# Recurrencias lineales no homogéneas

**Universidad del Valle**
**EISC**

Septiembre 2018

## Contenido

## Recurrencias lineales no homogéneas

Ecuacion homogenea

**Solución a recurrencias No homogéneas**

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + \boxed{F(n)}$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$
Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$
Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

## Recurrencias lineales no homogéneas

**Teorema1**

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

### Ejercicio 1

**Determinar todas las soluciones de** $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

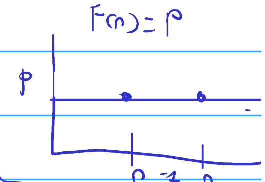
$\boxed{F(n) = 2F(n-1)} + 1$ $\qquad F(1) = 1$

$F(n) = \{F(n)\}^{(h)} + \boxed{\{F(n)\}^{(p)}}$

$\{F(n)\}^{(h)}$ $\qquad F(n) = 2F(n-1) \qquad F(n) = r^n$

$r - 2 = 0$ EC $\qquad \dfrac{r^n}{r^{n-1}} = \dfrac{2r^{n-1}}{r^{n-1}} \Rightarrow r = 2$

$\boxed{F(n) = A2^n}$ $\qquad \boxed{r - 2 = 0}$ $\qquad F(n) = p$




$\{F(n)\}^{p}$

$\boxed{F(n) = p}$

$p = 2p + 1 \qquad \boxed{p = -1}$

Sol homogena + Sol particula

$F(n) = A2^n - 1$

$1 = A2 - 1 \qquad 2A = 2 \qquad A = 1$

$$\boxed{F(n) = 2^n - 1}$$

### Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de $a_{n-1}$ la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \underline{\alpha 2^n}$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $\underline{a_n^{(p)} = A}$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

## Recurrencias lineales no homogéneas

### Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de $\alpha$
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de $\alpha$. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$\boxed{a_n = 2^n - 1}$$

$$\boxed{a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}} + \boxed{7^n}$$

homogenea particular

$r^n$

$a_n = \{a_n\}^h + \{a_n\}^p$

· $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

E.C $r^2 - 5r + 6 = 0$ $\quad r = \{-2, -3\}$

$$\boxed{a_n = A(-2)^n + B(-3)^n}$$

$\boxed{a_n^{(p)} = C\,7^n}$ $\quad$ · $C7^n = 5C7^{n-1} - 6C7^{n-2} + 7^n$

$$C7^n = \frac{5}{7}C7^n - \frac{6}{49}C7^n + 7^n$$

$$7^n \left\{ \; C = \frac{5}{7}C - \frac{6}{49}C + 1 \right.$$

$$-1 = \left(\frac{5}{7} - \frac{6}{49} - 1\right)C \qquad -1 = \left(\frac{35}{49} - \frac{6}{49} - \frac{49}{49}\right)C$$

$$-1 = \frac{-20}{49}C \qquad \boxed{\frac{49}{20} = C} \qquad \boxed{a_n^{(p)} = \frac{49}{20}7^n}$$

$$\boxed{a_n = A(-2)^n + B(-3)^n + \frac{49}{20}7^n}$$

## Recurrencias lineales no homogéneas

### Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**
La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de $a_{n-1}$ y el de $a_{n-2}$ la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

### Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la $n$.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$\underline{a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n}$$

## Colocar orden polinomios

**Forma de las soluciones particulares**

Pil$_0$

| $F(n)$ | $a_n^{(p)}$ |
|---|---|
| $C_1$ | $A$ |
| $n$ | $A_1 n + A_0$ |
| $n^2$ | $A_2 n^2 + A_1 n + A_0$ |
| $n^t, t \in Z^+$ | $A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$ |
| $r^n, r \in R$ | $Ar^n$ |
| $\sin(\alpha n)$ | $A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$ |
| $\cos(\alpha n)$ | $A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$ |
| $n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$ | $r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$ |
| $r^n \sin(\alpha n)$ | $Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$ |
| $r^n \cos(\alpha n)$ | $Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$ |

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

**Dada la recurrencia** $\boxed{a_n = 2a_{n-1}} + \boxed{n+5}$ determine la solución para $a_0 = 4$

polinomio grado 1

$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

$a_n^h$

E.C $r - 2 = 0$ $\boxed{r = 2}$

$$\boxed{a^h(n) = A(2)^n}$$

$$a_n^{(p)} = \underline{Bn + C}$$

$$Bn + C = 2(B(n-1) + C) + n + 5$$

$$\cancel{Bn} + C = 2\cancel{Bn} - 2B + 2C + \cancel{n} + 5$$

$n$: $B = 2B + 1$ $\boxed{B = -1}$

cte: $C = -2B + 2C + 5$

$C = 2 + 2C + 5$

$-C = 7$ $\boxed{C = -7}$

$$\boxed{a(n) = A\,2^n - n - 7}$$

$a_0 = 4$

$4 = A2^0 - 0 - 7$

$4 = A - 7$ $A = 11$

$$\boxed{a(n) = 11 \times 2^n - n - 7}$$

:)

## Recurrencias lineales no homogéneas

**Dada la recurrencia** $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$\boxed{a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7}$$

## Recurrencias lineales no homogéneas

**Teorema 2**

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_1n + b_0)S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a $S^n$ donde $S$ es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si $S$ no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:

$$(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)S^n$$

$A2^n + B3^n + \boxed{C8^n}$ Sr

- Cuando $S$ es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma

$$n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)S^n$$

$A2^n + B3^n + C2^n$

$A2^n + B3^n + Cn2^n$

## Recurrencias lineales no homogéneas

.

**Encontrar la solución general de la recurrencia**

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

$\underline{\underline{2^n}}$

$(\beta_0\ )2^n$

$\underline{\underline{n\beta 2^n}}$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$nC2^n + An + B = 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B]$$
$$-6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n$$

$\underline{\underline{n^0 2^n}}$ $\underline{\underline{\beta_0 2^n}}$

$m=1$

$n^1 \beta_0 2^n = n\beta_0 2^n$

**Encontrar la solución general de la recurrencia**

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$\begin{aligned} nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\ nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2 \end{aligned}$$

$$An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n$$
$$An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \rightarrow 2A - 3 = 0, A = 3/2,$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$

La solución de la recurrencia es:

$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

$-2n2^n$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

$a_n^{(h)}$

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ $\rightarrow$ $a_n = r^n$

$r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}$ $\qquad \frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{5r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{6r^{n-2}}{r^{n-2}}$

$r^2 = 5r - 6$ $\qquad \boxed{r^2 - 5r + 6 = 0}$

$0 = (r-2)(r-3)$ $\quad r = 2$, $r = 3$ $\qquad \boxed{a_n^{(h)} = A2^n + B3^n}$

$r^n \quad nr^n \quad n^2r^n \ldots n^k r^n$

$a^{(p)}$ $\qquad F(n) = 2^n + 3n$

$r^n$ $\qquad$ Pol grado 1

$a^{(p)} = \boxed{Cn2^n + Dn + E}$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$$

$Cn2^n + Dn + E = 5(C(n-1)2^{n-1} + D(n-1) + E) -$
$6(C(n-2)2^{n-2} + D(n-2) + E) +$
$2^n + 3n$

$2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$

$2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$

$n2^n$ | $C = \frac{5C}{2} - \frac{6C}{4}$ $\quad C = \frac{10C}{4} - \frac{6C}{4}$ $\quad C = \frac{4}{4}C$ $\quad \boxed{C = C}$

$2^n$ | $0 = -\frac{5}{2}C - \left(-\frac{12}{4}C\right) + 1$ $\quad 0 = -\frac{5}{2}C + 3C + 1$

$0 = -\frac{5}{2}C + \frac{6}{2}C + 1$ $\quad -1 = \frac{1}{2}C$ $\quad \boxed{C = -2}$

$n$ | $D = 5D - 6D + 3$ $\quad D = -D + 3$ $\quad 2D = 3$ $\quad \boxed{D = \frac{3}{2}}$

cte (1) | $E = -5D + 5E - (6D(-2) + 6E)$
$-12D$

$E = -5D + 5E + 12D - 6E$

$E = 7D - E$ $\quad 2E = 7D$ $\quad E = \frac{7}{2}D$

$E = \frac{7}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$ $\quad \boxed{E = \frac{21}{4}}$

$-n2^{n+1}$

$$\boxed{a_n = A2^n + B3^n + -2n2^n + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}}$$

$a_0 = 3$
$a_1\ 5$

$f(n) = c_1\,2^n + c_2\,3^n - \frac{1}{2}(2^{n+2} - 3)\,n - 2^{n+2} + \frac{21}{4}$

?

$-\frac{1}{2}(4 \times 2^n - 3)n - 4\,2^n$

$-2 \times n2^n + \frac{3}{2}n - 42^n$

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + \underbrace{1 + 3n}_{\text{Pol}} + \underbrace{3^n}_{r^n} \qquad T(0)=4,\ T(1)=6$$

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$(r-1)(r-1) \rightarrow r = 1 \qquad m = 2$$

$$T(n) = T^{(h)}(n) + T^{(p)}(n)$$

Pol grad 1

$$T^{(h)}(n) = A1^n + Bn1^n \rightarrow \boxed{T^{(h)}(n) = A + Bn}$$

$$1^n = \boxed{m=2}$$

$$T^{(p)}(n) = (Cn + D) + E3^n$$

$$n^2(Cn + D)$$

$$\boxed{T^{(p)}(n) = Cn^3 + Dn^2 + E3^n}$$

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 1 + 3n + 3^n$$

$$Cn^3 + Dn^2 + E3^n = 2\left(C(n-1)^3 + D(n-1)^2 + E3^{n-1}\right)$$
$$- \left(C(n-2)^3 + D(n-2)^2 + E3^{n-2}\right) + 1 + 3n + 3^n$$

$$\cancel{Cn^3} + \cancel{Dn^2} + \cancel{E3^n} = 2\left(C(\cancel{n^3} - 3n^2 + 3n - 1) + D(\cancel{n^2} - 2n + 1) + \frac{E3^n}{3}\right)$$
$$- \left(C(\cancel{n^3} - 6n^2 + 12n - 8) + D(\cancel{n^2} - 4n + 4) + \frac{E3^n}{9}\right)$$
$$+ 1 + 3n + 3^n$$

| | |
|---|---|
| $n^3$ | $C = 2C - C$ $\quad \boxed{C = C}$ |
| $n^2$ | $D = -\cancel{6C} + 2D + \cancel{6C} - D$ $\quad \boxed{D = D}$ |
| $n$ | $0 = 6C - \cancel{4D} - 12C + \cancel{4D} + 3 \rightarrow 0 = -6C + 3 \quad 6C = 3$ $\quad \boxed{C = \frac{1}{2}}$ |
| cte | $0 = -2C + 2D + 8C - 4D + 1$ |
| | $0 = 6C - 2D + 1 \qquad -1 = 6C - 2D$ |
| | $-1 = 6(\frac{1}{2}) - 2D \qquad -1 = 3 - 2D \qquad -4 = -2D$ $\quad \boxed{D = 2}$ |
| $3^n$ | $E = \frac{2}{3}E - \frac{1}{9}E + 1$ |

$$E = \frac{6}{9}E - \frac{1}{9}E + 1 \qquad 1E = \frac{5}{9}E + 1 \qquad \frac{9}{9} = 1$$

$$\frac{9}{9}E - \frac{5}{9}E = 1 \qquad \frac{4}{9}E = 1 \qquad \boxed{E = \frac{9}{4}}$$

$$T(n) = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + 2n^2 + \frac{9}{4}3^n \qquad T(0) = 4,\ T(1) = 6$$

$$n = 0 \left\{ 4 = A + \frac{9}{4} \qquad \frac{16}{4} - \frac{9}{4} = A \qquad \boxed{\frac{7}{4} = A} \right.$$

$$n = 1 \left\{ 6 = \overset{7/4}{A} + B + \frac{1}{2} + 2 + \frac{27}{4} \right.$$

$$6 - \frac{7}{4} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{27}{4} = B \qquad \boxed{B = -5}$$

$$T(n) = \frac{7}{4} - 5n + \frac{1}{2}n^3 + 2n^2 + \frac{9}{4}3^n$$

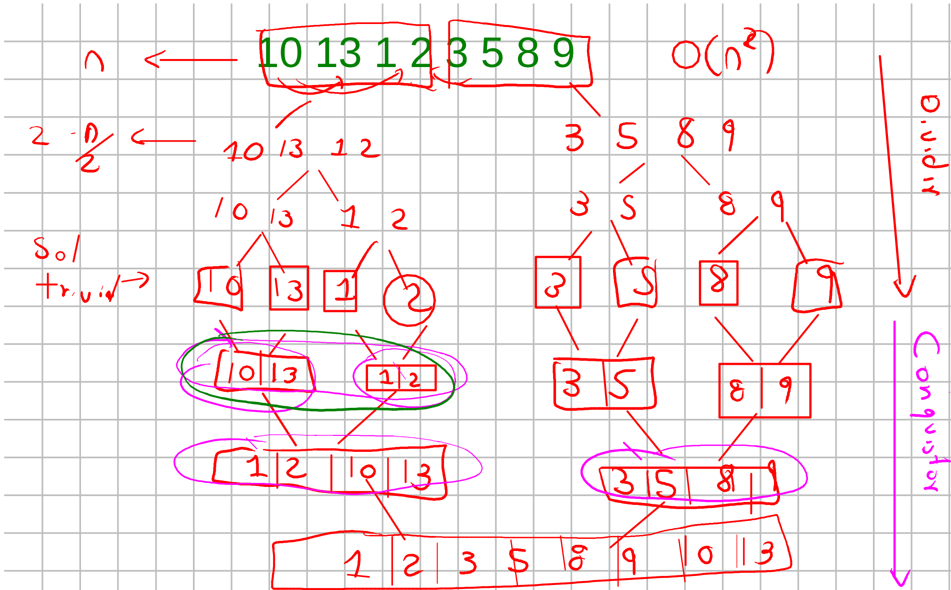
## Contenido

# Estrategias de solución de recurrencias

## Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño $n$ en $a$ subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño $n/b$ , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño $n$. Entonces se tiene que $T$ satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$




$O(n \log(n))$

$$\boxed{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n}$$

## Estrategias de solución de recurrencias

**Métodos de solución**

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución ← FADA
- Por ~~iteración~~ ← Expansión
- Funciones generatrices ← Calculo X

## Cambio de variable

$T(n) = c_2 + (n-1) + c\,T(n-2) + \ldots \quad DT(n-k$

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para $n$ par)

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 = 2T(2^{k-1}) + 2 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $\boxed{t_k = 2t_{k-1} + 2}$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

## Cambio de variable

$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

**Recuerda:** $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para $n$ par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución:
   $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

## Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3; A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar $\alpha$ y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de $n$. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ $(a^{\log_b n} = n^{\log_b a})$ Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

$$T(n) = 5T(n/2) + 3 \text{ y } T(1) = 7$$

$n = 2^k$

$T(2^k) = 5\,T(2^{k-1}) + 3 \qquad T(2^k) = T_k$

$T_k = 5T_{k-1} + 3$

$T_k = T_k^{(h)} + T_k^{(p)}$

$r - 5 = 0 \qquad T_k^{(h)} = A5^k$

$T_k^{(p)} = B$

$B = 5B + 3 \qquad -4B = 3 \qquad \boxed{B = \frac{-3}{4}}$

$T_k = A5^k - \frac{3}{4} \qquad n = 2^k \quad k = \log_2(n)$

$T_n = A5^{\log_2(n)} - \frac{3}{4}$

$T_n = An^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}$

$7 = A1^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}$

$\frac{28}{4} + \frac{3}{4} = A \qquad \frac{31}{4} = A$

$\boxed{T(n) = \frac{31}{4} \times n^{\log_2(5)} - \frac{3}{4}} \qquad O(n^{\log_2(5)})$

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$n = 3^k$

$T(3^k) = 9T(3^{k-1}) + 3^k$

$$\boxed{T_k = 9T_{k-1} + 3^k}$$

$r - 9 = 0$

$$\boxed{T_k^{(h)} = A9^k}$$

$T_k^{(p)} = B3^k$

$B3^k = \frac{9B3^k}{3} + 3^k$

$B = \frac{9B}{3} + 1$

$B = 3B + 1$

$$\boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{T_k = A9^k - \frac{1}{2}3^k}$$

$n = 3^k \quad k = \log_3(n)$

$T(n) = A9^{\log_3(n)} - \frac{1}{2}3^{\log_3(n)}$

$T(n) = An^{\log_3(9)} - \frac{1}{2}n^{\log_3(3)}$

$$\boxed{T(n) = An^2 - \frac{1}{2}n} \rightarrow O(n^2)$$

## Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$
\begin{aligned}
T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\
T(3^k) &= t_k
\end{aligned}
$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1], A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

## Cambio de variable

**Mostrar que** $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned}\log n &= \log 4^k \\ &= k\log_4 4 \\ \log n &= k\end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak+B)4^k$

$$\begin{aligned}(Ak+B)4^k &= 3[(A(k-1)+B)4^{k-1}] + 4^k k \\ (Ak+B)4^k &= 4^k(3/4[(A(k-1)+B)]+k) \\ Ak+B &= 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k\end{aligned}$$

## Cambio de variable

**Mostrar que** $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$ **es** $O(n \log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n \log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n \log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n \log n)$

## Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 173^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que: $T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

# Método Maestro

## Método Maestro

Sea $T$ una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$\boxed{T(n) = aT(n/b) + cn^d}$$

$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$

Siempre que $n = b^k$, donde $k$ es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y $c$ y $d$ son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$a = 4$
$b = 2$
$c = 1$
$d = 2$

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

$\times\ 4 < 2^2 \quad 4 < 4$

$4 = 4$

$O(n^2 \log(n))$

# Método Maestro

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$

  $9 < 3^1$ ✗
  $9 = 3^1$ ✗
  $9 > 3^1$ ✓

  $\frac{n}{b}\frac{2}{3}$

  $a > b^d$, $9 > 3^1$ $\quad O(n^{\log_3 9})$

  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$

  $T(n)$ es $O(n^2)$

- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$

  $1 < (\frac{3}{2})^0$ $\quad 1 < 1$ ✗
  $1 = 1$ ✓

  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$

  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$

  $T(n)$ es $O(\log n)$

- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$

  $5 < 2^0$ $\quad 5 < 1$ ✗
  $5 = 1$ ✗
  $5 > 1$ ✓

  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$

  $O(n^{\log_2 5})$

  $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

# Método Maestro

**Teorema**

*Sea $T$ una función creciente que satisface la relación de recurrencia*

$d=0 \quad a \geq 1$

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

*cuando $n$ es divisible por $b$, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^{+}$. Entonces*

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{array} \right\}$$

*Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde $k$ es un entero positivo,*

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

*donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$*

# Método Maestro

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

## Método Maestro

**¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?**

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

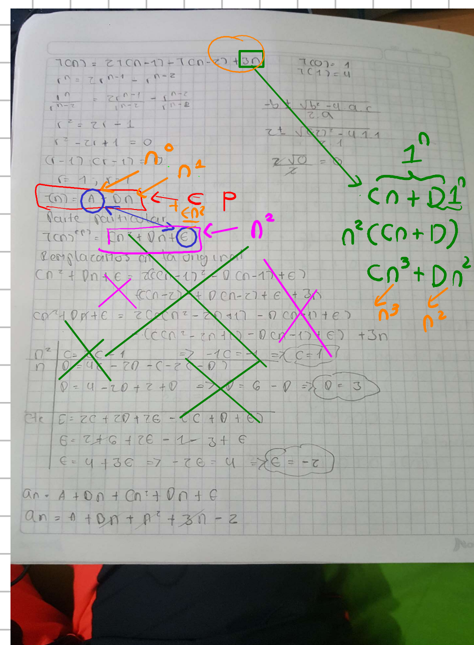
**Por el m.m**

$a = 1, b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$



$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + \boxed{3n}$ $\quad T(0) = 1$, $T(1) = 4$

$r^n = 2r^{n-1} - r^{n-2}$

$\frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{2r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{r^{n-2}}{r^{n-2}}$

$r^2 = 2r - 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = 0$

$r = 1 ; r = 1$

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$\frac{2 \sqrt{0}}{2} = 0$

$\boxed{T(n) = A + Bn} \leftarrow \in P$

$n^0$ $n^1$ $+ \underline{\in n^2}$

Parte particular

$T(n)^{(p)} = \boxed{Cn^2 + Dn + E} \leftarrow n^2$

Remplazamos en la original

$\cancel{Cn^2 + Dn + E = 2(C(n-1)^2 + D(n-1) + E)}$

$\cancel{- (C(n-2)^2 + D(n-2) + E) + 3n}$

$\cancel{Cn^2 + Dn + E = 2(C(n^2 - 2n + 1) + D(n-1) + E)}$

$\cancel{- (C(n^2 - 2n + 1) - D(n-1) + E) + 3n}$

| | |
|---|---|
| $n^2$ | $\cancel{C = 2C - 1 \Rightarrow -1C = -1 \Rightarrow C = 1}$ |
| $n$ | $\cancel{D = 4C - 2D - (-2C - D)}$ |
| | $\cancel{D = 4 - 2D + 2 + D \Rightarrow D = 6 - D \Rightarrow D = 3}$ |
| cte | $\cancel{E = 2C + 2D + 2E - (C + D + E)}$ |
| | $E = 2 + 6 + 2E - 1 - 3 + E$ |
| | $E = 4 + 3E \Rightarrow -2E = 4 \Rightarrow E = -2$ |

$a_n = A + Bn + Cn^2 + Dn + E$

$a_n = A + Bn + n^2 + 3n - 2$

$\overbrace{Cn + D}^{1^n} 1^n$

$n^2(Cn + D)$

$Cn^3 + Dn^2$

$n^3$ $\quad n^2$

$(1, 1, 1)$ $1$ $m=3$

$An^0 + Bn + Cn^2$

$(En + D)n^3$

$En^4 + Dn^3$

$T_n = 2T_{n-1} - T_{n-2} + 3n \qquad T(0) = 1,\ T(1) = 4$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = r = 1 \quad m = 2$

$T(n) = A1^n + Bn1^n \qquad P = T(n) = Cn + d$

$n^2(Cn+d)$

$h = \boxed{T(n) = A + Bn} \qquad \boxed{T(n) = Cn^3 + dn^2}$

60% - 80%

$Cn^3 + dn^2 = 2(C(n-1)^3 + d(n-1)^2) - (C(n-2)^3 + d(n-2)^2) + 3n$

$Cn^3 + dn^2 = 2[C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + d(n^2 - 2n + 1)] - [C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8) + d(n^2 - 4n + 4)] + 3n$

| | |
|---|---|
| $n^3$ | $C = 2C - C \rightarrow \boxed{C = C}$ |
| $n^2$ | $d = -6C + 2d + 6C - d \quad \boxed{d = d}$ |
| $n$ | $0 = -6C + 4d - 12C + 4d + 3 \quad 0 = -6C + 3 = \frac{-3}{-6} \quad C = \frac{1}{2}$ |
| Const | $0 = -2C + 2d + 8C - 4d \quad 0 = 6C - 2d$ |

$0 = \frac{6}{2} - 2d$

$0 = 3 - 2d \Rightarrow 2d = 3 \quad d = \frac{3}{2}$

homo $= T(n) = A + Bn + Cn^3 + dn^2$

$T(n) = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 \qquad T(0) = 4,\ T(1) = 6$

$n = 0 \rightarrow \boxed{4 = A} \qquad n = 1 \rightarrow 6 = A + B + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$6 = 5 + B$

$6 - 5 = B$

$\boxed{1 = B}$

$\boxed{T_n = 4 + n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2}$

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 3n \qquad T(0) = 1$

$T(1) = 4$

$T_n = r^n$

$r^n = 2r^{n-1} - r^{n-2}$

$\frac{r^n r^2}{r^n} = \frac{2 r^n r^2}{r^n r} - \frac{r^n r^2}{r^n r^2}$

$r^2 = 2r - 1$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) = 0$

$\left.\begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \end{array}\right\} \boxed{m = 2}$

$\boxed{T_n = A + Bn}$ ✓

$3n = Cn + D$

$n^2(Cn + D)$

$\boxed{Cn^3 + Dn^2}$

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 3n$

$Cn^3 + Dn^2 = 2\left(C(n-1)^3 + D(n-1)^2\right) - \left(C(n-2)^3 + D(n-2)^2\right) + 3n$

$Cn^3 + Dn^2 = 2\left(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1)\right) - \left(C(n^3 - 6n^2 + 12n - 1) + \ldots\right.$

$\left. D(n^2 - 4n + 4)\right) + 3n$

$n^3 \quad C = 2C - C \qquad C = C$

$n^2 \quad D = -6C + 2D + 6C - D$

$D = D$

$n \quad 0 = 6C - 4D - 12C + 4D + 3$

$0 = -6C + 3 \qquad 6C = 3 \qquad \boxed{C = \frac{1}{2}}$

Cte $\left| \begin{aligned} &= 0 = -2C + 2D + C - 4D \\ &0 = -C - 2D \\ &0 = -\frac{1}{2} - 2D \end{aligned} \right.$

$$\frac{1}{2} = 2D \qquad \frac{1}{4} = D$$

$$T_{(n)} = A + Bn + Cn^3 + Dn^2$$

$$T_{(n)} = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$T_{(0)} = 4$

$\boxed{1 = A}$

$T_{(1)} = 4$

$4 = 1 + B + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$4 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{16}{4} - \frac{4}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = B$

$\boxed{\frac{9}{4} = B}$

$$\boxed{T_{(n)} = 1 + \frac{9}{4}n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2}$$

$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + 3n, \quad T(0) = 1, \quad T(1) =$

$r^n = 2r^{n-1} - r^{n-2}$

$r^2 = 2r - 1 \longrightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$

$\frac{2}{2}$: $1 \; R_1$, $1 \; R_2$

$T(n) = (A + Bn)1^n \longrightarrow A + Bn$

$T(n)^{(p)} = 3n \longrightarrow Cn + D$

$n^2(Cn + D) = Cn^3 + Dn^2$

$T(n)^{(p)} = Cn^3 + Dn^2$

$Cn^3 + Dn^2 = 2(C(n-1)^3 + D(n-1)^2) -$
$C(n-2)^3 + D(n-2)^2 + 3n$

$= 2(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1)) -$
$+ (C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8) + D(n^2 - 4n + 4)) + 3n$

$n^3 \begin{cases} C = 2C - C \longrightarrow \boxed{C = C} \end{cases}$

$n^2 \begin{cases} D = -6C + 2D - (-6C + 0D) \\ \quad = -6C + 2D + 6C - D \\ D = 2D - D \longrightarrow \boxed{D = D} \end{cases}$

$n \begin{cases} 0 = 6C - 4D - (12C - 4D) + 3 \\ \quad = 6C - 4D - 12C + 4D + 3 \end{cases}$

$-3 = -6C$

$\frac{-3}{-6} = C = \boxed{1/2}$

$C + e \begin{cases} 0 = -2C + 2D - (-8C + 4D) \\ \quad = -2C + 2D + 8C - 4D \\ \quad = 6C - 2D \end{cases}$

$-6(1/2) = -2D$

$\frac{-3}{-2} = D \longrightarrow \boxed{D = \frac{3}{2}}$

Solución:

$$T(n) = 1 + 1n + \frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2$$

quiz

$T(n) = \underbrace{2T(n-1) - T(n-2)}_{P(h)} + \underbrace{3n}_{(P)}$ , $T(0) = 1$ , $T(1) = 4$

$r^n = 2r - 1$ $\quad T_n = r^n$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)(r-1) \longrightarrow r = 1 \quad m = 2$

$T(n) = T(n) + T(n)$

$T^h(n) = A1^n + Bn1^n \longrightarrow \boxed{T^h(n) = A + Bn}$ polinomio Grado 1

$T^p(n) = Cn + D$

$\boxed{n^2(Cn + D)} \longrightarrow \boxed{T(n) = (Cn^3 + Dn^2)}$

Solucion particular

Entonces

$Cn^3 + Dn^2 = 2(C(n-1)^3 - D(n-1)^2 - 1(C(n-2)^3 + D(n-2)^2 + 3n$

$= Cn^3 + Dn^2 = 2(C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + D(n^2 - 2n + 1) - 1(C(n^3 - 6n^2 + 6n - 8$

$+ (D(n^2 - 4n + 4) + 3n$

$n^3 \mid C = 2Cn - Cn \rightarrow \boxed{C = C}$

$n^2 \mid D = -6C + 2D + 6C - D \rightarrow \boxed{D = D}$

$n \mid 0 = 6C - 4D - 12C + 4D + 3 = 0 = -6C + 3$

$C = \frac{1}{2}$

$\boxed{T(n) = A + Bn + \frac{1}{2}n^3 + 2n^2}$

$r = \{2, 3\}$

$T^{(n)} = \boxed{A2^n} + B3^n$

$m = 1$

$2^n$
$n2^n$
$n^2 2^n$
$n^3 2^n$

$f(n) = 3^n + n2^n + n^2 2^n$

$(\underbrace{n+n^2}_{\text{orden } 2})2^n$

$T^{(p)} = \underline{\underline{Cn3^n}}$

$n^m(P_0 + P_1 n + P_2 n^2)2^n$

$T^{(p)} = Cn3^n + n(P_0 + P_1 n + P_2 n^2)2^n$

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 3n + 4, T(1) = 4$$

$n = 2^k$

$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 3\,2^k + 4$

$T(2^k) = T_k$

$\boxed{T_k = 2T_{k-1}} + \boxed{3\,2^k + 4}$

$T_k^{(h)} + T_k^{(p)}$ $\quad r^k \quad$ pol orden 0 $\quad F(k)$

$r - 2 = 0$ $\quad \boxed{T_k^{(h)} = A(2)^k}$ Sol homogenea

$\boxed{T^{(p)} = Bk2^k + C}$

$T_k = 2T_{k-1} + 3\,2^k + 4$

$Bk2^k + C = 2(B(k-1)2^{k-1} + C) + 32^k + 4$

$Bk2^k + C = \frac{2Bk2^k}{2} - \boxed{\frac{2B2^k}{2}} + 2C + \boxed{3 \cdot 2^k} + 4$

$-B$ $\quad 3$

| | |
|---|---|
| $k2^k$ | $B = B$ |
| $2^k$ | $0 = -B + 3, B = 3$ |
| $C_{te}$ | $C = 2C + 4, -C = 4, C = -4$ |

$$T(k) = A2^k + 3k2^k - 4$$

$\boxed{n = 2^k \quad k = \log_2(n)}$

$T(n) = A\,2^{\log_2(n)} + 3\log_2(n)\,2^{\log_2(n)} - 4$

$T(n) = A\,n^{\cancel{\log_2(2)}} + 3\log_2(n)\,n^{\cancel{\log_2(2)}} - 4$ $\quad$ (1, 1)

$T(n) = An + 3\log_2(n) \times n - 4 \equiv \boxed{O(n\log(n))}$

$4 = A(1) + 3\cancel{\log_2(1)} \times 1 - 4$ $\quad$ (0)

$4 = A - 4$ $\quad \boxed{A = 8}$

$\boxed{T(n) = 8n + 3\log_2(n) \times n - 4}$

# Referencias

Kenneth H. Rosen.
*Discrete Mathematics and Its Applications*.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

## Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.

Universidad del Valle