Recurrencias lineales no homogéneas

Universidad del Valle
EISC

Septiembre 2018

Universidad del Valle

Contenido

Solución a recurrencias No homogéneas

Sea $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$, donde $F(n)$ no es nula y $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ es la relación de recurrencia homogénea asociada.

Ejemplo 1. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 1$

Ejemplo 2. $a_n = a_{n-1} + 2^n$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = 2^n$

Ejemplo 3. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$ es una r.r no homogénea donde $F(n) = n^2 + n + 1$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema1

Si $\{a_n^{(p)}\}$ es una solución particular de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$ entonces toda la solución $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la homogénea asociada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$.

$T(n) = 2T(n-1) + \underbrace{1}$ $\quad T(1) = 1$

$r - 2 = 0 \quad r = 2$

$\boxed{T^h(n) = A2^n}$

$F(n) = 1$

$\boxed{T(n) = T^h(n) + T^p(n)}$

$\boxed{T^p(n) = B}$

$B = 2B + 1 \quad B = -1$

$T(n) = A2^n - 1 \quad T(1) = 1$

$1 = 2A - 1 \quad A = 1$

$1 + 1 = 2A \cancel{-1+1}$

$2 = 2A \quad A = \frac{2}{2} \quad A = 1$

$T(n) = 2^n - 1 \longrightarrow O(2^n)$

$T(1) = 1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓

$T(n) = 2T(n-1) + \underbrace{1}$

$T(2) = 2 \cdot T(1) + 1 = 3$

$T(3) = 2T(2) + 1 = 7$

$T(2) = 2^2 - 1 = 3$

$T(3) = 2^3 - 1 = 7$

Ejercicio 1

Determinar todas las soluciones de $a_n = 2a_{n-1} + 1$ **(Hanoi) para** $a_1 = 1$ **(Hanoi)** La solución de la relación de recurrencia

es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ es la solución de la homogénea asociada y $a_n^{(p)}$ es la solución polinómica.
Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $F(n) = 1$ estos son los pasos para resolverla:

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 1

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo la ecuación homogénea asociada $a_n = 2a_{n-1}$, como hay un coeficiente, el de a_{n-1} la ecuación característica es $r - 2 = 0$ por tanto la raíz r=2. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha 2^n$
2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 1$ con un polinomio de igual grado. entonces $a_n^{(p)} = A$ se iguala con la constante A por que $F(n)$ es igual a una constante 1.
3. El siguiente paso es el de reemplazar $a_n^{(p)} = A$ en la recurrencia original (la no homogénea). Si reemplazamos $a_n = A$ entonces nos queda: $A = 2A + 1$ resolvemos ésta ecuación y entonces A=-1.

Universidad del Valle

Ejercicio 1

3. Entonces como $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ y $a_n^{(p)} = -1$ y $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$ por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - 1$ Esta es una solución general pero faltaría calcular el valor de α
4. Ahora por último usamos el valor inicial para calcular el valor de α. Tomamos la solución general $a_n = \alpha 2^n - 1$, Si $a_1 = 1$, $n = 1$ entonces $1 = \alpha 2 - 1$, despejando $\alpha = 1$ y por tanto una solución particular

$$a_n = 2^n - 1$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

Determinar todas las soluciones de lavrelación de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$ **(a veces no hay muchas condiciones iniciales)**
La solución de la relación de recurrencia es $a_n = \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ donde $a_n^{(h)}$ (homogénea) y $a_n^{(p)}$ (polinómica).

1. Calculamos $a_n^{(h)}$ resolviendo $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ como hay dos coeficientes, el de a_{n-1} y el de a_{n-2} la ecuación característica es $r^2 - 5r + 6 = 0$ por tanto las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 2$. Entonces $\{a_n^{(h)}\} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ (**por Teorema 1**)

Recurrencias lineales no homogéneas

Ejercicio 2

2. Ahora resolvemos $a_n^{(p)}$ igualando $F(n) = 7^n$ con un polinomio de igual grado. Entonces $a_n^{(p)} = C7^n$ se iguala con la constante $C7^n$ porque $F(n)$ es igual a la constante elevada a la n.
3. Reemplazamos $a_n^{(p)} = C7^n$ en la recurrencia original (la no homogénea)

$$C7^n = 5(C7^{n-1}) - 6(C7^{n-2}) + 7^n$$
$$C7^n = 7^n(5/7C - 6/49C + 1), C = 49/20$$

Por lo tanto la solución general de $\{a_n\}$ es

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + (49/20)7^n$$

Recurrencias lineales no homogéneas

$An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F + g2^n$ $n^5 + 3 \times 2^n$

Forma de las soluciones particulares

$F(n)$	$a_n^{(p)}$
C_1	A
n	$A_1 n + A_0$
n^2	$A_2 n^2 + A_1 n + A_0$
$n^t, t \in Z^+$	$A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0$
$r^n, r \in R$	Ar^n
$\sin(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$\cos(\alpha n)$	$A \sin(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$
$n^t r^n, t \in Z^+, r \in R$	$r^n (A_t n^t + A_{t-1} n^{t-1} + \ldots + A_1 n + A_0)$
$r^n \sin(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$
$r^n \cos(\alpha n)$	$Ar^n \sin(\alpha n) + Br^n \cos(\alpha n)$

Solucionar la recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$

$$T(n) = 4T(n-1) + 7(n-2) + 3n^2 + n$$

$r^2 - 4r - 7$ $\quad T(0)=4 \quad T(1)=6$

$$\frac{4 \pm \sqrt{16+28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$\frac{4 \pm 6.6}{2} \to 5.3,\ -1.3$$

$$T^h(n) = A(-1.3)^n + B(5.3)^n$$

$$T^p(n) = Cn^2 + Dn + E$$

$$T(n) = 4T(n-1) + 7(n-2) + 3n^2 + n$$

$n - 2n + 1 \qquad n^2 - 4n + 4$

$$Cn^2 + Dn + E = 4C(n-1)^2 + 4D(n-1) + 4E + 7C(n-2)^2 + 7D(n-2) + 7E + 3n^2 + n$$

$$\cancel{Cn^2} + \cancel{Dn} + \cancel{E} = 4Cn^2 - 8Cn + 4C + 4Dn - 4D + 4E + 7Cn^2 - 28Cn + 28C + 7Dn - 14D + 7E + 3n^2 + n$$

cte	$E = 4C - 4D + 4E + 28C - 14D + 7E$
n	$D = -8C + 4D - 28C + 7D + 1$
n^2	$C = 4C + 7C + 3$

$$\boxed{C = -\frac{3}{10}}$$

$$-10D = -36\left(-\frac{3}{10}\right) + 1$$

$$-10D = \frac{108}{10} + \frac{10}{10}$$

$$-10D = \frac{118}{10}$$

$$\boxed{D = -\frac{118}{100} = -\frac{59}{50}}$$

$$-10E = -18D + 32C$$

$$E = \frac{-18\left(-\frac{59}{50}\right) + 32\left(-\frac{3}{10}\right)}{-10} = -\frac{291}{250}$$

$$\boxed{E = -\frac{291}{250}}$$

$$T(n) = A(-1.3)^n + B(5.3)^n + \left(-\frac{3}{10}\right)n^2 + \left(-\frac{59}{50}\right)n - \frac{291}{250}$$

$T(0) = 4 \qquad T(1) = 6$

$$4 = A + B - \frac{291}{250}$$

$$6 = -1.3A + 5.3B \underbrace{- \frac{3}{10} - \frac{59}{50} - \frac{291}{250}}_{-\frac{661}{250}}$$

$$\frac{1291}{250} = A + B$$

$$\frac{2161}{250} = 1.3A + 5.3B$$

$$\frac{2161}{250} = 1.3\left(\frac{1291}{250} - B\right) + 5.3B$$

$$\frac{2161}{250} = \frac{1678.3}{250} - 1.3B + 5.3B$$

$$\frac{482.7}{250} = 4B$$

$$\boxed{\frac{482.7}{1000} = B}$$

$$\frac{5164}{1000} = A + \frac{482.7}{1000}$$

$$\boxed{\frac{4681.3}{1000} = A}$$

$$T(n) = \frac{4681.3}{1000}(-1.3)^n + \frac{482.7}{1000}(5.3)^n + \left(-\frac{3}{10}\right)n^2 + \left(-\frac{59}{50}\right)n - \frac{291}{250}$$

n	0	1	2	3	4
$T(n)$	4	6	66	336	1858

n	0	1	2	3	4
$T(n)$	4				

Dada la recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ determine la solución para $a_0 = 4$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = An + B$ para $F(n) = n + 5$
4. Entonces por términos semejantes $An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 5$, $A = -1$ y $B = -7$
5. Por lo tanto $a_n = \alpha 2^n - n - 7$ es una **solución general** de la recurrencia.
6. Sea $a_n = \alpha 2^n - n - 7$, para $a_0 = 4$ entonces $\alpha = 11$. Por lo tanto la solución de la recurrencia:

$$a_n = 11 \cdot 2^n - n - 7$$

Recurrencias lineales no homogéneas

Teorema 2

Supongamos que $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n)$, donde $c_1, c_2, \ldots c_k$ son números reales y $F(n) = (b_tn^t + b_{t-1}n^{t-1} + \ldots + b_1n + b_0)S^n$ esto es cuando $F(n)$ es un polinomio multiplicando a S^n donde S es una constante. Entonces existe dos tipos de solución:

- Si S no es una raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:
$$(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)S^n$$
- Cuando S es raíz de dicha ecuación característica y tiene multiplicidad *m*, existe una solución particular de la forma
$$n^m(p_tn^t + p_{t-1}n^{t-1} + \ldots + p_1n + p_0)S^n$$

Encontrar la solución general de la recurrencia
$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

1. Una solución general es $a_n = \{a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\}$
2. La solución de la homogénea: $a_n^{(h)} = \alpha 3^n + \beta 2^n$
3. La solución polinómica: $a_n^{(p)} = nC2^n + An + B$ para $F(n) = 2^n + 3n$
4. Entonces por términos semejantes:

$$\begin{aligned} nC2^n + An + B = 5[(n-1)C2^{n-1} + A(n-1) + B] \\ -6[(n-2)C2^{n-2} + A(n-2) + B] + 2^n + 3n \end{aligned}$$

Encontrar la solución general de la recurrencia
$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$

4. Solucionando:

$$
\begin{aligned}
nC2^n &= 5C(n-1)2^{n-1} - 6C(n-2)2^{n-2} + 2^n \\
nC &= 5/2C(n-1) - 6/4C(n-2) + 1; 3C - 5/2C + 1 = 0, C = -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
An + B = 5A(n-1) + 5B(n-1) + 5B - 6A(n-2) - 6B + 3n \\
An - 5An + 6An - 3n = 0; n(A - 5A + 6A - 3) = 0 \to 2A - 3 = 0, A = 3/2,
\end{gathered}
$$

$B = -5A + 5B + 12A - 6B; B = 21/4$
La solución de la recurrencia es:
$a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n - n2^{n+1} + 3/2n + 21/4$

1) Raices que es sol particular

$(r-2)(r+3)$

$T(n) = -T(n-1) + 6T(n-2) + 5 \times 2^n$

$r^2 + r - 6$

$r^2 + r - 6 \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 6}}{2}$

$T(n)^h = A(2)^n + B(-3)^n$

$\frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$

$T(n)^p = Cn2^n$

$r = 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5$

$F(n) = 3n^3 + 4 \times 2^n + 3 \times 3^n + 5^n$

$T^h(n) = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n + Dn^3 2^n + E3^n + Fn3^n + G5^n$

$T^p(n) = Hn^3 + In^2 + Jn + K + Ln^4 2^n + Mn^2 3^n + Nn5^n$

Contenido

Introducción

Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b , supongamos también que se requieren $g(n)$ operaciones en lo que podríamos llamar la etapa de conquista y sea $T(n)$ el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n. Entonces se tiene que T satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + g(n)$$

Estrategias de solución de recurrencias

Métodos de solución

- Cambio de variable
- Método maestro
- Por sustitución
- Por iteración
- Funciones generatrices

Cambio de variable

Sea $T(n) = 2T(n/2) + 2$ (máximo y mínimo de una lista para n par)

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^k/2) + 2 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 2t_{k-1} + 2$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 2^k$ y $t_k^{(p)} = A$
3. Entonces $A = 2A + 2$; $A = -2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 2^k - 2$
4. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha n - 2$ es decir, $T(n)$ es $O(n)$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Recuerda:$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

Sea $T(n) = 5T(n/2) + 3$ y $T(1) = 7$ para n par

1. Supongamos $n = 2^k$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 5T(2^k/2) + 3 \\ T(2^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 5t_{k-1} + 3$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 5^k$ y $t_k^{(p)} = A$

Cambio de variable

3. Entonces $A = 5A + 3$; $A = -3/4$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 5^k - 3/4$
4. Para encontrar α y evaluar $T(1)$ se obtiene la recurrencia en función de n. Como $n = 2^k$ entonces $T(n) = \alpha 5^{\log_2 n} - 3/4$ es decir, para $T(1) = 7$, $\alpha = 31/4$.

$$T(n) = 31/4(5)^{\log_2 n} - 3/4$$

$5^{\log_2 n} = n^{\log_2 5}$ ($a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$) Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^{\log_2 5})$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Sea $T(n) = 9T(n/3) + n$

1. Supongamos $n = 3^k$

$$\begin{aligned} T(3^k) &= 9T(3^k/3) + 3^k \\ T(3^k) &= t_k \end{aligned}$$

2. Por tanto la recurrencia $t_k = 9t_{k-1} + 3^k$ tiene solución: $t_k^{(h)} = \alpha 9^k$ y $t_k^{(p)} = A3^k$
3. Entonces $A3^k = 3^k[3A + 1], A = -1/2$ Por lo tanto la solución general es: $t_k = \alpha 9^k - (1/2)3^k$
   $t_k = \alpha(3^k)^2 - (1/2)3^k$
   $T(n) = \alpha n^2 - 1/2n$
4. Por lo tanto $T(n)$ es $O(n^2)$

Universidad del Valle

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$
$n = 4^k$ entonces

$$\begin{aligned}\log n &= \log 4^k\\ &= k\log_4 4\\ \log n &= k\end{aligned}$$

La recurrencia $t_k = 3t_{k-1} + 4^k k$ tiene como solución general
$\{t_k^{(h)} + t_n^{(p)}\}$
$t_k^{(h)} = \alpha 3^k$
$t_k^{(p)} = (Ak+B)4^k$

$$(Ak+B)4^k = 3[(A(k-1)+B)4^{k-1}] + 4^k k$$
$$(Ak+B)4^k = 4^k(3/4[(A(k-1)+B)] + k)$$
$$Ak+B = 3/4Ak - 3/4A + 3/4B + k$$

Cambio de variable

Mostrar que $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$ **es** $O(n\log n)$

Entonces $Ak = k(3/4A + 1)$, $A = 4$ y $B = -3/4A + 3/4B$, $B = -12$

$$\begin{aligned} t_k &= \alpha 3^k + 4^k(4k - 12) = \alpha 3^k + 4^k 4k - 4^k 12 \\ &= \alpha 3^{\log n} + 4n\log n - 12n \end{aligned}$$

como las funciones son crecientes en $n = 70$ entonces
$4n\log n > 12n$
$\therefore T(n)$ es $O(n\log n)$

Cambio de variable

Solucionar $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$

- Entonces $n = (3/2)^k$ y $k = \log_{3/2} n$
- $T((3/2)^k) = 22 + 3T(3^{k-1}/2^{k-1})$ por tanto

$$t_k = 22 + 3t_{k-1}$$

- $t_k^{(h)} = \alpha 3^k$ y $A = 22 + 3A$, $A = -11$
- Solución general $t_k = \alpha 3^k - 11$

$$T(n) = \alpha 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

- Luego $\alpha = 17$ con $T(1) = 6$

$$T(n) = 17 3^{\log_{3/2} n} - 11$$

Por lo tanto como $3^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 3}$ se dice que: $T(n)$ **es** $O(n^{\log_{3/2} 3})$

Método Maestro

Método Maestro

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

Siempre que $n = b^k$, donde k es un entero positivo, $a \geq 1$, b es un entero mayor que 1 y c y d son números reales tales que $c > 0$ y $d \geq 0$, Entonces,

$$T(n) \quad es \begin{cases} O(n^{d)} & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases} \}$$

Método Maestro

- **Mostrar que** $T(n) = 9T(n/3) + n$ es $O(n^2)$ **usando el método maestro.** $a = 9$, $b = 3$ y $d = 1$
  $a > b^d$, $9 > 3^1$
  $O(n^{\log_3 9}) = O(n^2)$
  $$T(n) \text{ es } O(n^2)$$
- **Mostrar que** $T(n) = T(2n/3) + 1$ es $O(\log n)$ **usando el m.m** $a = 1$, $b = 3/2$ y $d = 0$
  $a = b^d$ por tanto $1 = 3/2^0$
  $O(n^0 \log n) = O(\log n)$
  $$T(n) \text{ es } O(\log n)$$
- **Mostrar que** $T(n) = T5(n/2) + 3$ es $O(n^{\log_2 n})$ **usando el m.m** $a = 5$, $b = 2$ y $d = 0$
  $a > b^d$ por tanto $5 > 2^0$
  $O(n^{\log_2 5})$
  $$T(n) \text{ es } O(n^{\log_2 5})$$

Universidad del Valle

Método Maestro

Teorema

Sea T una función creciente que satisface la relación de recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + c$$

cuando n es divisible por b, donde $a \geq 1$, $b > 1$ y $c \in R^+$. Entonces

$$T(n) \quad es \left\{ \begin{array}{ll} O(\log n) & si\ a = 1 \\ O(n^{\log_b a}) & si\ a > 1 \end{array} \right\}$$

Además, cuando $n = b^k$ y $a \neq 1$, donde k es un entero positivo,

$$T(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

donde $C_1 = T(1) + c/(a-1)$ y $C_2 = -c/(a-1)$

Sea $T(n) = 22 + 3T(2n/3)$ para $T(1) = 6$ mostrar que $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$ y obtenga una solución particular usando el teorema.

- Sea $a > 1$, aplicando el teorema $T(n)$ es $O(n^{\log_{3/2} 3})$
- Una solución general:

$$T(n) = C_1 n^{\log_{3/2} 3} + C_2$$

- $C_1 = 6 + 22/(3-1)$ y $C_2 = -22/(3-1)$ por tanto $C_1 = 17$ y $C_2 = -11$, de ahí que una solución particular de $T(n)$ es:

$$T(n) = 17n^{\log_{3/2} 3} - 11$$

Método Maestro

¿Se puede usar cambio de variable para resolver ?

$T(n) = T(n/2) + 1$ para $T(1) = 1$

Por el m.m

$a = 1$, $b = 2$ y $d = 0$

$a = b^d$ por tanto $1 = 2^0$

$O(n^0 \log n) = O(\log n)$

$T(n)$ es $O(\log n)$

Referencias

Kenneth H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill Higher Education, 7th edition, 2011.
Chapter 8. Advanced Counting Techniques.

Gracias

Próximo tema:
Grafos :). Ha llegado la hora de la verdad.