Examen diagnóstico - Análisis y diseño de algoritmos

Carlos Andres Delgado S, Msc

carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Agosto de 2023

1. Inducción matemática

1. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=-3}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$

2. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=0}^{n} (8i^2 + \frac{3}{6}) = \frac{(n+1)(8n(2n+1)+3)}{6}$$

3. Demostrar por inducción matemática que 1 + $2^n < 3^n$ para $n \in Z^+ \wedge n \geq 2$.

4. Demuestre por inducción matemática, que si un conjunto A tiene n elementos,entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos. El paso base se hace con 0 elementos, el paso inductivo es observar que pasa cuando se agrega un elemento a un conjunto de con n elementos.

2. Sumatorias

1. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=100}^{45000} (2i + 8)$$

2. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=40}^{n^2} (2ij + 8j)$$

3. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuelvala $4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + \ldots\}$ el indice i arranca desde 1 hasta n. Pista la suma en $i = 20$ da 460 y $i = 50$ da 2650.

4. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuelvala $(-4) + (-1) + 4 + 11 + 20 + 31 + 44 + \ldots\}$ el indice i arranca desde 1 hasta n. Pista la suma en $i = 20$ da 2770 y $i = 50$ da 42675.

3. Recurrencias

1. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 2, 4, 6, 8, 10$ para R.R $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 8$

2. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 3, 9, 27, 81, 343$ para R.R $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + 2n, T(1) = 9$

4. Conteo en algoritmos

1. El problema subset-sum consiste en encontrar n números de un conjunto C cuya suma sea M ¿Cuantas posibilidades deben analizarse para encontrar todas las soluciones en términos de n?

2. ¿Cuantas posibles ordenaciones existen para un arreglo de tamaño n?

3. ¿Cuantas comparaciones tiene que hacer para encontrar el valor máximo de un arreglo de enteros A?

4. ¿Cuantas comparaciones tiene que hacer para hallar la máxima diferencia en un arreglo de enteros positivos A?. Se define la máxima diferencia como dos elementos $a_i \in A$ y $a_j \in A$ con $i \neq j$ donde $|A_i - A_j|$ es máxima.

Ayudas

Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{(n+1)} - a}{r-1} \text{ Si } r \neq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} ar^k = (n+1)a \text{ Si } r = 1$$

Potencias y logaritmos

- $a^{log_b(n)} = n^{log_b(a)}$
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- $\frac{a^i}{b^i} = (\frac{a}{b})^i$
- $log_a(b) = \frac{log_c(a)}{log_c(b)}$

$1+2^n < 3^n$ Paso base $P(2)$ $1+2^2 < 3^2$ $5<9$ ✓

Inductiva

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$$1+2^{n+1} < 3^{n+1} \Rightarrow 1+2\times 2^n < 3\times 3^n$$

$$2^n + \underbrace{\boxed{1+2^n < 3^n}}_{T} + 3^n + 3^n \qquad 2^n < 3^n + 3^n$$

$$2^n < 2\times 3^n \qquad \frac{2^n}{2} < 3^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2} < 3^n \qquad \lim_{n\to\infty} \log_2\left(\frac{2^n}{2}\right) < \log_2(3^n)$$

$$\log_2(2^n) - \log_2(2) < n\log_2(3)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log_2(2) - \log_2(2) < n\overset{c}{\log_2(3)} \qquad \lim_{n\to\infty} n-1 < cn$$

$$\lim_{n\to\infty} \cancel{\frac{n}{n}}^{1} - \cancel{\frac{1}{n}}^{0} < \frac{c\cancel{n}}{\cancel{n}} \qquad 1<c \qquad c>1$$

$$\log_2(3) > 1 \qquad T$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \frac{\log_3(3)}{\log_3(2)} = \frac{1}{0,\ldots} > 1$$

Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=100}^{45000} (2i+8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{45000-99} (2(i+99)+8) = \sum_{i=1}^{44901} (2i+206) = 2\sum_{i=1}^{44901} i + \sum_{i=1}^{44901} 206$$

$$(44901)(44902) + 44901 \times 206$$

Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=40}^{n^2} (2ij+8j)$$

$$\sum_{j=1}^{n^2-39} (2i(j+39)+8(j+39))$$

$$\sum_{j=1}^{n^2-39} (2ij+78i+8j+312) = \sum_{j=1}^{n^2-39} \underbrace{(2i+8)}_{cte} j + \underbrace{(78i+312)}_{cte}$$

$$\sum_{j=1}^{n^2-39} (2i+8)j + \sum_{j=1}^{n^2-39} (78i+312) = (2i+8)\frac{(n^2-39)(n^2-38)}{2} + (78i+312)(n^2-39)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+41} (2(i-41)+8)\frac{(n^2-39)(n^2-38)}{2} + (78(i-41)+312)(n^2-39)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+41} in^4 + in^2 - 1560i - 37n^4 - 37n^2 + 57720$$

$$\frac{(2n+41)(2n+42)}{2} = a \qquad (2n+41)b$$

$$an^4 + an^2 - 1560b - 37n^4b - 37n^2b + 577206$$

. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuelvala $4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + \ldots\}$ el indice i arranca desde 1 hasta n. Pista la suma en $i = 20$ da 460 y $i = 50$ da 2650.

$at+6$

$4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + \ldots +$

$i \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \ldots n$

$2 \times i + 2$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i+2)$$

Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuelvala $(-4) + (-1) + 4 + 11 + 20 + 31 + 44 + \ldots\}$ el indice i arranca desde 1 hasta n. Pista la suma en $i = 20$ da 2770 y $i = 50$ da 42675.

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$

$-4, \; -1, \; 4, \; 11, \; 20, \; 31, \; 44$

$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13$

at^2+6

$$\sum_{i=1}^{n} (i^2-5)$$

$$\sum_{i=8}^{7} 2i = 0$$

$$\sum_{i=10}^{n} 20i = \begin{cases} 0 & n < 10 \\ 20i & n \geq 10 \end{cases}$$

2, 4, 8, 16

1. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = \cancel{2, 4, 6, 8, 10}$ para R.R $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 8$

2. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 3, 9, 27, 81, 343$ para R.R $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + 2n, T(1) = 9$

$T(2) = 2T(1) + 2 = 18$
$T(4) = 2T(2) + 4 = 40$
$T(8) = 2T(4) + 8 = 88$
$T(16) = 2T(8) + 16 = 192$

$T(3) = 5T(1) + 2(3) = 51$
$T(9) = 5\,T(3) + 2(9) = 273$
$\vdots$

. El problema subset-sum consiste en encontrar n números de un conjunto C cuya suma sea M ¿Cuantas posibilidades deben analizarse para encontrar todas las soluciones en términos de n?

2^n $\{1, 2, 3\}$ 4

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

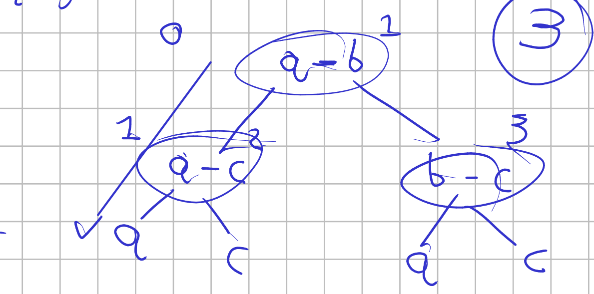
. ¿Cuantas posibles ordenaciones existen para un arreglo de tamaño n? conjunto potencia

$\underline{n} \times \underline{n-1} \times \underline{n-2} \; \ldots \; \underline{2}\; \underline{1} = n!$

. ¿Cuantas comparaciones tiene que hacer para encontrar el valor máximo de un arreglo de enteros A?

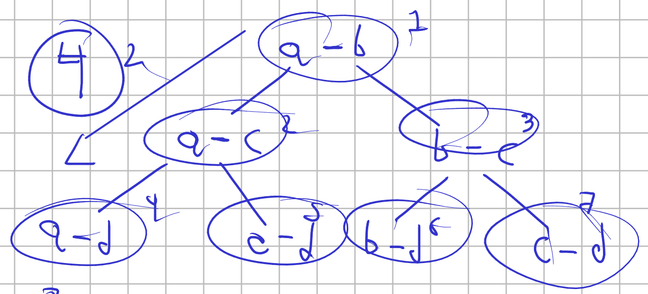
. ¿Cuantas comparaciones tiene que hacer para hallar la máxima diferencia en un arreglo de enteros positivos A?. Se define la máxima diferencia como dos elementos $a_i \in A$ y $a_j \in A$ con $i \neq j$ donde $|A_i - A_j|$ es máxima.

$\{a, b, c\}$



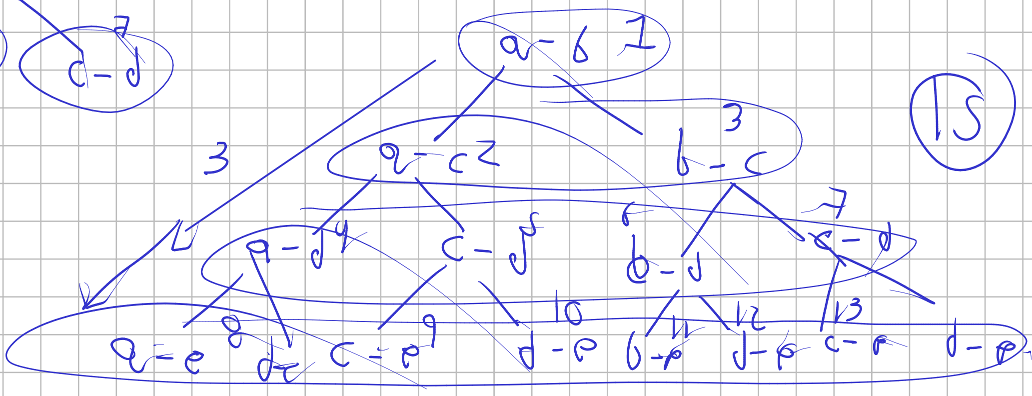
$2^{3-1} - 1$

$\{a, b, c, d\}$



$2^3 - 1 = 7$

$\{a, b, c, d, e\}$



$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} 2^i = 2^{n-1} - 1$$