



# Primer examen parcial - Matemáticas discretas II

## Duración 2 horas

Carlos Andres Delgado S, Msc  
`carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co`

### Reglas

22 de Octubre de 2021

- Debe entregar un archivo en formato PDF con la solución de su examen adjunto al enlace de entrega, el cual **sólo acepta un archivo en este formato**.
- Usted puede tomar fotos a los procedimientos realizados a mano o bien usar el editor de ecuaciones y así estructurar su documento.
- Integre estas capturas en el archivo de entrega, **no se aceptan bajo ninguna circunstancia enlaces externos**.
- Las capturas de los puntos deben estar en buena calidad, **si alguna no se entiende no se le valdrá**.
- Sea ordenado en las capturas de sus puntos, **no se valdrán puntos desorganizados y que no sea fácil entender su respuesta**.
- Debe explicar el procedimiento realizado en cada uno de los puntos, no se considera válido únicamente escribir la respuesta. **Es decir, toda respuesta debe ir argumentada y sustentada** de acuerdo a los conceptos vistos en el curso.
- El examen puede ser realizado en parejas, hacer **un sólo envío por pareja**. Si los dos envían, calificaré únicamente el primer envío que reciba.
- El examen debe ser entregado en el formulario de google especificado por el docente vía correo electrónico. **No se aceptarán entregas por otro medio**.
- En el formulario de google debe colocar los nombres y códigos de los estudiantes. **No se aceptarán reclamos por omisión de esta información**.
- El examen tiene una duración de 2 horas, es decir que va hasta las 10:00:00am, de allí se dan 30 minutos de gracia para entregarlo, es decir se recibe sin penalización hasta las 10:30:00am.
- Usted puede entregar a partir de las 10:30:01am pero cada 5 minutos de retraso o fracción le descontaré 0.3 en la nota. Por ejemplo, si entrega a partir de las 10:35:01 la penalización es 0.6. **Se debe entender que es un tiempo extra para la organización de la entrega**.

# Recomendaciones

- Si tiene una cámara que toma fotos en alta calidad, se recomienda trabajar en 720p para que el archivo no resulte de gran tamaño
- Puede utilizar aplicaciones como CamScanner, las cuales permiten funciones premium con su correo institucional. Estas aplicaciones optimizan el tamaño y calidad de las imágenes.
- En caso de trabajar en parejas puede usar una herramienta colaborativa como Google Docs para integrar su trabajo, estas permiten integrar fácilmente su trabajo y exportar directamente en PDF.
- No se recomienda que comparta sus fotos en herramientas de mensajería, ya que estas le reducen la calidad en gran medida
- En caso de que su archivo PDF es grande, puede usar la impresora PDF como estrategia para reducir su tamaño.
- Tenga en cuenta que los 30 minutos que doy son para organizar su entrega teniendo en cuenta los posibles dificultades de conexión. Esta regla depende de su situación en particular y usted debe ser consciente de usar correctamente este tiempo.

## 1. Enunciado

**Importante:** Recuerde que es imprescindible mostrar el procedimiento realizado, sólo mostrar respuestas sin su respectivo soporte no será tomado en cuenta para la calificación.

1. **[25 puntos]** Resuelva la R.R  $T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3) + 12 - 2^n$ , con  $T(0) = 0$ ,  $T(1) = 10$  y  $T(2) = 22$ . Indique
  - a) (5 puntos) Ecuación característica(EC) y solución general homogénea
  - b) (10 puntos) Forma de la solución particular, con sus constantes calculadas
  - c) (10 puntos) Calculo de la solución total.

Muestre claramente el proceso realizado. Si usa herramientas para resolver el sistema de ecuaciones o encontrar las raíces de la EC, coloque capturas de pantalla de los resultados como evidencia del proceso de solución.

2. **[25 puntos]** Resuelva la siguiente ecuación mediante método de cambio de variable  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) - 4T(\frac{n}{4}) + n + 1$ .
  - a) (5 puntos) Ecuación característica(EC) y solución general homogénea en términos de  $k$
  - b) (10 puntos) Forma de la solución particular, con sus constantes calculadas en términos de  $k$
  - c) (10 puntos) Calculo de la solución total en términos de  $n$
3. **[25 puntos]** Se tiene un conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y el conjunto  $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

- a) (5 puntos) ¿Cuántas funciones existen desde A hasta B?
- b) (5 puntos) ¿Cuántas funciones existen desde B hasta A?
- c) (15 puntos) ¿Cuántas funciones inyectivas existen desde A hasta B?

Explique claramente la respuesta.

4. [25 puntos] La universidad asigna los códigos de los cursos con un código de 5 dígitos seguido de una letra. Sin embargo, se tienen algunas restricciones: el segundo dígito debe ser 0 o 1, el tercer dígito sólo puede ser un número par y la letra puede ser M, C o Z. ¿Cuántos cursos se pueden codificar con este sistema? Sustente claramente su respuesta e indique que reglas aplica en el conteo.

¡Éxitos!

$$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3) + 12 - 2^n$$

a)  $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$  E.C  $r = 2, 2, 1$

$$T^h(n) = A1^n + B2^n + Cn2^n$$

b)  $Dn + En^2 2^n$

$$\begin{aligned} c) \quad Dn + En^2 2^n &= 5D(n-1) + \frac{5E(n-1)^2 2^n}{2} \\ &\quad - 8D(n-2) - \frac{8E(n-2)^2 2^n}{4} \\ &\quad + 4D(n-3) + \frac{4E(n-3)^2 2^n}{8} + 12 - 2^n \end{aligned}$$

$$n^2 2^n \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{5E}{2} - \frac{8E}{4} + \frac{4E}{8} \quad E = E \checkmark \end{array} \right.$$

$$n 2^n \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{5(-2)E}{2} - \frac{8(-4)E}{4} + \frac{4(-6)E}{8} \quad 0 = 0 \checkmark \end{array} \right.$$

$$2^n \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{5}{2}E - 8E + 4 \times \frac{9}{8}E - 1 \quad 0 = -E - 1 \quad \boxed{E = -1} \end{array} \right.$$

$$n \left\{ \begin{array}{l} D = 5D - 8D + 4D \quad D = D \checkmark \end{array} \right.$$

$$cte \left\{ \begin{array}{l} 0 = -5D + 16D - 12D + 12 \quad 0 = -D + 12 \quad \boxed{D = 12} \end{array} \right.$$

Total

$$T(n) = A + B2^n + Cn2^n + 12n - n^22^n$$

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 10$$

$$T(2) = 22$$

$$0 = A + B$$

$$10 = A + 2B + 2C + 12 - 2 \quad 0 = A + 2B + 2C$$

$$22 = A + 4B + 8C + 24 - 16 \quad 14 = A + 4B + 8C$$

$$A = 14 \quad B = -14 \quad C = 7$$

$$T(n) = 14 - 14 \cdot 2^n + 7n \cdot 2^n + 12n - n^2 \cdot 2^n$$

```
1 def T(n):
2     if n==0:
3         return 0
4     elif n==1:
5         return 10
6     elif n==2:
7         return 22
8     else:
9         return 5*T(n-1)-8*T(n-2)+4*T(n-3)+12-2**n

1 def F(n):
2     return 14-14*(2**n)+7*n*(2**n)+12*n-(n**2)*(2**n)

[8] 1 for i in range(0,10):
      2     print("n ",i," T ",T(i)," F ",F(i))

n 0 T 0 F 0
n 1 T 10 F 10
n 2 T 22 F 22
n 3 T 34 F 34
n 4 T 30 F 30
n 5 T -54 F -54
n 6 T -426 F -426
n 7 T -1694 F -1694
n 8 T -5522 F -5522
n 9 T -16262 F -16262
```

$$2) T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) - 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n + 1$$

$$n = 2^k$$

$$T_k = 4T_{k-1} - 4T_{k-2} + 2^k + 1$$

$$a) x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = 2, 2$$

$$b) T_k^p = Ck^2 2^k + D$$

$$T_k = A2^k + Bk2^k$$

c)

$$Ck^2 2^k + D = 4C \frac{(k-1)^2}{2} 2^k + 4D - 4C \frac{(k-2)^2}{4} 2^k - 4D + 2^k + 1$$

$$k^2 2^k \quad C = \frac{4C}{2} - \frac{4C}{4} \quad C = C \checkmark$$

$$k 2^k \quad 0 = -\frac{8}{2}C + \frac{16}{4}C \quad 0 = 0 \checkmark$$

$$2^k \quad 0 = \frac{4}{2}C - \frac{16}{4}C + 1 \quad 0 = -2C + 1 \quad C = \frac{1}{2}$$

$$k + 0 \quad D = 4D - 4D + 1 \quad D = 1$$

$$T_k = A2^k + Bk2^k + \frac{1}{2}k^2 2^k + 1 \quad k = \log_2(n)$$

$$T(n) = An + B \log_2(n) \times n + \frac{1}{2}(\log_2(n))^2 n + 1 \quad \text{Hasta aquí}$$

Prueba

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 20 \leftarrow \text{Comprobación}$$

$$1 = A + 1 \quad A = 0$$

$$20 = 2A + 2B + 1 + 1$$

$$2B = -2$$

$$B = -1$$

$$T(n) = 0n - \log_2(n) \times n + \frac{1}{2}(\log_2(n))^2 \times n + 1$$

```

1 import math
2 def T2(n):
3     if n==1:
4         return 11
5     elif n==2:
6         return 20
7     else:
8         return 4*T2(n/2)-4*T2(n/4)+n+1
9
10 def F2(n):
11     return 10*n-math.log2(n)*n+(1/2)*math.pow(math.log2(n),2)*n+1
12
13 for i in range(0,10):
14     print("n ",4**i," T ",T2(4**i)," F ",F2(4**i))

```

n	1	T	11	F	11.0
n	4	T	41	F	41.0
n	16	T	225.0	F	225.0
n	64	T	1409.0	F	1409.0
n	256	T	8705.0	F	8705.0
n	1024	T	51201.0	F	51201.0
n	4096	T	286721.0	F	286721.0
n	16384	T	1540097.0	F	1540097.0
n	65536	T	7995393.0	F	7995393.0
n	262144	T	40370177.0	F	40370177.0

3)

