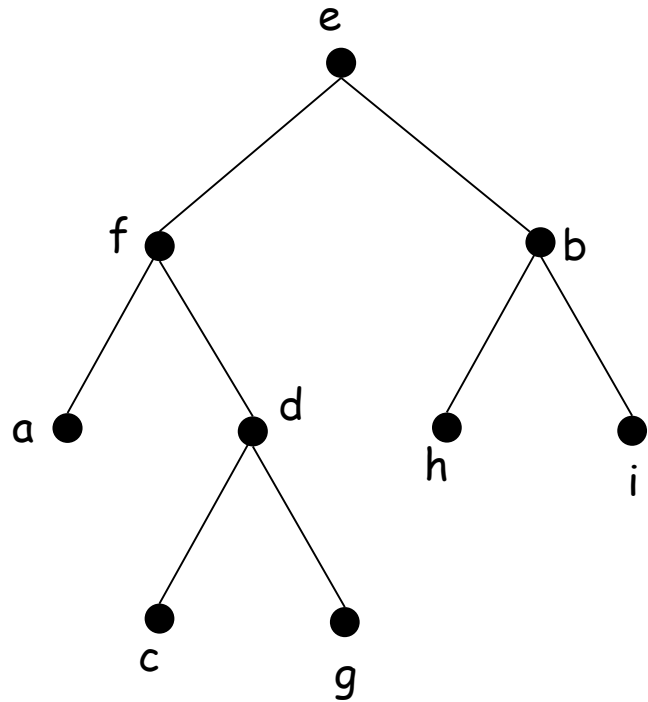
Sea T un árbol con raíz r y subárboles T_1, T_2, \dots, T_n . El recorrido en preorden se hace visitando r , luego T_1 en preorden, T_2 en preorden, así hasta T_n en preorden



$\{e f a d e g b b i\}$



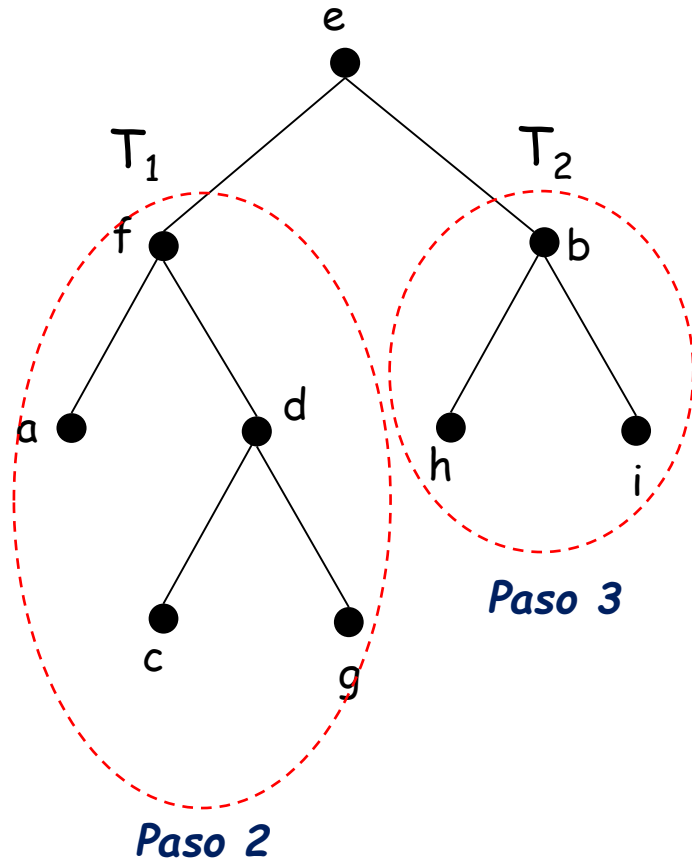
Árboles



Recorrido en preorden:

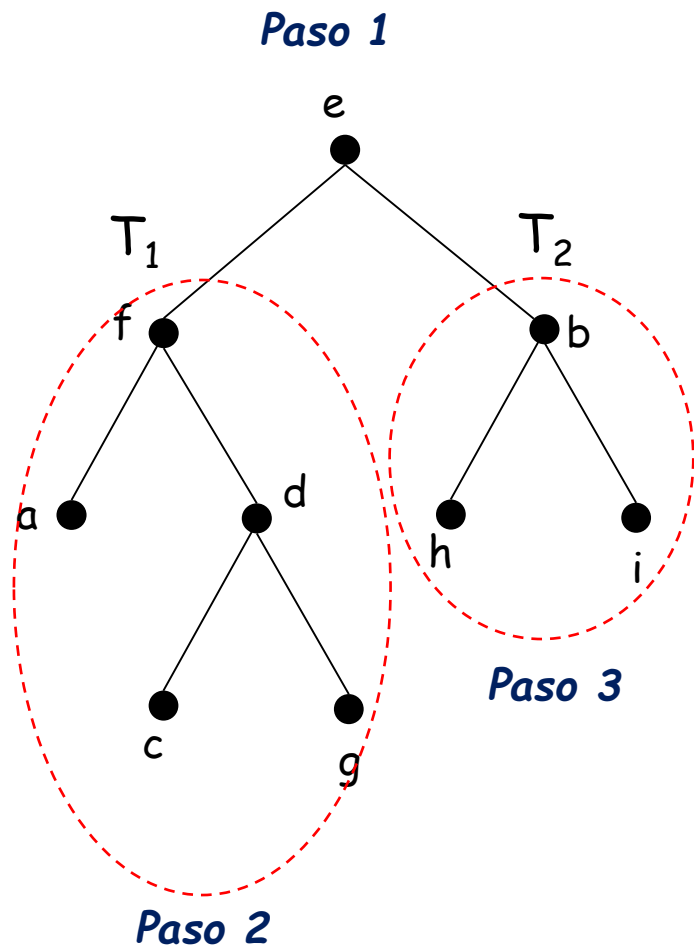
Árboles

Paso 1



Recorrido en preorden:

Árboles



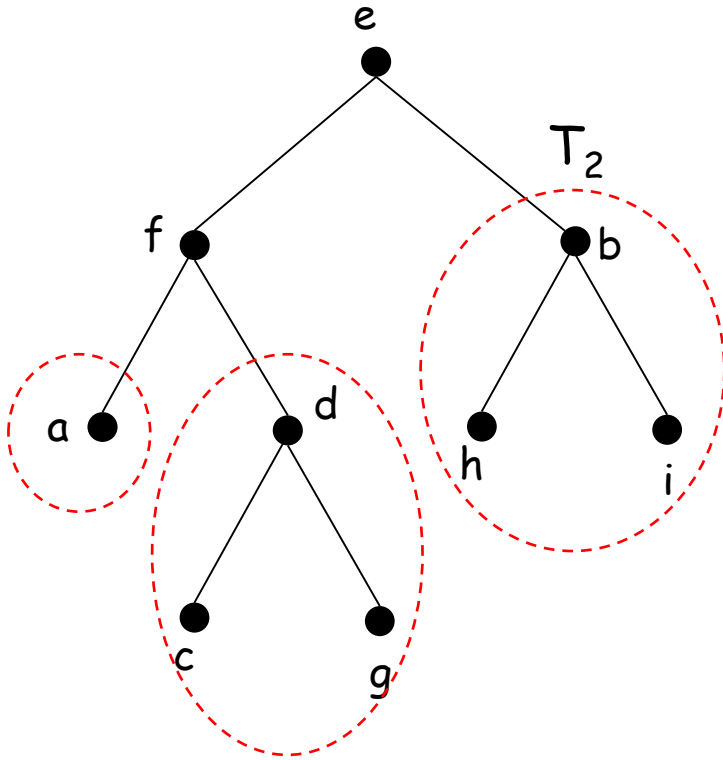
Recorrido en preorden:

e

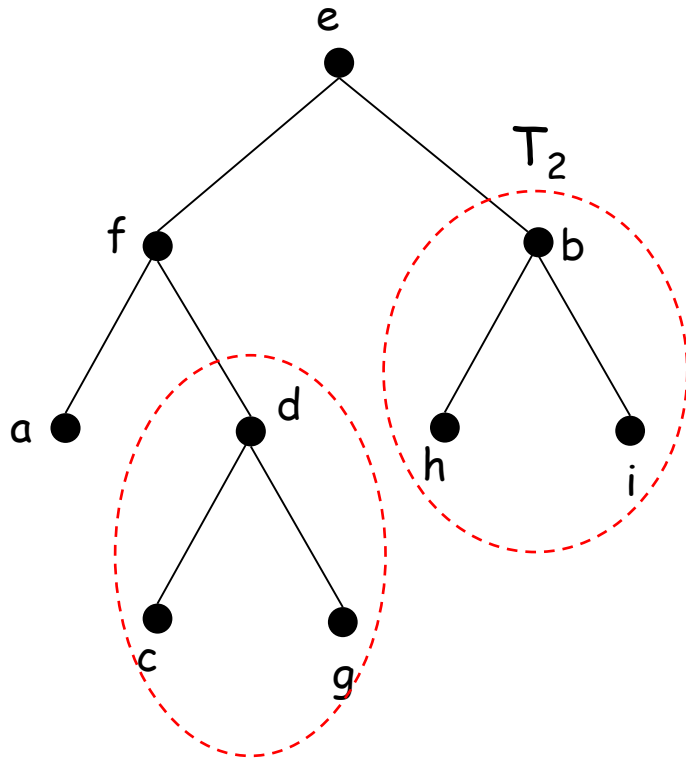
Árboles

Recorrido en preorden:

$e - f$



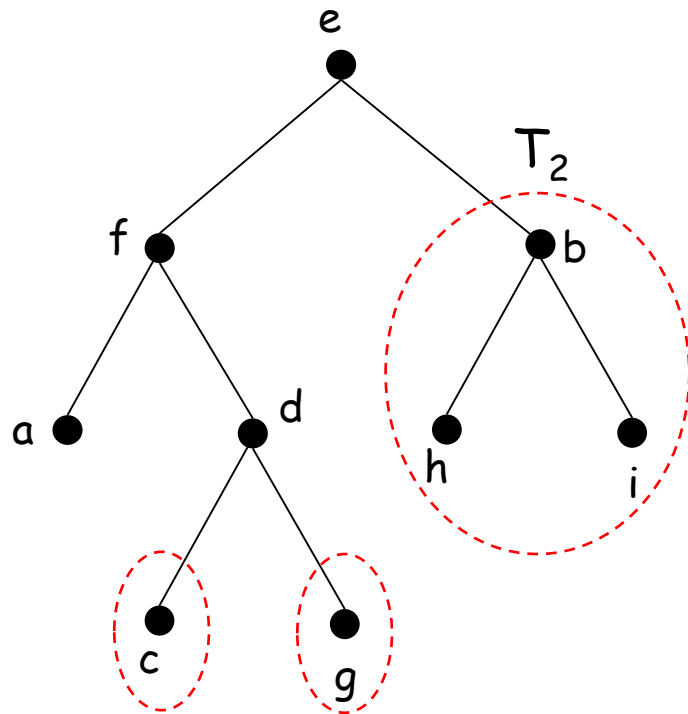
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a$

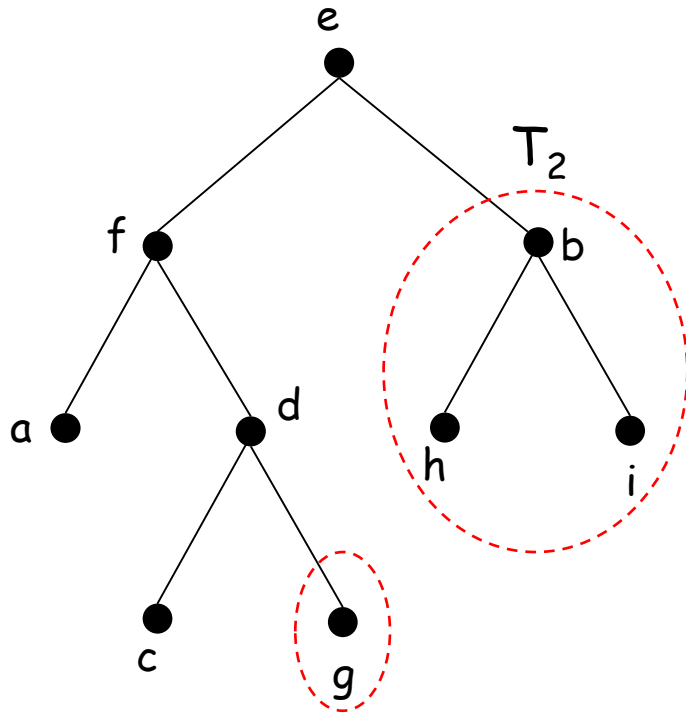
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a - d$

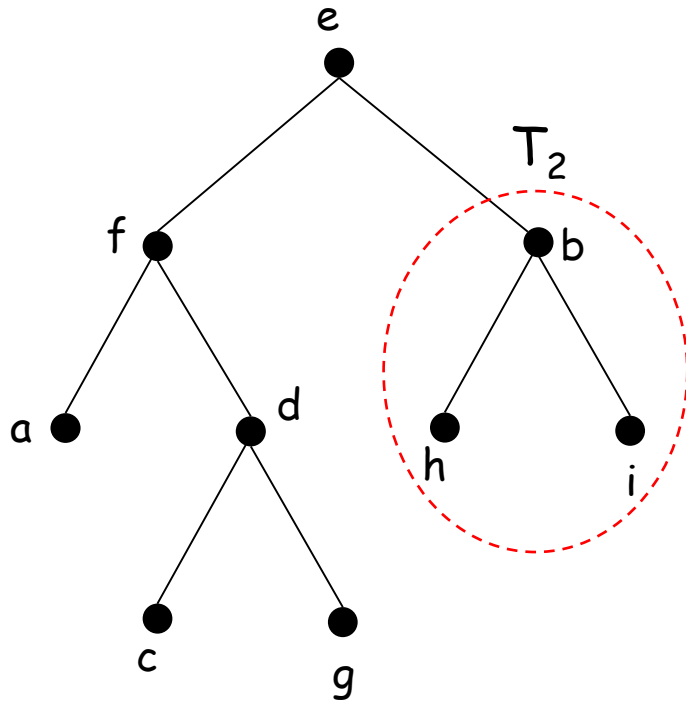
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a - d - c$

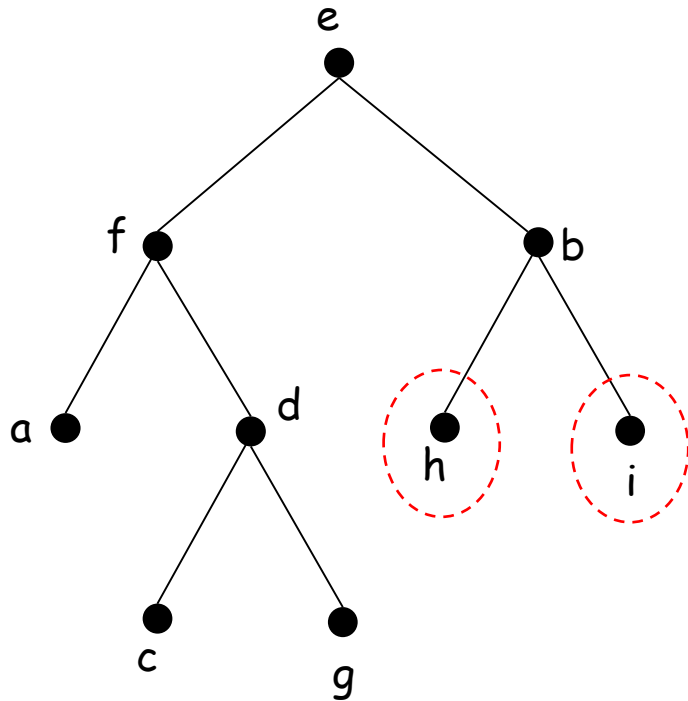
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a - d - c - g$

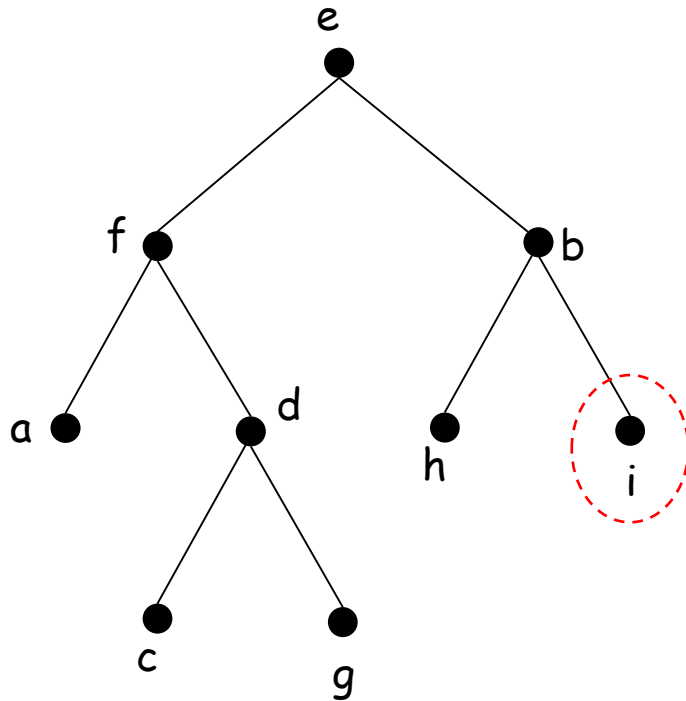
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a - d - c - g - b$

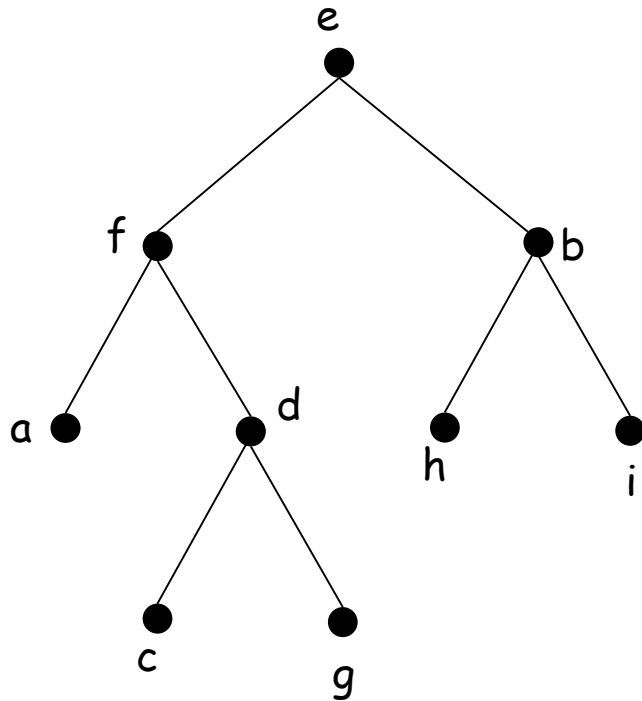
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a - d - c - g - b - h$

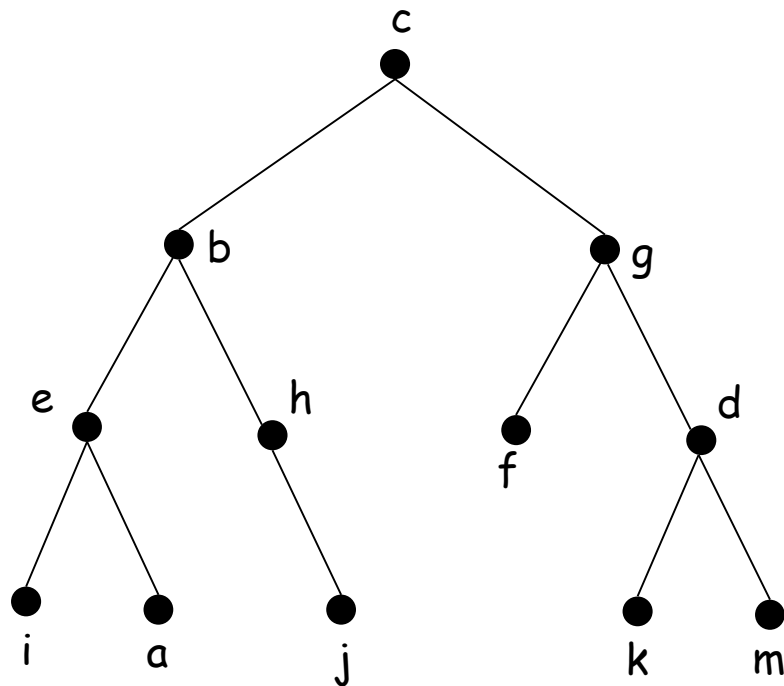
Árboles



Recorrido en preorden:

$e - f - a - d - c - g - b - h - i$

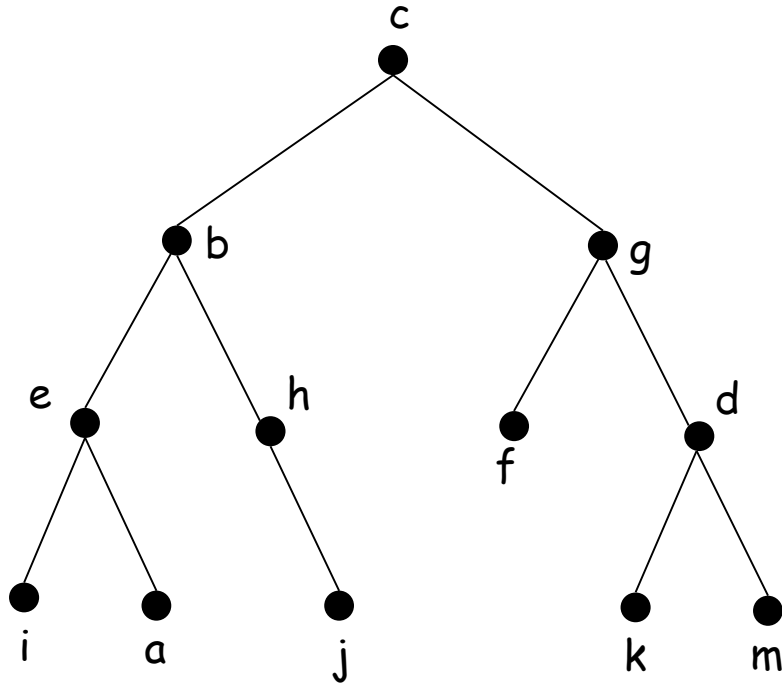
Árboles



Recorrido en preorden:

c b e i a h j g f
d k m

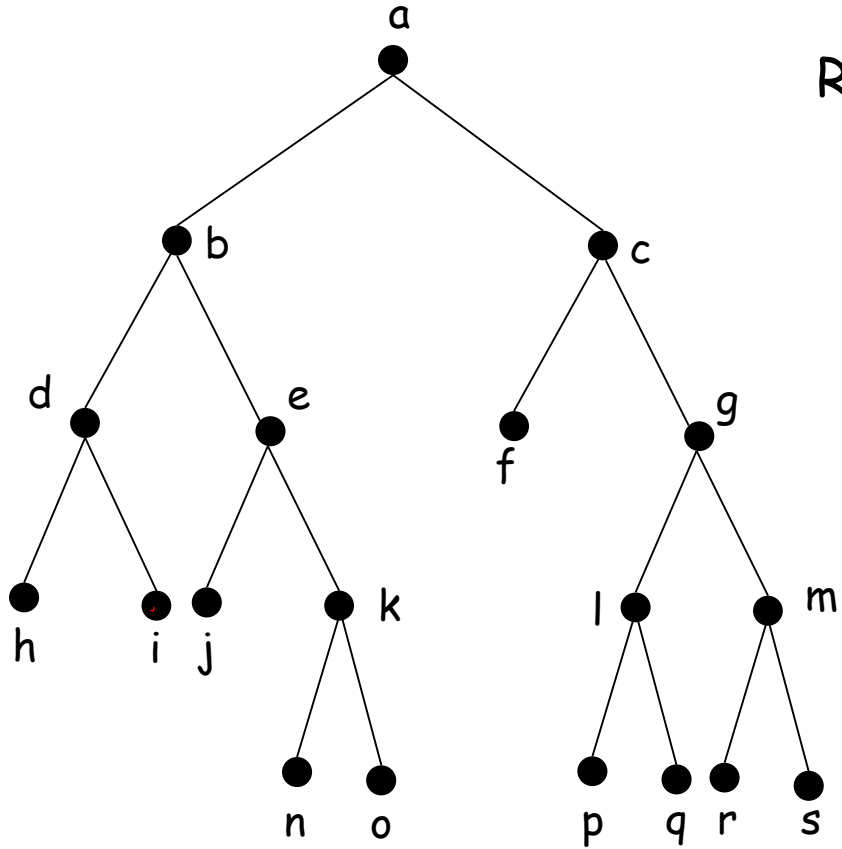
Árboles



Recorrido en preorden:

c - b - e - i - a - h - j - g - f - d - k - m

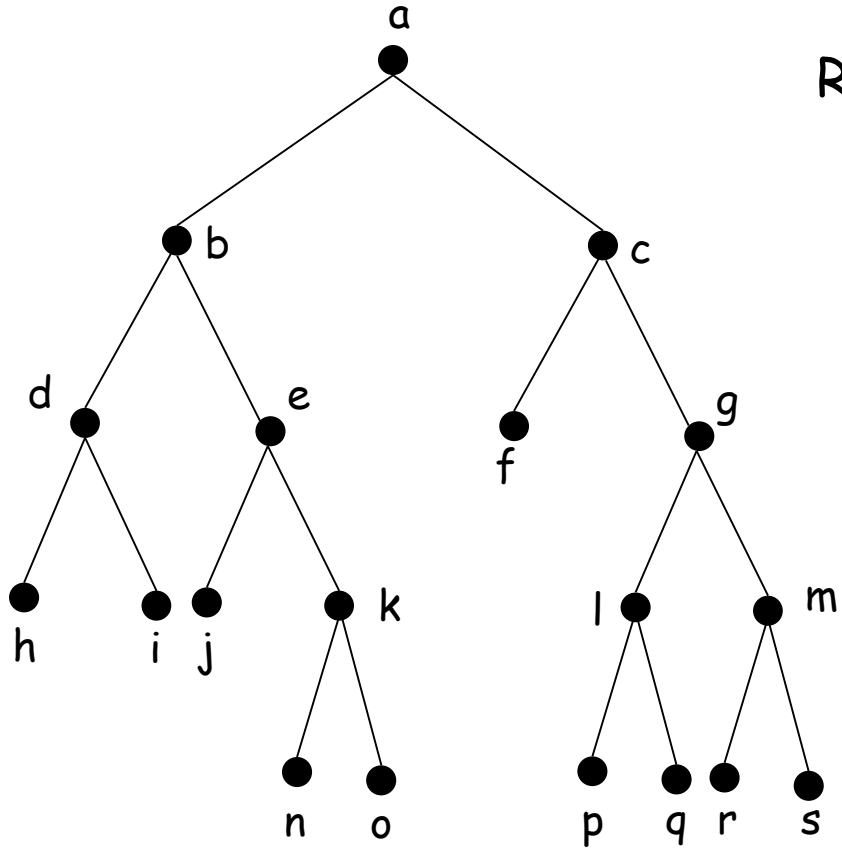
Árboles



Recorrido en preorden:

a b d h i e j k n o
c f g l p q m r s

Árboles

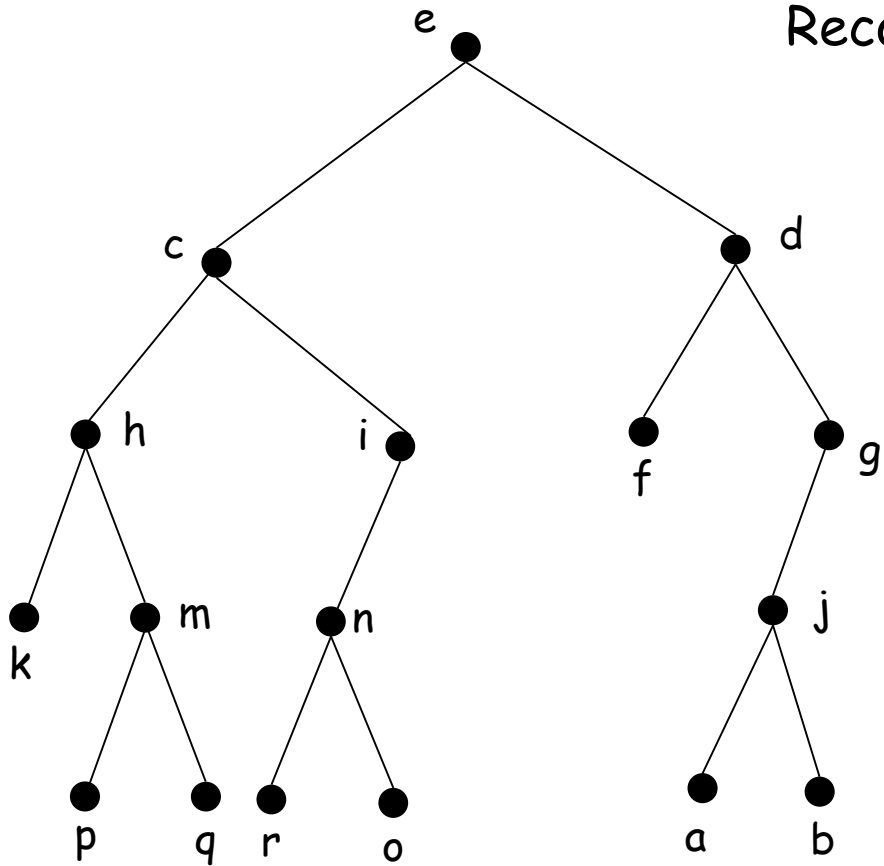


Recorrido en preorden:

a-b-d-h-i-e-j-k-n-o-c-f-g-l-p-q-m-r-s

Árboles

Recorrido en preorden:

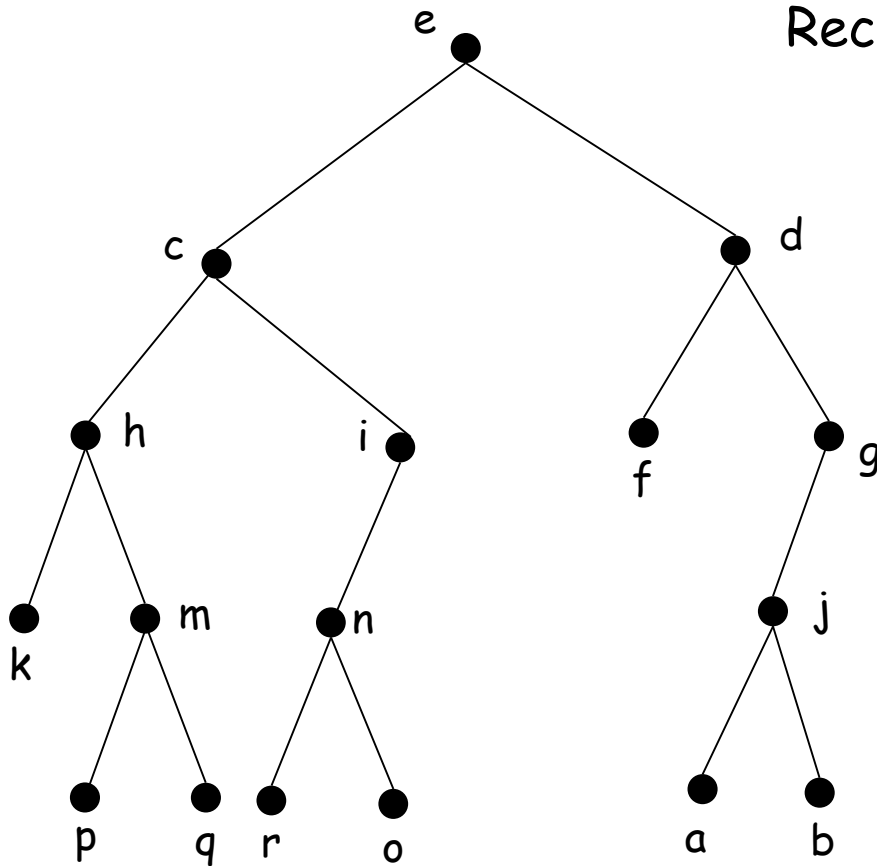


$\{e, c, h, k, m, p, q, r, o, d, f, g, j, a, b\}$

Árboles

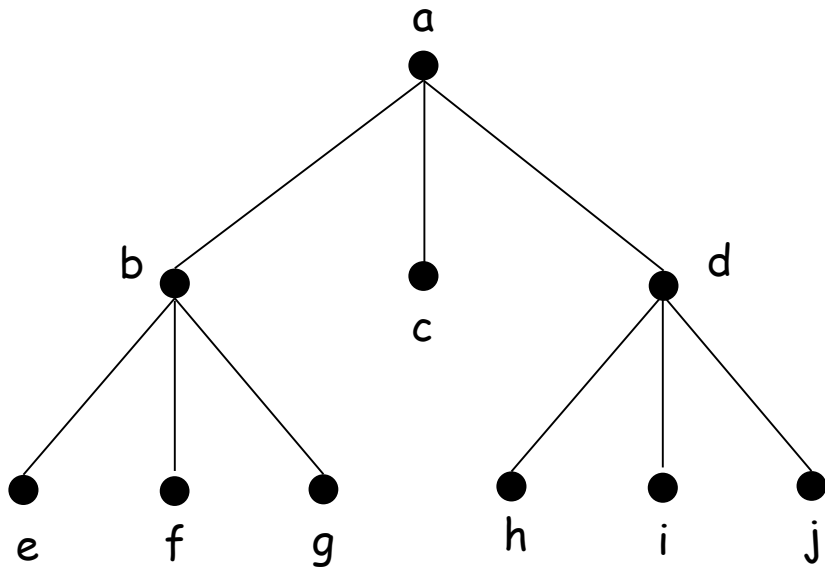
Recorrido en preorden:

e-c-h-k-m-p-q-i-n-r-o-d-f-g-j-a-b



Árboles

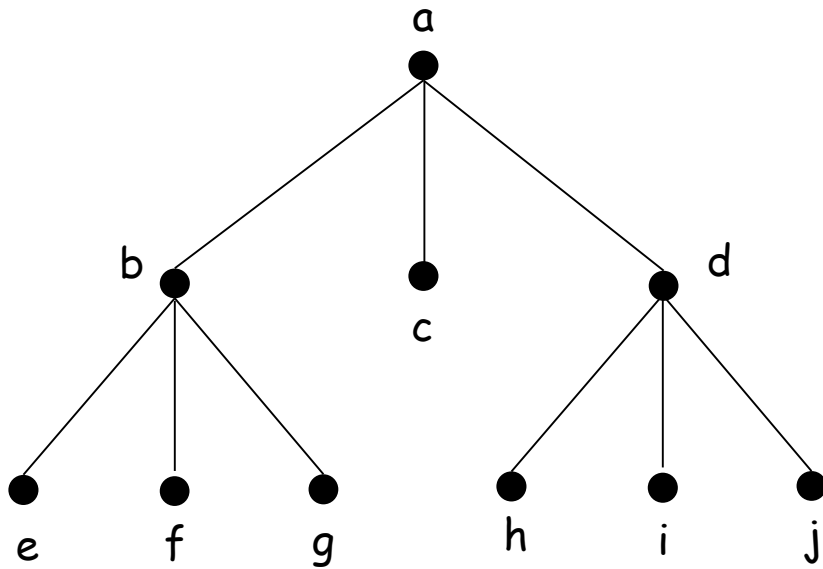
Recorrido en preorden:



Árboles

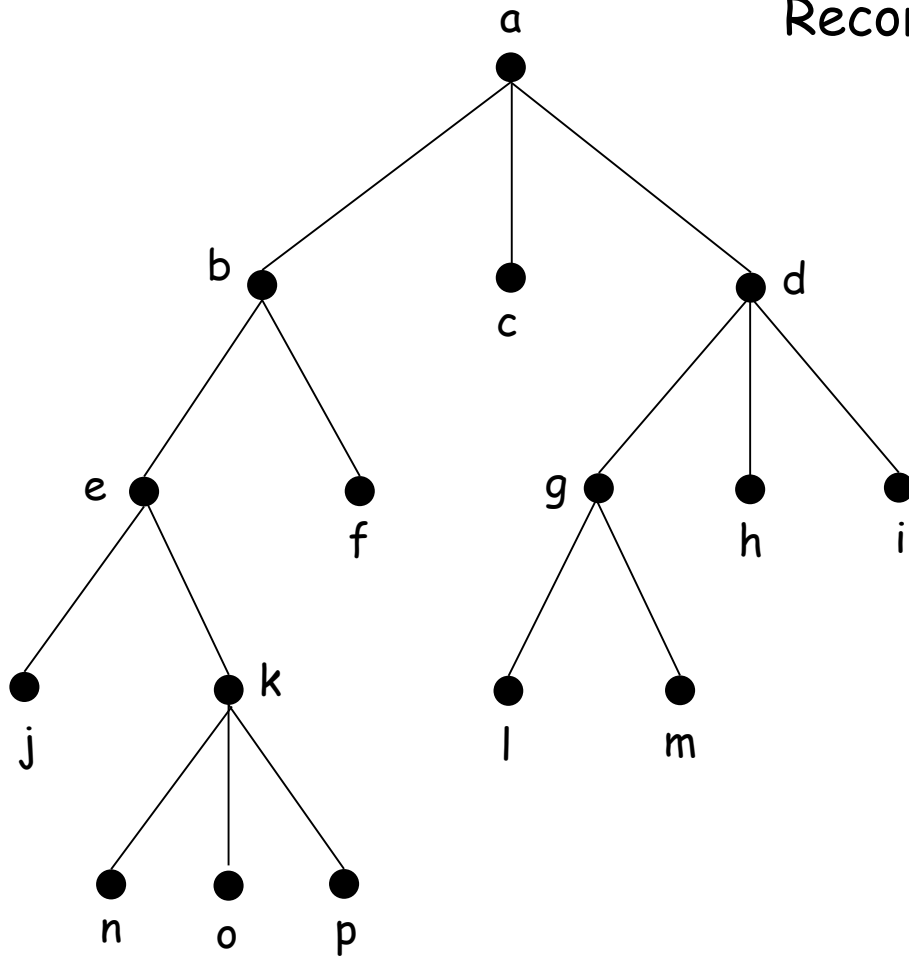
Recorrido en preorden:

a - b - e - f - g - c - d - h - i - j



Árboles

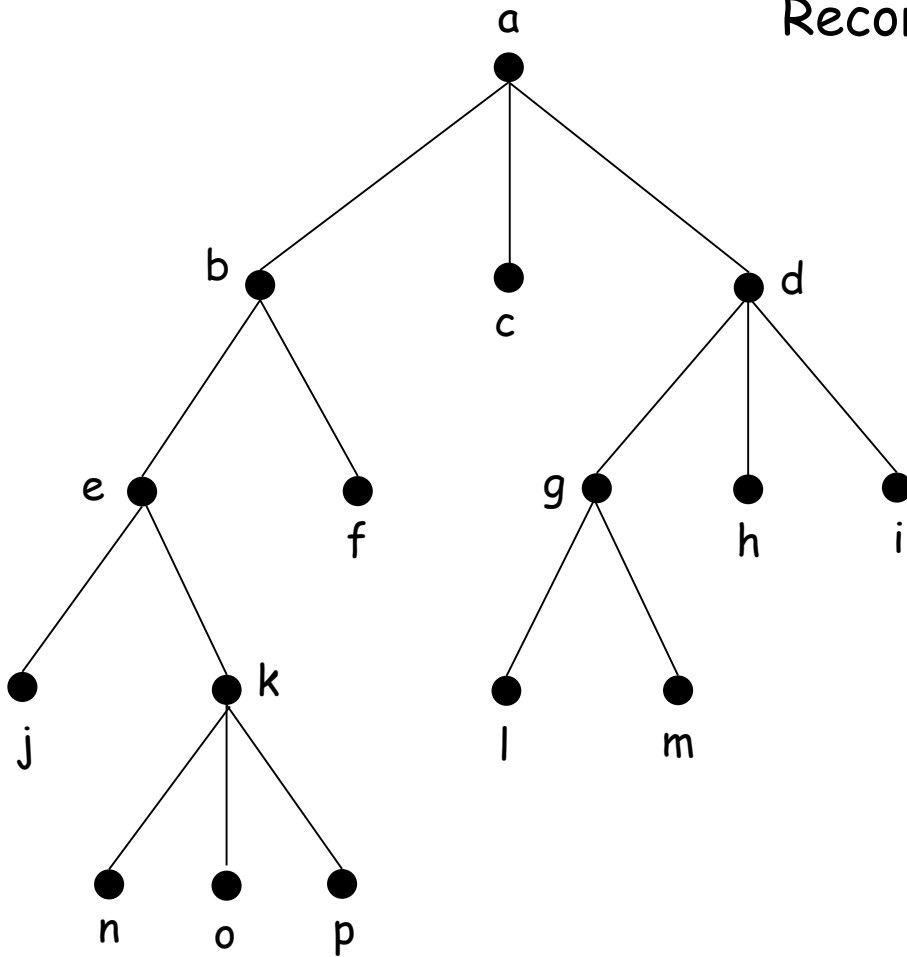
Recorrido en preorden:



Árboles

Recorrido en preorden:

a-b-e-j-k-n-o-p-f-c-d-g-l-m-h-i



Árboles

Recorridos de los árboles

- Preorden $R \ I \ D$
- Inorden $I \ R \ D$
- Postorden

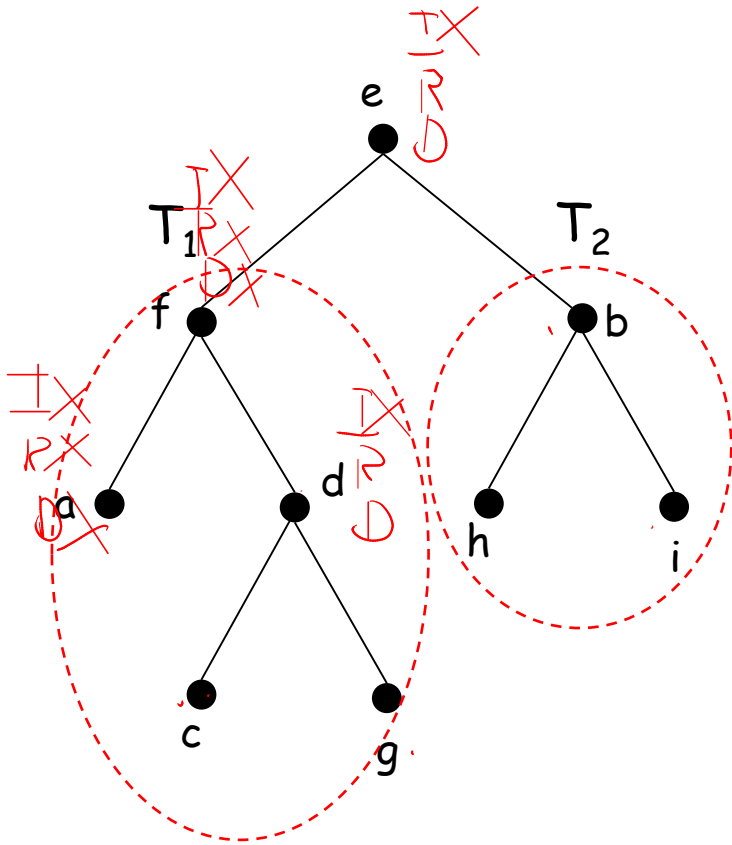
Árboles

Recorridos en inorden

Sea T un árbol con raíz r y subárboles T_1, T_2, \dots, T_n . El recorrido en inorden se hace realizando el recorrido de T_1 en inorden, luego visitando r , luego se hace el recorrido de T_2 en inorden, así hasta T_n en inorden

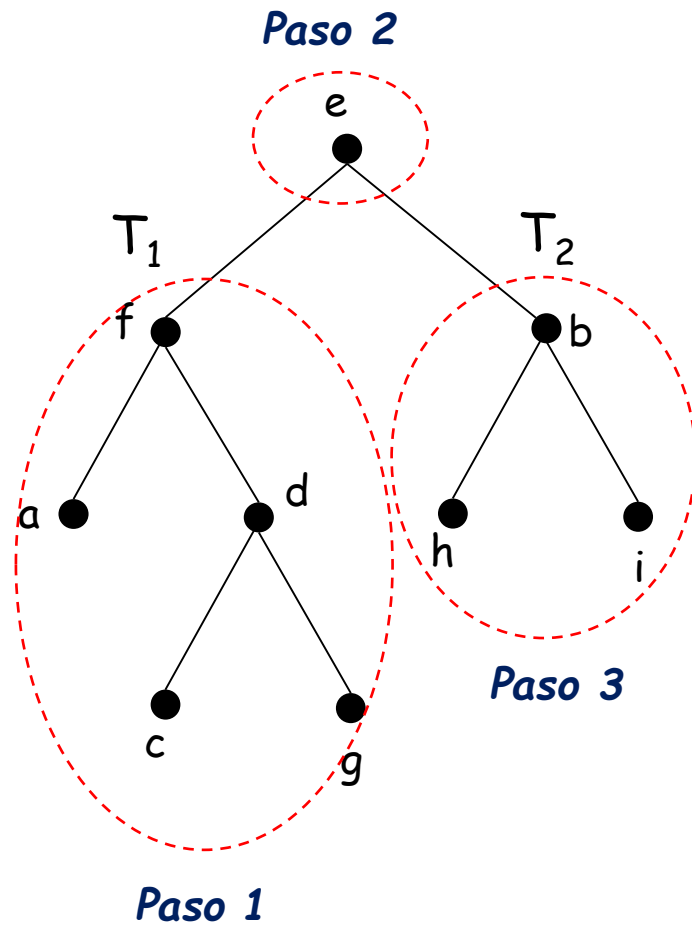
Árboles

Recorrido en inorden:



\pm
 $\{a, f, c, d, g, e, h, b, i\}$

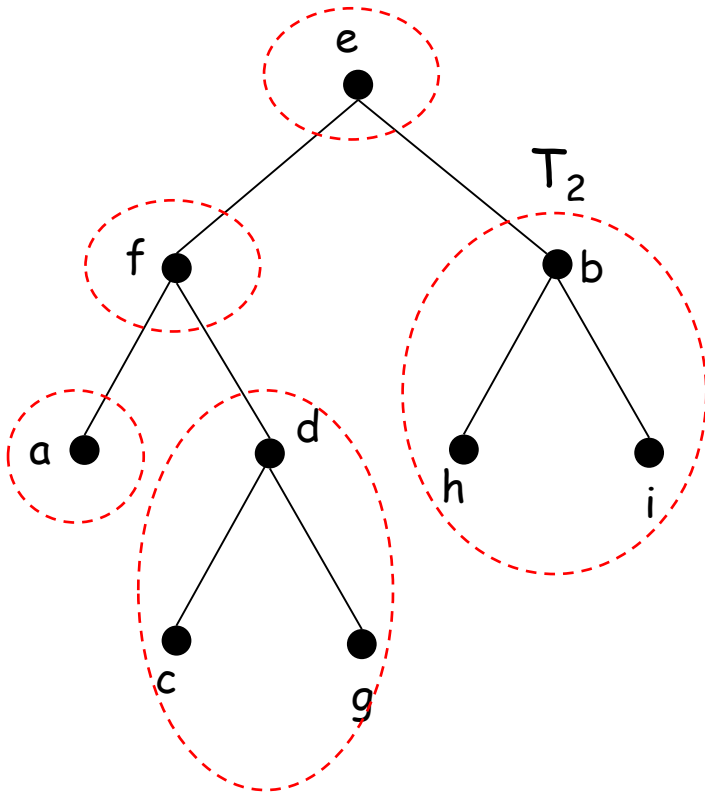
Árboles



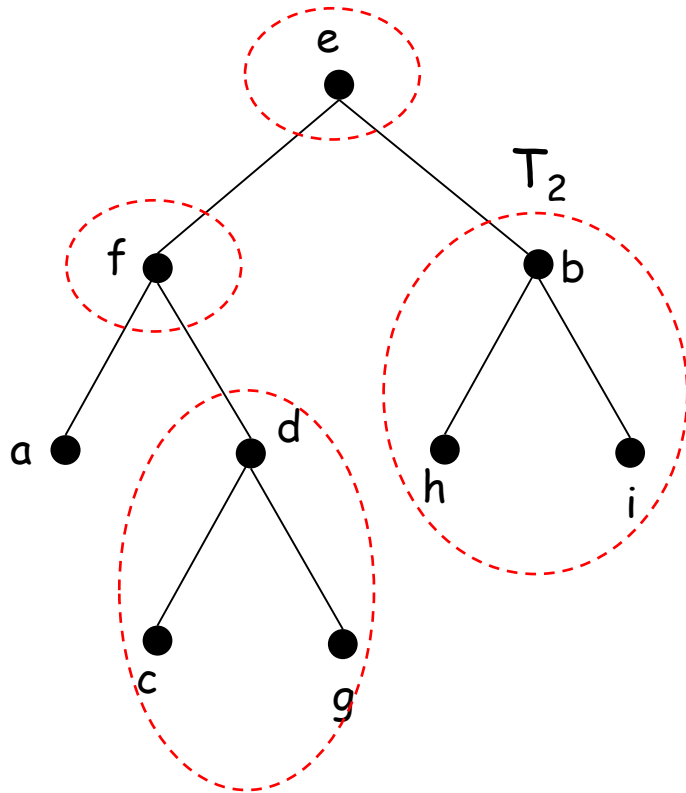
Recorrido en inorden:

Árboles

Recorrido en inorden:



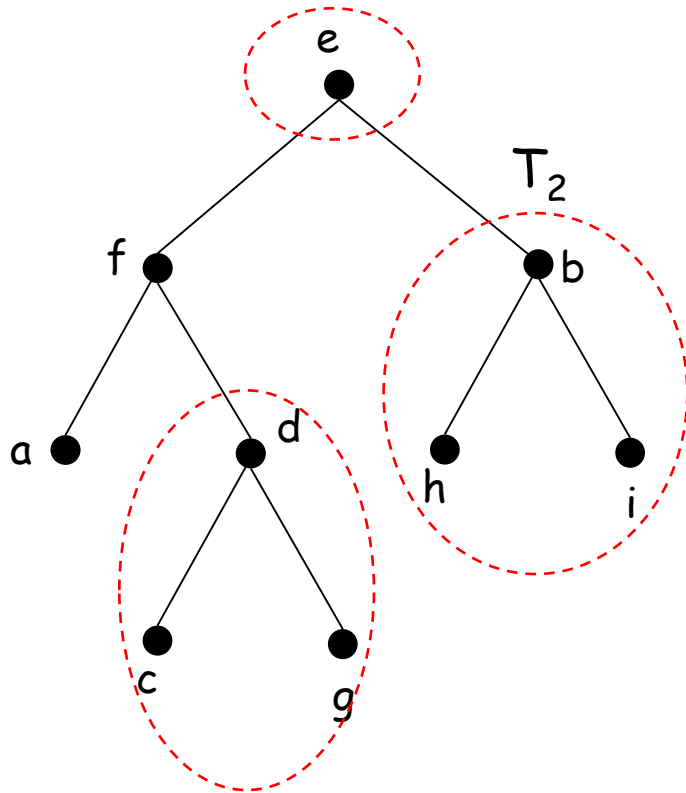
Árboles



Recorrido en inorden:

a

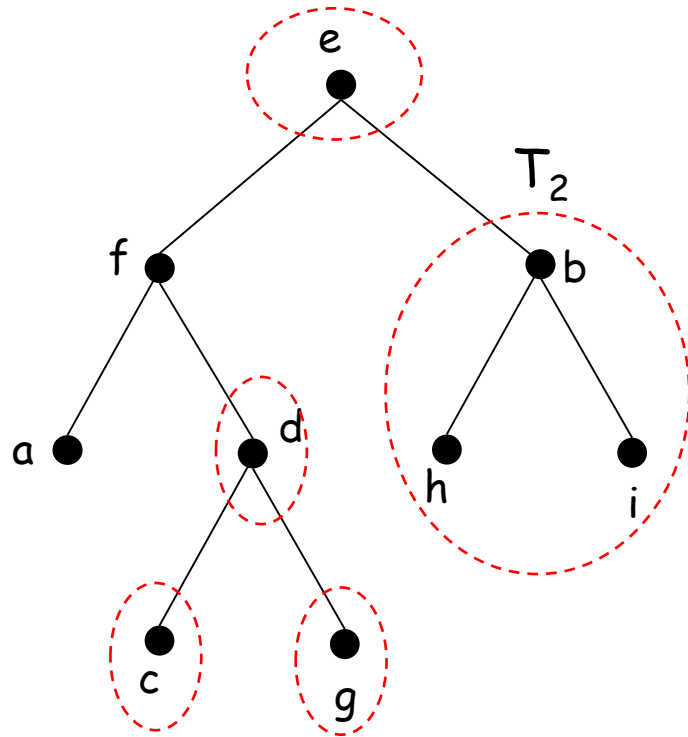
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f

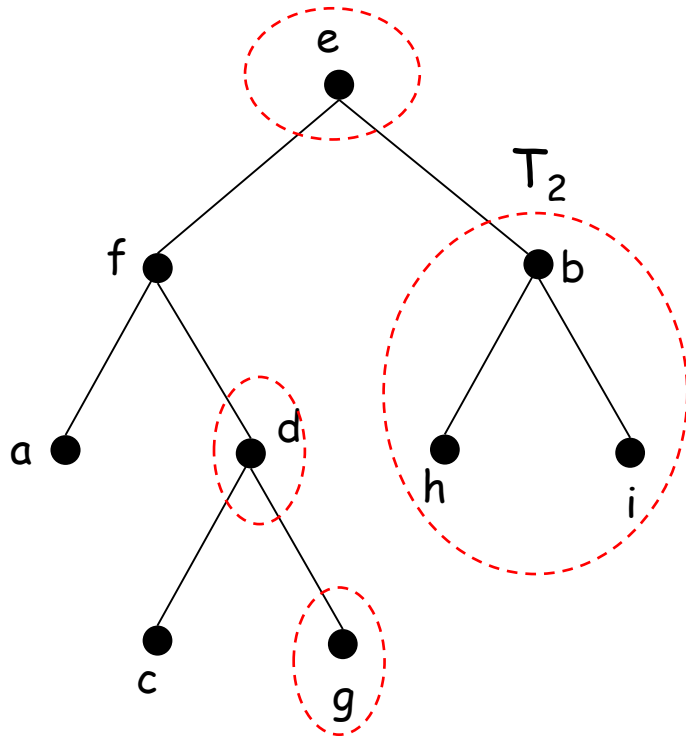
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f

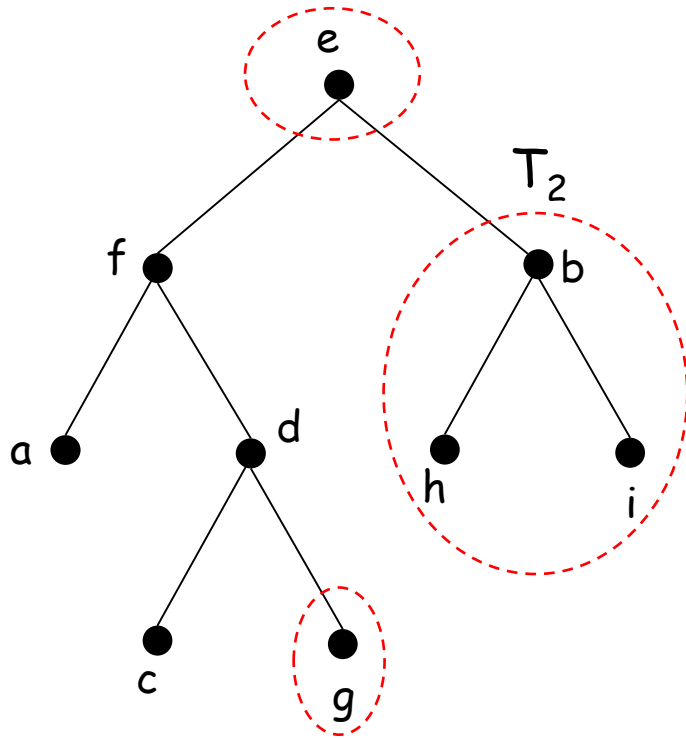
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c

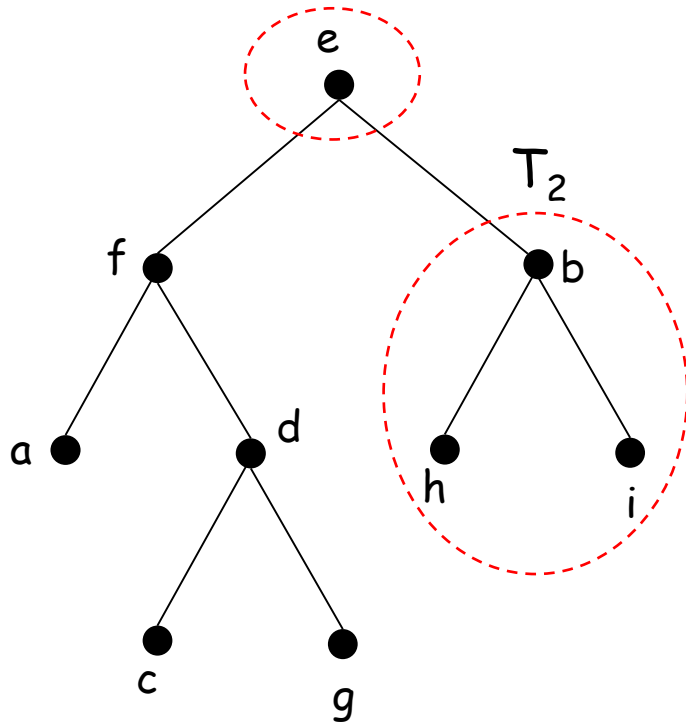
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d

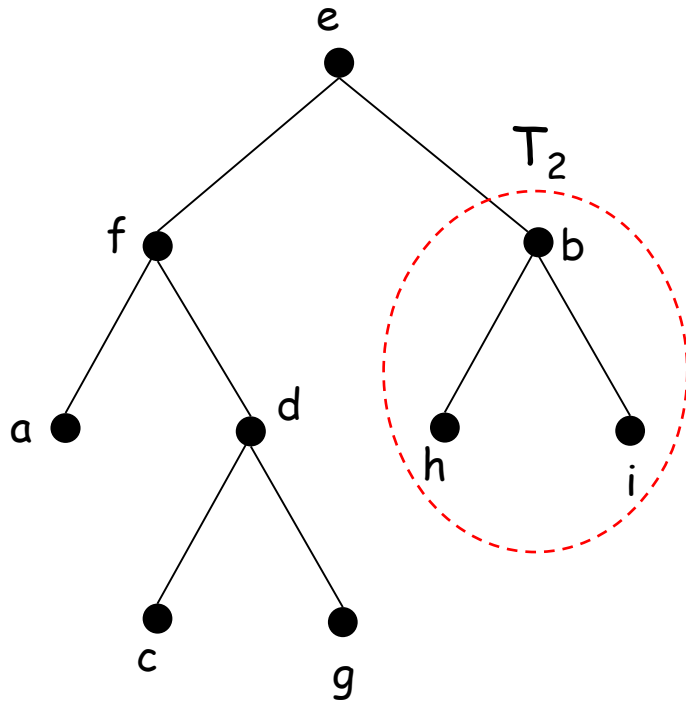
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d - g

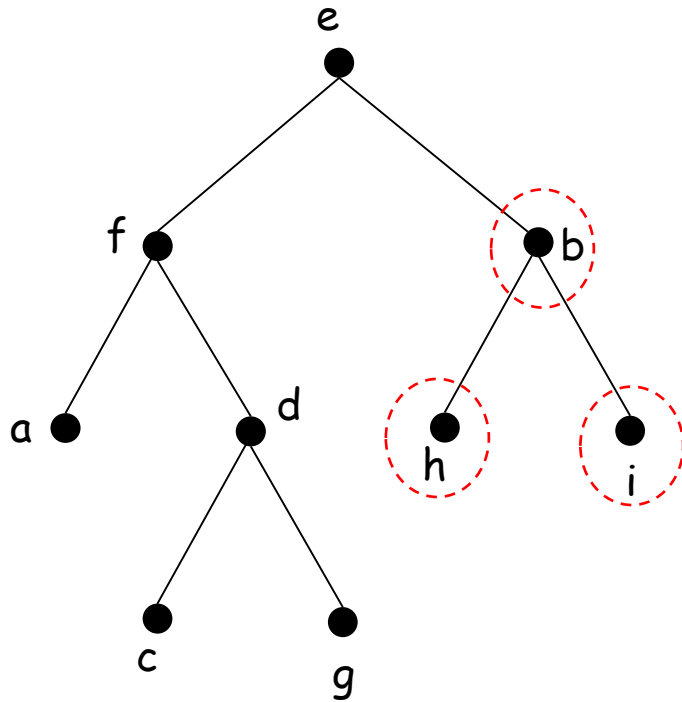
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d - g - e

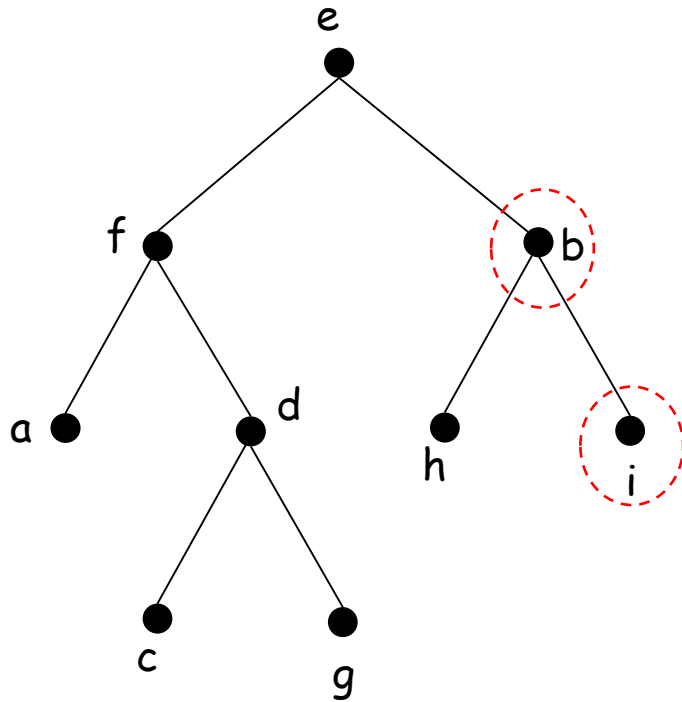
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d - g - e

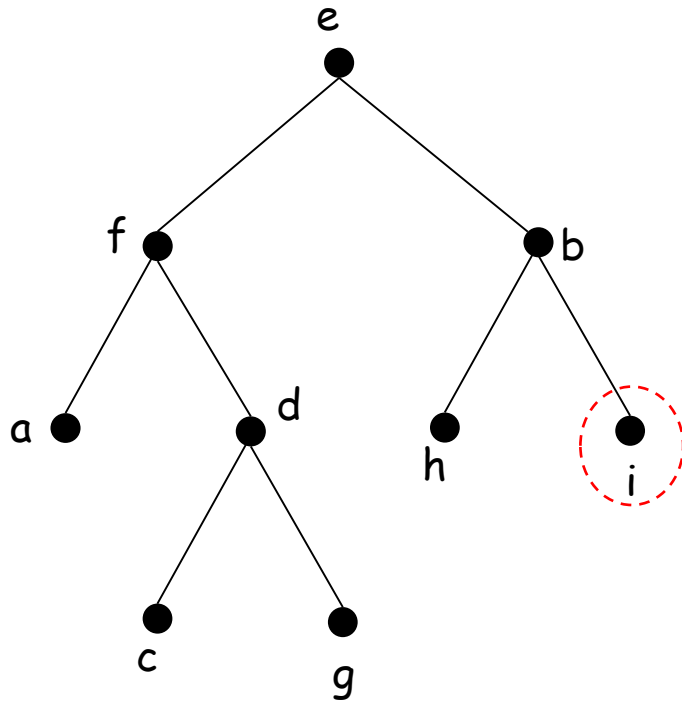
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d - g - e - h

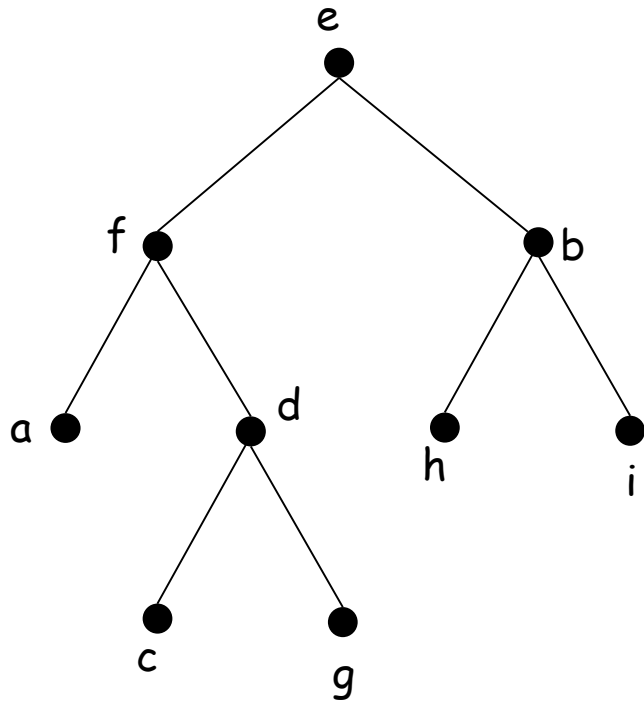
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d - g - e - h - b

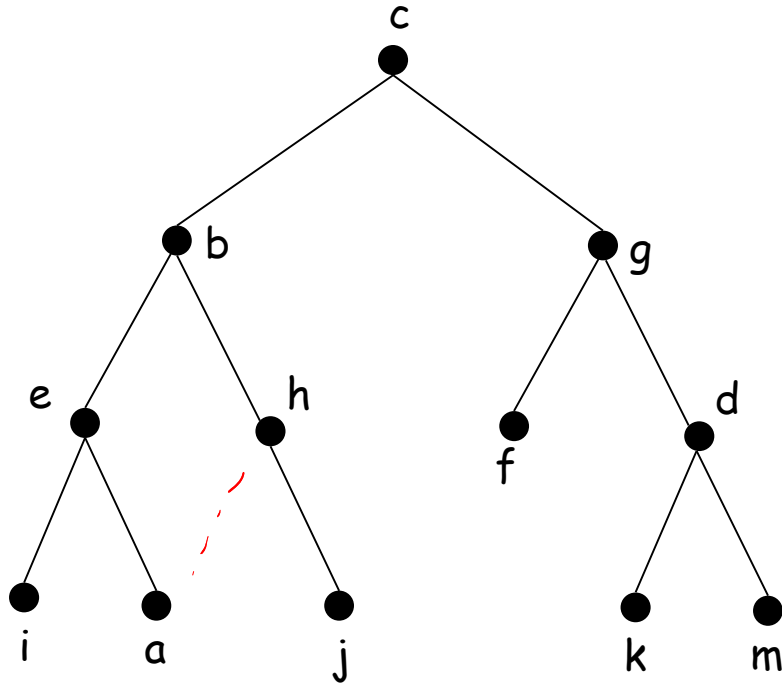
Árboles



Recorrido en inorden:

a - f - c - d - g - e - h - b - i

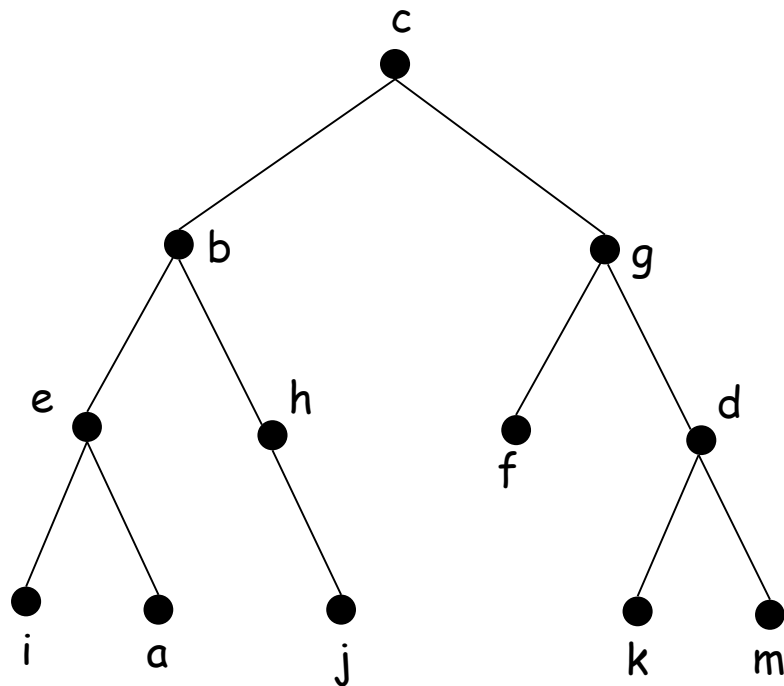
Árboles



Recorrido en inorden:

i a b h g c
f g k d m

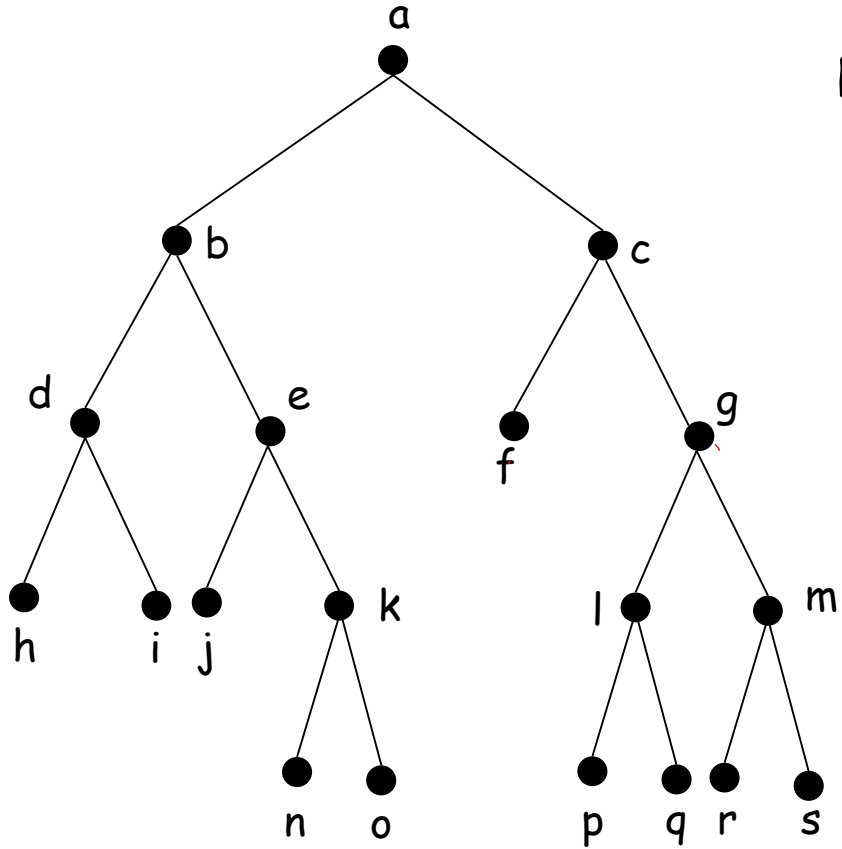
Árboles



Recorrido en inorden:

i - e - a - b - h - j - c - f - g - k - d - m

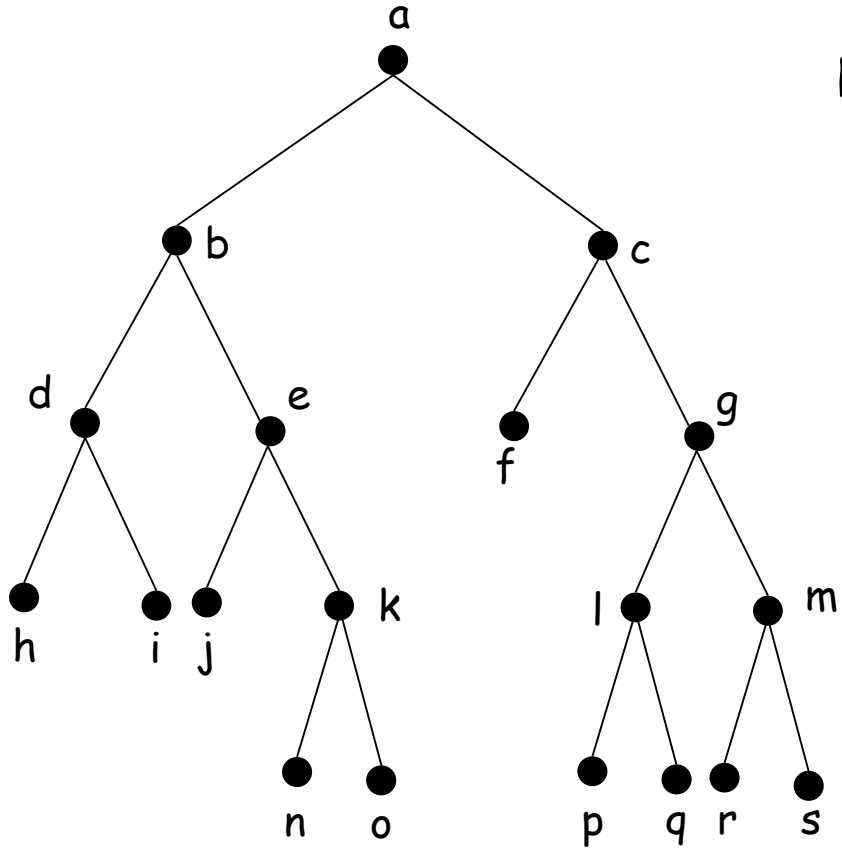
Árboles



Recorrido en inorden:

h d i b j e n k o
a f c p ~~l~~ g r m s

Árboles

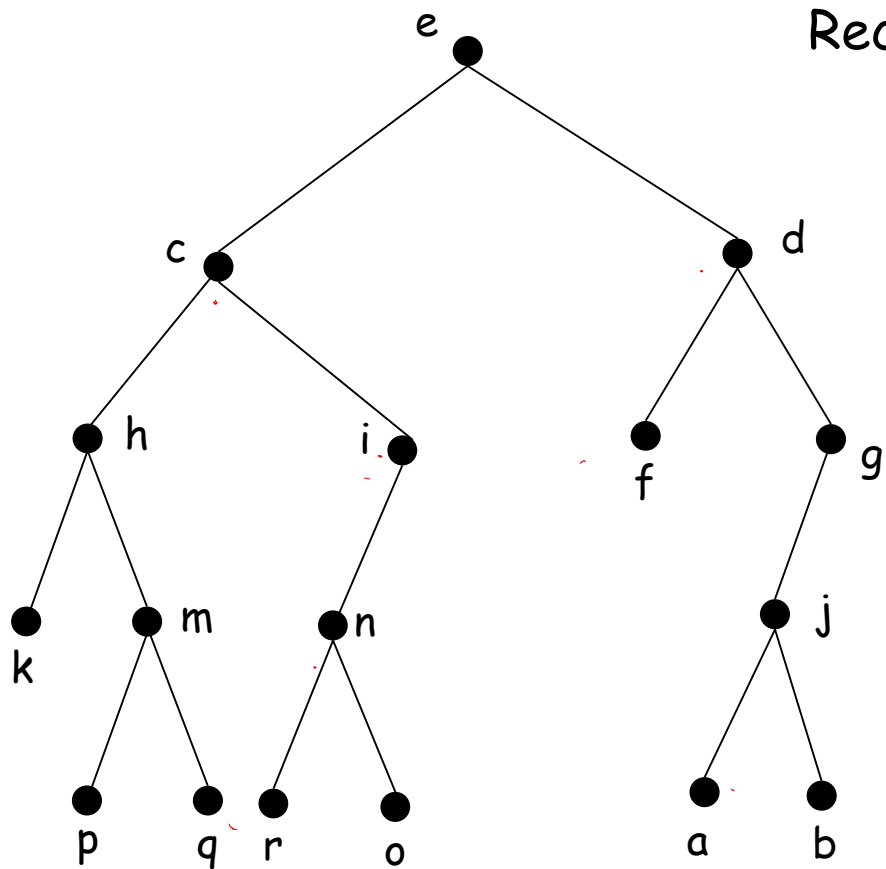


Recorrido en inorden:

h-d-i-b-j-e-n-k-o-a-f-c-p-l-q-g-r-m-s

Árboles

Recorrido en inorden:

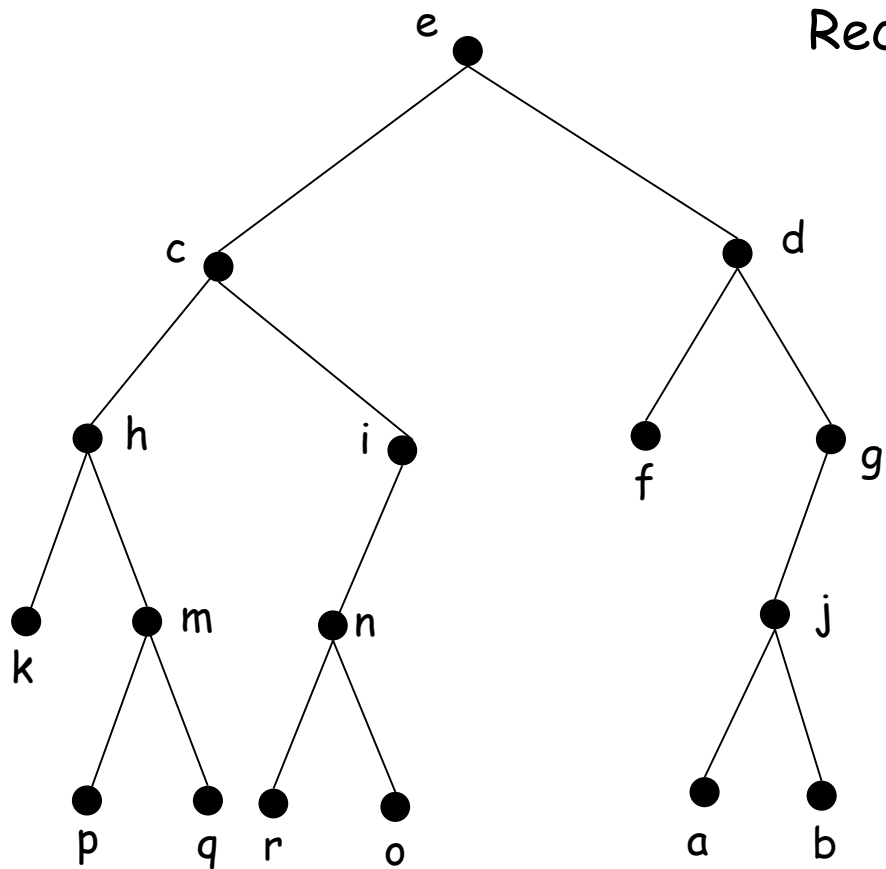


k h p m q c r n o i f d a j b g

Árboles

Recorrido en inorden:

k-h-p-m-q-c-r-n-o-i-e-f-d-a-j-b-g



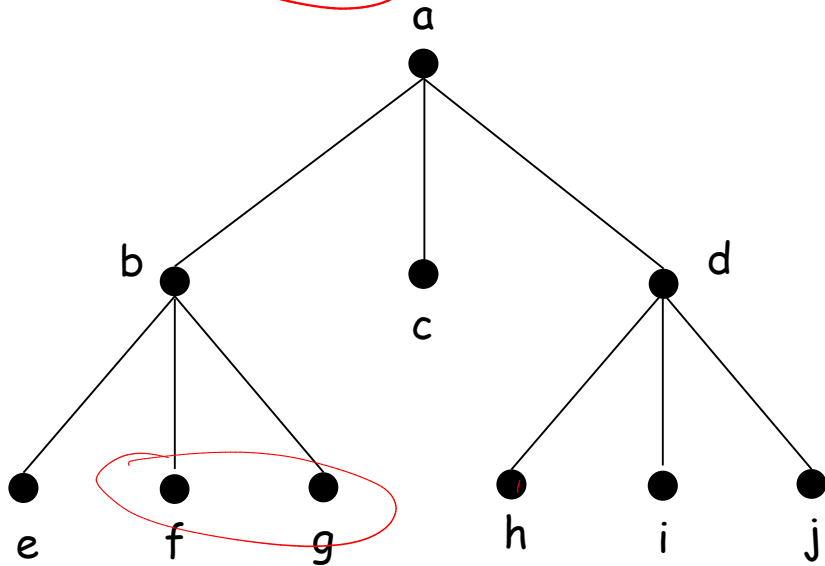
Árboles

I

R

D

Recorrido en inorden:

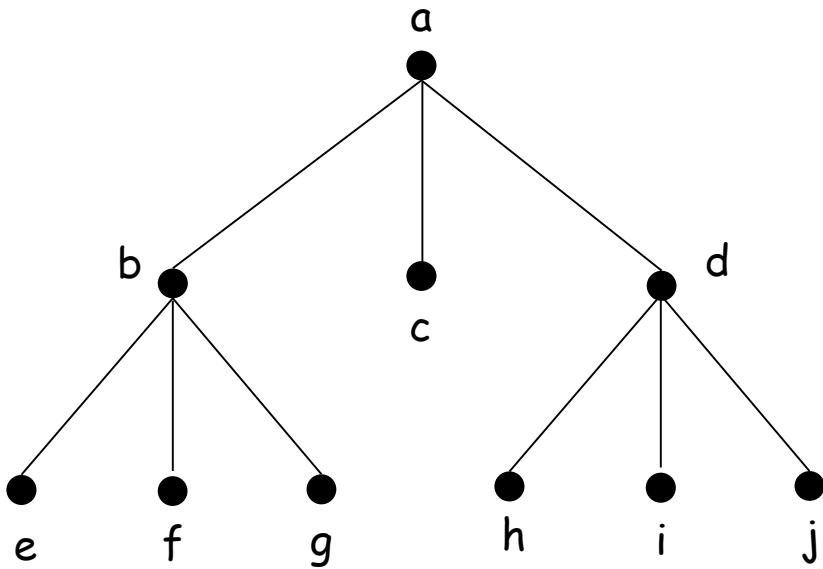


e b f g c h d i j

Árboles

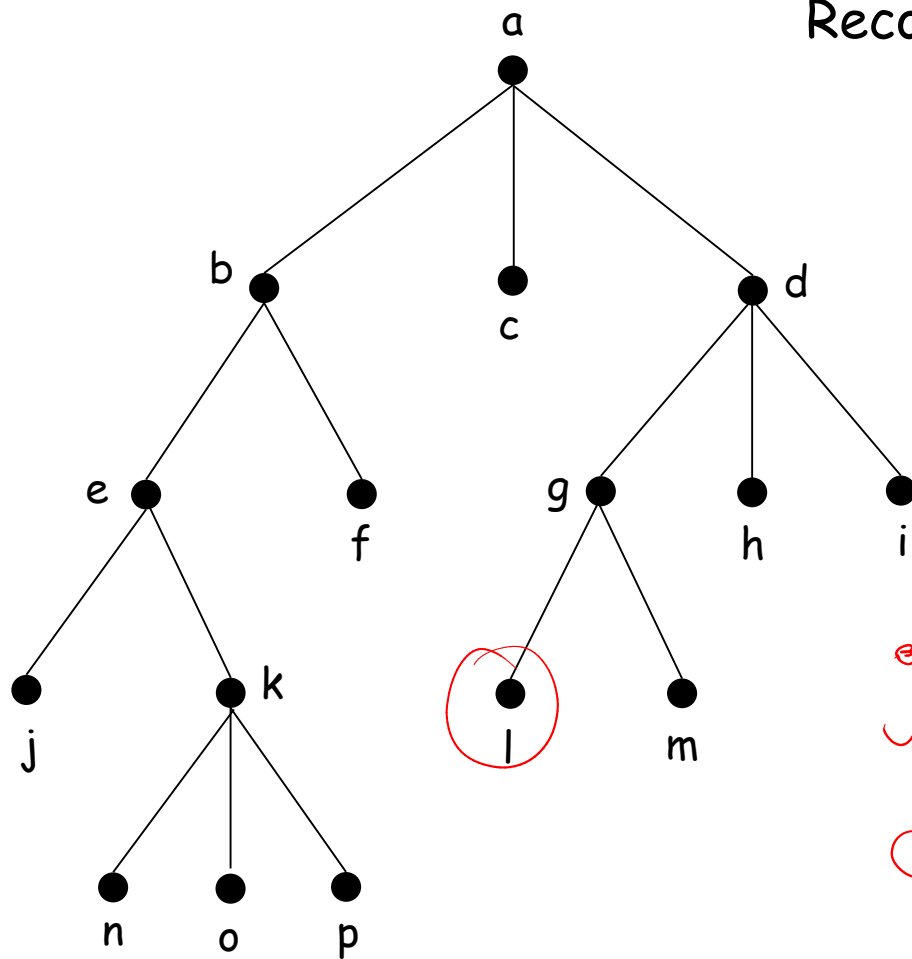
Recorrido en inorden:

$e - b - f - g - a - c - h - d - i - j$



Árboles

Recorrido en inorden:

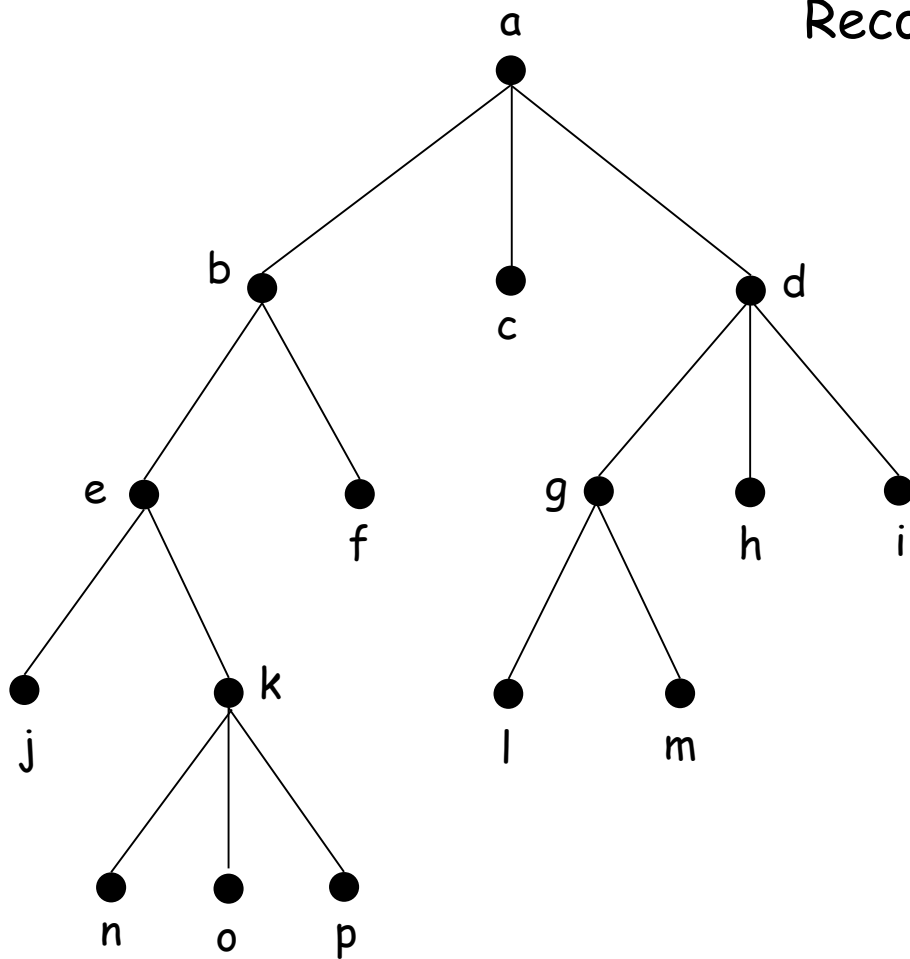


j e n k o p b f g
c l g m d h i

Árboles

Recorrido en inorden:

j-e-n-k-o-p-b-f-a-c-l-g-m-d-h-i



Árboles

Recorridos de los árboles

- Preorden
- Inorden
- Postorden

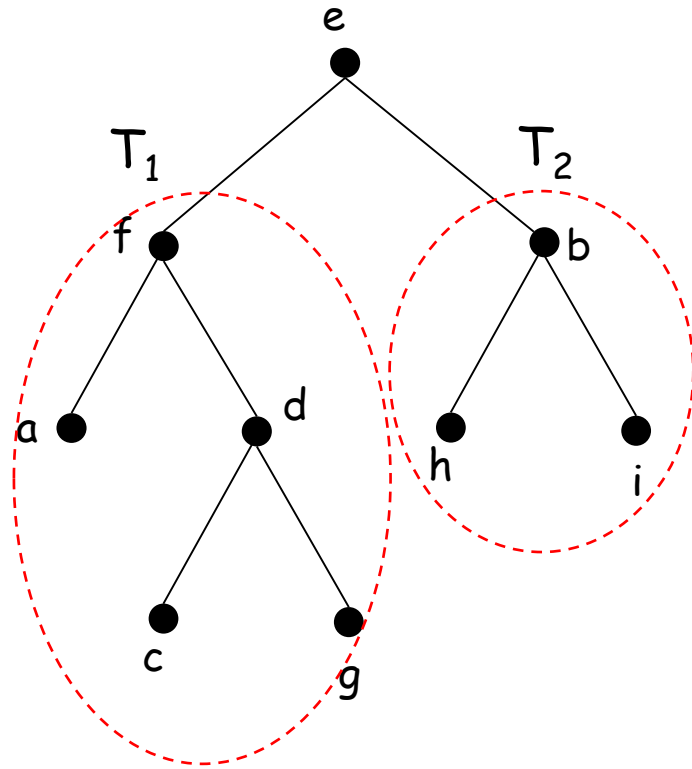
I
D
R

Árboles

Recorridos en postorden

Sea T un árbol con raíz r y subárboles T_1, T_2, \dots, T_n . El recorrido en postorden se hace realizando el recorrido de T_1 en postorden, T_2 en postorden, hasta T_n en postorden, y luego visitando r

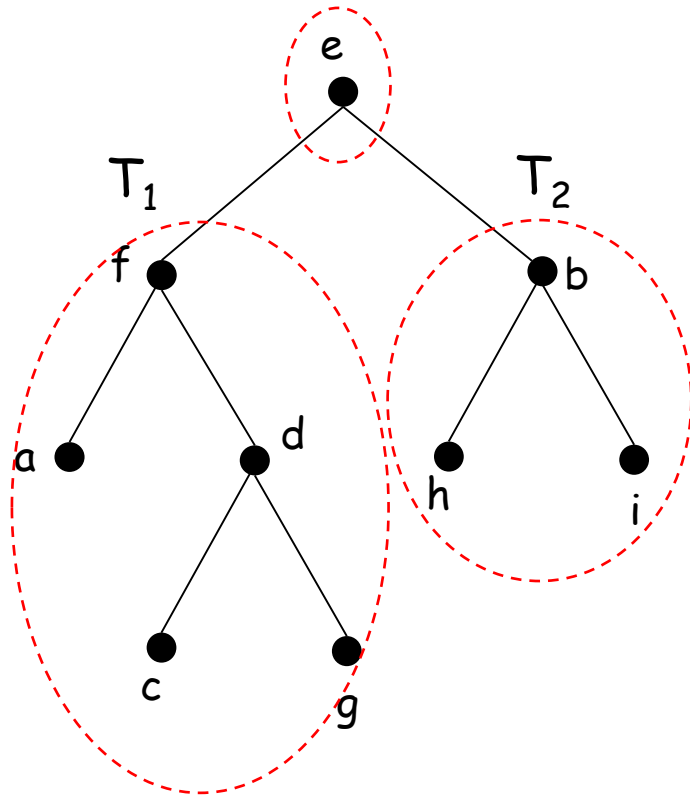
Árboles



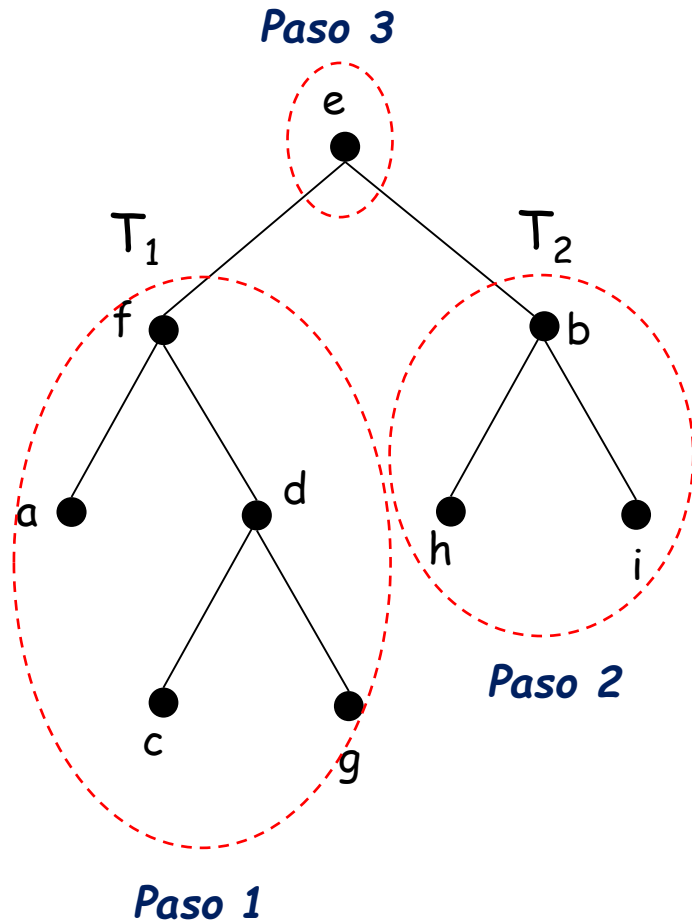
Recorrido en postorden:

Árboles

Recorrido en postorden:



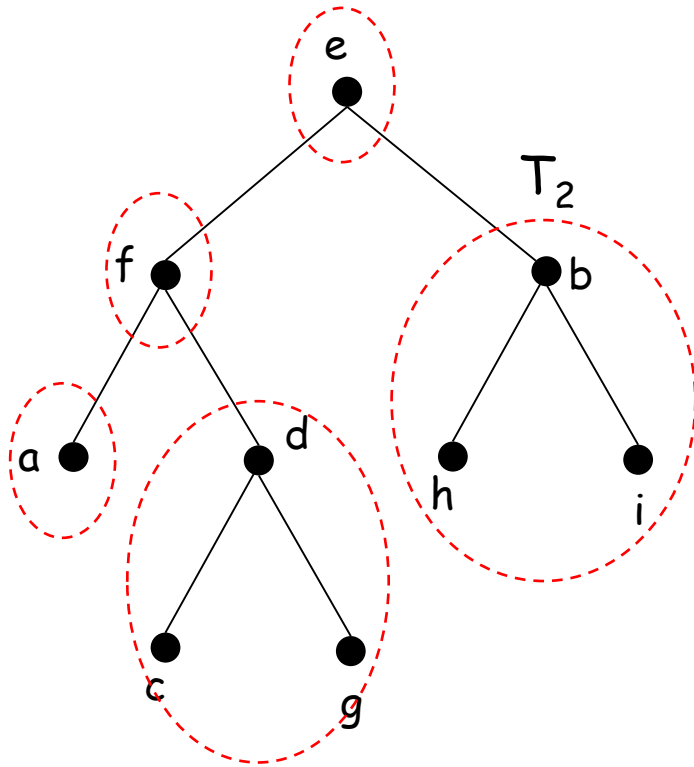
Árboles



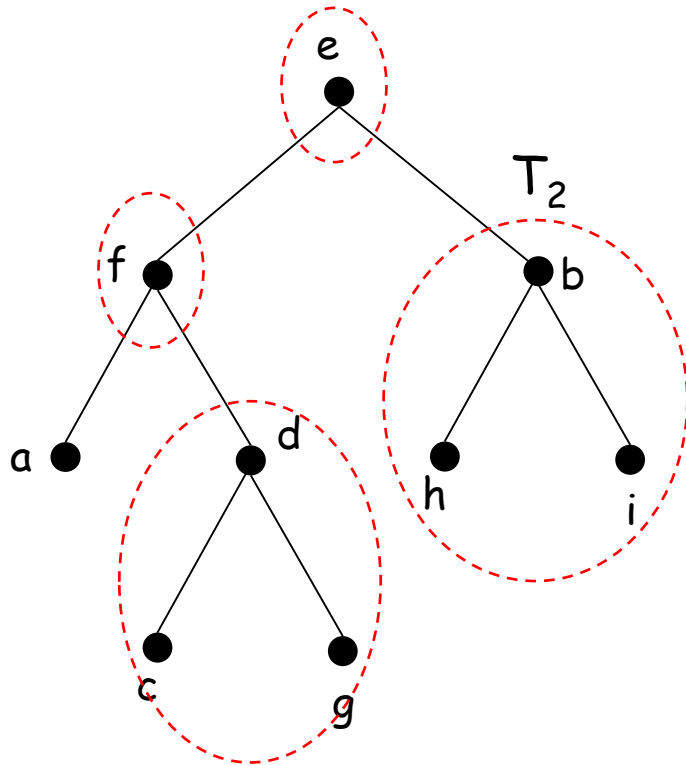
Recorrido en postorden:

Árboles

Recorrido en postorden:



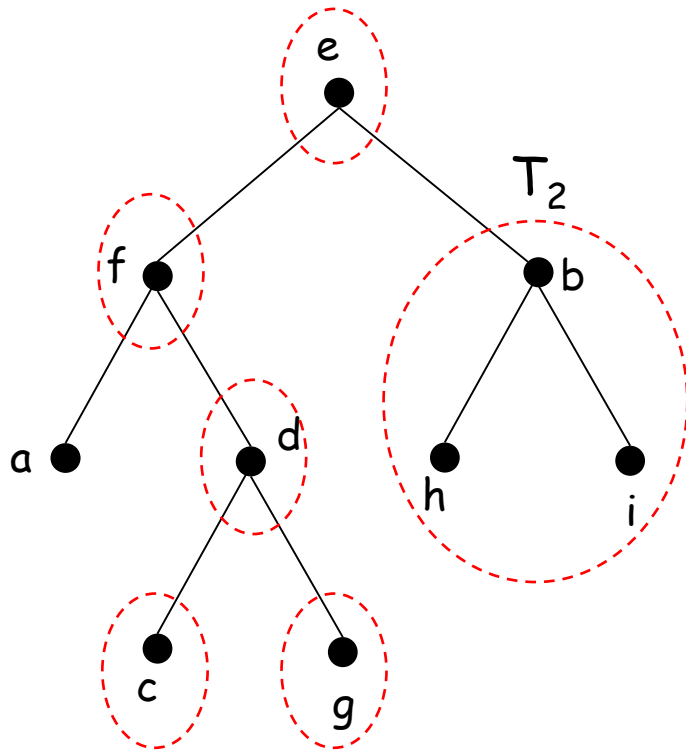
Árboles



Recorrido en postorden:

a

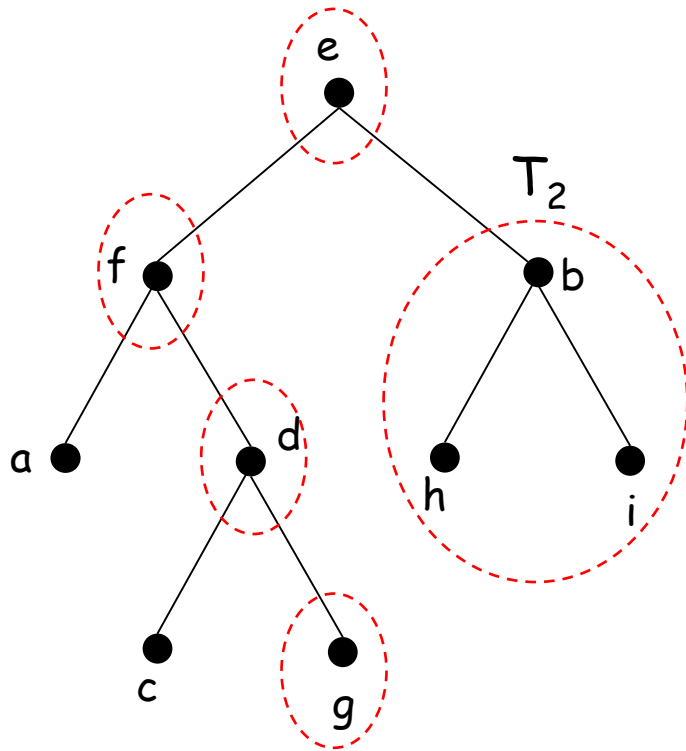
Árboles



Recorrido en postorden:

a

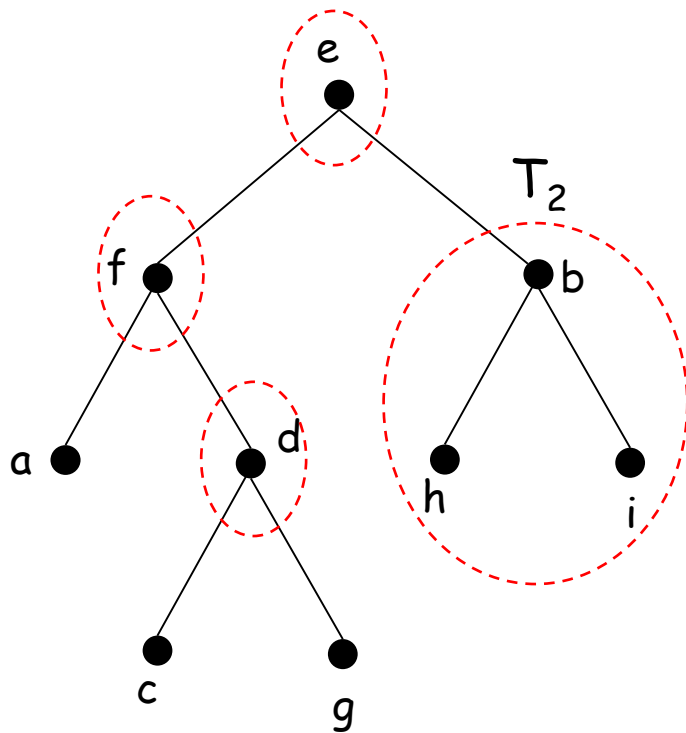
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c

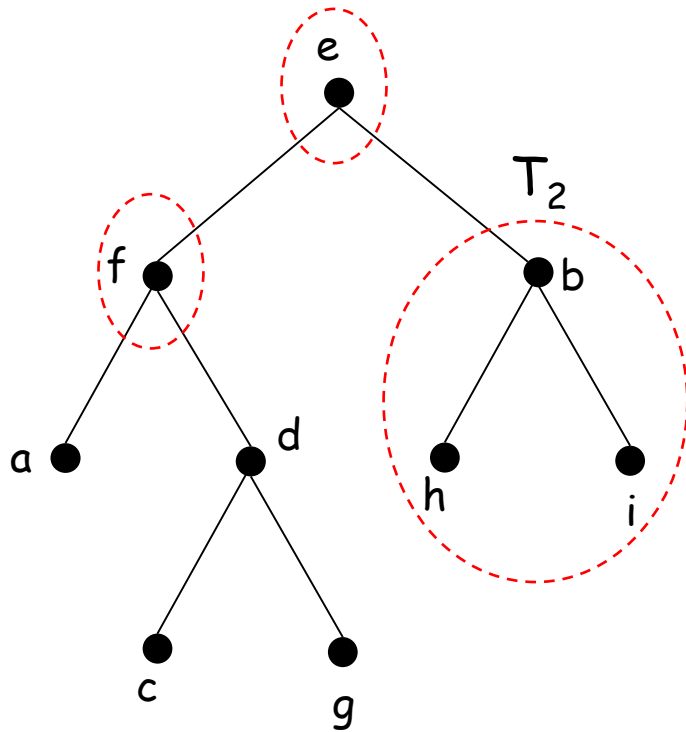
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g

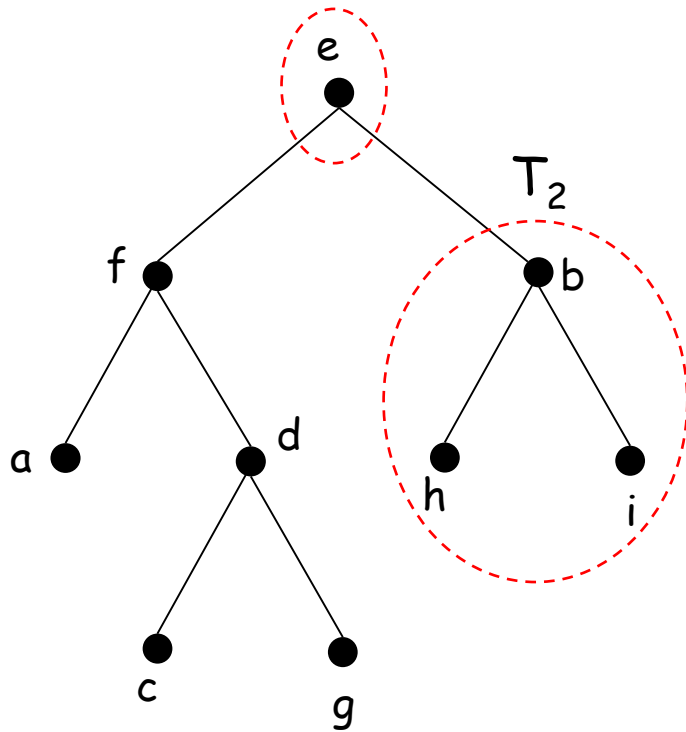
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g - d

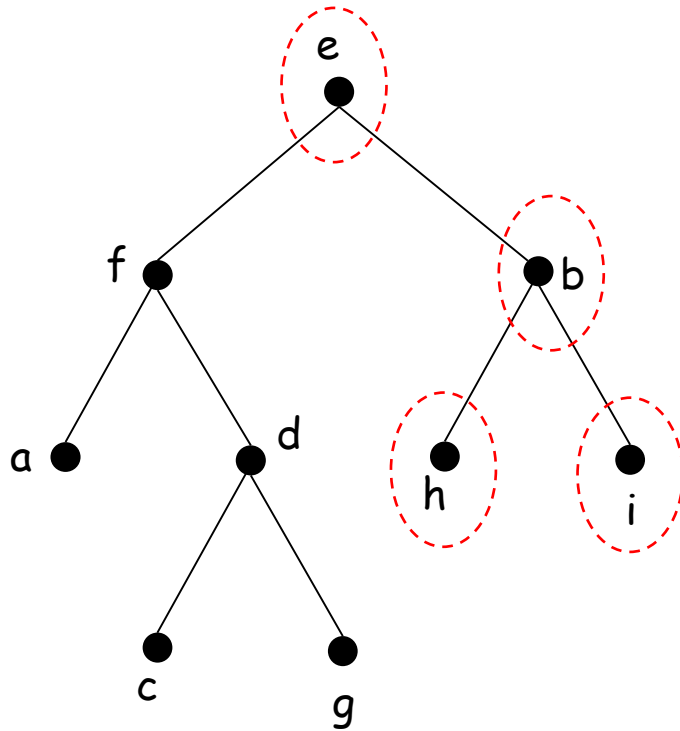
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g - d - f

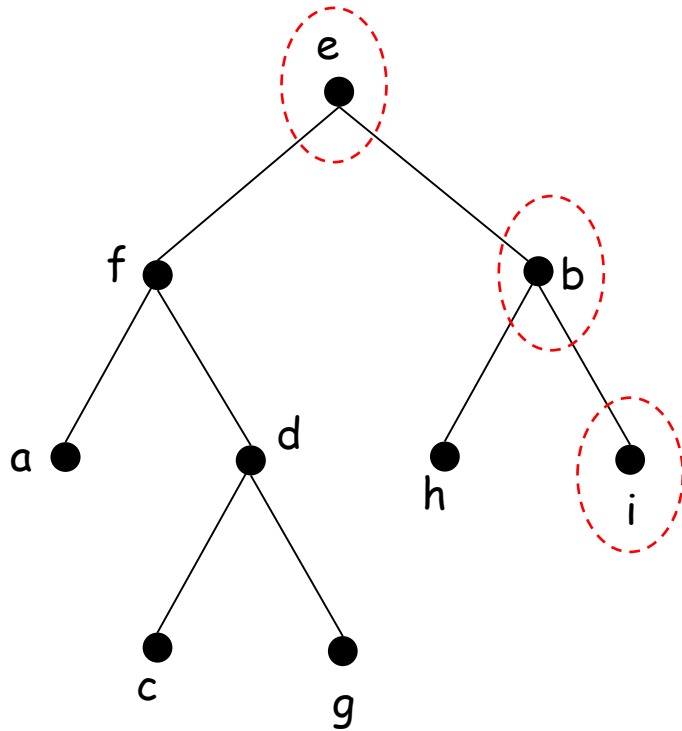
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g - d - f

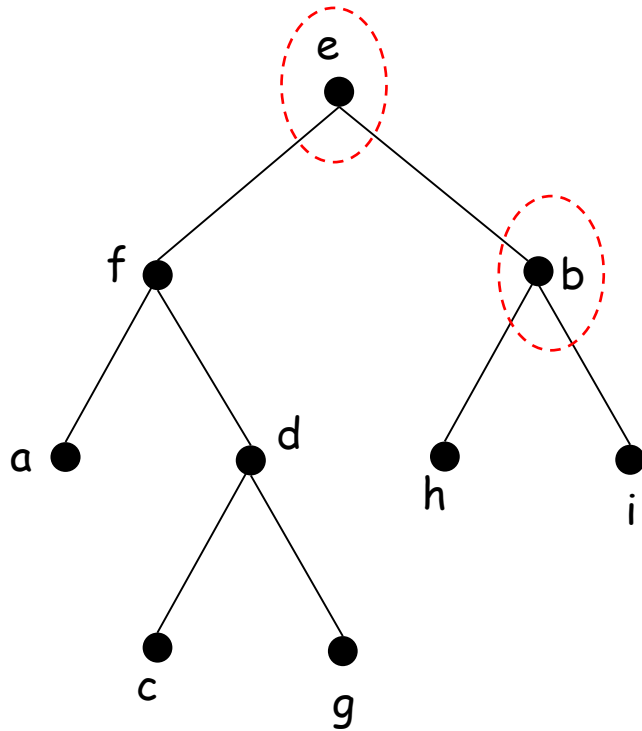
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g - d - f - h

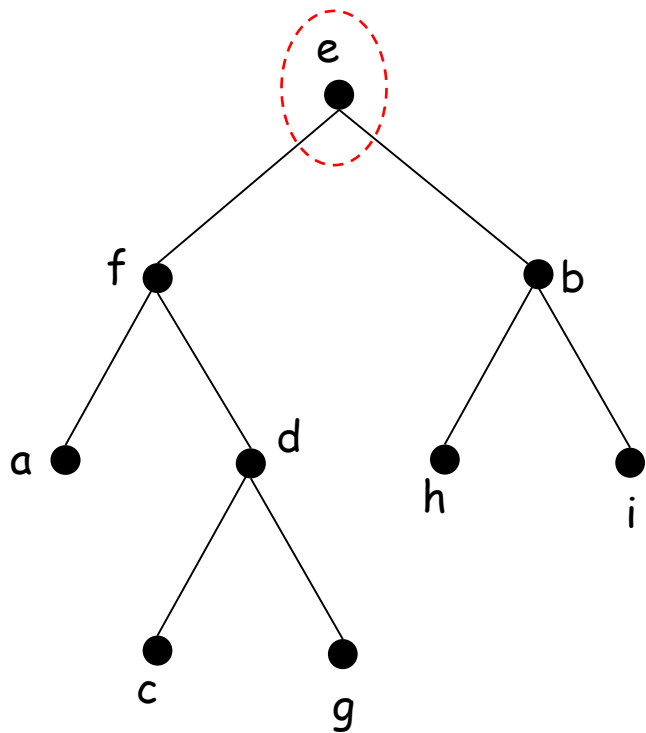
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g - d - f - h - i

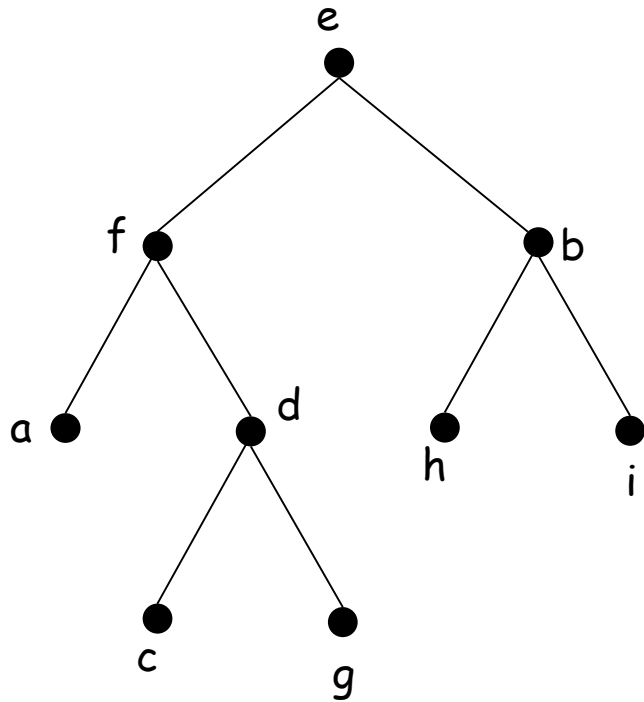
Árboles



Recorrido en postorden:

a - c - g - d - f - h - i - b

Árboles

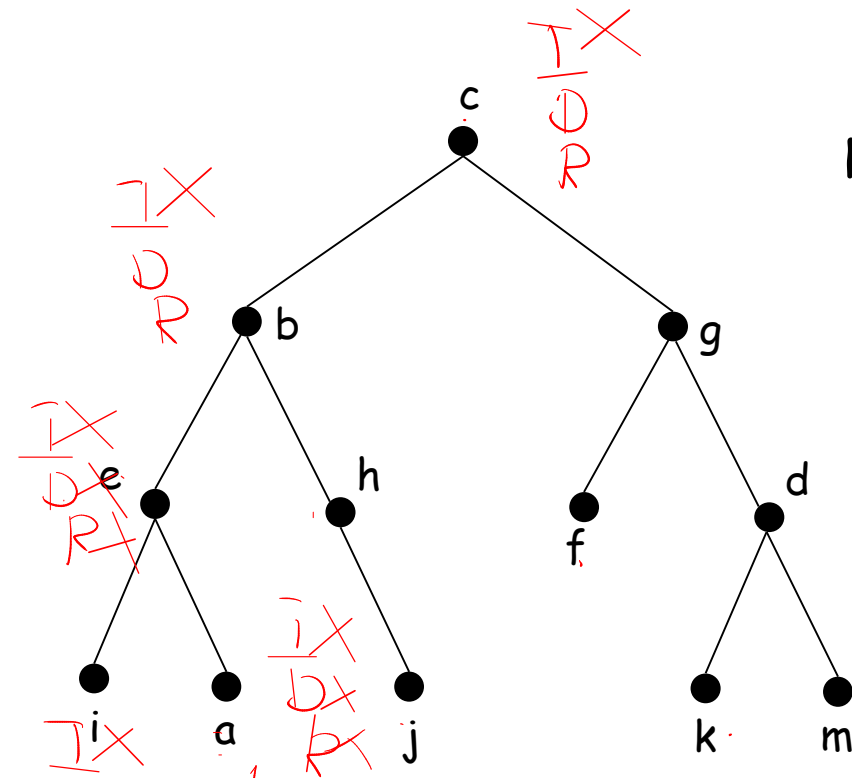


Recorrido en postorden:

a - c - g - d - f - h - i - b - e

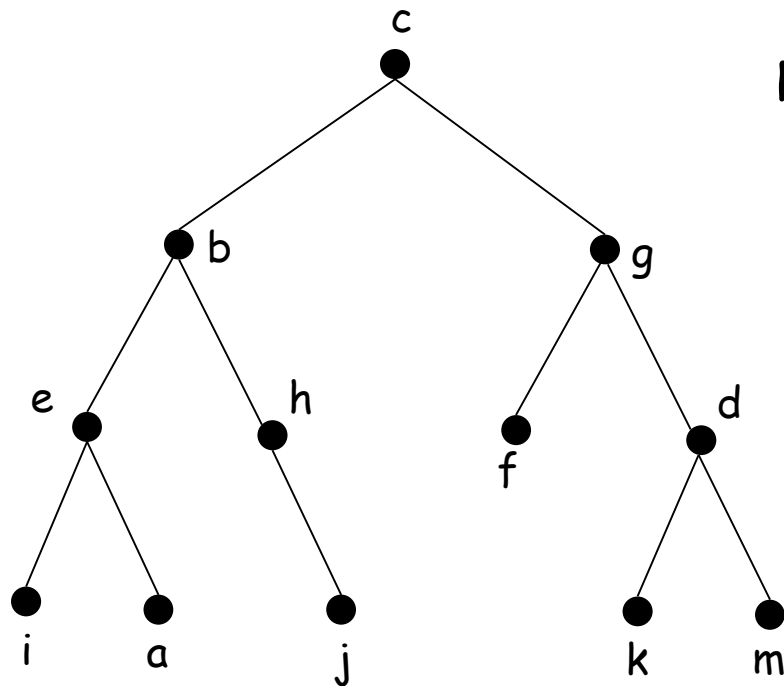
Árboles

Recorrido en postorden:



i a e j b c f k m d g

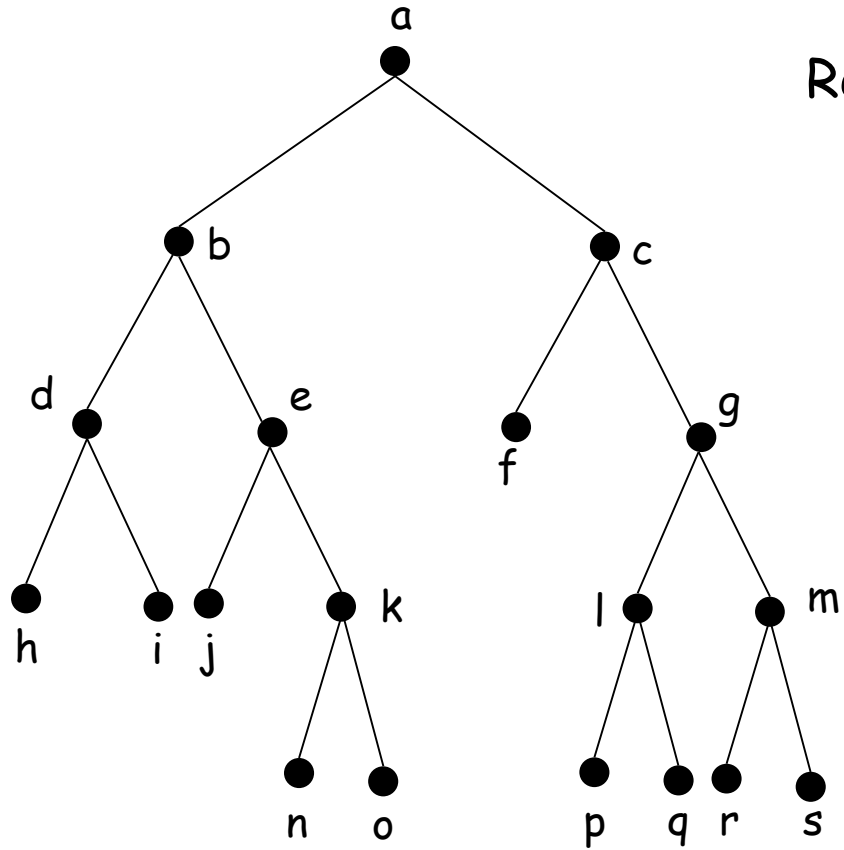
Árboles



Recorrido en postorden:

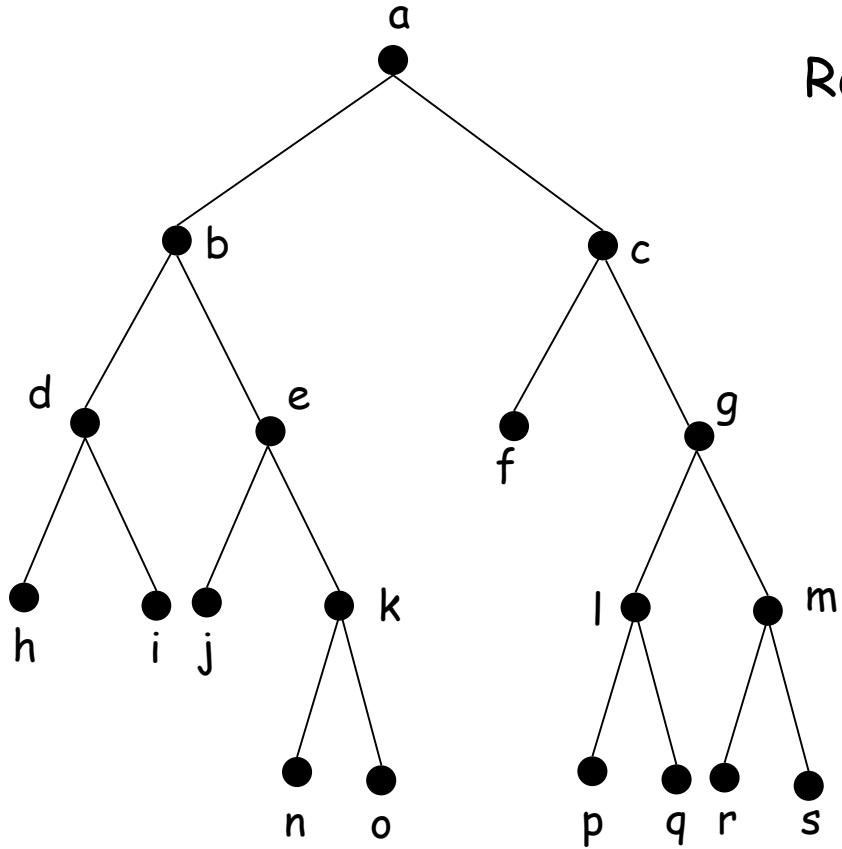
i - a - e - j - h - b - f - k - m - d - g - c

Árboles



Recorrido en postorden:

Árboles

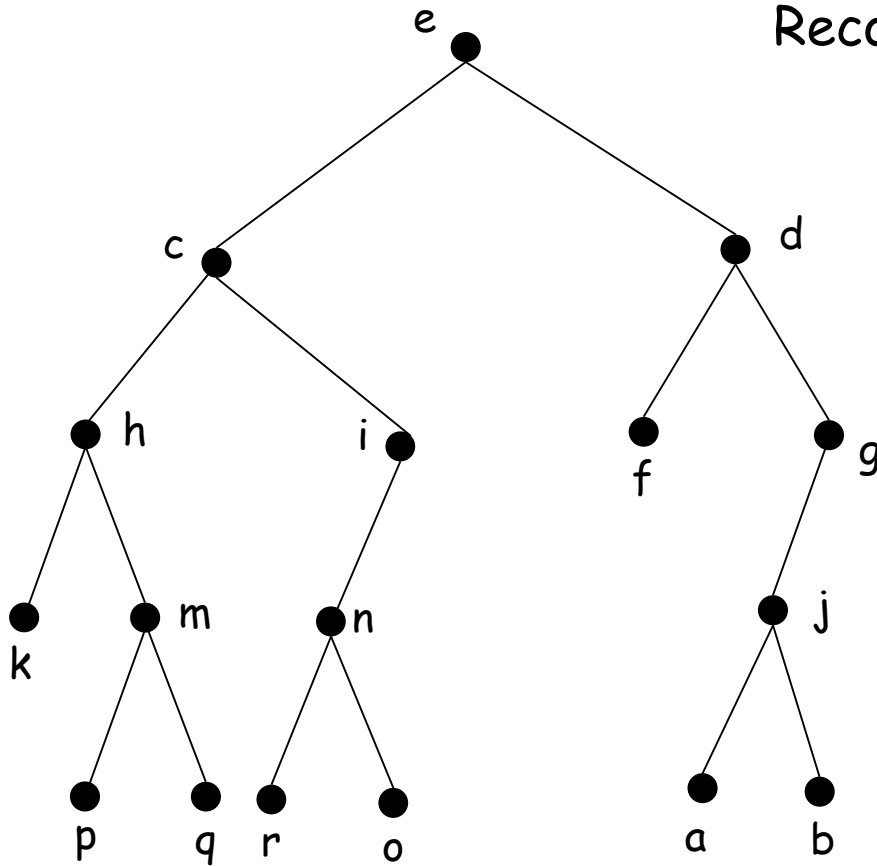


Recorrido en postorden:

h-i-d-j-n-o-k-e-b-f-p-q-l-r-s-m-g-c-a

Árboles

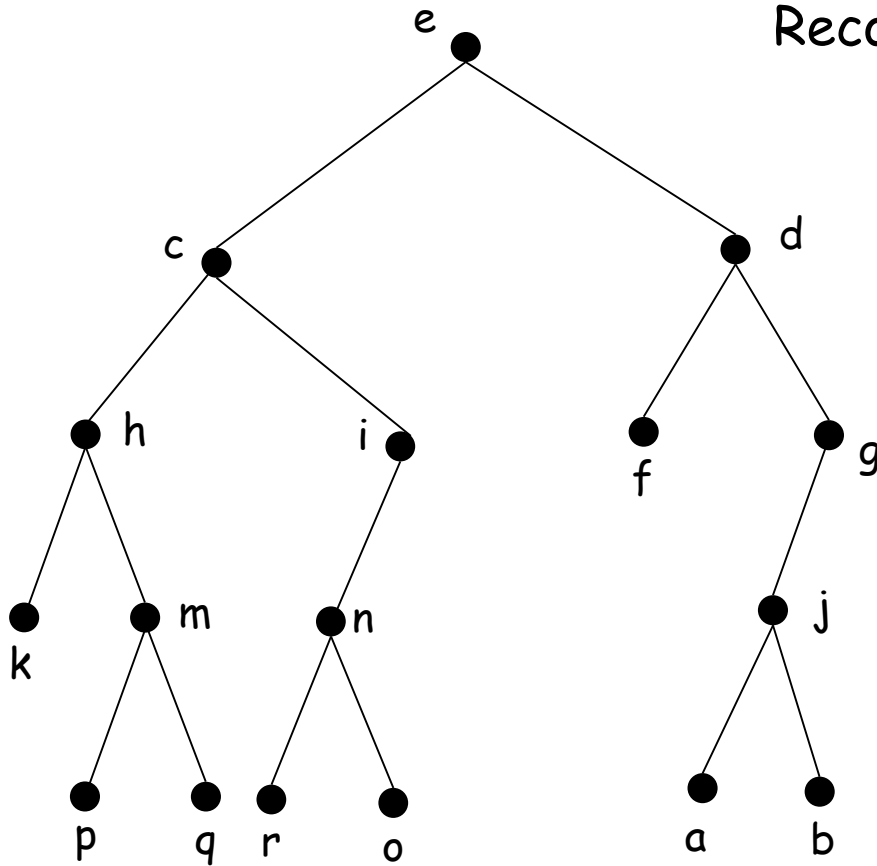
Recorrido en postorden:



Árboles

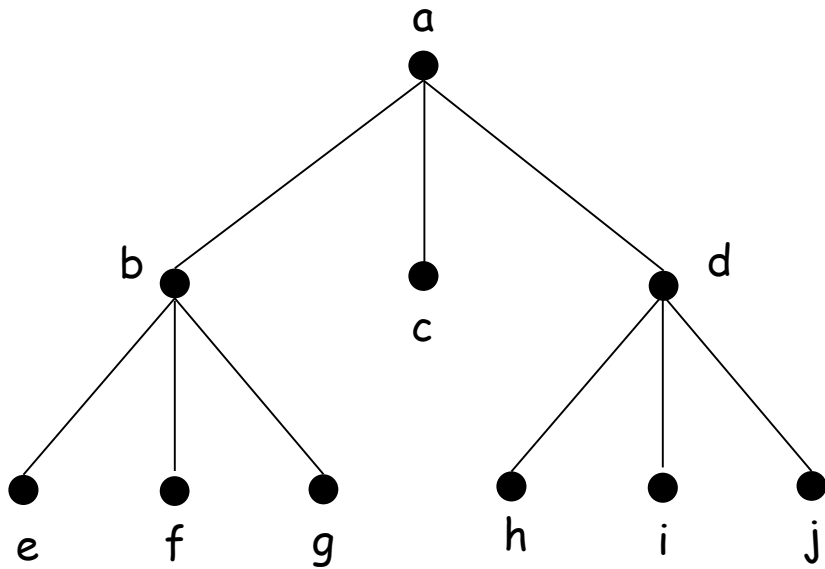
Recorrido en postorden:

k-p-q-m-h-r-o-n-i-c-f-a-b-j-g-d-e



Árboles

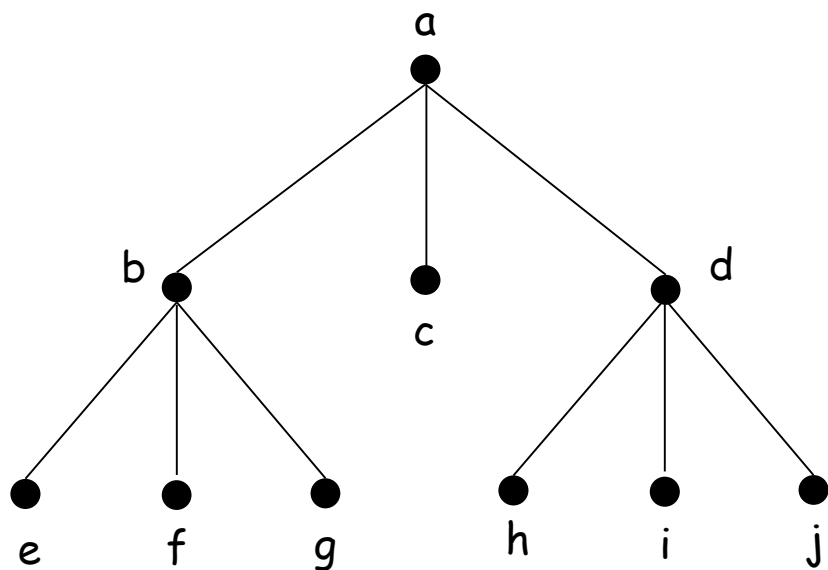
Recorrido en postorden:



Árboles

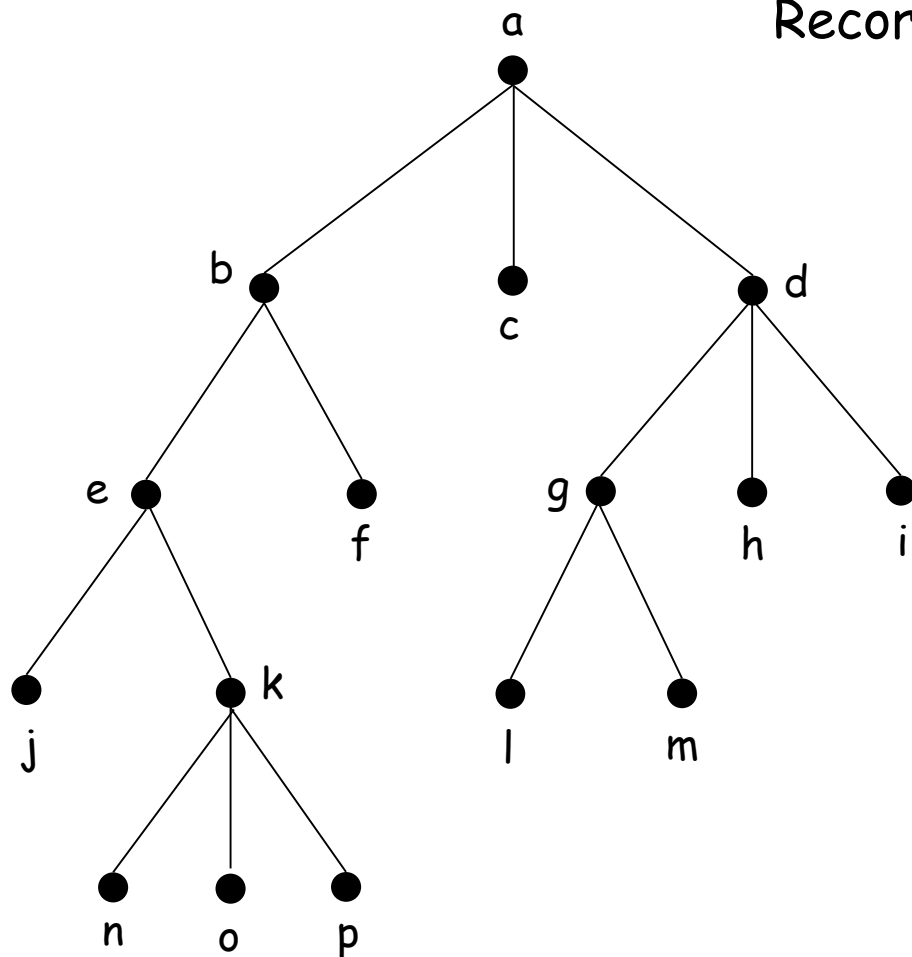
Recorrido en postorden:

$e - f - g - b - c - h - i - j - d - a$



Árboles

Recorrido en postorden:

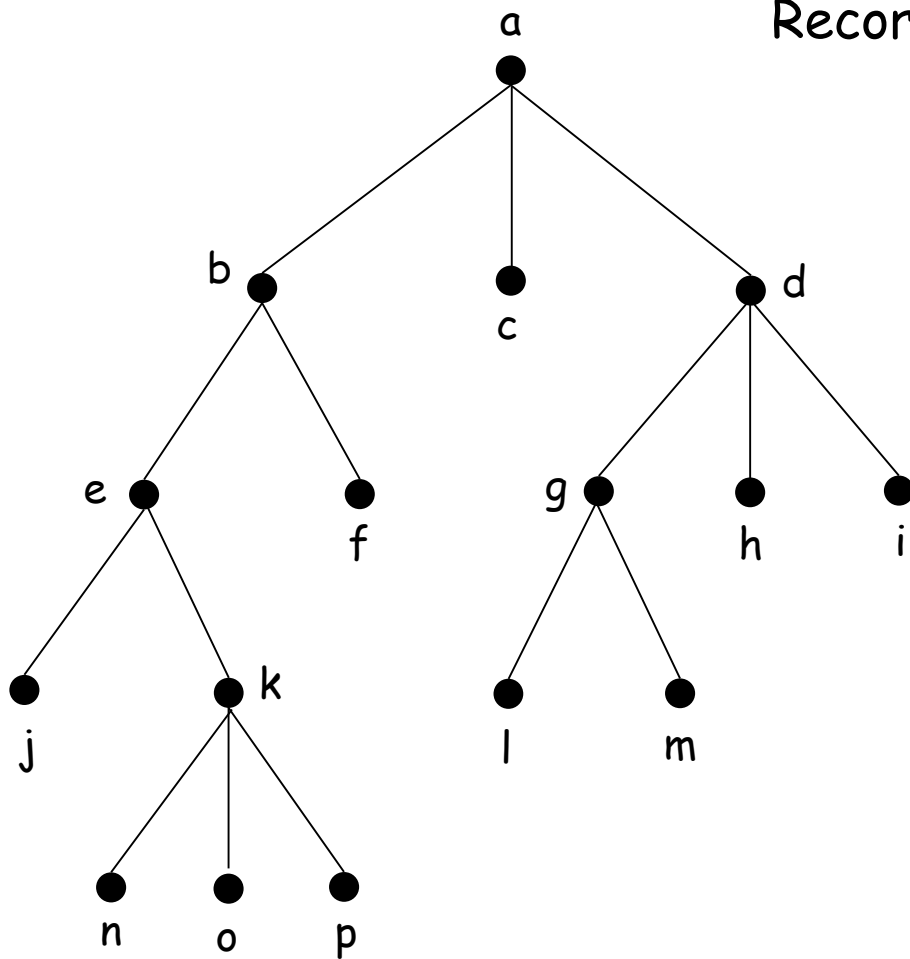


j n o p k e f b
c l m g h i d a

Árboles

Recorrido en postorden:

j-n-o-p-k-e-f-b-c-l-m-g-h-i-d-a



Árboles

Notación infija, prefija y postfija

Permite representar expresiones complejas como proposiciones compuestas, combinaciones de conjuntos y expresiones aritméticas

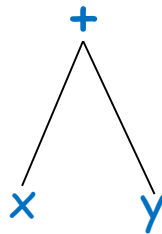
Árboles

Expresiones aritméticas

- Suma (+)
- Resta (-)
- Multiplicación (*)
- División (/)
- Potencia (\uparrow)

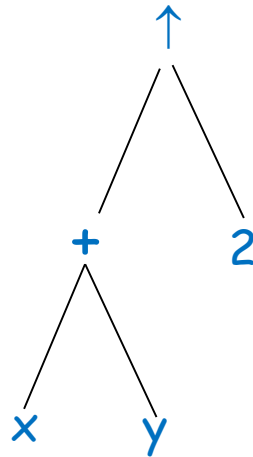
Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^2)+((x-4)/3)$



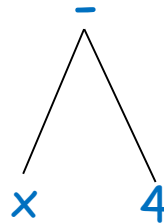
Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^2) + ((x-4)/3)$



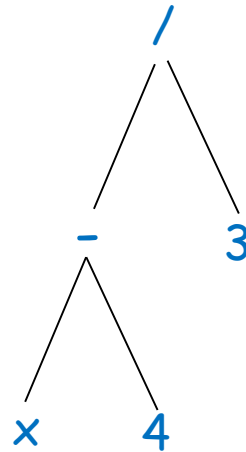
Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^2) + ((x-4)/3)$



Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^{\uparrow 2}) + ((x-4)/3)$

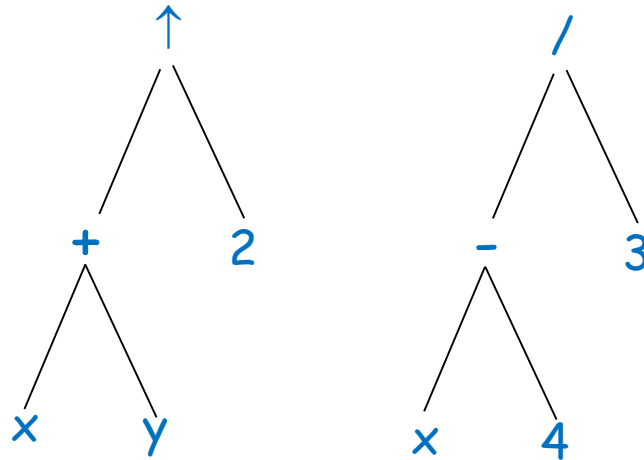


$(/ (- x 4) 3)$

$(x - 4) / 3$

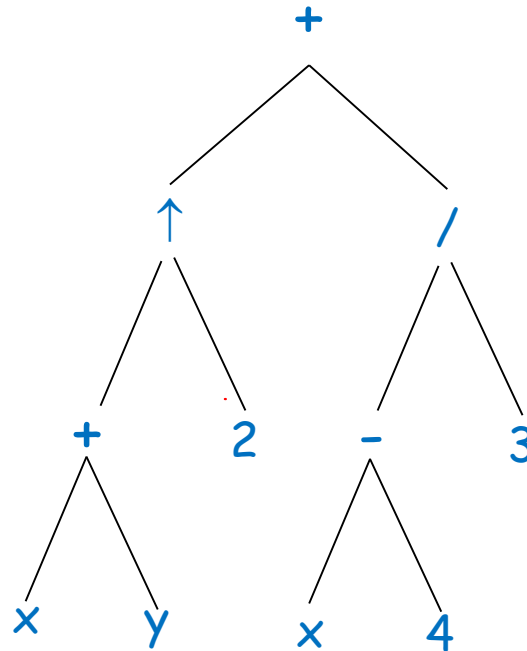
Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^2)+((x-4)/3)$



Árboles

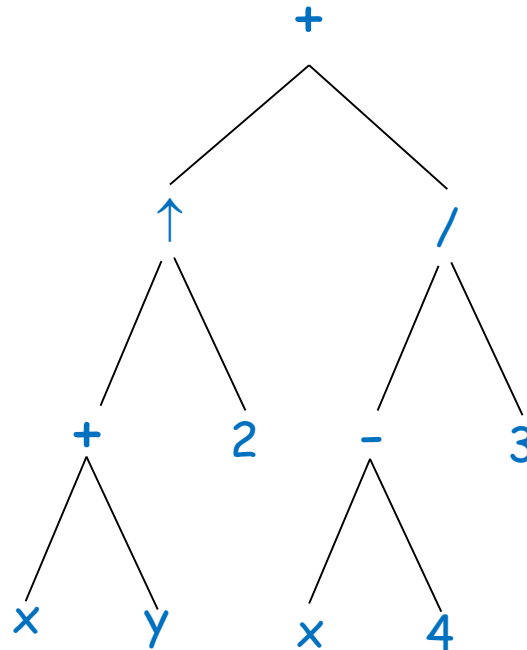
Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^2)+((x-4)/3)$



↓
(+ (^ (+ x y) 2) (/ (- x 4) 3))

Árboles

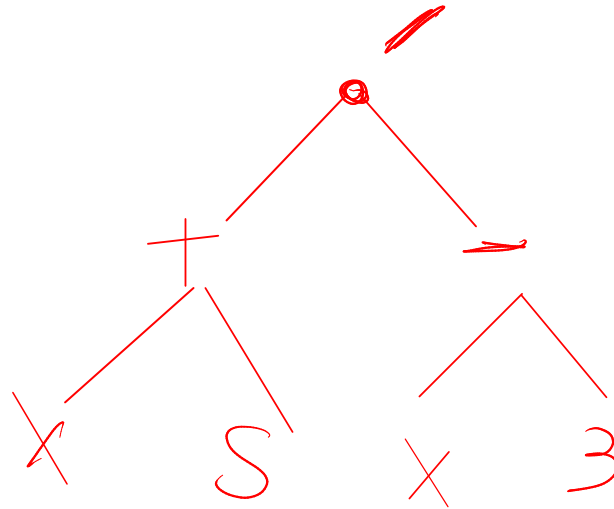
Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $((x+y)^2)+((x-4)/3)$



La expresión $((x+y)^2)+((x-4)/3)$ se obtiene al hacer el recorrido en inorden

Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $(x+5)/(x-3)$

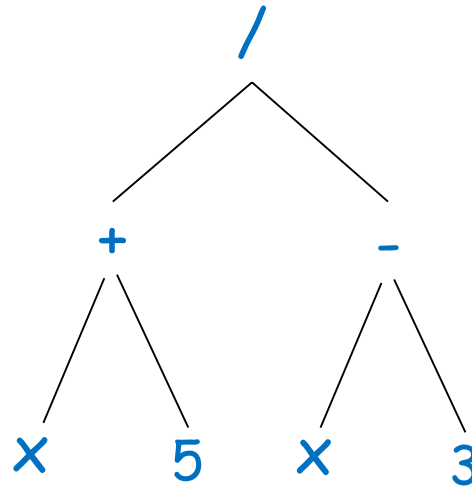


$(x + 5) / (x - 3)$

$(+ x 5) (- x 3)$

$((x 5 +) (x 3 -) /)$

Árboles

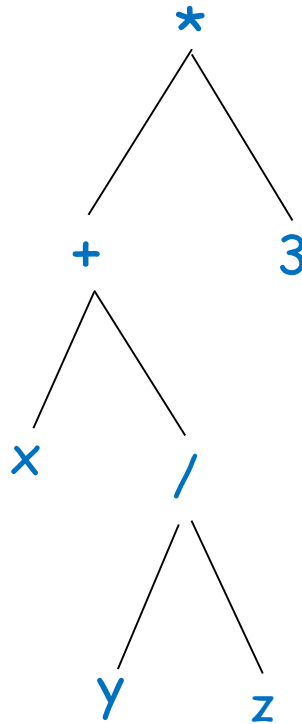


Árbol binario que representa la
expresión matemática $(x+5)/(x-3)$

Árboles

Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $(x+(y/z))^*3$

Árboles

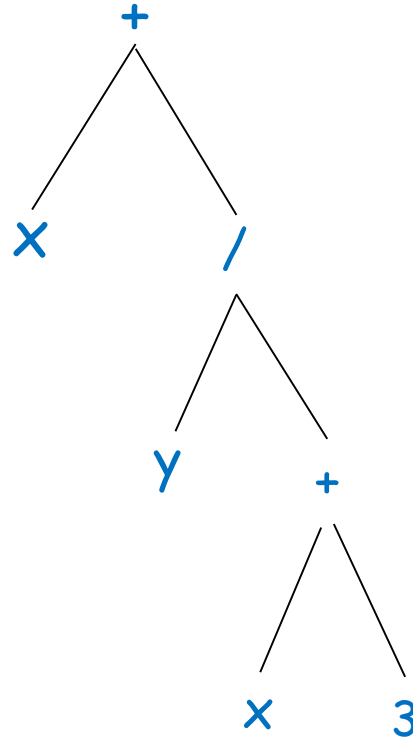


Árbol binario que representa la
expresión matemática $(x + (y / z)) * 3$

Árboles

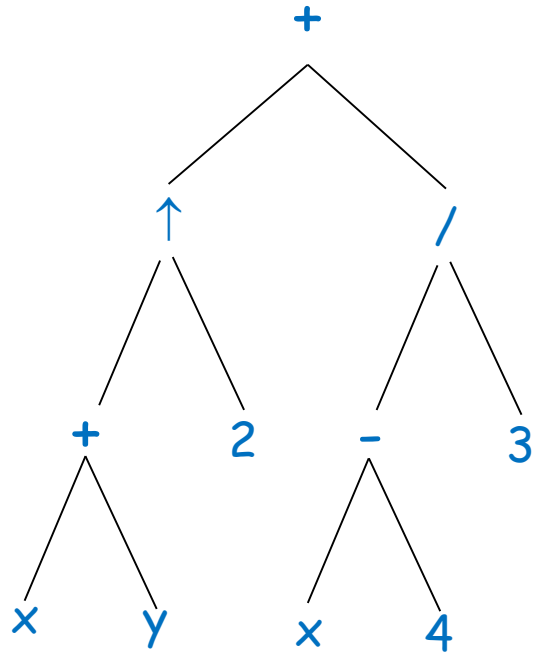
Muestre un árbol binario que represente la expresión matemática $x + (y / (x + 3))$

Árboles

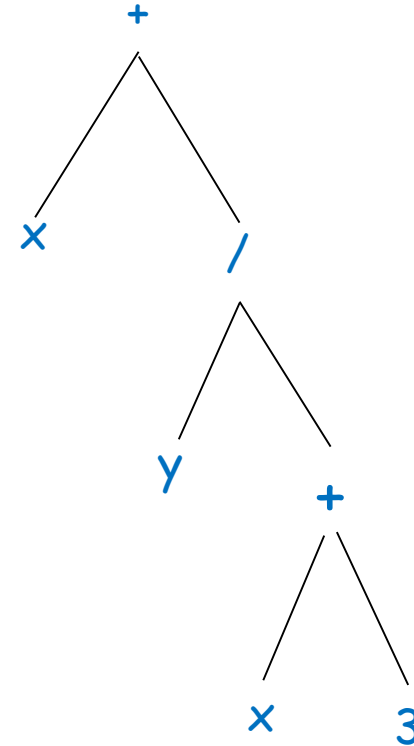


Árbol binario que representa la
expresión matemática $x + (y / (x + 3))$

Árboles

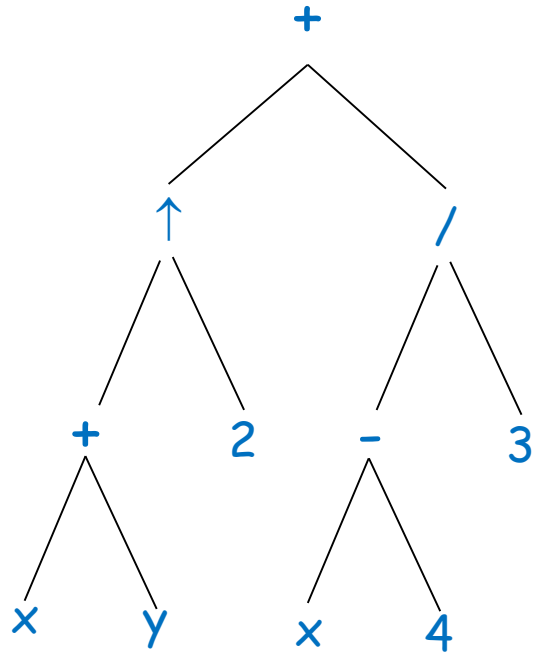


Árbol binario que representa
la expresión matemática
 $((x+y)^{\uparrow 2}) + ((x-4)/3)$

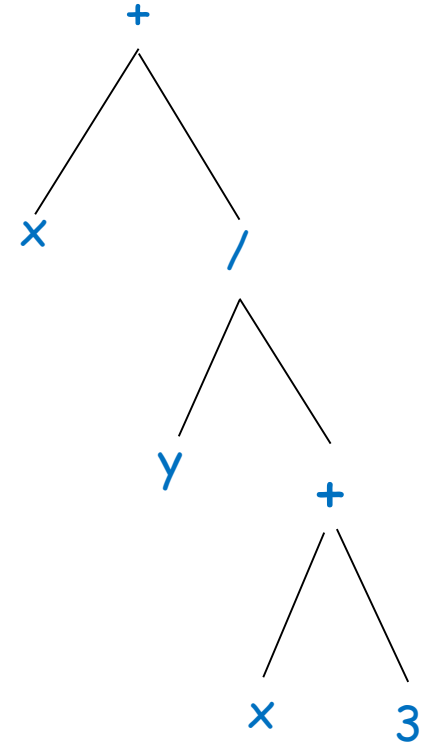


Árbol binario que representa
la expresión matemática
 $x + (y / (x + 3))$

Árboles

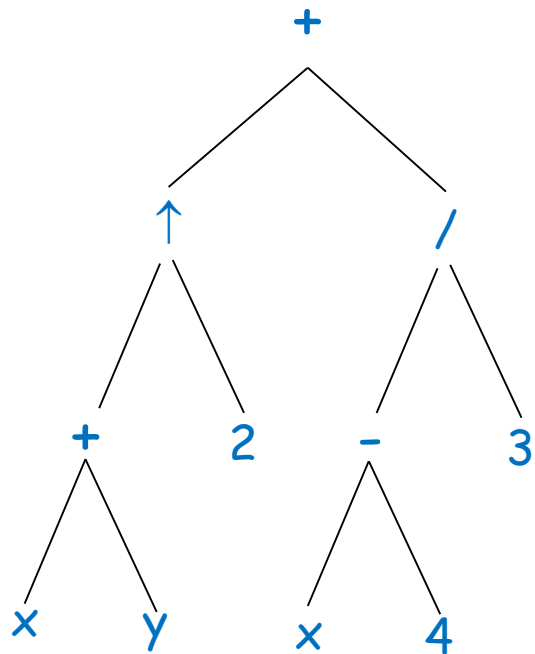


Recorrido en inorden:



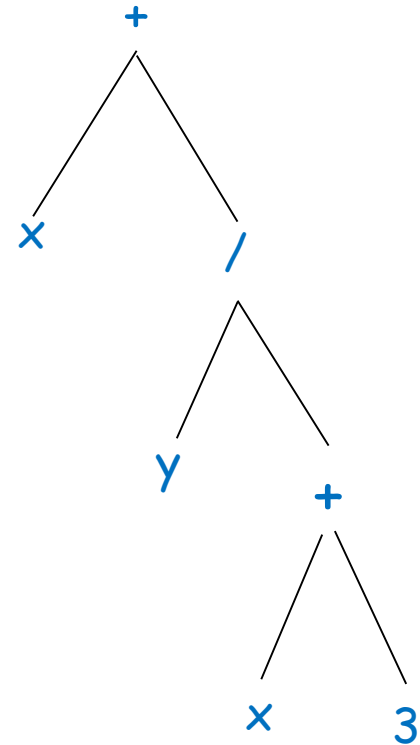
Recorrido en inorden:

Árboles



Recorrido en inorden:

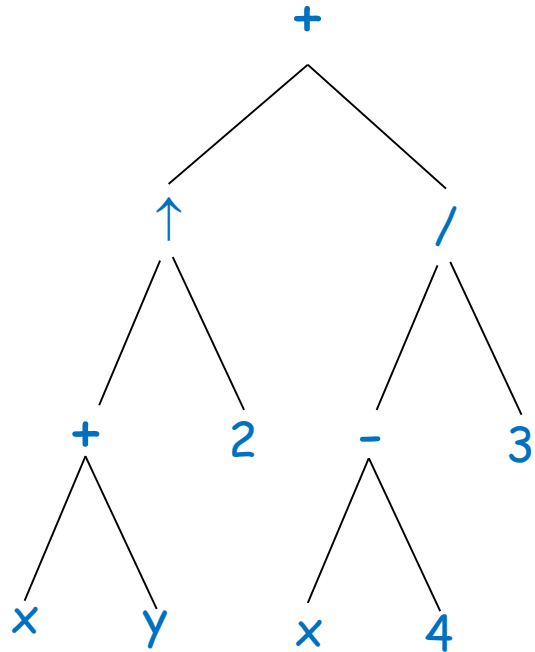
$$((x+y)^2)+((x-4)/3)$$



Recorrido en inorden:

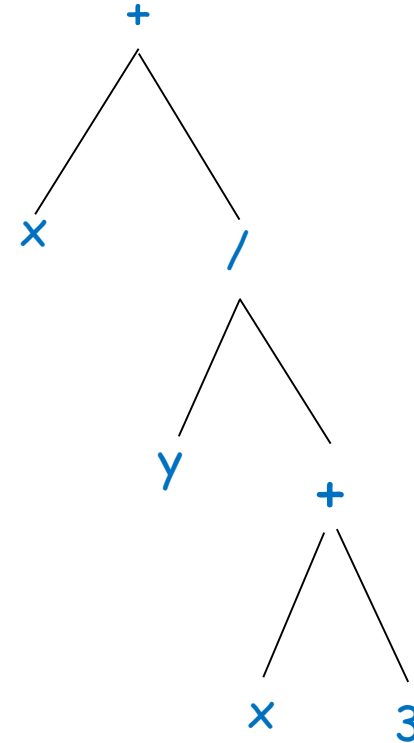
$$x+(y/(x+3))$$

Árboles



Recorrido en inorden:

$((x+y)^2)+((x-4)/3)$

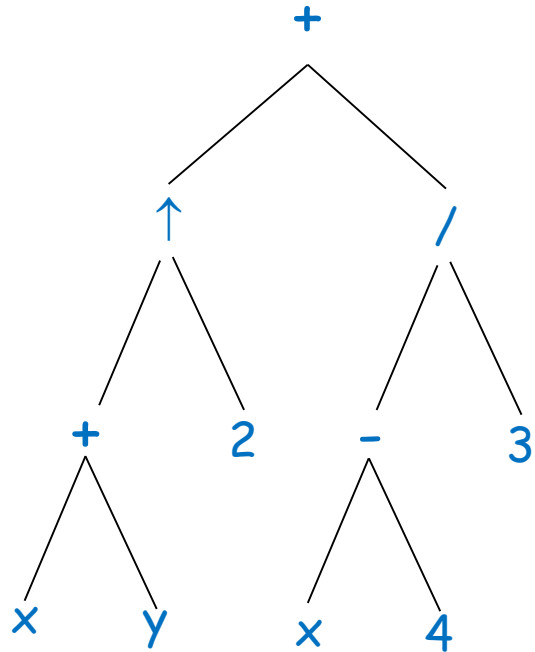


Recorrido en inorden:

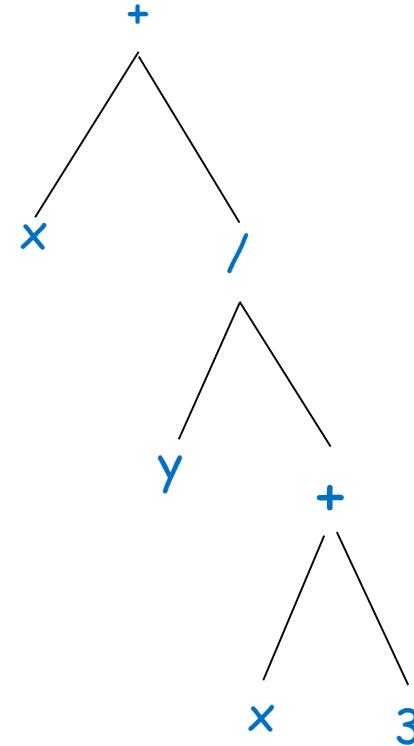
$x+(y/(x+3))$

Notación infija

Árboles

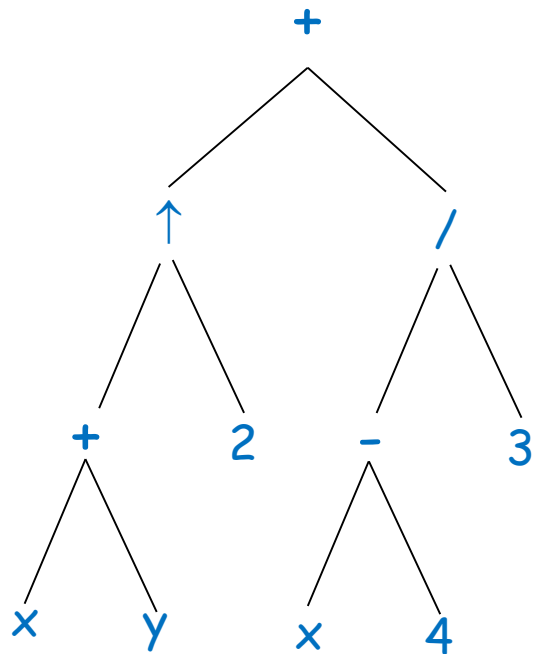


Recorrido en preorden:



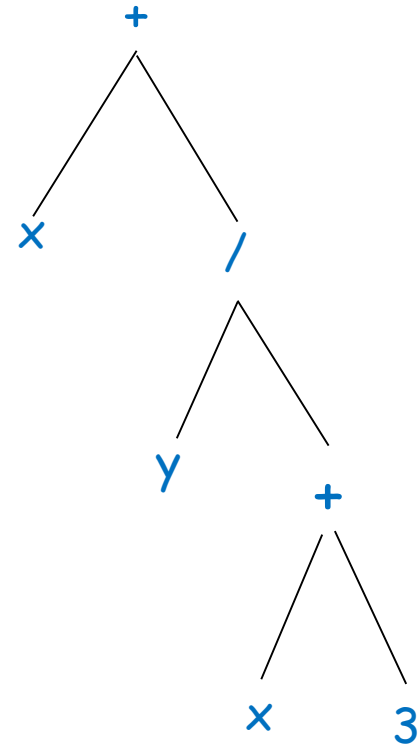
Recorrido en preorden:

Árboles



Recorrido en preorden:

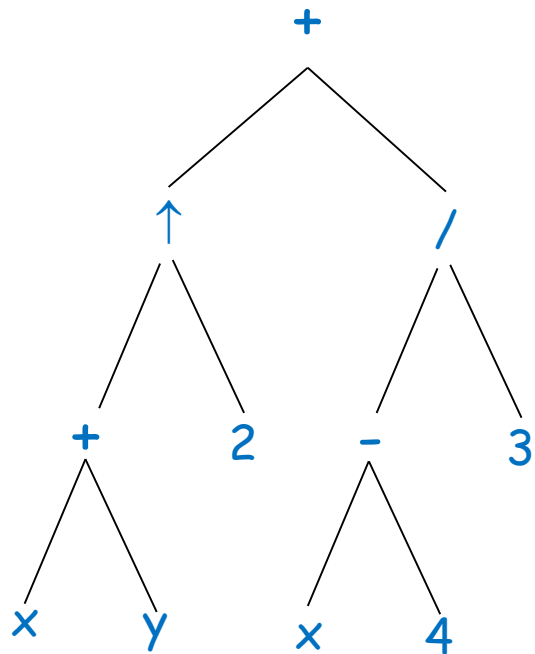
+ ↑ + x y 2 / - x 4 3



Recorrido en preorden:

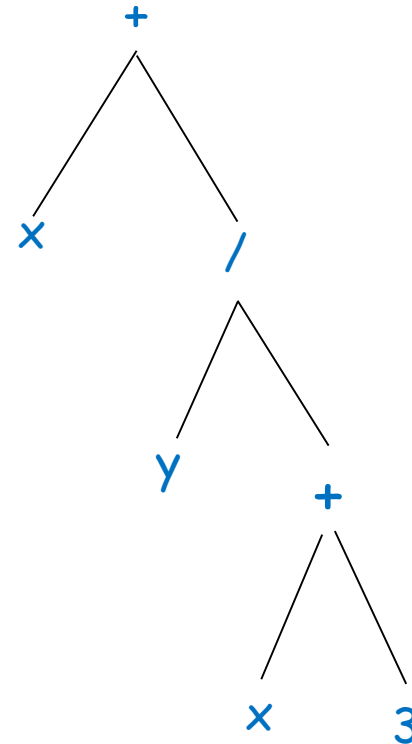
+ x / y + x 3

Árboles



Recorrido en preorden:

+ ↑ + x y 2 / - x 4 3

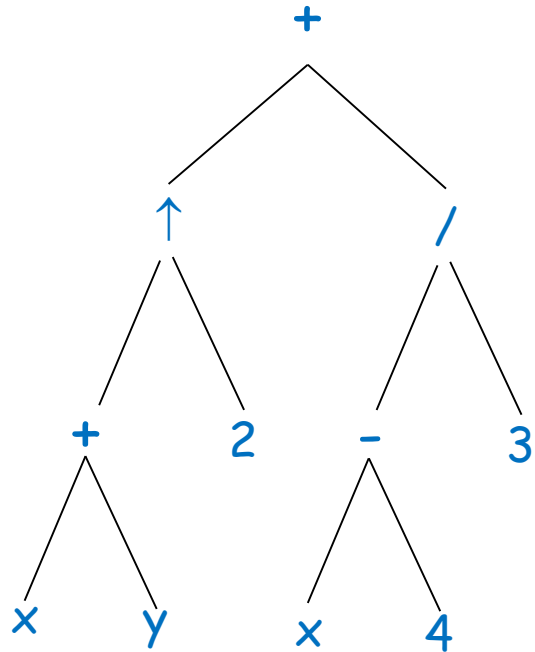


Recorrido en preorden:

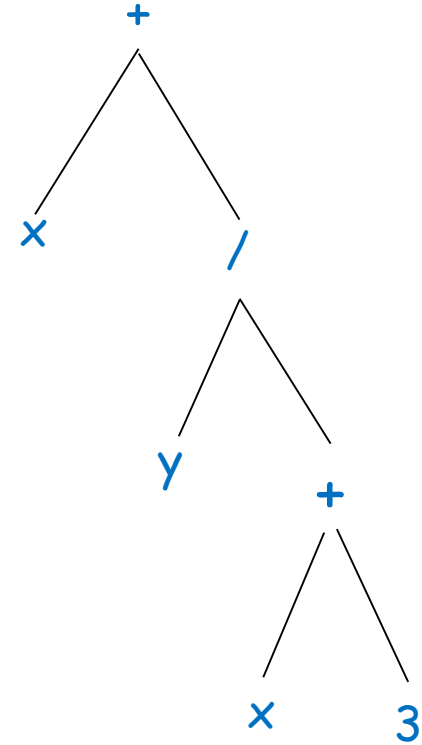
+ x / y + x 3

Notación prefija

Árboles

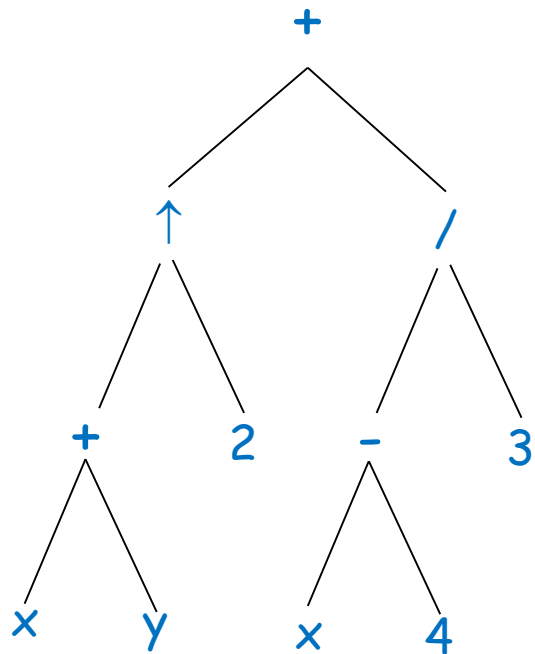


Recorrido en postorden:



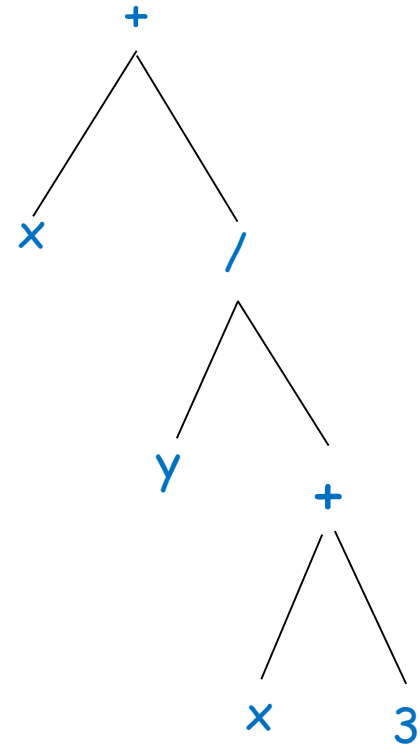
Recorrido en postorden:

Árboles



Recorrido en postorden:

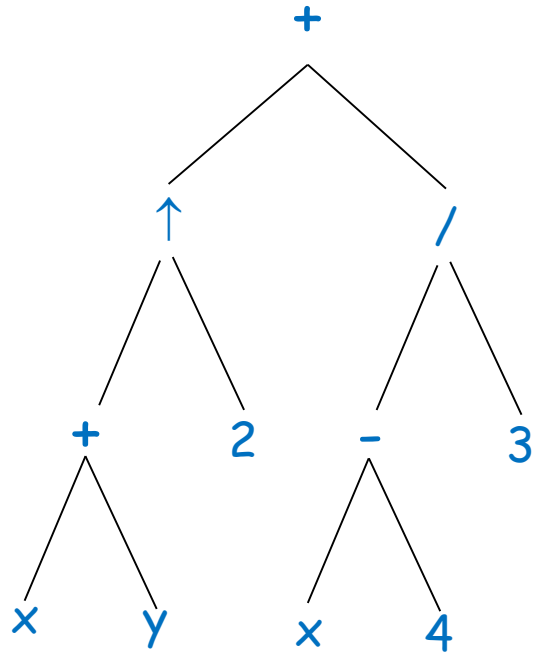
$x\ y\ +\ 2\ \uparrow\ x\ 4\ -\ 3\ /\ +$



Recorrido en postorden:

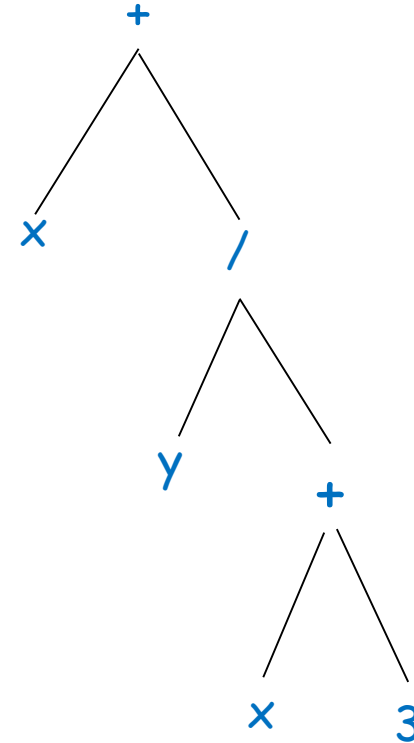
$x\ y\ x\ 3\ +\ /\ +$

Árboles



Recorrido en postorden:

$x y + 2 \uparrow x 4 - 3 / +$



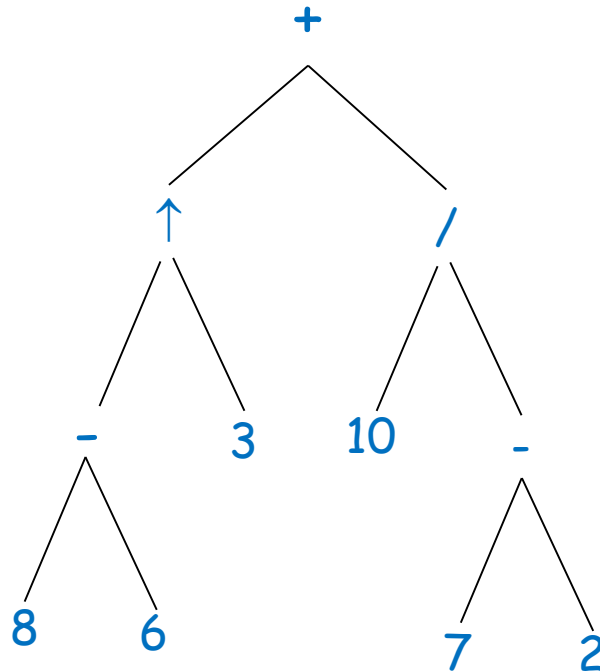
Recorrido en postorden:

$x y x 3 + / +$

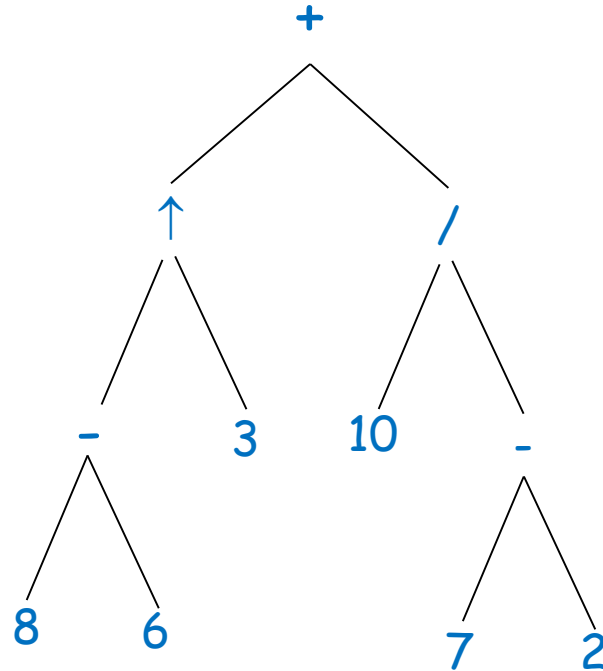
Notación postfija

Árboles

Representar en notación infija, prefija y postfija, la expresión matemática dada por el siguiente árbol:



Árboles

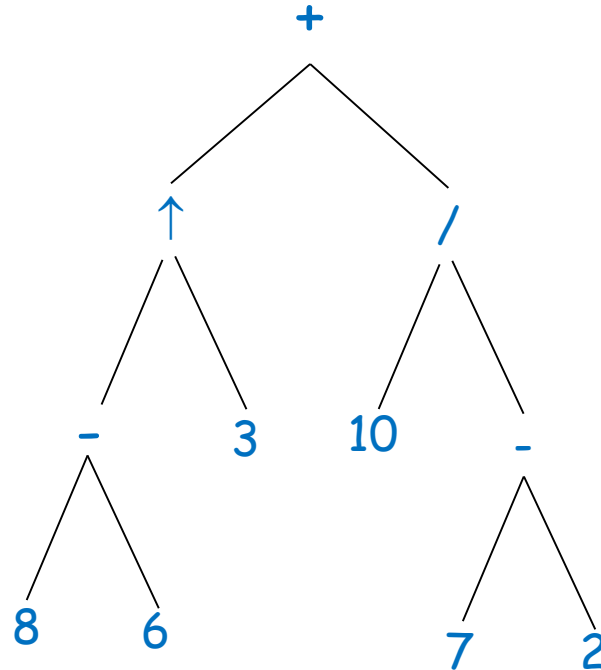


Notación **infija**: $((8-6)\uparrow 3)+(10/(7-2))$

Notación **prefija**: $+ \uparrow - 8 6 3 / 10 - 7 2$

Notación **postfija**: $8 6 - 3 \uparrow 10 7 2 - / +$

Árboles

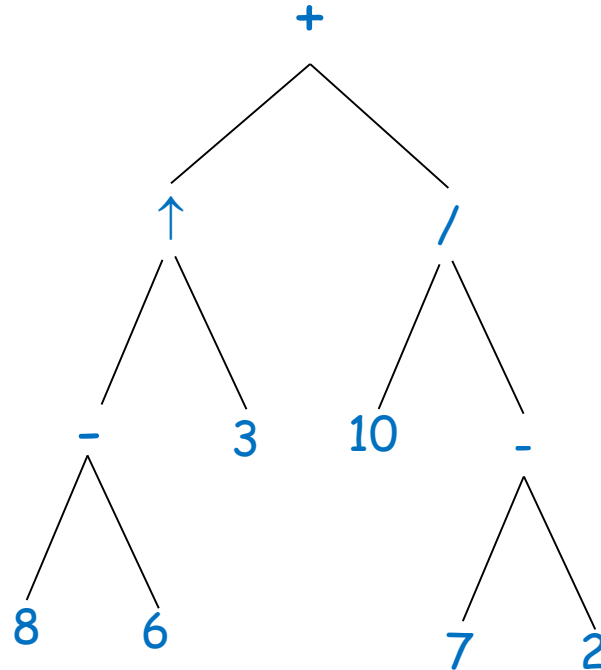


Notación **infija**: $((8-6)\uparrow 3)+(10/(7-2)) = ?$

Notación **prefija**: $+ \uparrow - 8 6 3 / 10 - 7 2$

Notación **postfija**: $8 6 - 3 \uparrow 10 7 2 - / +$

Árboles



Notación **infija**: $((8-6)\uparrow 3)+(10/(7-2)) = 10$

Notación **prefija**: $+ \uparrow - 8 6 3 / 10 - 7 2$

Notación **postfija**: $8 6 - 3 \uparrow 10 7 2 - / +$

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

+ ↑ 2 3 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

+ ↑ 2 3 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

+ ↑ 2 3 2

+ 8 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

+ ↑ 2 3 2

+ 8 2

Árboles

Notación **prefija**: + ↑ - 8 6 3 / 10 - 7 2

+ ↑ - 8 6 3 / 10 5

+ ↑ - 8 6 3 2

+ ↑ 2 3 2

+ 8 2

10

Árboles

Notación **postfija**: 8 6 - 3 ↑ 10 7 2 - / +

Árboles

Notación **postfija**: 8 6 - 3 ↑ 10 7 2 - / +

Árboles

Notación **postfija**: 8 6 - 3 ↑ 10 7 2 - / +

2 3 ↑ 10 7 2 - / +

Árboles

Notación **postfija**: 8 6 - 3 ↑ 10 7 2 - / +

2 3 ↑ 10 7 2 - / +

Árboles

Notación **postfija**: 8 6 - 3 ↑ 10 7 2 - / +

2 3 ↑ 10 7 2 - / +

8 10 7 2 - / +

Árboles

Notación **postfija**: $\underbrace{8\ 6\ -}_3\ \uparrow\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$\underbrace{2\ 3\ \uparrow}_{10}\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$8\ 10\ \underbrace{7\ 2\ -}_{10}\ /\ +$

Árboles

Notación **postfija**: $\underbrace{8\ 6\ -}_3\ \uparrow\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$\underbrace{2\ 3\ \uparrow}_{10}\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$8\ 10\ \underbrace{7\ 2\ -}_{5}\ /\ +$

$8\ 10\ 5\ /\ +$

Árboles

Notación **postfija**: $\underbrace{8\ 6\ -}_3\ \uparrow\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$\underbrace{2\ 3\ \uparrow}_{10}\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$8\ 10\ \underbrace{7\ 2\ -}_{10}\ /\ +$

$8\ \underbrace{10\ 5\ /\ }_{10}\ +$

Árboles

Notación **postfija**: $\underbrace{8\ 6\ -}_3\ \uparrow\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$\underbrace{2\ 3\ \uparrow}_{10}\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$8\ 10\ \underbrace{7\ 2\ -}_{10}\ /\ +$

$8\ \underbrace{10\ 5\ /\ }_{10}\ +$

$8\ 2\ +$

Árboles

Notación **postfija**: $\underbrace{8\ 6\ -}_3\ \uparrow\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$\underbrace{2\ 3\ \uparrow}_{10}\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$8\ 10\ \underbrace{7\ 2\ -}_{10}\ /\ +$

$8\ \underbrace{10\ 5\ /\ }_{10}\ +$

$\underbrace{8\ 2\ +}_{10}$

Árboles

Notación **postfija**: $\underbrace{8\ 6\ -}_3\ \uparrow\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$\underbrace{2\ 3\ \uparrow}_8\ 10\ 7\ 2\ -\ /\ +$

$8\ 10\ \underbrace{7\ 2\ -}_{10}\ /\ +$

$8\ \underbrace{10\ 5\ /\ }_8\ +$

$\underbrace{8\ 2\ +}_8$

10

Árboles

Indique el valor de la siguiente expresión que está en notación prefija

Notación **prefija**: + - * 2 3 5 / ↑ 2 3 4

Árboles

Indique el valor de la siguiente expresión que está en notación prefija

Notación **prefija**: + - * 2 3 5 / ↑ 2 3 4

+ - * 2 3 5 / 8 4

+ - * 2 3 5 2

+ - 6 5 2

+ 1 2

3

Árboles

Indique el valor de la siguiente expresión que está en notación postfija

Notación **postfija**: $7\ 2\ 3\ *\ -\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$

Árboles

Indique el valor de la siguiente expresión que está en notación postfija

Notación **postfija**: $7 \ 2 \ 3 \ * \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$

$7 \ 6 \ - \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$

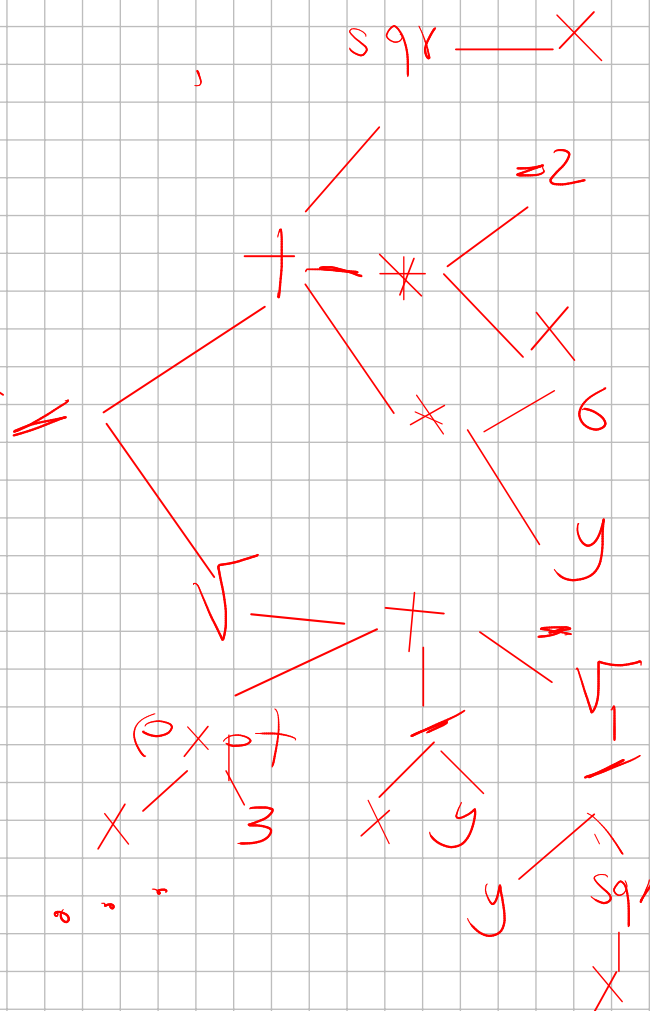
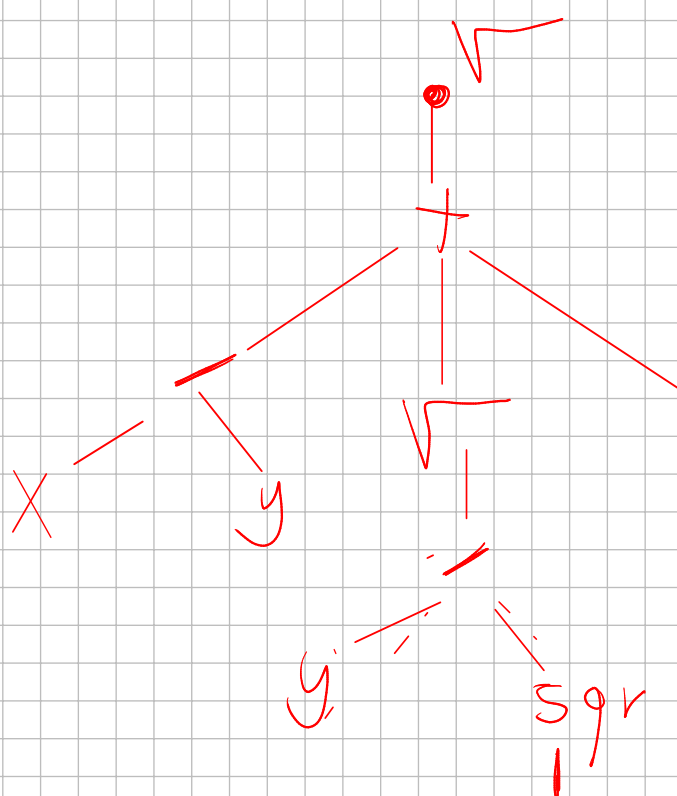
$1 \ 4 \ \uparrow \ 9 \ 3 \ / \ +$

$1 \ 9 \ 3 \ / \ +$

$1 \ 3 \ +$

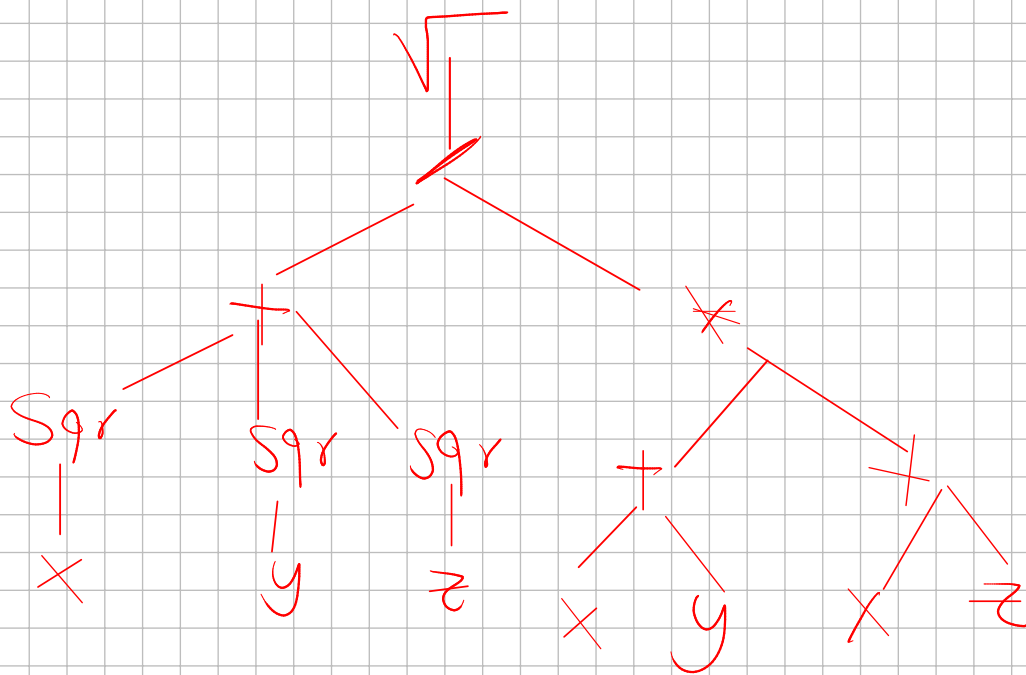
4

$$\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{\frac{y}{x^2}} + \frac{x^2 - 2x + 6y}{\sqrt{x^3 + \frac{x}{y} - \sqrt{\frac{y}{x^2}}}}}$$



$(x \ y \ /)$ $(y \ (x \ \text{sqrt}) \ / \ \sqrt{})$

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x+y)(x+z)}}$$

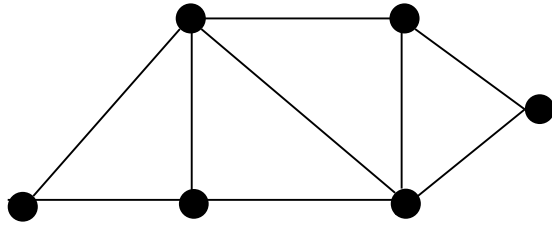


$$\begin{aligned} & ((x \text{ sqr}) (y \text{ sqr}) (z \text{ sqr}) +) \\ & ((x \ y +) (+ \ z +) *) \ / \ \sqrt{} \end{aligned}$$

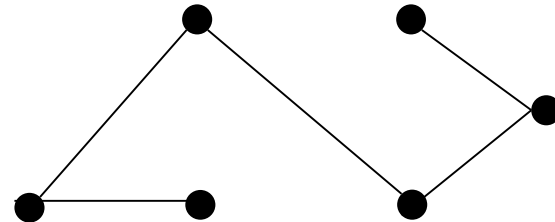
Árboles

Árbol recubridor

Sea G un grafo simple, un árbol recubridor de G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G



Grafo G

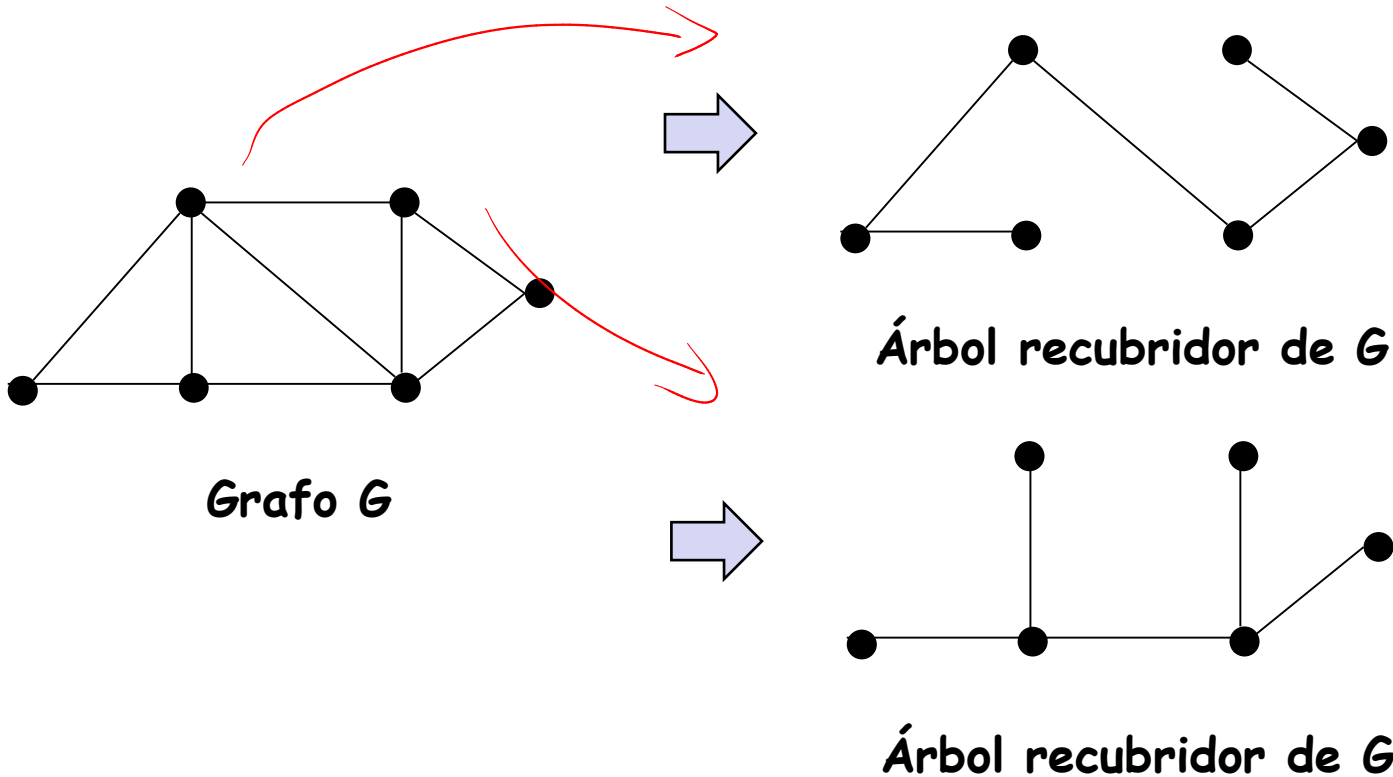


Árbol recubridor de G

Árboles

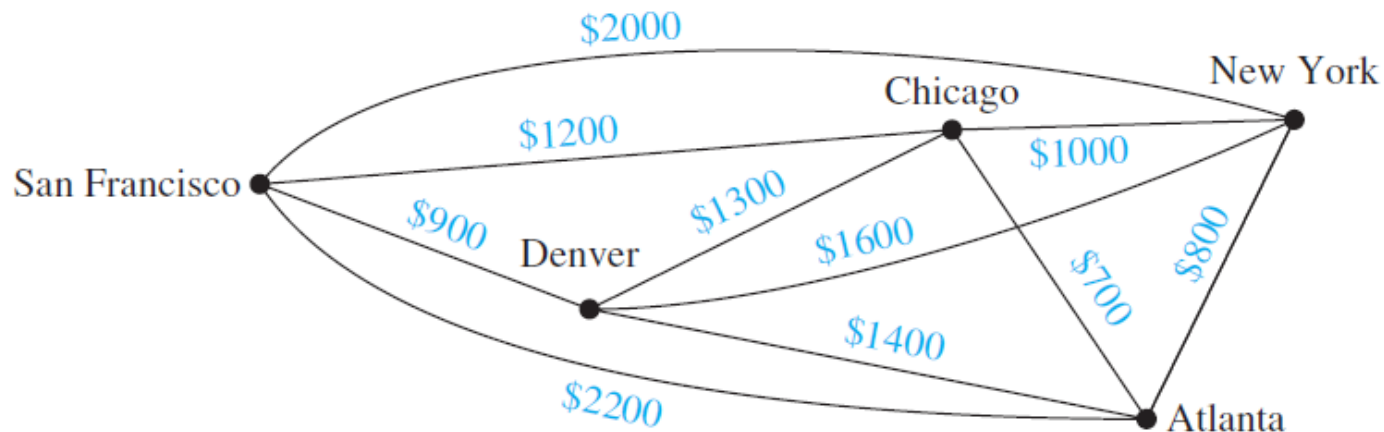
Árbol recubridor

Sea G un grafo simple, un árbol recubridor de G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G



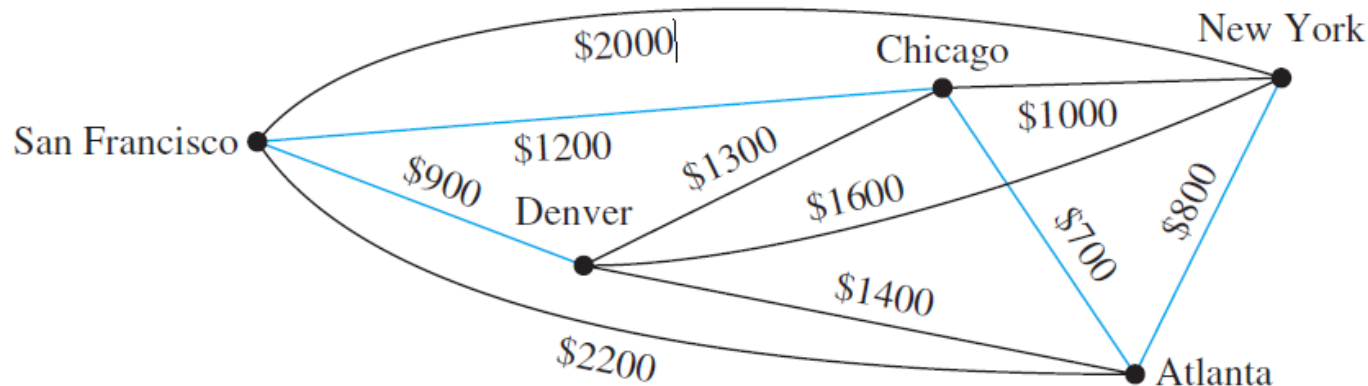
Árboles

El siguiente grafo indica los costos de una red de comunicaciones. ¿Qué enlaces se deben mantener para asegurar que hay una forma de comunicar cada dos ciudades a un costo mínimo?



Árboles

El siguiente grafo indica los costos de una red de comunicaciones. ¿Qué enlaces se deben mantener para asegurar que hay una forma de comunicar cada dos ciudades a un costo mínimo?



Choice	Edge	Cost
1	{Chicago, Atlanta}	\$ 700
2	{Atlanta, New York}	\$ 800
3	{Chicago, San Francisco}	\$1200
4	{San Francisco, Denver}	\$ 900
Total:		\$3600

Árboles

Algoritmo Prim

- Escoga la arista con menor peso y adiciónela al árbol recubridor
- Seleccione la arista con menor peso que sea incidente con el árbol recubridor y que no cree un circuito. Adiciónela al árbol.
- Repita el proceso hasta cuando el árbol tenga $n-1$ aristas (n es el número de vértices)

Árboles

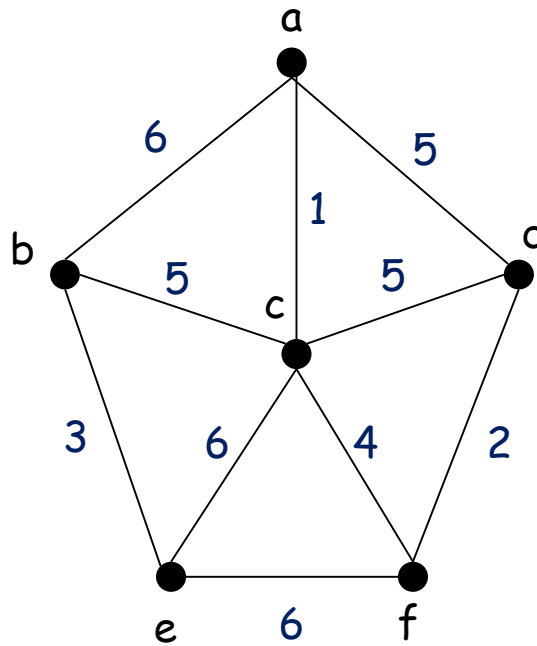
Algoritmo Prim

- Escoga la arista con menor peso y adiciónela al árbol recubridor
- Seleccione la arista con menor peso que sea incidente con el árbol recubridor y que no cree un circuito. Adiciónela al árbol.
- Repita el proceso hasta cuando el árbol tenga $n-1$ aristas (n es el número de vértices)

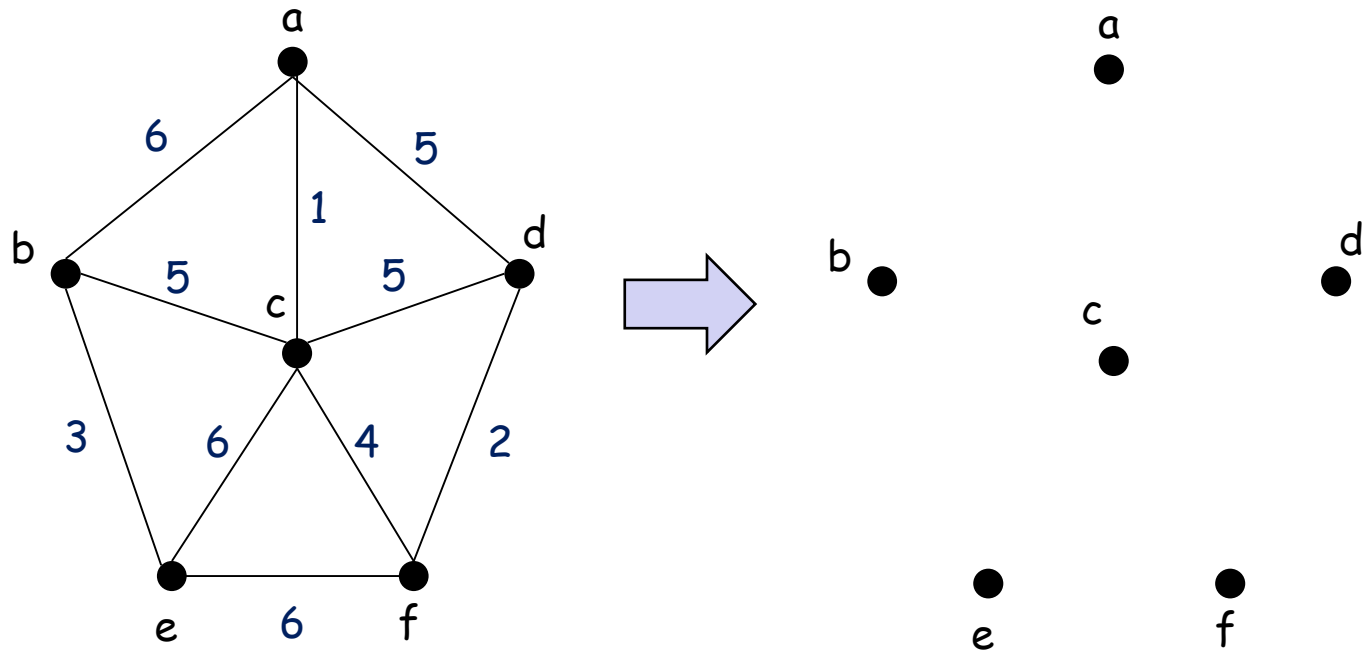
Al usar el algoritmo de Prim se pueden obtener árboles recubridores diferentes para un mismo grafo

Árboles

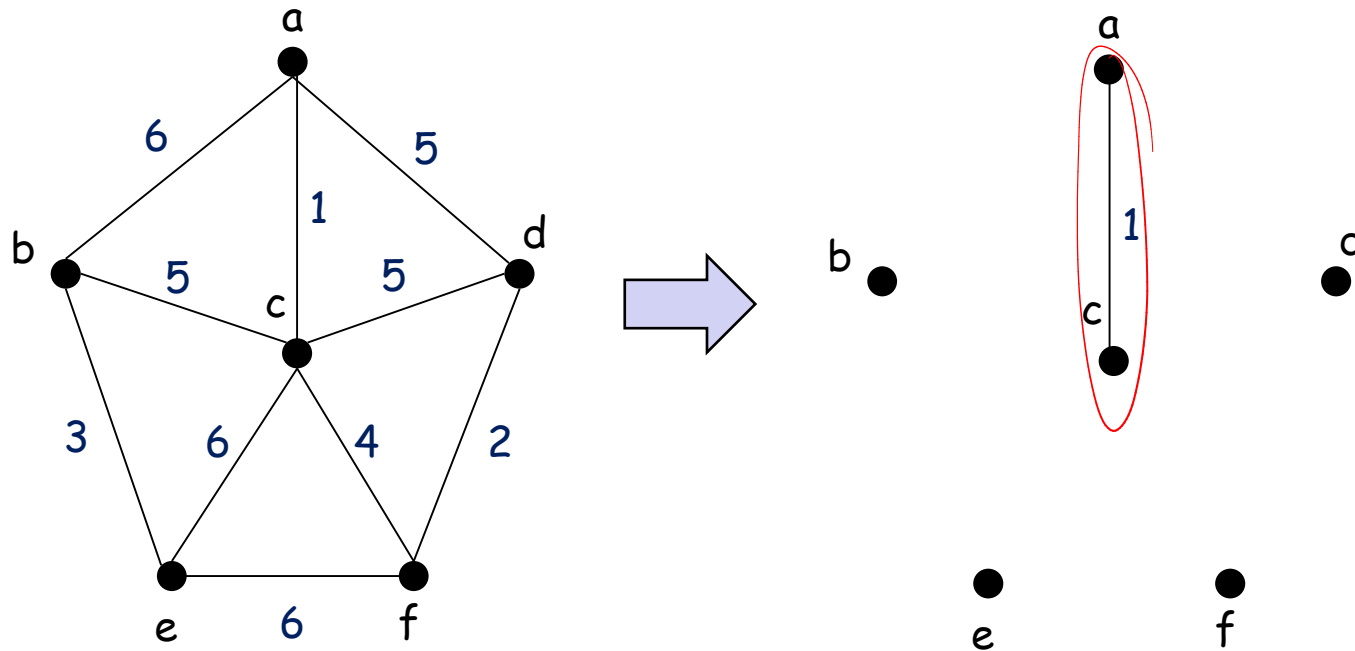
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Prim



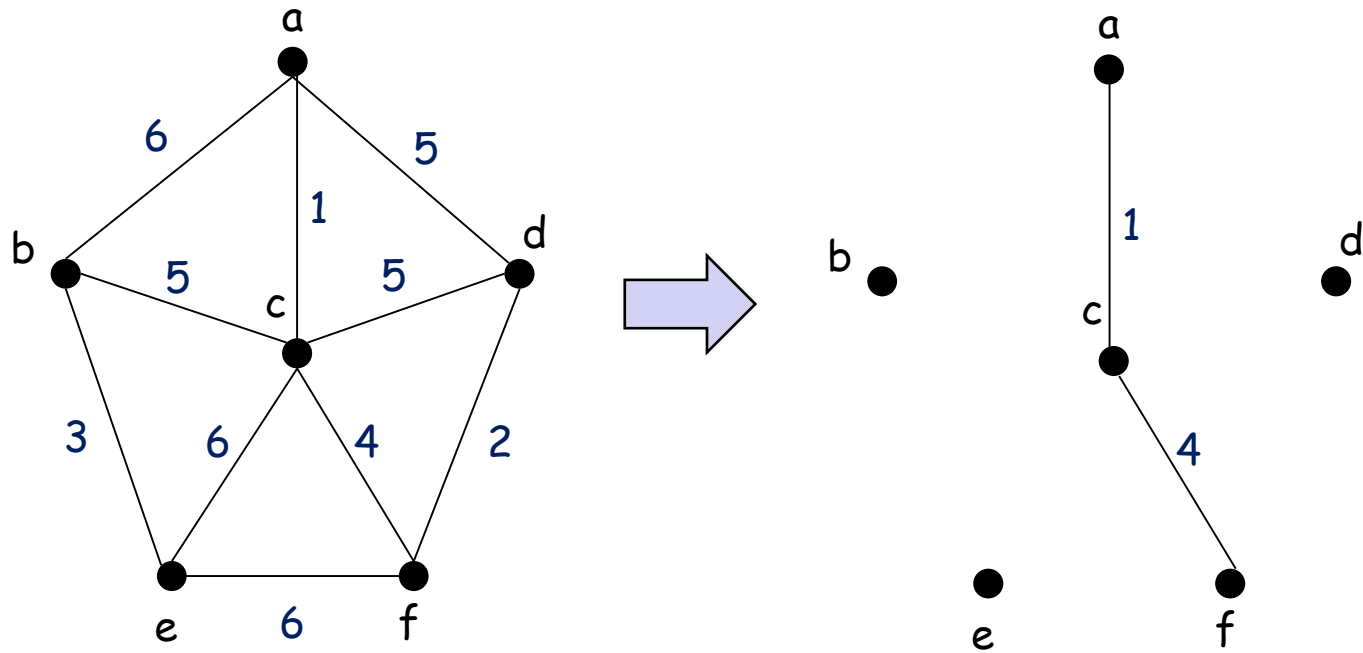
Árboles



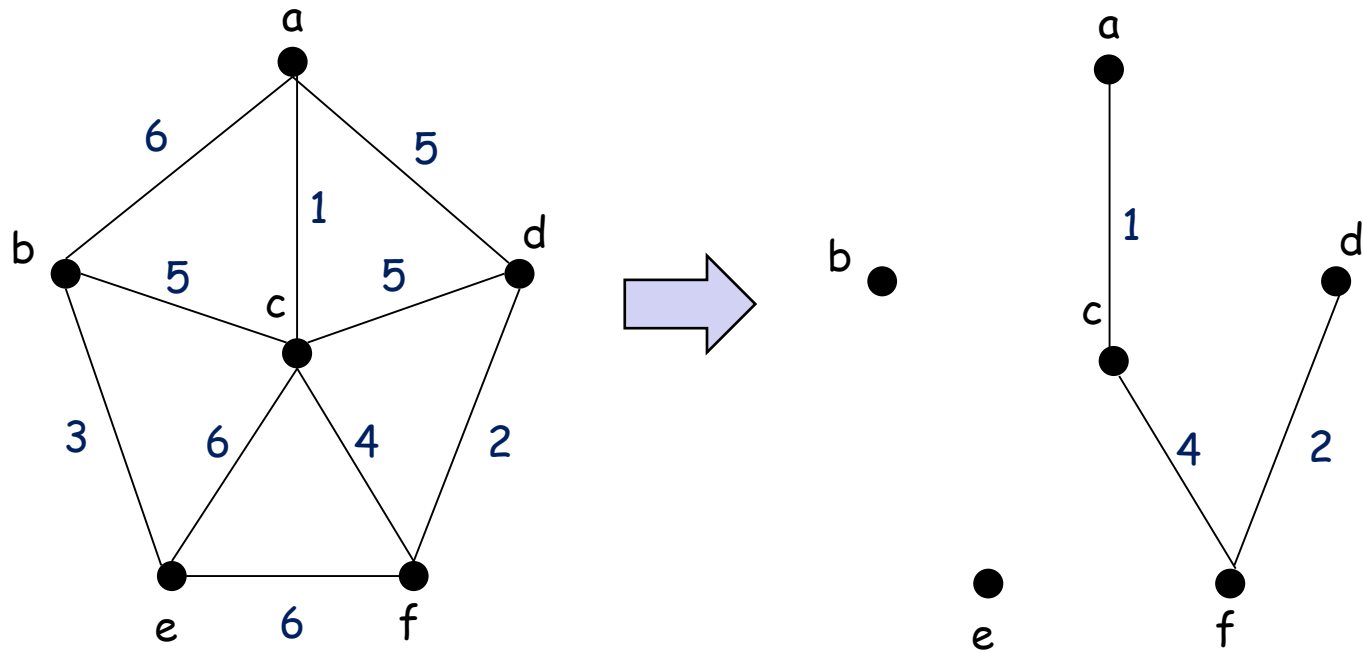
Árboles



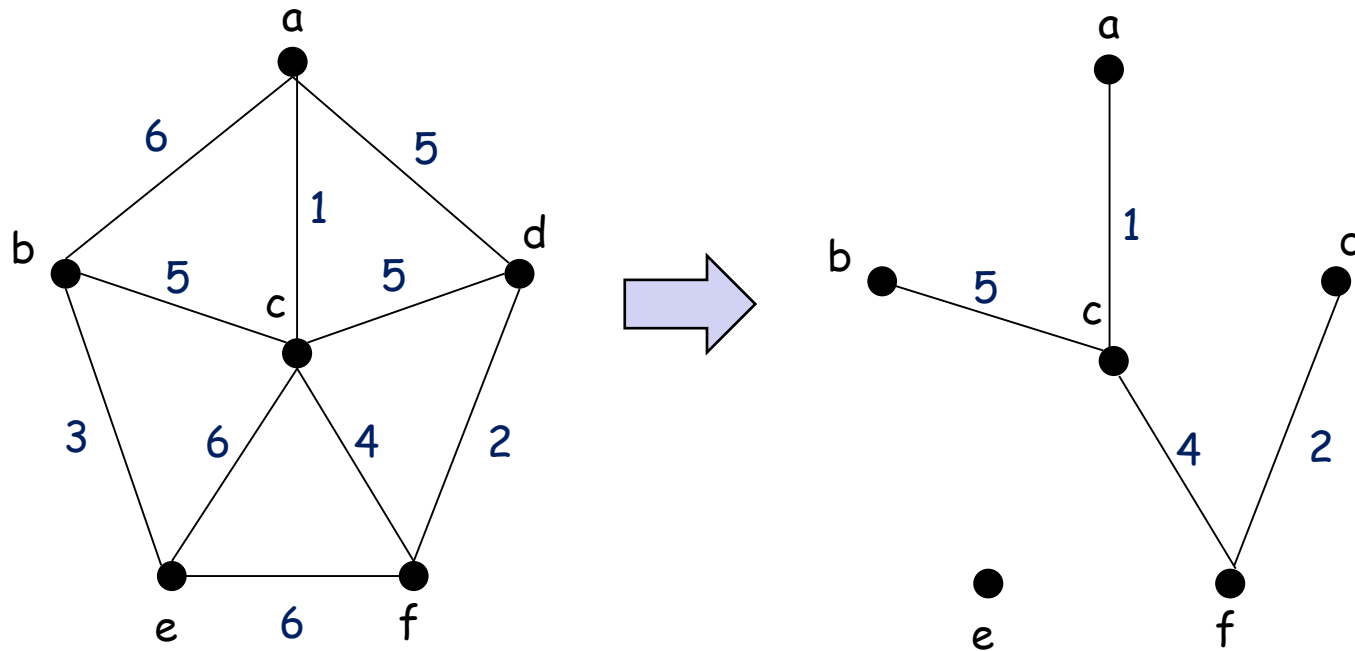
Árboles



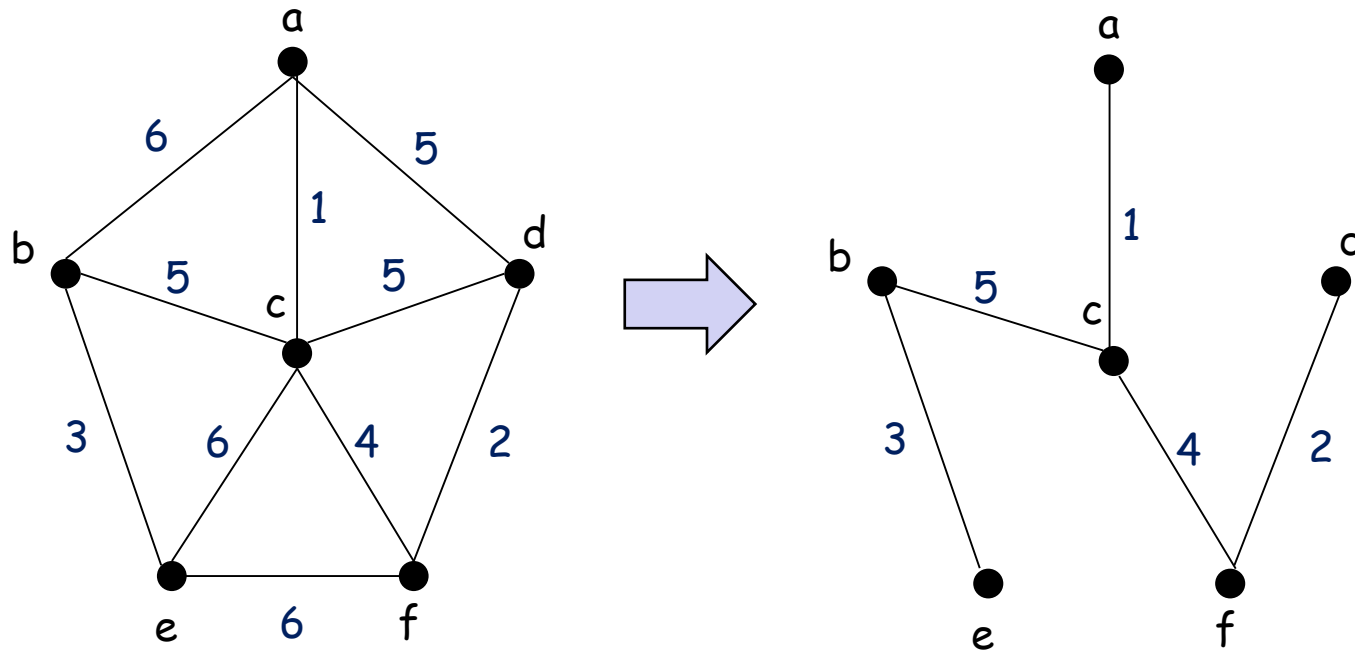
Árboles



Árboles

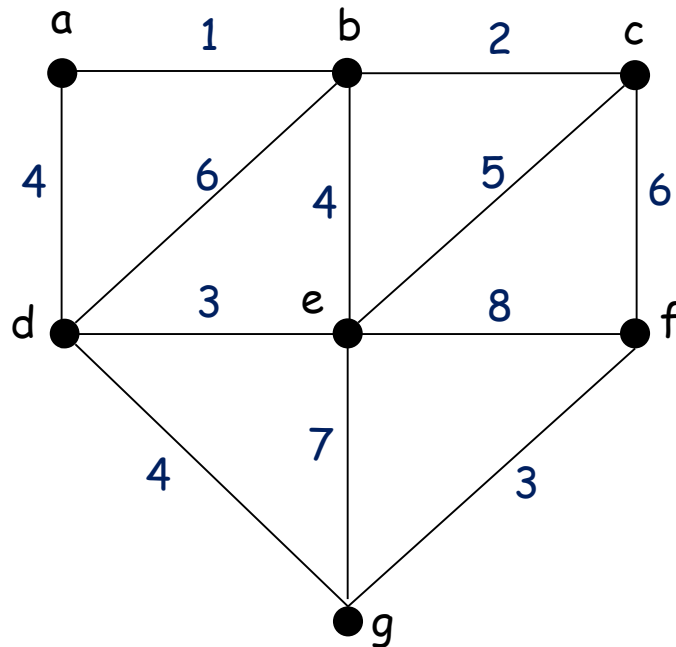


Árboles

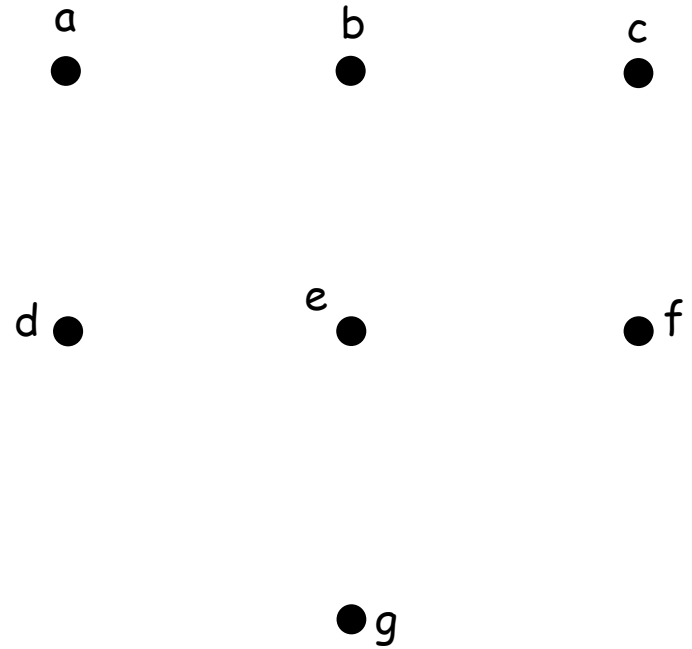
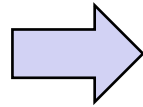
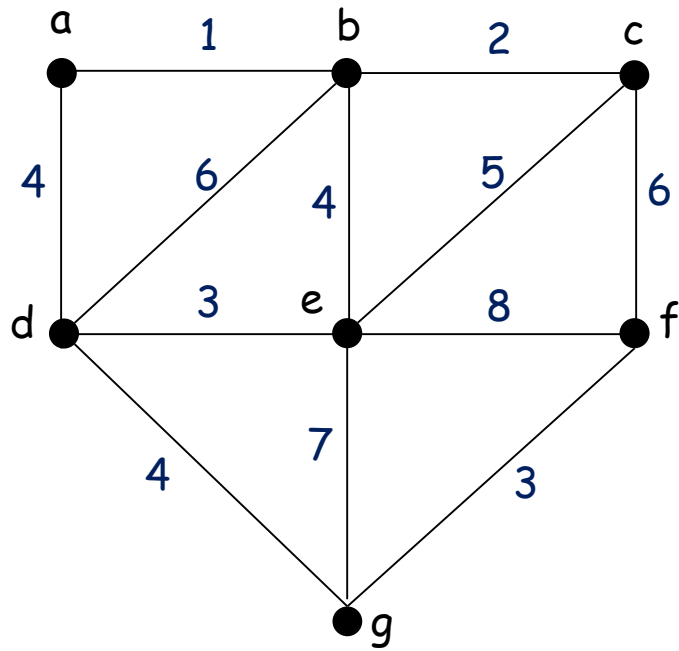


Árboles

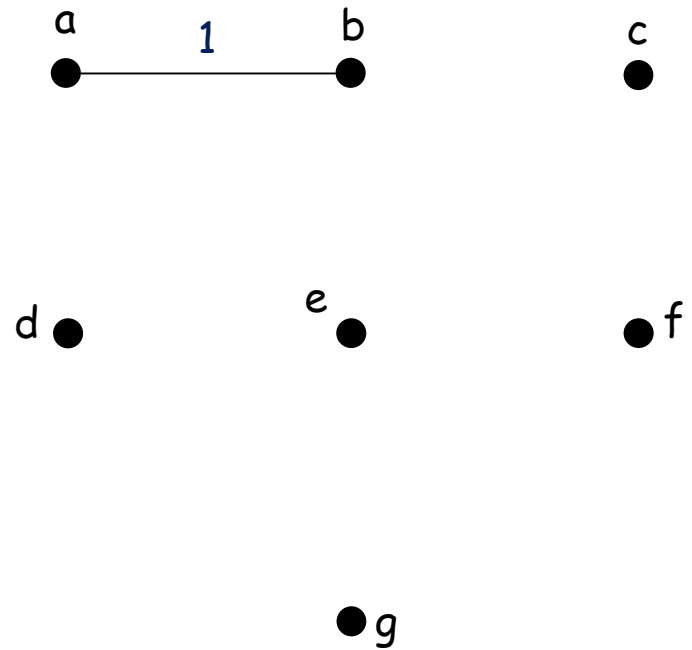
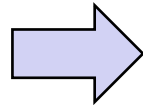
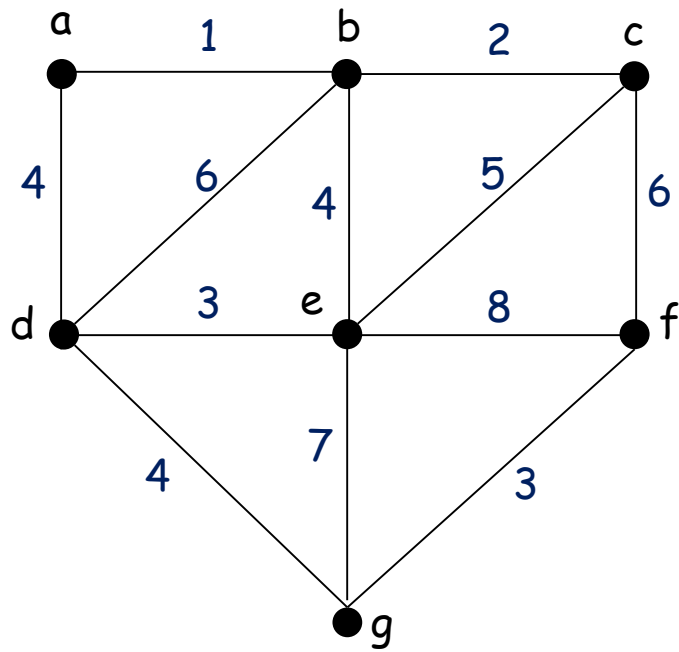
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Prim



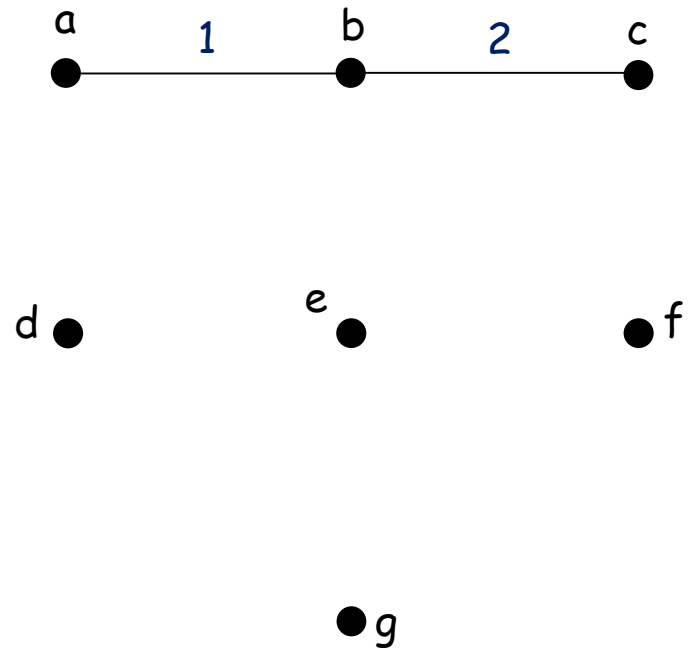
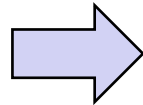
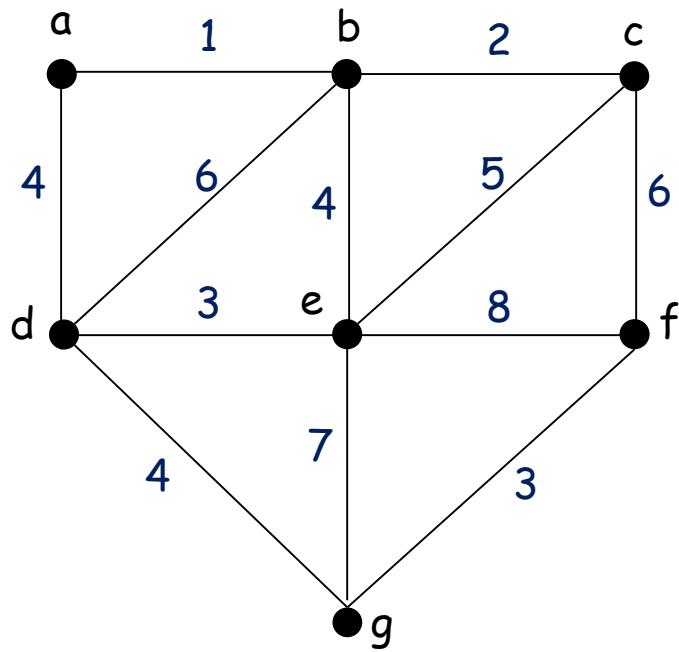
Árboles



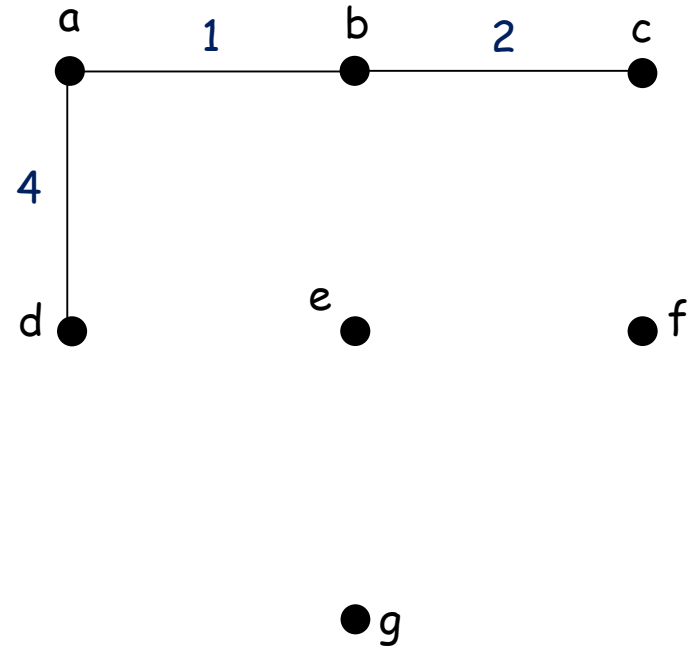
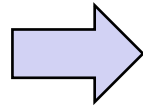
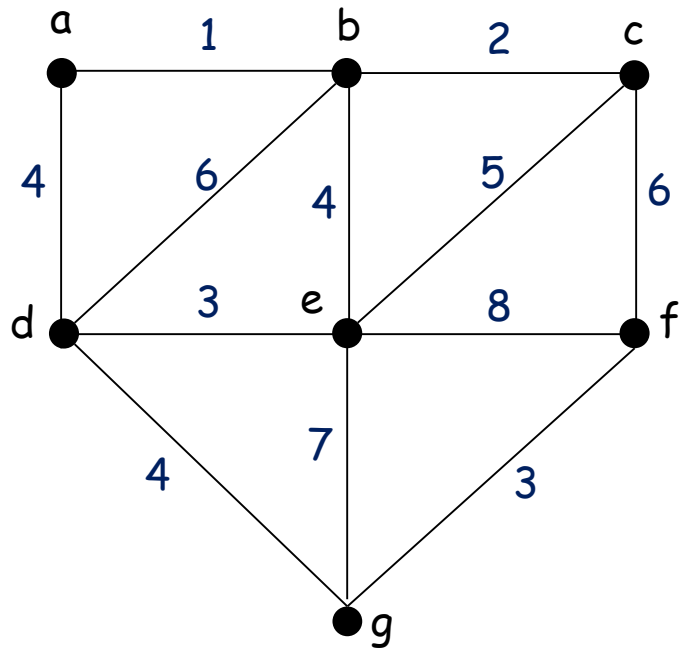
Árboles



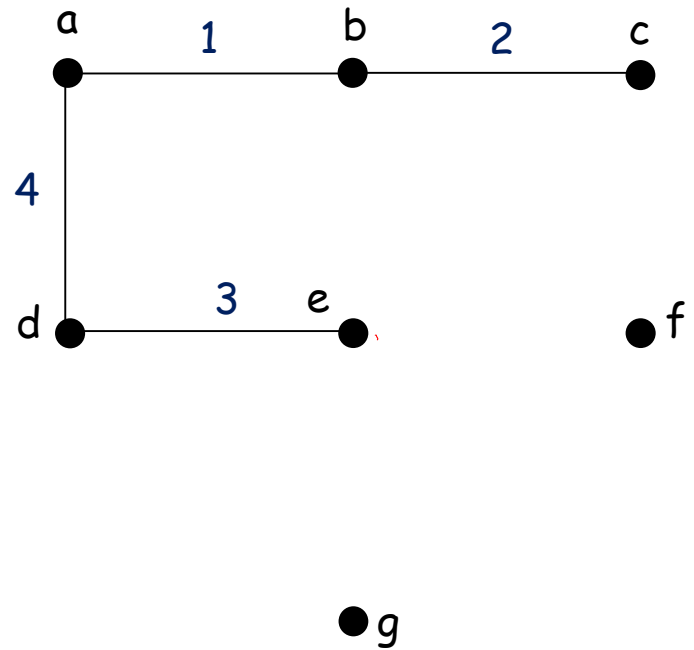
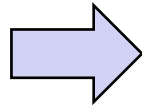
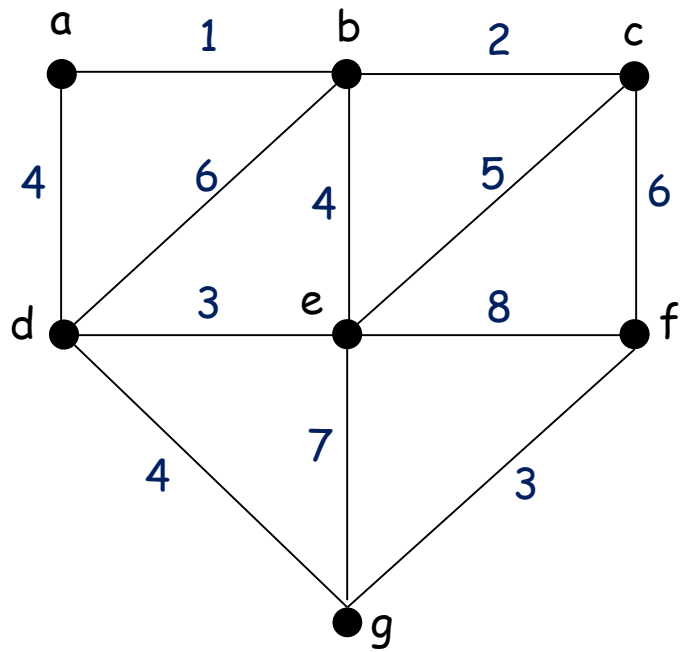
Árboles



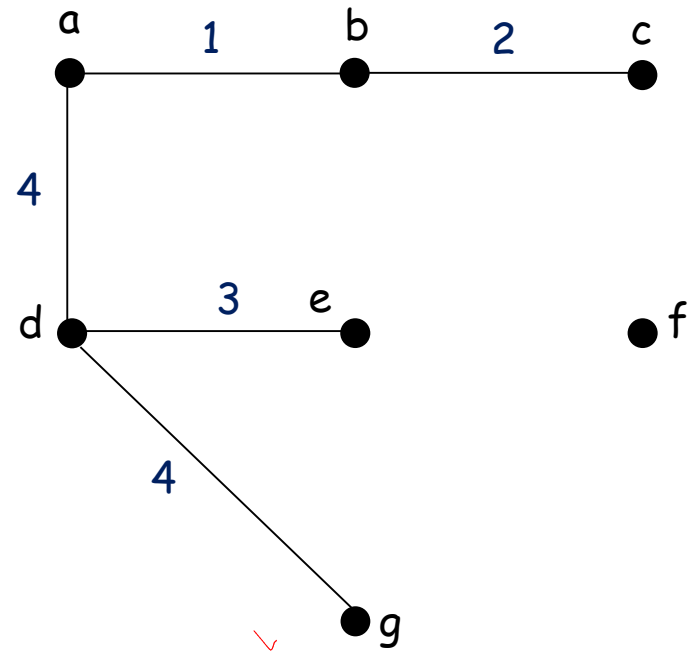
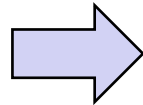
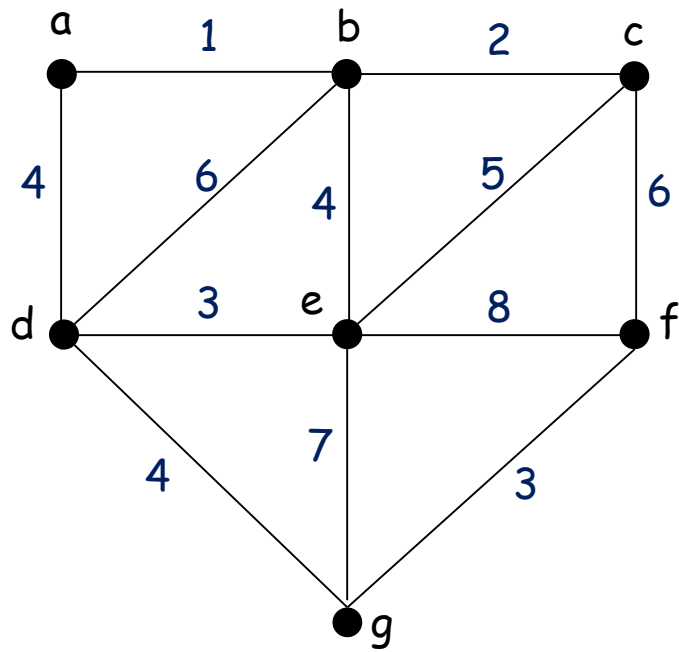
Árboles



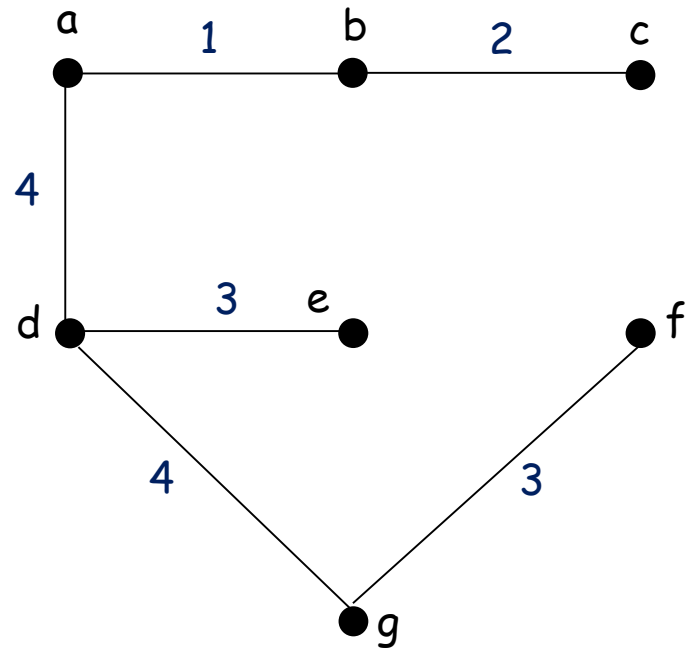
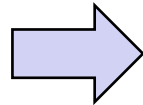
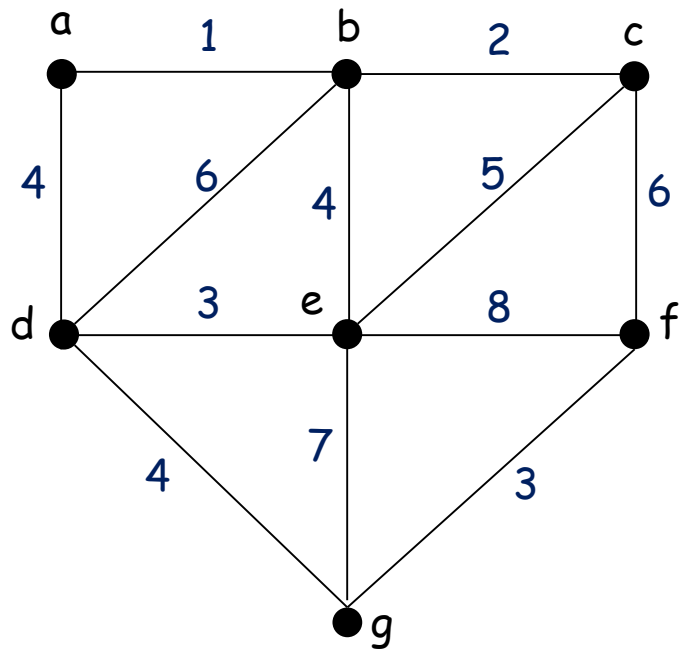
Árboles



Árboles

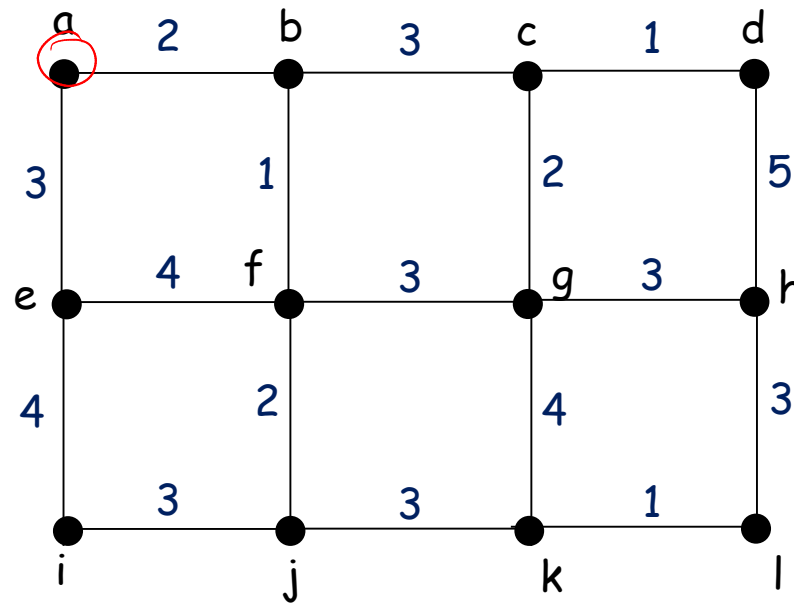


Árboles

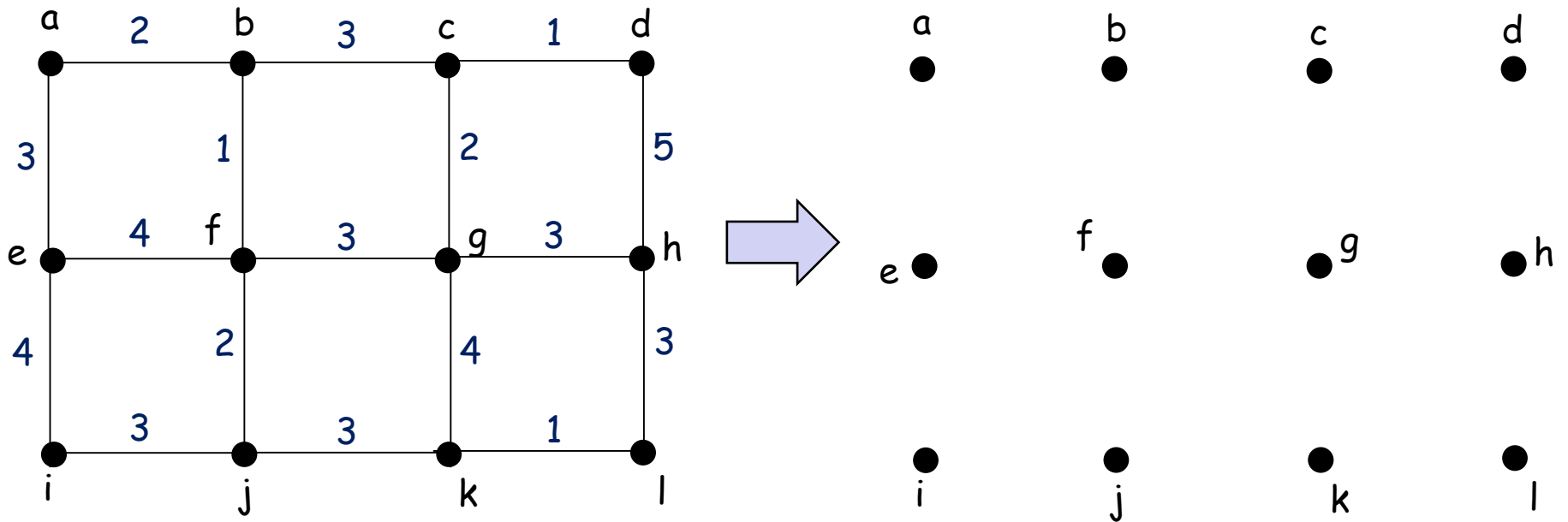


Árboles

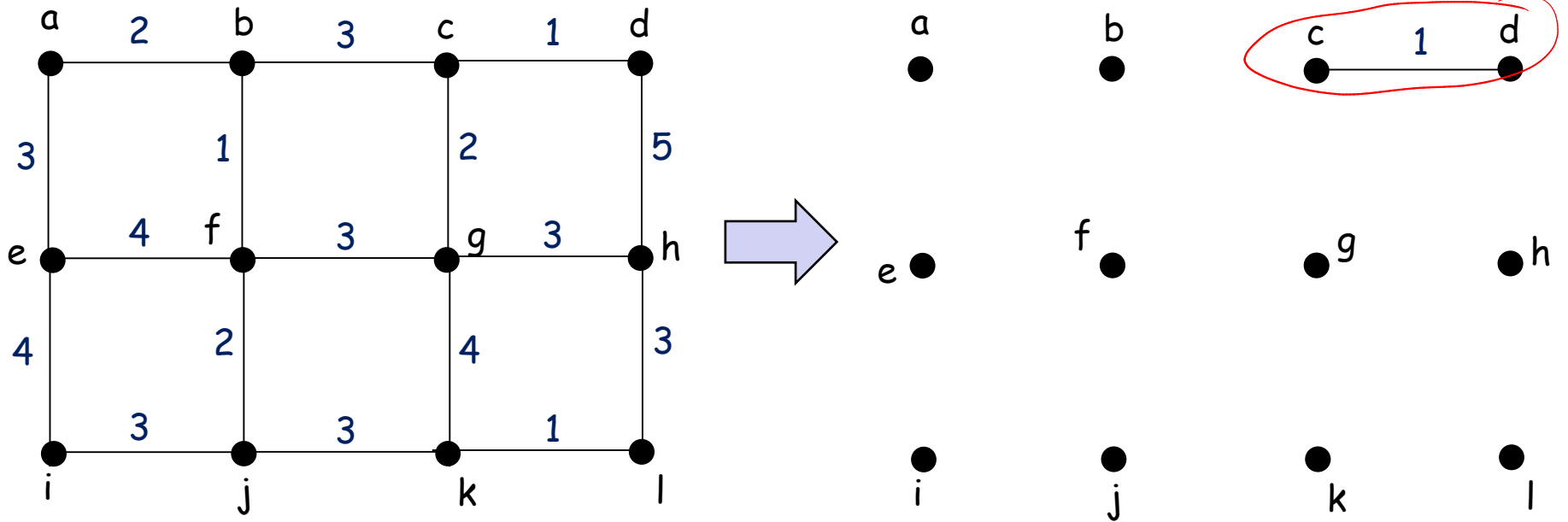
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Prim



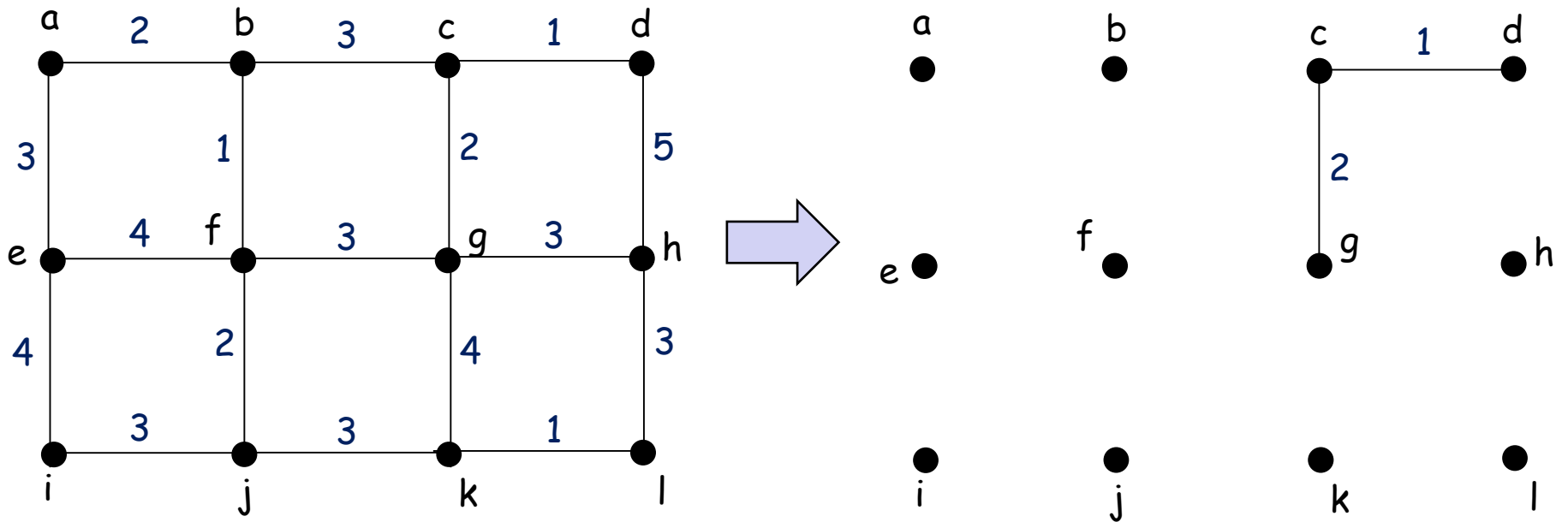
Árboles



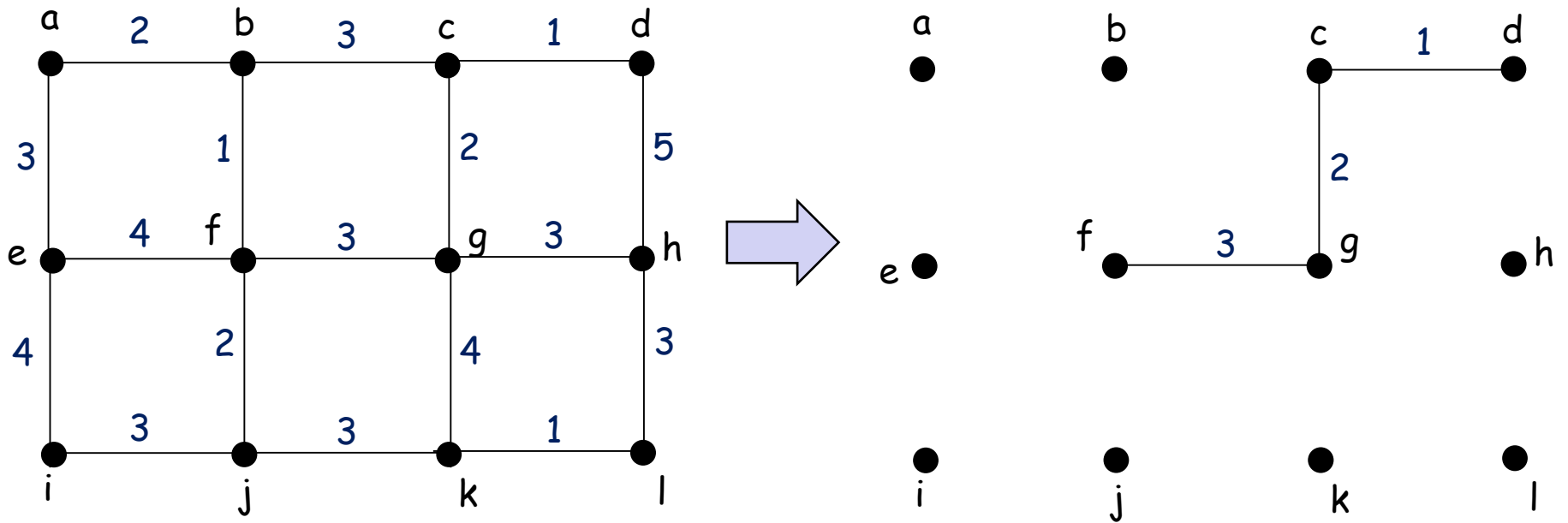
Árboles



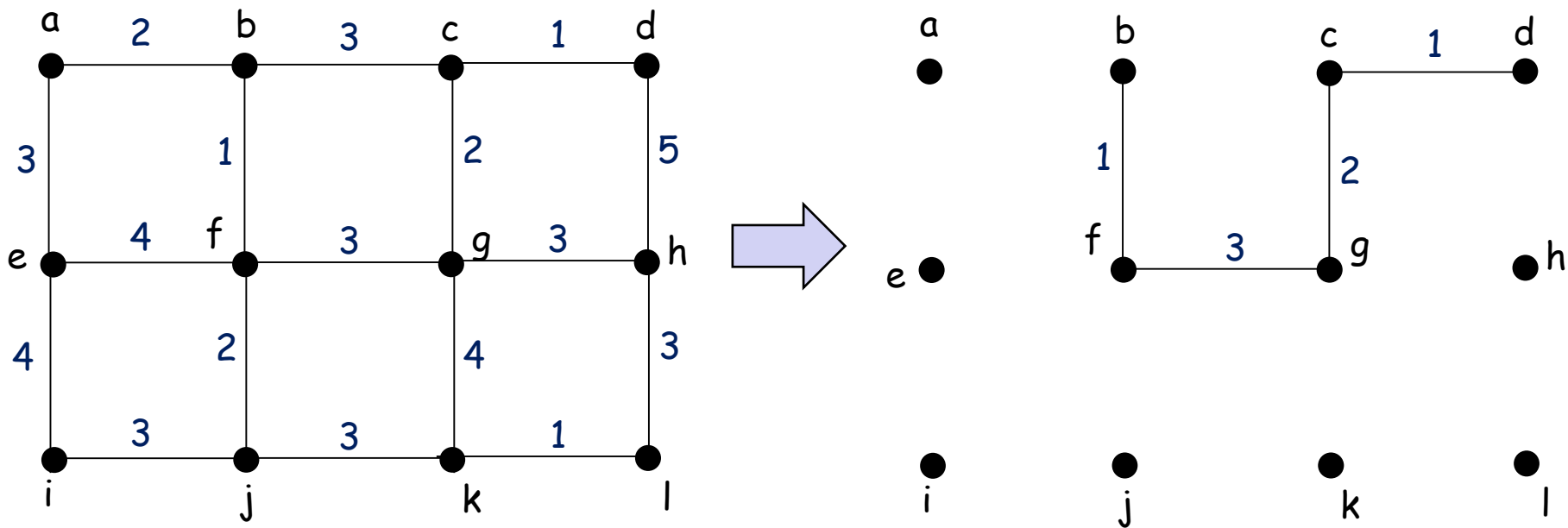
Árboles



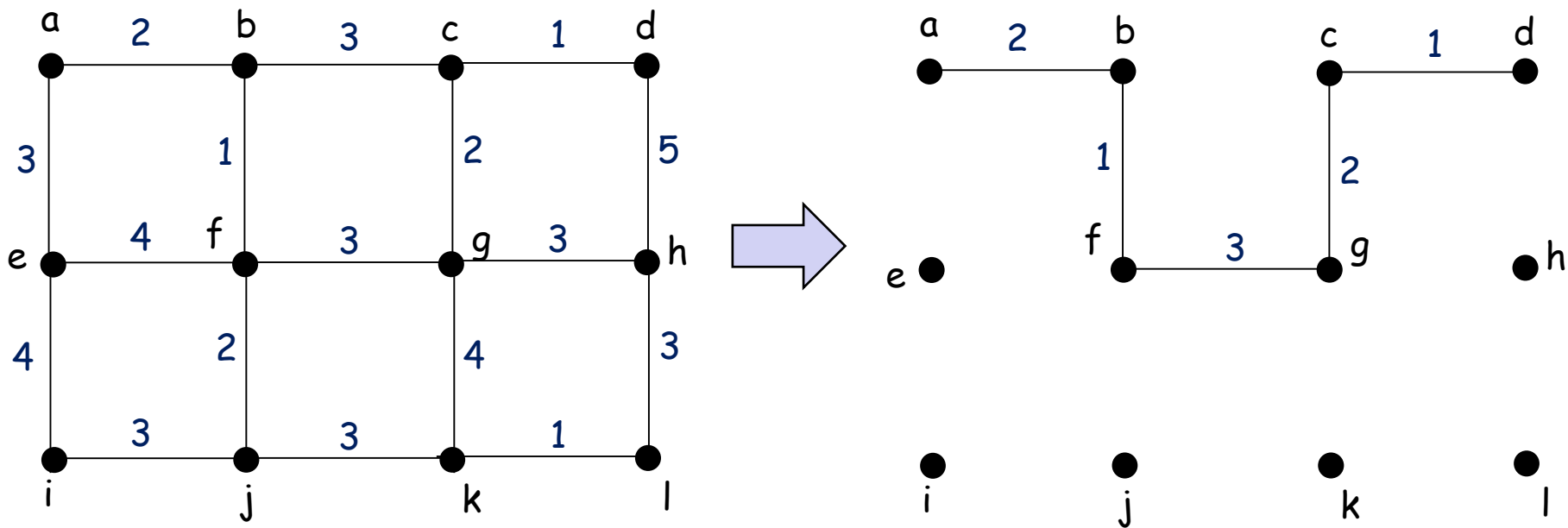
Árboles



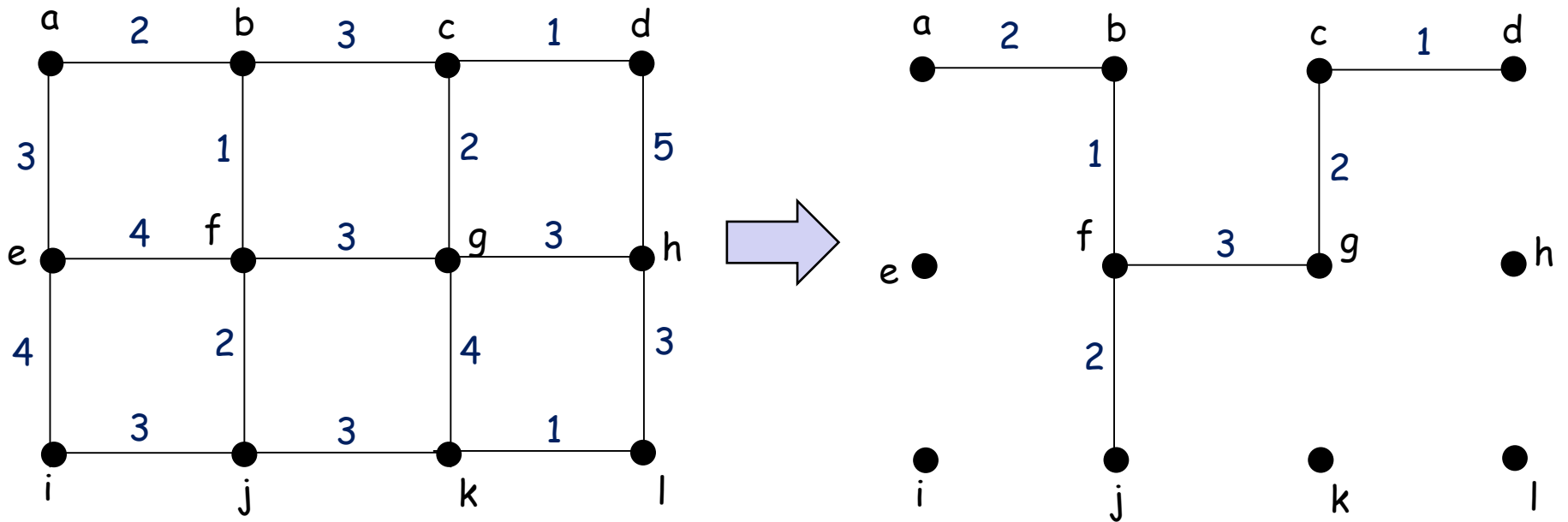
Árboles



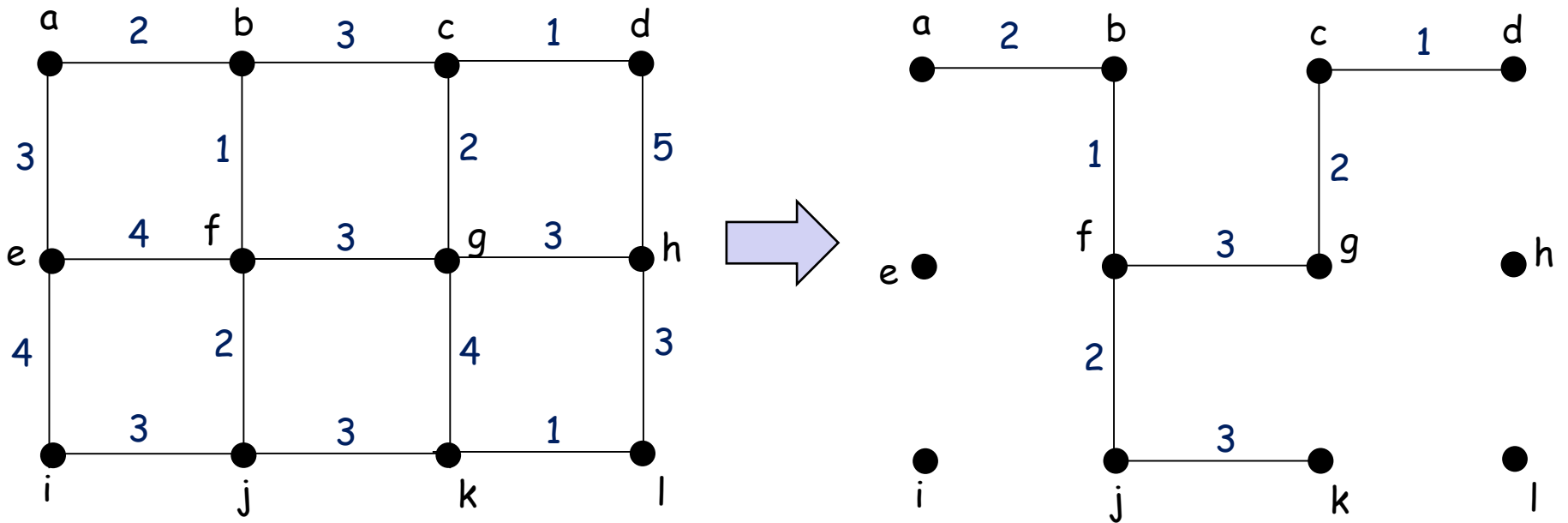
Árboles



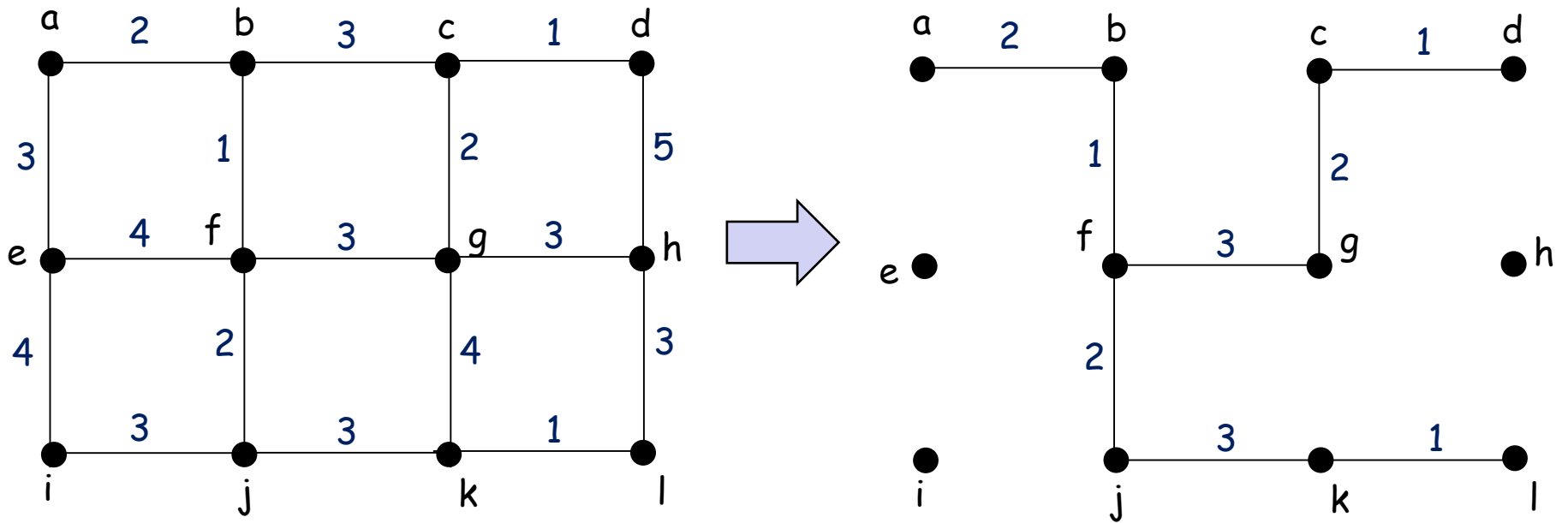
Árboles



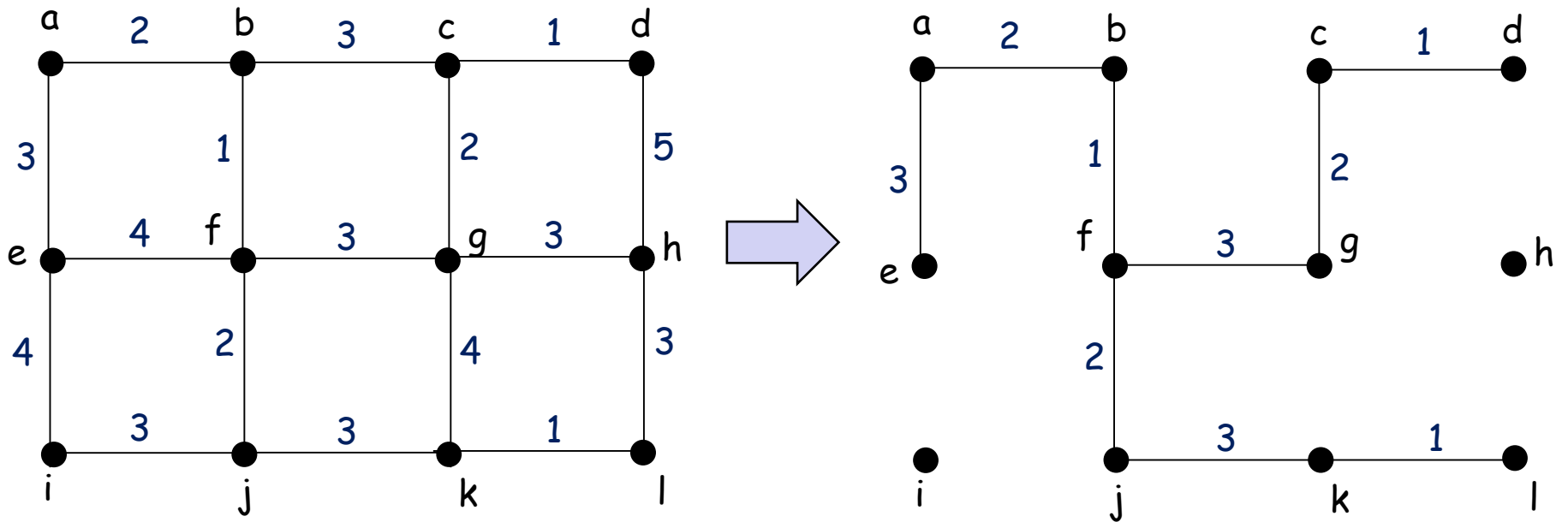
Árboles



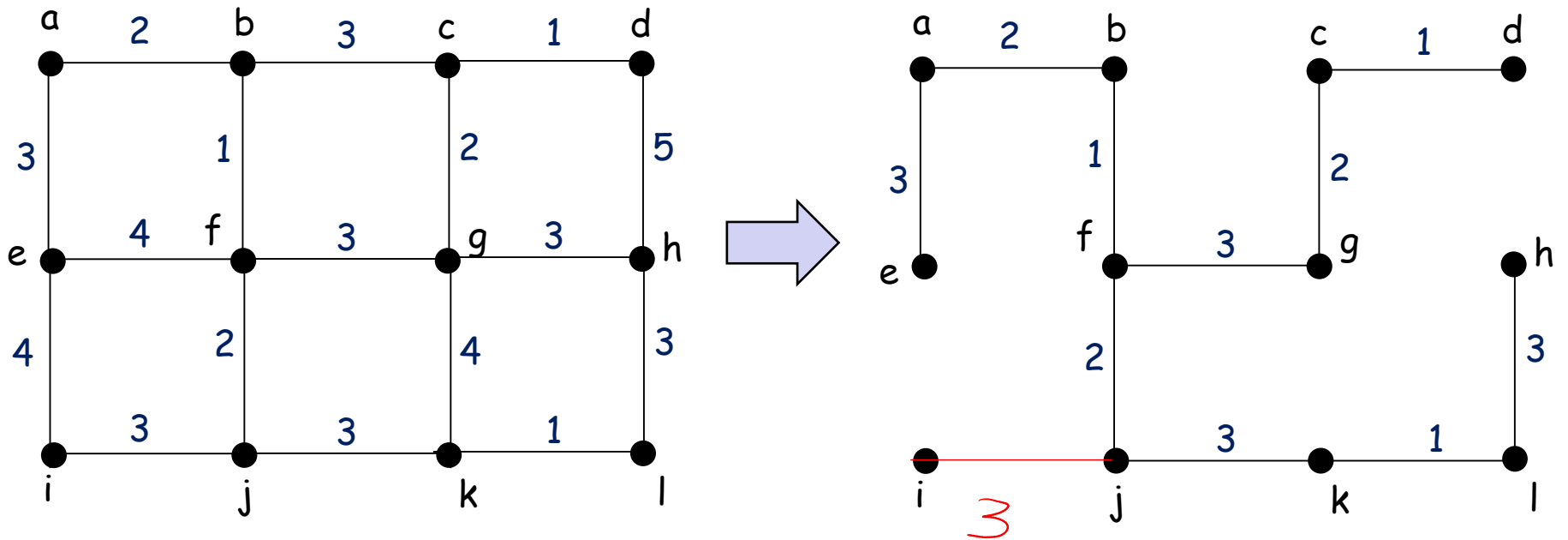
Árboles



Árboles

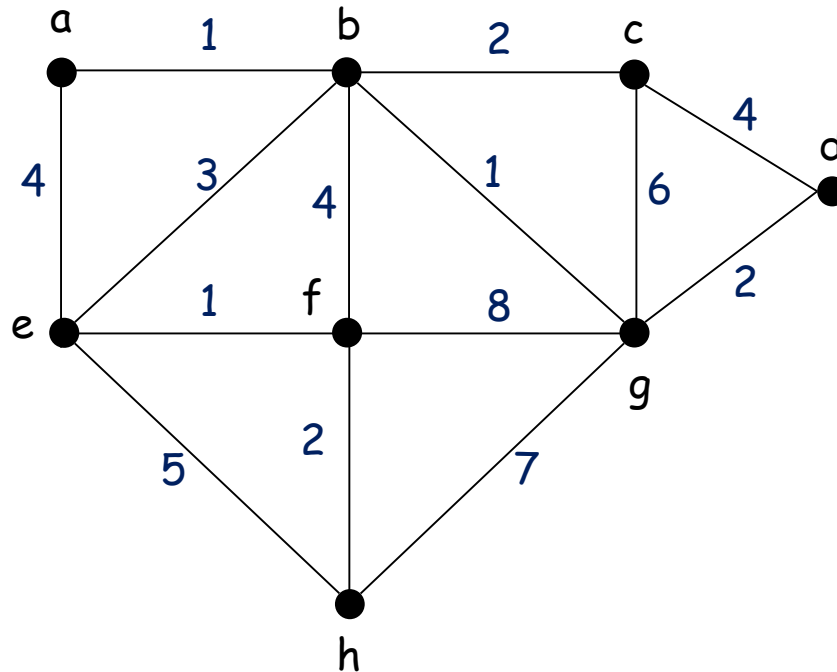


Árboles

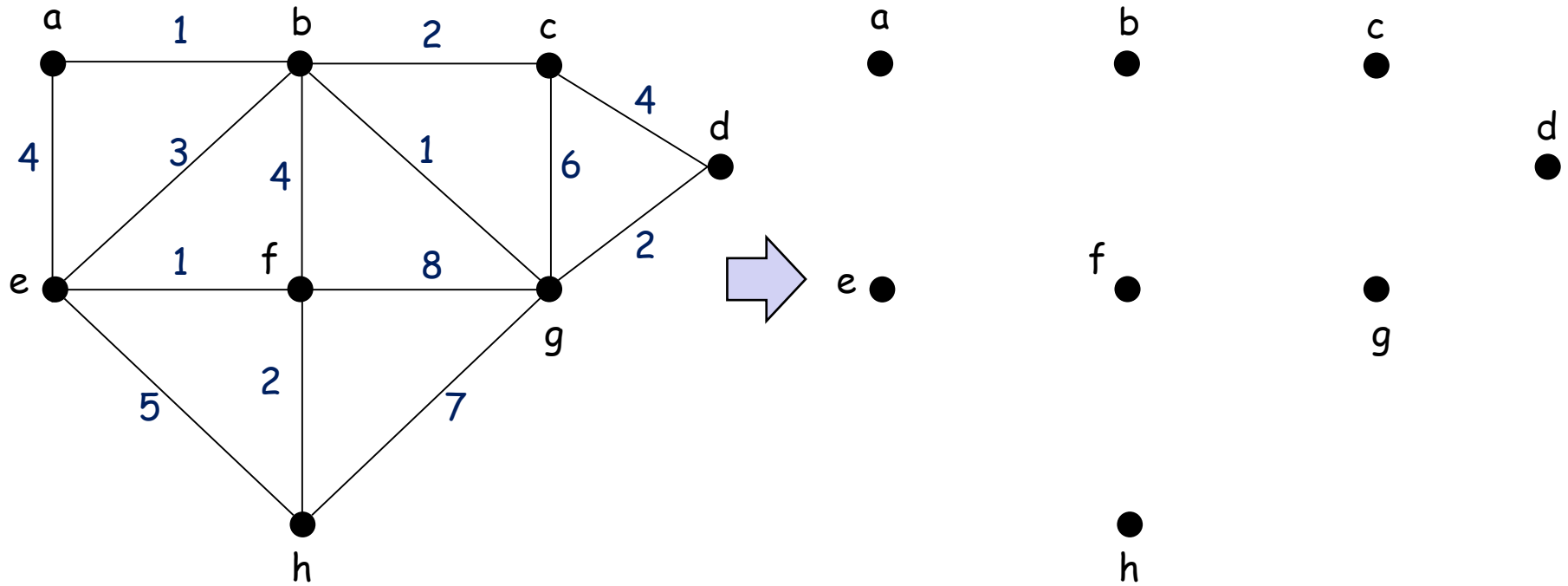


Árboles

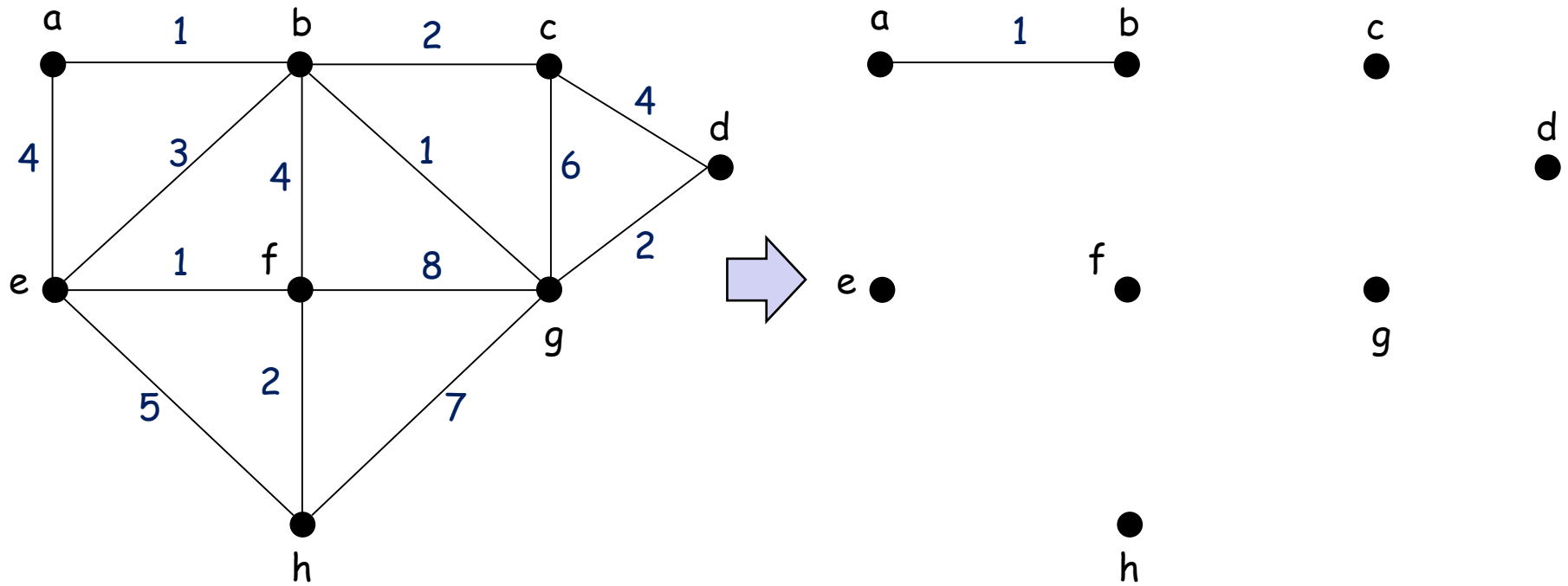
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Prim



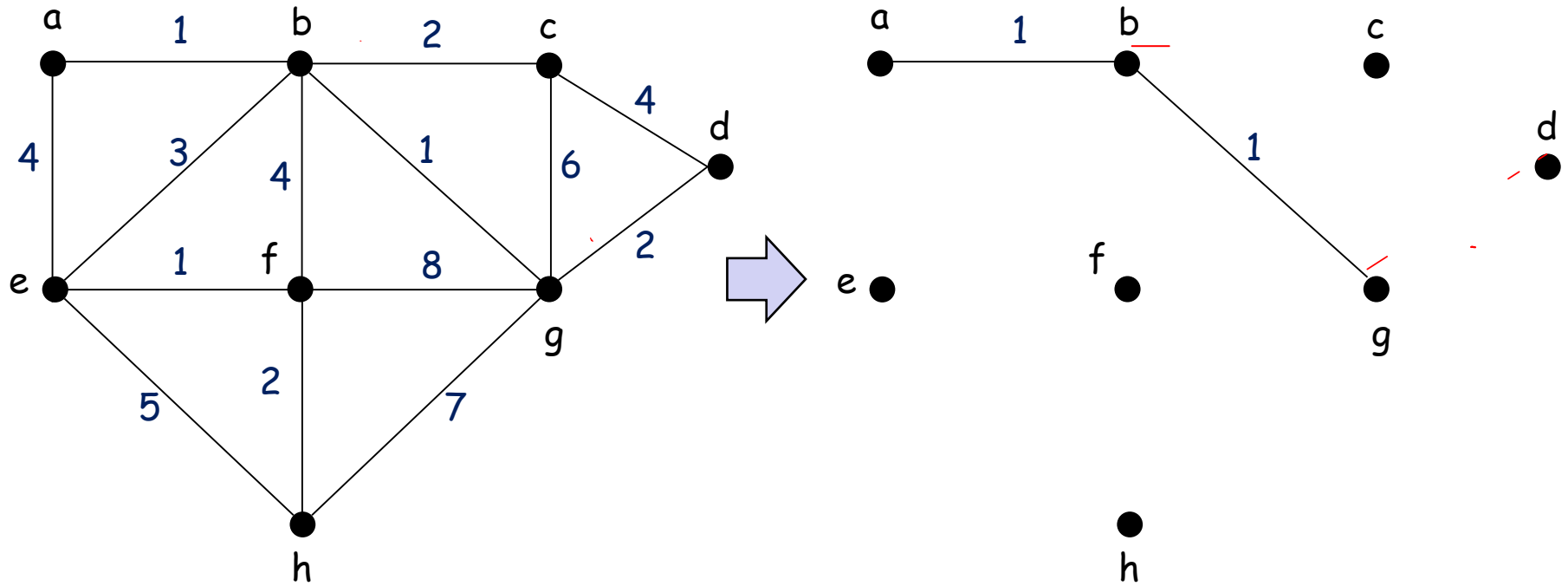
Árboles



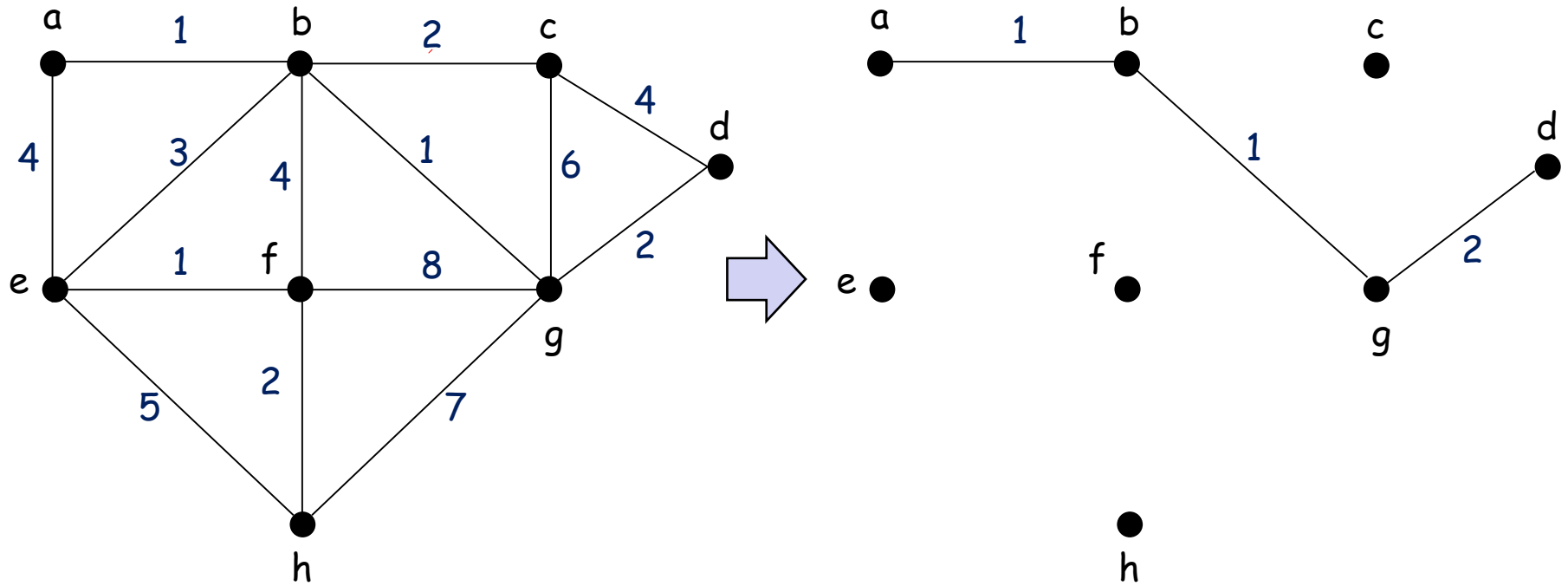
Árboles



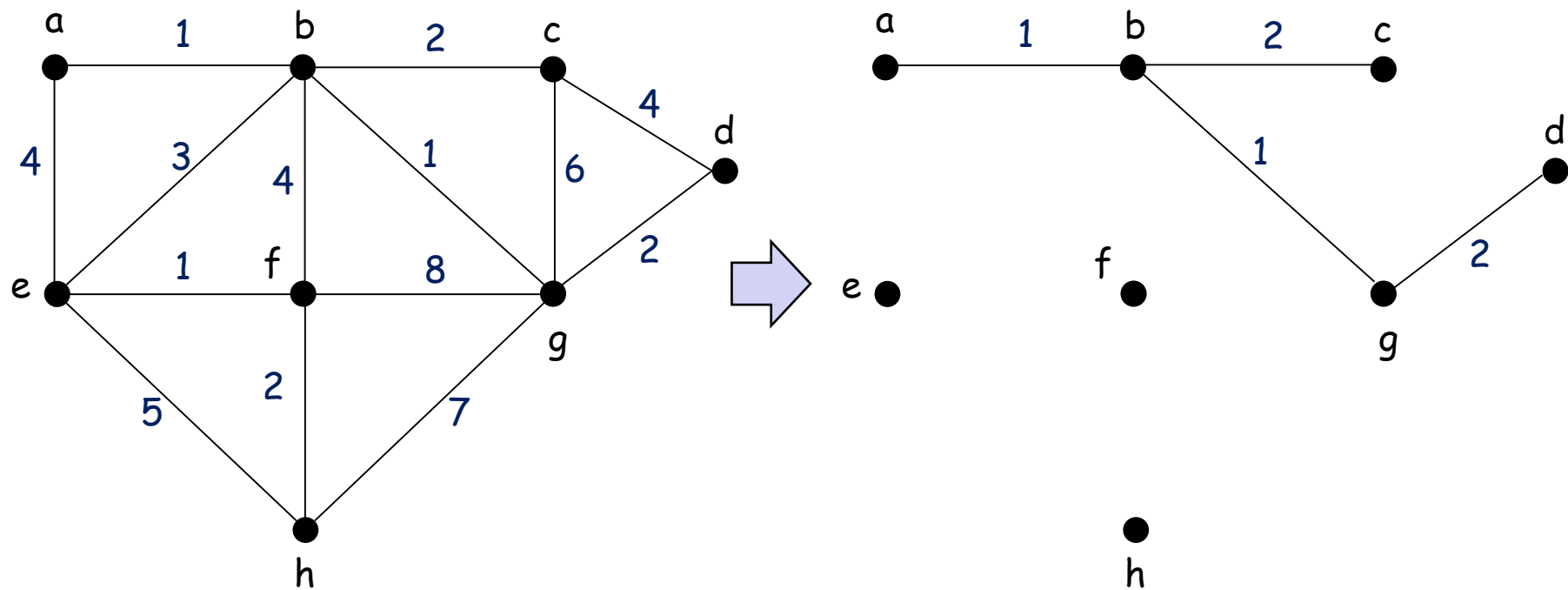
Árboles



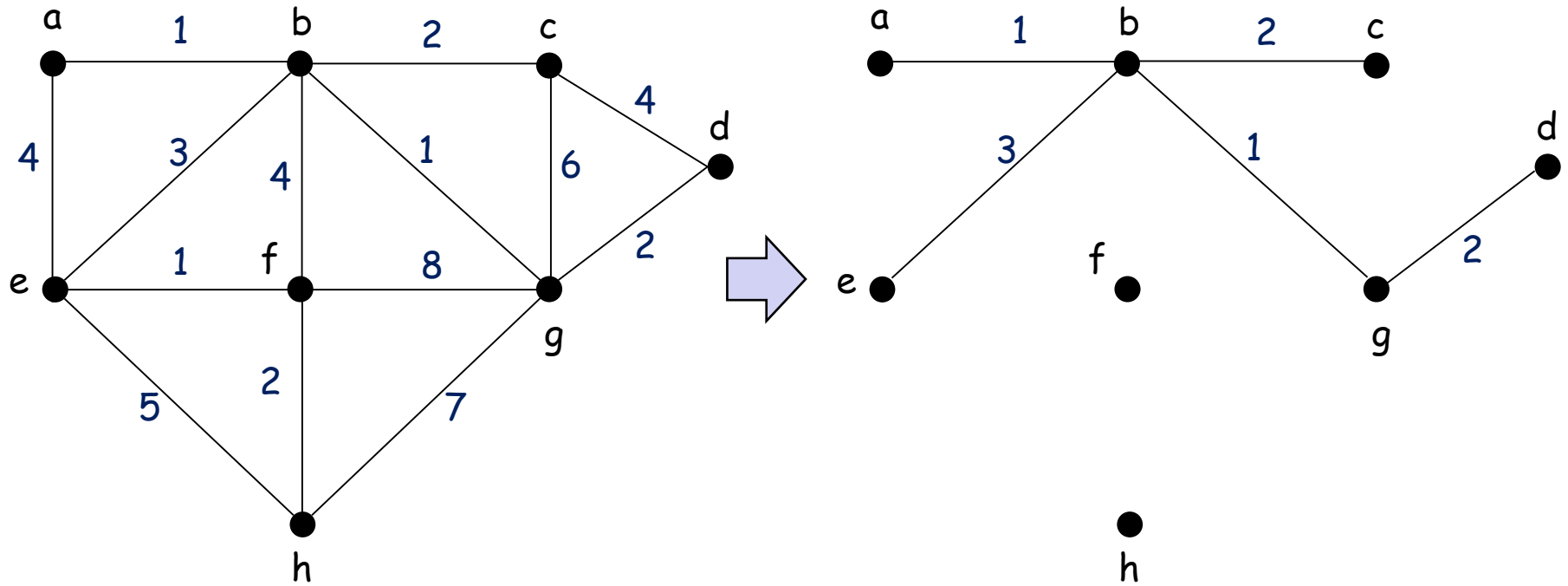
Árboles



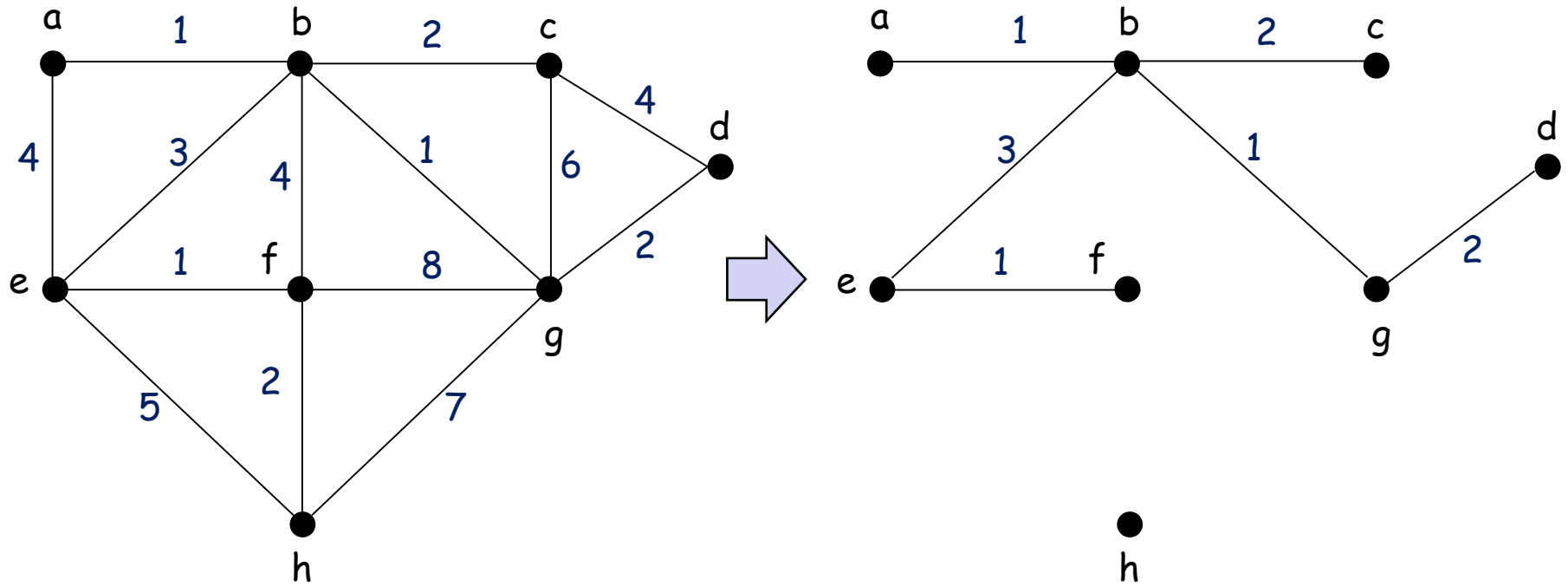
Árboles



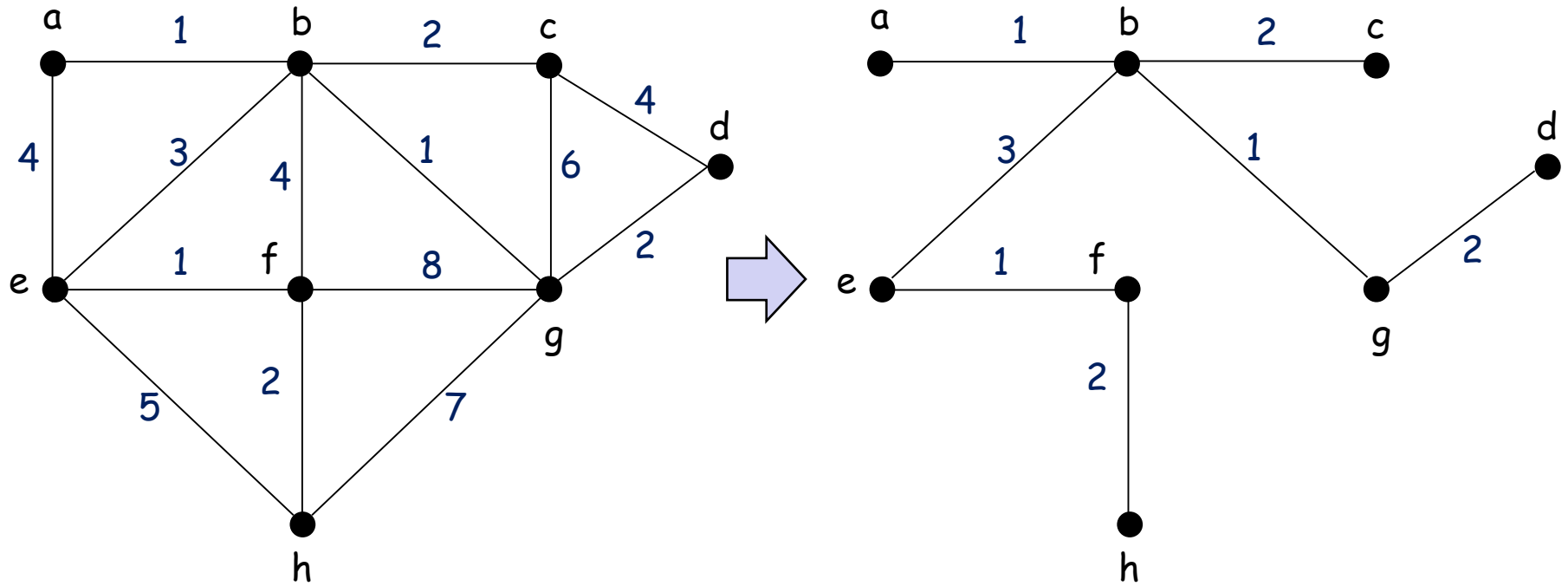
Árboles



Árboles



Árboles



Árboles

Algoritmo de Kruskal

- Seleccione la arista con menor peso y adiciónela al árbol recubridor
- Adicione al árbol la arista con menor peso que no cree un circuito
- Repita el proceso cuando el árbol tenga $n-1$ aristas (n es el número de vértices)

Árboles

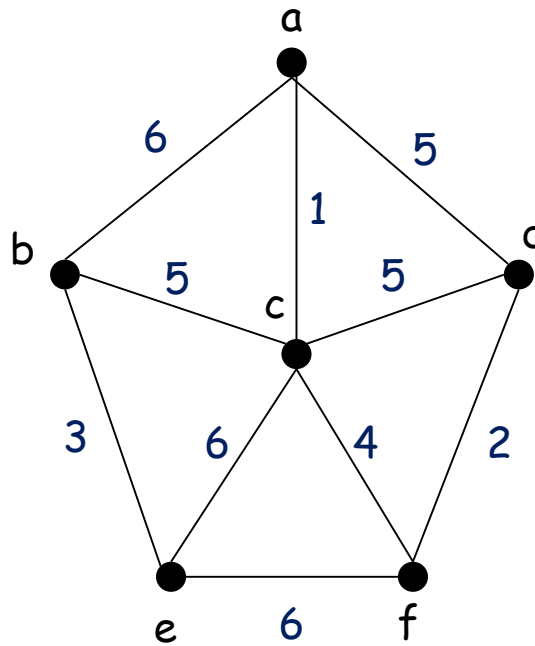
Algoritmo de Kruskal

- Seleccione la arista con menor peso y adiciónela al árbol recubridor
- Adicione al árbol la arista con menor peso que no cree un circuito
- Repita el proceso cuando el árbol tenga $n-1$ aristas (n es el número de vértices)

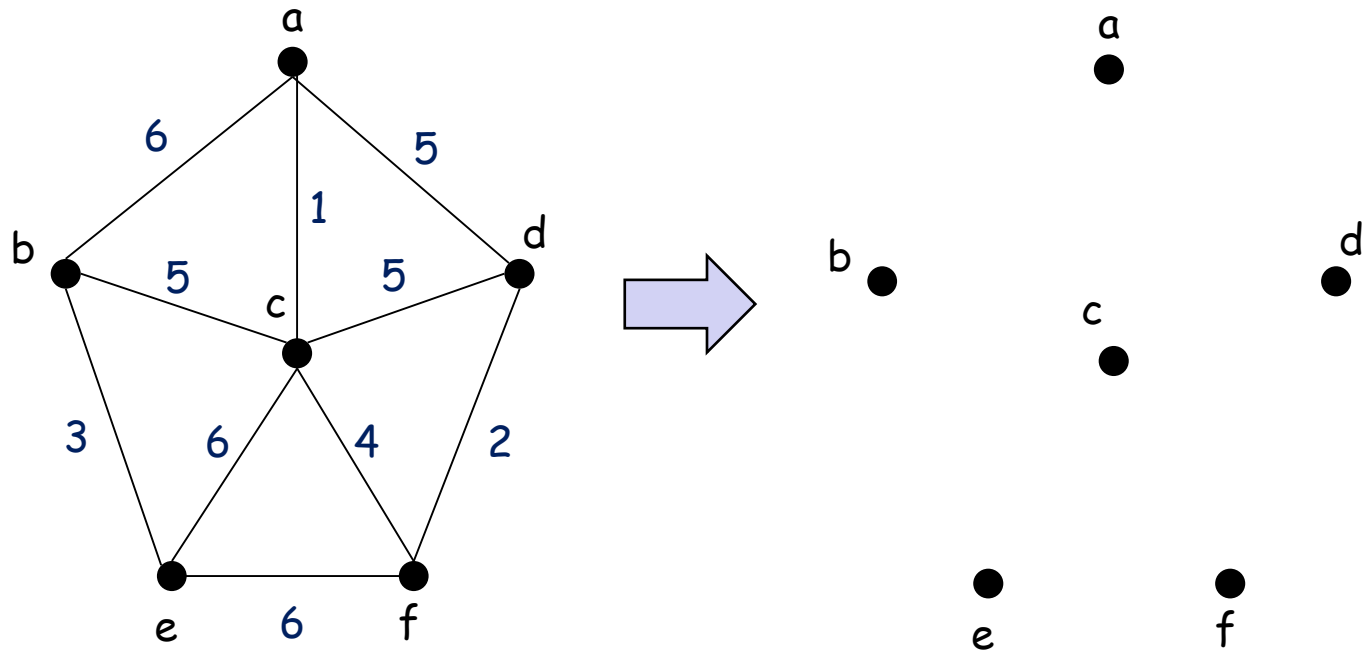
La arista que se selecciona con el algoritmo de Prim debe ser incidente en el árbol recubridor, mientras que en el algoritmo de Kruskal no

Árboles

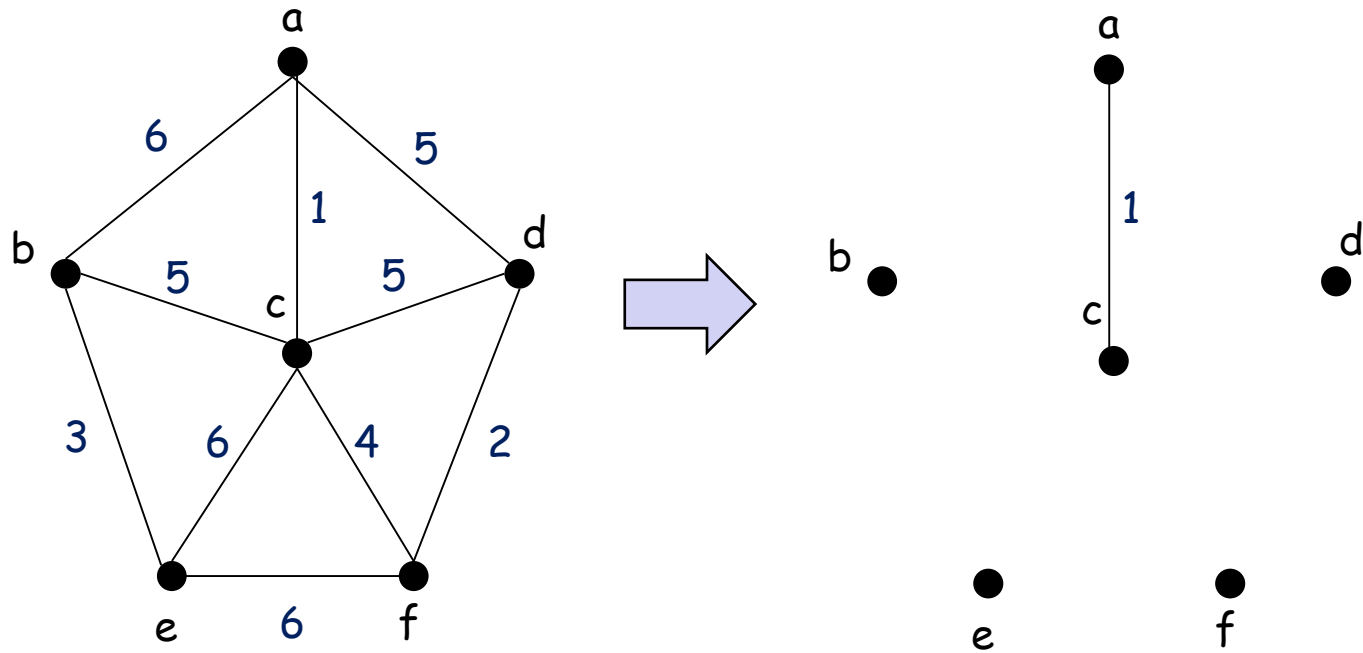
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Kruskal



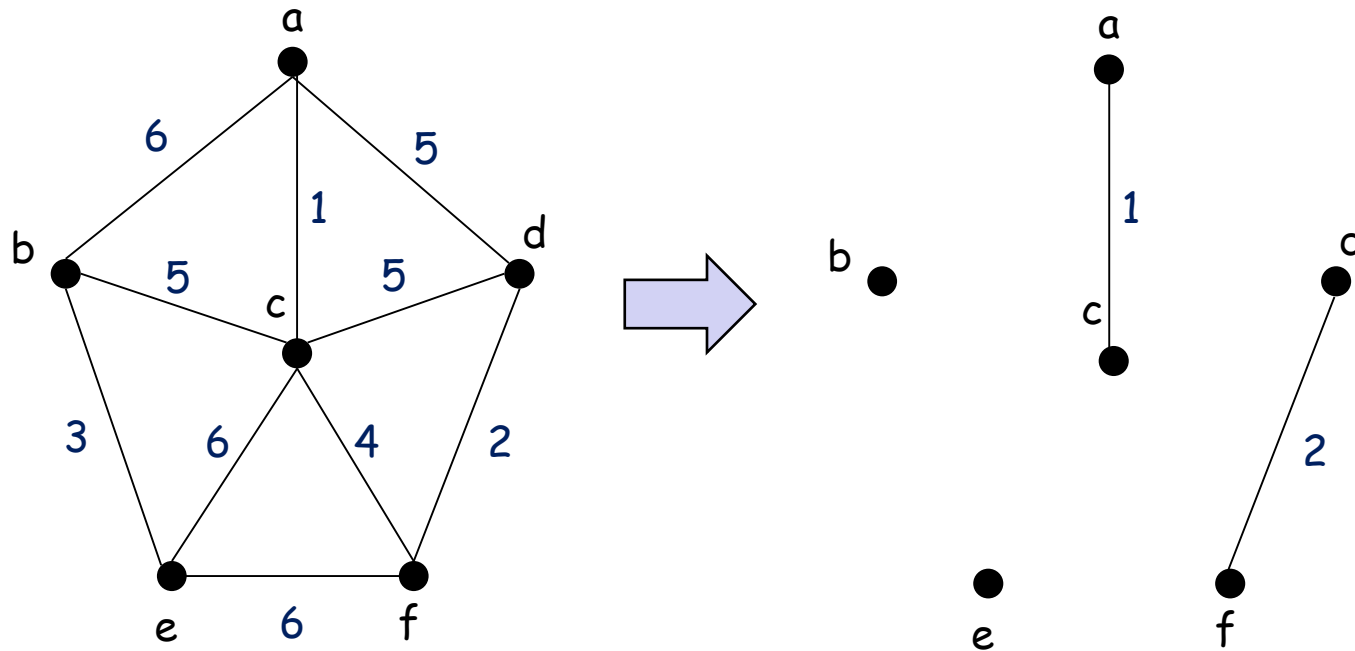
Árboles



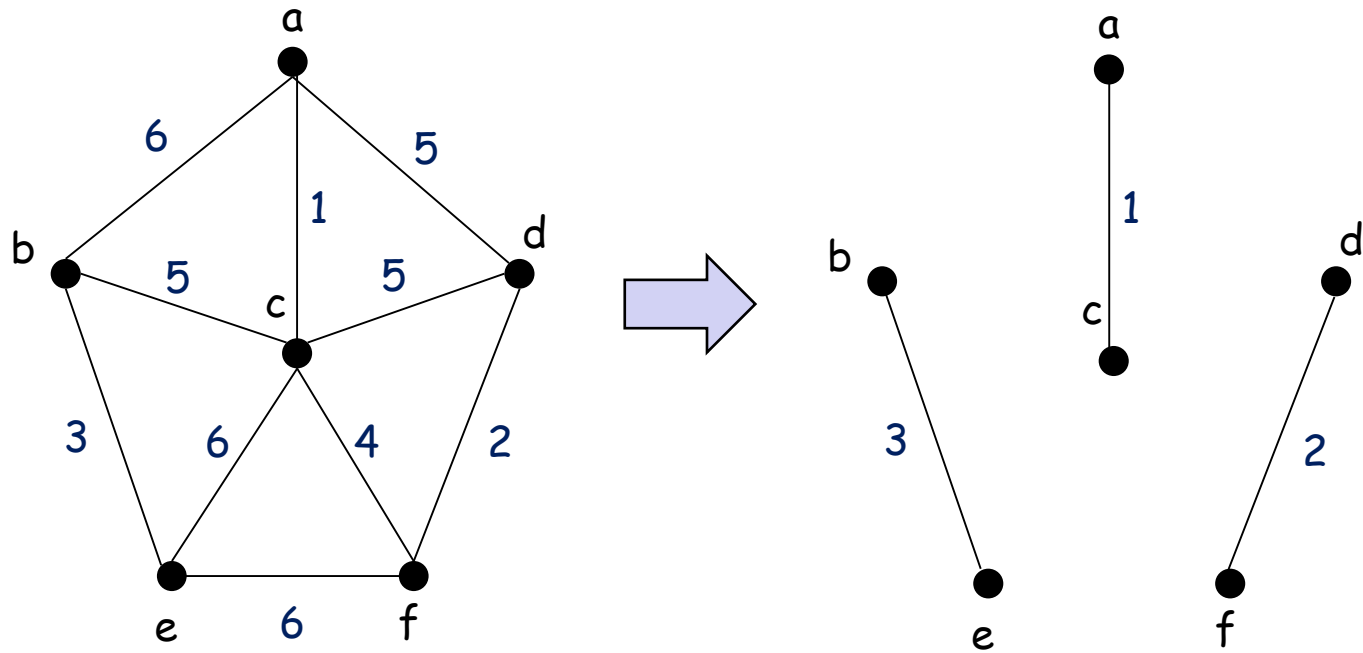
Árboles



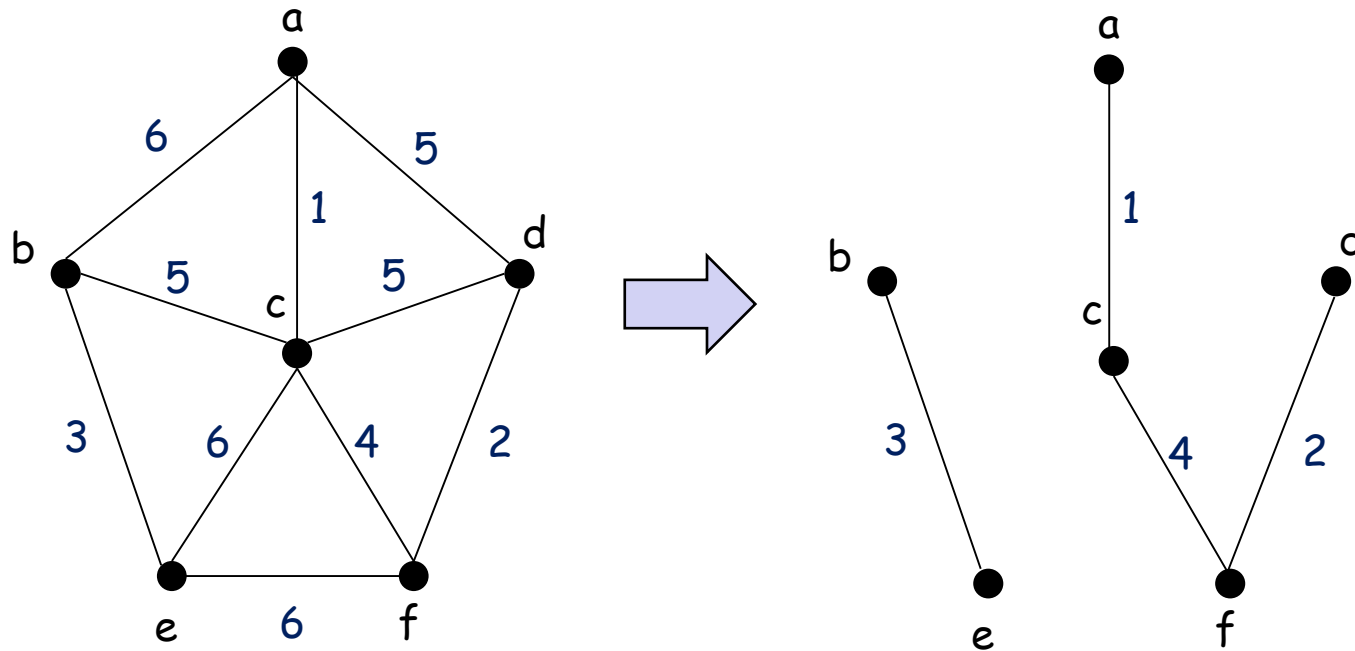
Árboles



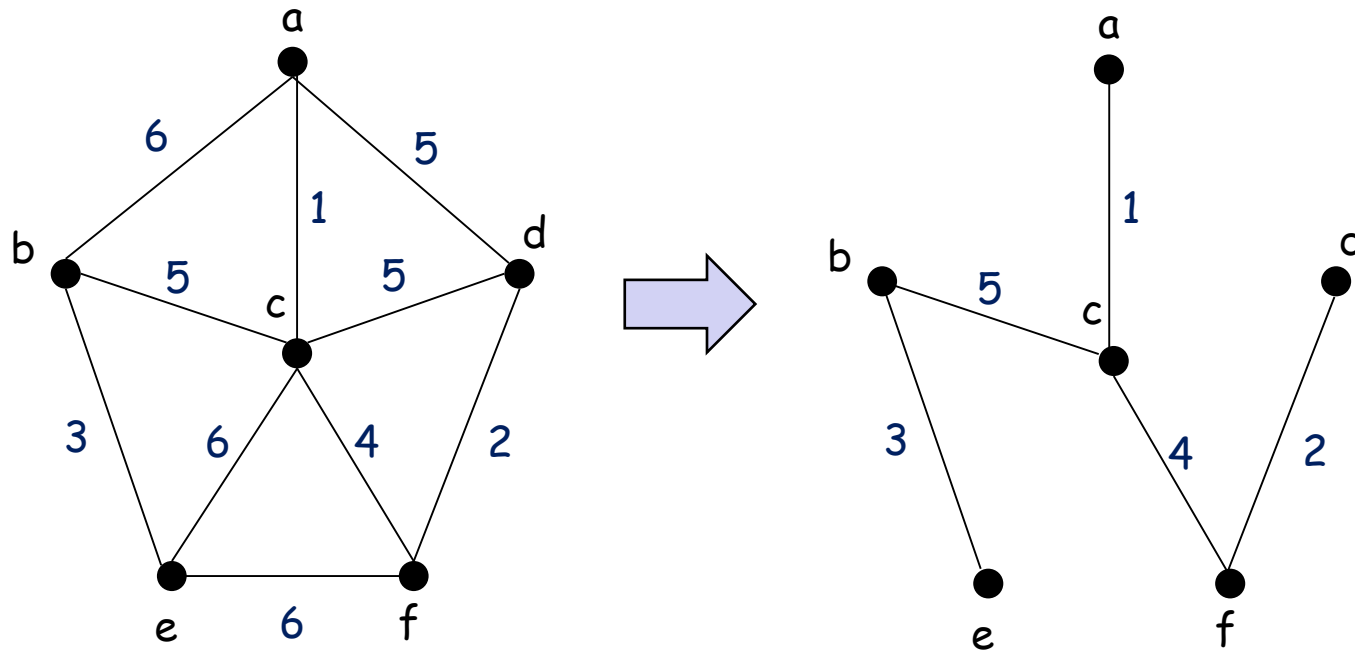
Árboles



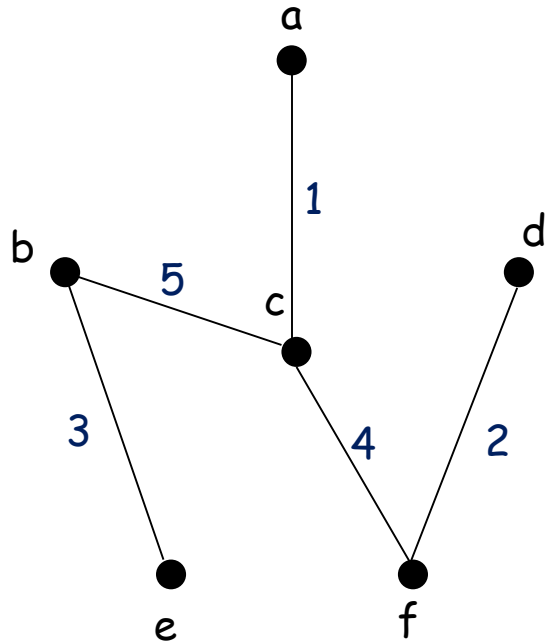
Árboles



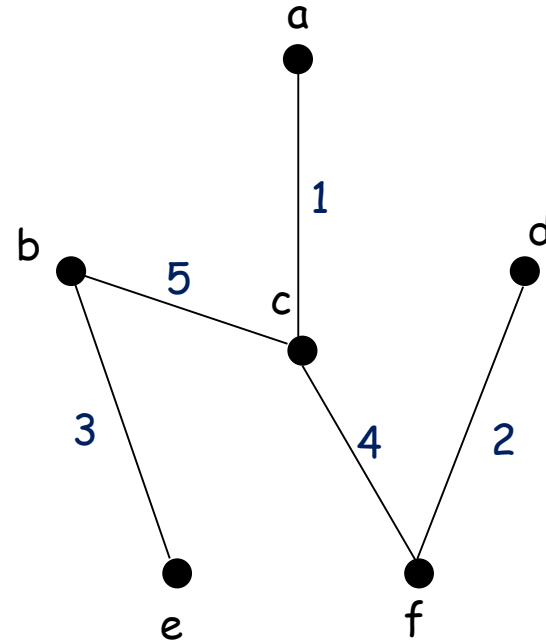
Árboles



Árboles



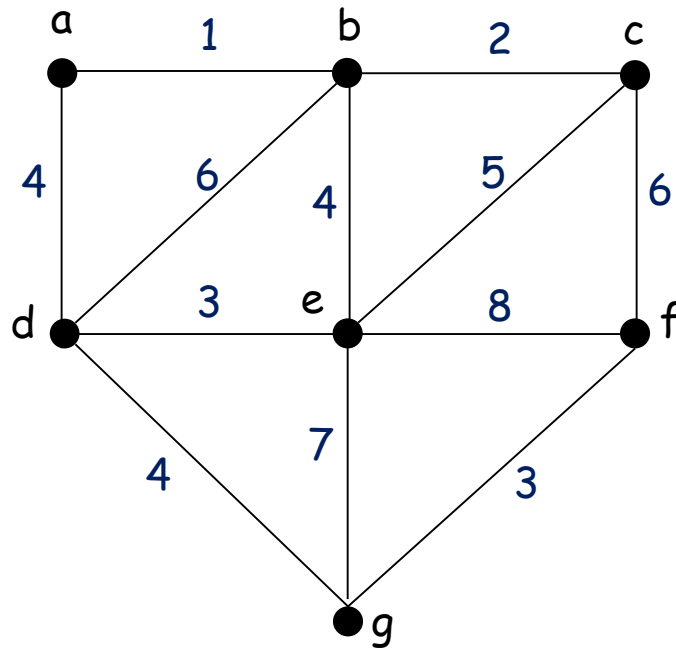
Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Prim



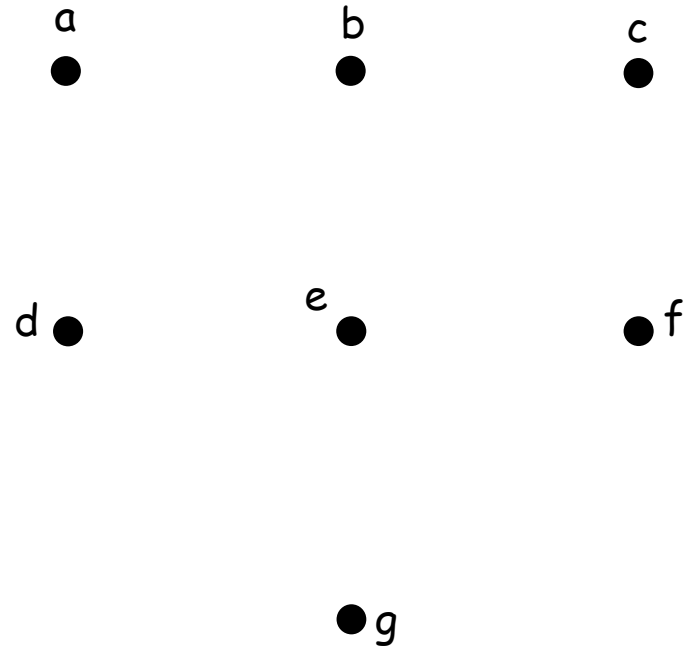
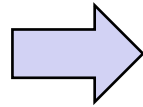
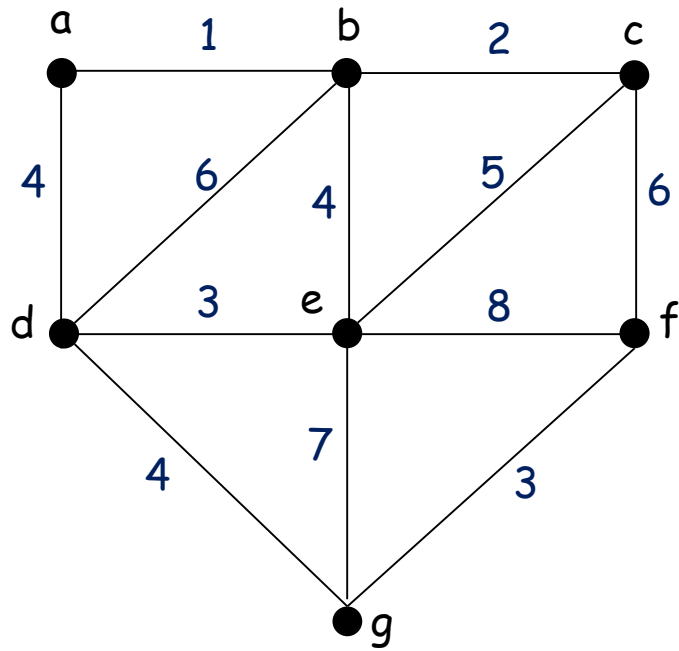
Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Kruskal

Árboles

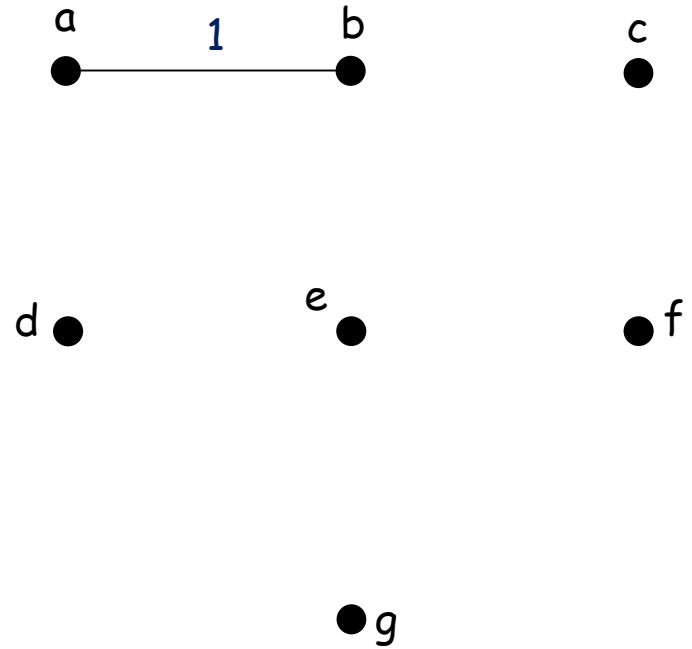
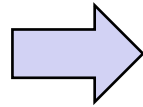
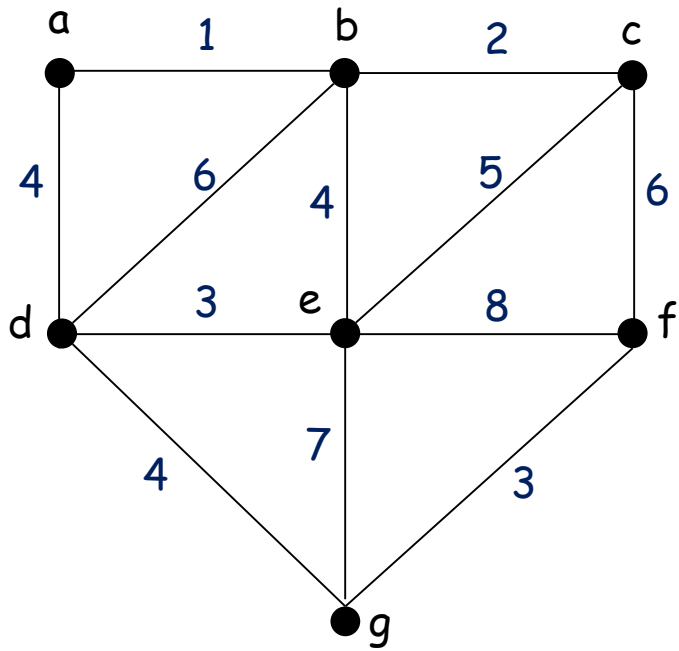
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Kruskal



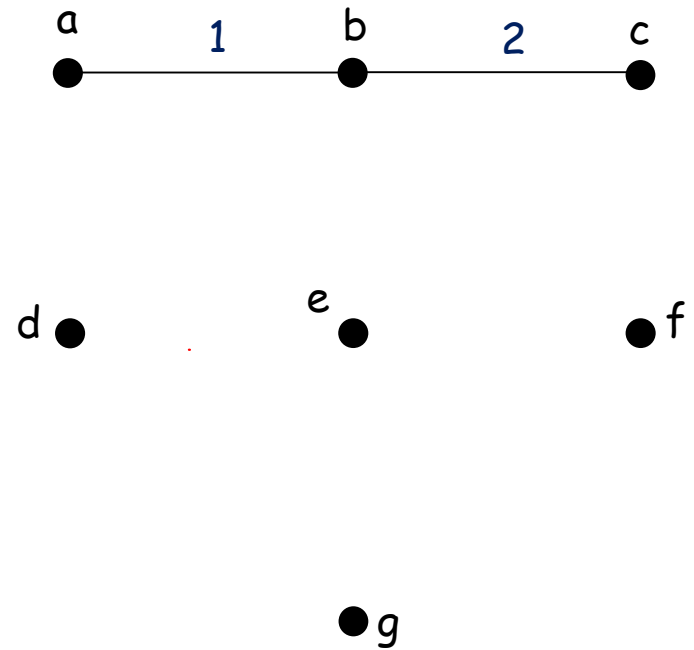
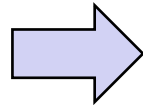
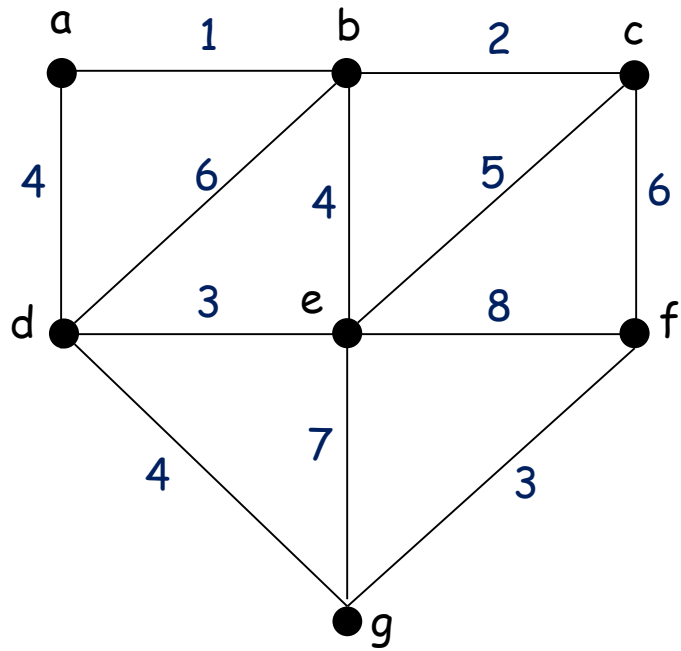
Árboles



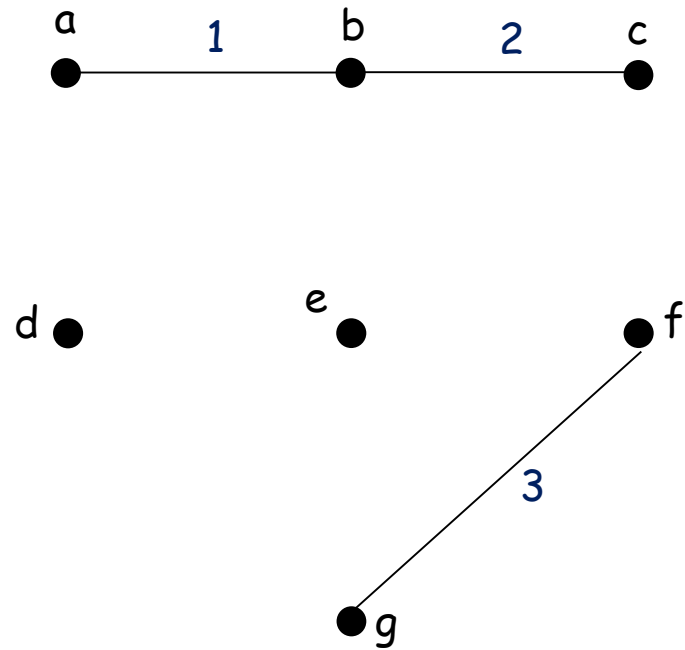
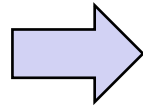
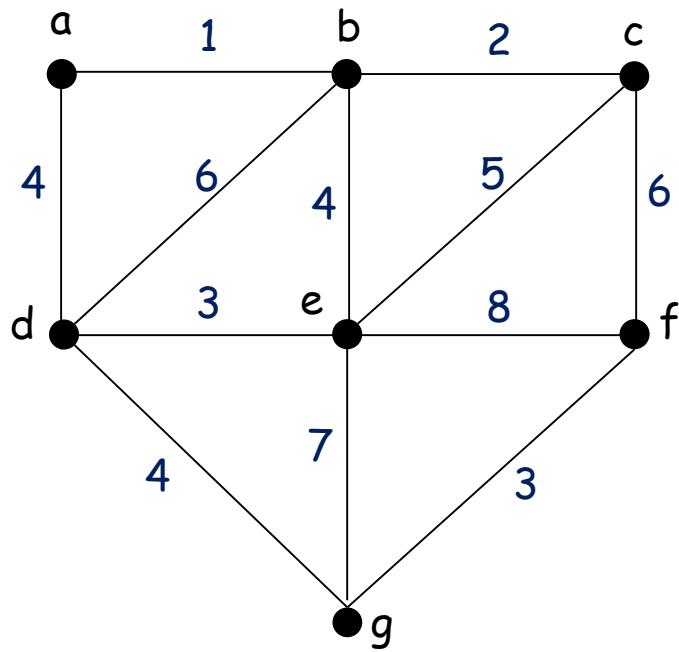
Árboles



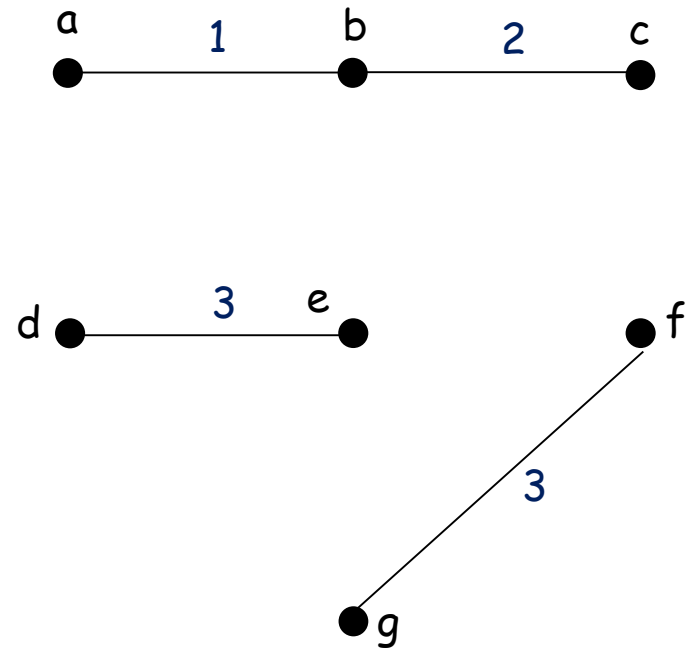
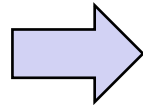
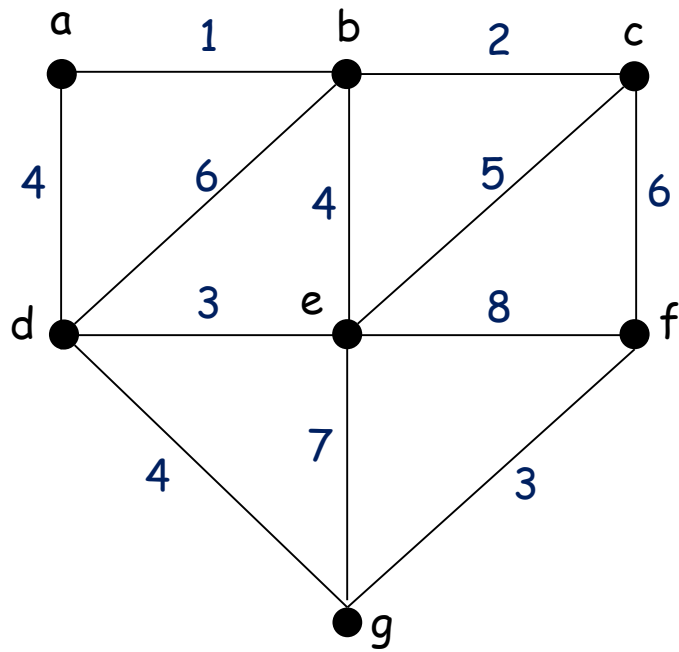
Árboles



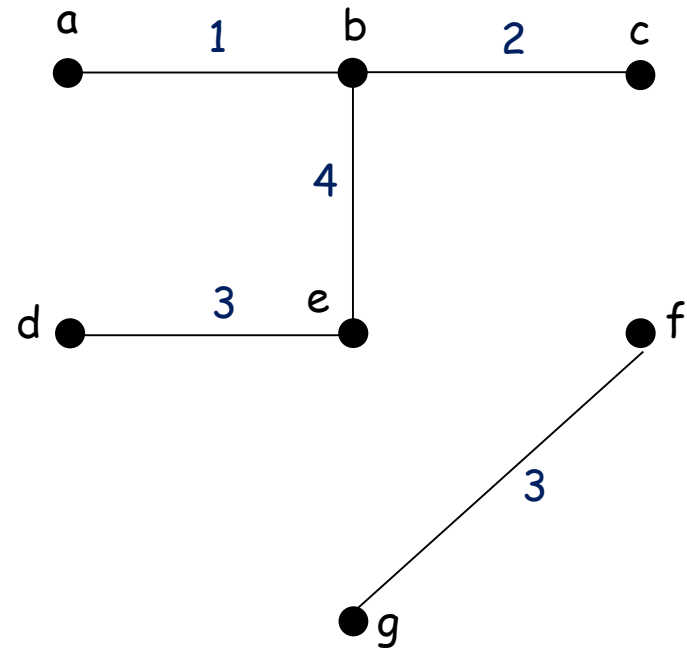
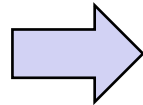
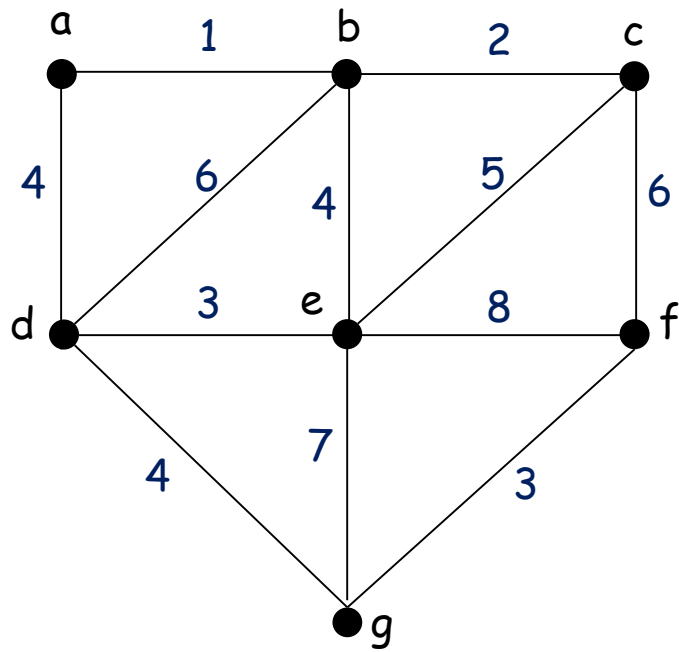
Árboles



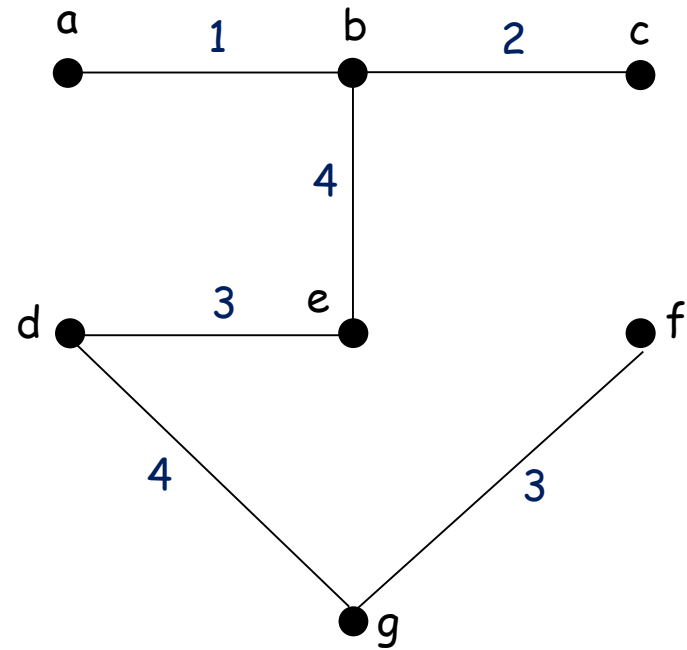
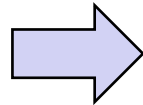
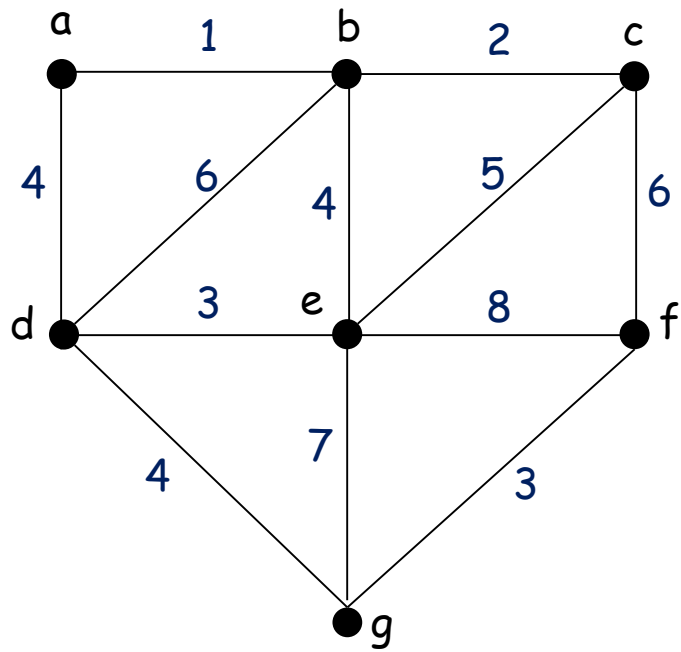
Árboles



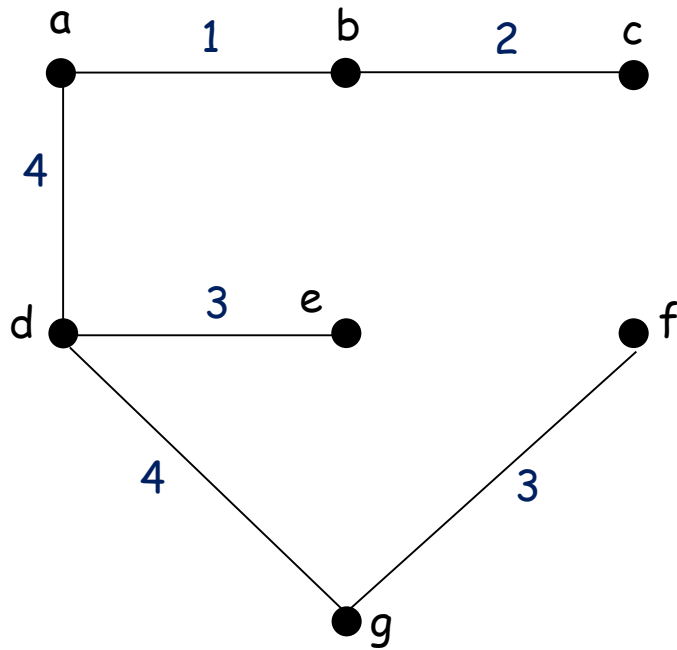
Árboles



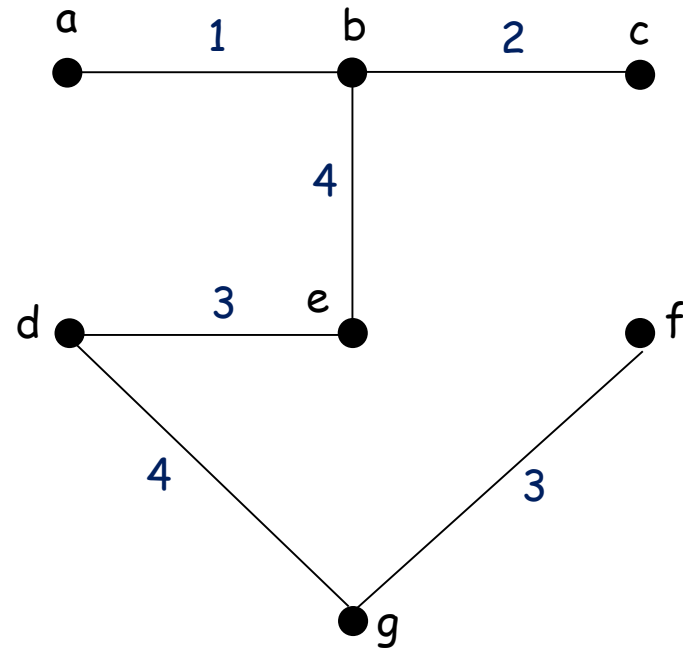
Árboles



Árboles



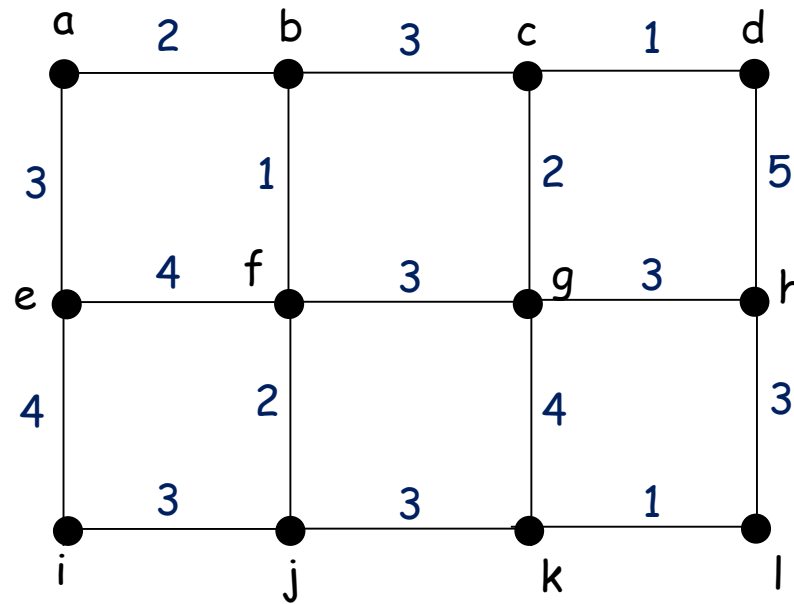
Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Prim



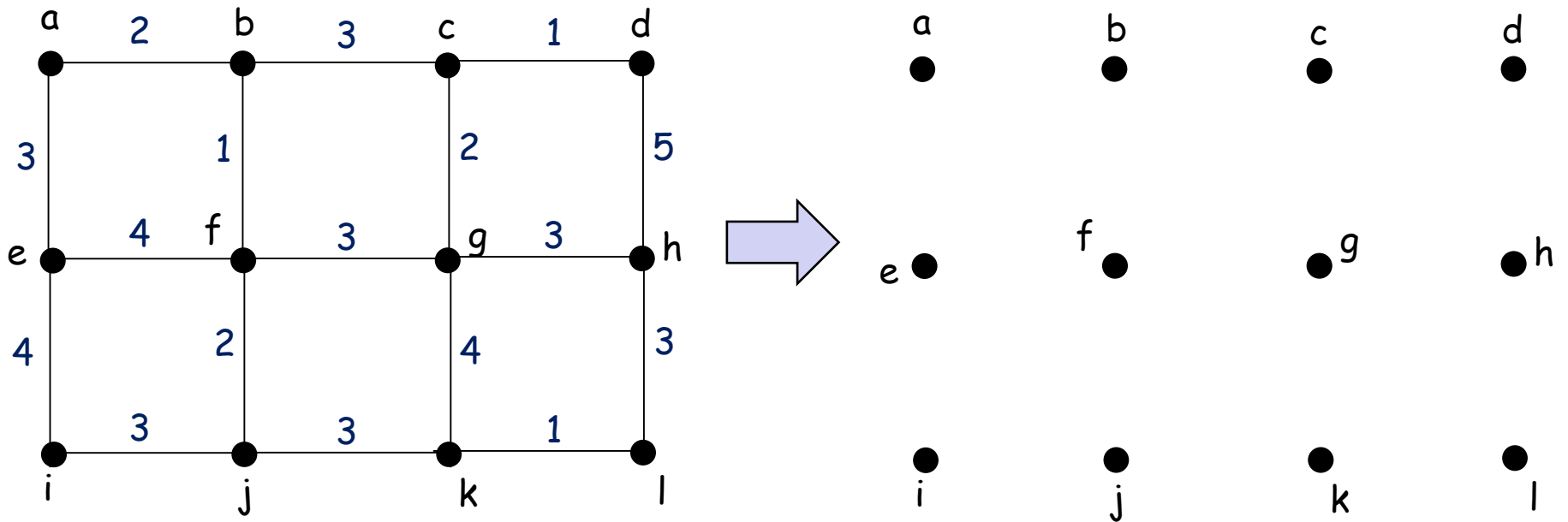
Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Kruskal

Árboles

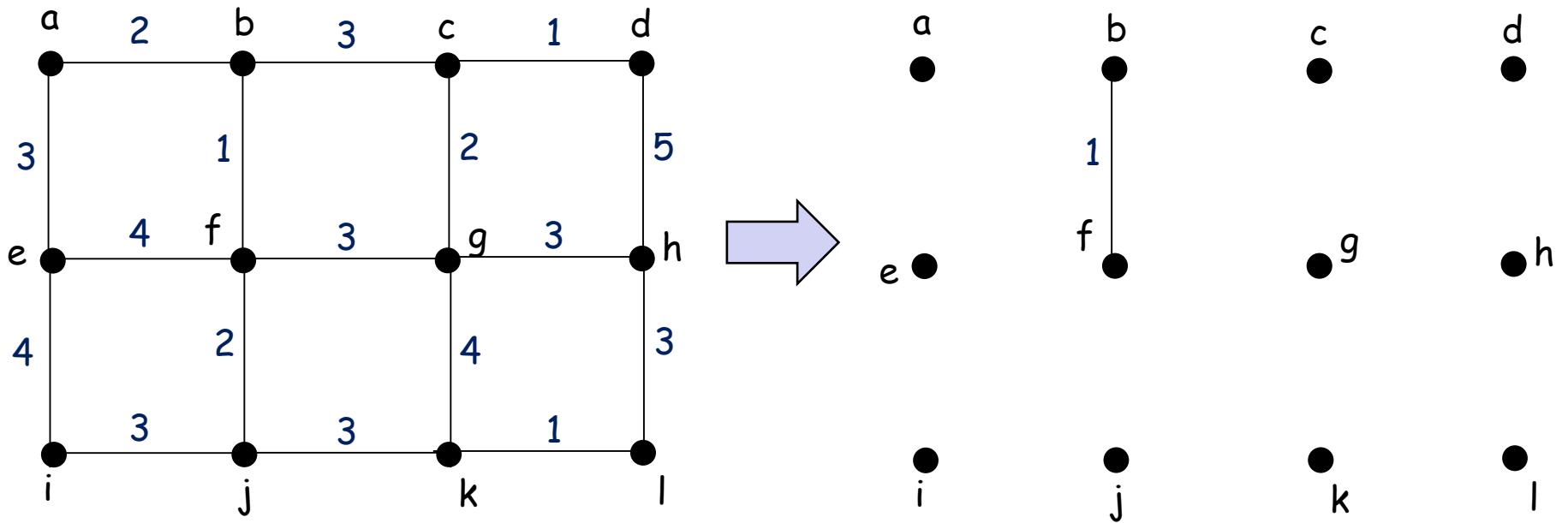
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Kruskal



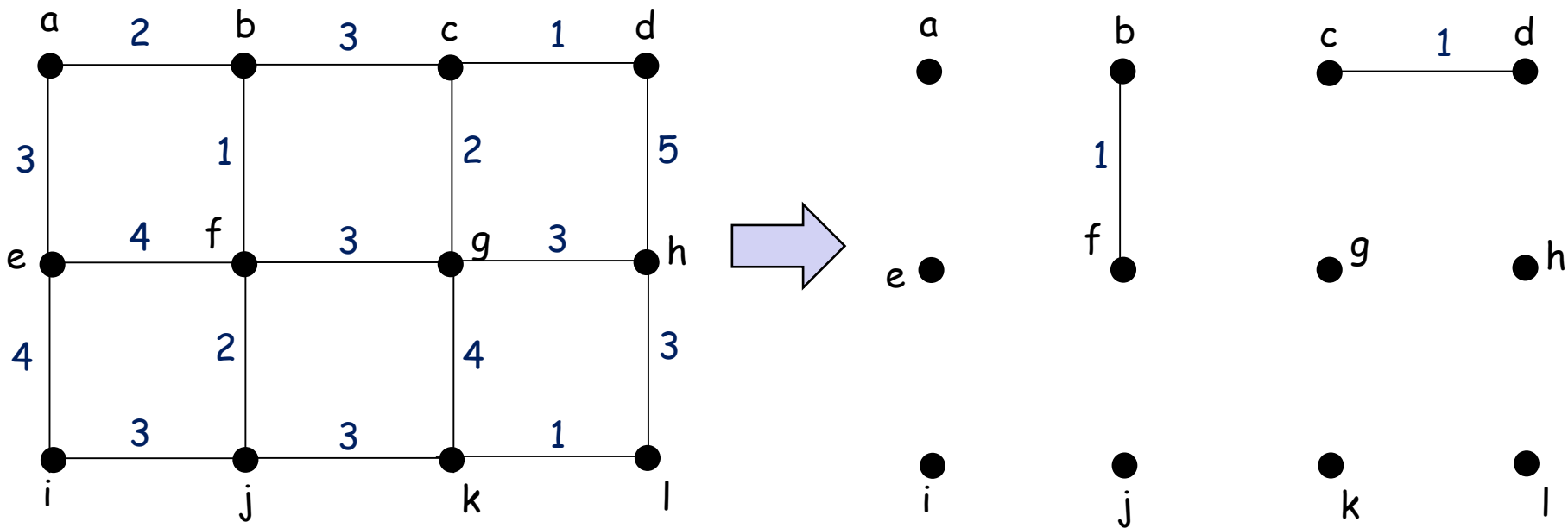
Árboles



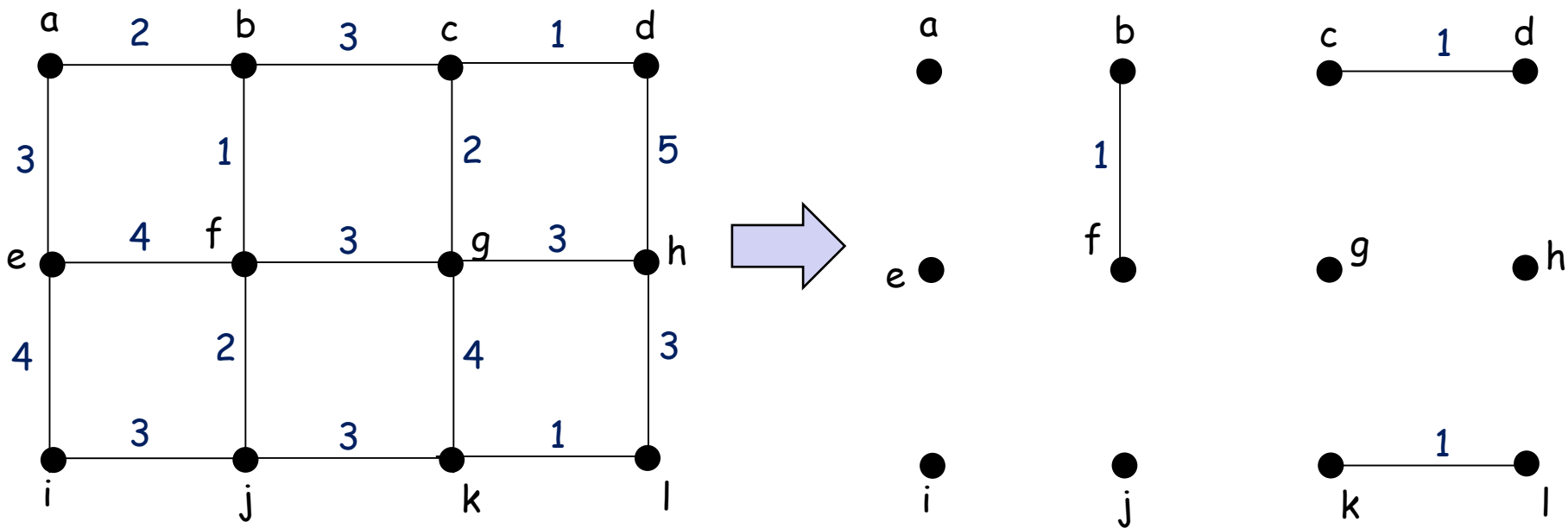
Árboles



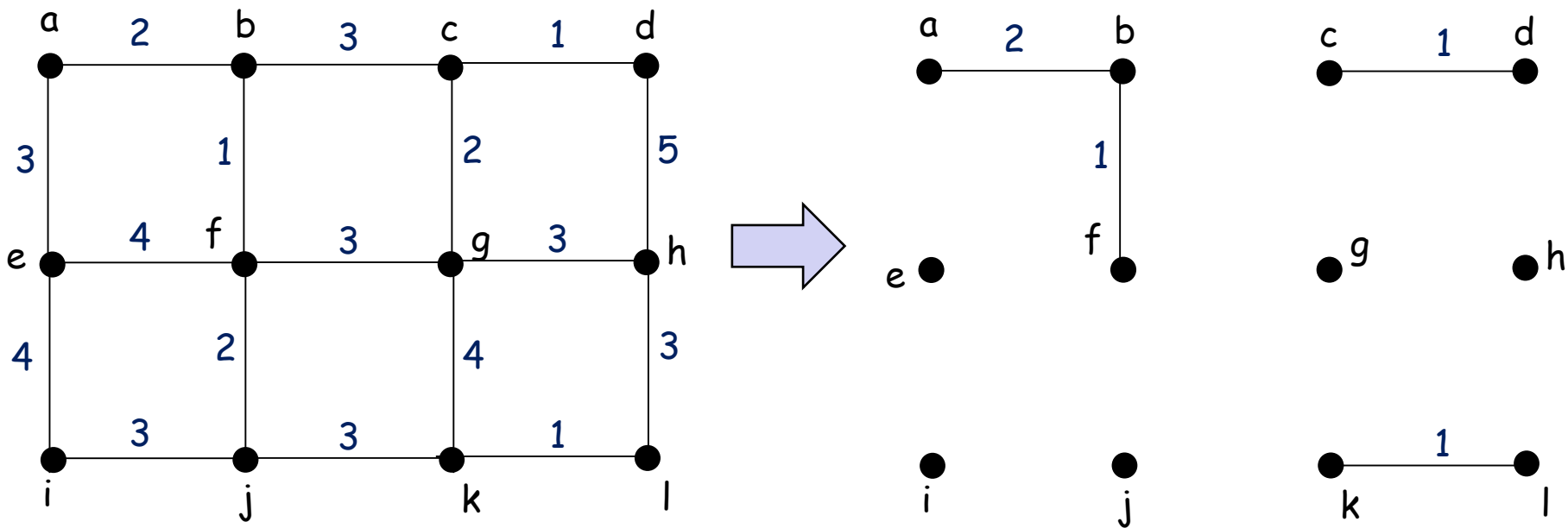
Árboles



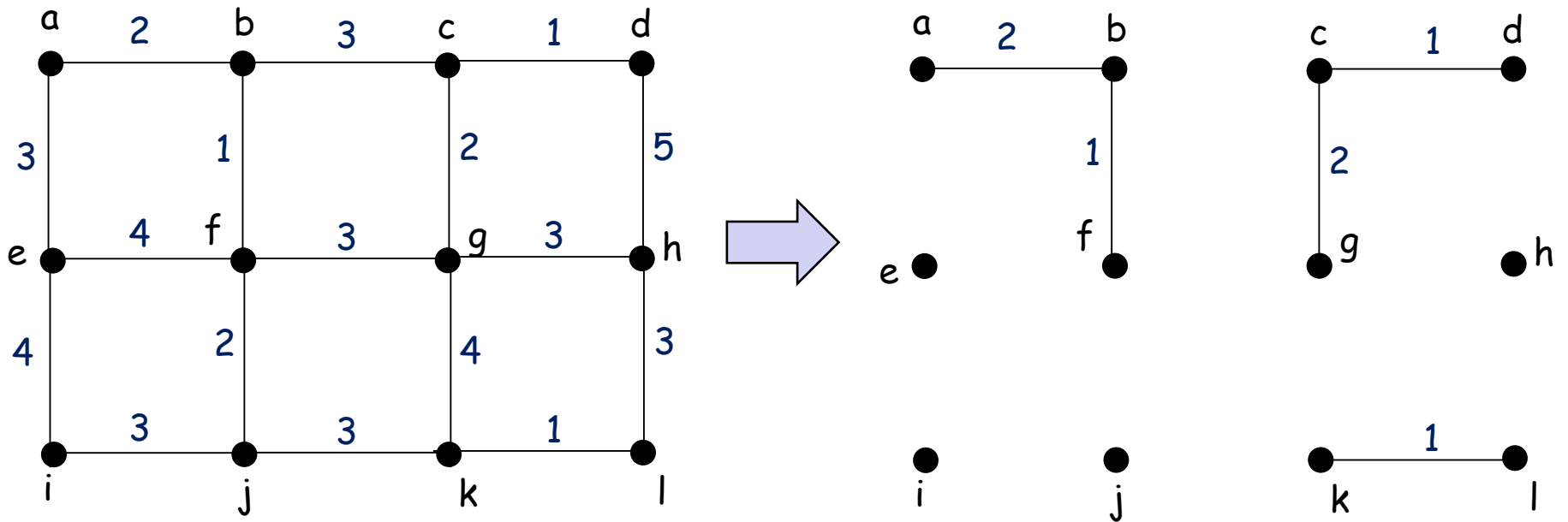
Árboles



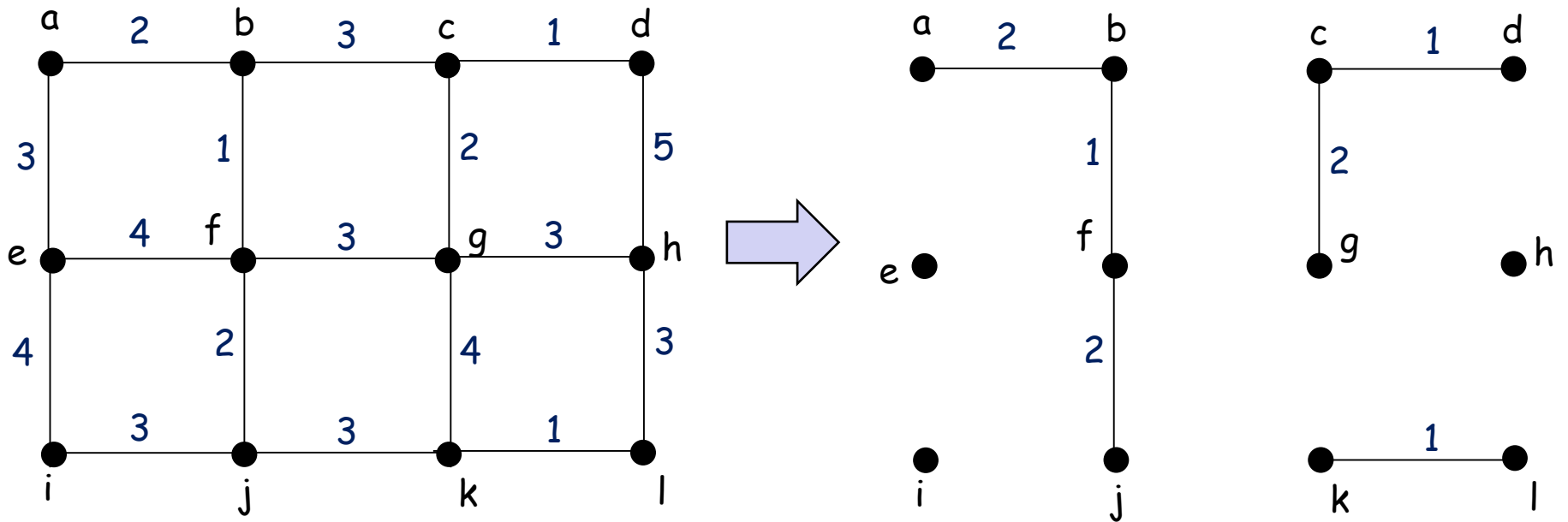
Árboles



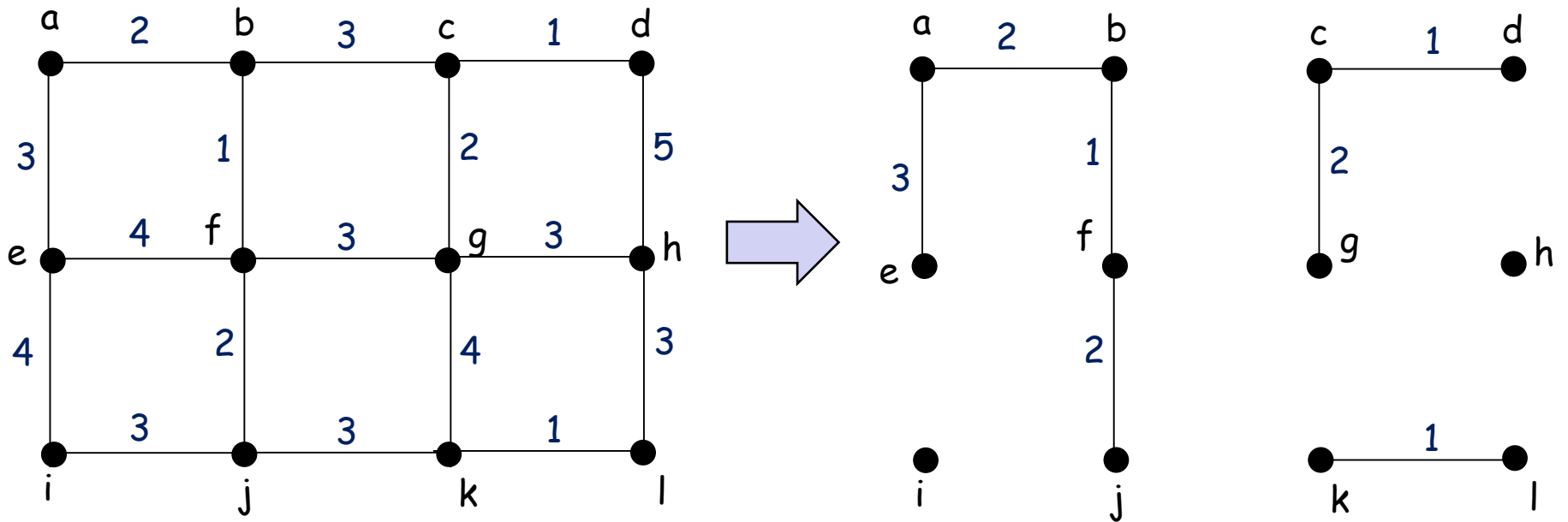
Árboles



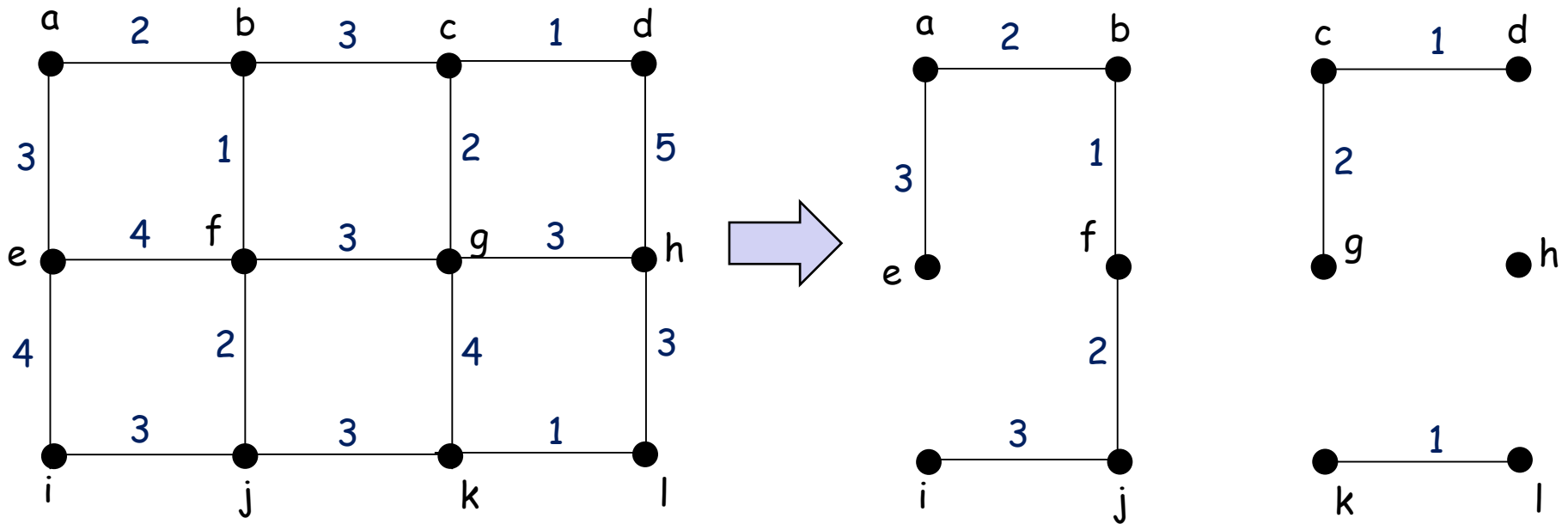
Árboles



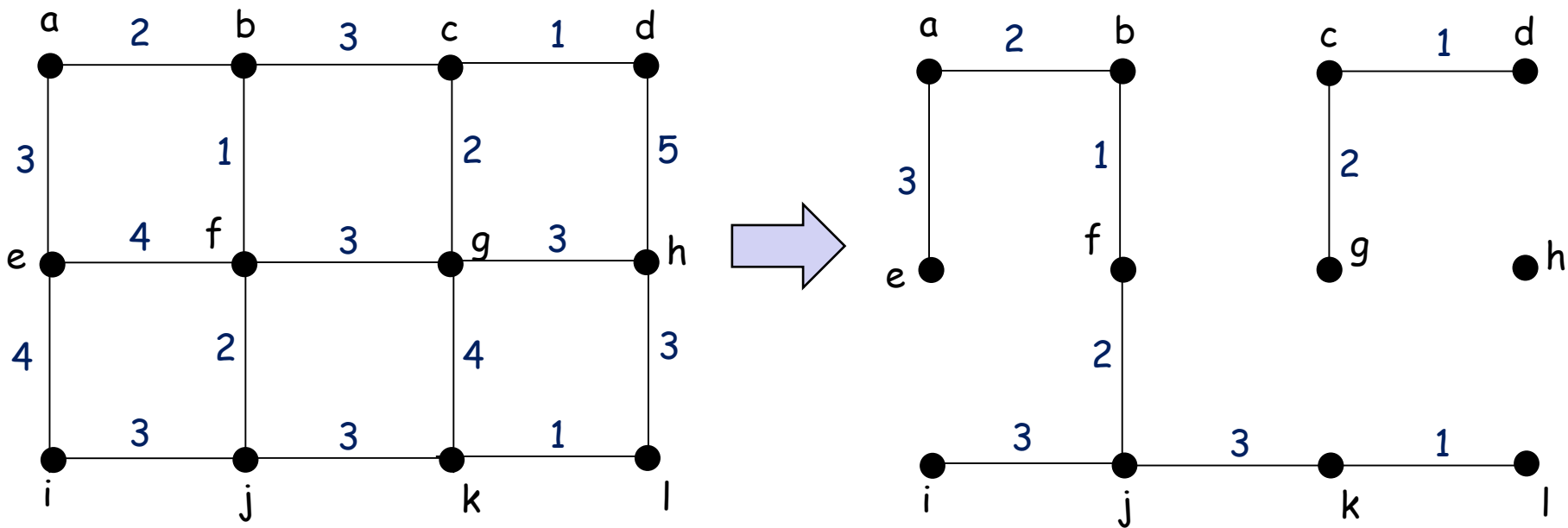
Árboles



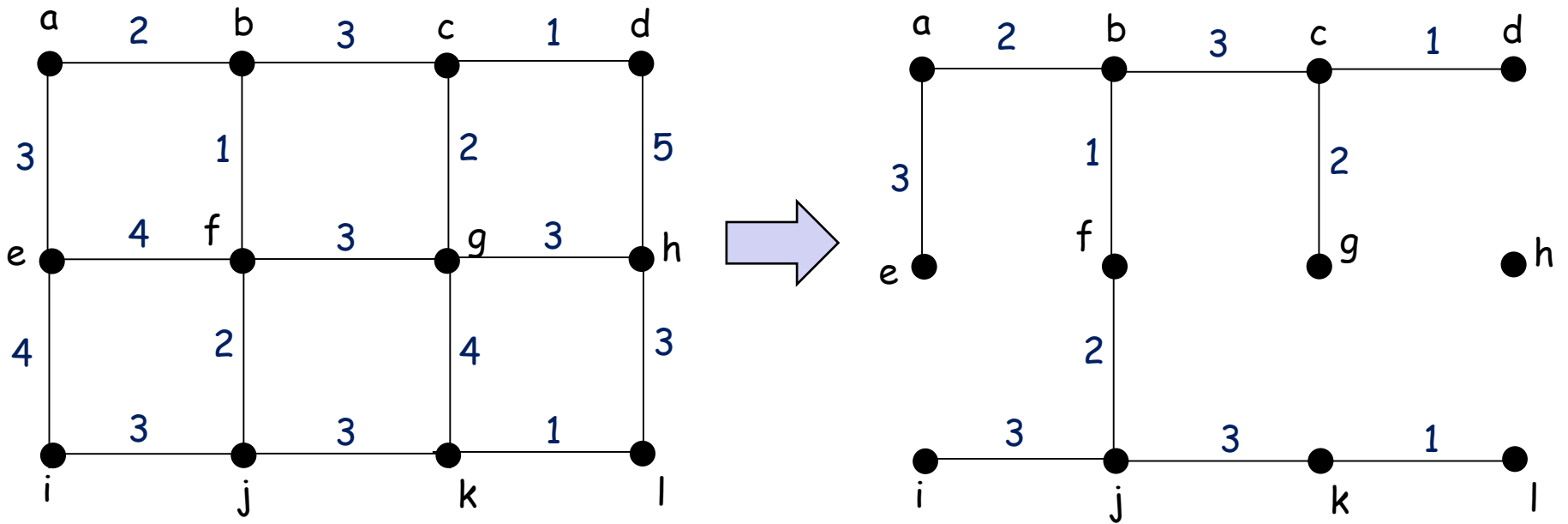
Árboles



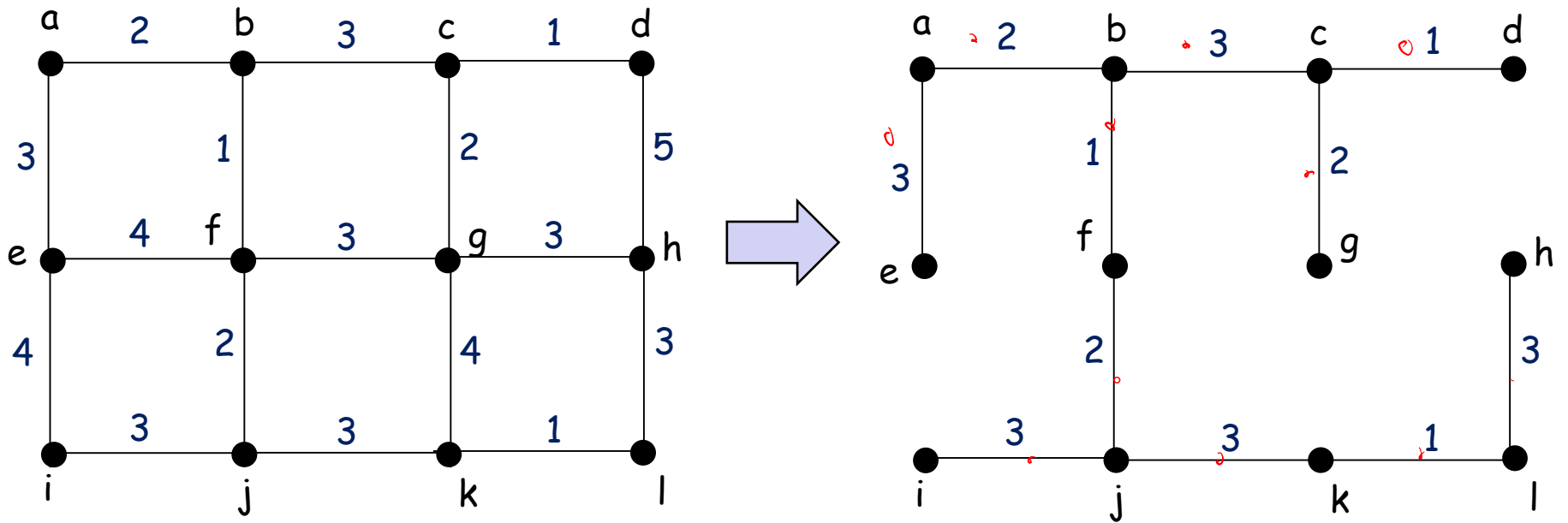
Árboles



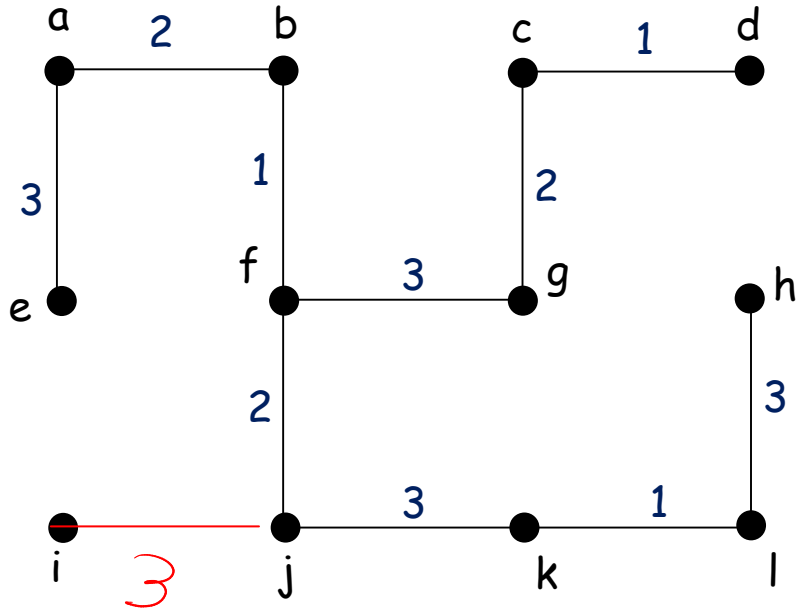
Árboles



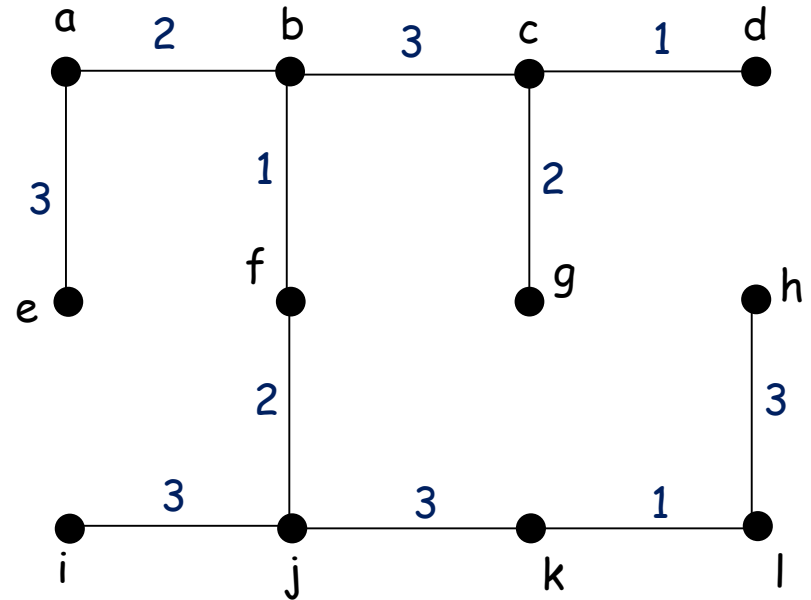
Árboles



Árboles



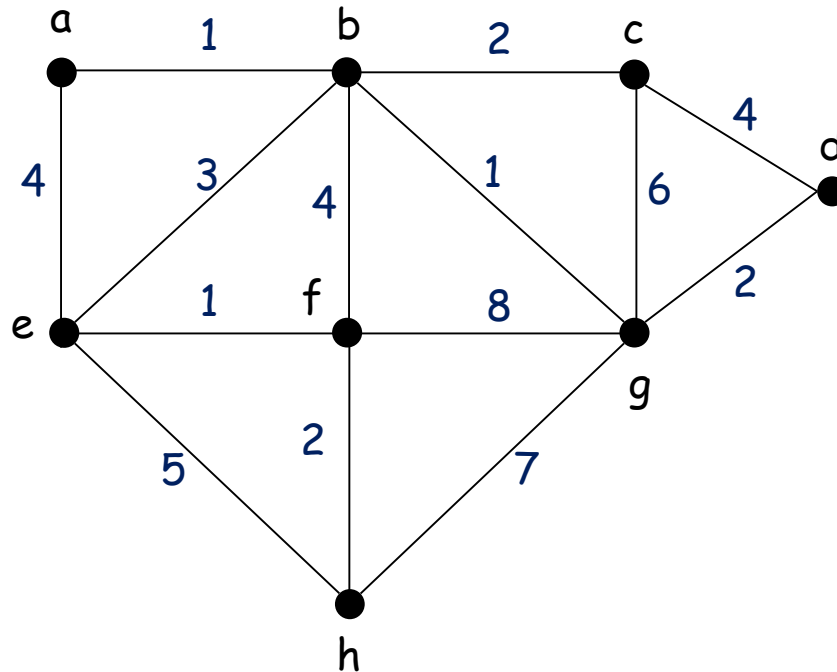
Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Prim



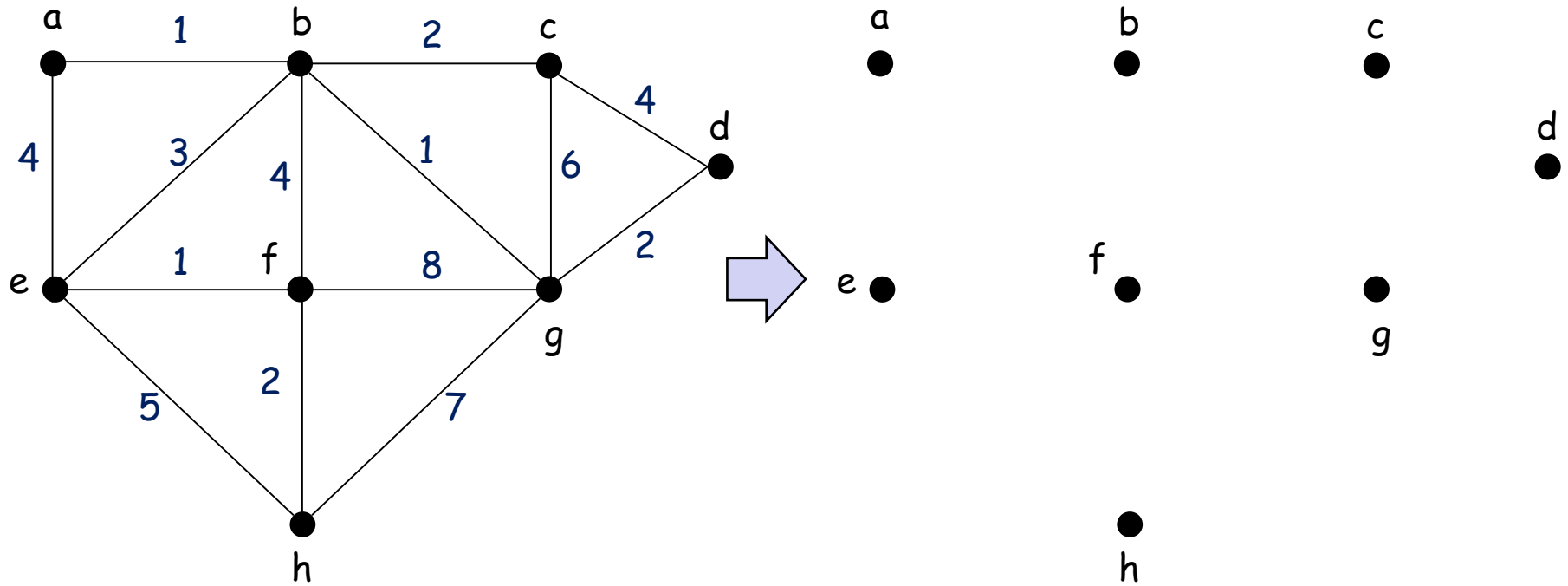
Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Kruskal

Árboles

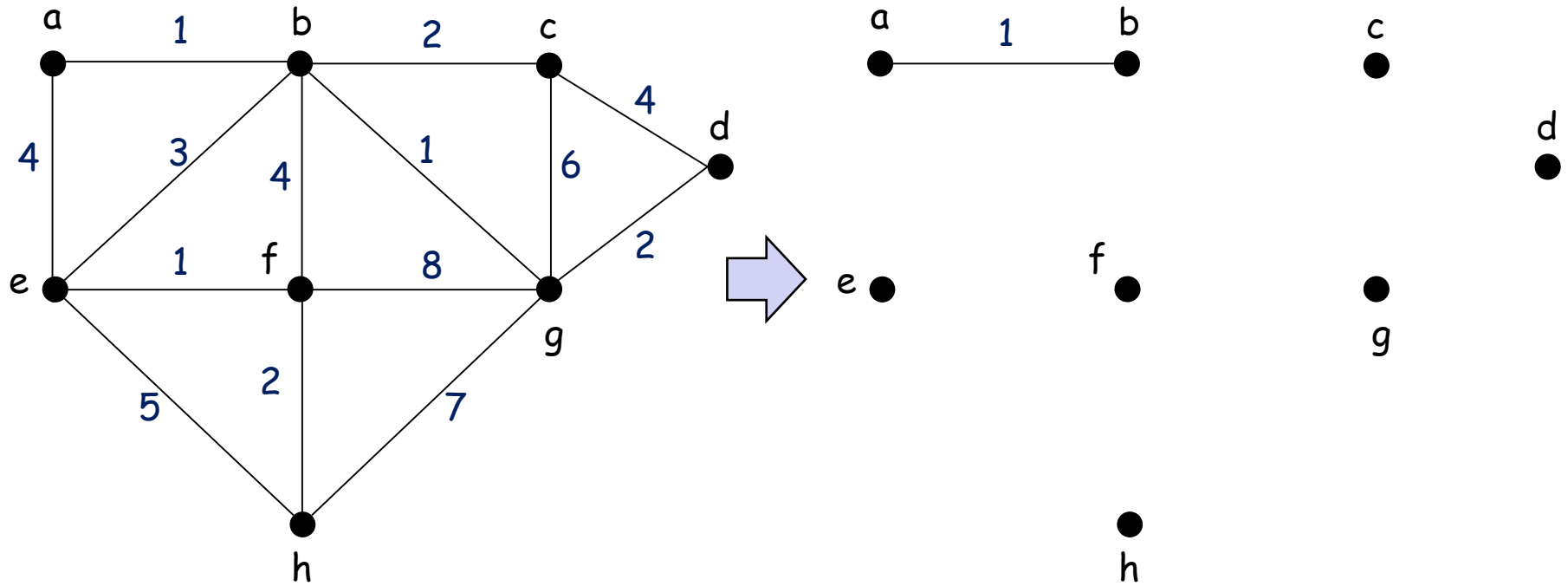
Encontrar un árbol recubridor mínimo usando el algoritmo de Kruskal



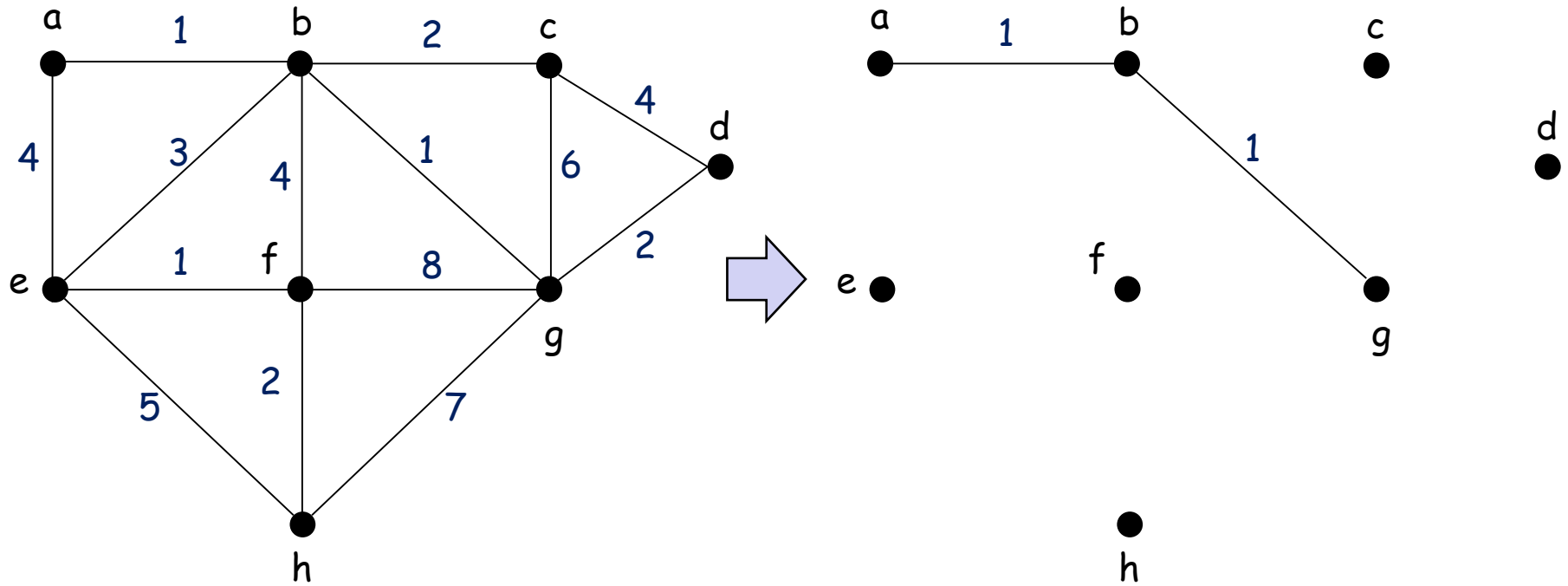
Árboles



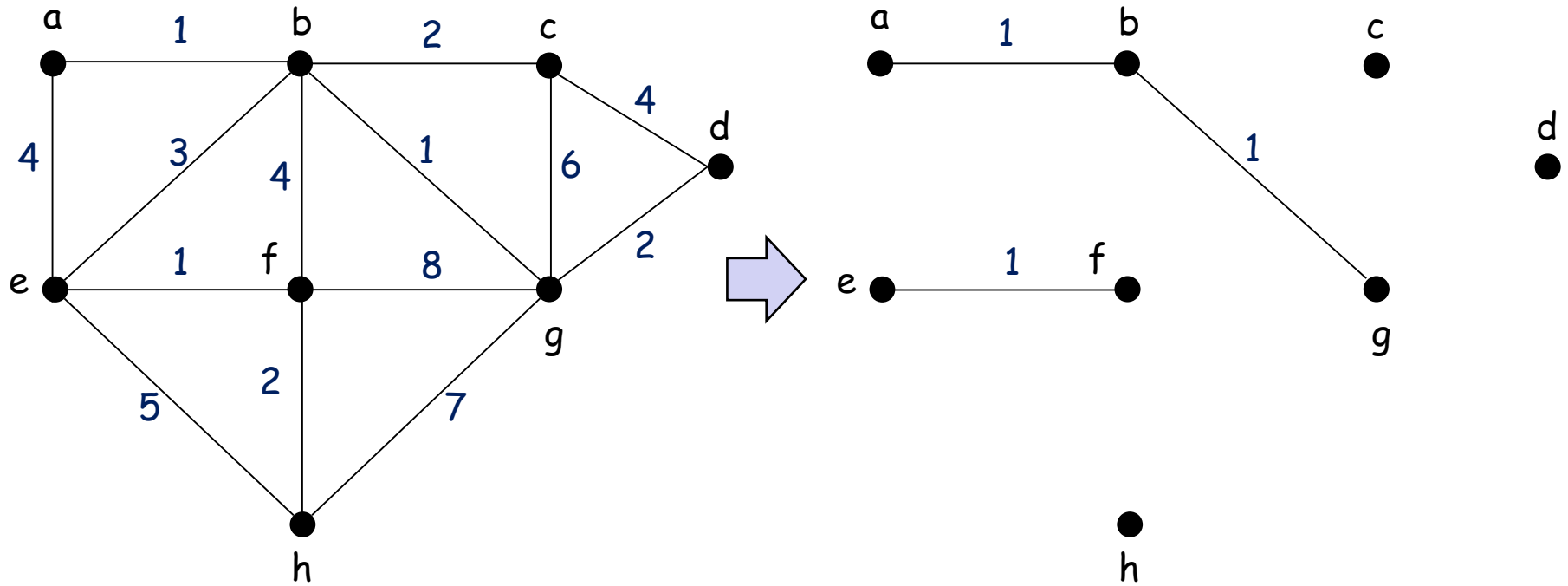
Árboles



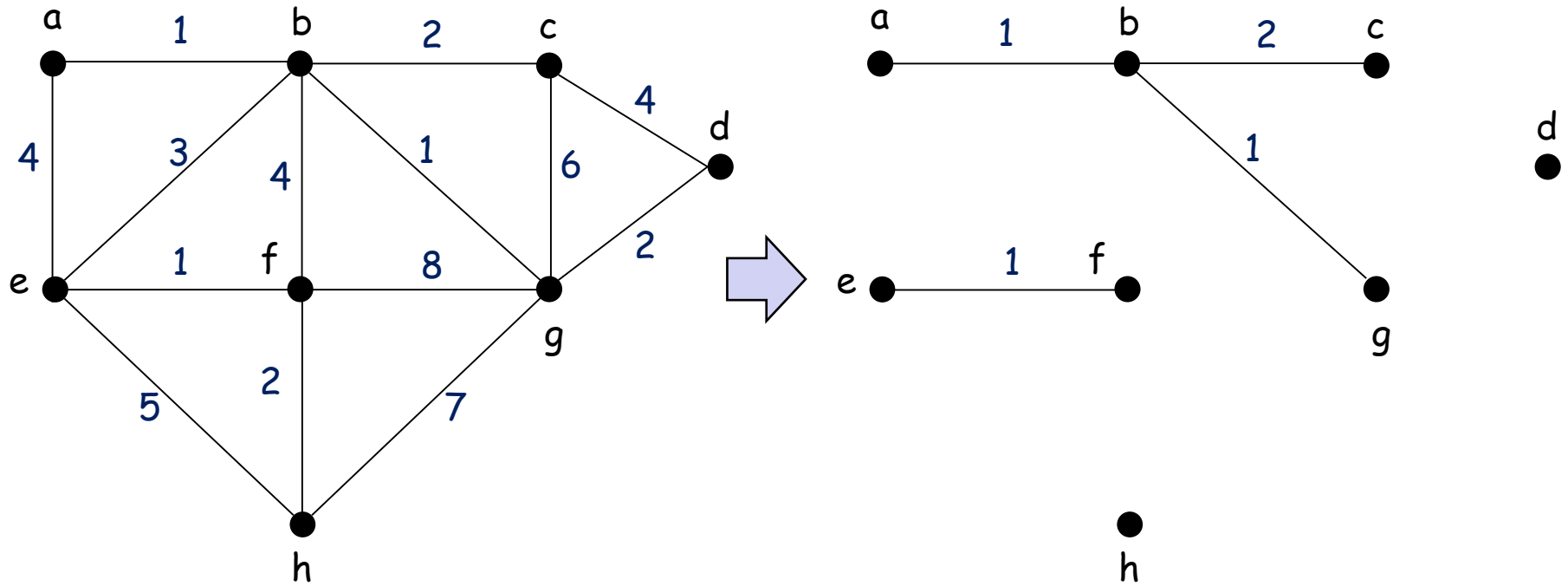
Árboles



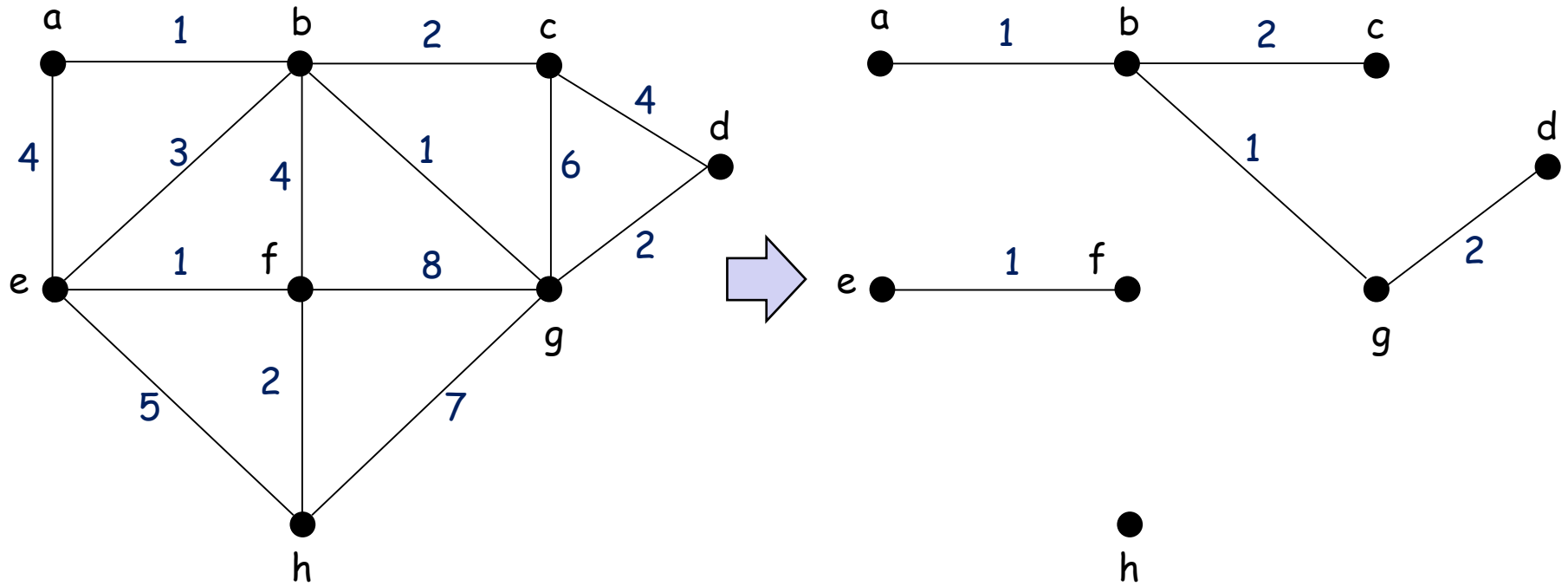
Árboles



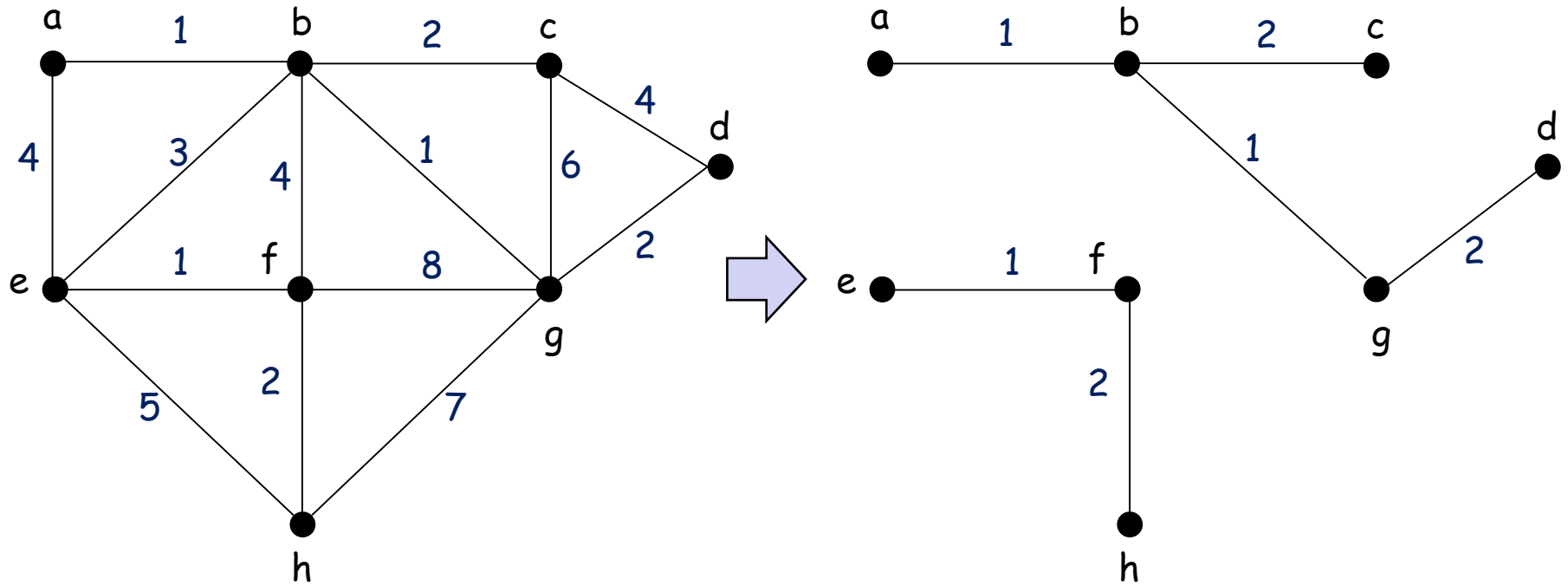
Árboles



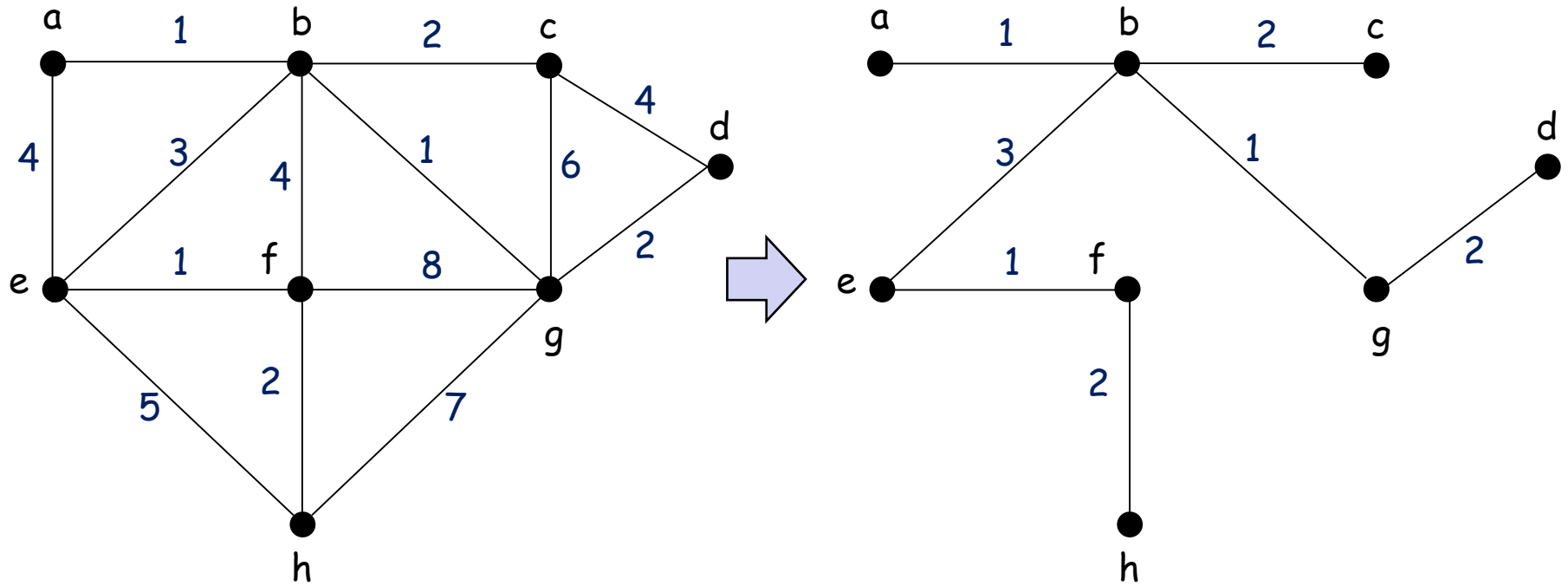
Árboles



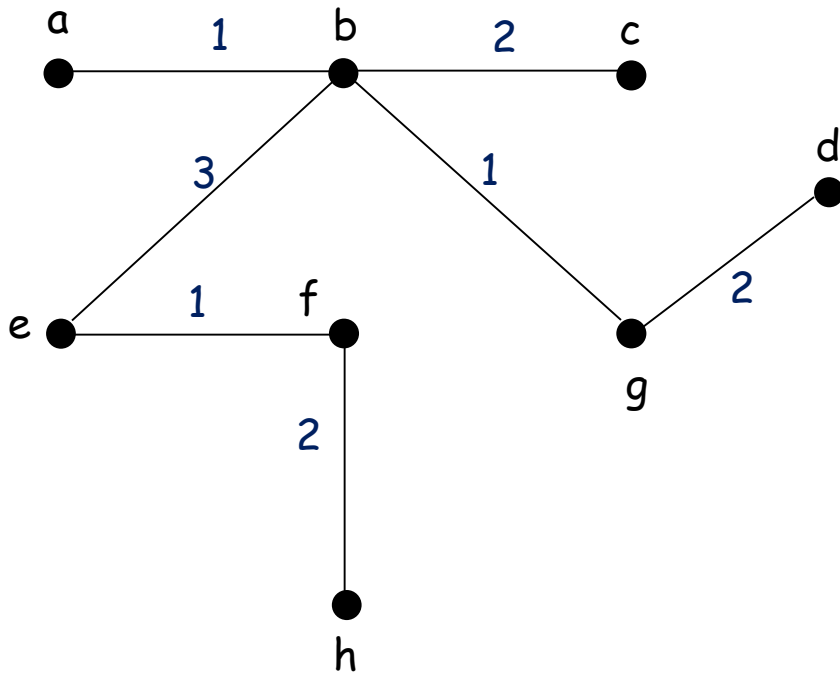
Árboles



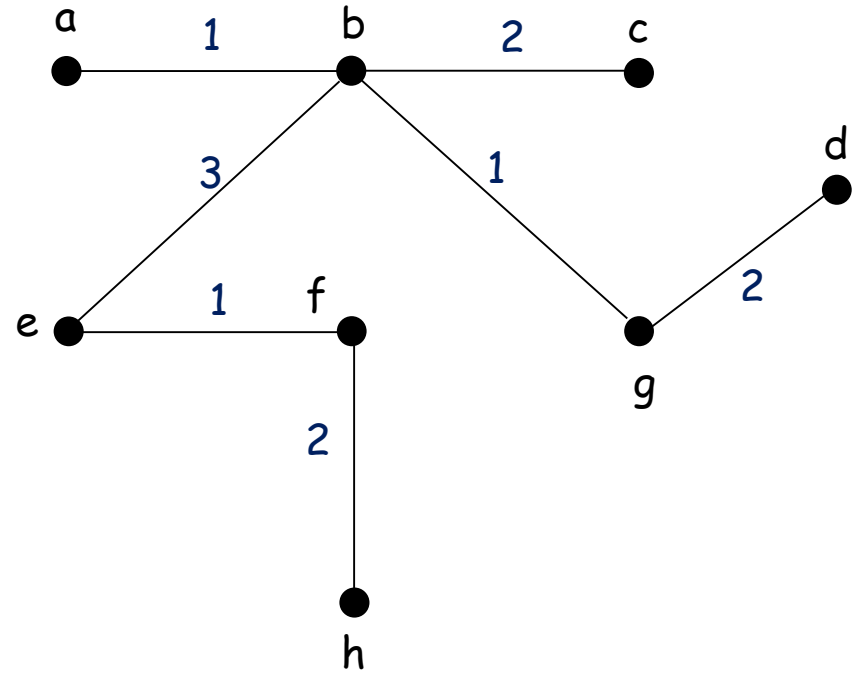
Árboles



Árboles



Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Prim



Árbol recubridor
mínimo obtenido con el
algoritmo de Kruskal