Distribuir 5 objetos indistinguibles en 3 cajas indistinguibles

$$\left.\begin{array}{ll} 5,0,0 & 2,2,1 \\ 4,1,0 & \\ 3,2,0 & \\ 1,1,3 & \end{array}\right\} 5$$

EVERGREEN

Tamaño 7

$E = 4$

$R = 2$

ER $\dfrac{7!}{3!}$

EE $\dfrac{7!}{2!2!}$

RR $\dfrac{7!}{4!}$

$E\begin{cases} V \\ G \\ N \end{cases}$ $3 \times \dfrac{7!}{3!2!}$

$R\begin{cases} V \\ G \\ N \end{cases}$ $3 \times \dfrac{7!}{4!}$

$\left.\begin{array}{l} V \\ G \\ N \end{array}\right\} 9$

$\left.\begin{array}{l} V \\ G \\ N \end{array}\right\} 2$ $3C2 \times \dfrac{7!}{4!2!}$

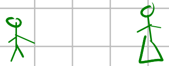
$r = 10$

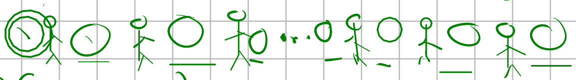
10 bolas indistinguibles, 8 cajas distinguies

$n = 8$

$C(17, 10)$

En grupo de n hombres y n mujeres. De cuantas formas se pueden ordenar estas personas en una fila si los hombres y las mujeres se deben alternar?





$2 \times n!\, P(n+1, n)$

¿Cuantas cadenas de bits contienen exactamente ocho ceros y diez unos si todos los ceros deben ir seguidos de un uno?

00

Jup

0 0 0 0 0 0 0 0

Mocia

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\_{1}\ 1\ \_{2}\ 1\ \_{3}\ 1\ \_{4}\ 1\ \_{5}\ 1\ \_{6}\ 1\ \_{7}\ 1\ \_{8}\ 1\ \_{9}\ 1\ \_{10}\ 1\ \_{11}$

$C(11, 8)$

¿Cuantas cadenas de 10 bits contienen al menos tres unos y tres ceros?

$\boxed{00}$ $\boxed{11}$

11

00011
0001
000∅

1 ——— 1
1 ——— 1

11100

Total $- C_{21} - C_{11} - C_{01}$

2 unos · 1 unos · 0 unos

$2^{10} - C(10,2) - C(10,1) - 1$

uno

cero

$C(10,2) - C(10,1) - 1$

$2^{10} - 2\,(C(10,2) + C(10,1) + 1)$

0 · 1

¿Cu\'antas cadenas de 10 d\'{i}gitos ternarios (0,1 o 2) contienen exactamente dos ceros, tres unos y cinco doses?

$$C(\overset{0}{10},2)\,C(\overset{1}{8},3)\,C(\overset{2}{5},5) = 2520$$

$$C(\underset{2}{10},5)\,C(\underset{1}{5},3)\,C(\underset{0}{2},2) = 2520$$

Supongamos que un departamento tiene 10 hombres y 15 mujeres. De cu\'antas maneras se puede formar una comisión de seis miembros si debe haber igual n\'umero de hombres que de mujeres?

3 

$C(10,3)\,C(15,3)$

¿De cu\'antas formas se pueden distribuir seis bolas indistinguibles en nueve cajas distintas?

$r = 6$

$n = 9$

$C(14, 6)$

Recordar en combinatoria con repetición, el n son los elementos que son DISTINGUIBLES y el r los INDISTINGUIBLES

¿De cu\'antas formas se pueden elegir ocho monedas de una bolsa que contiene ~~100~~ monedas de un euro y ~~80~~ monedas de dos euros? Hay más de 8 monedas de CADA denominación

Distinguir: 1€, 2€

$n = 2$
$r = 8$

$C(9, 8)$

\item Se tira una moneda al aire diez veces y los resultados posibles son cara y sello. Cu\'antos resultados
\begin{enumerate}
\item ¿hay en total
\item ¿tienen exactamente dos caras?
\item ¿tienen al menos tres caras?
\end{enumerate}

$C(n,n)=1$

1) 2^{10}

2) $\underbrace{C(10,2)}_{cara} \; C(\overset{sello}{8},8) = 45$

$C(10,8)\;C(2,2) = 45$

3) $2^{10} - C(10,2)\,C(\underbrace{8,8}_{1}) - C(10,1)\,C(9,9)$

$C(10,0)\,C(10,10)$

$2^{10} - C(10,8)\,C(2,2) - C(10,9)\,C(1,1) - C(10,10)\,C(0,0)$

Recurrencias lineales homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Julio 2020

Complejidades en O

Polominomicas P

Complejidad	Terminología
$O(1)$	Complejidad constante
$O(logn)$	Complejidad logarítmica
$O(n)$	Complejidad lineal
$O(nlogn)$	Complejidad n log n
$O(n^b)$,donde b es un racional, $b \geq 1$	Complejidad polinómica
$O(b^n)$, donde $b > 1$	Complejidad exponencial
$O(n!)$	Complejidad factorial

NP

No polinomica $O(n^n)$

Contenido

Recurrencias

- Las relaciones de recurrencia juegan un papel importante en el estudio de los algortimos. Recursivos
- La programación dinámica en la cual el algoritmo parte un problema e varios subproblemas. Recursivos
- La complejidad de tales algoritmos puede ser analizada usando especiales relaciones de recurrencia.
- También la complejidad de los algoritmos de divide y vencerás pueden ser analizados mediante relaciones de recurrencias.
- Podemos resolver problemas avanzados de conteo usando las funciones generatrices para resolver relaciones de recurrencias.

Problema bacterias

Suponga que el número de bacterias de una colonia se dobla a cada hora. Si la colonia comienza con 5 bacterias. ¿Cuántas bacterias habrán en n horas?

1. Sea a_n el número de bacterias al final de las n horas.
2. Como el número de bacterias es el doble cada hora tenemos la relación a_n=2a_{n-1} para $n \in Z^+$.
3. Por lo tanto al cabo de 5 horas habrán : Sea $a_0 = 5$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2a_0 = 2 \cdot 5 = 10 \\
a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 10 = 20 \\
a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 20 = 40 \\
a_4 &= 2a_3 = 2 \cdot 40 = 80 \\
a_5 &= 2a_4 = 2 \cdot 80 = 160
\end{aligned}
$$

Problema conejos

Una pareja de conejos recién nacidos (uno de cada sexo) se sueltan en una isla. Los conejos no pueden tener descendencia hasta que cumplan dos meses, cada pareja tiene como descendencia otra pareja de conejos cada mes. Encuentre el número de conejos una vez transcurridos n meses.

mes	Parejas Repro.	Parejas Jov
1	0	1_A
2	0	1_A
3	1_A	1_B
4	1_A	$1_B + 1_C$
5	$1_A + 1_B$	$1_{B_1} + 1_C + 1_D$
6	$1_A + 1_B + 1_C$	$1_{B_1} + 1_{B_2} + 1_{C_1} + 1_D + 1_E$
7	$1_A + 1_B + 1_C + 1_{B_1} + 1_D$	$1_{B_{1_1}} + 1_{B_2} + 1_{B_3} + 1_{C_1} + 1_{C_2} + 1_{D_1} + 1_E + 1_F$

Problema de los conejos ($f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)

$F(1) = F_1$ $\quad F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_3 = 2$

$F_4 = 3 \quad F_5 = 5 \quad \boxed{F_6 = 8}$

$F_6 = F_5 + F_4$

$F_5 = F_4 + F_3$

$F_3 = F_1 + F_2$

mes	Parejas Repro.	Parejas Jov
1	0	1_A
2	0	1_A
3	1_A	1_B
4	1_A	$1_B + 1_C$
5	$1_A + 1_B$	$1_{B_1} + 1_C + 1_D$
6	$1_A + 1_B + 1_C$	$1_{B_1} + 1_{B_2} + 1_{C_1} + 1_D + 1_E$
7	$1_A + 1_B + 1_C + 1_{B_1} + 1_D$	$1_{B_{1_1}} + 1_{B_2} + 1_{B_3} + 1_{C_1} + 1_{C_2} + 1_{D_1} + 1_E + 1_F$

Condiciones iniciales

1. El primer mes el número de parejas jóvenes de conejos es $f_1 = 1$ si f_n es el número de parejas en n meses.
2. Durante el segundo mes $f_2 = 1$ y f_{n-1} el número de parejas que había el mes anterior.

   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = 1 \quad F_2 = 1$

3. f_{n-2} es el número de parejas en cada nacimiento par.

Universidad del Valle

Problemas de conejos como una relación de recurrencia

Sea $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$ entonces

$$\boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}$$

para $n \geq 3$

Problema bancario

Supongamos que una persona deposita 10000 pesos en una cuenta bancaria que le proporciona un interés anual del 11%. Si los intereses se abonan a la misma cuenta. ¿Cuanto dinero habrá en la cuenta al cabo de 30 años?

Sea P_n: saldo de la cuenta la cabo de n años.
P_{n-1}: saldo de la cuenta transcurridos $n-1$ años.
$0.11P_{n-1}$ es el interés y P_{n-1} es el saldo. Por lo tanto, para $P_0 = 10000$

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Calculamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$

Problema bancario

Supongamos que una persona deposita 10000 pesos en una cuenta bancaria que le proporciona un interés anual del 11%. Si los intereses se abonan a la misma cuenta. ¿Cuanto dinero habrá en la cuenta al cabo de 30 años?

$P_0 = 10000$

$P_1 = 10000 \times 1.11$

$P_2 = 1.11\, P_1$

$P_3 = 1.11\, P_2$

$\vdots$

$$\boxed{P_n = 1.11\, P_{n-1}}$$

$$\underbrace{1}_{\text{capital}} + \underbrace{0.11}_{\text{interes}}$$

$(1 + 0.11)$

$P_0 = 10000$

$P_1 = 1.11\, P_0$

$P_2 = 1.11\, P_1 = 1.11^2\, P_0$

$P_3 = 1.11\, P_2 = 1.11^3\, P_0$

$P_4 = 1.11\, P_3 = 1.11^4\, P_0$

$$P_n = 1.11^n\, P_0$$

$$\boxed{P_n = 10000 \times 1.11^n}$$

Problema bancario

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1.11P_{n-1}$$

Calculamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1.11P_0 \\
P_2 &= 1.11(1,11)P_1 = (1,11)^2 P_0 \\
P_3 &= 1.11P_2 = (1,11)^3 P_0 \\
&\vdots \\
\boxed{P_n} &\boxed{= (1.11)^n P_0}
\end{aligned}$$

Universidad del Valle

Problema bacterias

Suponga que el número de bacterias de una colonia se triplica a cada hora.

1. Determinar una relación de recurrencia para el número de bacterias después de transcurridas n horas

$a_0 = \underline{1}0$

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$a_1 = 3a_0$

$a_2 = 3a_1 = 3^2 a_0 \longrightarrow \boxed{a_n = 3^n a_0}$

Problema bacterias

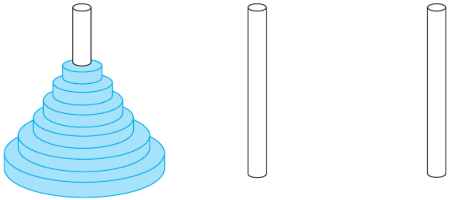
2. Si se utilizan 100 bacterias para empezar una nueva colonia ¿Cuántas bacterias habrá en la colonia después de diez horas? $a_0 = 100$

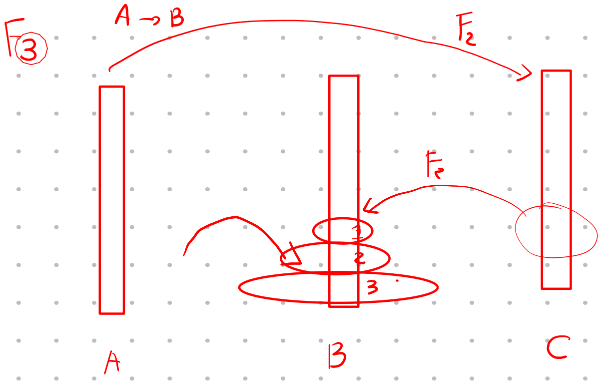
$$\begin{aligned} a_1 &= 3a_0 \\ a_1 &= 3(100) \\ a_2 &= 3 \cdot 3(100) \\ a_3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3(100) \\ &\vdots \\ a_n &= 3^n(100) \end{aligned}$$

Si $n = 10$ tenemos $a_{10} = 3^{10}(100)$ bacterias.

Torres de Hanoi

Se componen tres barras montadas sobre una base cada una junto con discos de diferentes tamaños. Reglas del juego:
1. Los discos se mueven de uno en uno.
2. Un disco no se puede colocar encima de otro más pequeño.
3. Los discos colocados en la primera barra se deben colocar en la segunda barra ordenados con el de mayor base.





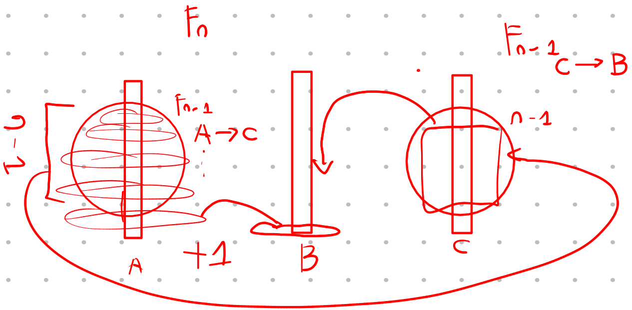
F_2

1) ① A → B
2) ② A → C
3) ① B → C

4) ③ A → B

5) ① C → A
6) ② C → B
7) ① A → B

F_2



$$F_n = 2\underbrace{F_{n-1}}_{n-1} + \underbrace{1}_{n}$$

A → C
C → B

Solución de Torres de Hanoi

Sea H_n número de movimientos necesarios para resolver el problema con n discos. Sea H_1 el movimiento de tener un disco.

$H_n = 2H_{n-1} + 1$

1. Los $n-1$ discos de encima se pueden llevar a cualquier torre, realizando H_{n-1} movimientos.
2. Siempre se realizan H_{n-1} para mover el disco a una torre y H_{n-1} a la otra

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

$$H_2 = 2H_1 + 1 = 3$$
$$H_3 = 2H_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$
$$H_4 = 2H_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$\boxed{H_n = 2H_{n-1} + 1} \quad n > 1$$

Metodo expansión

$H_1 = 1$

$H_2 = 2H_1 + 1$

$H_3 = 2H_2 + 1$

$= 2(2H_1 + 1) + 1$

$H_3 = 2^2 H_1 + 2 + 1$

$H_4 = 2H_3 + 1$

$H_4 = 2(2^2 H_1 + 2 + 1) + 1$

$H_4 = 2^3 H_1 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

$$H_n = 2^{n-1} H_1 + \underbrace{2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^1 + 2^0}$$

$$H_n = 2^{n-1} \times H_1 + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1} \quad r \neq 1$$

$a = 1 \quad r = 2$

$$H_n = 2^{n-1} H_1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2-1} \rightarrow \frac{2^n}{2}(1) + \frac{2^n}{2} - 1$$

$$2^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1$$

1

$$H_n = \frac{2^n}{2} + \frac{2^n}{2} - 1 = \boxed{2^n - 1}$$

$H_1 = 2^1 - 1 = 1$

$H_2 = 2^2 - 1 = 3$

$\boxed{H_3 = 2^3 - 1 = 7}$

$H_4 = 2^4 - 1 = 15$

Definición

Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para el número de cadenas de n bits que **NO** contienen dos ceros consecutivos. ¿Cuántas cadenas de longitud 4 hay?

10

n	1	2	3	4
	0	01	010	0101
	1	10	011	0110
		11	101	0111
			110	1010
			111	1011
				1101
				1110
				1111
Total	2	3	5	8

$2+3$ $\qquad$ $5+3$

$$F_n = \underbrace{F_{n-1}}_{\text{Agregar } 1} + \underbrace{F_{n-2}}_{\text{agregar } 10}$$

$F[1]=2$

$F[2]=3$

n	n+1
0	0, 1
⋮	⋮
1	0, 1
k	2k

$$F_n = \underbrace{F_{n-1}}_{} + F_{n-2}$$

$F[1]=2$
$F[2]=3$

$F_3 = F_2 + F_1$

$F_4 = F_3 + F_2$

$F_4 = (F_2 + F_1) + F_2$
$2F_2 + F_1$

$F_5 = F_4 + F_3$

$F_5 = 2F_2 + F_1 \quad F_2 + F_1$
$= 3F_2 + 2F_1$

$F_6 = F_5 + F_4$
$= 3F_2 + 2F_1 + 2F_2 + F_1$
$= 5F_2 + 3F_1 \quad \underline{\underline{x}}$

En este punto el método
de expansión es complicado

$F(n) = 3F_{n-1} + 8n \qquad F_1 = 4$

$F_2 = 3F_1 + 8(2)$

$F_3 = 3F_2 + 8(3)$

$3(3F_1 + 8(2)) + 8(3)$

$3^2F_1 + 3\,8(2) + 3^0\,8(3)$

$F_4 = 3F_3 + 8(4)$

$F_4 = 3(3^2F_1 + 3\,8(2) + 3^0\,8(3)) + 8(4)$

$F_4 = 3^3F_1 + 3^2\,8(2) + 3^1\,8(3) + 3^0\,8(4)$

$2 \rightarrow 4$

n-2 ... 3 2 1 0

$F_n = 3^{n-1}F_1 + 3^{n-2}\,8(2) + 3^{n-3}\,8(3) + 3^{n-4}\,8(4) + \dots + 3^1\,8(n-1) + 3^0\,8(n)$

aumenta

$2 \rightarrow n$

i	Potencia	mul
0	0	n
1	1	n-1
2	2	n-2
⋮	⋮	3
n-2	n-2	2

n-i

disminuye $n-2 \rightarrow 0$

$$F_n = 3^{n-1}F_1 + \sum_{i=0}^{n-2} 3^i \times 8(n-i)$$

$$F_n = \frac{3^n}{3}4 + \sum_{i=0}^{n-2} 3^i\,8n + \sum_{i=0}^{n-2} -3^i\,8i$$

$$F_n = \frac{3^n}{3}4 + 8n\sum_{i=0}^{n-2} 3^i - 8\sum_{i=0}^{n-2} 3^i \times i \qquad -8$$

$$F_n = \frac{3^n}{3}4 + 8n\left(\frac{3^{n-1}-1}{3-1}\right) - 8\sum_{i=0}^{n-2} 3^i \times i$$

```
int funcion(int a){
    if(a==0){
        return 1;
    }
    else{
        return 2*funcion(a-1));
    }
}
```

Funcion(0) = 1

n>0} • $\underbrace{\text{Funcion}(n)}$ = 2*Funcion(n-1)

F(n) = 2 F(n-1)   F(0) = 1

Definición

Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para el número de cadenas de n bits que **NO** contienen dos ceros consecutivos.¿Cuántas cadenas de longitud 4 hay?

Inicialmente, a_n: Cadenas de n bits que inician en 1 + Cadenas de n bits que inician en 0.
Si $n = 1$, 0 y 1, $a_1 = 2$ (cadenas de longitud 1)
Si $n = 2$, 01, 10, 11, $a_2 = 3$ (cadenas de longitud 2)
Si $n = 3$

Problemas de cadenas con relación de recurrencia

1. Tomamos las cadenas de $n-1$ bits y le añadimos un 1 al principio, sea $n-1=2$, es decir, $01, 10, 11$ y le agregamos 1, $011, 101, 111$
2. Tomamos las cadenas de $n-2=1$ bits y le añadimos un 10 al principio, entonces $010, 110$. Por lo tanto tenemos que $a_3=5$, es decir, $a_3=a_2+a_1=3+2=5$

En general,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{para} \quad n \geq 3$$

a_{n-1}: cadenas de $n-1$ bits que inician en 1.
a_{n-2}: cadenas de $n-2$ bits que inician en 0.

Contenido

Recurrencias lineales homogéneas

Recurrencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes

Una relación lineal, homogénea con coeficientes constantes es de la forma:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \quad \text{Homogénea de orden } k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes reales y $c_k \neq 0$

$F_n = a_1 F_{n-1} + a_2 F_{n-2} + a_3 F_{n-3} + \ldots + a_k F_{n-k}$

$a_i \neq 0$

Recurrencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes

Para resolver la R.R suponemos una solución $\boxed{a_n = r^n}$, r constante.

$a_n = r^n$ es solución de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ **sii**

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k} \tag{1}$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$$a_n = c_1 (c_1 a_{n-2} + c_2 a_{n-3} + \dots + c_k a_{n-k-1}) + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$$c_1(c_1(c_1 a_{n-3} + c_2 a_{n-4} + \dots + c_k a_{n-k-2}) + c_2 a_{n-3} + \dots + c_k a_{n-k-1}) + c_2(c_1 a_{n-3} + c_2 a_{n-4} + \dots + c_k a_{n-k-2}) + \dots + c_k a_{n-k}$$

$c_1^3 \quad c_1^2 c_2 \quad c_1^2 c_3 \quad c_1^2 c_k \quad + \quad c_2 c_1 + c_2^2$

$a_n \longrightarrow a_0$

$c_1^n + \underline{\qquad ? \qquad} \rightarrow r^n$

$$\boxed{a_n = r^n}$$

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdot + C_k a_{n-k}$$

$$r^n = C_1 r^{\boxed{n-1}} + C_2 r^{\boxed{n-2}} + \dots + C_k r^{\boxed{n-k}} \qquad \boxed{a_n = r^n}$$

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{C_1 r^{n-1}}{r^{n-k}} + \frac{C_2 r^{n-2}}{r^{n-k}} + \dots + \frac{C_k r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

$(n-(n-k))$ $\qquad (n-1)-(n-k)$

$$r^k = C_1 r^{k-1} + C_2 r^{k-2} + \dots + C_k \cancel{r^0}^{\,1}$$

Polinomio de grado k

$$r^k - C_1 r^{k-1} - C_2 r^{k-2} - \dots - C_k r^0 = 0$$

ECUACION CARACTERÍSTICA

Recurrencias lineales homogéneas

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k} \tag{2}$$

Dividimos por r^{n-k}

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{c_1 r^{n-1}}{r^{n-k}} + \frac{c_2 r^{n-2}}{r^{n-k}} + \ldots + \frac{c_k r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

Planteamos la ecuación característica:

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_{k-1} r + c_k \tag{3}$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0 \tag{4}$$

$a_n = r^n$ es solución **sii** r es solución de (4)

Recurrencias lineales homogéneas

Teorema

Sean c_1 y c_2 reales, supongamos que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ tiene dos raices reales distintas r_1 y r_2. Entonces la suceción $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ sii $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, para $n = 0, 1, 2$ donde α_1 y α_2 son constantes.

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$

1. La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = -1$. Así **Por teorema**, la secuencia $\{a_n\}$ es la solución de la recurrencia **sii**

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1) \end{aligned}$$

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $a_0 = 2$ y $a_1 = 7$

2. Entonces $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -1$ por lo tanto la solución de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

$a_3 = a_2 + 2a_1 \quad a_3 = 11 + 2\times 7 = 25$

$a_2 = a_1 + 2a_0 \quad a_2 = 7 + 2\times 2 = 11$

Obtener la ecuación característica y solución de la recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $\boxed{a_0 = 2 \text{ y } a_1 = 7}$

1) obtener E C

$\boxed{a_n = r^n}$ $\quad a_{n-1} = r^{n-1}$ $\quad a_{n-2} = r^{n-2}$

$r^n = \boxed{r^{n-1}} + 2r^{n-2}$

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{2r^{n-2}}{r^{n-2}} \to \boxed{r^2 = r + 2}$$

E.C

$\boxed{r^2 - r - 2 = 0}$

$(r - a)(r - b) = 0$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to ax^2 + bx + c$$

Raices

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\boxed{a_n = A\,2^n + B(-1)^n}$$

$a_1 = 7$

$2 = A\,2^0 + B(-1)^0$

$7 = A\,2^1 + B(-1)^1$

$$\begin{array}{l} 2 = A + B \\ 7 = 2A - B \\ \hline 9 = 3A \end{array}$$

$\boxed{A = 3}$

$2 = 3 + B$

$\boxed{B = -1}$

$a_n = 3\,2^n - (-1)^n$

$a_2 = 3\times 2^2 - (-1)^2$

$a_3 = 3\times 2^3 - (-1)^3$

n	Valor	Ec
0	2	2 ✓
1	7	7 ✓
2	11	11 ✓
3	25	25 ✓

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \qquad f(0) = 0, f(1) = 1$$

E.C

$$F(n) = r^n$$

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

$$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{r^{n-2}}{r^{n-2}} \longrightarrow r^2 = r + 1$$

$ax^2 + bx + c$

$r^2 - r - 1 = 0$ E.C

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Proporção áurea

$$F(n) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 1 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}}$$

$n = 0$

$n = 1$

$A = -B \qquad B = -A$

$$1 = A\left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - A\left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = A\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \qquad 1 = A(\sqrt{5}) \qquad A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Resolver la relación de recurrencia de fibonacci
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$ por tanto la ecuación característica $r^2 - r - 1 = 0$ cuyas raíces son: $r_1 = (1+\sqrt{5})/2$ y $r_2 = (1-\sqrt{5})/2$ por lo tanto por teorema:

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Para algunas constantes α_1 y α_2 y las condiciones iniciales $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ f_1 &= \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Resolver la relación de recurrencia de fibonacci
La solución de las ecuación $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$ y $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$, por tanto una **fórmula explicita de Fibonacci:**

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$a_0 = 2$

$a_1 = 8$

$a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$

$a(n+2) = -4a(n+1) + 5a(n)$

$a_{n+2} = r^{n+2}$

$a(n) = \underset{\sim}{} r^n$

$a(n+1) \sim r^{n+1}$

$a(n+k) \sim r^{n+k}$

$$\frac{r^{n+2}}{r^n} = \frac{-4r^{n+1}}{r^n} + \frac{5r^n}{r^n}$$

$a(n) = x\,a(n-1)$

$$\boxed{r^2 = -4r + 5}$$

El objetivo es que EC NO TENGA n

$r^2 + 4r - 5 = 0$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} \begin{cases} \dfrac{-4+6}{2} = 2 \\ \dfrac{-4-6}{2} = -10 \end{cases}$$

$r_1 = 1 \qquad r_2 = -5$

$1^n \longrightarrow 1$

$a(n) = A(1)^n + B(-5)^n$

$a(n) = A + B(-5)^n$

$2 = A + B$

$8 = A - 5B$

$-6 = 6B$

$\boxed{B = -1}$

$2 = A - 1$

$\boxed{A = 3}$

$$\boxed{a(n) = 3 - 1(-5)^n}$$

Resolver la recurrencia $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ para $n \geq 0$, $a_0 = 2$ y $a_1 = 8$

1. Sea $a_{n+2} = r^{n+2}$ para $n \geq 0$ por tanto se obtiene la ecuación característica $r^2 + 4r - 5 = (r+5)(r-1) = 0$ cuyas raíces $r_1 = -5$ y $r_2 = 1$
2. La sucesión $\{a_n\}$ es solución de la recurrencia:

$$a_n = \alpha_1(-5)^n + \alpha_2(1)^n$$

3. Por tanto el sistema de ecuaciones para obtener α_1 y α_2

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 &= 8 = \alpha_1(-5) + \alpha_2 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 = 3$

$a_n = 3(1)^n - (-5)^n$

Teorema 2

Sean c_1 y c_2 reales con $c_2 \neq 0$, supongamos que $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ tiene una sola raíz r_0. Una secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ **sii** $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, para $n = 0, 1, 2$ donde α_1 y α_2 son constantes.

Recurrencias lineales homogéneas

Solucionar la recurrencia $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ y condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 6$

1. Entonces $r^2 - 6r + 9 = 0$, $(r-3)^2 = 0$ tiene como única raíz $r = 3$.
2. La solución de la recurrencia por **teorema 2** es:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

3. Usando los valores iniciales calculamos:

$$\begin{aligned} a_0 &= & 1 = \alpha_1 \\ a_1 &= 6 & = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Entonces $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$

$$a_n = 3^n + n3^n$$

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$

$b = -6$

$r^2 = 6r - 9$ $\quad \boxed{r^2 - 6r + 9 = 0}$ $\quad \dfrac{6 \pm \cancel{\sqrt{36-4(9)}}^{\,0}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$\boxed{r_1 = 3 \quad r_2 = 3}$

$a_0 = 1$

$a_1 = 6$

$a_n = A(3)^n + Bn(3)^n$

$n=0 \quad 1 = A$ $\quad \boxed{A = 1}$

$n=1 \quad 6 = 3A + 3B$

$6 = 3 + 3B \quad 3 = 3B$ $\quad \boxed{B = 1}$

$a_n = 3^n + n3^n$

INCORRECTO n

$a_n = A3^n + B3^n$

$\times$

$1 = A + B \rightarrow 3 = 3A + 3B$

$6 = 3A + 3B$

Teorema 3

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con k **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son constantes.

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

1. La ecuación característica $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 1, r_2 = 2$ y $r_3 = 3$, porque $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$
2. La solución de la recurrencia: $r=1$ $r=2$ $r=3$

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

Por tanto las constantes deben ser calculadas

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3,$$
$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9$$

Encontrar la solución de $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, con condiciones iniciales, $a_0 = 2, a_1 = 5$ y $a_2 = 15$

3. Resolviendo el sistema de ecuaciones, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$, Por lo tanto la **única solución** de la recurrencia es la secuencia $\{a_n\}$ con

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Teorema 4

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reales. Supongamos la ecuación característica

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

Con t **raíces distintas** $r_1, r_2, \ldots, r_t$ con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_t$ respectivamente, así que $m_i \geq 1$, para $i = 1, 2, \ldots, t$ y $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$ Entonces la secuencia $\{a_n\}$ es una solución de la recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sii

$$\begin{aligned} a_n = {} & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + \\ & (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n + \ldots + \\ & (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n \end{aligned}$$

Para $n = 0, 1, 2, \cdots$ donde $\alpha_{i,j}$ son constantes para $1 \leq i \leq t$ y $0 \leq j \leq m_i - 1$

Universidad del Valle

$r_1 = m_1$ $\qquad$ $r_2 = m_2$

$$\left(A_1 + A_2 n + A_3 n^2 + \dots + A_{m_1} n^{(m_1-1)}\right) r_1^n +$$

$$\left(B_1 + B_2 n + B_3 n^2 + \dots + B_{m_2} n^{m_2-1}\right) r_2^n$$

Supongan EC, $\{\underbrace{2,2,2,2,2,2}_{6},\underbrace{3,3,3,3}_{4},\underbrace{4,4,4,4,4,4,4,4,4,4}_{10},\underbrace{5,5}_{2},\underbrace{6}_{1}\}$

23

$T(1)$

$T(22)$

$$\begin{array}{ccccccc} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 \\ a_n = (& A + & Bn + & Cn^2 + & Dn^3 + & En^4 + & Fn^5 \,)\, 2^n + \end{array}$$

$$(G + Hn + In^2 + Jn^3)\, 3^n +$$

$$(K + Ln + Mn^2 + Nn^3 + On^4 + Pn^5 + Qn^6 + Rn^7 + Sn^8 + Tn^9)\, 4^n +$$

$$(U + Vn)\, 5^n + W 6^n$$

22I y 22E

Supongamos que las raíces de la ecuación característica son $2, 2, 2, 5, 5$ y 9 que forma tiene la solución general.

1. Hay tres raíces distintas.
2. Raíz 2 con multiplicidad 3, Raíz 5 con multiplicidad 2 y la raíz 9 con multiplicidad 1.
3. Solución

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2)2^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n)5^n + \alpha_{3,0}9^n$$

Encontrar la solución la recurrencia

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Con $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$, la ecuación característica de la recurrencia es :

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$$

Hay una sola raíz $r = -1$ de multiplicidad 3. Por lo tanto la solución de la recurrencia es:

$$a_n = \alpha_{1,0}(-1)^n + \alpha_{1,1}n(-1)^n + \alpha_{1,2}n^2(-1)^n$$

$$a_0 = 1 = \alpha_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2},$$

$$a_2 = -1 = \alpha_{1,0} + 2\alpha_{1,1} + 4\alpha_{1,2}$$

Entonces $\alpha_{1,0} = 1, \alpha_{1,1} = 3$ y $\alpha_{1,2} = -2$, la única solución es la secuencia $\{a_0\}$

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

Encontrar la solución la recurrencia

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

Con $a_0 = 1, a_1 = -2$ y $a_2 = -1$, la ecuación característica de la recurrencia es :

$$\boxed{r^3 + 3r^2 + 3r + 1} \qquad r = -1 \qquad m = 3$$

$$a_n = (A + Bn + Cn^2)(-1)^n$$

$n = 0$ $\quad 1 = A$

$n = 1$ $\quad -2 = (A + B + C)(-1)$

$n = 2$ $\quad -1 = (A + 2B + 4C)(-1)^2$

$1 = A$

$-2 = (1 + B + C)(-1)$

$-1 = 1 + 2B + 4C$

$-1 = -B - C$

$-2 = 2B + 4C$

$-2 = -2B - 2C$

$-2 = 2B + 4C$

$-4 = 2C$

$$\boxed{C = \frac{-4}{2} = -2}$$

$-1 = -B + 2$

$B = 2 + 1$

$$\boxed{B = 3}$$

$$\boxed{a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n}$$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Universidad del Valle

Gracias

Próximo tema:
Recurrencias no homogéneas