Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Universidad del Valle

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería de sistemas y computación

Septiembre 2017

Recurrencias

Método de iteración

Método maestro*

Método de sustitución

Análisis de algoritmos recursivos

Recurrencias

Método de iteración

Expandir la recurrencia y expresarla como una suma de términos que dependen de n y de las condiciones iniciales

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$, $T(1) = \Theta(1)$ y n par

Expandir la recurrencia 2 veces

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$ $\rightarrow$ $T\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4} + 3T\left(\frac{n}{4^2}\right)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16\ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ + 3^3T(n/4^3)$

$T\left(\frac{n}{4^2}\right) = \frac{n}{4^2} + 3T\left(\frac{n}{4^3}\right)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ + 3^3\underbrace{T(n/4^3)}_{1}$

$T(1) = \Theta(1)$

$T(1) = c$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2\ + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a T(1)

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$ $i = 1$

$i = 2$ $n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$ 4^2

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16\; + 3T(n/64)\,))$

$i = 3$ $n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2\; + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a T(1), esto es, cuando $(n/4^i)=1$

$\log_4(n) = i$ $4^i = n$ $\frac{n}{4^i} = 1$

Recurrencias

$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$ $r \neq 1$

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16 + 3T(n/64)\,))$

$a = 1$

$r = \frac{3}{4}$

$n + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2 + 3^3T(n/4^3)$

$\underbrace{n}_{3^0/4^0} + 3{*}n/4 + 3^2{*}n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log_4 n}T(1)$

$n = \log_4(n) - 1$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a T(1), esto es, cuando $(n/4^i)=1$

$\frac{3^i}{4^i} = \left(\frac{3}{4}\right)^i$

$\sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \frac{3^i}{4^i} + 3^{\log_4(n)}\Theta(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log_4 n}T(1)$

Después de iterar, se debe tratar de expresar
como una sumatoria con forma cerrada conocida

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4\rfloor)$

$n + 3 (n/4\rfloor + 3T(n/16\rfloor))$

$n + 3 (n/4\rfloor + 3(n/16\rfloor + 3T(n/64\rfloor)))$

$n + 3*n/4\rfloor + 3^2*n/4^2\rfloor + 3^3(n/4^3\rfloor) + \ldots + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$

$\leq n + 3n/4 + 3^2 n/4^2 + 3^3 n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16 + 3T(n/64)\,))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 + 3^3(n/4^3) + \ldots + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$

$\leq\ n + 3n/4 + 3^2 n/4^2 + 3^3 n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i n \right) + 3^{\log_4 n}\,\Theta(1)$$

$$= n\left(\frac{(3/4)^{(\log_4 n)} - 1}{(3/4) - 1}\right) + n^{\log_4 3} = n*4\left(1 - (3/4)^{(\log_4 n)}\right) + \Theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$= O(n)$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

T(n) = 2T(n/2) + 1, T(1)= Θ(1)

$i=1$

$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right)+1\right)+1$

$i=2$

$T(n) = 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right)+1\right)+1\right)+1$

$i=3$

$T(n) = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right)+2^2+2^1+2^0$

$$T(n) = 2^i T\left(\underbrace{\frac{n}{2^i}}\right) + 2^{i-1} + 2^{i-2} \cdots + 2^0$$

$$2^i = n$$

$$T(1) \longrightarrow \frac{n}{2^i} = 1 \qquad i = \log_2(n)$$

$$T(n) = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\log_2(n)-1}} + 2^{\log_2(n)} \overbrace{\Theta(1)}^{T(1)}$$

$$T(n) = \left(\sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i\right) + 2^{\log_2(n)} \Theta(1)$$

$$T(n) = \frac{2^{\log_2(n)} - 1}{1} + n \underbrace{\Theta(1)}_{c}$$

$$T(n) = n - 1 + cn = \Theta(n)$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

T(n) = 2T(n/2) + 1, T(1)= Θ(1)

T(n) = 2T(n/2) + n, T(1)= Θ(1) $i=1$

$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \qquad i=2$$

$$T(n) = 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \qquad i=3$$

$$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \underbrace{n + n + n}_{3}$$

$$T(1) = T\left(\frac{n}{2^i}\right)$$

$$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in$$

$$1 = \frac{n}{2^i}$$

$$\underbrace{+n+n+n}_{i \text{ veces}}$$

$$i = \log_2(n)$$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} T(1) + \log_2(n)\, n$$

$$O(n \log_2(n))$$

$$T(n) = cn + n\log_2(n)$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1$, $T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1$, $T(1)= \Theta(1)$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1$, $T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1)= \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1$, $T(1)= \Theta(1)$

Demuestre que $T(n) = T(n/2) + n$, es $\Omega(nlogn)$

Ejercicio Socrative

$T(n) = 5T(n/4) + n, T(1) = O(n)$ $i=1$

$T(n) = 5(5T(n/16) + n/4) + n$ $i=2$

$T(n) = 5(5(5T(n/64)+n/16) + n/4) + n$ $i=3$

$T(n) = 125T(n/64) + 25n/16 + 5n/4 + n$

$$T(n) = 5^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \frac{5^2 n}{4^2} + \frac{5^1 n}{4^1} + \frac{5^0 n}{4^0}$$

$$5^i T\left(\frac{n}{4^i}\right) \rightarrow T(1) \qquad \frac{n}{4^i} = 1 \quad n = 4^i \quad i = \log_4(n)$$

$$T(n) = 5^{\log_4(n)} T(1) + 5^{\log_4(n)-1} \frac{n}{4^{\log_4(n)-1}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4(n)-2} n + \dots + n$$

$$T(n) = n^{\log_4(5)} \, c\, n + \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4(n)-1} n + \dots + n \qquad O(n^3)$$

Recurrencias

Iteración con árboles de recursión

$T(1) = 1$

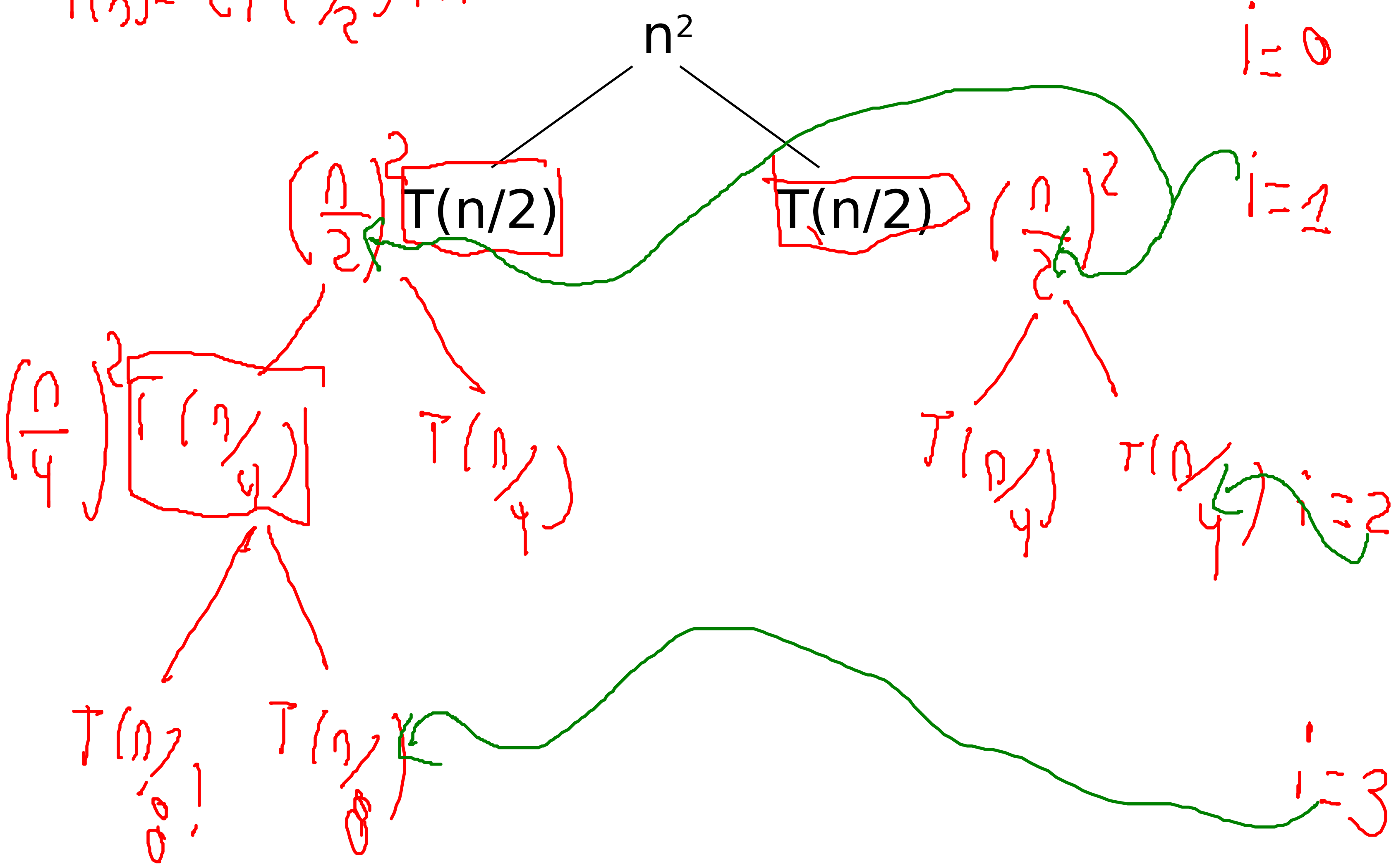
$T(n) = 2T(n/2) + n^2$

n^2 $\quad i = 0$

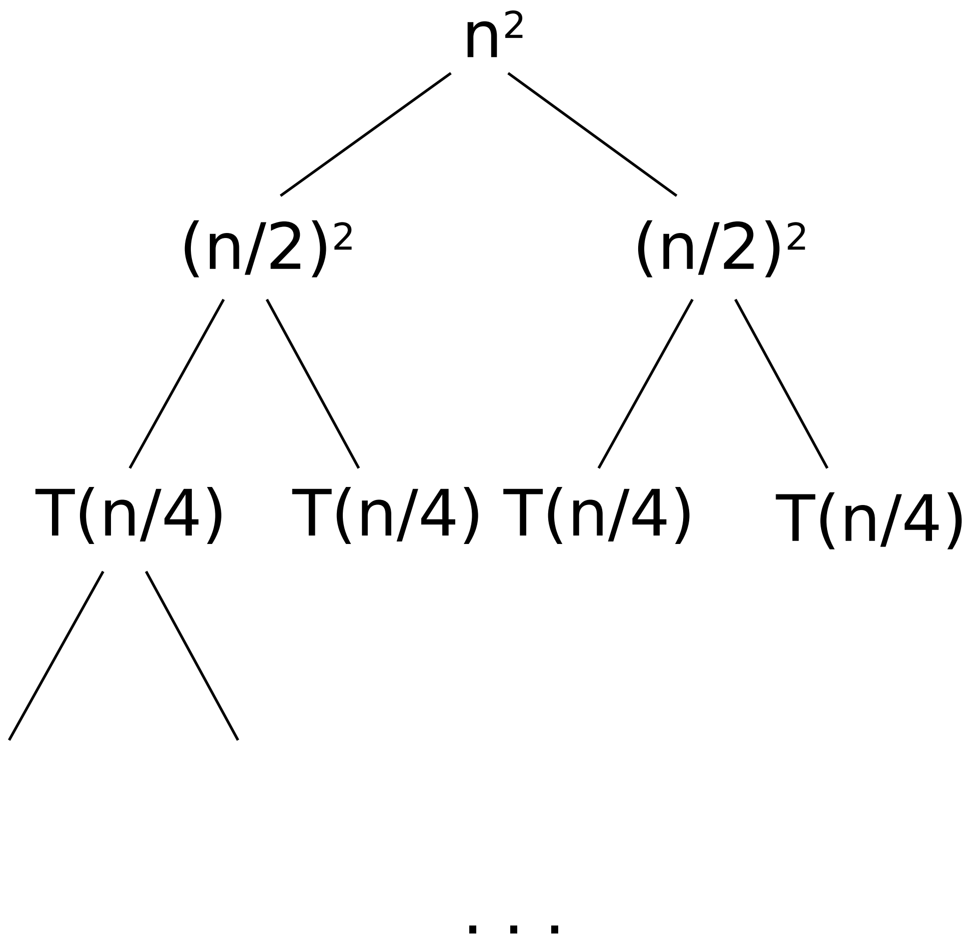
$T(n/2)$ $\quad T(n/2)$ $\quad i = 1$

Recurrencias

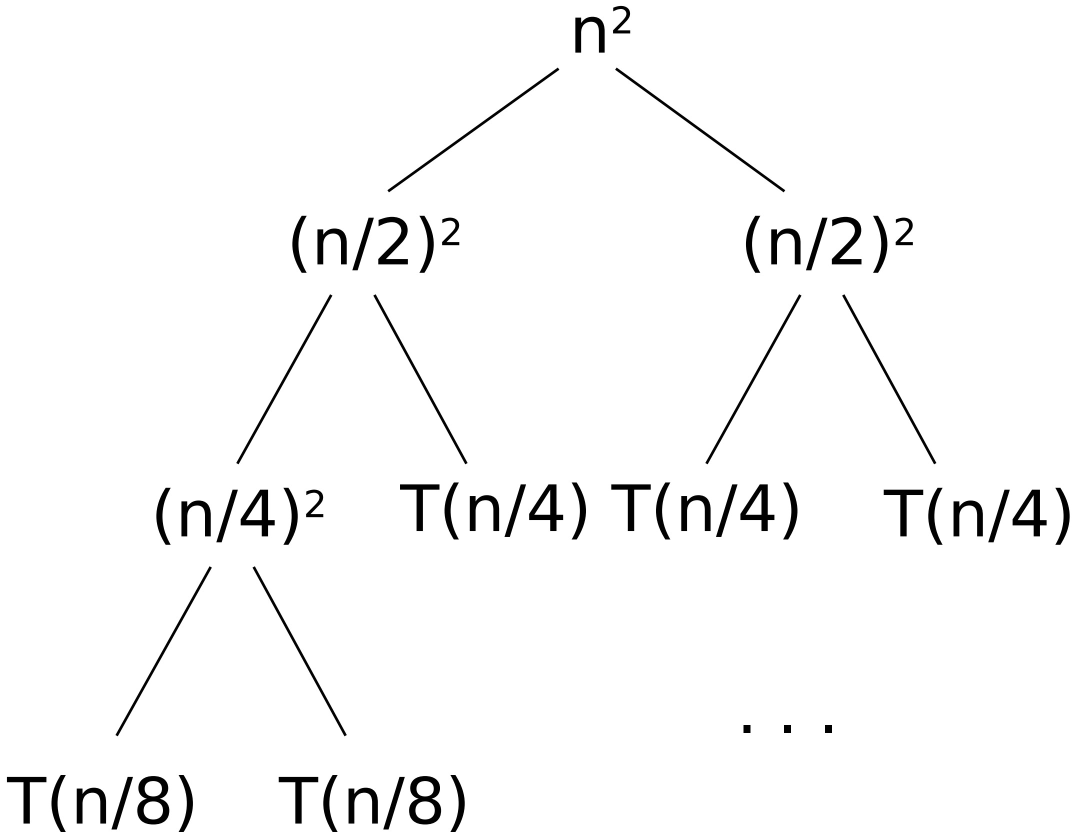
$T(n) = 2T(n/2) + n^2$



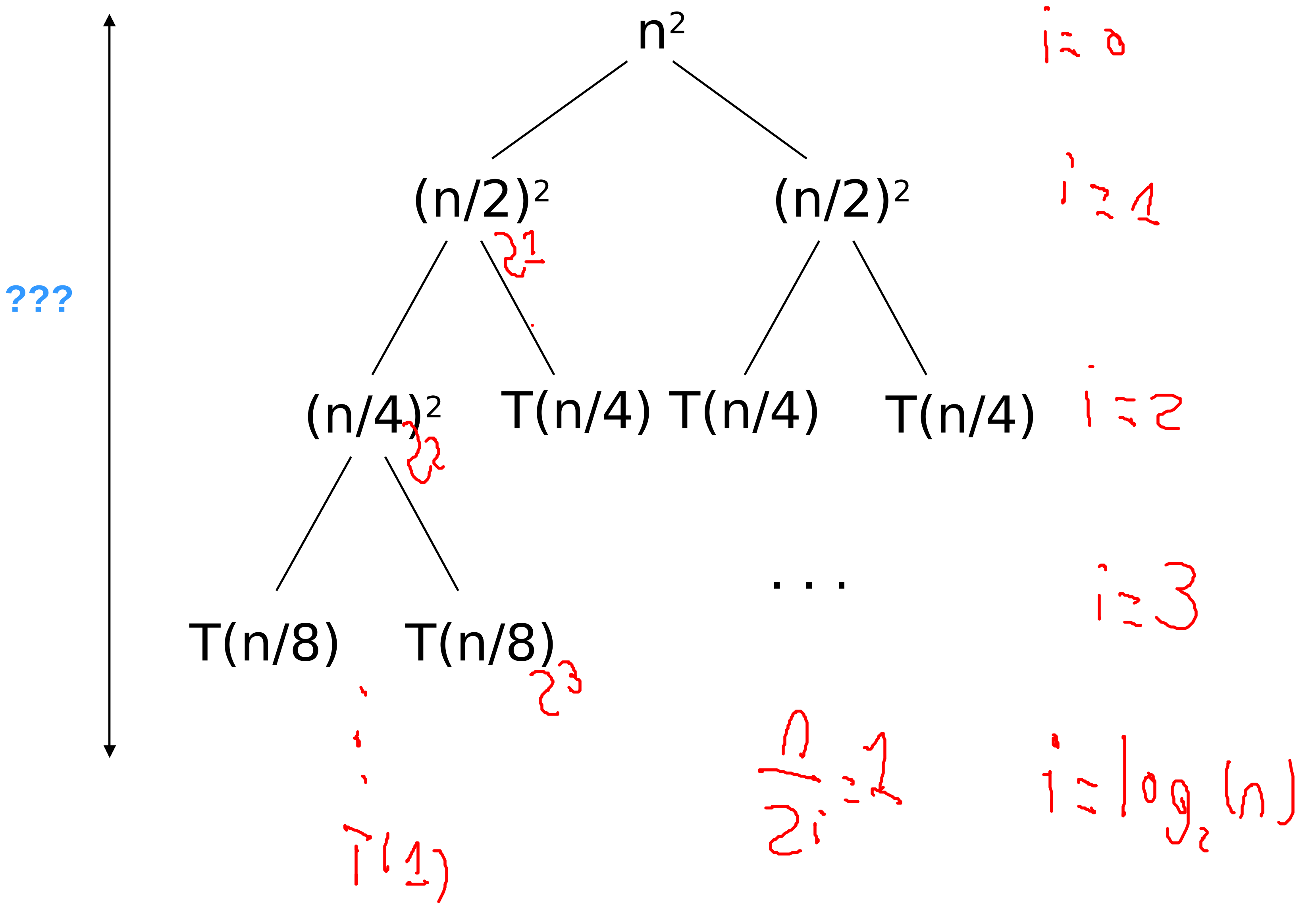
Recurrencias



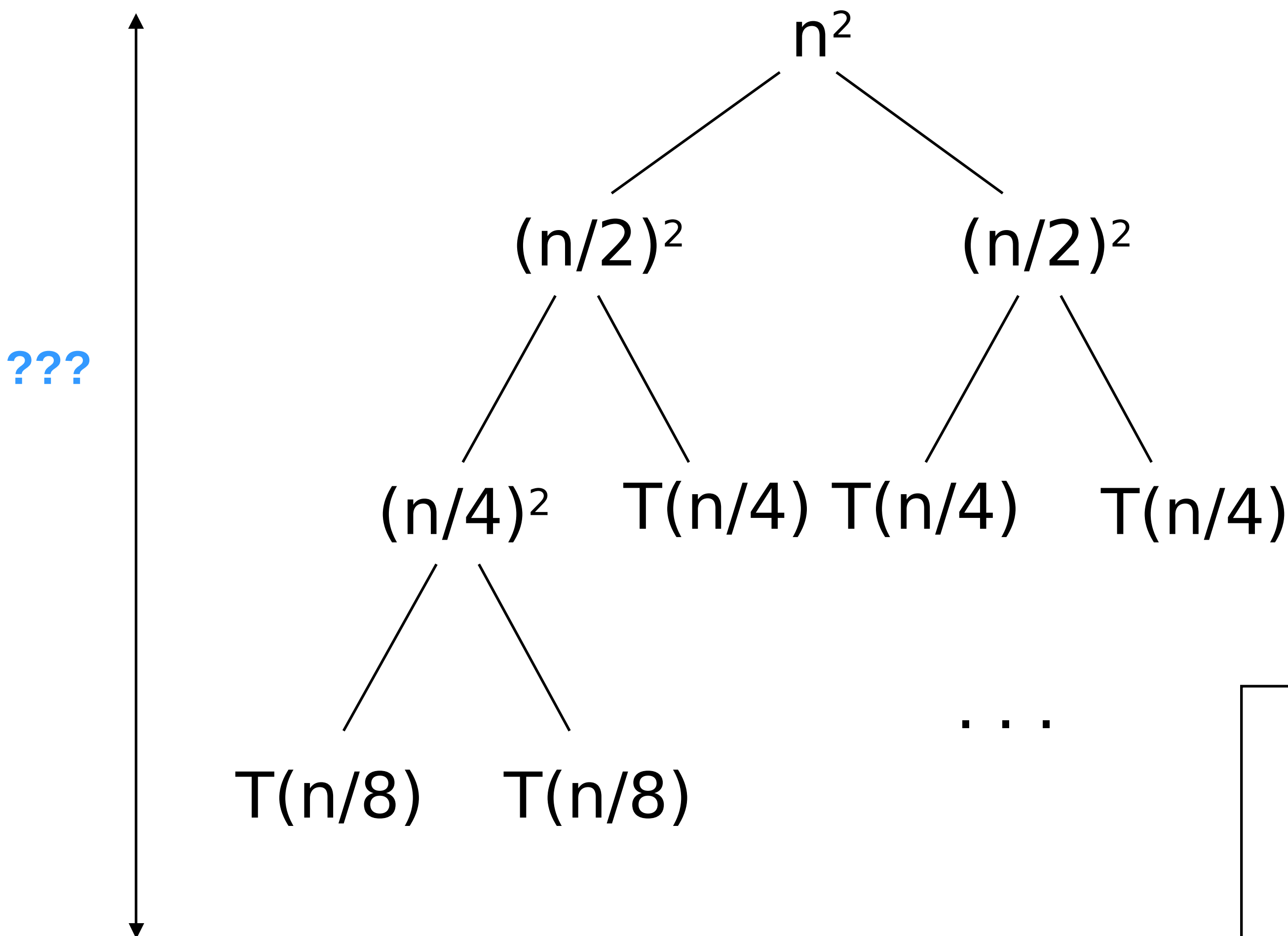
Recurrencias



Recurrencias



Recurrencias



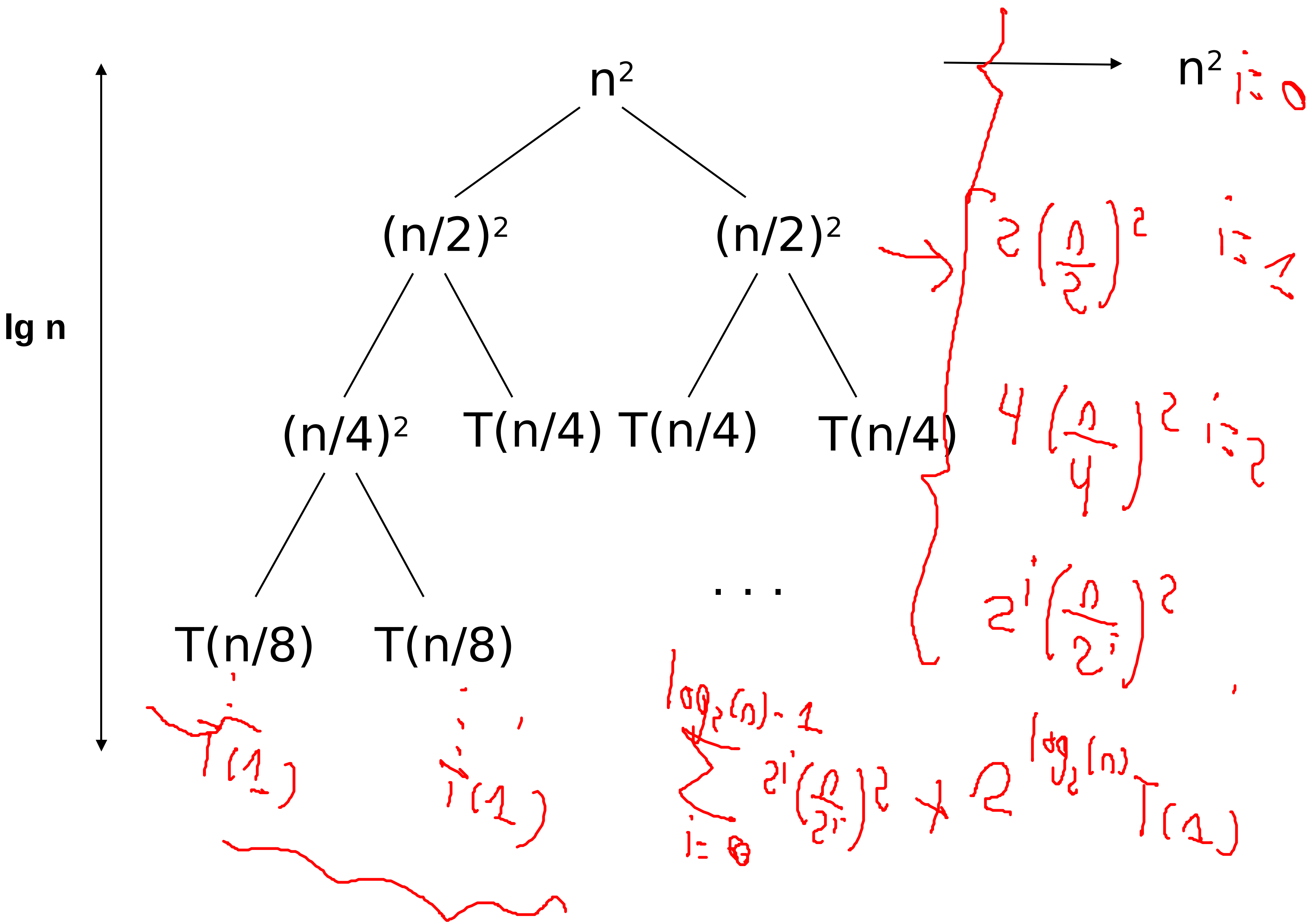
$$\left(\frac{n}{2^i}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{n}{2^i}\right)=1$$

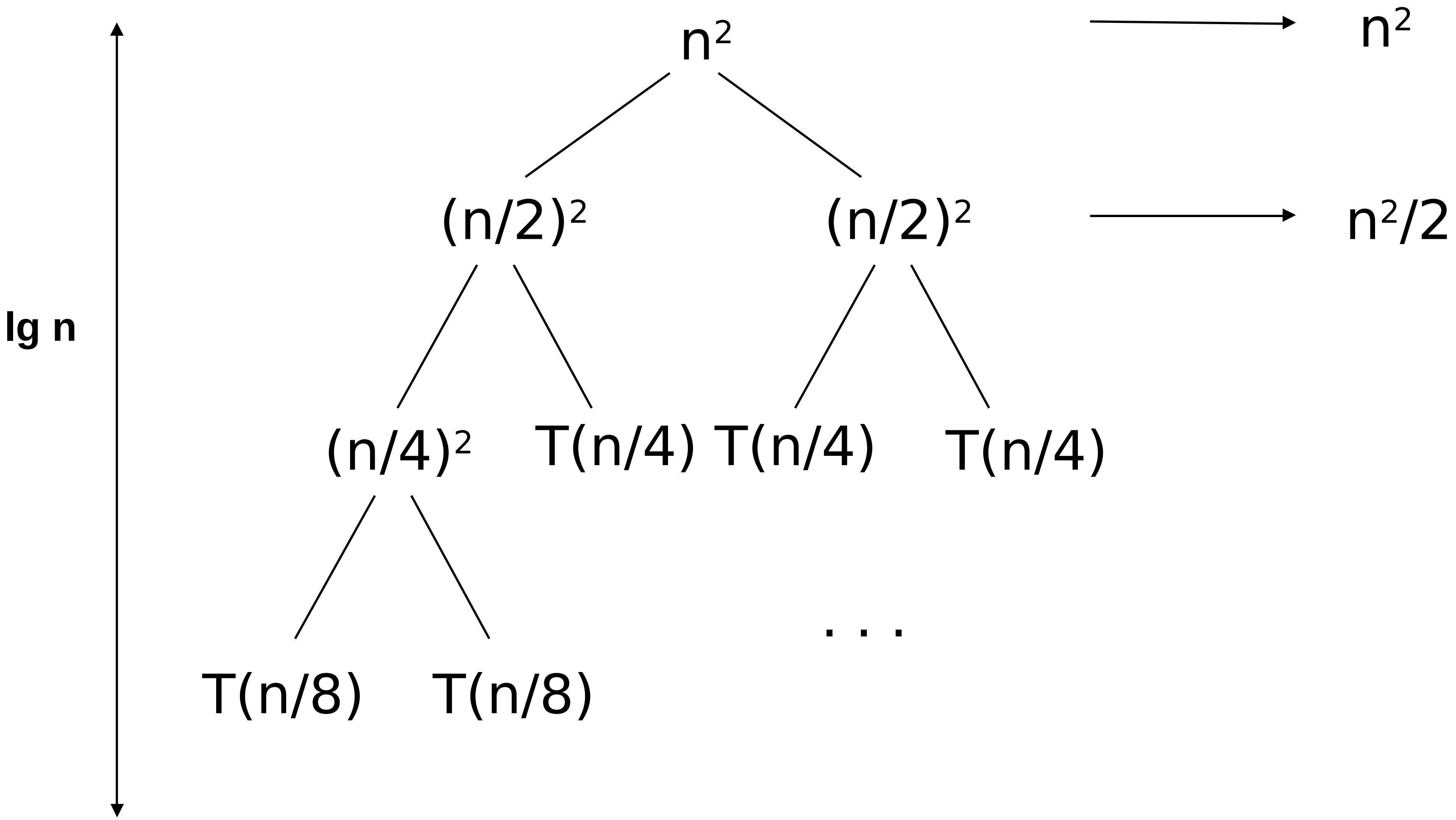
$$n=2^i$$

$$\log n=i$$

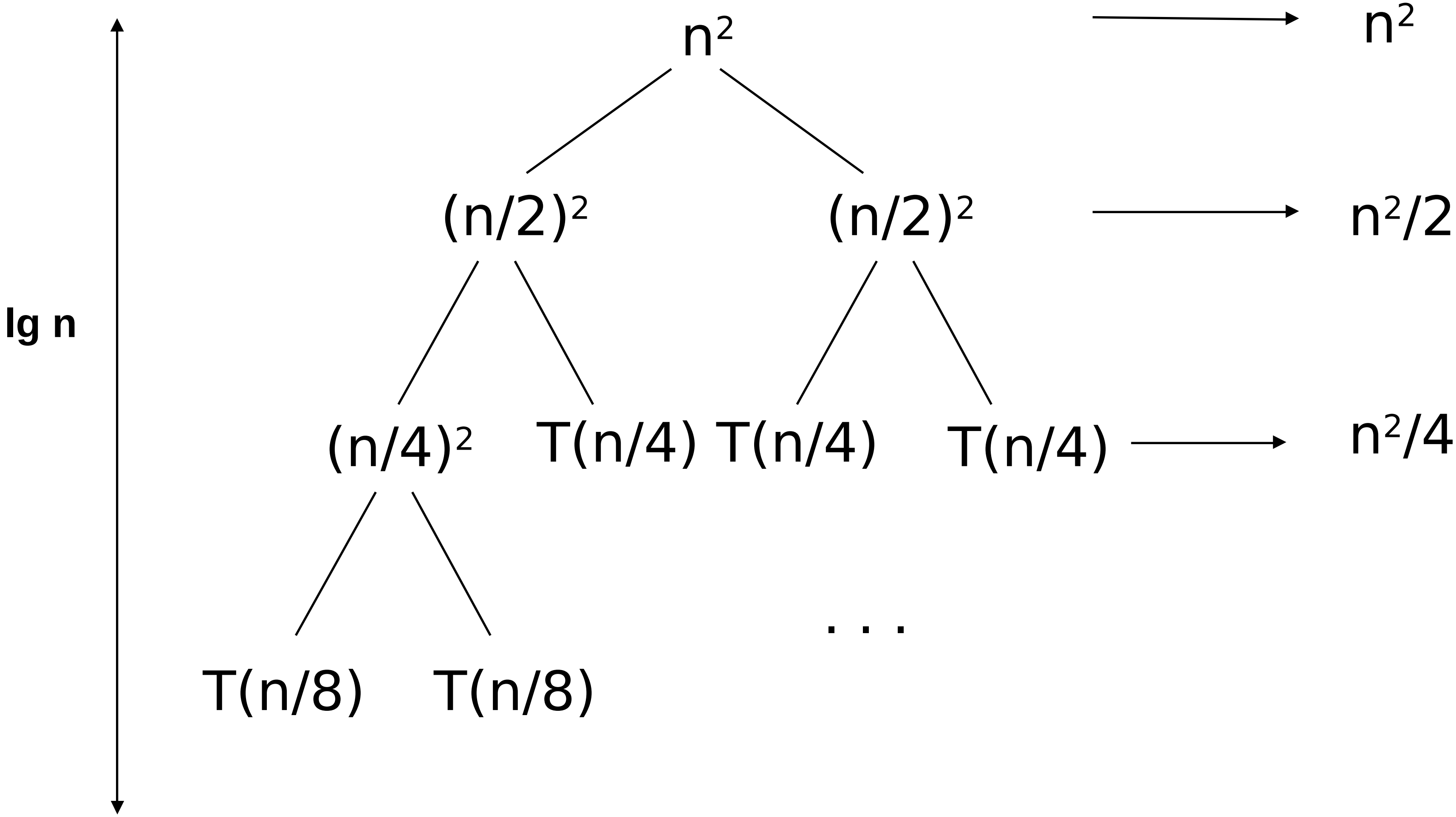
Recurrencias



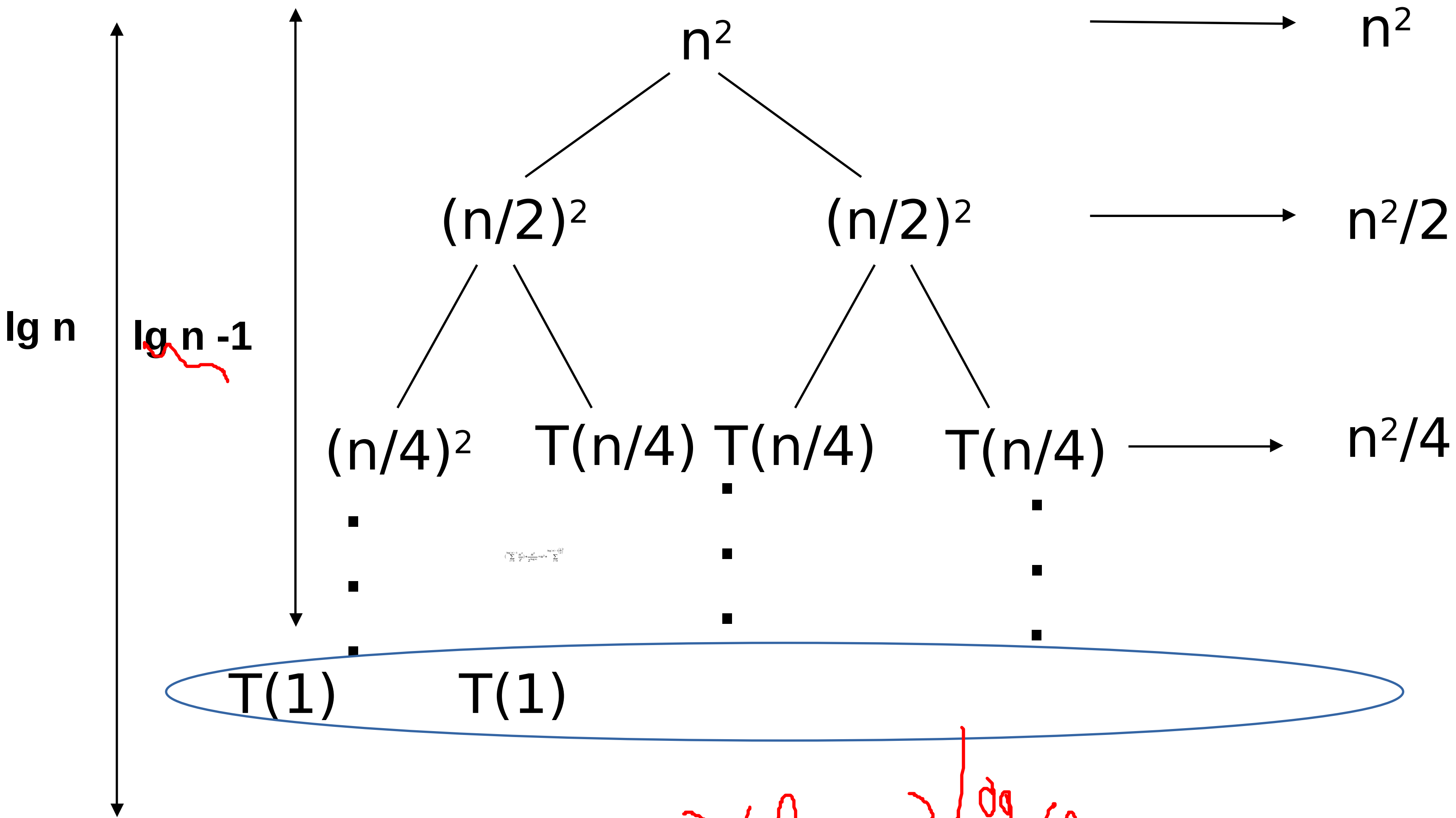
Recurrencias



Recurrencias



Recurrencias



$$\text{Total}= \left(\sum_{i=0}^{\log(n)-1} \frac{n^2}{2^i}\right) + \frac{n}{2^{\log(n)}} T(1)$$

n

$2^{\log_2(n)}$

Recurrencias

$$Total=\left(\sum_{i=0}^{\log(n)-1}\frac{n^2}{2^i}\right)+\frac{n^2}{2^{\log(n)}}T(1)$$

n

$$Total=n^2*\frac{(1/2)^{(\lg n)}-1}{1/2-1}=\Theta(n^2)$$

$(n^2 -$

$$\frac{n^{\log_2(0.5)}-1}{1/2-1}$$

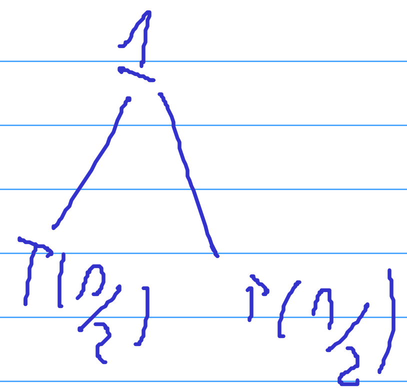
Recurrencias

Resuelva construyendo el árbol

$$\boxed{T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)}$$

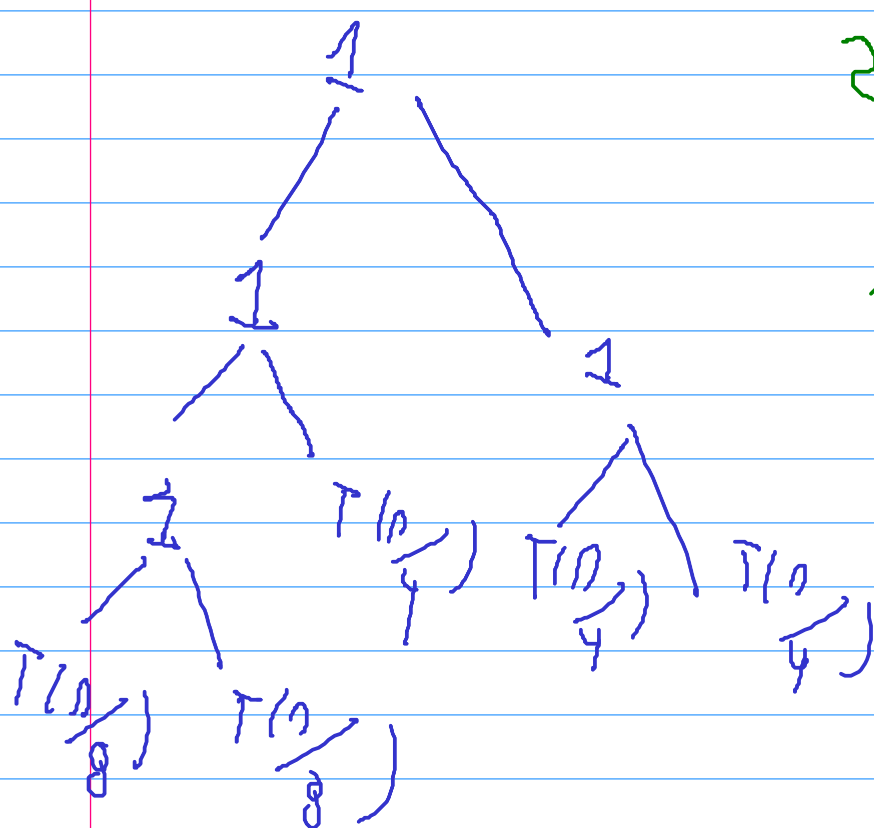
$$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1) = \Theta(1)$$

$T(n) = 2T(n/2) + 1$ $\qquad$ $T(2) = \theta(1)$



$i = 0$

$i = 1$



$2^0(1)$	1	$i=0$
$2^1(1)$	(2)1	$i=1$
$2^2(1)$	(4)1	$i=2$
$2^3(1)$	(8)1	$i=3$

$T(n/2^i)$

$2 = \frac{n}{2^i}$ $\qquad$ $2 \times 2^i = n$

$2^{i+1} = n$

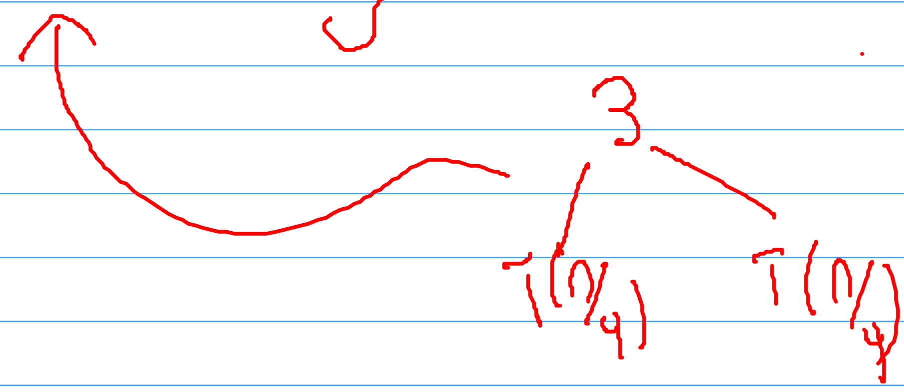
$i + 1 = \log_2(n)$

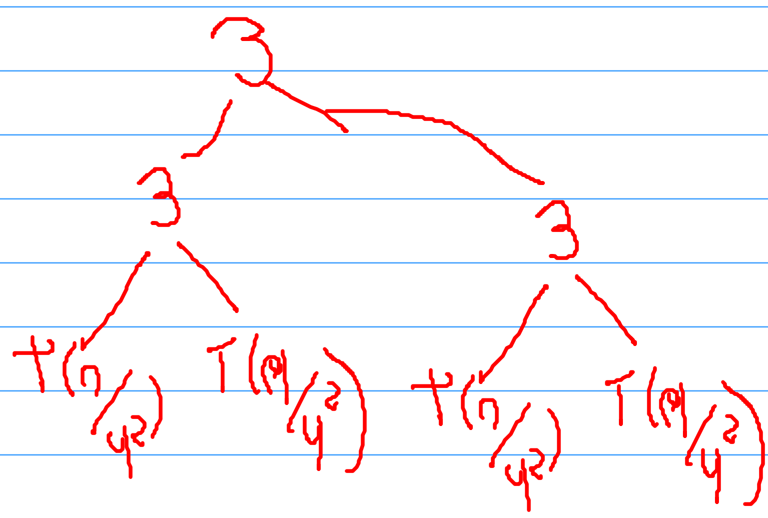
$i = \log_2(n) - 1$

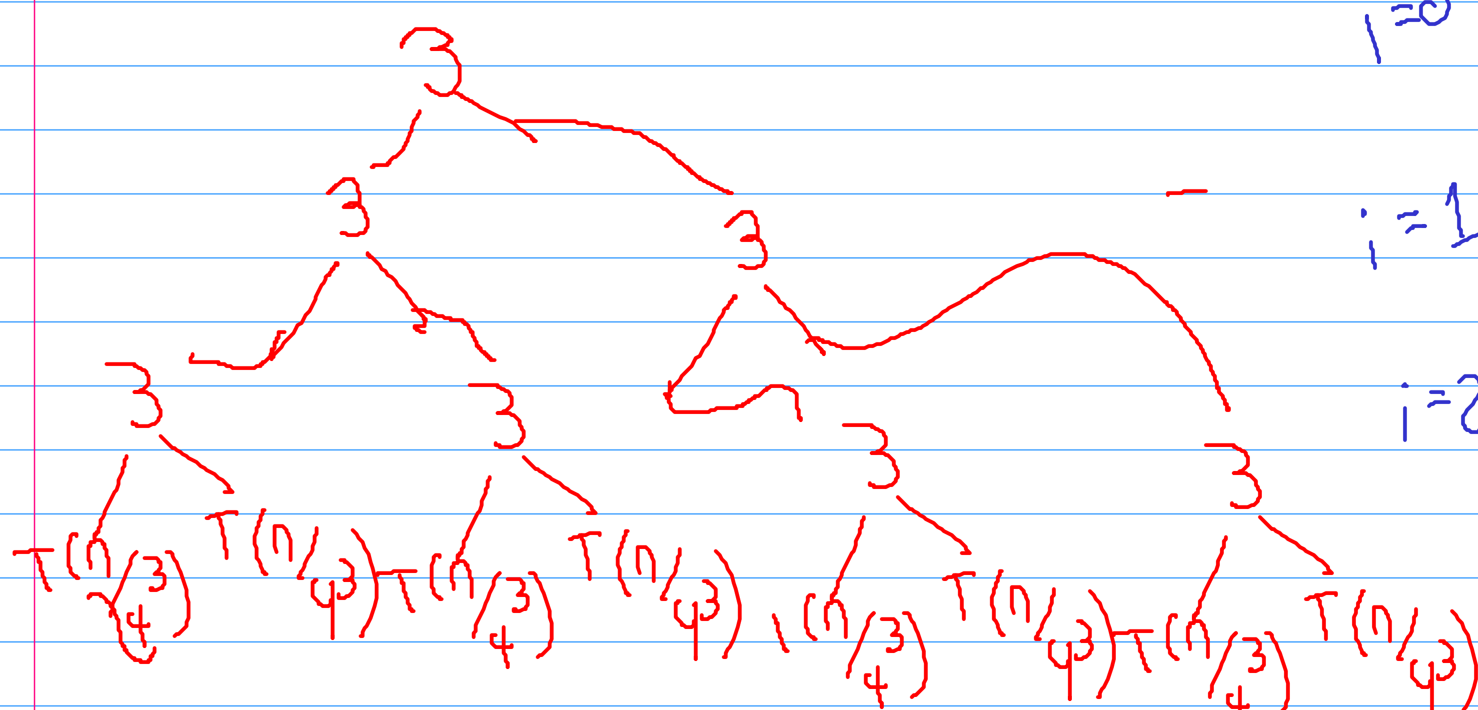
$$2^{\log_2(n)-1} T(1) + \sum_{i=0}^{\log_2(n)-2} 2^i$$

$$\frac{2^{\log_2(n)}}{2}\theta(1) + \frac{2^{\log_2(n)-1} - 1}{2-1} = \frac{cn}{2} + \frac{n}{2} - 1 \Rightarrow \Theta(n)$$

T(n) = 2T(n/4) + 3 con T(1) = O(nlog(n)).







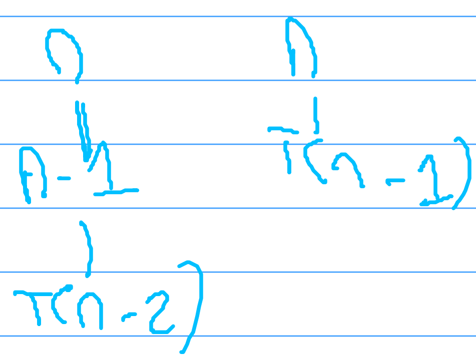
$i=0 \quad 3$

$i=1 \quad (2)3$

$i=2 \quad (2)^2 3$

$i=3$

$\frac{n}{4^i}=1 \qquad n=4^i \qquad \log_4(n)=h$



$T(n) = T(n-1) + n$

Recurrencias

Resuelva la recurrencia $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$

Indique una cota superior y una inferior

Recurrencias

Método maestro

Permite resolver recurrencias de la forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \text{ donde } a \geq 1,\ b > 1$$

Recurrencias

Dado T(n) = aT(n/b) + f(n), donde a≥1, b>1, se puede acotar asintóticamente como sigue:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$

2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$

Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon > 0$

3. $T(n) = \Theta(f(n))$

Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ y si af(n/b)≤cf(n)

para algun c<1

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$9T(n/b) + F(n)$ $\quad a=9 \quad b=3$

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{vs} \quad f(n) = n$$

Es $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$?

Es $n = O\left(n^{2-\varepsilon}\right)$?

$n = O(n)$ ✓

$T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 9}\right)$

$T(n) = \Theta(n^2)$

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$$n^{\log_3 9} = n^2 \qquad \textbf{vs} \qquad f(n) = n$$

Es $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$?

Es $n = O\left(n^{2-\varepsilon}\right)$?

Si $\varepsilon = 1$ se cumple que $n = O(n)$, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta\left(n^2\right)$$

Recurrencias

T(n) = T(2n/3) + 1

$a = 1 \quad b = \frac{3}{2}$

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \textbf{vs} \quad f(n) = 1$$

$f(n) = 1$

Es $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$?

$n^{\log_{\frac{3}{2}} 1 \pm \varepsilon}$

Es $1 = O\left(n^{0-\varepsilon}\right)$?

No existe $\varepsilon > 0$

$\boxed{n^0}$

Recurrencias

T(n) = T(2n/3) + 1

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \textbf{vs} \quad f(n) = 1$$

Es $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$?

Es $1 = \Theta(1)$?

Si, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta(1 * \lg n) = \Theta(\lg n)$$

Recurrencias

T(n) =3 T(n/4) + nlgn

a=3 b=4 F(n)=nlog(n)

$$n^{\log_4 3} = n^{0.793} \quad \textbf{vs} \quad f(n) = n \lg n$$

1) Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$? nlg(n)=O(n^{0.8-1}) ✗

2) Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$? nlg(n)=Θ(n^{0.793}) ✗

3) Es $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$? nlg(n)=Ω(n^{0.793+ε}) ✓

Si, y además, af(n/b)≤cf(n)

nlg(n)=Ω(n)

3(n/4)lg(n/4) ≤ cnlgn

3(n/4)lgn - 3(n/4)*2 ≤ cnlgn

(3/4)nlgn ≤ cnlgn → c=3/4 y se concluye que $T(n) = \Theta(n \lg n)$

Recurrencias

$T(n) = 2T(n/2) + n\lg n$

Muestre que no se puede resolver por el método maestro

Recurrencias

Resuelva

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 4

Gracias

Próximo tema:

Divide y vencerás