Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

* Inducción matemática
* Ejemplos

Técnicas de demostración

Inducción matemática

• Muchos teoremas establecen que $P(n)$ es verdad para todos los enteros positivos n, donde $P(n)$ es una expresión matemática

Técnicas de demostración

Inducción matemática

Una prueba por inducción matemática consiste de dos pasos

- **Paso base**. Se muestra que la proposición **P(1)** se cumple
- **Paso inductivo**. Se supone que P(n) es cierto y se intenta demostrar que P(n+1) también. **P(n)→P(n+1)**

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = \sum_{i=1}^{99} i + 100$$

$n=1$ $\quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ $\quad 1 = 1$ ✓

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n+1$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} \leftarrow$$

$$\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leftarrow$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** P(1)

  $1 = 1\cdot 2/2 = 1$

*

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n \cdot (n+1)/2$**

- **Paso base**. $P(1)$

$$1 = 1 \cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n \cdot (n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad 1+2+3+\ldots+n+(n+1)$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **$1+2+3+\ldots+n$** es **$n\cdot(n+1)/2$**

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo**. $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

Técnicas de demostración

La suma de los n primeros enteros **1+2+3+…+n** es **n·(n+1)/2**

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1\cdot 2/2 = 1$$

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

$$1+2+3+\ldots+n = n\cdot(n+1)/2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)$$

$$= n\cdot(n+1)/2 + (n+1)$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)/2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

2×2^{10}

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$$

$6 \cdot 6^k = 6^{k+1}$

BASE $P(0)$

$$2^0 = 2^{0+1}-1$$

$$1 = 2-1 \qquad 1=1$$

Inductivo

$$\boxed{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+2^{n+1} \qquad 2^{(n+1)+1}-1$$

$$2^{n+1}-1+2^{n+1} \qquad 2^{n+2}-1$$

$$2(2^{n+1})-1 = 2^{n+2}-1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$$

?

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad 2^0+2^1+2^2+...+2^n+ 2^{n+1}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

- **Paso base.** P(0)

$$2^0 = 1 \text{ y } 2^{0+1}-1 = 1$$

- **Paso inductivo.** P(n)→P(n+1)

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n=2^{n+1}-1 \quad \Rightarrow \quad \underline{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n}+ 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1}-1) + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1}-1$$

$$= 2^{(n+1)+1}-1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

$P(1) \qquad 1=(1)^2$ ✓

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$\boxed{1+3+5+\ldots+(2n-1)}+(2n+1)=(n+1)^2$

$n^2+2n+1=(n+1)^2$

$(n+1)^2=(n+1)^2$ ✓

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

  $1 = 1^2$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. $P(1)$

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad ?$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow \boxed{1 + 3 + \ldots + (2n-1)} + (2n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n impares es n^2, es decir, $1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2$

- **Paso base**. P(1)

$$1 = 1^2$$

- **Paso inductivo**. $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1 + 3 + \ldots + (2n-1)} + (2n+1)$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= (n + 1)^2$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

Base $P(1)$ $\quad 1^2 = \frac{1(2)(3)}{6}$ $\quad 1=1$ ✓

Inductivo

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} =$$

$$\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\begin{array}{r|l}
2n^2+7n+6 & 2n+3 \\ \hline
-2n^2-4n & n+2 \\ \hline
3n+6 & \\
-3n-6 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

  $1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot 2\cdot 3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+ (n+1)^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

- **Paso base.** P(1)

$$1^2 = (1\cdot2\cdot3)/6$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6 \Rightarrow \underline{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}+(n+1)^2$$

$$= n(n+1)(2n+1)/6 + (n+1)^2$$

$$= (n+1)(2n^2+7n+6)/6$$

$$= (n+1)(2n+3)(n+2)/6$$

$$= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$p(1)$

$$1^3 = \left[\frac{1(2)}{2}\right]^2 \qquad 1^3 = 1^2 \quad \checkmark$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3}+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}\right]^2+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^2(n+1)}{4}$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1 \cdot 2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \Rightarrow \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{1^3+2^3+\ldots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

- **Paso base.** P(1)

$$1^3 = [(1\cdot 2)/2]^2$$

- **Paso inductivo.** $P(n)\rightarrow P(n+1)$

$$1^3+2^3+\dots+n^3=[n(n+1)/2]^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{1^3+2^3+\dots+n^3}+(n+1)^3$$

$$= [n(n+1)/2]^2+(n+1)^3$$

$$= n^2(n+1)^2/4 +(n+1)^3$$

$$= (n+1)^2[n^2/4 +(n+1)]$$

$$= (n+1)^2(n+2)^2/4 = [(n+1)(n+2)/2]^2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** P(1)

$$1\cdot 2=(1\cdot 2\cdot 3)/3=2$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

  $1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow \underline{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)} + (n+1) \cdot (n+2)$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

- **Paso base.** $P(1)$

$$1 \cdot 2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/3 = 2$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+2)/3 \Rightarrow$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2)$$

$$= n(n+1)(n+2)/3 + (n+1) \cdot (n+2)$$

$$= (n+1)(n+2)[\, n/3 + 1]$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)/3$$

$$= P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

$$1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** $P(1)$

  $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)!$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

$$1\cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1 \Rightarrow \underline{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!} + (n+1)\cdot(n+1)!$$

Técnicas de demostración

Demuestre que $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$

- **Paso base.** P(1)

$$1\cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$$

- **Paso inductivo.** $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1 \quad \Rightarrow \quad 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! + (n+1)\cdot(n+1)!$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)!$$

$$= (n+1)![1+(n+1)] - 1$$

$$= (n+1)!(n+2) - 1$$

$$= (n+2)! - 1 = P(n+1)$$

Técnicas de demostración

Demuestre que la suma de los primeros n pares es $n \cdot (n+1)$, es decir, $2+4+6+ \ldots + 2n = n \cdot (n+1)$