Matemáticas discretas II

Lenguajes y gramáticas

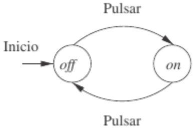
Marzo 2018

Universidad del Valle

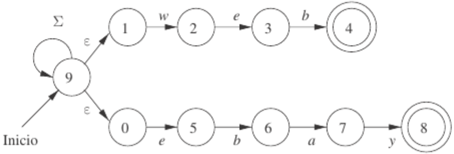
Universidad del Valle

Contenido

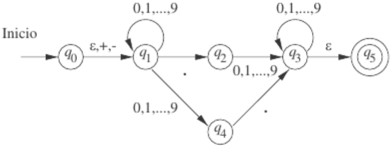
Introducción a los autómatas finitos



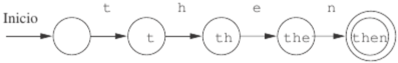
A.F de un interruptor



Uso de transiciones-ε para ayudar a reconocer palabras clave.

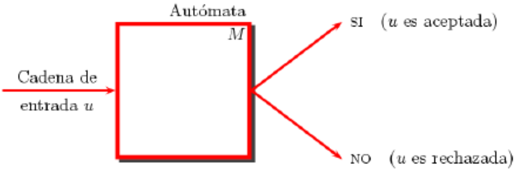


Un AFN-ε que acepta números decimales.

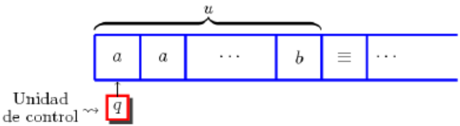


Reconocimiento de la palabra then

Son máquinas abstractas que procesan cadenas, las cuales son aceptadas o rechazadas.



El autómata posee **unidad de control** que inicialmente escanea o lee la casilla desde el extremo izquierdo de la cinta. Tiene unos estados o configuraciones internas.



Función de transición

Sea un autómata $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1

$\delta(q_0, a) = q_0 \qquad \delta(q_0, b) = q_1$

$\delta(q_1, a) = q_1 \qquad \delta(q_1, b) = q_2$

$\delta(q_2, a) = q_1 \qquad \delta(q_2, b) = q_1.$

$F = \{q_0, q_2\}$, estados de aceptación.

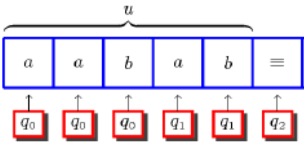
aba

$q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_1$

bbba

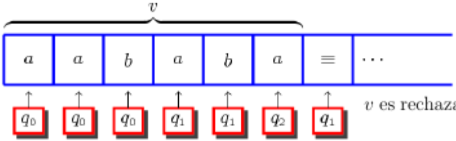
$q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_1$

1. $u = aabab$.



u es aceptada.

2. $v = aababa$.

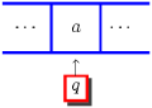


v es rechazada.

Universidad del Valle

Lenguaje aceptado por un autómata

Caso especial: la cadena λ es la cadena de entrada.



Dado un autómata M, el **lenguaje aceptado o reconocido** por M se denota $L(M)$ y se define por

$$\boxed{\begin{aligned} L(M) \;:=\; \{u \in \Sigma^* : M &\text{ termina el procesamiento de la cadena} \\ &\text{de entrada } u \text{ en un estado } q \in F\}. \end{aligned}}$$

Universidad del Valle

Autómatas finitos (FSAs: Finite State-Automata)

Los autómatas finitos se dividen en autómatas finitos deterministas (AFD) (es función) y en autómatas finitos no deterministas (AFN)(es una relación).

Autómata finito determinista

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \delta)$ un AFD entonces:

- Σ: es el alfabeto de entrada.
- Q: es el conjunto de estados
- q_0:Estado inicial
- T: Conjunto de estados finales.
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ determina un único estado siguiente para el par $\delta(q_i, \gamma)$ correspondiente al estado actual y la entrada.

Un AFD puede ser representado por un grafo dirigido y etiquetado.

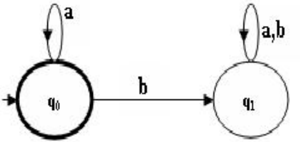
Universidad del Valle

Ejemplos autómatas finitos deterministas

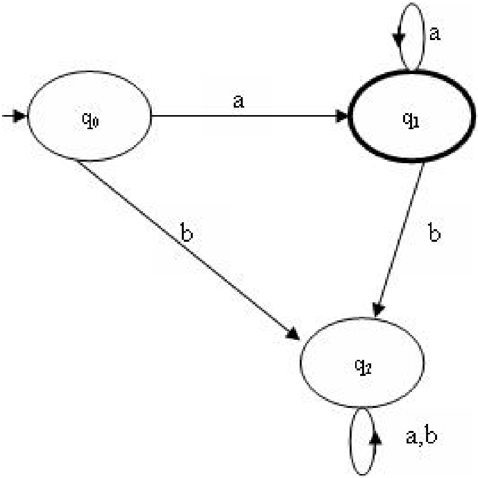
Ejemplo 1. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $L = a^* = \{\varepsilon, a, a^2, a^3, \ldots\}$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_1

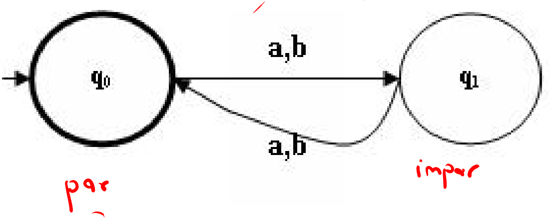
$$\delta(q_0, a) = q_0 \qquad \delta(q_0, b) = q_1$$
$$\delta(q_1, a) = q_1 \qquad \delta(q_1, b) = q_1$$



Ejemplo 2. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $L = a^+ = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$



Ejemplo 3. Diseñar el AFD sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que tienen un número par de símbolos



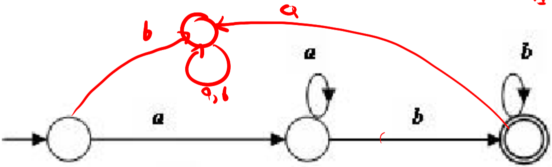
aba

$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1$

abab

$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0$

Ejemplo 4. AFD que reconoce $a^+ b^+$



Universidad del Valle

Ejemplos autómatas finitos deterministas

Ejemplo 5. El diagrama y tabla de transición en cierta forma determinan si es un autómata finito determinista o no determinista.
Sea $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
q_0 : estado inicial
$T = \{q_0, q_2\}$ estados finales o de aceptación.

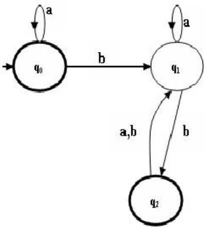
ϵ, a, aa

$bb(a \cup b)b(a \cup b)b$

$(a \cup b)b$

δ	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_1

$\delta(q_0, a) = q_0 \quad \delta(q_0, b) = q_1$
$\delta(q_1, a) = q_1 \quad \delta(q_1, b) = q_2$
$\delta(q_2, a) = q_1 \quad \delta(q_2, b) = q_1$



$a^* \cup a^*bb((a \cup b)b)^*$

Es importante anotar que en la tabla de transición por cada pareja (q_i, γ) hay un sólo estado q_j por eso δ es una función de transición.
el lenguaje que reconoce este AFD es:

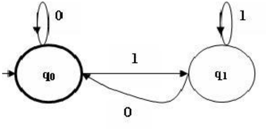
$$\cancel{a^*(b(a^+ba^+bb)^*b)^+a^*}$$

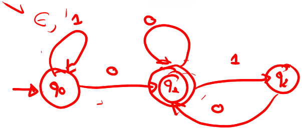
Ahora como el estado inicial es un estado final este AFD reconoce ε

Universidad del Valle

Ejemplos autómatas finitos deterministas

Ejemplo 6. Diseñar el AF sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que reconozca en binario el lenguaje de todos los múltiplos de 2.





Binario	Decimal
0	0
10	2
100	4
110	6
1000	8
1010	10
1100	12
1110	14
⋮	⋮

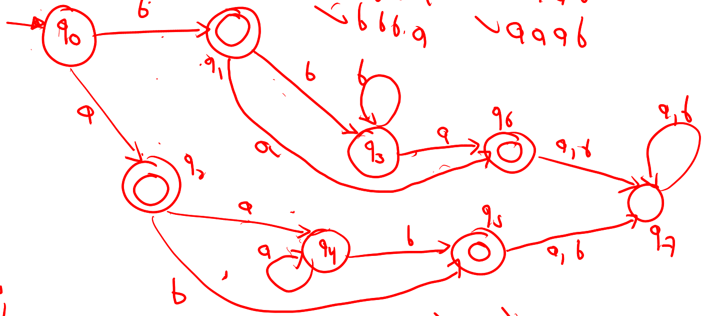
$\boxed{\boxed{a^*}\,b} \cup \boxed{b^*}\,a$

$\boxed{a}$ $\boxed{b}$

ba ab

bba aab

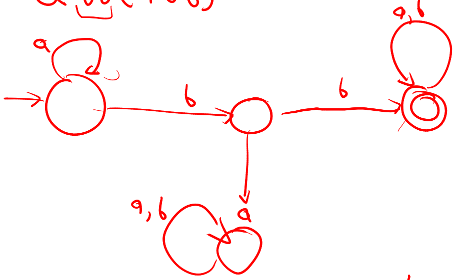
$bbba$ $aaab$



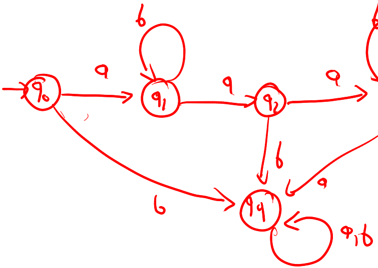
a b

ab aab $aaab$ a^4b ba bba b^3a

$a^* bb (a \cup b)^*$



$a b^* a a b^*$



Autómatas finitos No determinísticos

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ un AFN entonces:

- Σ: es el alfabeto de entrada.
- Q: es el conjunto de estados
- q_0:Estado inicial
- T: Conjunto de estados finales.
- $\triangle$: es una relación tal que:

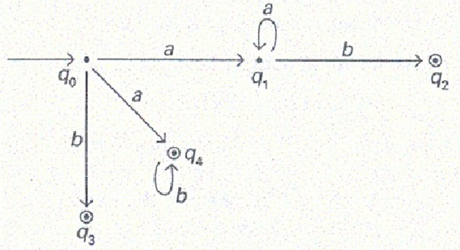
$$(Q \times \Sigma) \rightarrow 2^Q$$

Donde 2^Q denota el conjunto potencia de Q o el conjunto de todos los subconjuntos de Q.

$$2^Q = \{A | A \subseteq Q\}$$

Universidad del Valle

Ejemplo 1. Diseñar el AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje regular $a^*b \cup ab^*$

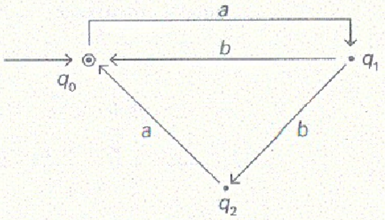


Δ	a	b
q_0	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{q_4\}$

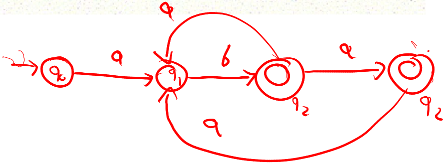
Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 2. Diseñar el AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que reconozca el lenguaje $(ab \cup aba)^*$

Δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_0\}$	$\emptyset$

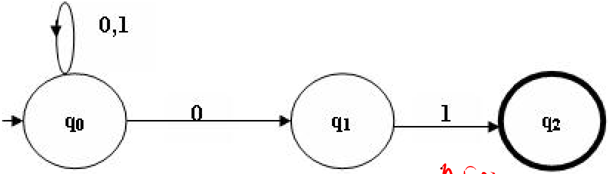


ab
ababa
aba aba
abaab



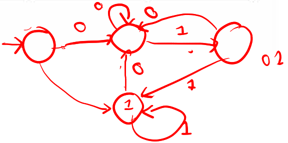
Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 3. Diseñar el AF sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que reconozca el lenguaje de todas las cadenas que terminan en 01



AFN

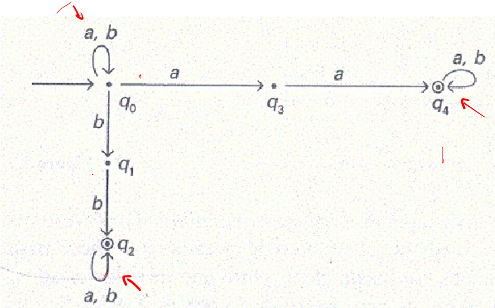
Δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	q_0
q_1	ϕ	q_2
q_2	ϕ	ϕ



AFD

Ejemplos Autómatas finitos No determinísticos

Ejemplo 4. Obtener la expresión regular del siguiente AFN sobre $\Sigma = \{a, b\}$.



Δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

$(a \cup b)^*(aa \cup bb)(a \cup b)^*$

Teorema

Sea $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ un AFN. Entonces existe un AFD $M' = (Q', \Sigma', q_0', T', \delta)$ tal que $L(M) = L(M')$.

- *El conjunto q_0 se corresponde con q_0'*
- *El conjunto de estados finales T' de Q' se corresponde con los conjuntos de estados de Q que contienen un estado de T*
- *El conjunto de estados de Q' se corresponde con el conjunto de estados de Q que se vaya formando mediante el análisis de una cadena sobre M*

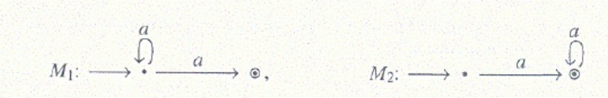
Universidad del Valle

Equivalencia entre autómatas

Autómatas equivalentes

Dos AFD son equivalentes M_1 y M_2 son equivalentes si $L(M_1) = L(M_2)$.

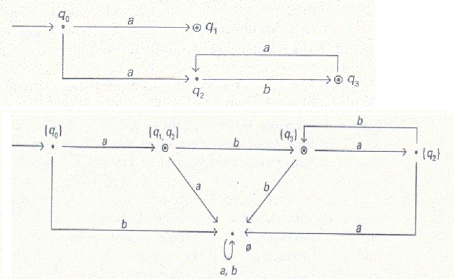
Sean M_1 y M_2 sobre el alfabeto $\sum = \{a\}$,



$L(M_1) = L(M_2) = a^+$

Ejemplos equivalencia de AFN y AFD

Ejemplo 1. Consideremos el AFN M que acepta $a \cup (ab)^+$



Para este AFN se tiene:

$$\triangle(q_0, a) = \{q_1, q_2\} \qquad \triangle(q_0, b) = \emptyset$$

$$\triangle(\{q_1, q_2\}, a) = \emptyset \qquad \triangle(\{q_1, q_2\}, b) = \{q_3\}$$

$$\triangle(\emptyset, b) = \triangle(\emptyset, b) = \emptyset \qquad \triangle(q_3, a) = \{q_2\}$$

$$\triangle(q_3, b) = \emptyset \qquad \triangle(q_2, a) = \emptyset$$

$$\triangle(q_2, b) = \{q_3\}$$

Ejemplos equivalencia de AFN y AFD

Entonces se verifica que la regla de transición es una función. Por tanto, $M' = (Q', \Sigma', q_0', T', \delta)$ donde:

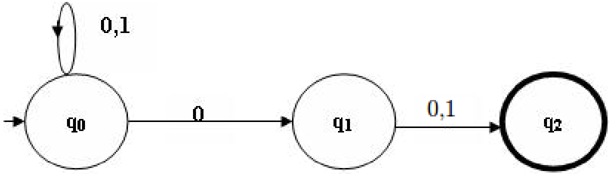
$$
\begin{aligned}
Q' &= \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}\} \\
\Sigma' &= \Sigma \\
s' &= \{q_0\} \\
T' &= \{\{q_3\}, \{q_1, q_2\}\}
\end{aligned}
$$

y δ viene dada por la siguiente tabla:

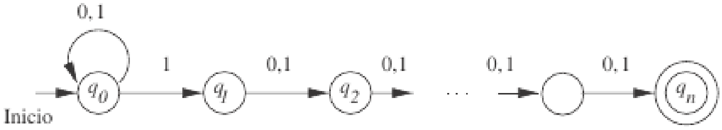
δ	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$

Universidad del Valle

- **Ejemplo 2.** Consideremos el AFN M que acepta $(0 \cup 1)^*0(0 \cup 1)$



- **Caso desfavorable para la construcción de subconjuntos**



Este AFN no tiene un AFD equivalente con menos de 2^n estados.

Crecimiento exponencial del número de estados para el AFD.

Intersección entre lenguajes regulares

Teorema

Si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, también lo es $L_1 \cap L_2$.

Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$ donde: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, q_1, T_1, \delta_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, q_2, T_2, \delta_2)$ Entonces construimos:

$$M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, (q_1, q_2), T_1 \times T_2, \delta)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta : Q_1 \times Q_2 \times \Sigma &\rightarrow Q_1 \times Q_2 \\ \delta((q_i, q_j), a) &= (\delta_1(q_i, a), \delta_2(q_j, a)) \end{aligned}$$

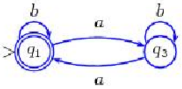
Esta función satisface:

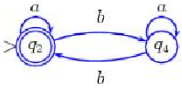
$$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$$

Universidad del Valle

Ejemplo intersección de lenguajes

Ejemplo. Construir el AFD que acepte el lenguaje L de todas las palabras sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que tienen un número par de a's y un número par de b's.



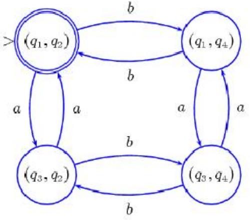


Entonces el lenguaje $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ tiene cuatro estados:
$Q_1 \times Q_2 = \{(q_1, q_2), (q_1, q_4), (q_3, q_2), (q_3, q_2)\}$
$T_1 \times T_2 = \{(q_1, q_2)\}$

Ejemplo intersección de lenguajes

Entonces δ se define como:

$$
\begin{aligned}
\delta((q_1,q_2),a) &= (\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_2,a)) = (q_3,q_2)\\
\delta((q_1,q_2),b) &= (\delta_1(q_1,b),\delta_2(q_2,b)) = (q_1,q_4)\\
\delta((q_1,q_4),a) &= (\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_4,a)) = (q_3,q_4)\\
\delta((q_1,q_4),b) &= (\delta_1(q_1,b),\delta_2(q_4,b)) = (q_1,q_2)\\
\delta((q_3,q_2),a) &= (\delta_1(q_3,a),\delta_2(q_2,a)) = (q_1,q_2)\\
\delta((q_3,q_2),b) &= (\delta_1(q_3,b),\delta_2(q_2,b)) = (q_3,q_4)\\
\delta((q_3,q_4),a) &= (\delta_1(q_3,a),\delta_2(q_4,a)) = (q_1,q_4)\\
\delta((q_3,q_4),b) &= (\delta_1(q_3,b),\delta_2(q_4,b)) = (q_3,q_2)
\end{aligned}
$$

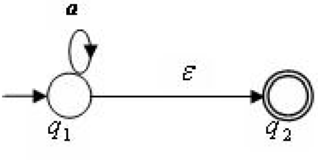


Autómatas con ε-transiciones

`Autómatas con` ε`-transiciones`: Un autómata con ε-transiciones es un AFN $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$ en el que la relación de transición está definida así:
$\triangle : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \longrightarrow 2^Q$
La ε-transición permite al autómata cambiar internamente de estado sin consumir el símbolo leído sobre la cinta.
Donde 2^Q denota el conjunto potencia de Q o el conjunto de todos los subconjuntos de Q.

$$2^Q = \{A | A \subseteq Q\}$$

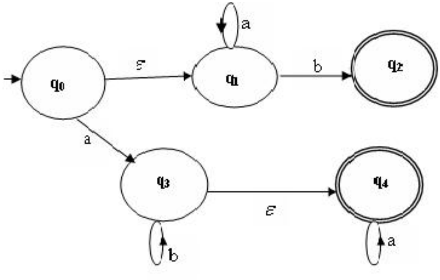
Ejemplo 1. Se puede representar el lenguaje de la expresión regular a^* sin necesidad de colocar el estado inicial como estado final.



$\triangle$	a	b	ϵ
q_1	q_1	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Ejemplos

Ejemplo 2. Sea el siguiente AFN-ε

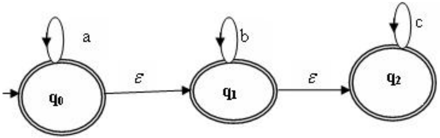


La ε-transición en el AFN permite que se reconozcan cadenas como:
w=aaab
w=abbbbaaa
w=a
w=b

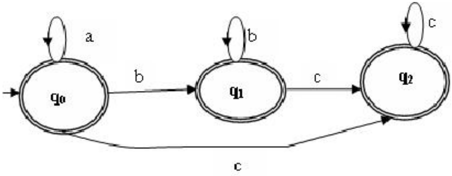
Expresión regular del autómata

$a^* b \cup ab^* a^*$

Ejemplo 3. Construir un AFN-ε que reconozca sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$, el lenguaje $L = a^* b^* c^*$



El siguiente AFN reconoce el mismo lenguaje que reconoce el AFN-ε anterior.



Teorema de Kleene

Teorema

`Teorema de Kleene`. Un lenguaje regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-ε)

- Construcción de autómatas finitos a partir de expresiones regulares.
- Construcción de expresiones regulares a partir de autómatas:
  1. Lema de Arden (Ecuaciones de Lenguaje)
  2. Conversión de AFN a expresiones regulares por eliminación de estados.

Teorema

Dado un AFN-ε $M = (Q, \Sigma, q_0, T, \triangle)$, se puede construir un AFN M' equivalente a M, es decir $L(M) = L(M')$.

Teorema

Un lenguaje regular si y sólo si es aceptado por un autómata finito (AFD o AFN o AFN-ε)

Teorema

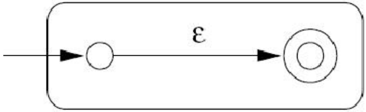
Para toda expresión regular R se puede construir un AFN-ϵ M tal que $L(R) = L(M)$.

Paso Básico

- EL autómata

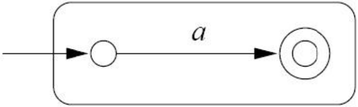
acepta el lenguaje vacío $\emptyset$

- EL autómata



acepta el lenguaje $\{\epsilon\}$

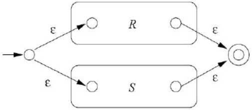
- EL autómata



acepta el lenguaje $\{a\}$

PASO INDUCTIVO

1. Existe un autómata que acepta $R \cup S$



Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, T_2, \triangle_2)$ para el nuevo $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ tenemos que:

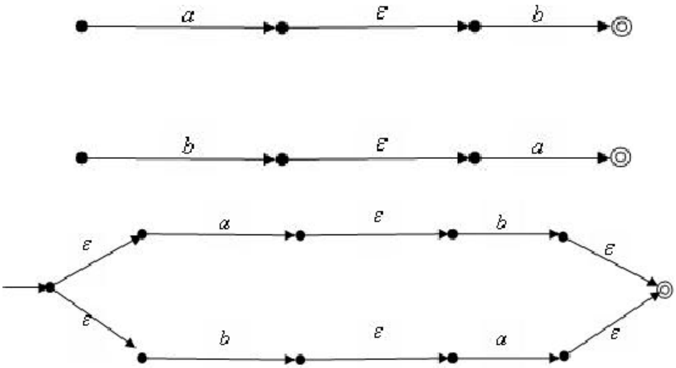
1. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
2. En T se agrega un estado s' si y sólo si

$$\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s_2)\} \cup \{(T_1, \epsilon, s'), (T_2, \epsilon, s')\}$$

   s' es un estado final NUEVO.

3. $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\} \cup \{s'\}$ donde s es el nuevo estado inicial.

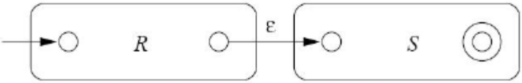
Por ejemplo se construye $ab \cup ba$.



Ejemplo. Sobre $\Sigma = \{a, b\}$ el lenguaje de todas las palabras sobre Σ que tienen un n

Universidad del Valle

2. Autómata que acepta $R \cdot S$

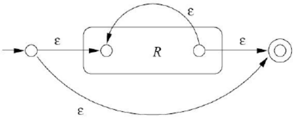


Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ y $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, s_2, T_2, \triangle_2)$ para el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ que acepta $L(M_1) \cdot L(M_2)$ tenemos que:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $s_1 = s$
3. $T = T_2$

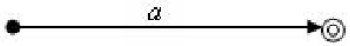
$$\triangle = \triangle_1 \cup \triangle_2 \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s2)$$

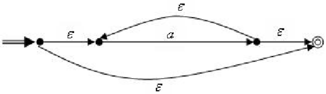
3. Autómata que reconoce R^*



Sean $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, s_1, T_1, \triangle_1)$ entonces el nuevo AFN $M = (Q, \Sigma, s, T, \triangle)$ que acepta $L(M) = (L(M_1))^*$ viene dado por

1. $Q = Q_1 \cup \{s\} \cup \{s'\}$, donde s' es un nuevo estado final.
2. $T = \{s'\}$
3. $\triangle = \triangle_1 \cup \{(s, \epsilon, s_1), (s, \epsilon, s')\} \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s') \cup (T_1 \times \{\epsilon\} \times s_1)$





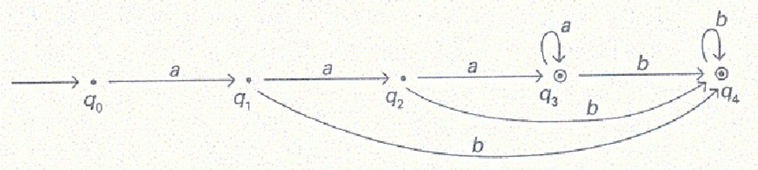
Ecuaciones de lenguaje

Ecuacion del lenguaje

Sea Σ un alfabeto y sean E y A subconjuntos de Σ^*, entonces la ecuación del lenguaje $X = E \cup A \cdot X$ admite la solición $X = A^* \cdot E$ cualquier otra solución Y deberá contener $A \cdot X$, además $\epsilon \notin A$, $X = A^* \cdot E$ es la única solución.

Ejemplos ecuaciones de lenguaje

Ejemplo 1. Encontrar la expresión del siguiente AFD.

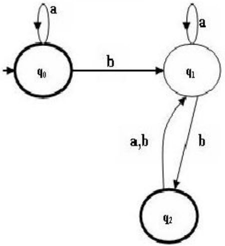


Entones el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax_1 \\
x_1 &= ax_2 + bx_4 \\
x_2 &= ax_3 + bx_4 \\
x_3 &= ax_3 + bx_4 + \epsilon \\
x_4 &= bx_4 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Universidad del Valle

Ejemplo 2. Encontrar la expresión regular del siguiente AFD usando el lema del Arden:



El siguiente es el sistema de ecuaciones a resolver:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= ax_0 + bx_1 + \epsilon \\
x_1 &= ax_1 + bx_2 \\
x_2 &= (a \cup b)x_1 + \epsilon
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de lenguaje

Teorema

Sean $n \geq 2$ considere el sistema de ecuaciones cuyas incognitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dado por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= E_1 \cup A_{11}x_1 \cup A_{12}x_2 \cup \ldots \cup A_{1,n}x_n \\
x_2 &= E_2 \cup A_{21}x_1 \cup A_{22}x_2 \cup \ldots \cup A_{2,n}x_n \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= E_{n-1} \cup A_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup A_{(n-1),n}x_n \\
x_n &= E_n \cup A_{n1}x_1 \cup A_{n2}x_2 \cup \ldots \cup A_{n,n}x_n
\end{aligned}$$

Entonces el sistema tiene una única solución:

- *En $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\epsilon \notin A_i$*

Ecuaciones de lenguaje

- Entonces el nuevo sistema se obtiene hasta $n-1$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11}x_1 \cup \widehat{A}_{12}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{1,(n-1)}x_{n-1} \\
x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21}x_1 \cup \widehat{A}_{22}x_2 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{2,(n-1)}x_{n-1} \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= \widehat{E}_{n-1} \cup \widehat{A}_{(n-1)1}x_1 \cup \ldots \cup \widehat{A}_{(n-1),(n-1)}x_{n-1}
\end{aligned}
$$

Entonces $\widehat{E}_i$ y $\widehat{A}_{ij}$ se definen como:

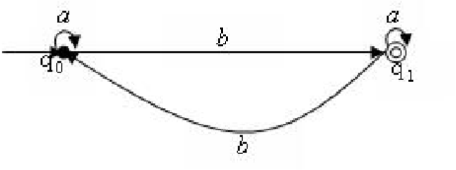
$$
\begin{aligned}
\widehat{E}_i &= E_i \cup (A_{in}A_{nn}^{*}E_n), \quad i = 1, \ldots, n-1 \\
\widehat{A}_{ij} &= A_{ij} \cup (A_{in}A_{nn}^{*}A_{nj}), \quad \forall_{i,j} = 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Donde:

$$
E_i = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad q_i \notin F \\ \epsilon & \text{si} \quad q_i \in F \end{cases}
$$

Universidad del Valle

Ejemplo 1. Obtener la expresión regular del siguiente AFD usando ecuaciones del lenguaje y la solución única.



El sistema de ecuaciones inicial es:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_1 + bx_2 \\ x_2 &= bx_1 + ax_2 + \epsilon \end{aligned}$$

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Se aplica el teorema de solución de ecuaciones:

$$x_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{A}_{11} x_1$$

Se obtiene $\widehat{E}_1$

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_1 &= E_1 + (A_{12} A_{22}^* E_2) \\
\widehat{E}_1 &= \emptyset + (b \cdot a^* \cdot \epsilon) \\
\widehat{E}_1 &= ba^*
\end{aligned}$$

Se obtiene $\widehat{A}_{11}$

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{11} &= A_{11} + (A_{12} A_{22}^* A_{21}) \\
\widehat{A}_{11} &= a + (b \cdot a^* \cdot b) \\
\widehat{A}_{11} &= a + ba^* b
\end{aligned}$$

Universidad del Valle

Ejemplo ecuaciones de lenguaje

Reemplazando $\widehat{E}_1$ y $\widehat{A}_{11}$ en x_1

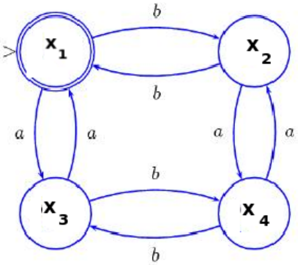
$$x_1 = \widehat{E}_1 + \widehat{A}_{11} x_1$$
$$x_1 = ba^* + (a + ba^* b) x_1$$

Aplicando solución única se tiene:

$$x_1 = (a + ba^* b)^* ba^*$$

Universidad del Valle

Sistema de ecuaciones por reducción de variables



$$\begin{aligned} x_1 &= ax_3 + bx_2 + \varepsilon \\ x_2 &= ax_4 + bx_1 \\ x_3 &= ax_1 + bx_4 \\ x_4 &= ax_2 + bx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \widehat{E}_1 \cup \widehat{A}_{11}x_1 \cup \widehat{A}_{12}x_2 \cup \widehat{A}_{13}x_3 \\ x_2 &= \widehat{E}_2 \cup \widehat{A}_{21}x_1 \cup \widehat{A}_{22}x_2 \cup \widehat{A}_{23}x_3 \\ x_3 &= \widehat{E}_3 \cup \widehat{A}_{31}x_1 \cup \widehat{A}_{32}x_2 \cup \widehat{A}_{33}x_3 \end{aligned}$$

Referencias