Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Montículos y Heapsort

Comparación de algoritmos de ordenamiento

Propiedades de orden y forma de los montones

Operaciones HEAPIFY, BUILD-HEAP Y HEAP-SORT

Análisis de complejidades

Colas de prioridad

Heapsort

Problema de ordenamiento

- Insertion

    $O(n^2)$

    Ordena in-place

- Merge

    $\Theta(n\lg n)$

    No ordena in-place / in-place } Crear nueva estructura

- Heapsort

    $O(n\lg n)$

    Ordena in-place

- Quicksort

    $\Theta(n^2)$, Caso promedio: $\Theta(n\lg n)$

    Ordena in-place

Heapsort

Insertion, Merge, Heapsort y Quicksort son algoritmos de ordenamiento basados en comparación. Estos tienen la característica de que son del orden de $\Omega(n\lg n)$

¿Es posible bajar esta cota?

Heapsort

Insertion, Merge, Heapsort y Quicksort son algoritmos de ordenamiento basados en comparación. Estos tienen la característica de que son del orden de $\Omega(n\lg n)$

¿Es posible bajar esta cota?

- Counting sort
- Radix sort
- Bucket sort

Heapsort

Heapsort

Idea: utilizar las fortalezas de MergeSort y de InsertionSort

Utiliza un representación lógica, conocida como montículo (*heap*), de un arreglo que permite ordenar los datos del arreglo in-place

Heapsort

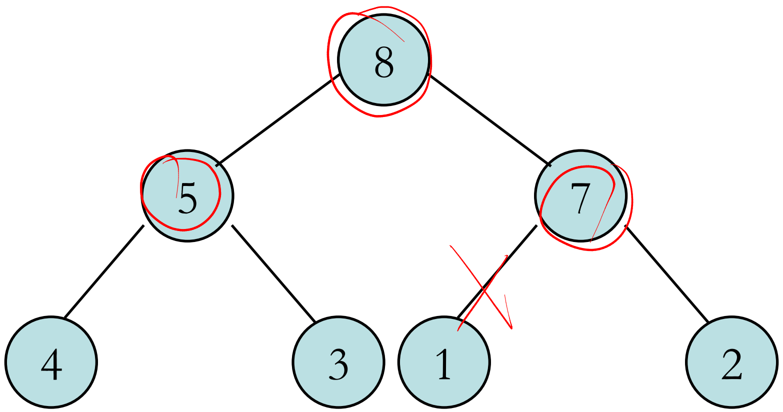
Montículos

Es un arreglo que puede ser visto como un árbol binario que cumple dos propiedades:

- *Propiedad del orden*: La raíz de cada subarbol es mayor o igual que cualquier de sus nodos restantes
- *Propiedad de forma*: La longitud de toda rama es h o h-1, donde h es la altura del árbol. Además, no puede existir un rama de longitud h a la derecha de una rama de longitud h-1

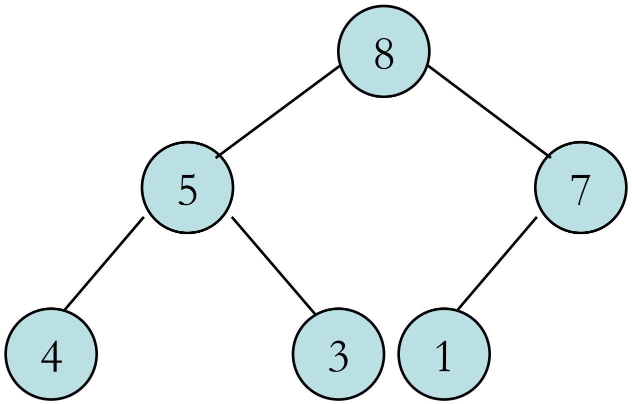
Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma



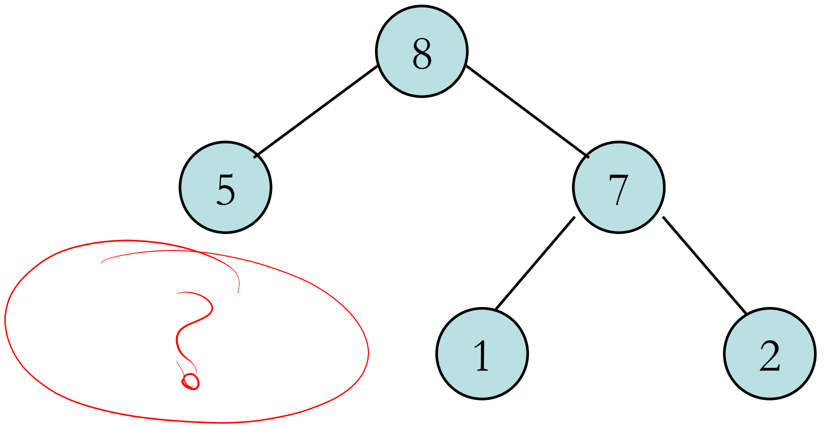
Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma



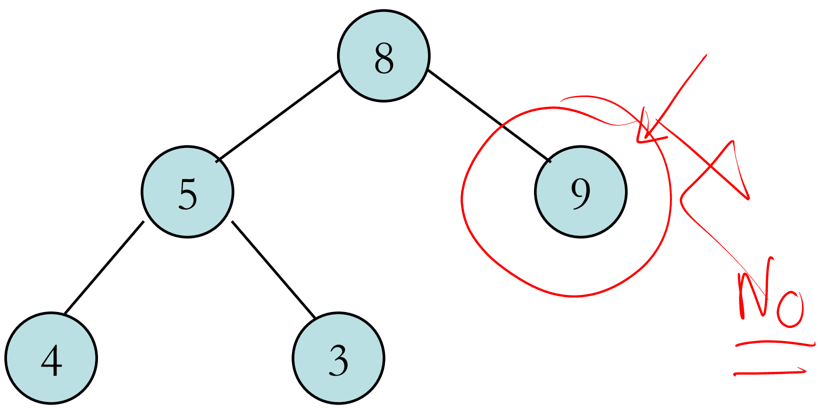
Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma



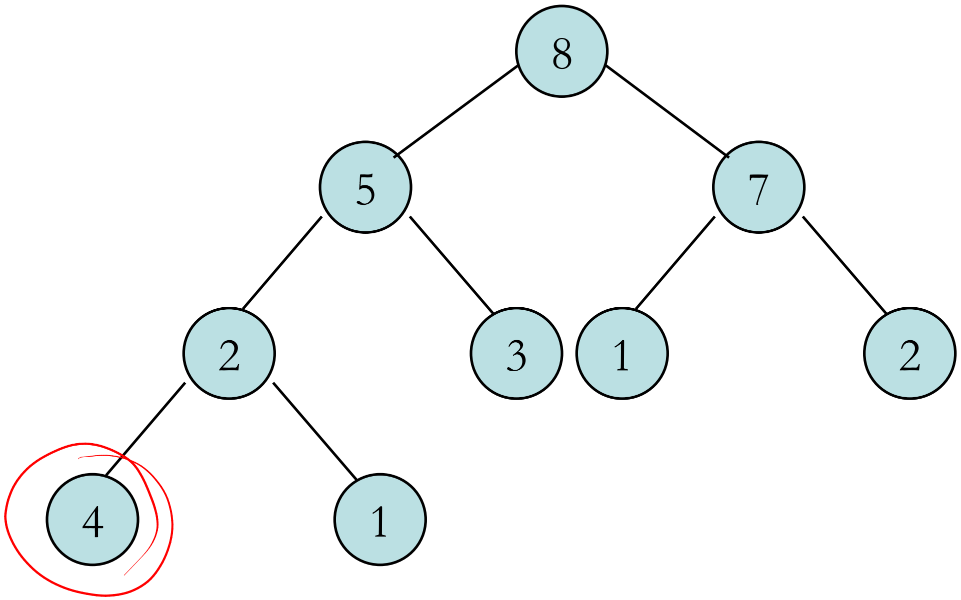
Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma



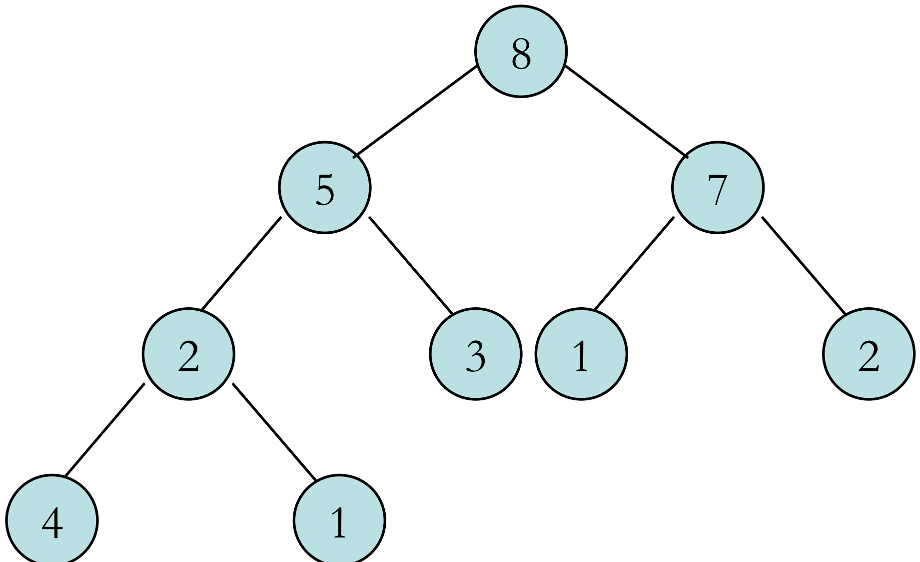
Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma



Heapsort

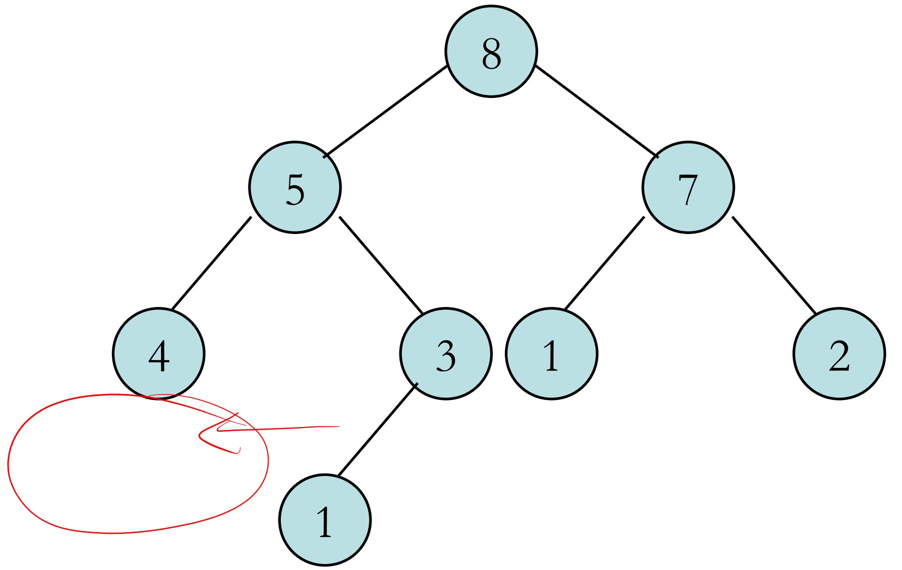
Analizar las propiedades de orden y de forma



Falla la propiedad de orden, en el subarbol 4-2-1, la raíz no cumple con ser mayor o igual los demás elementos

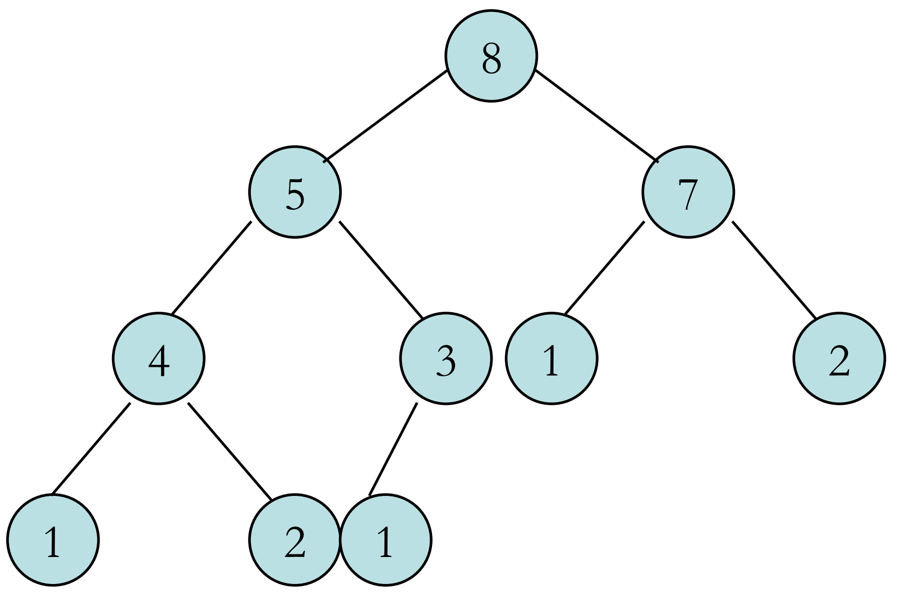
Heapsort

Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma



Heapsort

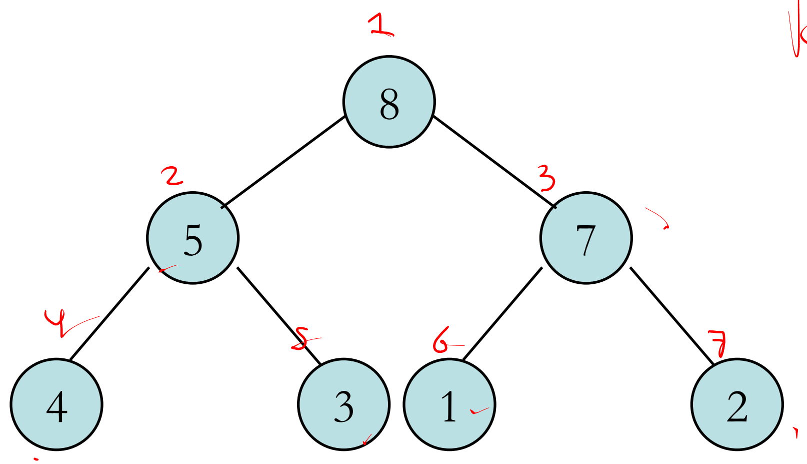
Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma



Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha

BFS

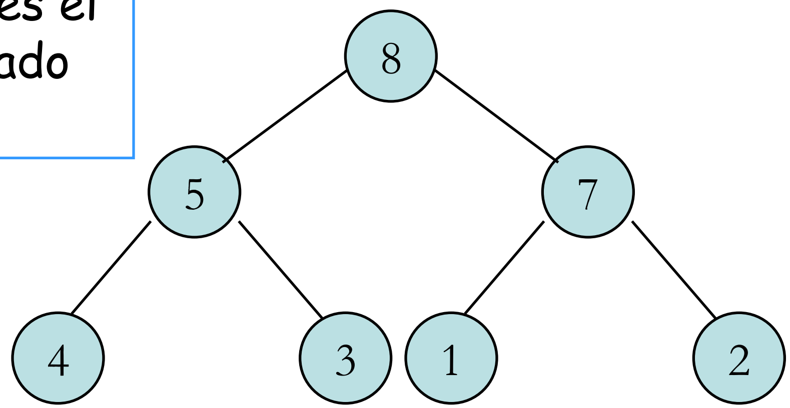


1	2	3	4	5	6	7			
8	5	7	4	3	1	2			

Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha

A[1, …, heap-size[A]] es el montículo representado



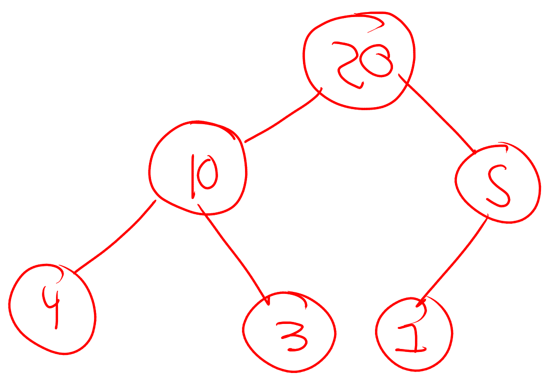
8	5	7	4	3	1	2			

heap-size[A]=7 length[A]=10

Heapsort

Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma

A={20, 10, 5, 4, 3, 1} donde heap-size[A]=6 y length[A]=10

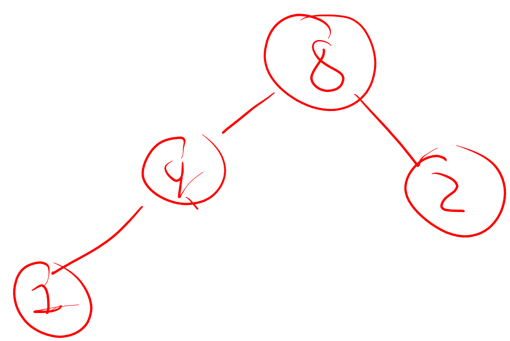


Heapsort

Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma

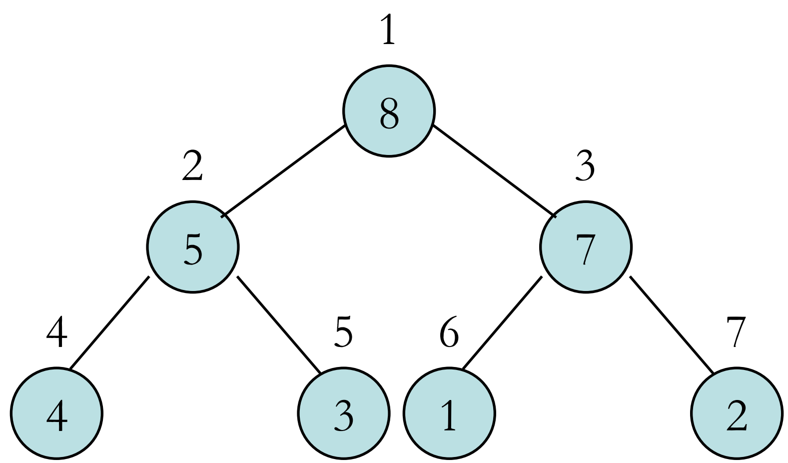
A={20, 10, 5, 4, 3, 1, } donde heap-size[A]=6 y length[A]=10

A={8, 4, 2, 1, 7, 9 } donde heap-size[A]=4 y length[A]=10



Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha



i/2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	5	7	4	3	1	2			

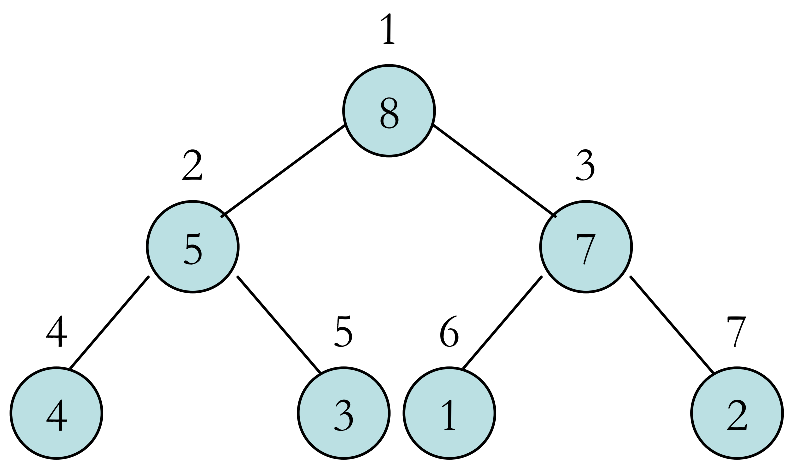
Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=2 y 3

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=4 y 5

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=6 y 7

Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	5	7	4	3	1	2			

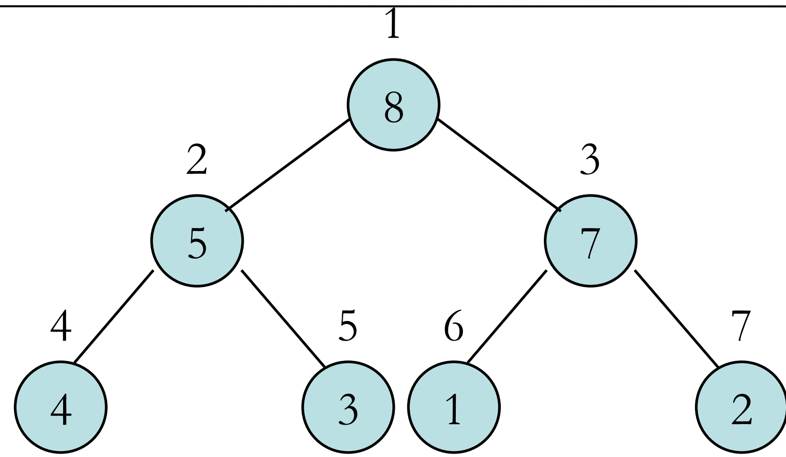
Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=2 y 3

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=4 y 5

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=6 y 7

Padre(i): $\lfloor i/2 \rfloor$

Heapsort



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	5	7	4	3	1	2			

Raíz del árbol: A[1]

Padre(i): $\lfloor i/2 \rfloor$

Izq(i): A[2*i]

Der(i): A[2*i + 1]

Heapsort

Operaciones con montículos:

- Heapify: O(lg n)
- Build-Heap: O(n)
- HeapSort: O(nlgn)
- Max-Heap-Insert, Heap-Extract-Max, Heap-Increase-Key, Heap-Maximum: O(lg n) Colas de prioridad

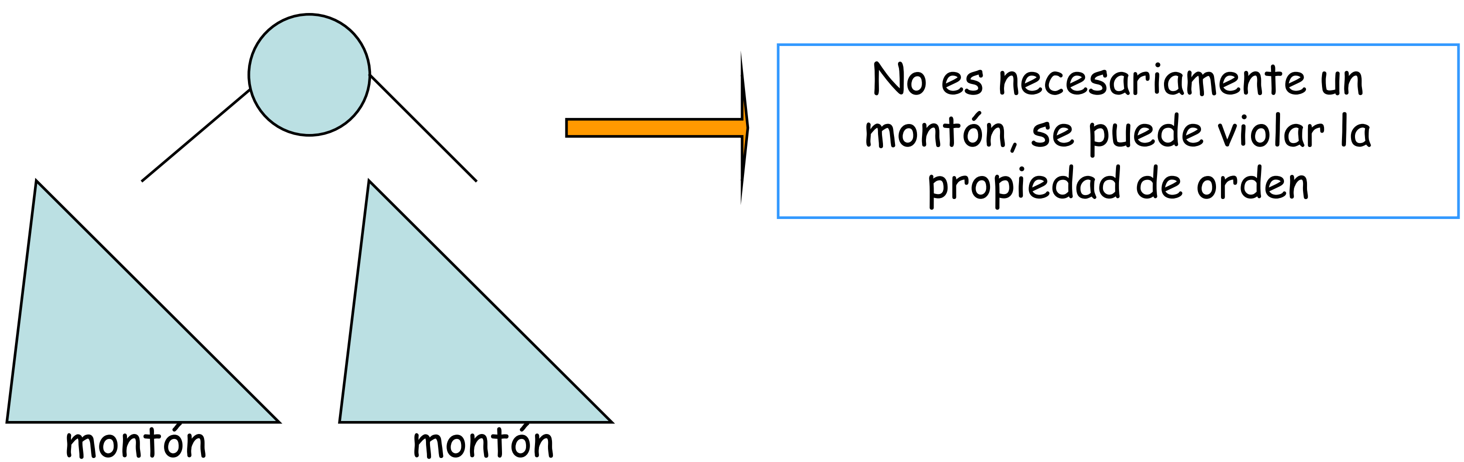
La altura de un montículo de n elementos es $\Theta(\lg n)$

Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo

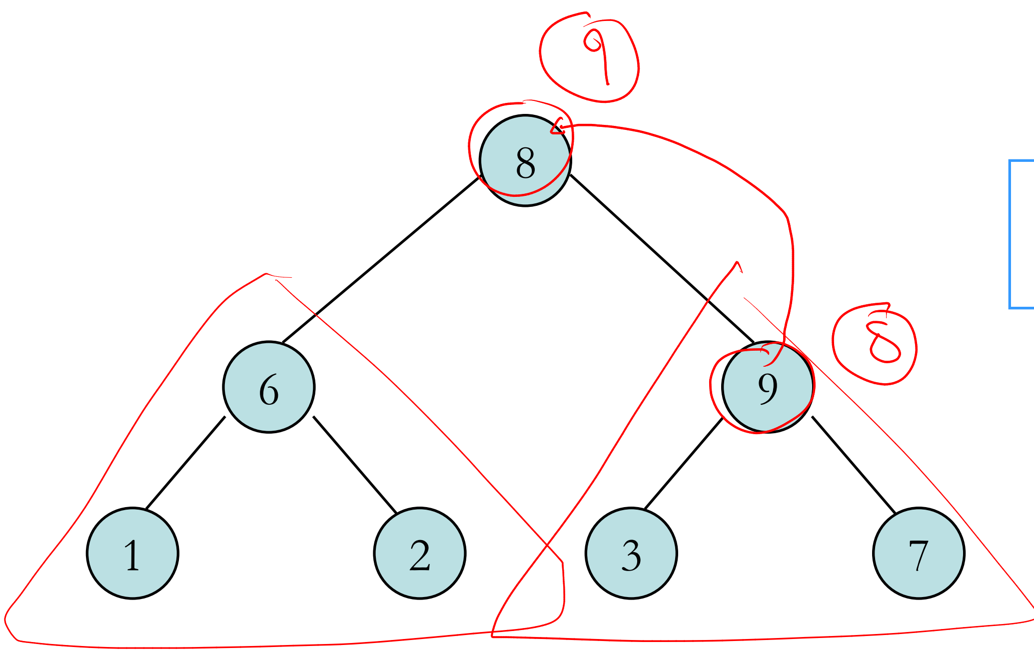


Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo



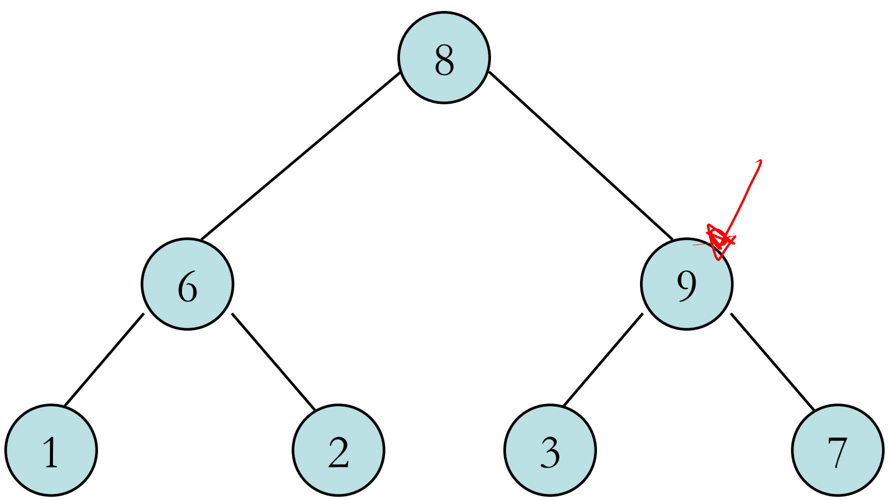
¿Cómo sería el montón resultante?

Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo



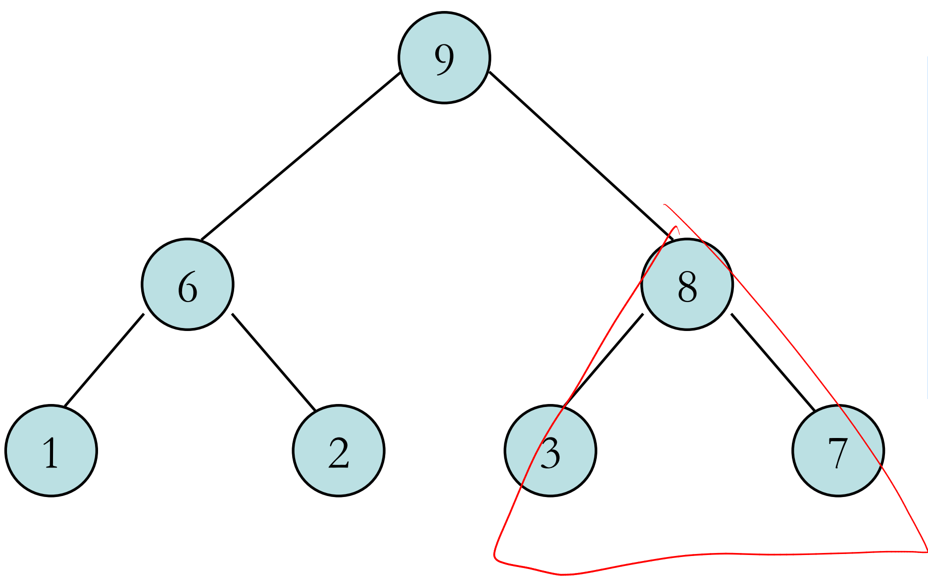
Se debe conocer cuál es el mayor entre la raíz Izq(i), la raiz Der(i) e A[i]

Heapsort

Heapify

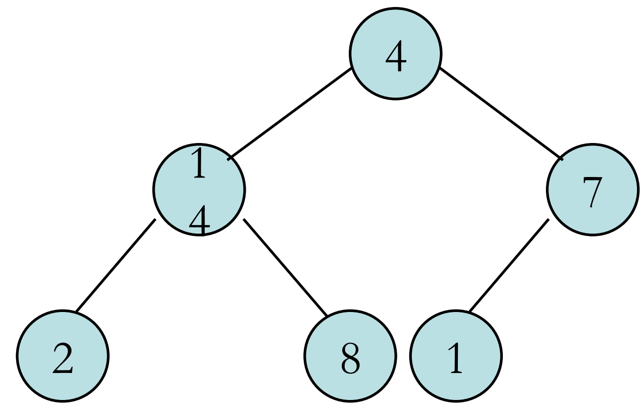
Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo

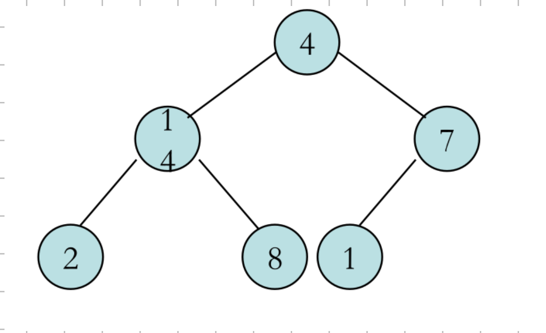


Al hacer el cambio de valores se debe verificar que el montón 3-8-7 cumpla la propiedad de orden

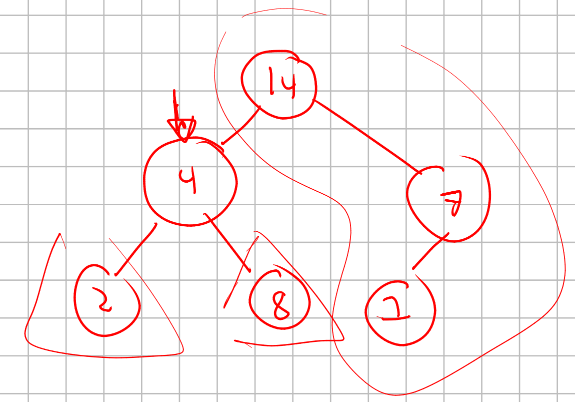
```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
         HEAPIFY(A,largest)
```



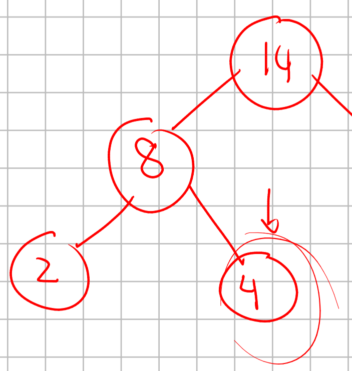
Aplique el algoritmo HEAPIFY(A, 1)



4
14
7
2
8
1

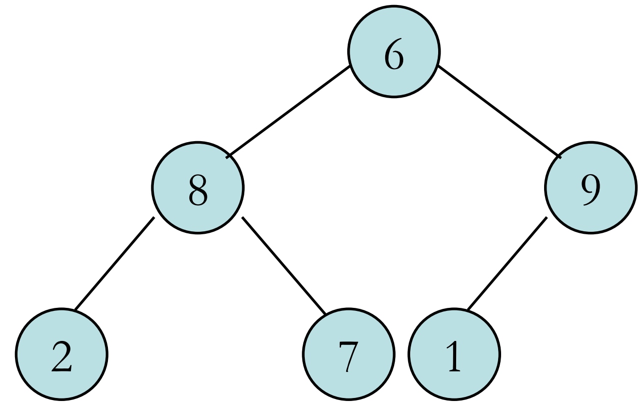


14
4
7
2
8
1



14
8
7
2
4
1

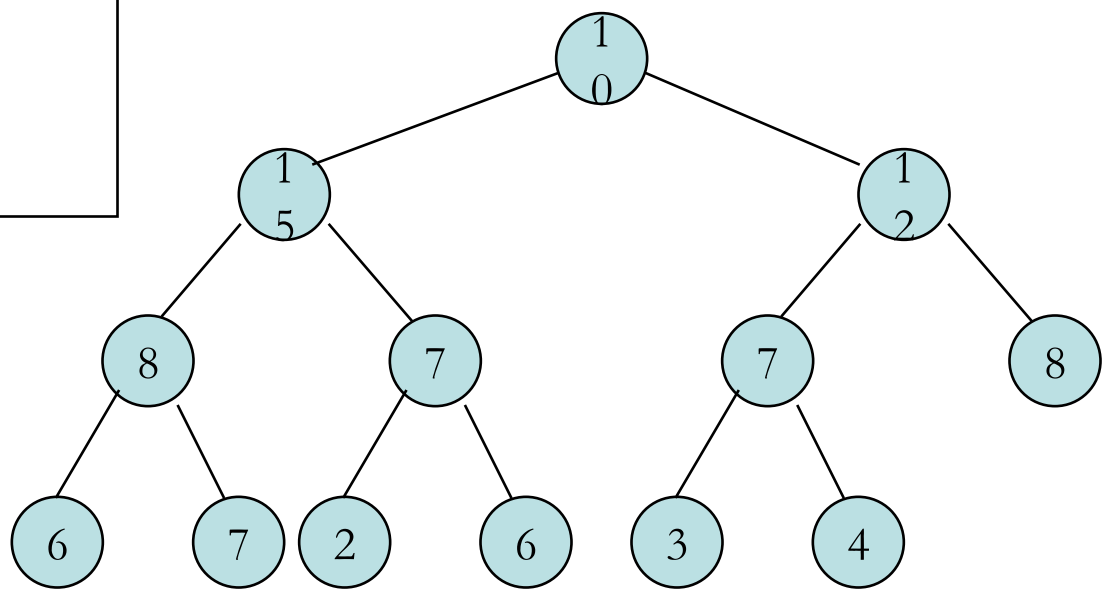
```
HEAPIFY(A, i)
 l ← LEFT(i)
 r ← RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest ← l
     else largest ← i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest ← r
 if largest≠i
   then exchange A[i] ↔ A[largest]
         HEAPIFY(A,largest)
```



Aplique el algoritmo HEAPIFY(A, 1)

```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
          HEAPIFY(A,largest)
```

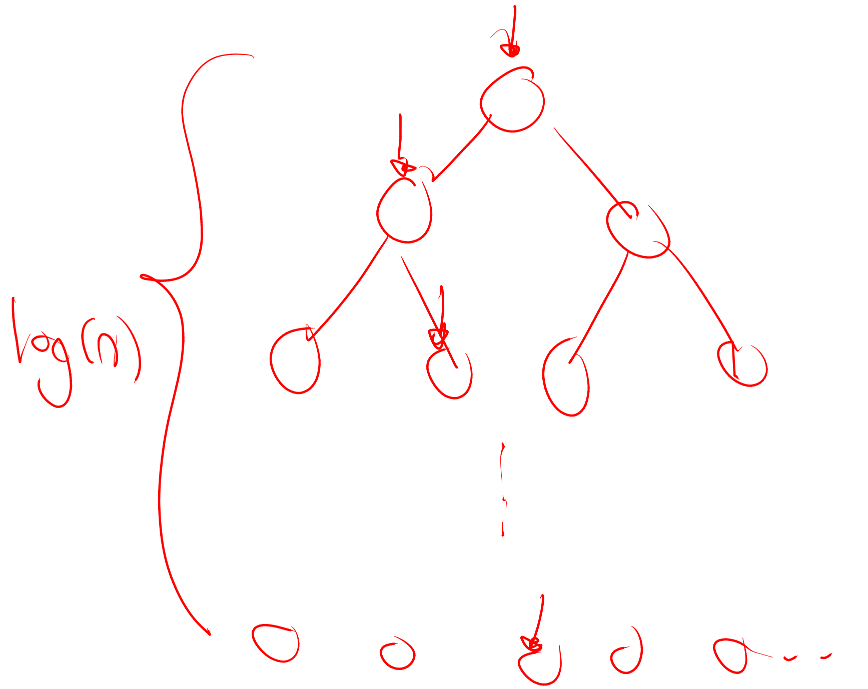
Aplique el algoritmo HEAPIFY(A, 1)



```
HEAPIFY(A, i)
 l ← LEFT(i)
 r ← RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest ← l
     else largest ← i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest ← r
 if largest≠i
   then exchange A[i] ↔ A[largest]
         HEAPIFY(A,largest)
```

$O(\log(n))$

¿Cuál es la complejidad del algoritmo?



```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
          HEAPIFY(A,largest)
```

Complejidad

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$$

$\Theta(1)$ para calcular el mayor + Heapify con 2/3 de los elementos en el peor de los casos

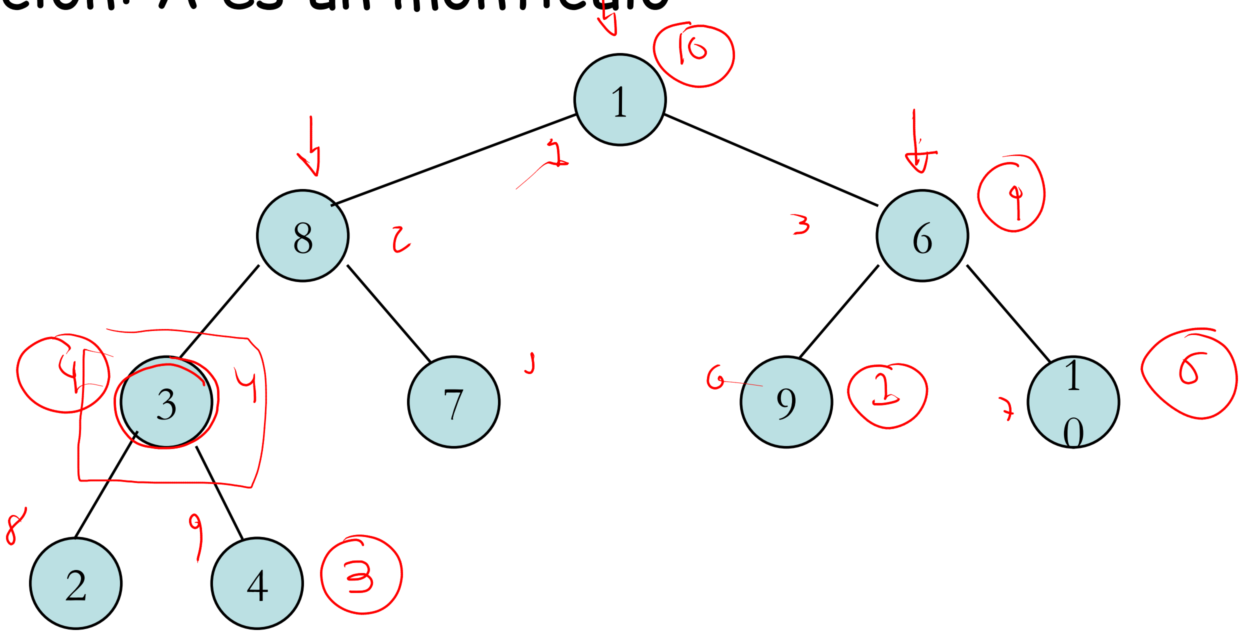
Por teorema maestra, caso 2, $T(n)=O(lgn)$

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

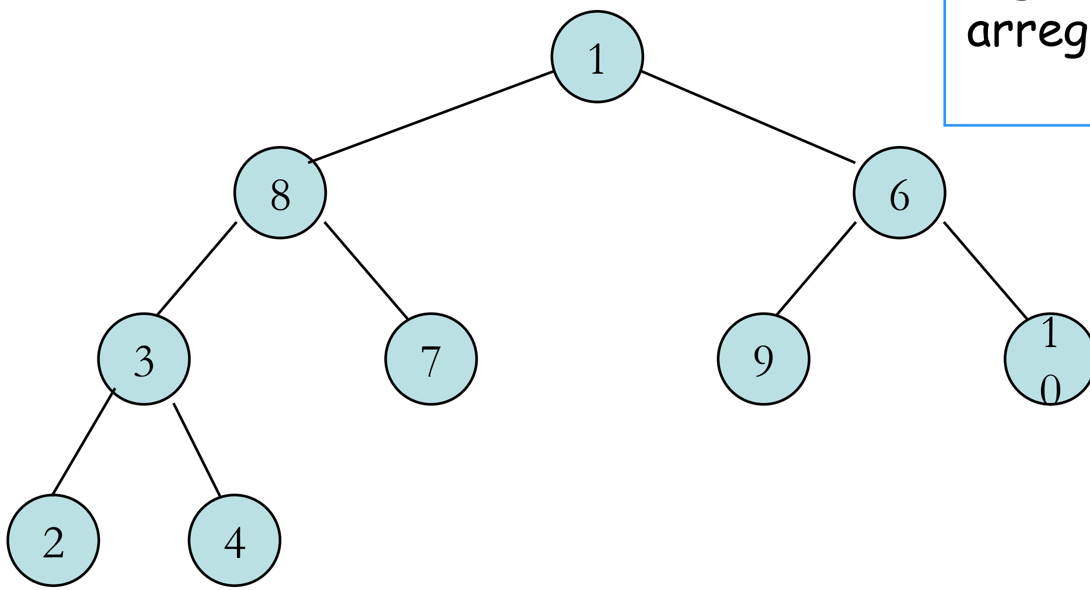
Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

La organización es lógica, aun cuando en el arreglo no se especifica



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

Heapsort

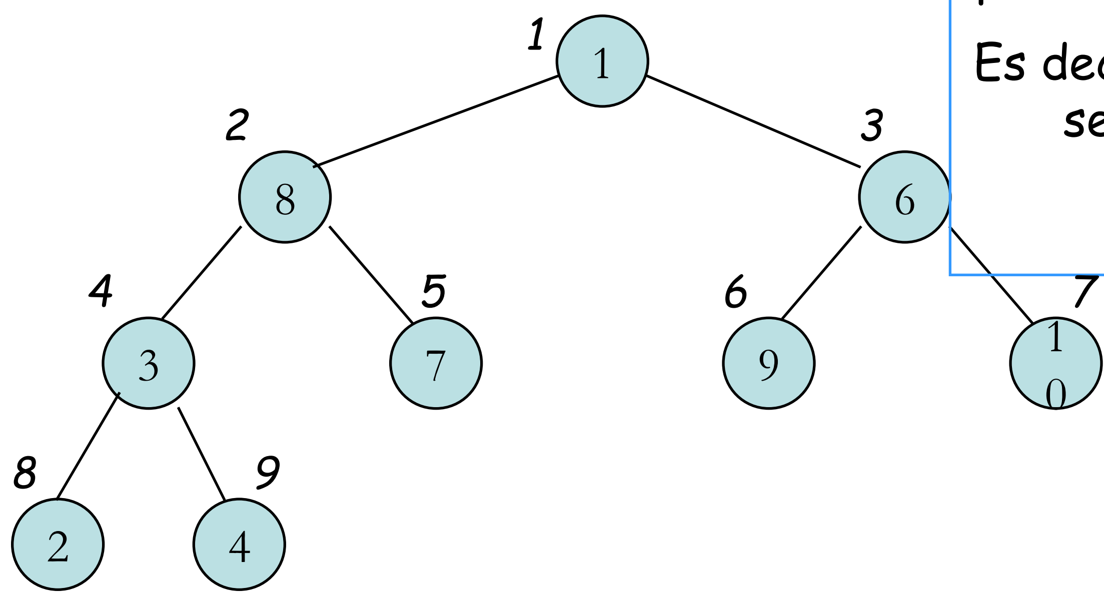
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

Heapsort

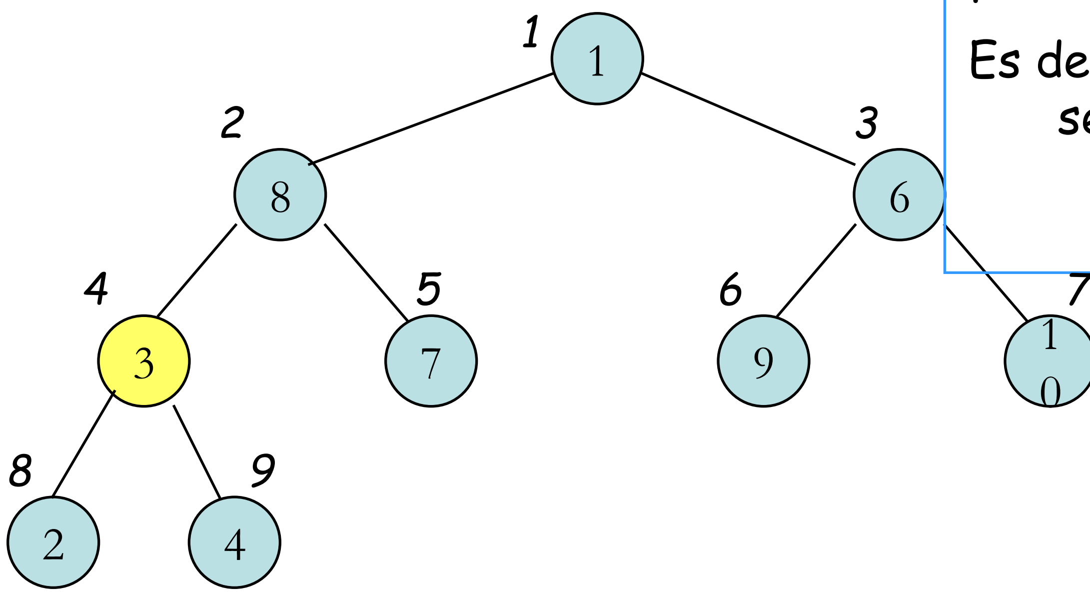
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

Heapsort

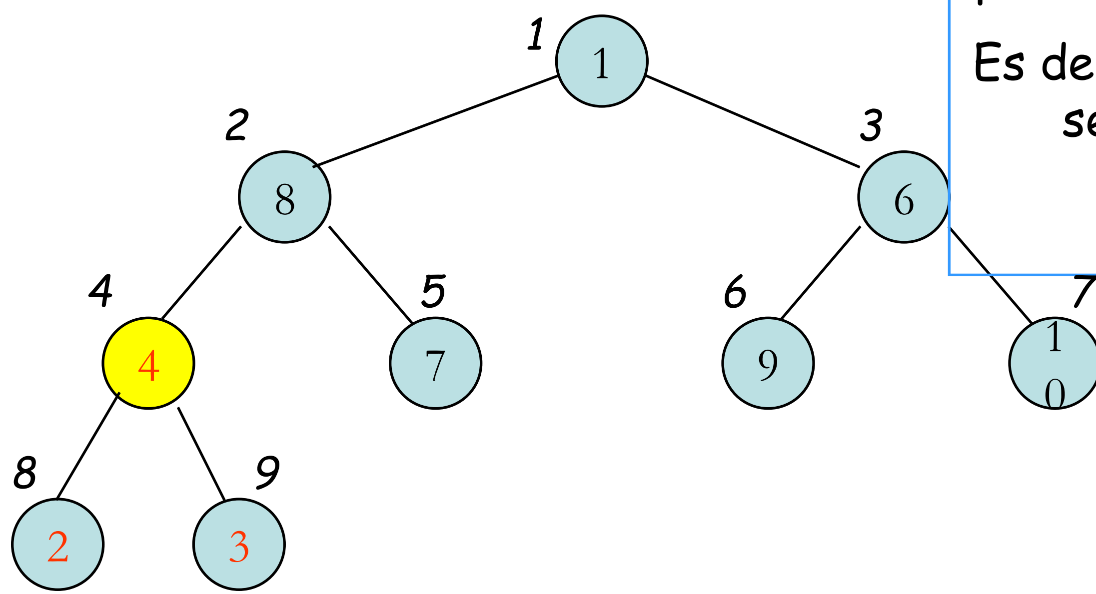
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	4	7	9	10	2	3	

Heapsort

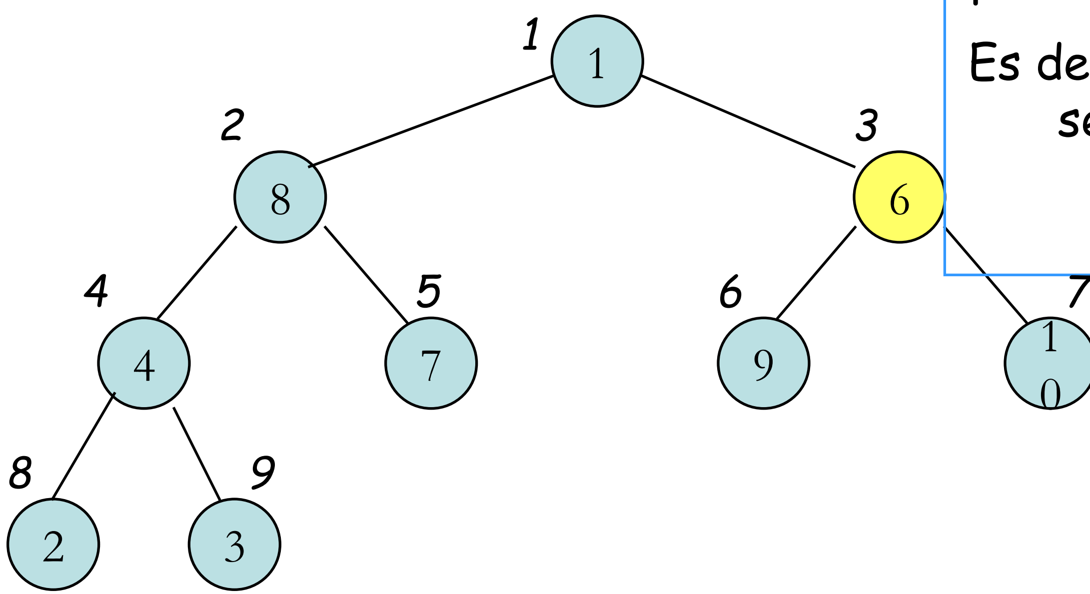
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



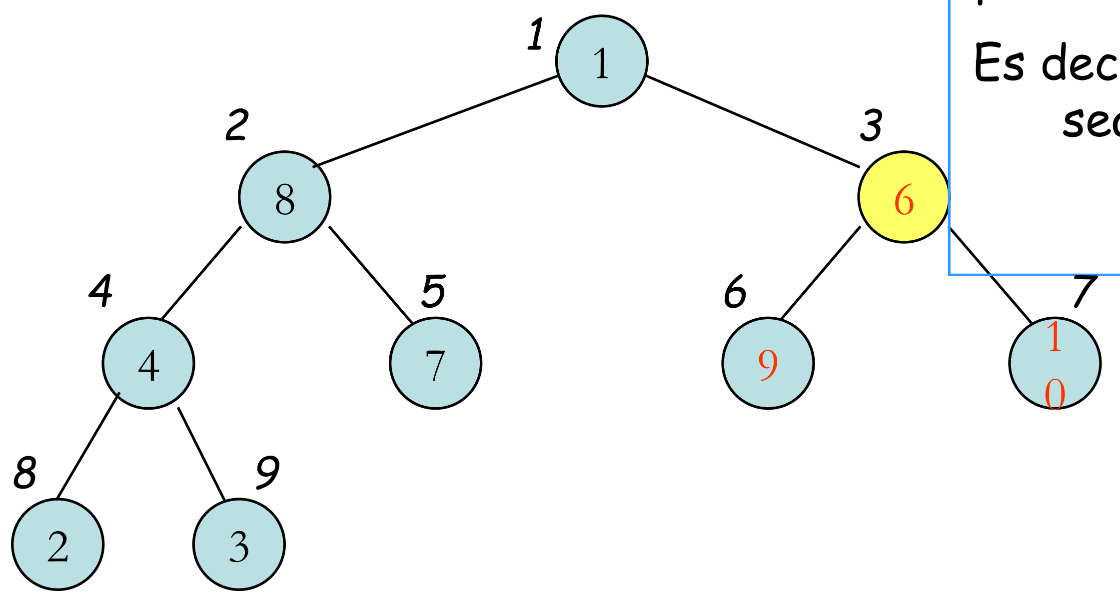
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	4	7	9	10	2	3	

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	4	7	9	10	2	3	

Heapsort

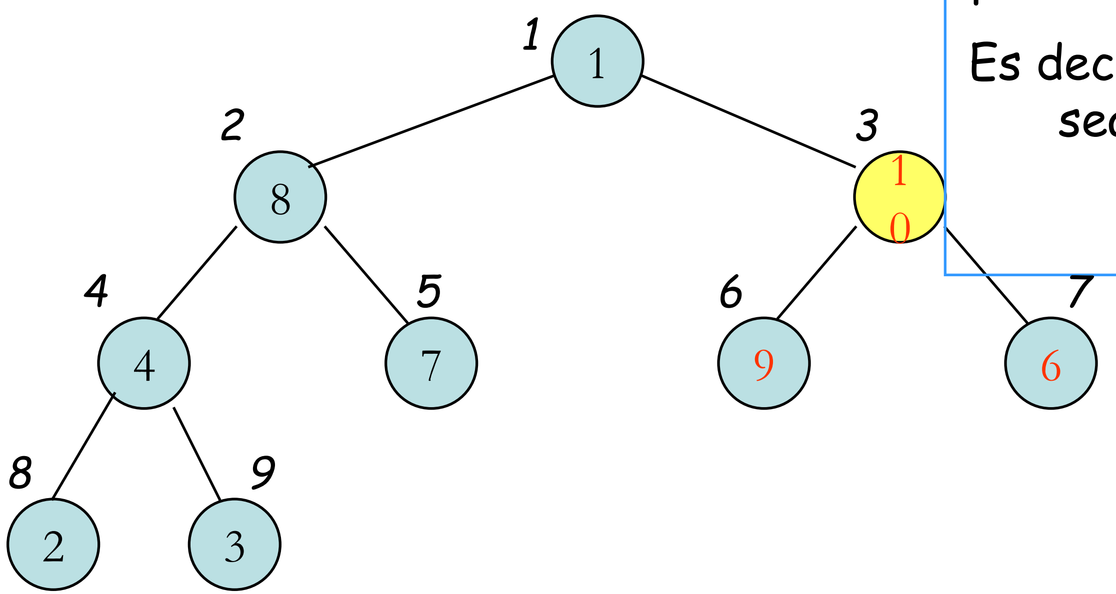
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

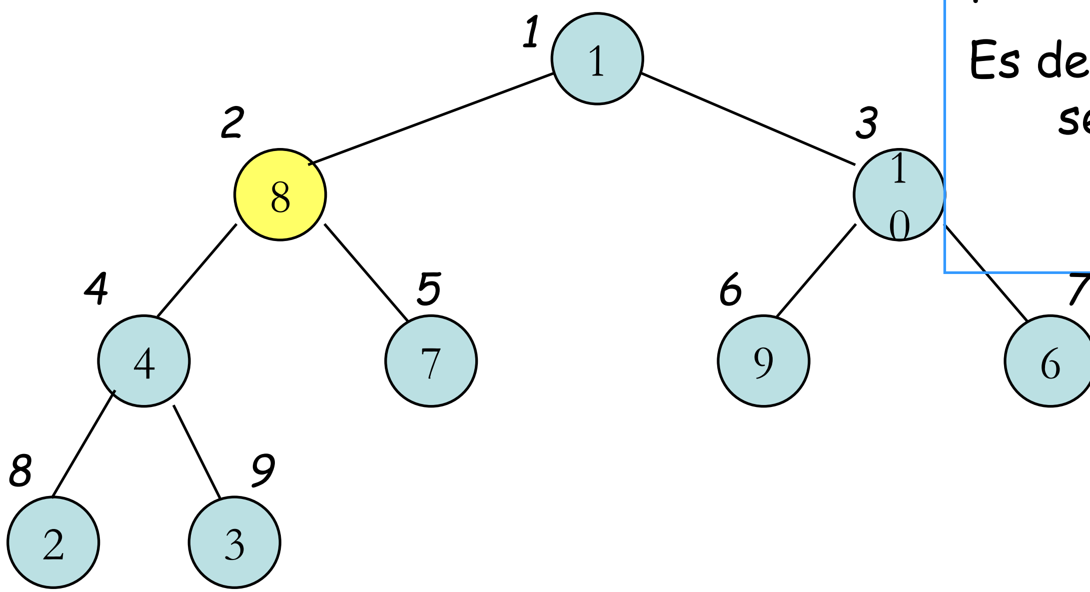
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

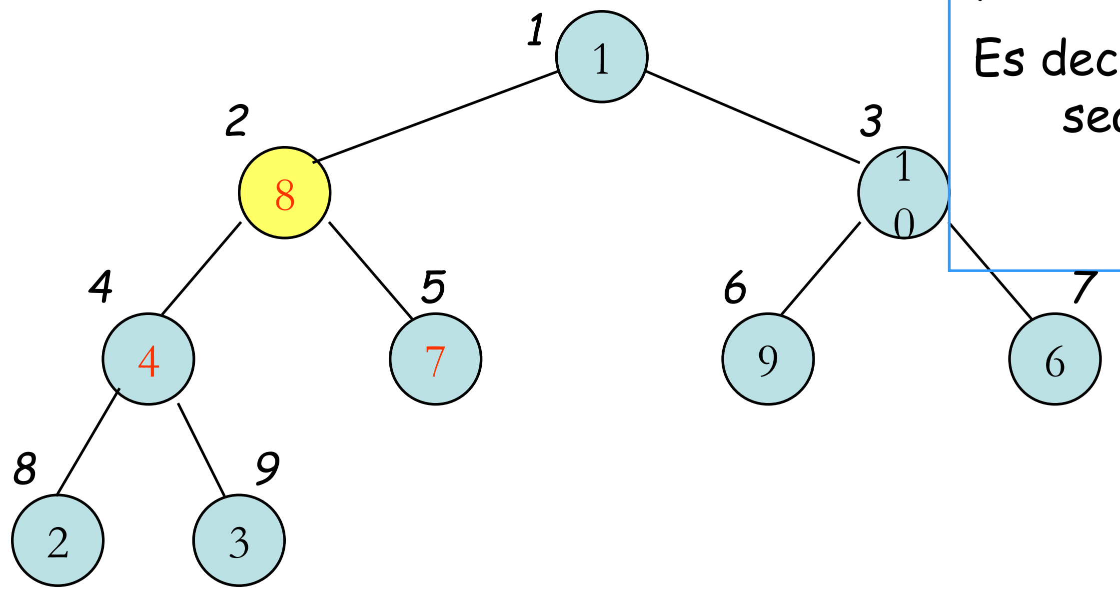
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

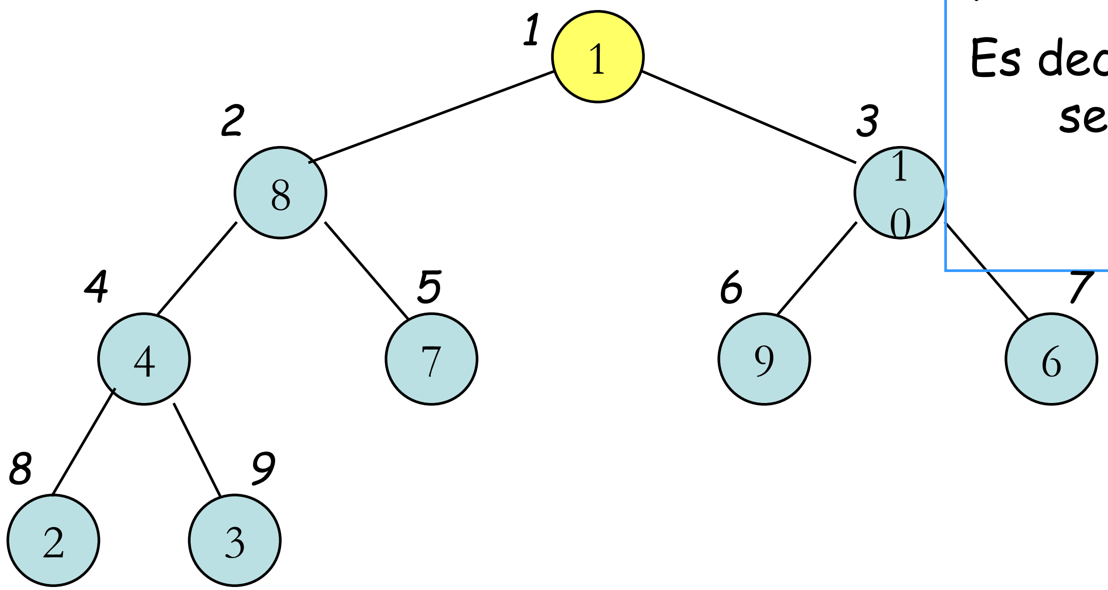
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

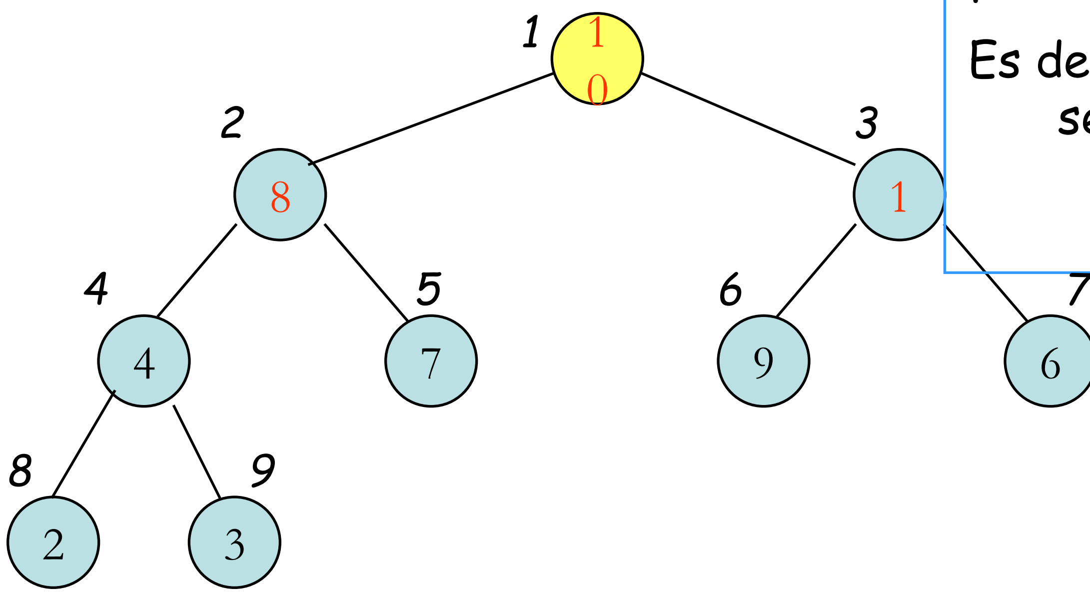
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	1	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

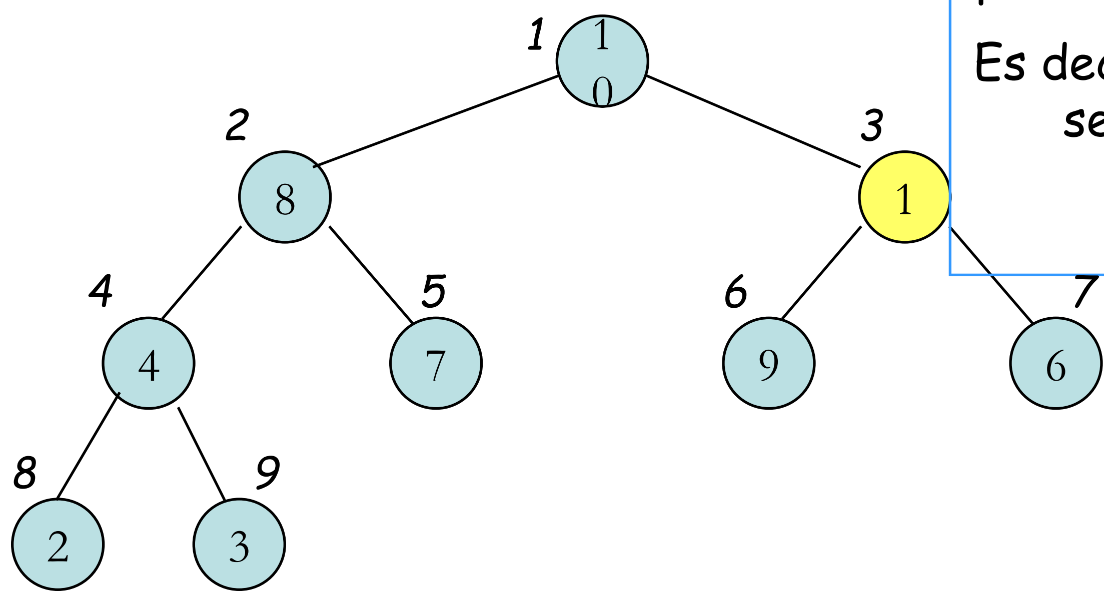
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	1	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

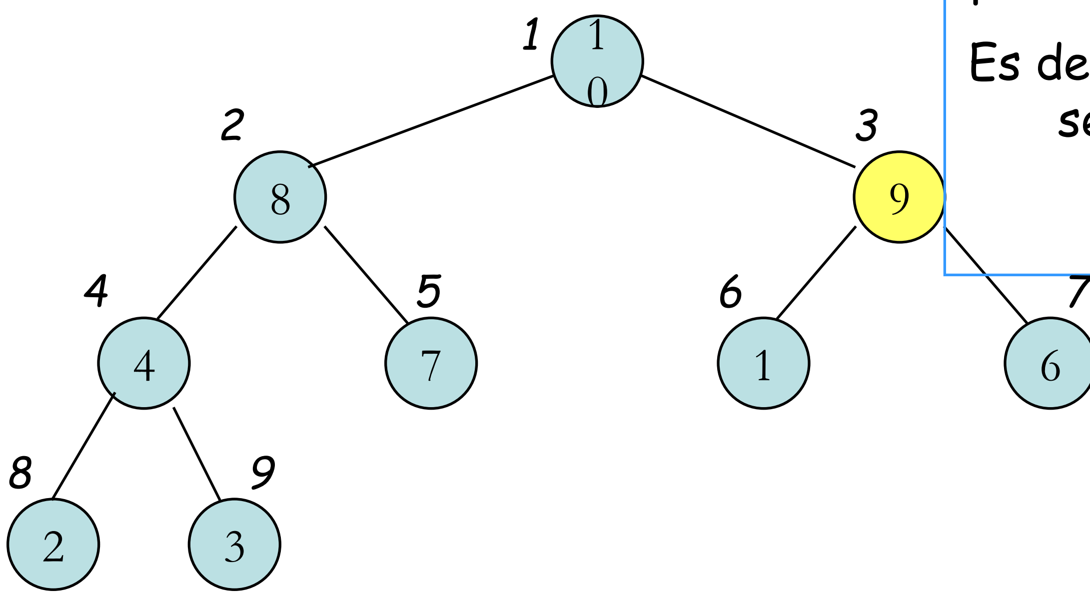
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



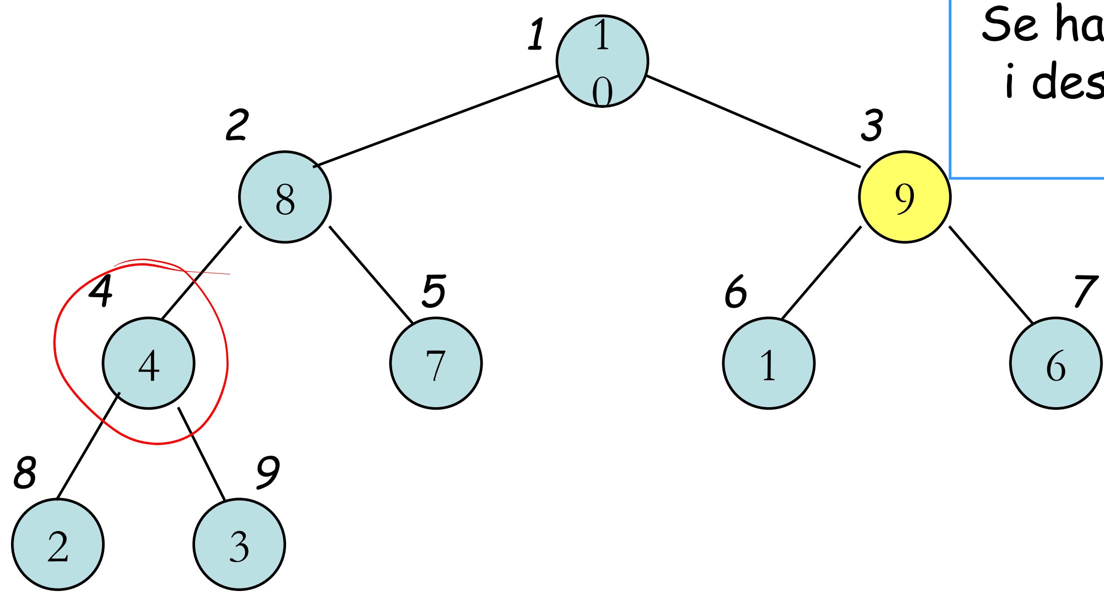
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	9	4	7	1	6	2	3	

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



Se hace HEAPIFY para i desde ⌊length[A]/2⌋ hasta 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	9	4	7	1	6	2	3	

```
BUILD-HEAP(A)
 heap-size[A] ← length[A]
 for i ← ⌊length[A]/2⌋ downto 1
    do HEAPIFY(A,i)
```

Aplique el algoritmo BUILD-HEAP(A), para

A={5, 7, 10, 1, 4, 6, 8, 2, 9, 12} y heap-size(A)=10

BUILD-HEAP(A)

heap-size[A] ← length[A]

for i ← ⌊length[A]/2⌋ downto 1

  do HEAPIFY(A,i)

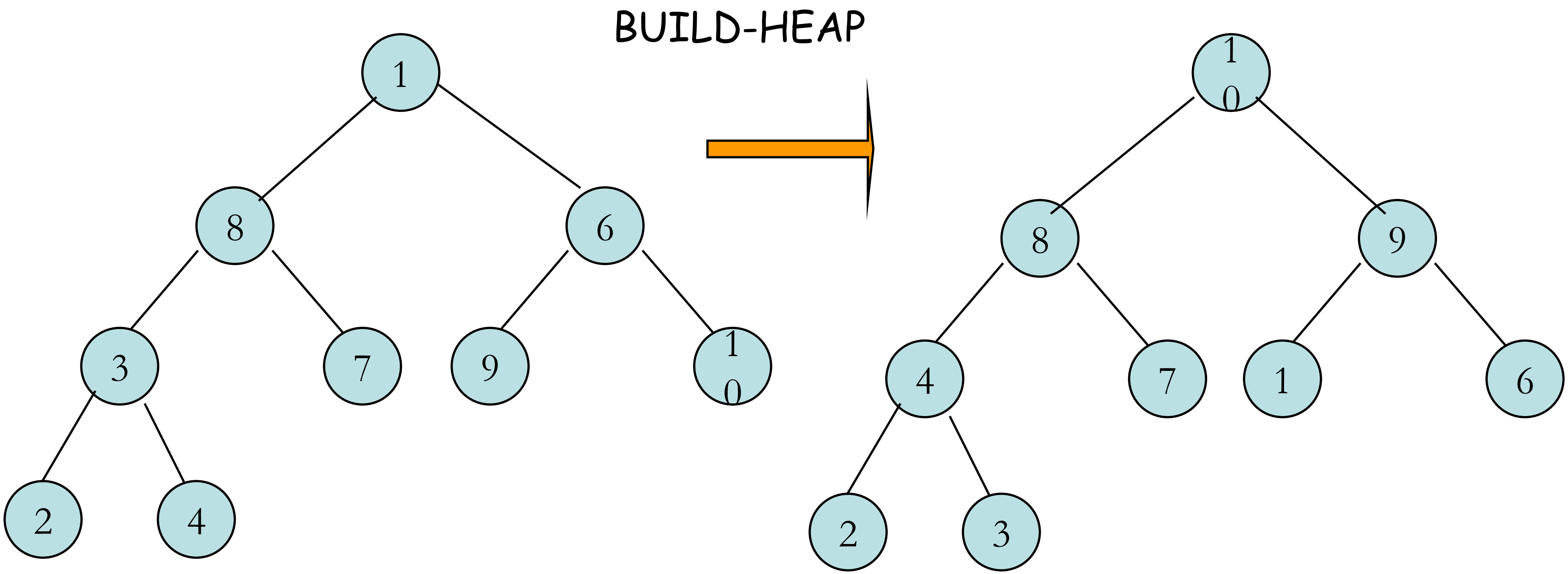
Complejidad

- Cada llamado a HEAPIFY cuesta O(lgn)
- Se hacen O(n) llamados
- Estimacion: O(nlgn)

  -O(n) es una estimación más precisa

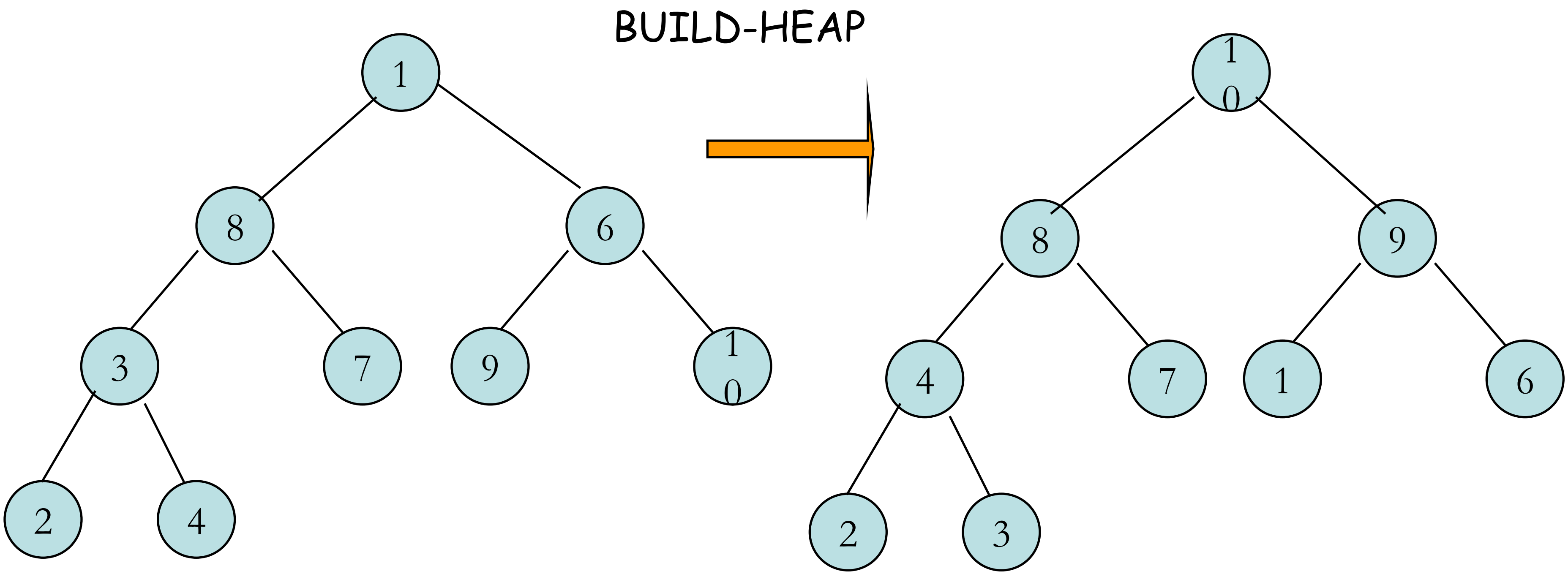
Heapsort

HEAP-SORT(A)



Heapsort

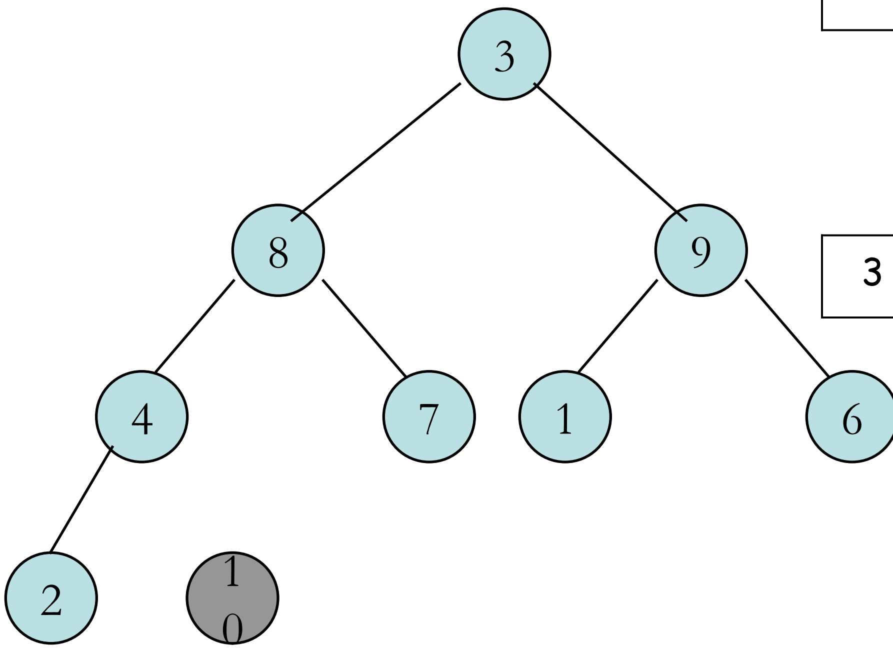
HEAP-SORT(A)



El valor más grande quedará en la raíz del árbol

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

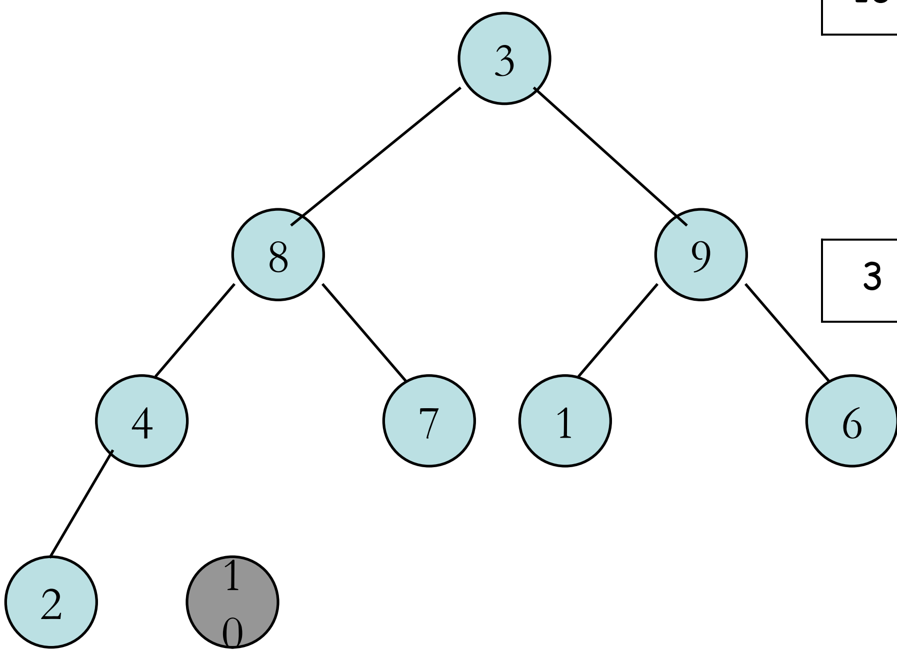
3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

Se intercambio el valor A[1], el mayor, con el valor A[heap-size[A]] y se disminuye en 1 valor heap-size[A]

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

3	8	9	4	7	1	6	2	10	

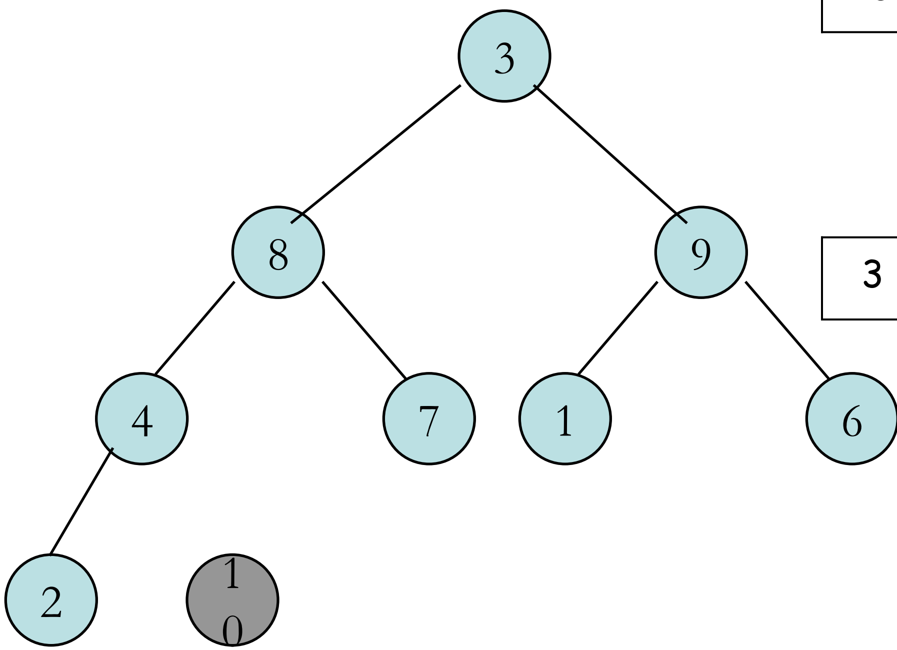
heap-size[A]=8

Se intercambio el valor A[1], el mayor, con el valor A[heap-size[A]] y se disminuye en 1 valor heap-size[A]

Se repite el proceso de hacer heapify para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

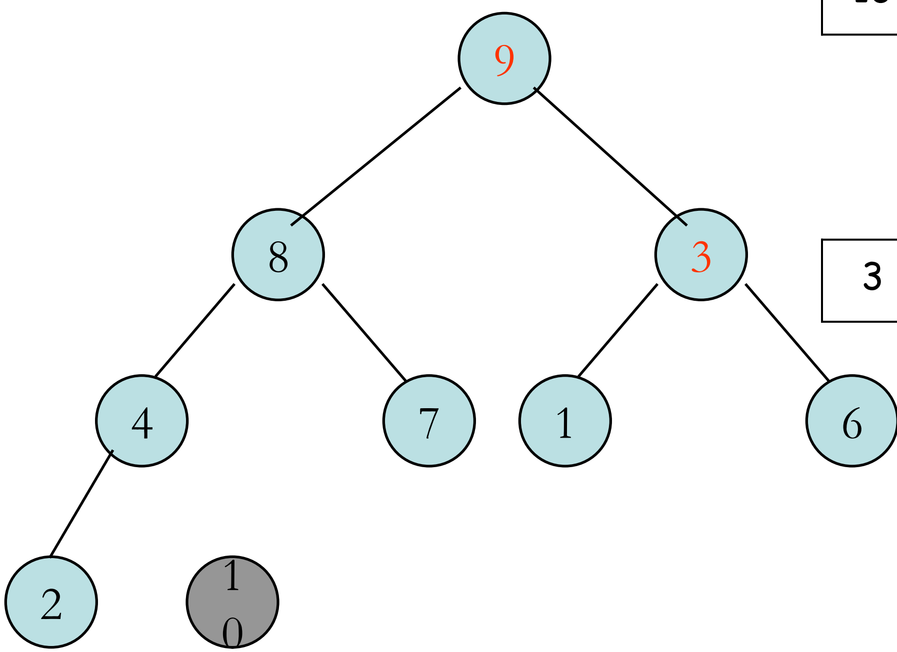
3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

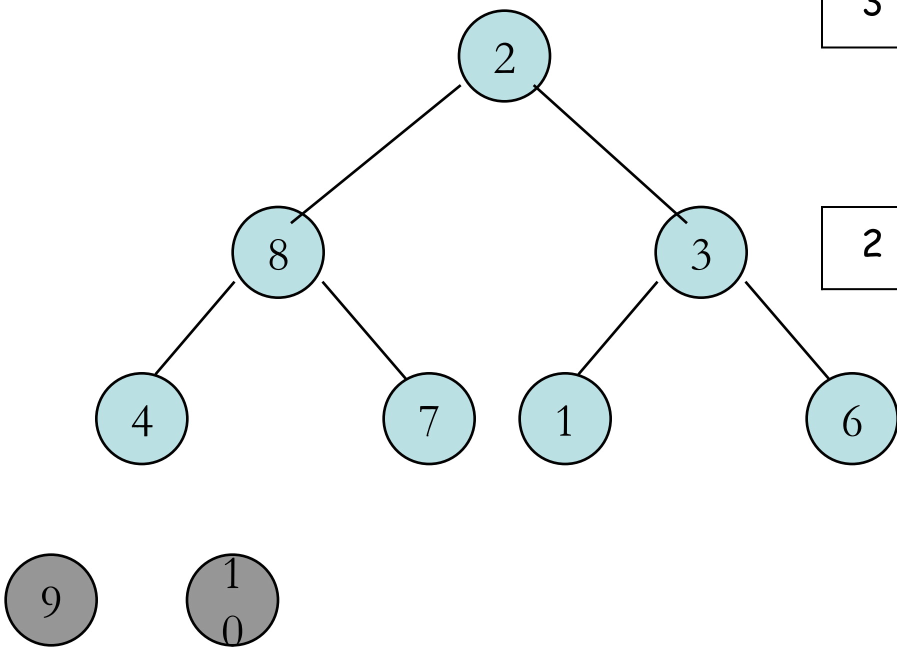
3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



3	8	9	4	7	1	6	2	10	

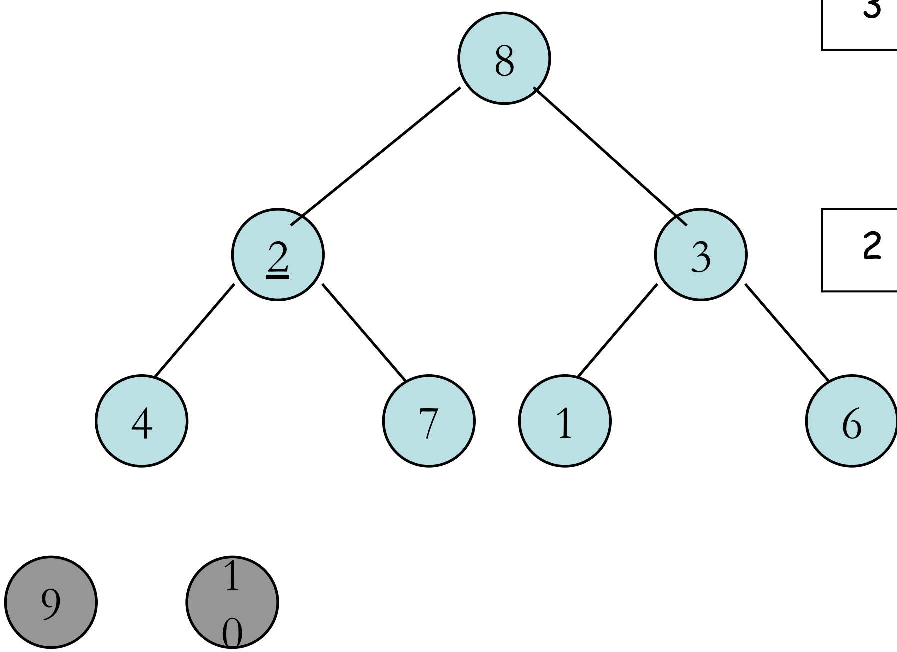
2	8	3	4	7	1	6	9	10	

heap-size[A]=7

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



3	8	9	4	7	1	6	2	10	

2	8	3	4	7	1	6	9	10	

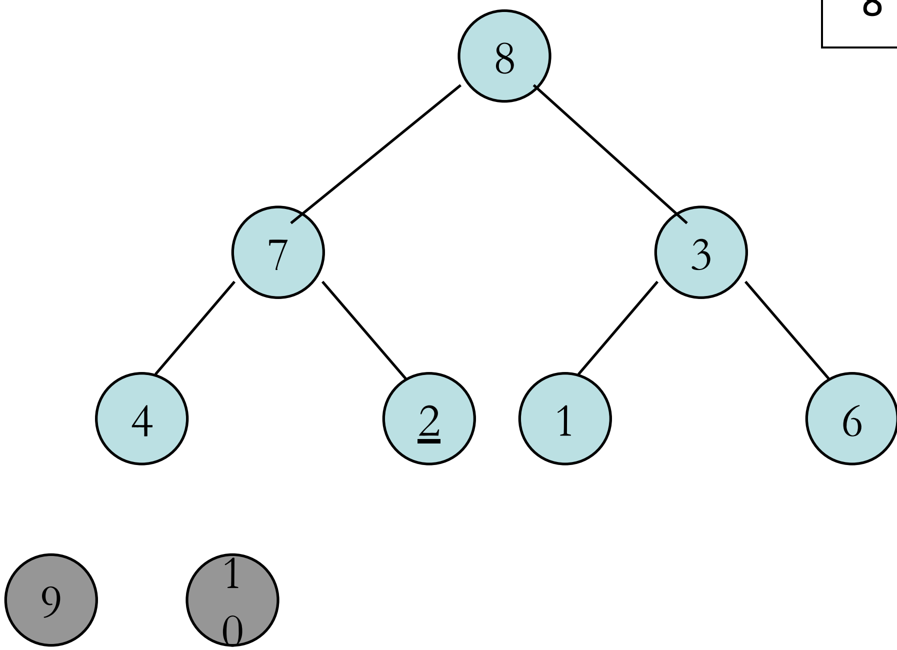
heap-size[A]=7

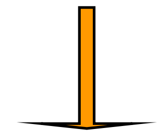
Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)

8	7	3	4	2	1	6	9	10	

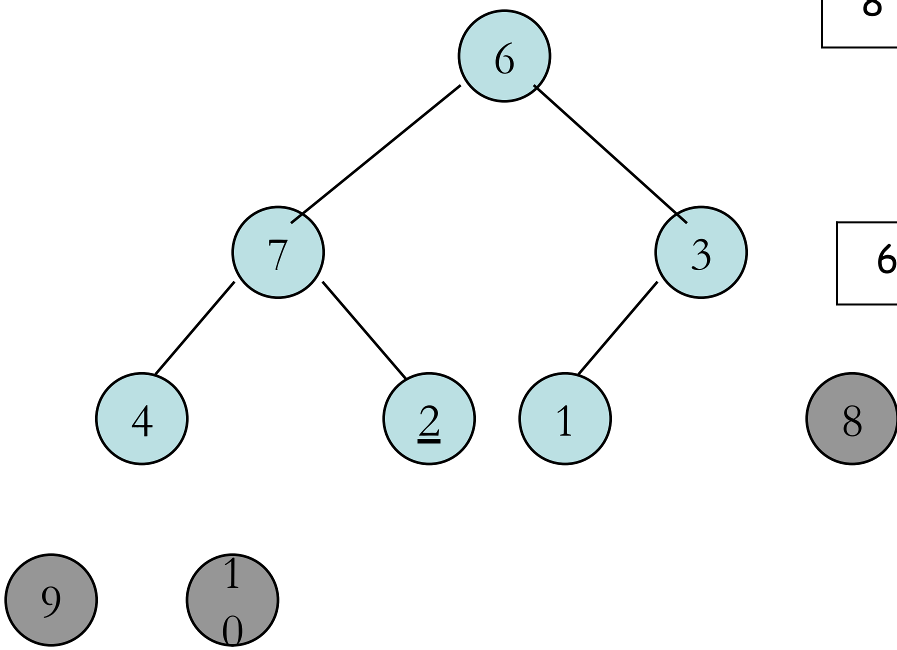




Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



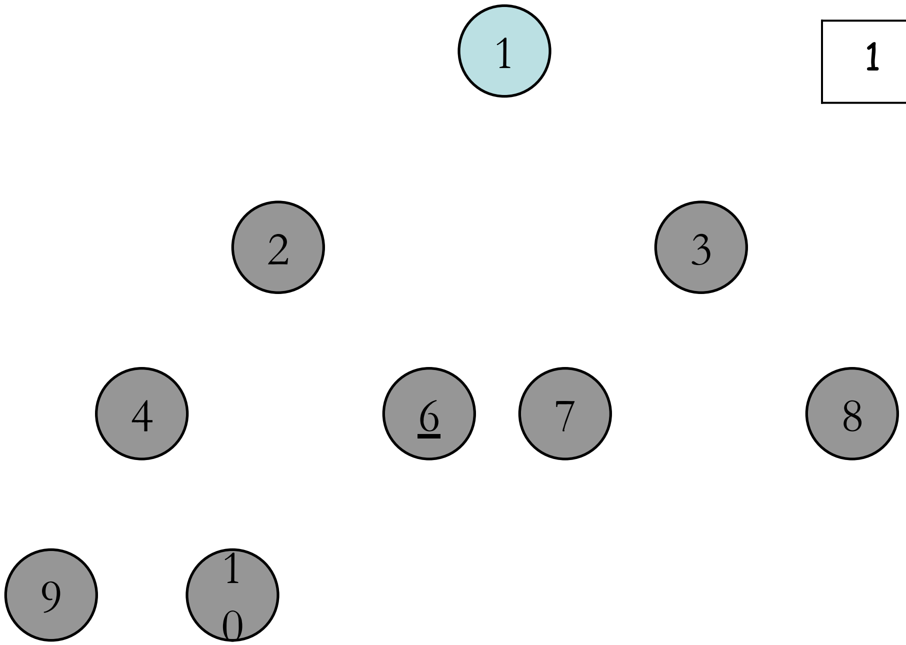
8	7	3	4	2	1	6	9	10	

6	7	3	4	2	1	8	9	10	

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



1	2	3	4	6	7	8	9	10	

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)                              O(n log(n)) +
 for i ← length[A] downto 2                 ← n
    do exchange A[1] ↔ A[i]
         heap-size[A] ← heap-size[A] -1     ← 1
         HEAPIFY(A,1)                       ← log(n)
```
O(n log(n))

Aplique el algoritmo HEAP-SORT(A), para

A={12, 9, 10, 7, 8, 1} y heap-size(A)=6

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)
 for i ← length[A] downto 2
    do exchange A[1] ↔ A[i]
        heap-size[A] ← heap-size[A] -1
        HEAPIFY(A,1)
```

Aplique el algoritmo HEAP-SORT(A), para

A={5, 7, 10, 1, 4, 6, 8, 2, 9, 12} y heap-size(A)=10

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)
 for i ← length[A] downto 2
    do exchange A[1] ↔ A[i]
         heap-size[A] ← heap-size[A] -1
         HEAPIFY(A,1)
```

¿Cuál es la complejidad?

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)
 for i ← length[A] downto 2
   do exchange A[1] ↔ A[i]
      heap-size[A] ← heap-size[A] -1
      HEAPIFY(A,1)
```

¿Cuál es la complejidad?

- BUILD-HEAP toma $O(n)$
- Se llama $(n-1)$ veces a HEAPIFY que toma $O(\lg n)$
- La complejidad es de $O(n\lg n)$

Heapsort

Colas de prioridad

- Es una estructura de datos con servicios de inserción y retiro de elementos con base en una prioridad (valor numérico almacenado en el árbol)

- Se retira (atiende) al elemento con mayor prioridad

- Las operaciones básicas son:

  -INSERT(C,x): insertar el elemento con clave x

  -MAX(C): devuelve el elemento de máxima prioridad

  -EXTRACT-MAX(C): elimina y devuelve el elemento de máxima prioridad

Heapsort

HEAP-MAXIMUM(C)

return $A[1]$

Tiempo de ejecución: $\Theta(1)$

Heapsort

```
HEAP-EXTRACT-MAX(C)
 if heap-size[A]<1
   then error "heap underflow"
 max ← A[1]
 A[1] ← A[heap-size[A]]
 heap-size[A] ← heap-size[A]-1
 HEAPIFY(A,1)
 return max
```

Tiempo de ejecución: $O(\lg n)$

Heapsort

HEAP-INCREASE-KEY(A, i, key)

if key<A[i]

then error "key error "

A[i] $\leftarrow$ key

while i>1 and A[PARENT(i)]<A[i]

    do exchange A[i] $\leftrightarrow$ A[PARENT(i)]

        i $\leftarrow$ PARENT(i)

Tiempo de ejecución: O(lgn)

Heapsort

MAX-HEAP-INSERT(A, key)

heap-size[A] $\leftarrow$ heap-size[A]+1

i $\leftarrow$ heap-size[A]

while i>1 and A[PARENT(i)]<key

  do exchange A[i] $\leftrightarrow$ A[PARENT(i)]

    i $\leftarrow$ PARENT(i)

A[i] $\leftarrow$ key

Tiempo de ejecución: O(lgn)

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 6

Gracias

Próximo tema:

Ordenamiento: Quicksort