

Primer Examen - NP-Complejidad
Complejidad y Optimización
Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación
Universidad del Valle



Nombre: _____
Código: _____

0 en caso contrario.

El objetivo de este examen es demostrar que \mathcal{PRT} es NP-Completo.

El problema $\text{Subset Sum}(SS)$

- **Entrada:** Un conjunto $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ de n números, y una constante C .
- **Salida:** 1 si existe un subconjunto M' de M tal que

$$\sum_{m \in M'} m = C$$

El problema de Partición (\mathcal{PRT})

- **Entrada:** Un conjunto de enteros positivos $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.
- **Salida:** 1 si existe una partición de \mathcal{A} , es decir dos conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ tales que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ y $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, tales que

$$\sum_{a_i \in \mathcal{A}_1} a_i = \sum_{a_i \in \mathcal{A}_2} a_i.$$

1. Entendimos los problemas [30 pts.]

- a) [2 pts.] Cual es la salida de SS para la entrada $n = 7, \mathcal{M} = \{700, 500, 1900, 100, 1200, 800, 1400\}, C = 3300$.

1

- b) [2 pts.] Cual es la salida de SS para la entrada $n = 5, \mathcal{M} = \{70, 50, 190, 80, 140\}, C = 520$.

0

- c) [2 pts.] Cual es la salida de \mathcal{PRT} para la entrada $\mathcal{A} = \{80, 30, 10, 60, 120\}$.

1

- d) [2 pts.] Cual es la salida de \mathcal{PRT} para la entrada $\mathcal{A} = \{25, 26, 19, 13\}$.

0

RED C

Suma, Suma - c, c

e) [6 pts.] Describa una instancia de tamaño 7 de PRT para la que la respuesta sea positiva.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 21\}$

f) [5 pts.] Describa una instancia de tamaño 7 de PRT para la que la respuesta sea negativa.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 22\}$

g) [5 pts.] Describa una instancia de tamaño 7 de SS para la que la respuesta sea positiva.

$C=100 \{100, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

h) [6 pts.] Describa una instancia de tamaño 7 de SS para la que la respuesta sea negativa.

$C=300 \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2. [70 pts.] Demuestre que PRT es NP-completo, suponiendo que SS lo es. Es decir:

a) [10 pts.] Demuestre que PRT es NP

Dado que PRT tiene un conjunto M de n elementos, tal que debo seleccionar dos subconjuntos que cumplan la condición. el número de enumeraciones posibles es 2^n , Entonces la complejidad de encontrar dos subconjunto $O(2^n)$

b) [60 pts.] Demuestre que PRT es NP-Hard:

1) [10 pts.] Escoja entre las tres reducciones siguientes la que utilizará para su demostración.

RedA $PRT \leq SS$ Dado $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, construya $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, tal que $n = p$ y $m_i = a_i$, para $i = 1..n$, y

$$C = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{2} & \text{Si } \sum_{i=1}^n a_i \text{ es par} \\ 1 + \sum_{i=1}^n a_i & \text{Si no} \end{cases}$$

RedB $SS \leq PRT$ Dado $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ y C , construya $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}$, $a_i = m_i$, para $i = 1..n$, $a_{n+1} = 2(\sum_{i=1}^n m_i) - C$ y $a_{n+2} = (\sum_{i=1}^n m_i) + C$

RedC $SS \leq PRT$ Dado $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ y C , construya $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}\}$,

$$a_i = m_i, \text{ para } i = 1..n, \\ a_{n+1} = (\sum_{i=1}^n m_i) - C \text{ y } a_{n+2} = C$$

Escojo _____

Justifique porqué descarta cada una de las otras dos:

Descarto Red A porque:
Se descarta por la dirección de la reducción

Descarto Red C porque:

2) [10 pts.] Muestre que entiende la reducción, es decir:

a' [5 pts.] Para la instancia positiva del problema del lado izquierdo muestre claramente la instancia que le corresponde según la reducción, y verifique que ésta sea una instancia positiva para el problema del lado derecho.

b' [5 pts.] Para la instancia negativa del problema del lado izquierdo muestre claramente la instancia que le corresponde según la reducción, y verifique que ésta sea una instancia negativa para el problema del lado derecho.

RED B

$\{ \overset{a_{n+1}}{\text{Suma}}, \overset{a_{n+2}}{2\text{Suma} - C} \}$

\downarrow

$\{ \text{Suma} - C, C, 2\text{Suma} - C, \text{Suma} + C \}$

$2\text{Suma}, 2\text{Suma}$

\rightarrow se cumple instancias positivas

3) [30 pts.] Demuestre que la reducción es correcta, es decir:

a' [15 pts.] Demuestre que las instancias positivas del problema del lado izquierdo se reducen siempre en instancias positivas del problema del lado derecho.

$$\{100, 80\} \rightarrow \text{Par}$$

b' [15 pts.] Demuestre que las instancias negativas del problema del lado izquierdo se reducen siempre en instancias negativas del problema del lado derecho.

4) [10 pts.] Demuestre que la reducción se hace en tiempo polinomial.

$$a) M \rightarrow A \quad O(n)$$

$$b) \text{calcular } a_{n-1} \quad O(n)$$

$$c) \text{calcular } a_{n-2} \quad O(n)$$

$$O(n)$$