Matemáticas Discretas

Oscar Bedoya

oscar.bedoya@correounivalle.edu.co

* Definición de sucesión
* Progresión aritmética
* Progresión geométrica
* Sumatorias

Sucesiones y Sumatorias

Indique el número que falta en cada una de las siguientes listas de términos:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ? ← 21   Fibunnocci

  4 4 4 4
- 3, 7, 11, 15, 19, ? ← 23

  4 12
- 2, 6, 18, 54, 162, ? ← 486
- 1, 2, 6, 42, 1806, ?

Sucesiones y Sumatorias

Indique el número que falta en cada una de las siguientes listas de términos:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21**
- 3, 7, 11, 15, 19, **23**
- 2, 6, 18, 54, 162, **486**
- 1, 2, 6, 42, 1806, **3263442**

Sucesiones y Sumatorias

Indique el número que falta en cada una de las siguientes listas de términos:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, **21**. 8+13=21
- 3, 7, 11, 15, 19, **23**. 19+4=23
- 2, 6, 18, 54, 162, **486**. $162 \cdot 3 = 486$
- 1, 2, 6, 42, 1806, **3263442**. $1806 \cdot 1807 = 3263442$

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. a_n=?
- 3, 7, 11, 15, 19, 23
- 2, 6, 18, 54, 162, 486
- 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, donde $a_1=0$ y $a_2=1$
- 3, 7, 11, 15, 19, 23 $\quad a_n = a_{n-1}+4 \quad a_1 = 3$
- 2, 6, 18, 54, 162, <u>486</u> $\quad a_n = 3a_{n-1} \quad a_1 = 2$
- 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442 $\quad a_n = (a_{n-1})(a_{n-1}+1)$

$2\times1 \quad 2\times3 \quad 6\times7 \quad 42\times43 \quad 1806\times1807$

$(a_{n-1})^2 + a_{n-1}$

$a_1 = 1$

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2,}$ donde $a_1=0$ y $a_2=1$
- 3, 7, 11, 15, 19, 23. $a_n=a_{n-1}+4$, donde $a_1=3$
- 2, 6, 18, 54, 162, 486.
- 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442.

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2,}$ donde $a_1=0$ y $a_2=1$
- 3, 7, 11, 15, 19, 23. $a_n=a_{n-1}+4$, donde $a_1=3$
- 2, 6, 18, 54, 162, 486. $a_n=a_{n-1}\cdot 3$, donde $a_1=2$
- 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442.

Sucesiones y Sumatorias

Obtener un término general para cada elemento de la lista:

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2,}$ donde $a_1=0$ y $a_2=1$
- 3, 7, 11, 15, 19, 23. $a_n=a_{n-1}+4$, donde $a_1=3$
- 2, 6, 18, 54, 162, 486. $a_n=a_{n-1}\cdot 3$, donde $a_1=2$
- 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442. $a_n=a_{n-1}\cdot(a_{n-1}+1)$, donde $a_1=1$

Sucesiones y Sumatorias

Las siguientes son sucesiones:

- $\{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, donde $a_1 = 0$, $a_2 = 1\}$
- $\{a_n = a_{n-1} + 4$, donde $a_1 = 3\}$
- $\{a_n = a_{n-1} \cdot 3$, donde $a_1 = 2\}$
- $\{a_n = a_{n-1} \cdot (a_{n-1} + 1)$, donde $a_1 = 1\}$

Sucesiones y Sumatorias

Las siguientes son sucesiones:

- $\{a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, donde $a_1=0$, $a_2=1\}$

  Lista de elementos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
- $\{a_n=a_{n-1}+4$, donde $a_1=3\}$

  Lista de elementos 3, 7, 11, 15, 19, 23, …
- $\{a_n=a_{n-1} \cdot 3$, donde $a_1=2\}$

  Lista de elementos: 2, 6, 18, 54, 162, 486, …
- $\{a_n=a_{n-1} \cdot (a_{n-1}+1)$, donde $a_1=1\}$

  Lista de elementos: 1, 2, 6, 42, 1806, 3263442, …

Sucesiones y Sumatorias

Indique la sucesión para cada una de las siguientes listas de elementos:

- 5, 8, 11, 14, 17 $\leftarrow$ $a_n = a_{n-1} + 3, \quad a_1 = 5$
- 2, -2, 2, -2, 2 $\leftarrow$ $a_n = (-1)\, a_{n-1} \quad a_1 = 2$
- 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256 $\leftarrow$ $a_n = (a_{n-1}) \times (a_{n-2})$

$a_1 = 1 \quad a_2 = 2$

Sucesiones y Sumatorias

Indique la sucesión para cada una de las siguientes listas de elementos:

- 5, 8, 11, 14, 17. $\{a_n = a_{n-1} + 3$, donde $a_1=5\}$
- 2, -2, 2, -2, 2. $\{a_n = a_{n-1} \cdot (-1)$, donde $a_1=2\}$
- 1, 2, 2, 4, 8, 32, 256. $\{a_n=a_{n-1} \cdot a_{n-2}$, donde $a_1=1$, $a_2=2\}$

Sucesiones y Sumatorias

Muestre **la lista de elementos** de las siguientes sucesiones dada por a_1, a_2, a_3, a_4

- $\{a_n = 1/n\}$ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$
- $\{a_n = 3 \cdot 2^n\}$ $\{6, 12, 24, 48, \ldots\}$
- $\{a_n = -1 + 4 \cdot n\}$ $\{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$

Sucesiones y Sumatorias

Muestre **la lista de elementos** de las siguientes sucesiones dada por a_1, a_2, a_3, a_4

- $\{a_n=1/n\}$. 1, 1/2, 1/3, 1/4, …
- $\{a_n=3 \cdot 2^n\}$. 6, 12, 24, 48, …
- $\{a_n=-1 + 4 \cdot n\}$. 3, 7, 11, 15, …

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 6, 18, 54, 162, 486,…

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 6, 18, 54, 162, 486,…

$a_1 = 6$

$a_2 = 18$

$a_3 = 54$

$a_4 = 162$

$a_5 = 486$

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 6, 18, 54, 162, 486,…

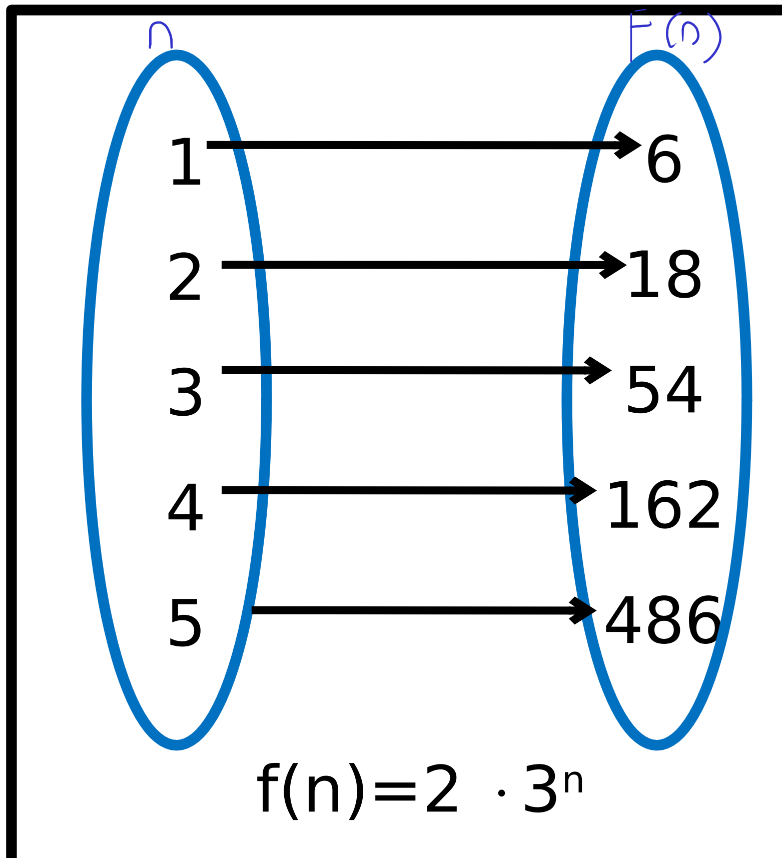
$a_1 = 6$

$a_2 = 18$

$a_3 = 54$

$a_4 = 162$

$a_5 = 486$



Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 2, 6, 18, 54, 162, ...

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 2, 6, 18, 54, 162, ...

$a_0 = 2$

$a_1 = 6$

$a_2 = 18$

$a_3 = 54$

$a_4 = 162$

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 2, 6, 18, 54, 162, ...

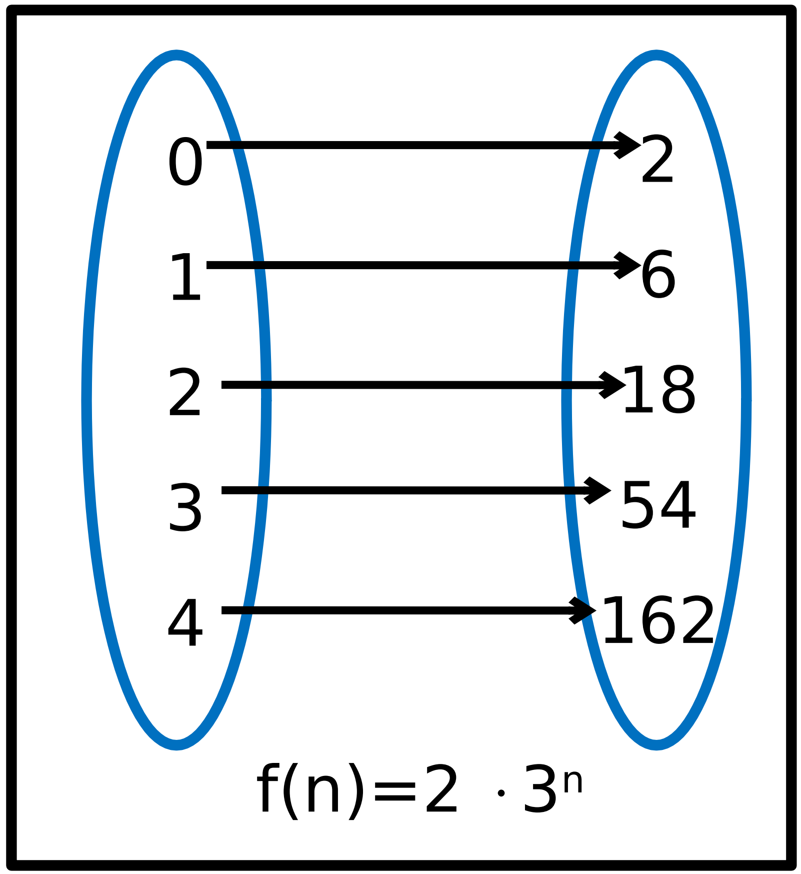
$a_0=2$

$a_1=6$

$a_2=18$

$a_3=54$

$a_4=162$



Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 18, 54, 162, 486, ...

Sucesiones y Sumatorias

Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 18, 54, 162, 486, ...

$a_2 = 18$

$a_3 = 54$

$a_4 = 162$

$a_5 = 486$

Sucesiones y Sumatorias

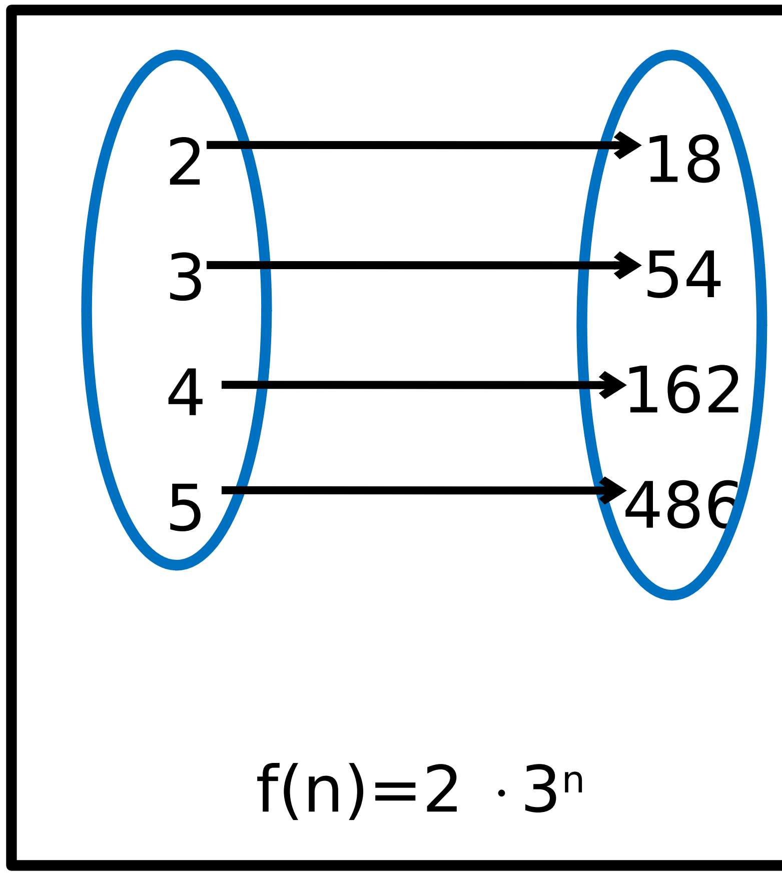
Considere la sucesión $\{a_n = 2 \cdot 3^n\}$ cuya lista de términos es 18, 54, 162, 486, ...

$a_2 = 18$

$a_3 = 54$

$a_4 = 162$

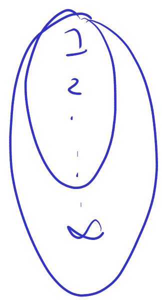
$a_5 = 486$



Sucesiones y Sumatorias

Definición de sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función de un subconjunto de los enteros a los términos de $\{a_n\}$



Sucesiones y Sumatorias

$a_n = 6 + a_{n-1}$

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ? 65
- -1, 4, 9, 14, 19, 24, ? ← 29
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, ? ← −10 $a_n = a_{n-1} - 2$

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 59+6=65
- -1, 4, 9, 14, 19, 24, 24+5=29
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -8+(-2)=-10

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

  11-5=6

  17-11=6

  23-17=6

  29-23=6

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

  11-5=6 $\quad a_1 = 5$

  17-11=6

  23-17=6

  29-23=6

- 5, 5+6, (5+6)+6, (5+6+6)+6, (5+6+6+6)+6, ...

  $5,\ 5+6(1),\ 5+6(2),\ 5+6(3),\ 5+6(4)$

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

  11-5=6

  17-11=6

  23-17=6

  29-23=6
- 5, 5+6, 5+6+6, 5+6+6+6, 5+6+6+6+6, ...

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, ...

  11-5=6

  17-11=6

  23-17=6

  29-23=6

- 5, 5+6, 5+6+6, 5+6+6+6, 5+6+6+6+6, ...
- $5+0\cdot 6,\ 5+1\cdot 6,\ 5+2\cdot 6,\ 5+3\cdot 6,\ 5+4\cdot 6,\ \ldots$

$5 + ?6$

Sucesiones y Sumatorias

- 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, …

  11-5=6

  17-11=6

  23-17=6

  29-23=6

- 5, 5+6, 5+6+6, 5+6+6+6, 5+6+6+6+6, …
- $5+0\cdot6,\ 5+1\cdot6,\ 5+2\cdot6,\ 5+3\cdot6,\ 5+4\cdot6,\ \ldots$
- $a_n=5+n\cdot6$ $\qquad a_0=5$

Progresión aritmética

Es una sucesión de la forma

t, t+d, t+2d, t+3d, t+4d, ...

donde el **término inicial t** y la **diferencia** d son números reales

condición inicial

Progresión aritmética

Es una sucesión de la forma

$$t, t+d, t+2d, t+3d, t+4d, \ldots$$

donde el **término inicial t** y la **diferencia** d son números reales

- La progresión aritmética se puede expresar como

$$\{a_n = t + n \cdot d\}$$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- -1, 4, 9, 14, 19, 24, …

  a_0 $\quad$ a_4

  $a_n = -1 + n(5)$

  $a_4 = -1 + 4(5)$
  $= 19$

- 4, 7, 10, 13, 16, 20, 23, 26, …

  3 $\quad$ 3 $\quad$ 4

- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, …

  $a_n = 4 + n(-2)$

- 3, 6, 12, 24, 48, …

  $a_n = 3 + n(3)$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- -1, 4, 9, 14, 19, 24, ... $\{a_n=-1+n \cdot 5\}$
- 4, 7, 10, 13, 16, 20, 23, 26, **no es progresión aritmética**
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, …
- 3, 6, 12, 24, 48, …

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- -1, 4, 9, 14, 19, 24, ... $\{a_n=-1+n \cdot 5\}$
- 4, 7, 10, 13, $\overbrace{16, 20}^{4}$, 23, 26, **no es progresión aritmética**
- 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, ... $\{a_n=4+n \cdot (-2)\}$
- 3, 6, 12, 24, 48, ... **no es progresión aritmética**

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, … ← $a_n = 2 + 2n$
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, …
- 3, 1, -1, -3, -5, -7, … ← $a_n = 3 - 2n$
- 1/2, 3/2, 5/2, 5/1, 9/2, 11/2, … ← $a_n = \frac{1}{2} +$ ¿(

$\frac{2}{2}$ $\frac{2}{2}$ 2.5 $-\frac{1}{2}$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, …. $\{a_n=2+n \cdot 2\}$
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, …**no es progresión aritmética**
- 3, 1, -1, -3, -5, -7, …
- 1/2, 3/2, 5/2, 5/1, 9/2, 11/2

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones aritméticas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... $\{a_n=2+n \cdot 2\}$
- 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...**no es progresión aritmética**
- 3, 1, -1, -3, -5, -7, ... $\{a_n=3+n \cdot (-2)\}$
- 1/2, 3/2, 5/2, 5/1, 9/2, 11/2.**no es progresión aritmética**

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 4, 8, 16, 32, 64, ? 128
- 10, 50, 250, 1250, 6250, ? 31250

$a_0 \qquad = 2^0 \times 4$

$a_1 = 8 = 2 \times 4 \qquad = 2^1 \times 4$

$a_2 = 16 = 2 \times 8 = 2 \times 2(4) = 2^2 \times 4$

$a_3 = 32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 2(4) = 2^3 \times 4$

$a_4 = 64 = 2 \times 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2(4) = 2^4 \times 4$

Sucesiones y Sumatorias

Indique el elemento que sigue en cada lista:

- 4, 8, 16, 32, 64, 64*2=128
- 10, 50, 250, 1250, 6250, 6250*5=31250

5 5 5 5

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, …

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, …

  8/4=2

  16/8=2

  32/16=2

  64/32=2

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, …

  8/4=2

  16/8=2

  32/16=2

  64/32=2

- $4,\ 4\cdot 2,\ (4\cdot 2)\cdot 2,\ (4\cdot 2\cdot 2)\cdot 2,\ (4\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot 2$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, …

  8/4=2

  16/8=2

  32/16=2

  64/32=2

- $4,\ 4\cdot 2,\ 4\cdot 2\cdot 2,\ 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2,\ 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

  8/4=2

  16/8=2

  32/16=2

  64/32=2

- $4, 4\cdot 2, 4\cdot 2\cdot 2, 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2, 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$
- $4\cdot 2^0, 4\cdot 2^1, 4\cdot 2^2, 4\cdot 2^3, 4\cdot 2^4$

Sucesiones y Sumatorias

- 4, 8, 16, 32, 64, ...

  8/4=2

  16/8=2

  32/16=2

  64/32=2

- $4, 4 \cdot 2, 4 \cdot 2 \cdot 2, 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $4 \cdot 2^0, 4 \cdot 2^1, 4 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4$
- $\{a_n = 4 \cdot 2^n\}$

Progresión geométrica

Es una sucesión de la forma

$$t,\ t \cdot r,\ t \cdot r^2,\ t \cdot r^3,\ t \cdot r^4,\ \ldots$$

donde el **término inicial t** y la **razón r** son números reales

Progresión geométrica

Es una sucesión de la forma

$t, t \cdot r, t \cdot r^2, t \cdot r^3, t \cdot r^4, \ldots$

donde el **término inicial t** y la **razón r** son números reales

- La progresión geométrica se puede expresar como

$\{a_n = t \cdot r^n\}$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 10, 50, 250, 1250, 6250, ... $\quad a_n = 10 \times 5^n$
- 3, 6, 12, 25, 50, 100, 200, ...
- 1, 6, 8, 12, 25, ... $\quad \leftarrow \; a_n = 2 \times \cancel{\;} \; :6$
- 2, 2/3, 2/9, 2/27, 2/81, ... $\quad a_n = 2 \times \left(\frac{2}{6}\right)^n$

$$\frac{2}{6} \qquad \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{18} = \frac{2}{6} \qquad \frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{18}{54} = \frac{2}{6} \qquad \frac{\frac{2}{81}}{\frac{2}{27}} = \frac{54}{162} = \frac{2}{6}$$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 10, 50, 250, 1250, 6250, … $\{a_n = 10 \cdot 5^n\}$
- 3, 6, 12, 25, 50, 100, 200, …**no es progresión geométrica**
- 1, 6, 8, 12, 25, …
- 2, 2/3, 2/9, 2/27, 2/81, …

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 10, 50, 250, 1250, 6250, ... $\{a_n = 10 \cdot 5^n\}$
- 3, 6, 12, 25, 50, 100, 200, ...**no es progresión geométrica**
- 1, 6, 8, 12, 25, ... **no es progresión geométrica**
- 2, 2/3, 2/9, 2/27, 2/81, ... $\{a_n = 2 \cdot (1/3)^n\}$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 5, 10, 20, 40, … = $a_n = 5(2)^n$
- -4, -2, 0, 2, 4, 6, …
- 3, -3, 3, -3, … $a_n = 3(-1)^n$
- 1/2, 1/6, 1/12, 1/18, …

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Sucesiones y Sumatorias

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

- 5, 10, 20, 40, …. $\{a_n = 5 \cdot 2^n\}$
- -4, -2, 0, 2, 4, 6, …. **no es progresión geométrica**
- 3, -3, 3, -3, …
- 1/2, 1/6, 1/12, 1/18, …

Indique cuáles son progresiones geométricas y en tal caso exprésalas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

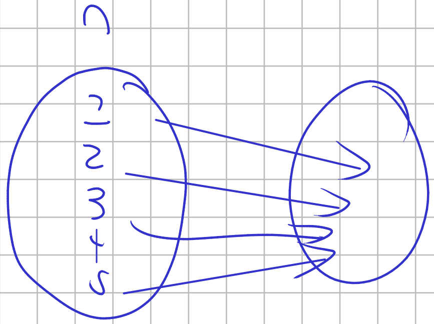
- 5, 10, 20, 40, ... $\{a_n = 5 \cdot 2^n\}$
- -4, -2, 0, 2, 4, 6, ... **no es progresión geométrica**
- 3, -3, 3, -3, ... $\{a_n = 3 \cdot (-1)^n\}$
- 1/2, 1/6, 1/12, 1/18, ... **no es progresión geométrica**

Sucesiones y Sumatorias

- Dadas las siguientes sucesiones indique cuáles son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas
- Exprese las progresiones aritméticas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$ y las geométricas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

Sucesión	**Progresión aritmética**	**Progresión geométrica**	**No es ni progresión aritmética ni geométrica**
-3, -7, -11, -15, -19, ...	$a_n : -3 - 4n$		
-2, -7/3, -8/3, -3, -10/3, ...	$-2 - \frac{1}{3}n$		
3, 12, 48, 192, 768, ...		3×4^n	

Sucesión ¿QUe es?



Una secuencia de números

Sucesión aritmética: Basado en las diferencias

an = t+dn

Sucesión geométrica: Basado en las divisiones

an = t*r^n

Sucesiones y Sumatorias

- Dadas las siguientes sucesiones indique cuáles son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas
- Exprese las progresiones aritméticas en la forma $\{a_n = t + n \cdot d\}$ y las geométricas en la forma $\{a_n = t \cdot r^n\}$

Sucesión	Progresión aritmética	Progresión geométrica	No es ni progresión aritmética ni geométrica
-3, -7, -11, -15, -19, …	$\{a_n = -3 + n \cdot (-4)\}$		
-2, -7/3, -8/3, -3, -10/3,	$\{a_n = -2 + n \cdot (-1/3)\}$		
3, 12, 48, 192, 768, …		$\{a_n = 3 \cdot 4^n\}$	

Sumatorias

Sucesiones y Sumatorias

Carl Friedrich Gauss

- Contribuyó a la teoría de números, estadística, astronomía y óptica
- Encontró la fórmula para la sumatoria de 1 a n en una asignación de clase de primaria
- Inventó la aritmética modular

criptografía

1777- 1855

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\ldots+100$$

$$50 \text{ veces} \left\{ \begin{array}{l} 1+100 = 101 \\ 2+99 = 101 \\ 3+98 = 101 \\ \vdots \\ 50+51 = 101 \end{array} \right.$$

$$101 \times 50$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$1, 2, \ldots n$

$$\frac{1000 \times 1001}{2}$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\ldots+100=\sum_{i=1}^{100} i$$

$$\sum_{i=1}^{100} i \longrightarrow 1+2+3+\ldots+100$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+\ldots+100 = \sum_{i=1}^{100} i$$

donde la variable i se conoce como el **índice** de la sumatoria y toma los valores **enteros** entre el límite inferior y superior

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular la sumatoria

$$1+2+3+4+5+...+100 = \sum_{i=1}^{100} i = 5050$$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{5} i^2 \rightarrow 1 + 4 + 9 + 16 + 25$

b) $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{i}\right) \leftarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

c) $\sum_{i=4}^{8} (-1)^i \leftarrow 1 - 1 + 1 - 1 - 1$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

b) $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{i} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

c) $\sum_{i=4}^{8} (-1)^i = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{4} 1$ $\longrightarrow$ $1+1+1+1=4$

b) $\sum_{k=0}^{3} 2^{k}$ $\longleftarrow$ $2^{0}+2^{1}+2^{2}+2^{3}$

c) $\sum_{j=5}^{9} (j-2)$ $\longleftarrow$ $(5-2)+(6-2)+(7-2)+(8-2)$
$+(9-2)$

d) $\sum_{k=2}^{5} 2 \cdot k$ $\longrightarrow$ $2\times 2+2\times 3+2\times 4+2\times 5$

Sucesiones y Sumatorias

Calcular las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=1}^{4} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

b) $\sum_{k=0}^{3} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$

c) $\sum_{j=5}^{9} (j - 2) = (5-2) + (6-2) + (7-2) + (8-2) + (9-2) = 25$

d) $\sum_{k=2}^{5} 2k = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 28$

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- 1+2+3+4+5+...+100= $\sum_{k=1}^{100} k = ?$

Forma cerrada

La forma cerrada de una sumatoria permite conocer el valor de la suma de forma directa

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- 1+2+3+4+5+...+100= $\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

Sucesiones y Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Sucesiones y Sumatorias

$$\sum_{k=0}^{100} 2 \times 3^{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^{k} = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} \text{, si } r \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} ar^{k} = (n+1)a \text{, si } r = 1$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot (5)^{j}$ $\longrightarrow$ $a = 3$ $n = 8$ $r = 5$

$$\frac{a r^{n+1} - a}{r - 1}$$

$$\frac{3 \times 5^{9} - 3}{4}$$

b) $\sum_{i=1}^{50} i^{2}$

$$\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} = \frac{50(101)(51)}{6}$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{j=0}^{8} 3 \cdot (5)^{j} = \dfrac{3 \cdot 5^{9} - 3}{5 - 1} = 1464843$

b) $\sum_{i=1}^{50} i^{2} = \dfrac{50(51)(101)}{6} = 42925$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{j=0}^{8} 3\cdot(5)^j = \frac{3\cdot 5^9 - 3}{5-1} = 1464843$

b) $\sum_{i=1}^{50} i^2 = \frac{50(51)(101)}{6} = 42925$

c) $\sum_{k=1}^{5} k^3$

d) $\sum_{j=1}^{5} (j + j^2)$

e) $\sum_{i=1}^{100} 3$

Sucesiones y Sumatorias

a) $$\sum_{j=0}^{8} 3\cdot(5)^{j} = \frac{3\cdot 5^{9} - 3}{5-1} = 1464843$$

b) $$\sum_{i=1}^{50} i^{2} = \frac{50(51)(101)}{6} = 42925$$

c) $$\sum_{k=1}^{5} k^{3} = \frac{5^{2}(6)^{2}}{4} = 225$$

d) $$\sum_{j=1}^{5} (j + j^{2}) = \sum_{j=1}^{5} j + \sum_{j=1}^{5} j^{2} = \frac{5\cdot 6}{2} + \frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} = 70$$

e) $$\sum_{i=1}^{100} 3 = 3\cdot 100 = 300$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{i=2}^{50} i^2 + 1^2 - 1^2$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots 50^2}{} + 1^2$$

$$\frac{50(51)(101)}{6} - 1^2$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

b) $\sum_{j=1}^{8} 3\cdot(5)^j$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{8} 3\cdot 5^j + 3\times 5^0} = 3\times 5^0$$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a r^{n+1} - a}{r-1}$$

$$\sum_{j=0}^{8} 3 5^j - 3\times 5^0 = \frac{3\times 5^9 - 3}{5-1} - 3\times 5^0$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

b) $\sum_{j=1}^{8} 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^{8} 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

b) $\sum_{j=1}^{8} 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^{8} 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$

c) $\sum_{k=3}^{5} k^3$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

b) $\sum_{j=1}^{8} 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^{8} 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$

c) $\sum_{k=3}^{5} k^3 = \sum_{k=1}^{5} k^3 - 1^3 - 2^3 = 225 - 1 - 8 = 216$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

b) $\sum_{j=1}^{8} 3\cdot(5)^j = \sum_{j=0}^{8} 3\cdot(5)^j - 3\cdot(5)^0 = 1464840$

c) $\sum_{k=3}^{5} k^3 = \sum_{k=1}^{5} k^3 - 1^3 - 2^3 = 225 - 1 - 8 = 216$

d) $\sum_{k=3}^{10} 7\cdot(-3)^k$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{i=2}^{50} i^2 = \sum_{i=1}^{50} i^2 - 1^2 = 42925 - 1 = 42924$

b) $\sum_{j=1}^{8} 3 \cdot (5)^j = \sum_{j=0}^{8} 3 \cdot (5)^j - 3 \cdot (5)^0 = 1464840$

c) $\sum_{k=3}^{5} k^3 = \sum_{k=1}^{5} k^3 - 1^3 - 2^3 = 225 - 1 - 8 = 216$

d) $\sum_{k=3}^{10} 7 \cdot (-3)^k = 310009 - (49) = 309960$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{10} k$

$-2 + -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 10$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10(11)}{2}$$

$-2 + -1 + 0 + 55$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{10} k = (-2)+(-1)+(0)+\sum_{k=1}^{10} k = -3+\frac{10\cdot 11}{2} = 52$

Sucesiones y Sumatorias

a) $$\sum_{k=-2}^{10} k = (-2) + (-1) + (0) + \sum_{k=1}^{10} k = -3 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 52$$

b) $$\sum_{k=-3}^{20} k^2$$

$$9 + 4 + 1 + 0 + \underbrace{1 + 4 + \ldots + 20^2}$$

$$\sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{20(21)(41)}{6} + 9 + 4 + 1 + 0$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\sum_{k=-2}^{10} k = (-2) + (-1) + (0) + \sum_{k=1}^{10} k = -3 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 52$

b) $\sum_{k=-3}^{20} k^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + \sum_{k=1}^{20} k^2 = 2884$

Sucesiones y Sumatorias

a) $$\sum_{k=-2}^{10} k = (-2) + (-1) + (0) + \sum_{k=1}^{10} k = -3 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 52$$

b) $$\sum_{k=-3}^{20} k^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + \sum_{k=1}^{20} k^2 = 2884$$

c) $$\sum_{k=-2}^{15} k^3 = -8 \quad -1 \quad 0 \quad \underbrace{1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad \ldots \quad 15^3}$$

$$\sum_{k=1}^{15} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$-8 + -1 + 0 + \frac{15^2 \times 16^2}{4}$$

Sucesiones y Sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{10} k = (-2) + (-1) + (0) + \sum_{k=1}^{10} k = -3 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 52$

b) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{20} k^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + \sum_{k=1}^{20} k^2 = 2884$

c) $\displaystyle\sum_{k=-2}^{15} k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + \sum_{k=1}^{15} k^3 = 14391$

Sucesiones y Sumatorias

- **Calcule las siguientes sumatorias.**

Muestre el procedimiento realizado

- $$\sum_{k=3}^{16} 5\cdot(-2)^k$$

$\rightarrow 5\times(-2)^0 + 5\times(-2)^1 + 5\times(-2)^2 + 5\times(-2)^3 + 5\times(-2)^4 + \cdots 5\times(-2)^{16}$

$$\sum_{k=0}^{16} 5(-2)^k = \frac{5\times(-2)^{17} - 5}{-3}$$

$$\frac{5\times(-2)^{17} - 5}{4} \rightarrow \left(5\times(-2)^0 + 5\times(-2)^1 + 5\times(-2)^2\right)$$

- $$\sum_{k=-3}^{15} k^2$$

$9 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad \boxed{1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad \ldots \quad (15)^2}$

$$\frac{15(16)(31)}{6} + 0 + 1 + 4 + 9$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} i\,j\right) = \sum_{i=0}^{n} i\left(\sum_{j=0}^{m} j\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \times \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + 0$$

$$\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{10} i \sum_{i=0}^{5} j = \sum_{i=0}^{10} i \times 15 = 15\sum_{i=0}^{n} i = 15 \times 55 = 825$$

$$\left(\frac{10(11)}{2}\right)\left(\frac{5(6)}{2}\right) = 5(11) * 5(3)$$

$$55 \times 15$$

$$\sum_{k=-3}^{1000}\sum_{p=4}^{500} k^2 \times p^3 = \sum_{k=-3}^{1000} k^2 \underbrace{\sum_{p=4}^{500} p^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{p=4}^{500} p^3 = \underbrace{\sum_{p=1}^{500} p^3} - 3^3 - 2^3 - 1^3 = \frac{500^2(501)^2}{4} - 36$$

$$\sum_{k=-3}^{1000} k^2 \underbrace{\left(\frac{500^2(501)^2}{4} - 36\right)}_{cte} = \left(\frac{500^2(501)^2}{4} - 36\right)\underbrace{\sum_{k=-3}^{1000} k^2}$$

$$\sum_{k=-3}^{1000} k^2 = \underbrace{\underbrace{(-3)^2}_{k=-3} + \underbrace{(-2)^2}_{k=-2} + \underbrace{(-1)^2}_{k=-1}} + \underbrace{0^2}_{k=0} + \sum_{k=1}^{1000} k^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$14 + \frac{1000(2001)(1001)}{6}$$

$$\left(14 + \frac{1000(2001)(1001)}{6}\right)\left(\frac{500^2(501)^2}{4} - 36\right)$$

$$\sum_{i=0}^{10000}\sum_{j=0}^{500} i^j$$

j	0	1	2	3	4	5	
r^j	$\underbrace{\sum_{i=0}^{10000} i^0}$	$\underbrace{\sum_{i=0}^{10000} i^1}$	$\underbrace{\sum_{i=0}^{10000} i^2}$	$\underbrace{\sum_{i=0}^{10000} i^3}$	$\underbrace{\sum_{i=0}^{10000} i^4}$	$\underbrace{\sum_{i=0}^{10000} i^5}$	$+\cdots\sum_{i=0}^{10000} i^{500}$

i

$$0 + \underbrace{\sum_{j=0}^{500} 1^j} + \sum_{j=0}^{500} 2^j + \sum_{j=0}^{500} 3^j + \sum_{j=0}^{500} 4^j + \cdots \sum_{j=0}^{500} 10000^j$$

$$501 + \frac{2^{501}-1}{1} + \frac{3^{501}-1}{2} + \frac{4^{501}-1}{3} + \cdots + \frac{10000^{501}-1}{9999}$$

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1} \qquad r \neq 1$$

$$\boxed{501 + \frac{2^{501}-1}{1} + \frac{3^{501}-1}{2} + \frac{4^{501}-1}{3} + \cdots + \frac{10000^{501}-1}{9999}}$$

$$\sum_{i=-10}^{5000}\sum_{j=20}^{100000}(i^2+j^2) = \sum_{i=-10}^{5000} i^2 + \sum_{j=20}^{100000} j^2 \quad \checkmark$$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{10}(-i)^2} + \sum_{i=1}^{5000} i^2 + \sum_{j=1}^{100000} j^2 - \sum_{j=7}^{19} j^2$$

$$385 + \frac{5000(10001)(5001)}{6} + \frac{100000(200001)(100001)}{6} + \frac{19(39)20}{6}$$

$$\sum_{i=-3}^{100}\sum_{j=6}^{500}\sqrt[i]{j} \quad \times \qquad \sum_{i=-10}^{1000}\sum_{j=-4}^{50}\frac{i}{j} \quad \times$$

$$\sqrt[1]{x} = x$$

control

```
for(int i=0; i<=n; i++){
    .....

}
```

$i{+}{+} \Rightarrow i = i+1$

$\underbrace{i = 0,\ 1,\ \ldots\ n}_{n+1}$

$\sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$

```
for(int i =0; i<=n; i++){
      for(int j=0; j<=n; j++){
          ....
      }

}
```

$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 1 = (n+1)^2$

```
for(int i=0; i<=n; i++){
      for(int j=i;  j<=n; j++){

      }

}
```

$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1$

i	0	1	2	3	4
	$\sum_{j=0}^{n} 1$	$\sum_{j=1}^{n} 1$	$\sum_{j=2}^{n} 1$	$\sum_{j=3}^{n}$	$\sum_{j=4}^{n}$