

Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

`oscar.bedoya@correounivalle.edu.co`

- * Definición de relación
- * Propiedades de relaciones
- * Representaciones de una relación

Relaciones de equivalencia

Relación binaria

Sean A y B dos conjuntos, una relación de A en B es un subconjunto de $A \times B$

Relaciones de equivalencia

$$A \times B = \{ (1, -1), (1, -2), \dots, (4, -3) \}$$

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{-1,-2,-3\}$, se presentan a continuación algunas relaciones:

- $R_1 = \{ (2, -1), (3, -2), (1, -1) \}$
- $R_2 = \{ (1, -1), (2, -2), (3, -3) \}$
- $R_3 = \{ (1, -2), (1, -3), (2, -2), (2, -3), (3, -2), (3, -3) \}$
- $R_4 = \{ (3, -1) \}$

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y $B=\{-1,-2,-3\}$, se presentan a continuación algunas relaciones:

- $R_1=\{(2,-1), (3,-2), (1,-1)\}$
- $R_2=\{(1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$
- $R_3=\{(1,-2), (1,-3), (2,-2), (2,-3), (3,-2), (3,-3)\}$
- $R_4=\{(3,-1)\}$

Cada relación es un subconjunto de $A \times B = \{(1,-1), (1,-2), (1,-3), (2,-1), (2,-2), (2,-3), (3,-1), (3,-2), (3,-3), (4,-1), (4,-2), (4,-3)\}$

Relaciones de equivalencia

Relación en A

Una relación definida en un conjunto A es una relación de A en A

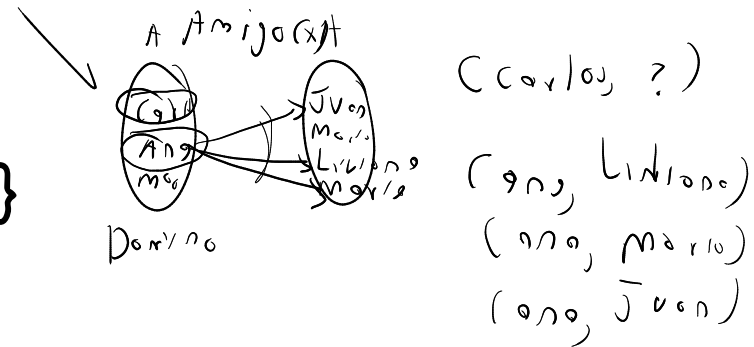
$$|A \times A| = |A| \cdot |A| = 25$$

Relaciones de equivalencia

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), \dots, (5,5)\}$$

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ se presentan algunas relaciones de A en A :

- $R_1 = \{(4,2), (1,3), (1,5)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$
- $R_3 = \{(1,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$



$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

Relaciones de equivalencia

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(a, b) | a < b\} = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4) (3, 4)\}$
- $R_2 = \{(a, b) | a = b\} = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4)\}$
- $R_3 = \{(a, b) | a = b + 1\} = \{(2, 1) (3, 2) (4, 3)\}$
- $R_4 = \{(a, b) | a \text{ divide } b\} = \{(2, 4) (4, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4)\}$
- $R_5 = \{(a, b) | a + b \leq 3\} = \{(1, 1) (1, 2) (2, 1)\}$

$A \in \mathbb{N}$

$A \in \mathbb{Z}$

$A \in \mathbb{R}$

\vdots

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(a,b) | a < b\}$
- $R_2 = \{(a,b) | a = b\}$
- $R_3 = \{(a,b) | a = b + 1\}$
- $R_4 = \{(a,b) | a \text{ divide } b\}$
- $R_5 = \{(a,b) | a + b \leq 3\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4),$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4),$
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4),$
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$$\begin{aligned} A \times A = & \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\} \end{aligned}$$

Relaciones de equivalencia

Sea $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ muestre las siguientes relaciones:

• $R_1 = \{(a, b) | a > 0 \wedge b < 0\}$ $\{(1, -1) (1, -2) (2, -1) (2, -2), (3, -1) (3, -2)$
 $(4, -1) (4, -2)\}$

• $R_2 = \{(a, b) | a = -b\}$

• $R_3 = \{(a, b) | a + b < 2\}$ $\{(2, -2) (1, -1), (-1, 1) (-2, 2)\}$
 $\times (4, -2)$

$\{(-2, -2) (-2, -1) (-2, 1) (-2, 2) (-2, 3)$
 $(-1, -2) (-1, -1) (-1, 1) (-1, 2)$
 $(1, -2) (1, -1)$
 $(2, -2) (2, -1)$
 $(3, -2)$

Relaciones de equivalencia

Sea $A = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ muestre las siguientes relaciones:

- $R_1 = \{(1, -2), (1, -1), (2, -2), (2, -1), (3, -2), (3, -1), (4, -2), (4, -1)\}$
- $R_2 = \{(-2, 2), (2, -2), (-1, 1), (1, -1)\}$
- $R_3 = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 1), (-1, 2), (1, -2), (1, -1), (2, -2), (2, -1), (3, -2)\}$

Relaciones de equivalencia

Propiedades de las relaciones

- Reflexiva
- Simétrica
- Antisimétrica
- Transitiva

Relaciones de equivalencia

Reflexiva

- Una relación R sobre un conjunto A se llama reflexiva si $(a,a) \in R$ para cada elemento $a \in A$

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,3), (2,4), (4,4)\}$ ✓
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ NO
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$ NO
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$ SI
- $R_5 = \{(1,2)\}$ NO

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,3), (2,4), (4,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
- $R_5 = \{(1,2)\}$
- **R_1 y R_4 son reflexivas**

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3\}$ indique si las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,2)\}$ No
- $R_2 = \{(1,3), (3,1), (2,3), (2,1)\}$ No
- $R_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ SI

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3\}$ indique si las siguientes relaciones son reflexivas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,2)\}$ **no**, falta $(3,3)$
- $R_2 = \{(1,3), (3,1), (2,3), (2,1)\}$ **no**, faltan $(1,1), (2,2), (3,3)$
- $R_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ **si**

Relaciones de equivalencia

- Sea $A = \mathbb{Z}^+$ indique si las relaciones son reflexivas:

1) $R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$ SI $(a, b) \quad a = b \quad \frac{a}{b} \quad \frac{b}{a}$

2) $R_2 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$ SI $a \leq b$

$R_3 = \{(a, b) \mid a > b\}$ NO

Relaciones de equivalencia

- Sea $A=\mathbb{Z}^+$ indique si las relaciones son reflexivas:

$R_1=\{(a,b)|a \text{ divide } b\}$ **si**, ya que $a|a$

$R_2=\{(a,b)|a \leq b\}$ **si**, ya que $a \leq a$

$R_3=\{(a,b)|a > b\}$ **no**, ya que no se cumple $a > a$

Relaciones de equivalencia

Simétrica

- Una relación R sobre un conjunto A se llama simétrica si cuando $(a,b) \in R$ entonces (b,a) también $(9,9)$

$$(3,2) \Rightarrow (2,3)$$

$$(1,1) = (1,1)$$

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (3,1), (2,4), (4,1), (4,2)\}$ SI
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ SI
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,3), (4,3)\}$ No
(Handwritten note: $(3,4)$ is circled and points to the set, indicating it is not in the set.)
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3), (2,1)\}$ No
(Handwritten note: $(1,3)$ and $(1,4)$ are circled together, and $(3,4)$ is circled separately, indicating asymmetry.)
- $R_5 = \{(1,2)\}$ No
(Handwritten note: $(2,1)$ is not in the set, indicating asymmetry.)

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), \boxed{(1,1)}, (1,4), (3,1), (2,4), (4,1), (4,2)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,3), (4,3)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3), (2,1)\}$
- $R_5 = \{(1,2)\} \setminus \{(2,1)\}$ s_{\perp}
- **R_1 y R_2 son simétricas**

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3\}$ indique si las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ SI
- $R_2 = \{(1,3), (1,2), (3,1), (2,3), (3,2)\} \rightarrow (2, 3) \text{ NO}$
- $R_3 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,1)\}$ $(2, 1) \text{ NO}$

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3\}$ indique si las siguientes relaciones son simétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ **si**
- $R_2 = \{(1,3), (1,2), (3,1), (2,3), (3,2)\}$ **no**, falta $(2,1)$
- $R_3 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,1)\}$ **no**, falta $(3,1)$

Relaciones de equivalencia

- Sea $A = \mathbb{Z}^+$ indique si las relaciones son simétricas:

$R_1 = \{(a,b) a \text{ divide } b\}$	$(2, 4)$ SI	$(4, 2)$ <u>NO</u>	<u>$a b$</u>
$R_2 = \{(a,b) a \leq b\}$	$(5, 8)$ SI	$(8, 5)$ NO X	
$R_3 = \{(a,b) a > b\}$	$(8, 1)$ SI,	$(1, 8)$ NO X	

Relaciones de equivalencia

- Sea $A = \mathbb{Z}^+$ indique si las relaciones son simétricas:

$R_1 = \{(a,b) \mid a \text{ divide } b\}$ **no**, $1 \mid 3$ pero $3 \nmid 1$

$R_2 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$ **no**, $2 \leq 3$ pero no se cumple que $3 \leq 2$

$R_3 = \{(a,b) \mid a > b\}$ **no**, $6 > 1$ pero no se cumple que $1 > 6$

Relaciones de equivalencia

Antisimétrica

- Una relación R sobre un conjunto A se llama antisimétrica si cuando $(a,b) \in R$ entonces (b,a) no $a \neq b$
- No se consideran los casos (a,a) \times

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:

• $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4)\}$ ✓

• $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ SI

• $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (4,4)\}$ No

• $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3)\}$ SI

• $R_5 = \{(1,2)\}$ SI

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (1,4), (2,4), (3,2), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (4,4)\}$
- $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,3)\}$
- $R_5 = \{(1,2)\}$
- **R_1, R_2, R_4 y R_5 son antisimétricas**

Relaciones de equivalencia

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ indique si las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}$ SI
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ No
- $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ SI

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3\}$ indique si las siguientes relaciones son antisimétricas:

- $R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3)\}$ **si**
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ **no**, (1,2) y (2,1)
- $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ **si**

Relaciones de equivalencia

- Sea $A = \mathbb{Z}^+$ indique si las relaciones son antisimétricas:

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\} \quad \frac{b}{a} \quad a \neq b \quad \text{No } \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid \underline{a \leq b}\} \quad \text{Si } (9, 6) \quad (6, 9)$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid \underline{a > b}\} \quad \text{Si } (5, 8) \quad (8, 5)$$

Relaciones de equivalencia

- Sea $A=\mathbb{Z}^+$ indique si las relaciones son antisimétricas:

$$R_1=\{(a,b)|a \text{ divide } b\} \text{ si}$$

$$R_2=\{(a,b)|a\leq b\} \text{ si}$$

$$R_3=\{(a,b)|a>b\} \text{ si}$$

Relaciones de equivalencia

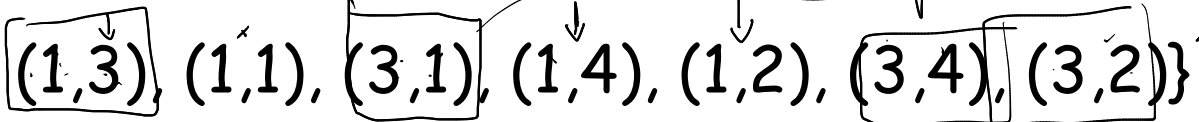
Transitiva

- Una relación R sobre un conjunto A se llama transitiva si cuando $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces (a,c) también

Relaciones de equivalencia

$$(3, 1) (1, 3) \rightarrow (3, 3)$$

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas: $(a, b) (b, c) \rightarrow (a, c)$

• $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (3,1), (1,4), (1,2), (3,4), (3,2)\}$ 

• $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ SÍ

• $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (1,1)\}$ SÍ

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:

- $R_1 = \{(2,2), (1,3), (1,1), (3,1), (1,4), (1,2), (3,4), (3,2)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $R_3 = \{(2,1), (3,2), (1,2), (2,2), (1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (1,1)\}$
- R_2 y R_3

Relaciones de equivalencia

$$(a, b) (b, c) \rightarrow (a, c)$$

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique si las siguientes relaciones son transitivas:

• $R_4 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (3,3), (1,3), (4,1)\}$

No

• $R_5 = \{(1,2)\}$ Sí

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ indique si las siguientes relaciones son transitivas:

- $R_4 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (3,3), (1,3), (4,1)\}$ **no**, están $(1,4)$ y $(4,1)$, por lo tanto, debería estar $(1,1)$
- $R_5 = \{(\underline{1,2})\}$ **si**

Relaciones de equivalencia

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ ✓
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	No	No	No	Sí
R_2	Sí	Sí	No	Sí
R_3	No	Sí	No	No

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
- $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_3 = \{(2,4), (4,2)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	NO	NO	NO	SI
R_2	SI	SI	NO	SI
R_3	NO	SI	NO	NO

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ ←
- $R_6 = \{(\textcircled{1},3), (1,\textcircled{4}), (2,3), (2,4), (\textcircled{3},\textcircled{1}), (3,4)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_4	No	No	Sí	No
R_5	Sí	Sí	Sí	Sí
R_6	No	No	No	No

Relaciones de equivalencia

Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones, complete la tabla de propiedades:

- $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
- $R_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- $R_6 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_4	NO	NO	SI	NO
R_5	SI	SI	SI	SI
R_6	NO	NO	NO	NO

Relaciones de equivalencia

Dadas las siguientes relaciones definidas sobre los números enteros, complete la tabla de propiedades: $A \in \mathbb{Z}$

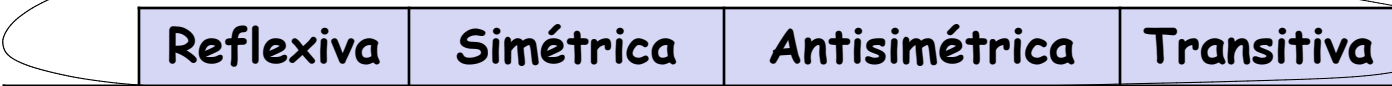
- $R_1 = \{(a,b) | a+b=0\}$ $a = -b$ $-2 + 2 = 0$ $2 + -2 = 0$
- $R_2 = \{(a,b) | a \neq b\}$ $(a,b) (b,a)$ $(a,b) (b,c)$ $a \neq b$ $b \neq c$ (a,c) $-2 - 2 = ?$

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	No	Sí	No	No
R_2	No	Sí	No	<u>No</u>

Relaciones de equivalencia

Dadas las siguientes relaciones definidas sobre los números enteros, complete la tabla de propiedades:

- $R_1 = \{(a,b) | a+b=0\}$
- $R_2 = \{(a,b) | a \neq b\}$



	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	NO	SI	NO	NO
R_2	NO	SI	NO	NO

Relaciones de equivalencia

Representación de relaciones

- Matricial
- Grafos

Relaciones de equivalencia

- Sean $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ y $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, R se define de la siguiente manera:

$$R=\{(a_1,b_3),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_3),(a_3,b_4)\}$$

Relaciones de equivalencia

- Sean $A=\{a_1, a_2, a_3\}$ y $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, R se define de la siguiente manera:

$$R=\{(a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_4)\}$$

- La representación matricial de R es:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Relaciones de equivalencia

- Sean $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{1,2\}$, R se define de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

- Muestre la representación matricial de R

Relaciones de equivalencia

- Sean $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{1,2\}$, R se define de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}$$

- La representación matricial de R es:

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$
---	---	---

Relaciones de equivalencia

- Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y R definida de A en A de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1)\}$$

- Muestre la representación matricial de R

	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	0	1	0	1
3	1	1	0	1
4	1	0	0	0

Relaciones de equivalencia

- Sea $A=\{1,2,3,4\}$ y R definida de A en A de la siguiente manera:

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1)\}$$

- La representación matricial de R es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relaciones de equivalencia

- Muestre la relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ representada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

Relaciones de equivalencia

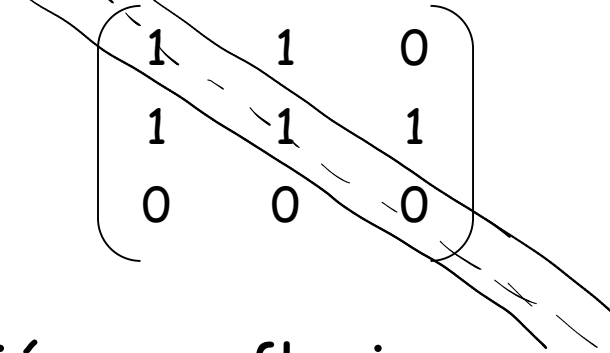
- Muestre la relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$ representada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$



1	1	0
1	1	1
0	0	0

- Indique si la relación es reflexiva

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

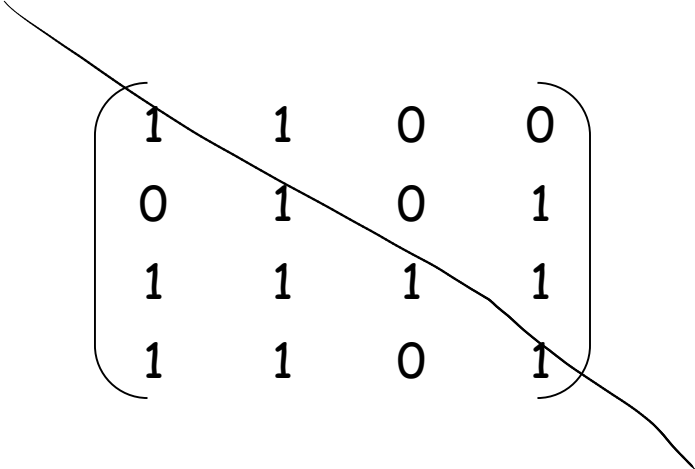
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

No es reflexiva porque $(3,3) \notin R$

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$



1	1	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1
1	1	0	1

- Indique si la relación es reflexiva

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es reflexiva

La relación es reflexiva

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

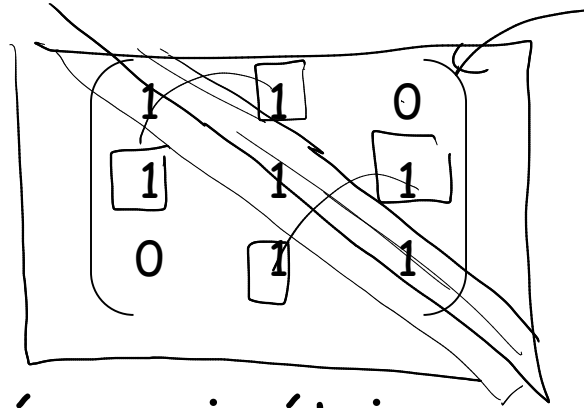
- Indique si la relación es reflexiva

La relación es reflexiva

Una relación R es **reflexiva** si la matriz M_R tiene solo 1's en su diagonal

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$



- Indique si la relación es simétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

La relación es simétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es simétrica

La relación no es simétrica ya que $(1,3) \in R$ y $(3,1) \notin R$

Relaciones de equivalencia

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es simétrica**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no es simétrica**

Relaciones de equivalencia

- Compare la matriz con su transpuesta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es simétrica**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no es simétrica**

Relaciones de equivalencia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es**
simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **no**
es simétrica

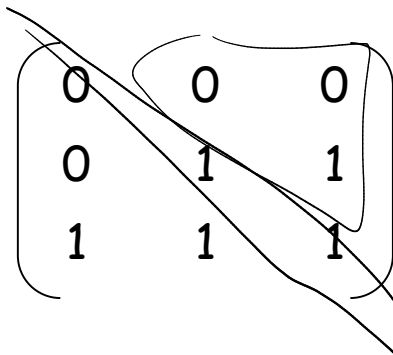
Relaciones de equivalencia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación **es**
simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$


La relación **no**
es simétrica

Una relación R es **simétrica** si
la matriz M es igual a M^T

Relaciones de equivalencia

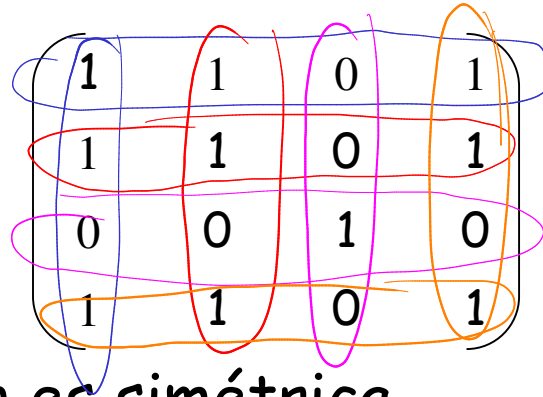
- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

1	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0

- Indique si la relación es simétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$



1	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1

- Indique si la relación es simétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

1	1	1
0	1	0
0	1	1

$$(i, j) = 0 \wedge (j, i) = 1$$
$$(i, j) = 1 \wedge (j, i) = 0$$

- Indique si la relación es antisimétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

La relación es antisimétrica

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

1	1	0	0
0	1	0	1
1	1	1	1
1	1	0	0

- Indique si la relación es antisimétrica

No

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

La relación no es antisimétrica ya que $(2,4) \in R$ y $(4,2) \notin R$

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Indique si la relación es antisimétrica

La relación no es antisimétrica ya que $(2,4) \in R$ y $(4,2) \notin R$

Una relación R es antisimétrica si en la matriz M se cumple que si $m_{ij}=1$ entonces $m_{ji}=0$

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \\
 \begin{pmatrix}
 0 & \boxed{1} & 0 \\
 0 & \cancel{1} & \cancel{1} \\
 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad (1, 2) \quad (2, 3) \quad (1, 3)$$

- Indique si la relación es transitiva

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $R=\{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\}$, **no es transitiva** ya que:

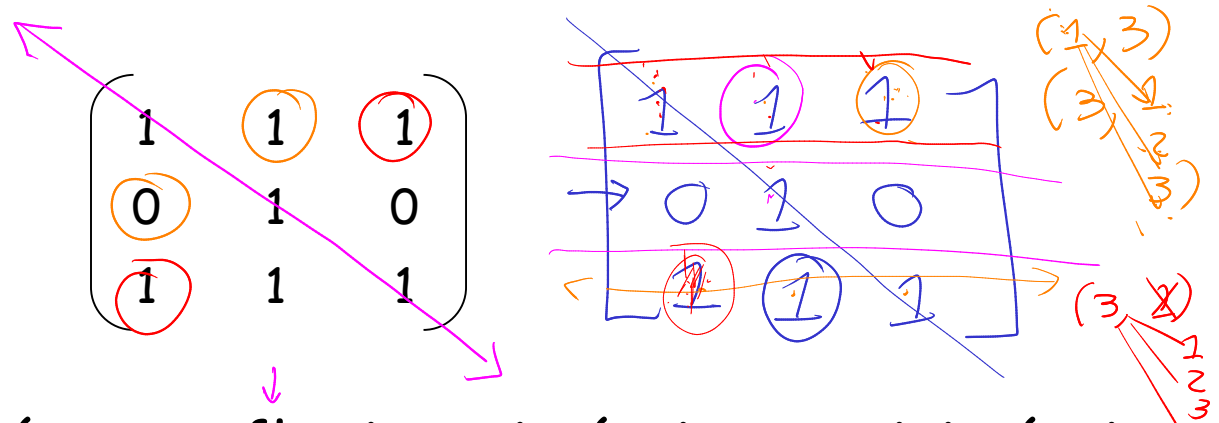
$(1,2) \in R$ y $(2,3) \in R$ pero $(1,3) \notin R$ 

$(2,3) \in R$ y $(3,1) \in R$ pero $(2,1) \notin R$

$(3,1) \in R$ y $(1,2) \in R$ pero $(3,2) \notin R$

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$



- Indique si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva

SI

SI

No

No

Relaciones de equivalencia

- Es reflexiva ya que en su diagonal hay solo 1's
- No es simétrica ya que $M \neq M^T$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- No es antisimétrica ya que $(1,3) \in R$ y $(3,1) \in R$
- Es transitiva

Relaciones de equivalencia

› Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3\}$

	1	2	3
1	1	1	0
2	0	1	1
3	1	0	1

• Indique si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva

No

SI

No

SI

Relaciones de equivalencia

- Es reflexiva ya que en su diagonal hay solo 1's
- No es simétrica ya que $M \neq M^T$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Es antisimétrica ya que si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \notin R$
- No es transitiva. $(1,2) \in M$ y $(2,3) \in M$ pero $(1,3) \notin M$

Relaciones de equivalencia

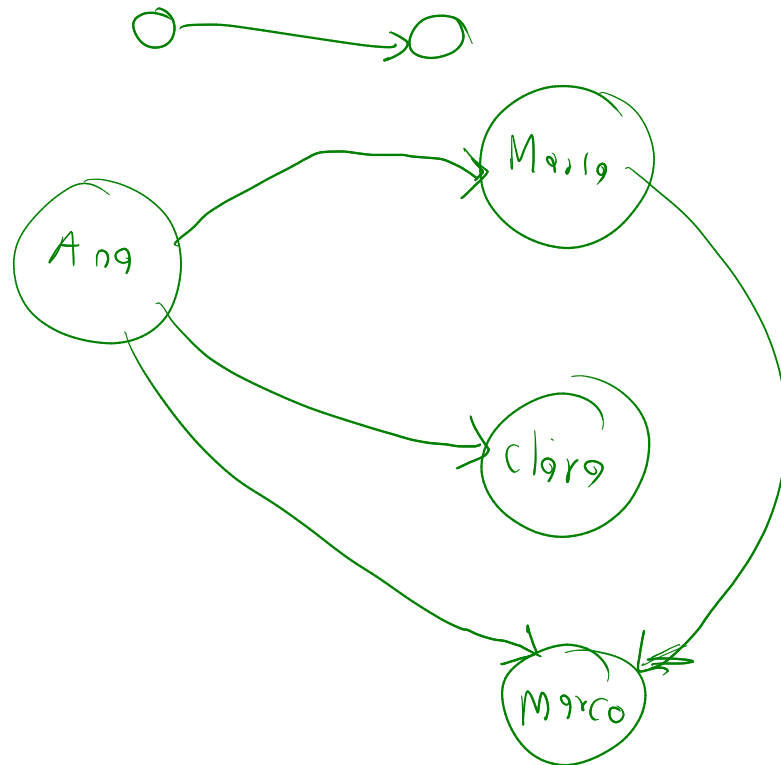
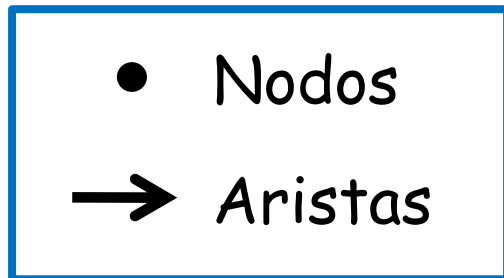
Representación de relaciones

- Matricial
- Grafos

Relaciones de equivalencia

Representación usando grafos

- $R = \{(a,b), (b,c), (c,a), (d,b), (d,c)\}$ definida sobre $A = \{a,b,c,d\}$



Relaciones de equivalencia

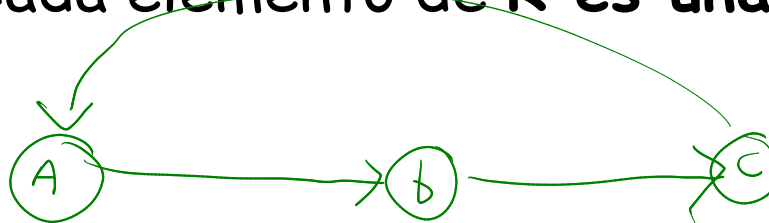
Representación usando grafos

- $R = \{(a,b), (b,c), (c,a), (d,b), (d,c)\}$ definida sobre $A = \{a,b,c,d\}$

- Nodos

→ Aristas

Cada elemento de A es un nodo
Cada elemento de R es una arista



Relaciones de equivalencia

Representación usando grafos

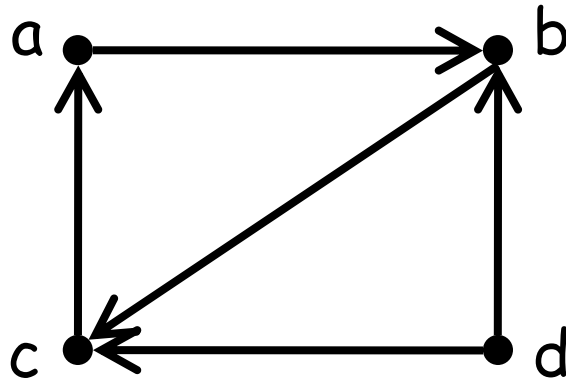
- $R = \{(a,b), (b,c), (c,a), (d,b), (d,c)\}$ definida sobre $A = \{a,b,c,d\}$



Relaciones de equivalencia

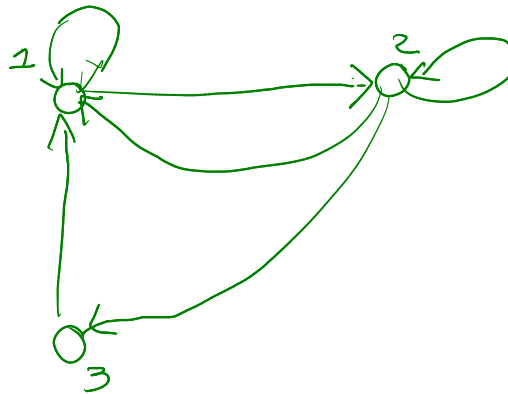
Representación usando grafos

- $R=\{(a,b),(b,c),(c,a),(d,b),(d,c)\}$ definida sobre $A=\{a,b,c,d\}$



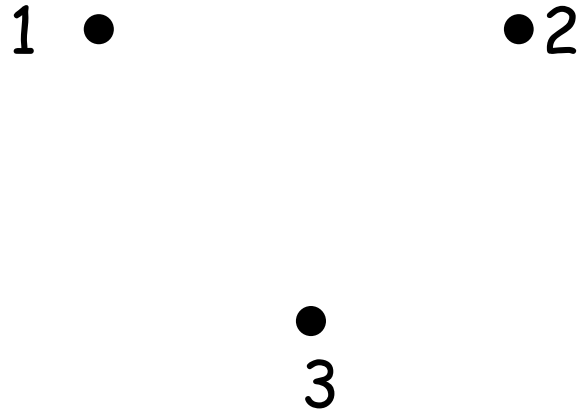
Relaciones de equivalencia

Represente $R = \{(\overset{\rightarrow}{1},1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ definida sobre $A = \{1,2,3\}$



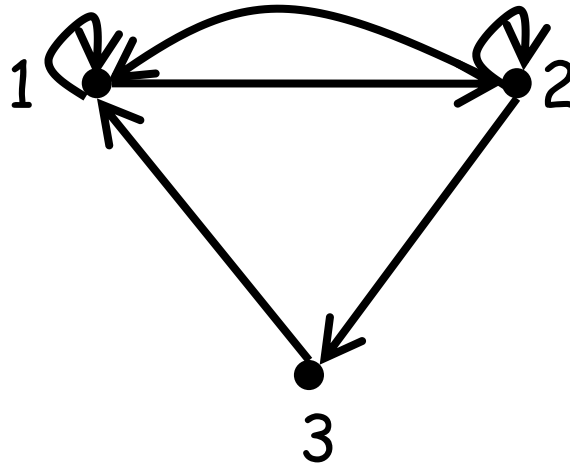
Relaciones de equivalencia

Represente $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ definida sobre $A=\{1,2,3\}$



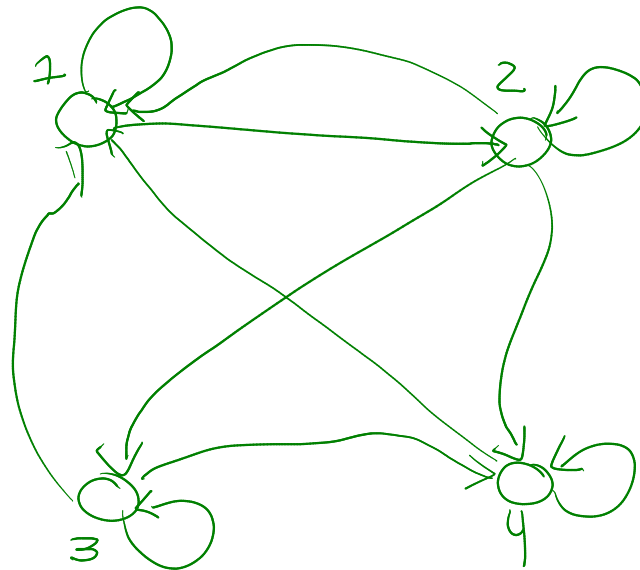
Relaciones de equivalencia

Represente $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ definida sobre $A=\{1,2,3\}$



Relaciones de equivalencia

Represente $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3), (2,4),(3,1),(3,3), (3,4),(4,1),(4,4)\}$ definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$



Relaciones de equivalencia

Represente $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3), (2,4),(3,1),(3,3), (3,4),(4,1),(4,4)\}$ definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

1 ●

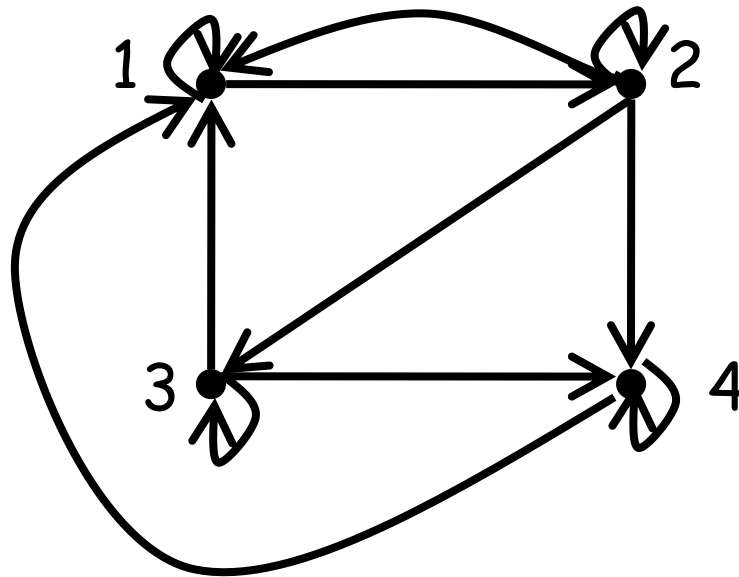
● 2

3 ●

● 4

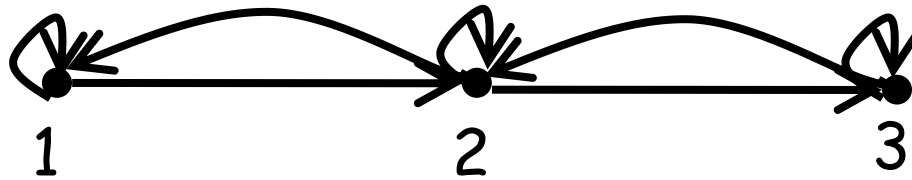
Relaciones de equivalencia

Represente $R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$ definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$



Relaciones de equivalencia

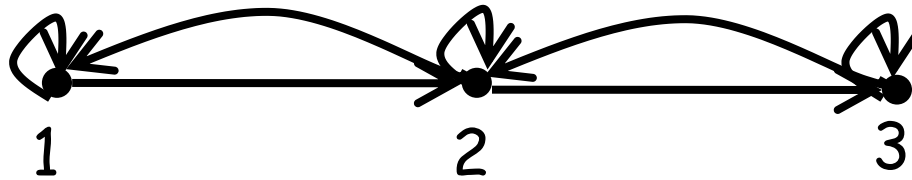
Muestre la relación que representa el siguiente grafo:



$(1, 1) (2, 2) (2, 1) (2, 2) (2, 3) (3, 2) (3, 3)$

Relaciones de equivalencia

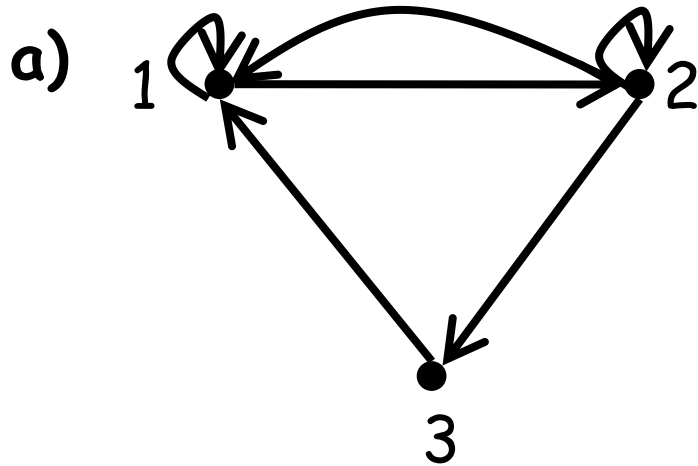
Muestre la relación que representa el siguiente grafo:



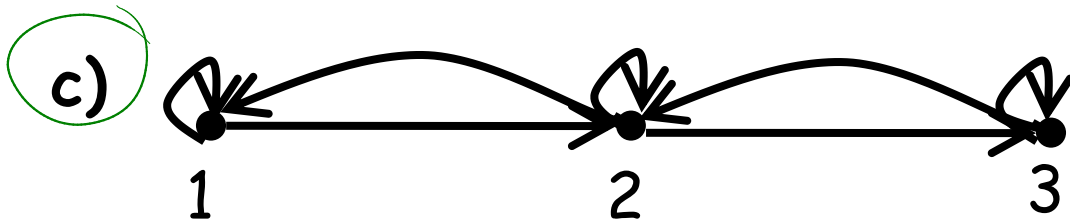
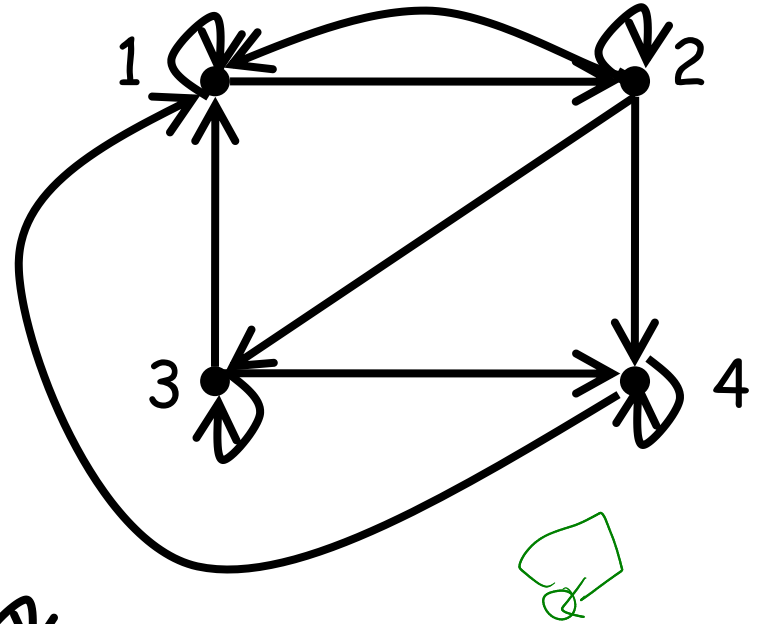
$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$$

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:

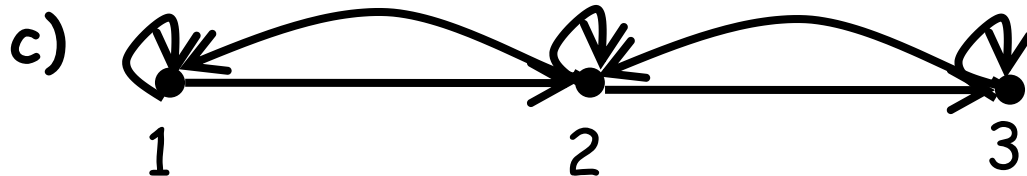
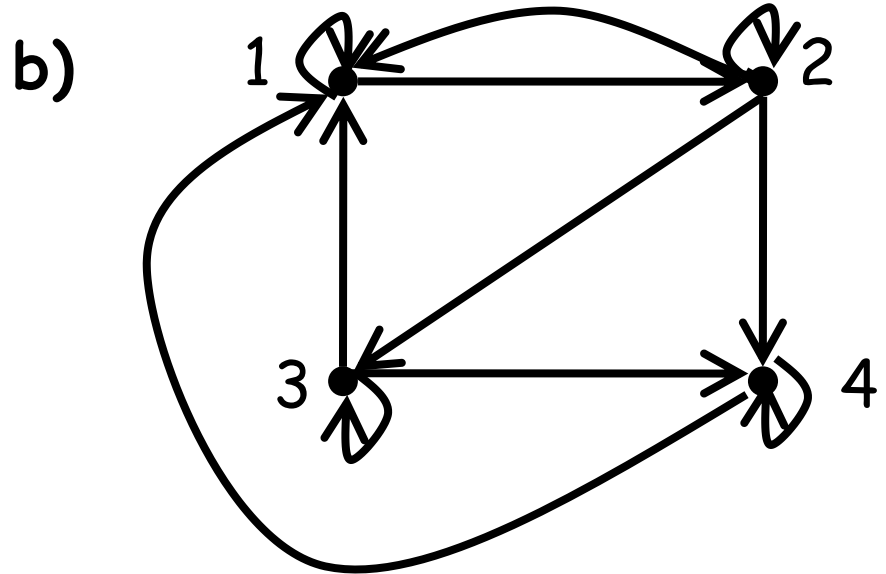
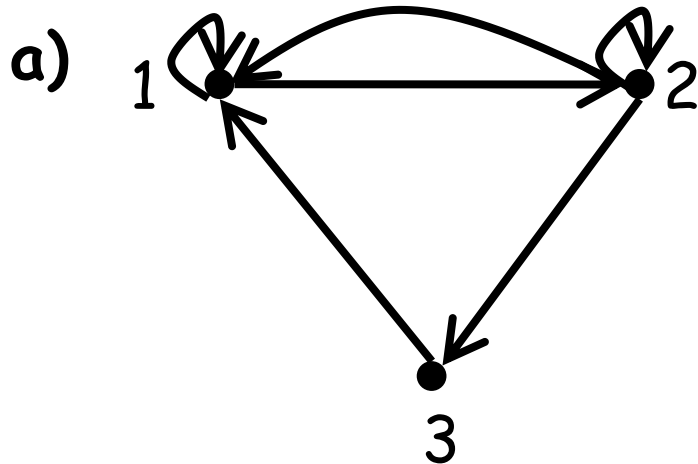


b)



Relaciones de equivalencia

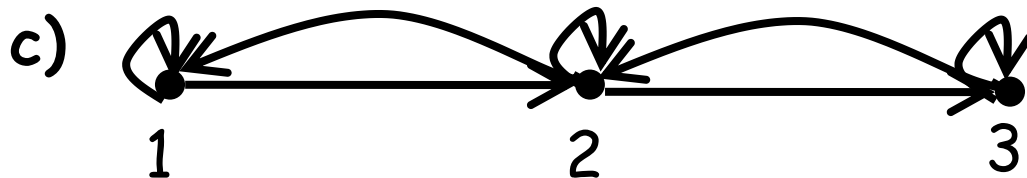
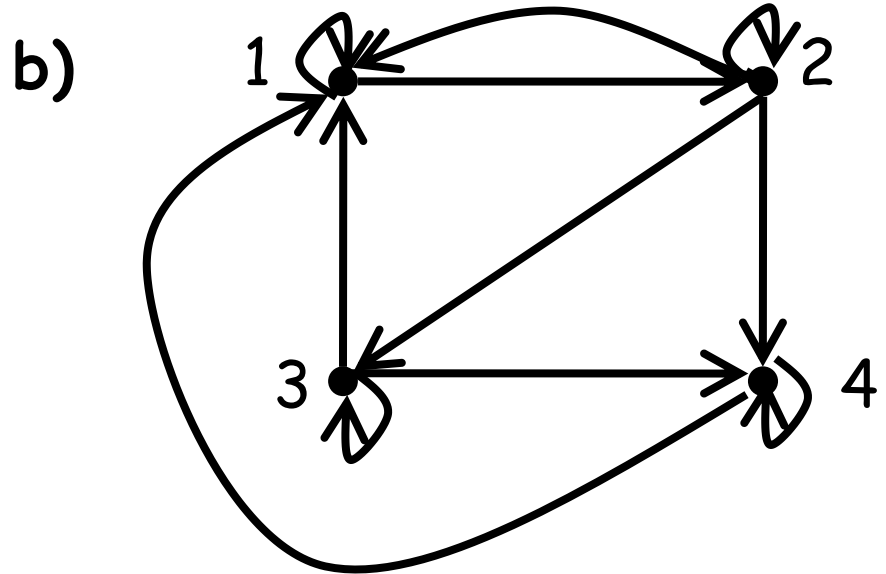
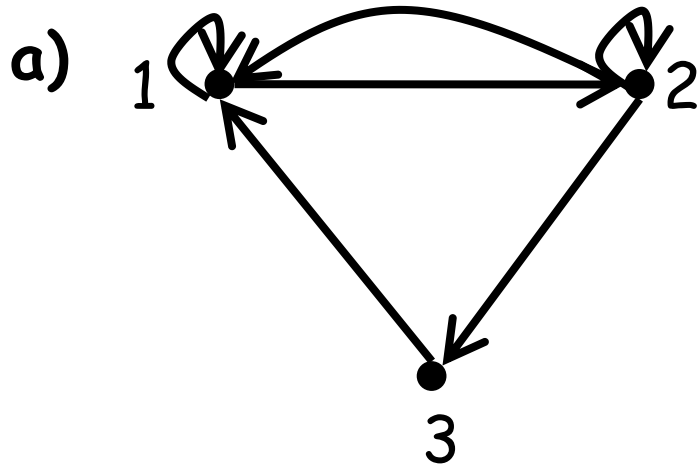
Indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:



Una relación es **reflexiva** si cada nodo tiene una arista que sale y llega al mismo nodo

Relaciones de equivalencia

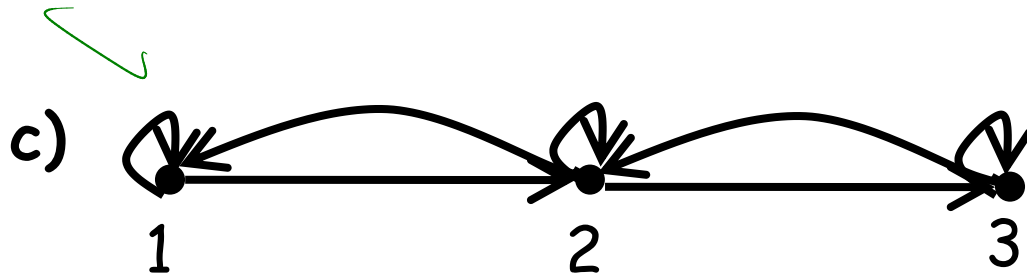
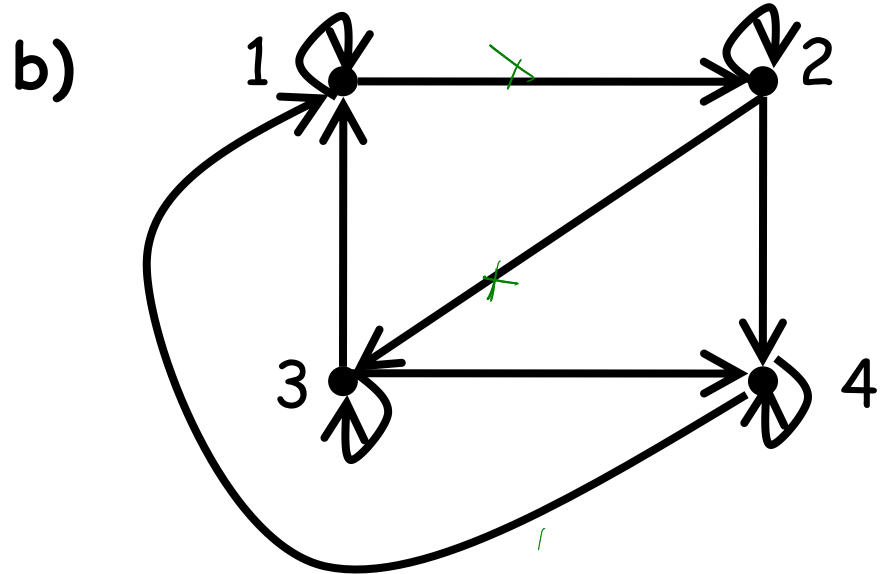
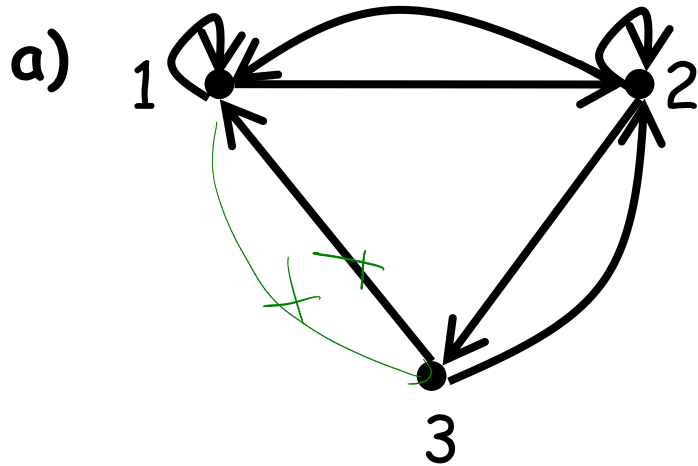
Indique cuáles de las siguientes relaciones son reflexivas:



Las relaciones representadas en b y c son reflexivas

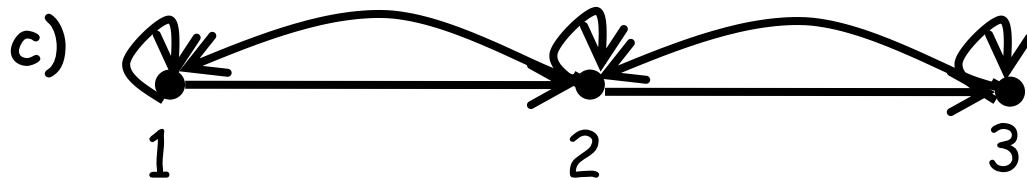
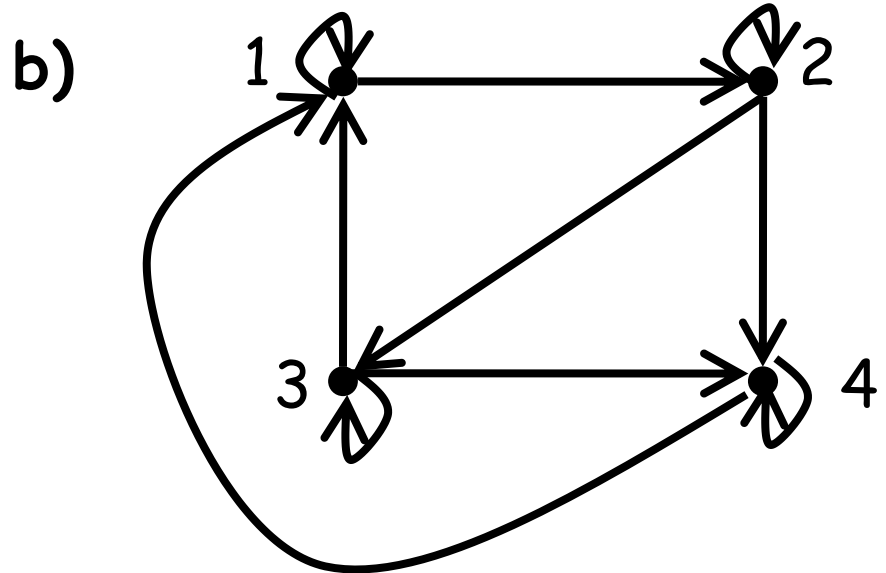
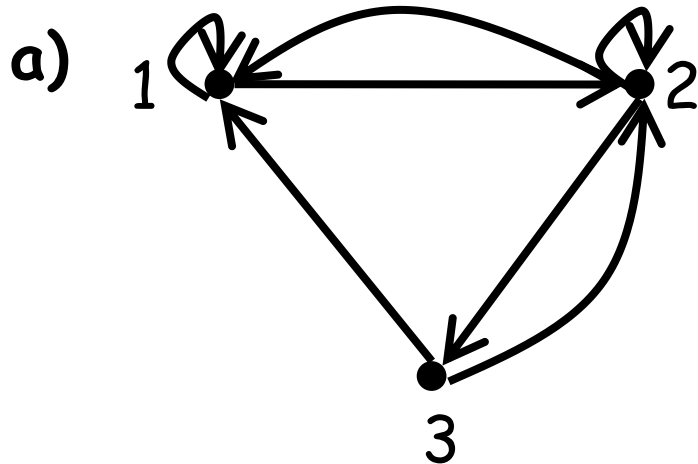
Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:



Relaciones de equivalencia

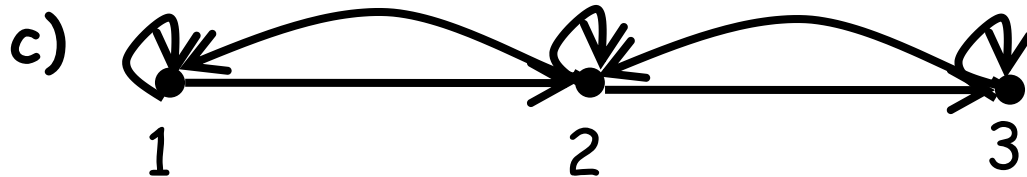
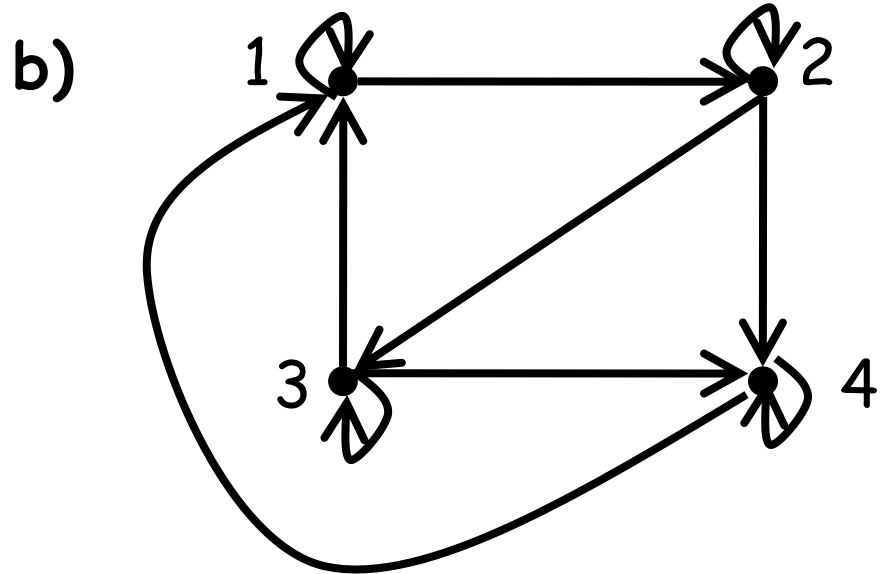
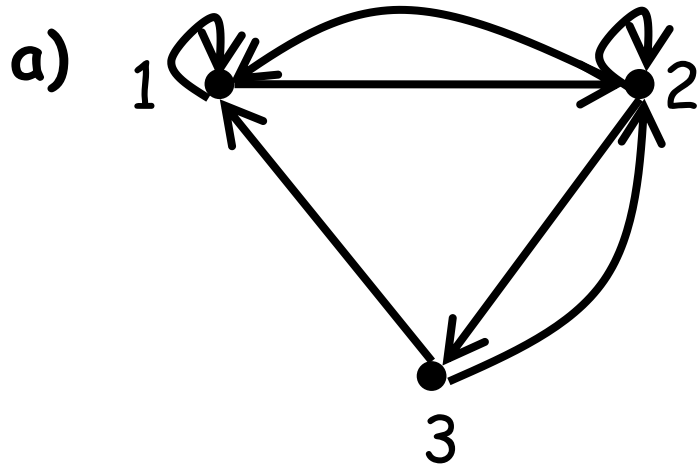
Indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:



Una relación es simétrica si por cada arista del nodo i al j , hay otra de j a i

Relaciones de equivalencia

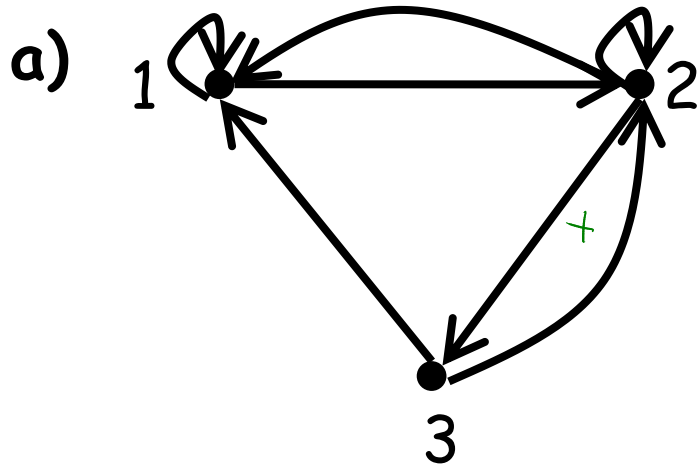
Indique cuáles de las siguientes relaciones son simétricas:



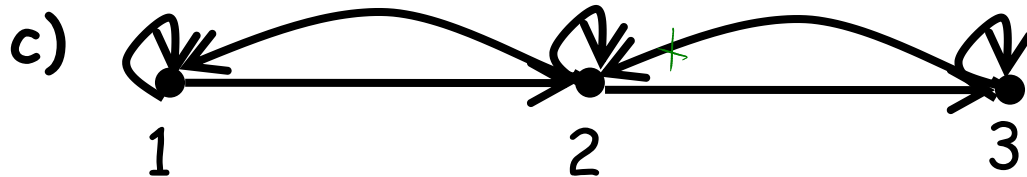
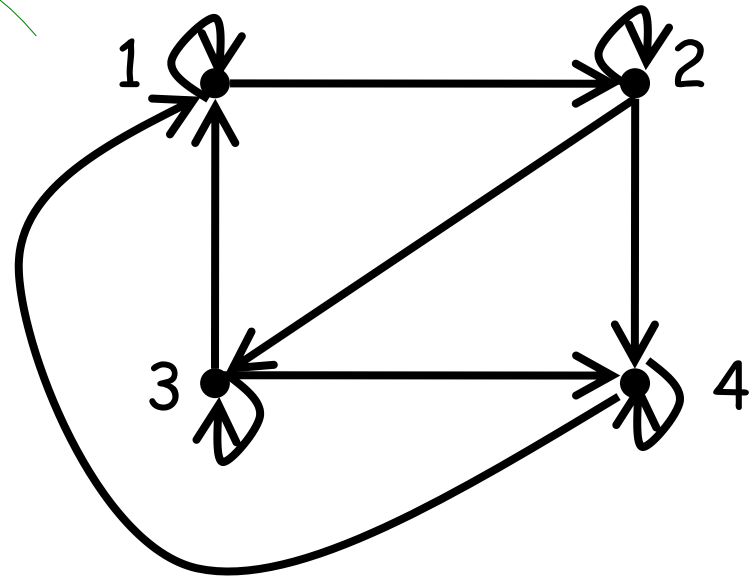
La relación representada en c es simétrica

Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:

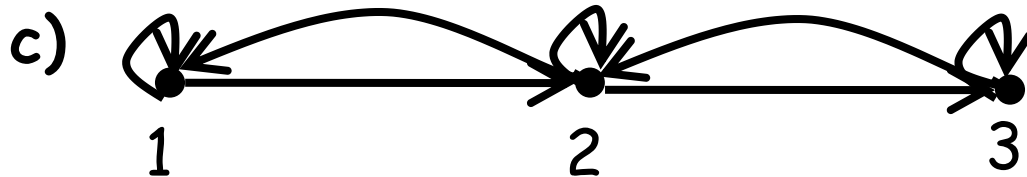
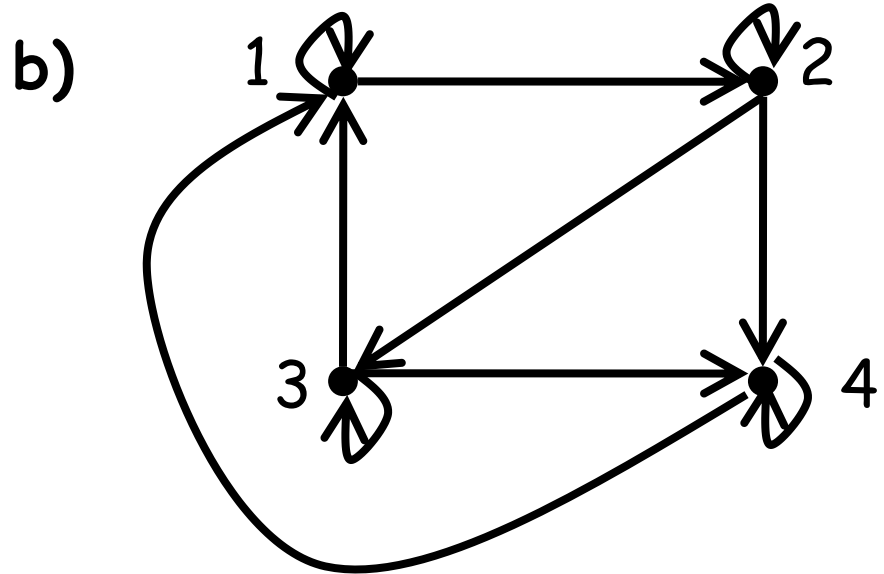
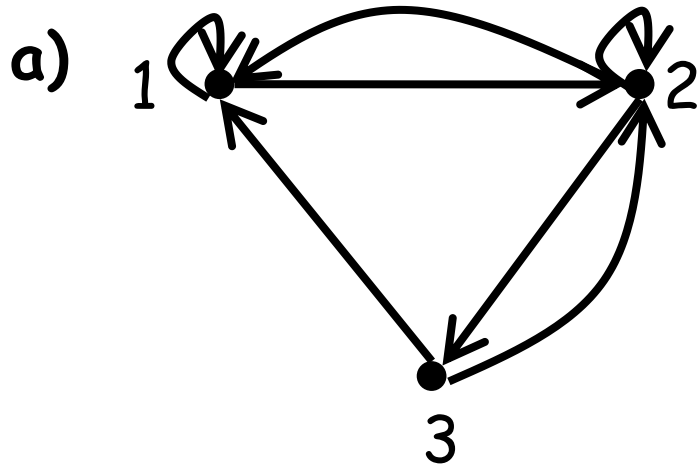


b)



Relaciones de equivalencia

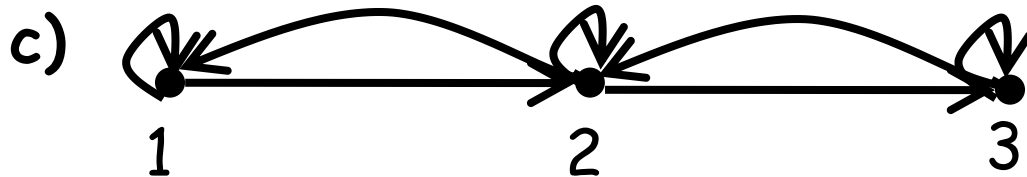
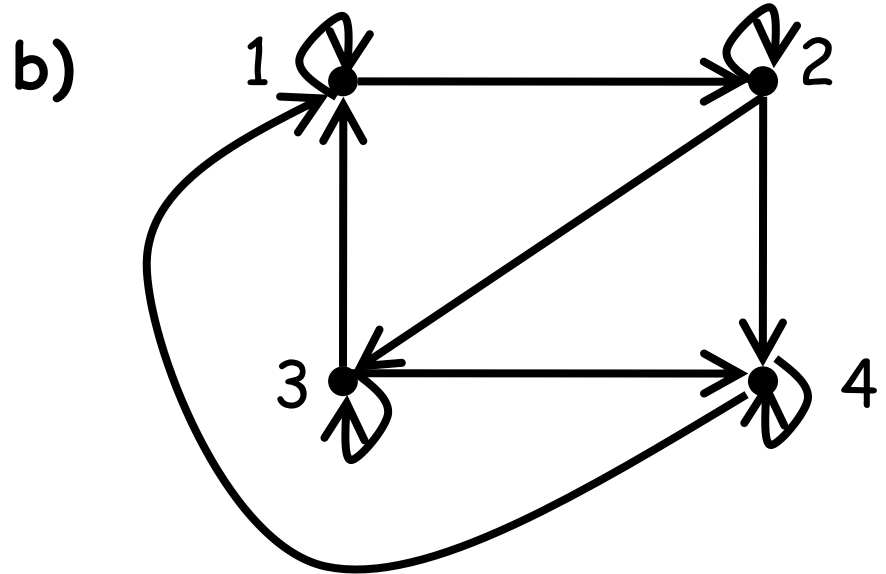
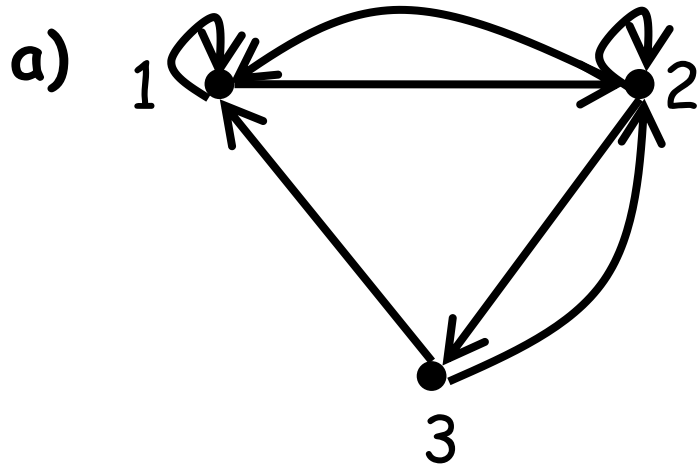
Indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:



Una relación es antisimétrica si cuando hay una arista del nodo i al j , no hay otra de j a i

Relaciones de equivalencia

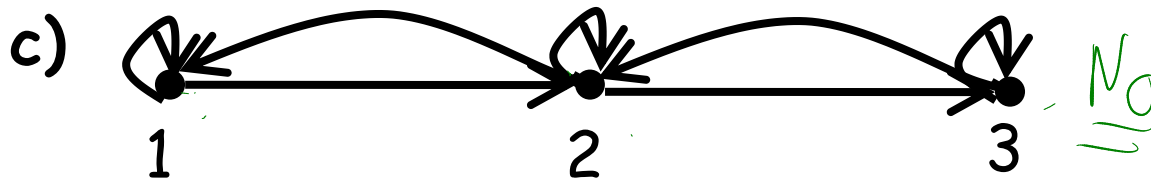
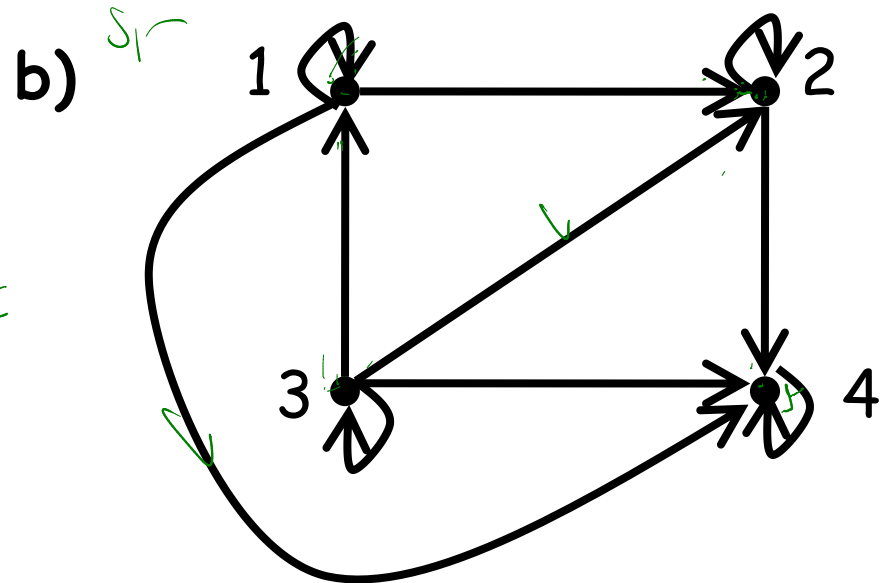
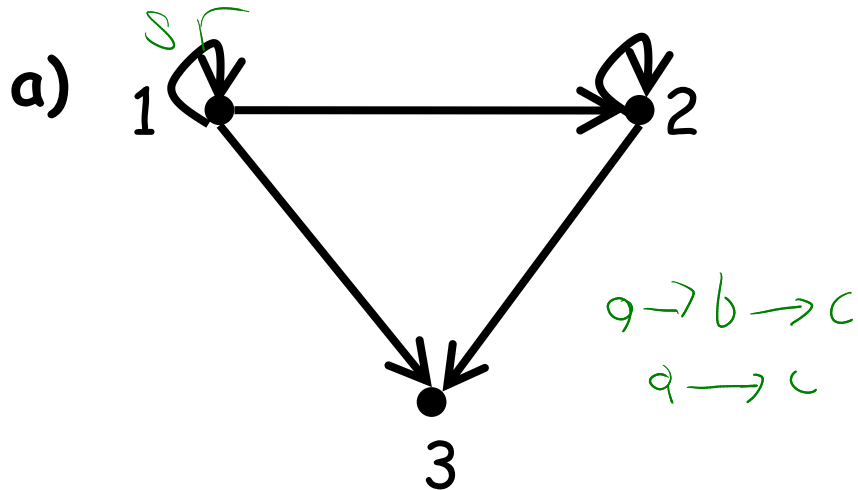
Indique cuáles de las siguientes relaciones son antisimétricas:



La relación representada en b es antisimétrica

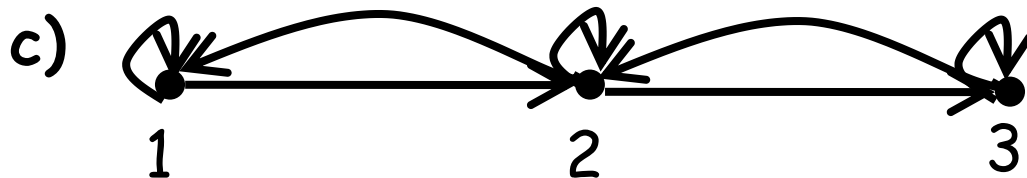
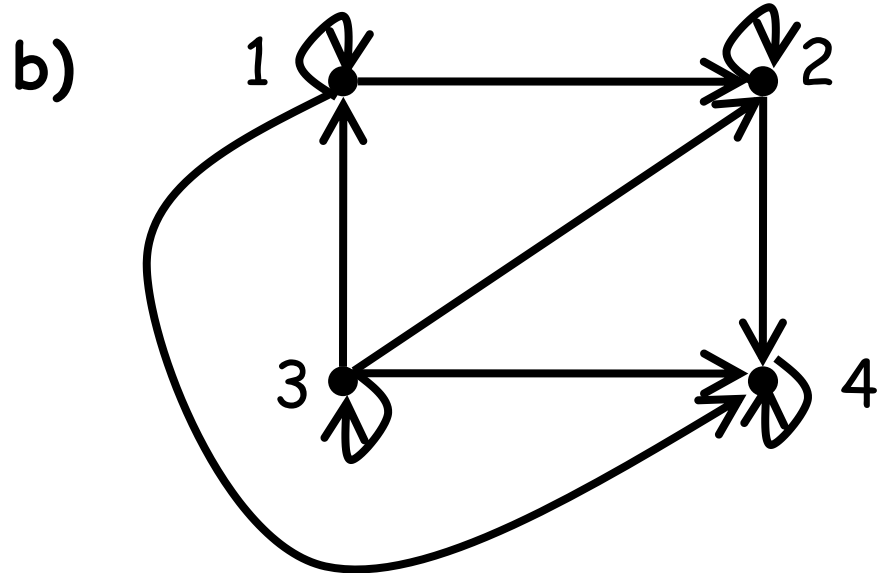
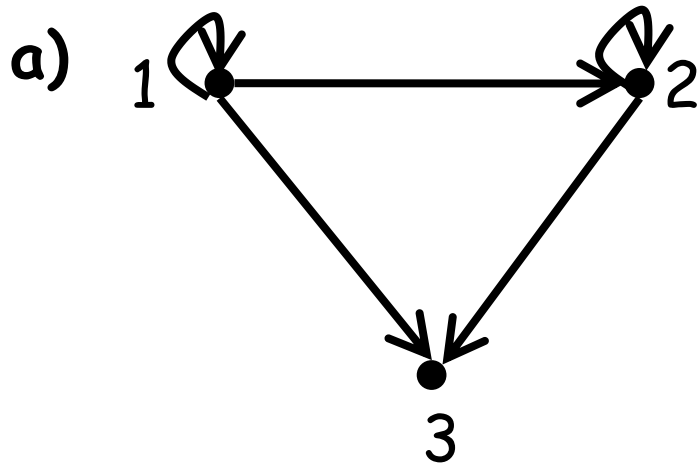
Relaciones de equivalencia

Indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:



Relaciones de equivalencia

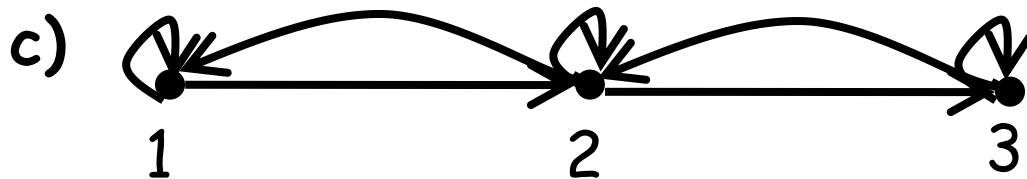
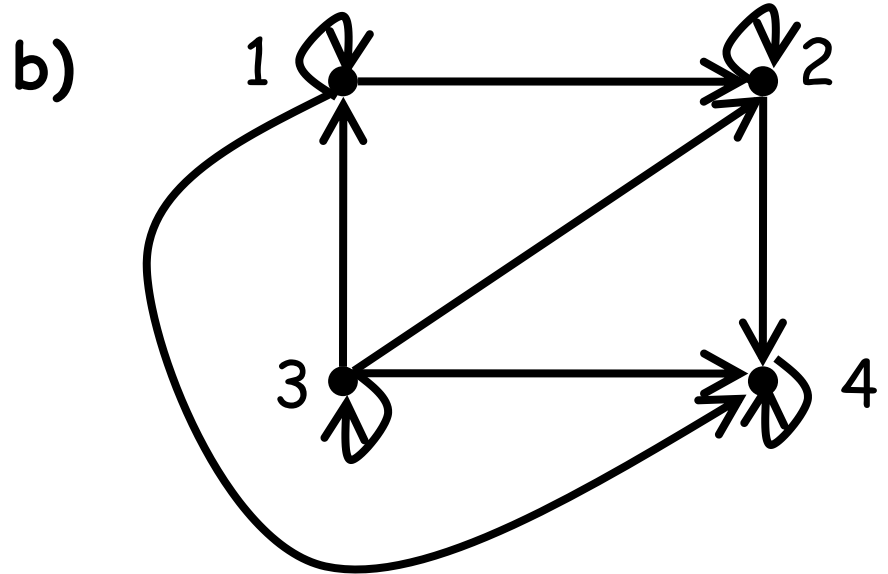
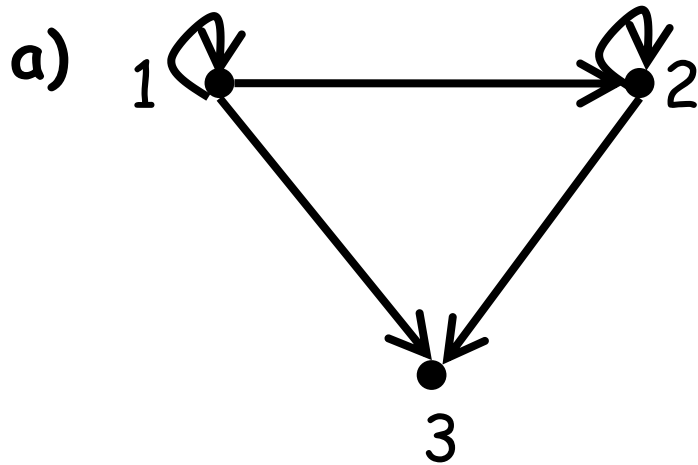
Indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:



Una relación es transitiva si cuando hay una arista del nodo i al j , otra de j a k , entonces hay una arista de i a k

Relaciones de equivalencia

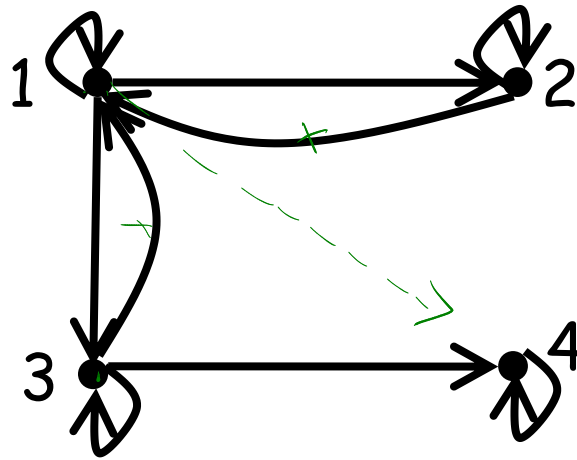
Indique cuáles de las siguientes relaciones son transitivas:



Las relaciones representadas en a y b son transitivas

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$



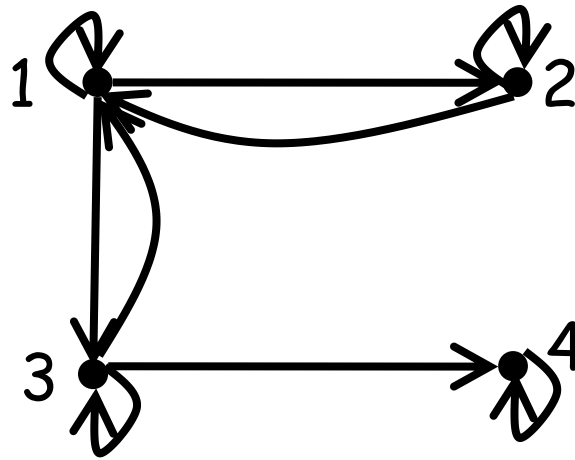
- Complete la siguiente tabla de propiedades:

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	SI	No	No	No

- Representéla en forma matricial

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$



$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

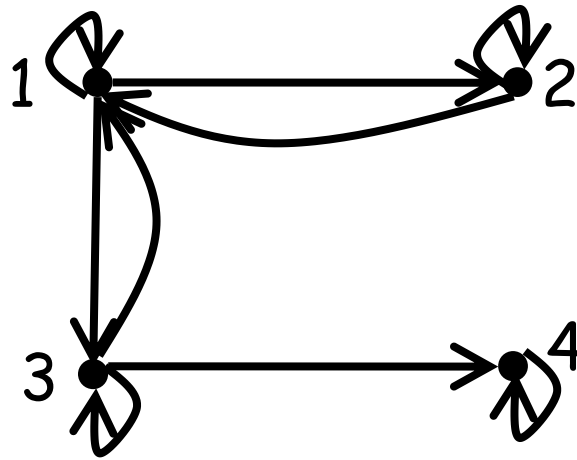
- Complete la siguiente tabla de propiedades:

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	SI	NO	NO	NO

- Representémtela en forma matricial

Relaciones de equivalencia

- Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$

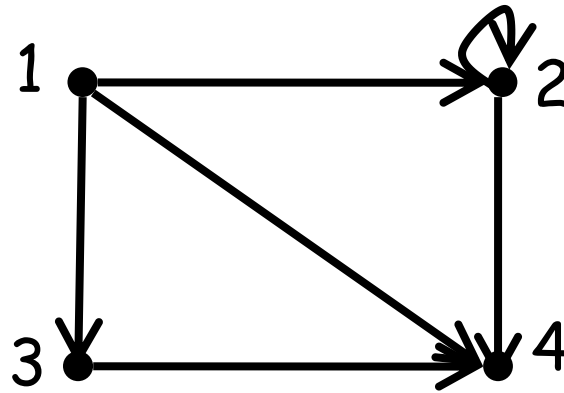


- Representación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relaciones de equivalencia

>> Considere la siguiente relación definida sobre $A=\{1,2,3,4\}$



- Complete la siguiente tabla de propiedades:

	Reflexiva	Simétrica	Antisimétrica	Transitiva
R_1	No	No	SI	SI

- Representéla en forma matricial

