



Examen diagnóstico

Análisis y diseño de algoritmos

Carlos Andres Delgado S, Msc
carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Agosto de 2023

1. Inducción matemática

1. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=-3}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$

2. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=0}^n (8i^2 + \frac{3}{6}) = \frac{(n+1)(8n(2n+1) + 3)}{6}$$

3. Demostrar por inducción matemática que $1 + 2^n < 3^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

4. Demuestre por inducción matemática, que si un conjunto A tiene n elementos, entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos.

2. Sumatorias

1. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=100}^{45000} (2i + 8)$$

2. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=40}^{n^2} (2ij + 8j)$$

3. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuélvala $4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + \dots$ el índice i arranca desde 1 hasta n . Pista la suma en $i = 20$ da 460 y $i = 50$ da 2650.

4. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuélvala $(-4) + (-1) + 4 + 11 + 20 + 31 + 44 + \dots$ el índice i arranca desde 1 hasta n . Pista la suma en $i = 20$ da 2770 y $i = 50$ da 42675.

3. Recurrencias

1. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 2, 4, 6, 8, 10$ para R.R $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 8$
2. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 3, 9, 27, 81, 343$ para R.R $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + 2n, T(1) = 9$

4. Conteo en algoritmos

1. El problema subset-sum consiste en encontrar n números de un conjunto C cuya suma sea M ¿Cuántas posibilidades deben analizarse para encontrar todas las soluciones en términos de n ?
2. ¿Cuántas posibles ordenaciones existen para un arreglo de tamaño n ?
3. ¿Cuántas comparaciones tiene que hacer para encontrar el valor máximo de un arreglo de enteros A ?
4. ¿Cuántas comparaciones tiene que hacer para hallar la máxima diferencia en un arreglo de enteros positivos A ?. Se define la máxima diferencia como dos elementos $a_i \in A$ y $a_j \in A$ con $i \neq j$ donde $|A_i - A_j|$ es máxima.

Ayudas

Sumatorias

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c &= cn & \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} & \sum_{k=0}^n ar^k &= \frac{ar^{(n+1)} - a}{r - 1} \text{ Si } r \neq 1 & \sum_{k=0}^n ar^k &= (n+1)a \text{ Si } r = 1 \end{aligned}$$

Potencias y logaritmos

- $a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- $\frac{a^i}{b^i} = \left(\frac{a}{b}\right)^i$
- $\log_a(b) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$

1. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=-3}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$

Paso inductivo $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{i=-3}^{n+1} i^2 = \underbrace{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + \dots + n^2}_{\sum_{i=-3}^n i^2} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 + 2n + 1 + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 + 2n + \frac{1}{6} + 5 + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n^2 + 2n + \frac{1}{6} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n^2 + \frac{2n}{2} + n + \frac{1}{6} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n^2 + \frac{2n}{2} + n + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{2}{6} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{2}{6} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{3} + \frac{3n}{3} + \frac{1}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + 14$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + 14$$

$$= \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + 14$$

Paso base

Paso inductivo $P(n) \rightarrow P(n+1)$

1)

$P(-3)$

$$\sum_{i=-3}^{-3} i^2 = (-3)^2 = 9 \checkmark$$

$$= \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + \frac{-3}{6} + 14$$

$$= 9 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 14$$

$$5 + \frac{8}{2} = 9 \checkmark$$

$$(n+1)^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{1}{2}$$

2. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=0}^n (8i^2 + \frac{3}{6}) = \frac{(n+1)(8n(2n+1) + 3)}{6}$$

Paso base $P(0)$

$$\frac{3}{6} = \frac{(1)(3)}{6} = \frac{3}{6} \checkmark$$

Paso Inductivo

$$1) \frac{(n+2)(8(n+1)(2n+3) + 3)}{6} \leftarrow \text{Formula } n=n+1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} (8i^2 + \frac{3}{6}) = \underbrace{\sum_{i=0}^n (8i^2 + \frac{3}{6})}_{P(n)} + \underbrace{8(n+1)^2 + \frac{3}{6}}_{i=n+1} \quad P(n) + \Delta_{i=n+1}$$

$$\frac{(n+2)(8n(2n+1) + 3)}{6} + \frac{48(n+1)^2 + 3}{6}$$

$$\frac{(n+2)(8n(2n+1) + 3) + 48(n+1)^2 + 3}{6}$$

$$\frac{(n+2)(16n^2 + 8n) + 3(n+1) + 48(n+1)^2 + 3}{6}$$

$$16n^3 + 8n^2 + 16n^2 + 8n + 3n + 3 + 48n^2 + 96n + 48 + 3$$

$$\begin{array}{r} 16n^3 + 72n^2 + 107n + 54 \\ - 16n^3 - 32n^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} n+2 \\ \hline 16n^2 + 40n + 27 \end{array}$$

$$40n^2 + 107n + 54$$

$$-40n^2 - 80n$$

$$27n + 54$$

$$-27n - 54$$

0

$$\frac{(n+2)(16n^2 + 40n + 27)}{6}$$

$$8(n+1)(2n+3) + 3 = (8n+8)(2n+3) + 3$$

$$16n^2 + 24n + 16n + 24 + 3$$

$$16n^2 + 40n + 27$$

$i=0$

3. Demostrar por inducción matemática que $1 + 2^n < 3^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. $n \geq 2$

$$P(1) \quad 1 + 2 < 3^1$$

$$P(2) \quad 1 + 4 < 3^2 \checkmark \quad 5 < 9$$

$$P(n) \rightarrow P(n+1) \quad 1 + 2^n < 3^n$$

$$\begin{array}{l} 1 + 2^{n+1} < 3^{n+1} \\ \downarrow \\ 1 + 2 \times 2^n < 3 \times 3^n \end{array}$$

4. Demuestre por inducción matemática, que si un conjunto A tiene n elementos, entonces P(A) tiene 2^n elementos.

$$A = \{1, 2\}$$

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$P(0)$$

$$\emptyset \rightarrow \{\emptyset\}$$

$$2^0 = 1$$

$$P(n) = \{ \text{---} \}_{2^n}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\begin{array}{l} 2^{n+1} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{agrega} \\ (2 \times) 2^n = 2^{n+1} \end{array}$$

$$\text{conj } 1 \rightarrow 1$$

$$\text{conj } n$$

$$\text{conj } 3 \quad C(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)! 2!}$$

$$\text{conj } 4 \quad C(n, 3) = \frac{n!}{(n-3)! 3!}$$

$$\text{conj } 5 \quad C(n, n) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n C(n, i) = 2^n$$

$$A = \emptyset \quad P(A) = \{\emptyset\} \quad 1$$

$$A = \{1\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}\} \quad 2$$

$$A = \{1, 2\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \quad 4$$

1. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=100}^{45000} (2i + 8)$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$i = i - 100$$

2. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=40}^{n^2} (2ij + 8j)$$

$$44900$$

$$\sum_{i=1}^{44900} (2(i+100) + 8)$$

$$i = i - 100$$

$$44900$$

$$\sum_{i=1}^{44900} 2i + 208 = 44900(44901) + 208(44901)$$

$$48000$$

$$\sum_{i=100}^{48000} 2i + 8 = \sum_{i=1}^{48000} (2i + 8) - \sum_{i=1}^{99} (2i + 8)$$

$$48000(48001) - 99(100) + 8(48000) - 8(99)$$

$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=40}^{n^2} (2ij + 8j)$$

$$8 \times 39 = 8 \times 40 - 8$$

$$8(40 - 1)$$

$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=1}^{n^2-39} 2i(j+39) + 8(j+39)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+41} \sum_{j=1}^{n^2-39} 2(i-41)(j+39) + 8(j+39)$$

1. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 2, 4, 8, 16$ para R.R $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 8$

2. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 3, 9, 27, 81, 343$ para R.R $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + 2n, T(1) = 9$

1)	n	2	4	8	16
	T(n)	18	40	88	192

$$2T(\frac{2}{2}) + 2 = 2T(1) + 2$$

$$2T(\frac{8}{2}) + 8$$

$$2T(\frac{4}{2}) + 4 = 2T(2) + 4$$

$$2T(\frac{16}{2}) + 16$$

2. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 3, 9, 27, 81, 343$ para R.R $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + 2n, T(1) = 9$

n	3	9	27	81	343
$T(n)$	51	273	1419	7257	36771

$$5T(\frac{3}{3}) + 2(3)$$

$$5T(1) + 6 = 51$$

$$5T(\frac{27}{3}) + 2(27)$$

$$5 \times 273 + 54 = 1365 + 54 = 1419$$

$$5T(\frac{9}{3}) + 2(9)$$

$$5 \times 51 + 18 = 273$$

4. Conteo en algoritmos

1. El problema subset-sum consiste en encontrar n números de un conjunto C cuya suma sea M ¿Cuántas posibilidades deben analizarse para encontrar todas las soluciones en términos de n ?

2. ¿Cuántas posibles ordenaciones existen para un arreglo de tamaño n ?

3. ¿Cuántas comparaciones tiene que hacer para encontrar el valor máximo de un arreglo de enteros A ?

4. ¿Cuántas comparaciones tiene que hacer para hallar la máxima diferencia en un arreglo de enteros positivos A ? Se define la máxima diferencia como dos elementos $a_i \in A$ y $a_j \in A$ con $i \neq j$ donde $|A_i - A_j|$ es máxima.

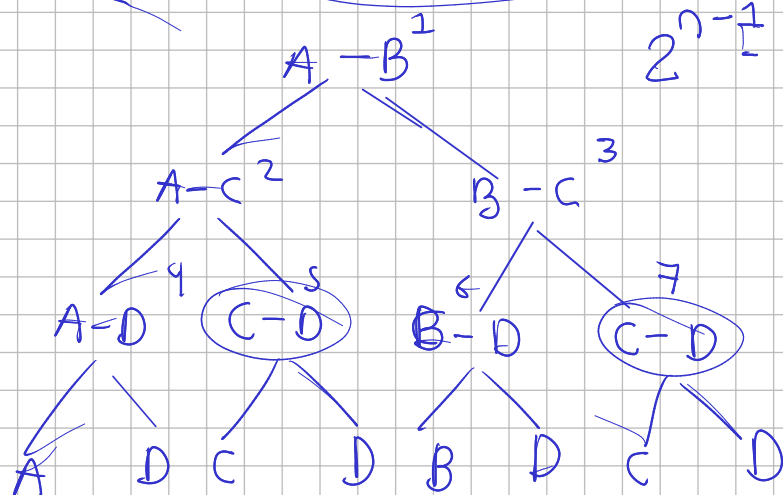
$\{1, 2, 3\}$ 5
 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
 0 1 2 3 4 5

$\{1, 2, 3\}$
6

2^n

$1, 2, 3$
 $1, 3, 2$
 $2, 3, 1$
 $2, 1, 3$
 $3, 2, 1$
 $3 \times 2 \times 1$

$O(2^n)$
 A, B, C, D
 $2^{n-1} - 1$



$O(2^n)$

A, B, C, D, E

