Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

* Inducción matemática
* Ejemplos

Técnicas de demostración

Inducción matemática

- Muchos teoremas establecen que P(n) es verdad para todos los enteros positivos n, donde P(n) es una expresión matemática

$P(n) = 2n$ es siempre un numero par

Técnicas de demostración

Inducción matemática

Una prueba por inducción matemática consiste de dos pasos

Trivial

- **Paso base**. Se muestra que la proposición **P(1)** se cumple
- **Paso inductivo**. Se supone que P(n) es cierto y se intenta demostrar que P(n+1) también. **P(n)→P(n+1)**

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\mathbf{1+2+3+\ldots+n}$ es $\mathbf{n\cdot(n+1)/2}$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros $\boxed{1}+2+3+\ldots+n$ es $n\cdot(n+1)/2$

- **Paso base.** P(1)

$$1 = \frac{1(2)}{2} \qquad 1 = 1 \checkmark$$

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

*

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base**. $P(1)$

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo**. $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \Rightarrow \text{?}$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\dots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\underbrace{\boxed{1+2+3+\dots+n = n\cdot(n+1)/2}}_{P(n)} \Rightarrow \overbrace{\boxed{1+2+3+\dots+n+(n+1)}}^{P(n+1)}$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1 \cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

$$1+2+3+\ldots+n = n \cdot (n+1)/2 \qquad \overbrace{\boxed{\underline{1+2+3+\ldots+n}}}^{P(n)}+(n+1)$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2$$

$$\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

$$P(n) + \boxed{(n+1)}$$

$$\underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

$$= n\cdot(n+1)/2 + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)/2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=\underline{2^{n+1}-1}$

Base $P(0) = 2^0 = 1$

$2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$ ✓

Inductivo

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$6 \cdot 6^n = 6^{n+1}$

Sumatoria

$\boxed{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+2^{n+1}$

$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$

$2(2^{n+1}) - 1 = \boxed{2^{n+2} - 1}$

Formula

$2^{(n+1)+1} - 1$

$\boxed{2^{n+2} - 1}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

  $2^0 = 1$ y $2^{0+1}-1 = 1$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** $P(0)$

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\boxed{2^0+2^1+2^2+...+2^n}}^{P(n)} + 2^{n+1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{2^0+2^1+2^2+...+2^n}+ 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1}-1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1}-1$$

$$= \boxed{2^{(n+1)+1}-1} = P(n+1)$$

Estrategia inducción matemática:

Paso base: Solución trivial (primer element) Verificamos que el elemento corresponda al teorema.

Paso inductivo: Suponemos que P(n) es cierto entonces P(n+1) debe ser cierto.

Comprobamos que el problema evaluado en n+1 corresponde a la formula evaluada en n+1

Sumatoria $\longleftrightarrow$ Formula

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{n} = n^2$

$\boxed{2k-1}$ $\quad 1 \leq k \leq n$

$P(1) = \quad 1 = (1)^2 \quad \checkmark$ Paso base

Paso inductivo

Formula $P(n+1)$

$(n+1)^2$

$$\boxed{\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}^{P(n)}} + \overbrace{2n-1+2}^{2n+1}$$

$$n^2+2n+1$$

$$(n+1)^2 \quad \checkmark$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. $P(1)$

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow \; ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \dots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{1 + 3 + \dots + (2n-1)}^{P(n)} + (2n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 + 3 + \ldots + (2n-1)} + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n + 1)^2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $\boxed{1^2}+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

Paso base $\quad n=1 \quad 1^2 = \frac{1\cancel{(2)(3)}}{\cancel{6}} = \underline{1}$ ✓

$\underline{\qquad\qquad}^{\,n}\ 7^2 + 8^{2}$ $\;n+1$

Paso inductivo

Formula $P(n+1)$ ✓

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Problema

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+\boxed{(n+1)^2}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$\frac{n\boxed{(n+1)}(2n+1) + 6\boxed{(n+1)}^2}{6}$$

$$\frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$

$$\frac{(n+1)\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\cancel{(2n^2+7n+6)} \;\Big|\; 2n+3 \quad\Rightarrow\quad n+2$$

$$-2n^2-3n \;\to\; 4n+6 \;\to\; -(4n+6) \;\to\; 0$$

$$\boxed{\frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** $P(1)$

  $1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \;\Rightarrow\; \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+ (n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

$$= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2$$

$$= (n+1)(2n^2+7n+6)/6$$

$$= (n+1)(2n+3)(n+2)/6$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

$$P(1) = 1^3 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 \qquad 1^3 = 1^2 \quad \checkmark\checkmark$$

$P(n)$

Formula

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\boxed{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)\right)$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right)$$

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

  $1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

  $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

$$= n^2(n+1)^2/4 +(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2[n^2/4 +(n+1)]$$

$$= (n+1)^2(n+2)^2/4 = [\underline{(n+1)(n+2)/2}]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n\underline{(n+1)(n+2)/3}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + \boxed{n \cdot (n+1)} = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

$$P(n+1) \quad \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \quad + n(n+1)}_{P(n)} + (n+1)(n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) + \boxed{(n+1)\cdot(n+2)}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow \underline{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)} + (n+1)\cdot(n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)= n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) + (n+1)\cdot(n+2)$

$= n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)\cdot(n+2)$

$= (n+1)(n+2)[\ n/3 + 1]$

$= (n+1)(n+2)(n+3)/3$

$=P(n+1)$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Paso base $P(1) = 1 \cdot 1! = (n+1)! - 1$

1

$2! - 1$

$2 - 1 = 1$

Paso inductivo $\underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + n \cdot n!}_{P(n)} + \boxed{(n+1)(n+1)!}$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

$(n+2)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

  $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$P(n)$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow \boxed{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!} + (n+1) \cdot (n+1)!$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base**. $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!} + (n+1) \cdot (n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)!$$

$$= (n+1)![1 + (n+1)] - 1$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1 = P(n+1)$$

$5! = 5 \times 4!$

$(n+1)! = (n+1)n!$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n pares es $n \cdot (n+1)$, es decir, $2+4+6+ \ldots + 2n = n \cdot (n+1)$