


Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

Carlos A Delgado

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

- 
- * Lógica de predicados
 - * Concepto de predicado
 - * Cuantificadores
 - * Cuantificadores anidados
 - * Equivalencias lógicas

Lógica de predicados

predicado

nombre masculino

1. Parte de una oración en la que se dice o se predica algo del sujeto

En la oración "el tren llegaba con retraso", "llegaba con retraso" es el predicado

En la oración "marte es un planeta", "es un planeta" es el predicado

Lógica de predicados

"El tren llegaba con retraso"

"Marte es un planeta"

"Donald Trump habla inglés"

"Diciembre es un mes de 31 días"

"El Deportivo Cali es un equipo de la primera A"

Lógica de predicados

"El tren llegaba con retraso"

"Marte es un planeta"

"Donald Trump habla inglés"


"Diciembre es un mes de 31 días"

"El Deportivo Cali es un equipo de la primera A"

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)


 
predicado *sujeto*

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)


"Venus es un planeta"  ???

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

"Venus es un planeta"  planeta(venus)

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

"Venus es un planeta"  planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés"  ???

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

"Venus es un planeta"  planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés"  hablaIngles(donaldTrump)

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

"Venus es un planeta"  planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés"  hablaIngles(donaldTrump)

"Uribe habla inglés"  ???

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

"Venus es un planeta"  planeta(venus)

"Donald Trump habla inglés"  hablaIngles(donaldTrump)


"Uribe habla inglés"  hablaIngles(uribe)



Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

 
predicado *sujeto*

Lógica de predicados

"Marte es un planeta"  planeta(marte)

 
predicado *sujeto*

planeta(x): "x es un planeta"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\text{planeta}(\text{marte}) = \text{V}$

$\text{planeta}(\text{titan}) = \text{F}$

$\text{planeta}(\text{saturno}) = \text{V}$



Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

planeta(marte) es verdadero

planeta(titan) es falso


planeta(saturno) es verdadero





Lógica de predicados

"Cali es un equipo de la primera A"


Lógica de predicados



"Cali es un equipo de la primera A"  liga(Cali)

predicado *sujeto*

Lógica de predicados

"Cali es un equipo de la primera A"  liga(Cali)

predicado *sujeto*

liga(x): "x es un equipo de la primera A"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\text{liga}(\text{Cali}) = T$

$\text{liga}(\text{Cortuluá}) = F$

$\text{liga}(\text{Millonarios}) = T$



Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

liga(Cali) es verdadero

liga(Cortuluá) es falso

liga(Millonarios) es verdadero



Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$P(x)$: "x es mayor que 3"

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$P(x)$: "x es mayor que 3"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$P(5) = \text{V}$

$P(2) = \text{F}$

$P(14) = \text{V}$

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$P(x)$: "x es mayor que 3"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$P(5)$ es verdadero

$P(2)$ es falso

$P(14)$ es verdadero

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$$Q(x,y): "x = y + 3"$$

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$$Q(x,y): "x = y + 3"$$

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$$Q(4,1) = \text{F}$$

$$Q(10,7) = \text{T}$$

$$Q(5,3) = \text{F}$$

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$$Q(x,y): "x = y + 3"$$

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$Q(4,1)$ es verdadero

$Q(10,7)$ es verdadero

$Q(5,3)$ es falso

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\text{madre}(\text{maria}, \text{jesus}) = \text{T}$

$\text{madre}(\text{amparoGrisales}, \text{alvaroUribe}) = \text{F}$

$\text{madre}(\text{shakira}, \text{milan}) = \text{T}$

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado:

$\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\text{madre}(\text{maria}, \text{jesus})$ es verdadero

$\text{madre}(\text{amparoGrisales}, \text{alvaroUribe})$ es falso

$\text{madre}(\text{shakira}, \text{milan})$ es verdadero

Lógica de predicados

- $P(x)$: "x es mayor que 3"
- $Q(x,y)$: " $x = y + 3$ "
- $\text{hablaIngles}(x)$: "x habla inglés"
- $\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

Lógica de predicados

- $P(x)$: "x es mayor que 3"
- $Q(x,y)$: " $x = y + 3$ "
- $\text{hablaIngles}(x)$: "x habla inglés"
- $\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

¿Cuál es el valor de verdad de $P(x)$?

Lógica de predicados

- $P(x)$: "x es mayor que 3"
- $Q(x,y)$: " $x = y + 3$ "
- $\text{hablaIngles}(x)$: "x habla inglés"
- $\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

Para conocer el valor de verdad de un predicado se debe especificar el sujeto

Lógica de predicados

Sean:

- $P(x)$: "x es mayor que 3"
- $Q(x,y)$: " $x = y + 3$ "
- $\text{hablaIngles}(x)$: "x habla inglés"
- $\text{madre}(x,y)$: "x es la madre de y"

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $P(0), P(100)$
- $Q(7,4), Q(3,2)$
- $\text{hablaIngles}(\text{AlvaroUribe}), \text{hablaIngles}(\text{BarackObama})$
- $\text{madre}(\text{María Jesús}), \text{madre}(\text{Amparo Grisales}, \text{AlvaroUribe})$

Lógica de predicados

Expresar en lógica de predicados los siguientes enunciados y mostrar ejemplos de expresiones que sean falsas y otras que sean verdaderas:

- $x^2 + y^2 = z^2$

$$P(x, y, z)$$

$$P(3, 4, 5)$$

$$P(1, 2, 3)$$

- x es una película de ciencia ficción

$$CienFiccion(x)$$

Star Wars

Forrest Gump

F

Lógica de predicados

Expresar en lógica de predicados los siguientes enunciados y mostrar ejemplos de expresiones que sean falsas y otras que sean verdaderas:

- $P(x,y,z)$: " $x^2 + y^2 = z^2$ "

$P(3,4,5)$ es verdadero

$P(2,5,7)$ es falso

- $Q(x)$: "x es una película de ciencia ficción"

$Q(\text{star wars})$ es verdadero

$Q(\text{El conjuro})$ es falso

Lógica de predicados

Expresar en lógica de predicados los siguientes enunciados y mostrar ejemplos de expresiones que sean falsas y otras que sean verdaderas:

- $x + y = z$

- x es un mes de 31 días

- $x + 1 > x$

Handwritten examples:

- $\neg P(2, 3, 5)$
- $P(x, y, z)$
- $P(1, 2, 5)$
- $\text{mes_31}(x)$
- $\emptyset(x) \equiv \neg T$
- $\text{mes31}(\text{Octubre}) T$
- $\text{mes31}(\text{Febrero}) f$

Lógica de predicados

$P(x,y,z)$: " $x + y = z$ "

- $P(2,3,5)$ es verdadero
- $P(1,2,0)$ es falso

$Q(x)$: " x es un mes de 31 días"

- $Q(\text{diciembre})$ es verdadero
- $Q(\text{febrero})$ es falso

$R(x)$: " $x + 1 > x$ "

- $R(2)$ es verdadero
- No hay una expresión que sea falsa

Lógica de predicados

Dominio

Cada variable lógica en un predicado tiene asociado un dominio o **Universo del discurso**, esto es, un conjunto de posibles valores

Lógica de predicados

Dominio

Cada variable lógica en un predicado tiene asociado un dominio o **Universo del discurso**, esto es, un conjunto de posibles valores

- $M(x)$: " **x es un mes de 31 días**"

Los posibles valores que puede tomar x son:

{Enero, Febrero, Marzo, Abril, Mayo, Junio, Julio, Agosto, Septiembre, Octubre, Noviembre, Diciembre}

Lógica de predicados

$D(x)$: "x es un número entero diferente de 1"

$$x \in \mathbb{Z}$$

Lógica de predicados

$D(x)$: "x es un número entero diferente de 1"

El dominio de x son los números enteros \mathbb{Z}

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado $M(x)$ donde x tiene como dominio los números enteros $Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$

$M(x)$: " $x+1 > x$ "

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado $M(x)$ donde x tiene como dominio los números enteros $Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$

$$M(x): "x+1 > x"$$

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $M(-2)$ T
- $M(-1)$ T
- $M(0)$ T
- $M(1)$ T
- $M(2)$ T

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado $M(x)$ donde x tiene como dominio los números enteros $Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$

$$M(x): "x+1 > x"$$

$M(-2)$: " $-1 > -2$ " es verdadero

$M(-1)$: " $0 > -1$ " es verdadero

$M(0)$: " $1 > 0$ " es verdadero

$M(1)$: " $2 > 1$ " es verdadero

$M(2)$: " $3 > 2$ " es verdadero

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado $M(x)$ donde x tiene como dominio los números enteros $Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$

$$M(x): "x+1 > x"$$

$M(x)$ es cierto para todos los elementos del dominio de x , esto se expresa por medio del **cuantificador universal**

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado $M(x)$ donde x tiene como dominio los números enteros $Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$

$$M(x): "x+1 > x"$$

$M(x)$ es cierto para todos los elementos del dominio de x , esto se expresa por medio del **cuantificador universal**

$$\forall x M(x)$$

Lógica de predicados

Considere el siguiente predicado $M(x)$ donde x tiene como dominio los números enteros $Z = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}$

$$M(x): "x+1 > x"$$

$M(x)$ es cierto para todos los elementos del dominio de x , esto se expresa por medio del **cuantificador universal**

$$\forall x \ M(x)$$



Para todo x en el
dominio

Lógica de predicados

Cuantificación universal

La cuantificación universal de $P(X)$, expresada como $\forall x P(x)$, es la proposición:

" $P(x)$ es verdadero para todos los valores de x en el universo del discurso"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 2$ ", dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 2$ ", dominio los enteros
- $\forall x N(x)$, donde $N(x)$: " $x^2 \geq x$ ", dominio los reales

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 2$ ", dominio los enteros
- $\forall x N(x)$, donde $N(x)$: " $x^2 \geq x$ ", dominio los reales
- $\forall x P(x)$, donde $P(x)$: " x ve Discretas por primera vez", dominio los estudiantes de este salón

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 2$ ", dominio los enteros
- $\forall x N(x)$, donde $N(x)$: " $x^2 \geq x$ ", dominio los reales
- $\forall x P(x)$, donde $P(x)$: " x ve Discretas por primera vez", dominio los estudiantes de este salón
- $\forall x E(x)$, donde $E(x)$: " x tiene el promedio sobre 3.2", dominio los estudiantes de este salón

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

- $\forall x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 2$ ", dominio los enteros $x = -1$
F
- $\forall x N(x)$, donde $N(x)$: " $x^2 \geq x$ ", dominio los reales 0.5 F
- $\forall x P(x)$, donde $P(x)$: " x ve Discretas por primera vez", dominio los estudiantes de este salón F
- $\forall x E(x)$, donde $E(x)$: " x tiene el promedio sobre 3.2", dominio los estudiantes de este salón F
- $\forall x T(x)$, donde $T(x)$: " x trabaja", dominio los estudiantes de este salón F

Lógica de predicados

Cuantificación universal

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ es verdadera para cada x del dominio	Por lo menos hay un valor de x para el cual no se cumple $P(x)$

Lógica de predicados

Cuantificación existencial

La cuantificación existencial de $P(X)$, expresada como $\exists x P(x)$, es la proposición:

" $P(x)$ es verdadero para alguno de los valores de x en el universo del discurso"

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 3$ ", dominio los enteros $x=4 \quad \top$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 3$ ", dominio los enteros

$\exists x N(x)$, donde $N(x)$: " $x = x + 1$ ", dominio los enteros

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 3$ ", dominio los enteros

$\exists x N(x)$, donde $N(x)$: " $x = x + 1$ ", dominio los enteros

$\exists x P(x)$, donde $P(x)$: " x ve Discretas por primera vez"

T

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 3$ ", dominio los enteros

$\exists x N(x)$, donde $N(x)$: " $x = x + 1$ ", dominio los enteros

$\exists x P(x)$, donde $P(x)$: " x ve Discretas por primera vez"

$\exists x E(x)$, donde $E(x)$: " x tiene el promedio sobre 4.7"

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de las siguientes expresiones:

$\exists x M(x)$, donde $M(x)$: " $x > 3$ ", dominio los enteros

$\exists x N(x)$, donde $N(x)$: " $x = x + 1$ ", dominio los enteros

$\exists x P(x)$, donde $P(x)$: " x ve Discretas por primera vez"

$\exists x E(x)$, donde $E(x)$: " x tiene el promedio sobre 4.7"

$\exists x T(x)$, donde $T(x)$: " x trabaja"

Lógica de predicados

Cuantificación existencial

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x P(x)$	$P(x)$ es verdadera para algún x	$P(x)$ es falsa para todos los x del dominio

Lógica de predicados

Cuantificadores anidados

Se pueden utilizar varios y diferentes cuantificadores en la misma proposición

- $\forall x \forall y (x+y=y+x)$

- $\forall x \exists y (x+y=0)$

- $\exists x \forall y (x \cdot y=1)$

- $\exists x \exists y (x+y=x-y)$

Lógica de predicados

Dada la expresión

$\forall x \forall y (x+y=y+x)$, dominio los enteros

indica "para todo x y para todo y , se cumple que $x+y=y+x$ "

Lógica de predicados

Dada la expresión

$\forall x \forall y (x+y=y+x)$, dominio los enteros

indica "para todo x y para todo y , se cumple que $x+y=y+x$ "

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y (x+y=x-y)$, dominio los enteros

$$x = 5$$

$$y = 3$$

$$5 + 3 = 5 - 3$$

$$8 = 2 \quad \times$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \forall y (x+y=x-y), \text{ dominio los enteros}$$

La expresión es **falsa** porque para $x=1, y=2$ no se cumple

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x), \text{ dominio los enteros}$$

La expresión es verdadera

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y ((x > 0 \wedge y < 0) \rightarrow x \cdot y < 0)$, dominio los enteros

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y ((x > 0 \wedge y < 0) \rightarrow x \cdot y < 0)$, dominio los enteros

La expresión es verdadera

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y ((x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow x - y > 0)$, dominio los enteros

Handwritten analysis:

$x = 2$
 $y = 8$

Truth table for $(x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow x - y > 0$:

$x > 0$	$y > 0$	$x - y > 0$	Implication
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

Counterexample: $2 - 8 > 0$ is false (marked with an X).

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \forall y ((x > 0 \wedge y > 0) \rightarrow x - y > 0)$, dominio los enteros

La expresión es **falsa** porque para $x=1, y=2, x-y=-1$ no es positivo

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x \forall y P(x,y)$	$P(x,y)$ es verdadera para todos los posibles valores x,y	Hay al menos un par x, y para el cual $P(x,y)$ es falso

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y (x+y=x-y)$, dominio los enteros

Representa la expresión

"Existe x , existe y , tal que $x+y=x-y$ "

$$\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 0 \end{array}$$

$$8+0=8-0 \checkmark$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y (x+y=x-y)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y (x+y=x-y)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera** porque para $x=1$, $y=0$ se cumple que $1+0=1-0=1$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y (x+y < x-y)$, dominio los enteros

$$x + y < x - y$$

$$8 + (-2) < 8 - (-2)$$

$$6 < 10 \quad \checkmark$$

$$x = 8$$

$$y = -2$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \exists y (x+y < x-y), \text{ dominio los enteros}$$

La expresión es **verdadera** porque para $x=1$, $y=-5$ se cumple que $-4 < 6$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \exists y \sqrt{(x+y)} = (x+y), \text{ dominio los reales}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$1 = 1$$

$$x+y=1$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \exists y \sqrt{(x + y)} = (x + y), \text{ dominio los reales}^e$$

La expresión es verdadera porque para $x=0.6$, $y=0.4$ se cumple que $\sqrt{(0.6 + 0.4)} = (0.6 + 0.4) = 1.0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y (x+y=6 \wedge x-y=5)$, dominio los reales

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$2x = 11$$

$$x = 5.5$$

$$y = 0.5$$



Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \exists y (x+y=6 \wedge x-y=5), \text{ dominio los reales}$$

La expresión es **verdadera**, $x=11/2$, $y=1/2$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \exists y (x+y=2 \wedge x-y=0)$, dominio los enteros

$$x=1 \quad y=1 \quad \checkmark$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \exists y (x+y=2 \wedge x-y=0), \text{ dominio los enteros}$$

La expresión es **verdadera** porque para $x=1$, $y=1$ se cumple que $1+1=2 \wedge 1-1=0$

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
<u>$\exists x \exists y$</u> $P(x,y)$	Existe al menos un par x,y para el cual $P(x,y)$ es verdadera	$P(x,y)$ es falso para todos los pares x, y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x+y=0)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x+y=0)$, dominio los enteros

La expresión representa la frase:

Para todo x , existe un y tal que $x+y=0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x+y=0)$, dominio los enteros

La expresión representa la frase:

Para todo x , existe un y tal que $x+y=0$

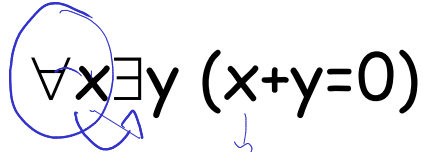
$x=1$, existe y tal que $x+y=0$? $y = -1$

$x=2$, existe y tal que $x+y=0$? $y = -2$

$x=-5$, existe y tal que $x+y=0$? $y = 5$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y (x+y=0)$$


La expresión representa la frase:

Para todo x , existe un y tal que $x+y=0$

$x=1$, existe $y=-1$ tal que $x+y=0$

$x=2$, existe $y=-2$ tal que $x+y=0$

$x=-5$, existe $y=5$ tal que $x+y=0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y (x+y=0)$$

La expresión es **verdadera** porque para todo x existe un y tal que se cumple $x+y=0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$$x = -8$$

$$y = -\frac{1}{8}$$

$$\rightarrow x = 0$$

$$x = 10$$

$$y = \frac{1}{10}$$

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$x=1$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

$x=2$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

$x=-5$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

$x=0$, existe y tal que $x \cdot y = 1$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$x=1$, existe $y=1$ tal que $x \cdot y = 1$

$x=2$, existe $y=1/2$ tal que $x \cdot y = 1$

$x=-5$, existe $y=-1/5$ tal que $x \cdot y = 1$

$x=0$, no existe y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$, dominio los reales

$x=1$, existe $y=1$ tal que $x \cdot y = 1$

$x=2$, existe $y=1/2$ tal que $x \cdot y = 1$

$x=-5$, existe $y=-1/5$ tal que $x \cdot y = 1$

$x=0$, no existe y

¿Se cumple $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y (x \cdot y = 1), \text{ dominio los reales}$$

La expresión es **falsa** porque para $x=0$ no existe y tal que $x \cdot y = 1$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x = y^2)$, dominio los reales

Handwritten examples and a counterexample for the statement $\forall x \exists y (x = y^2)$:

- $9 = 3^2$ (circled)
- $1 = 1^2$
- $0 = 0^2$
- $2 = (\sqrt{2})^2$
- $-3 = ?$ (with an arrow pointing from the $2 = (\sqrt{2})^2$ line, indicating a counterexample)

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x=y^2)$, dominio los reales

$x=1$, existe y tal que $x=y^2$?

$x=2$, existe y tal que $x=y^2$?

$x=-1$, existe y tal que $x=y^2$?

$x=-2$, existe y tal que $x=y^2$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x=y^2)$, dominio los reales

$x=1$, existe $y=1$ tal que $x=y^2$?

$x=2$, existe $y=\sqrt{2}$ tal que $x=y^2$?

$x=-1$, no existe y tal que $x=y^2$?

$x=-2$, no existe y tal que $x=y^2$?

F

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y (x = y^2), \text{ dominio los reales}$$

La expresión es **falsa** porque para $x = -1$, no existe y tal que $x = y^2$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x^2 < y)$, dominio los enteros

Verdadero

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x^2 < y)$, dominio los enteros

$x=1$, existe y tal que $x^2 < y$?

$x=2$, existe y tal que $x^2 < y$?

$x=3$, existe y tal que $x^2 < y$?

$x=-1$, existe y tal que $x^2 < y$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x^2 < y)$, dominio los enteros

$x=1$, existe $y=2$ tal que $x^2 < y$

$x=2$, existe $y=5$ tal que $x^2 < y$

$x=3$, existe $y=10$ tal que $x^2 < y$

$x=-1$, existe $y=2$ tal que $x^2 < y$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\forall x \exists y (x^2 < y)$, dominio los enteros

La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right), \text{ dominio los enteros}$$

$$x=0$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array} \quad \frac{-1}{-1} = 1$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right), \text{ dominio los enteros}$$

$x=1$, existe y tal que $x/y=1$?

$x=2$, existe y tal que $x/y=1$?

$x=-1$, existe y tal que $x/y=1$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right), \text{ dominio los enteros}$$

$x=1$, existe $y=1$ tal que $1/1=1$

$x=2$, existe $y=2$ tal que $2/2=1$

$x=-1$, existe $y=-1$ tal que $1/-1=1$

¿Se cumple $\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right)$?

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\forall x \exists y \left(\frac{x}{y} = 1 \right), \text{ dominio los enteros}$$

La expresión es **falsa**, porque para $x=0$ no existe y que cumpla la condición

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\forall x \exists y P(x,y)$	Para cada x existe un y para el cual $P(x,y)$ es verdadero	Hay al menos un x para el cual no existe y tal que se cumpla $P(x,y)$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que $x+y=0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que $x+y=0$

- $x=-1$ sirve para $y=1$
- $x=-2$ sirve para $y=2$
- $x=-3$ sirve para $y=3$
- $x=-4$ sirve para $y=4$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que $x+y=0$

- $x=-1$ sirve para $y=1$
- $x=-2$ sirve para $y=2$
- $x=-3$ sirve para $y=3$
- $x=-4$ sirve para $y=4$

No hay un solo x que sirva para todo y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x+y=0)$$

La expresión representa la frase:

Existe un x (el mismo x) para todo y tal que $x+y=0$

No hay un mismo valor de x que sirva para todo y ,
por lo tanto la sentencia es **falsa**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para $y=1$ porque $0 \cdot 1 = 0$

$x=0$ sirve para $y=2$ porque $0 \cdot 2 = 0$

$x=0$ sirve para $y=3$ porque $0 \cdot 3 = 0$

$x=0$ sirve para $y=4$ porque $0 \cdot 4 = 0$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para $y=1$ porque $0 \cdot 1 = 0$

$x=0$ sirve para $y=2$ porque $0 \cdot 2 = 0$

$x=0$ sirve para $y=3$ porque $0 \cdot 3 = 0$

$x=0$ sirve para $y=4$ porque $0 \cdot 4 = 0$

Es el mismo x el que sirve para todo y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para todo y .

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = 0)$$

$x=0$ sirve para todo y .

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$0 \cdot 3 = 0$$

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \forall y (y^2 < x)$, dominio los enteros

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \forall y (y^2 < x)$, dominio los enteros

$x=2$, sirve para $y=1$ porque $1^2 < 2$

$x=5$, sirve para $y=2$ porque $2^2 < 5$

$x=10$, sirve para $y=3$ porque $3^2 < 10$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$\exists x \forall y (y^2 < x)$, dominio los enteros

$x=2$, sirve para $y=1$ porque $1^2 < 2$

$x=5$, sirve para $y=2$ porque $2^2 < 5$

$x=10$, sirve para $y=3$ porque $3^2 < 10$

No hay un solo x que sirva para todo y

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \left(\frac{y}{3} + x = \frac{y}{3} \right), \text{ dominio son los enteros}$$

X = 0

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y \left(\frac{y}{3} + x = \frac{y}{3} \right), \text{ dominio son los enteros}$$

$x=0$ sirve para todo y . La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = y)$$

$$\underline{\underline{X = 1}}$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (x \cdot y = y)$$

$x=1$ sirve para todo y

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$1 \cdot 2 = 2$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

- La expresión es verdadera

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (y+x=y-x)$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= y \end{aligned}$$

Lógica de predicados

Indique el valor de verdad de la expresión

$$\exists x \forall y (y+x=y-x)$$

$x=0$ sirve para todo y

$$1+0=1-0$$

$$2+0=2-0$$

$$3+0=3-0$$

$$4+0=4-0$$

- La expresión es **verdadera**

Lógica de predicados

Expresión	¿Cuándo es cierta?	¿Cuándo es falsa?
$\exists x \forall y P(x,y)$	Hay un x para el cual $P(x,y)$ es verdadero para todos los valores de y	No existe un mismo x que sirva para todo y

$$\forall x \exists y$$

Lógica de predicados

Sea $Q(x,y)$: " $x+y=x-y$ ". Si el dominio para ambas variables son los enteros, indique el valor de verdad de las siguientes sentencias:

• $Q(1,1)$ $\quad 1+1 = 1-1 \quad \textcircled{2=0} \quad F$

• $Q(2,0)$ $\quad 2+0 = 2-0 \quad \checkmark$

• $\forall x \exists y Q(x,y)$ $\quad y=0 \quad x=x \quad \checkmark$

• $\exists x \forall y Q(x,y)$ $\quad \textcircled{y=-y} \quad F$

• $\forall x \forall y Q(x,y)$ $\quad x=-1 \quad y=2$
 $\quad -1+2 = -1-2$
 $\quad 1 = -3 \quad X$

Lógica de predicados

Sea $Q(x,y)$: " $x+y=x-y$ ". Si el dominio para ambas variables son los enteros, indique el valor de verdad de las siguientes sentencias:

- $Q(1,1)$, **falso** ($2 \neq 0$)
- $Q(2,0)$, **verdadero** ($2=2$)
- $\forall x \exists y Q(x,y)$, **verdadero** ($y=0$)

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\forall x \exists y (x+y=1)$ \checkmark $x=10 \quad y=-9$ $x=0 \quad y=1$
 $x=-10 \quad y=11$ $\boxed{y=1-x}$
- $\exists x \forall y (x+y=1)$ F
- $\exists x \forall y (x^2+y^2=y^2)$ \checkmark
 $x=0 \quad \boxed{y^2=y^2} \checkmark$

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\forall x \exists y (x+y=1)$, **verdadero** (dado un x , existe y)
- $\exists x \forall y (x+y=1)$, **falso** (el mismo x no sirve en todos los casos)
- $\exists x \forall y (x^2+y^2=y^2)$, **verdadero** ($x=0$ sirve en todos los casos)

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\exists x \exists y (x+y=4 \wedge x-y=1)$ F
- $\exists x \exists y (x+y=4 \wedge x-y=2)$ V
- $\exists x \exists y (x+y \neq y+x)$ F

$$\begin{array}{r} x+y=4 \\ x-y=1 \\ \hline 2x=5 \end{array}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r} x+y=4 \\ x-y=2 \\ \hline 2x=6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}$$

Lógica de predicados

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias tomando como dominio los números enteros:

- $\exists x \exists y (x+y=4 \wedge x-y=1)$, **falso** (no existen los enteros)
- $\exists x \exists y (x+y=4 \wedge x-y=2)$, **verdadero** ($x=3, y=1$)
- $\exists x \exists y (x+y \neq y+x)$, **falso** (no existen x y y)

Tome como interpretación al dominio $D = \{1, 2\}$, $a = 1$, $b = 2$ y las siguientes asignaciones para f :

$f(1)$	$f(2)$
2	1

Las asignaciones para los predicados P y Q:

$P(1)$	$P(2)$	$Q(1,1)$	$Q(1,2)$	$Q(2,1)$	$Q(2,2)$
F	V	V	V	F	V

Así mismo para el predicado $R(x,y)$.

$R(1,1)$	$R(1,2)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$
V	F	F	V

Evalúe el valor de verdad para cada una de las siguientes fórmulas.

- $\rightarrow a) \forall x \exists y Q(x, y)$ $\phi(1, ?)$ $\phi(2, ?)$ $\phi(1, 1) \checkmark$ $\phi(2, 2) \checkmark$ \top
 $b) \exists x \forall y Q(x, y)$ $\phi(1, 1)$ $\phi(1, 2)$ \top
 $c) \forall x Q(x, x)$ $\phi(2, 2)$ $\phi(1, 1)$ \top
 $d) \forall x \forall y Q(x, y)$ $\phi(2, 1)$ $\phi(1, 2)$ \top
 $e) \forall x \exists y \forall z (R(x, y) \rightarrow Q(x, y))$
 $f) (\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$
 $g) (\exists x)(\forall y)(P(f(x)) \wedge Q(x, y))$
 $h) (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(x) \wedge Q(x, y)) \rightarrow R(x, z))$
 $i) \exists x \forall y R(f(a), f(b)) \rightarrow P(f(b))$
 $j) \forall x \exists z R(x, z)$
 $k) \exists x \forall z R(x, z)$
 $l) \forall x \forall z \forall y (R(x, z) \rightarrow Q(y, x))$

$\vdash e) \forall x \exists y \neg (R(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

$\vdash f) (\exists x)(P(f(x)) \wedge Q(x, f(a)))$

$\vdash g) (\exists x)(\forall y)(P(f(x)) \wedge Q(x, y))$

$\vdash h) (\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(x) \wedge Q(x, y)) \rightarrow R(x, z))$

$i) \exists x \forall y R(f(a), f(b)) \rightarrow P(f(b))$

$j) \forall x \exists z R(x, z)$

$k) \exists x \forall z R(x, z)$

$l) \forall x \forall z \forall y (R(x, z) \rightarrow Q(y, x))$

$x=1 \quad y=1$

$R(1, 1) \rightarrow Q(1, 1)$

$x=2 \quad y=2$
 $R(2, 2) \rightarrow Q(2, 2)$

$P(1) \wedge Q(1, 2)$

$V \wedge V$

$x=1$

$x=1$

$P(2) \wedge Q(1, 2)$

$P(2) \wedge Q(1, 2)$

x	y	z	$P(x) \wedge Q(x, y) \rightarrow R(x, z)$
1	1	1	$T \wedge T \rightarrow V$
1	1	2	$T \wedge T \rightarrow F$
1	2	1	$T \wedge T \rightarrow V$
1	2	2	$T \wedge T \rightarrow F$
2	1	1	$F \wedge F \rightarrow F$
2	1	2	$F \wedge F \rightarrow V$
2	2	1	$F \wedge T \rightarrow F$
2	2	2	$F \wedge T \rightarrow V$

F_{10}
 $x=1 \quad y=1$
 $\begin{cases} 1 & V \\ 2 & F \end{cases}$

$x=2 \quad y=2$
 $\begin{cases} 1 & V \\ 2 & F \end{cases}$

$y=1$
 $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$
 $y=2$
 $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$x=1$

$$\top i) \exists x \forall y R(f(a), f(b)) \rightarrow P(f(b))$$

$$\top j) \forall x \exists z R(x, z)$$

$$\top k) \exists x \forall z R(x, z)$$

$$l) \forall x \forall z \forall y (R(x, z) \rightarrow Q(y, x))$$

Tautología

Tome como interpretación al dominio $D = \{1, 2\}$, $a = 1$, $b = 2$ y las siguientes asignaciones para f :

$f(1)$	$f(2)$
2	1

Las asignaciones para los predicados P y Q:

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
F	V	V	V	F	V

Así mismo para el predicado $R(x, y)$.

$R(1,1)$	$R(1,2)$	$R(2,1)$	$R(2,2)$
V	F	F	V

$$i) \left. \begin{array}{l} R(2, 1) \rightarrow P(1) \\ F \rightarrow F \end{array} \right\} \top$$

$$j) \forall x \exists z R(x, z) \left\{ \begin{array}{l} R(1, 1) \quad x=1 \quad z=1 \\ R(2, 2) \quad x=2 \quad z=2 \end{array} \right.$$

$$k) \exists x \forall z R(x, z) \left\{ \begin{array}{l} R(1, 1) \vee \quad R(2, 1) \vee \\ R(1, 2) \vee \quad R(2, 2) \vee \end{array} \right.$$

Tome como interpretación al dominio $D = \{1, 2\}$, $a = 1$, $b = 2$ y las siguientes asignaciones para f :

$f(1)$	$f(2)$
2	1

Las asignaciones para los predicados P y Q:

P(1)	P(2)	Q(1,1)	Q(1,2)	Q(2,1)	Q(2,2)
F	V	V	V	F	V

Así mismo para el predicado R(x,y).

R(1,1)	R(1,2)	R(2,1)	R(2,2)
V	F	F	V

$\neg (1) \forall x \forall z \forall y (R(x, z) \rightarrow Q(y, x))$

$x=1 \quad y=2$
 $z=1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Falso}$

x	y	z	$R(x, z) \rightarrow Q(y, x)$
1	1	1	$R(1, 1) \rightarrow Q(1, 1) \quad V \rightarrow V \mid V$
1	2	2	$R(1, 2) \rightarrow Q(1, 2) \quad F \rightarrow V \mid V$
1	2	1	$R(1, 1) \rightarrow Q(2, 1) \quad V \rightarrow F \mid F$
1	2	2	
2	1	1	
2	1	2	
2	2	1	
2	2	2	