Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Ecuaciones de recurrencia

Recurrencias

Método de iteración

Método maestro*

Método de sustitución

Recurrencias

Método de iteración

Expandir la recurrencia y expresarla como una suma de términos que dependen de n y de las condiciones iniciales

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$, $T(1)= \Theta(1)$ y n par

Expandir la recurrencia 2 veces

$$T\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4} + 3T\left(\frac{n}{4^2}\right)$$

$$T\left(\frac{n}{4^2}\right) = \frac{n}{4^2} + 3T\left(\frac{n}{4^3}\right)$$

$$T(n) = n + 3\left(\frac{n}{4} + 3T\left(\frac{n}{4^2}\right)\right) = n + \frac{3}{4}n + 3^2 T\left(\frac{n}{4^2}\right)$$

$$\frac{9^n}{6^n} = \left(\frac{9}{6}\right)^n$$

$$n + \frac{3}{4}n + 3^2\left(\frac{n}{4^2} + 3T\left(\frac{n}{4^3}\right)\right) = n + \frac{3}{4}n + \frac{3^2}{4^2}n + 3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right)$$

$$T\left(\frac{n}{4^3}\right) = \frac{n}{4^3} + 3T\left(\frac{n}{4^4}\right)$$

$$n + \frac{3}{4}n + \frac{3^2}{4^2}n + \frac{3^3}{4^3}n + 3^4 T\left(\frac{n}{4^4}\right)$$

$$n + \frac{3}{4}n + \frac{3^2}{4^2}n + 3^3\left(\frac{n}{4^3} + 3T\left(\frac{n}{4^4}\right)\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^0 n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^3 n + 3^4 T\left(\frac{n}{4^4}\right)$$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

Recurrencias

$$T(n) = n + 3T(n/4)$$

$$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$$

$$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ + 3T(n/64)\ ))$$

$$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ + 3^3T(n/4^3)$$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3 (n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3 (n/4 + 3(n/16 + 3T(n/64)))$

$n + 3^*n/4 + 3^2{}^*n/4^2 + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a T(1)

$\frac{n}{4^i} = 1 \qquad n = 4^i$

$\log_4(n) = i$

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} + 3^i T\left(\frac{n}{4^i}\right)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4(n)-1} + 3^{\log_4(n)} T(1)$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\,(\,n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\,(\,n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\,))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a $T(1)$, esto es, cuando $(n/4^i)=1$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}T(1)$

¿Cuándo se detienen las iteraciones?

Cuando se llega a $T(1)$, esto es, cuando $(n/4^i)=1$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3\ (\ n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3\ (\ n/4 + 3(n/16\ \ + 3T(n/64)\ ))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2\ \ + 3^3T(n/4^3)$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}T(1)$

Después de iterar, se debe tratar de expresar como una sumatoria con forma cerrada conocida

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4\rfloor)$

$n + 3\,(\,n/4\rfloor + 3T(n/16\rfloor))$

$n + 3\,(\,n/4\rfloor + 3(n/16\rfloor\ + 3T(n/64\rfloor)\,))$

$n + 3^*n/4\rfloor + 3^{2*}n/4^2\rfloor\ + 3^3(n/4^3\rfloor) + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\leq\ n + 3n/4 + 3^2n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4(n)-1} + 3^{\log_4(n)}T(1)$

$\sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i n + 3^{\log_4(n)}c$

Recurrencias

$T(n) = n + 3T(n/4)$

$n + 3 (n/4 + 3T(n/16))$

$n + 3 (n/4 + 3(n/16 + 3T(n/64)))$

$n + 3*n/4 + 3^2*n/4^2 + 3^3(n/4^3) + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$\leq n + 3n/4 + 3^2n/4^2 + 3^3n/4^3 + \ldots + 3^{\log 4n}\Theta(1)$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i n\right) + 3^{\log_4 n}\Theta(1)$$

$$= n\left(\frac{(3/4)^{(\log_4 n)} - 1}{(3/4) - 1}\right) + n^{\log_4 3} = n * 4(1 - (3/4)^{(\log_4 n)}) + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$= O(n)$

$$\sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i n + 3^{\log_4(n)} c$$

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

$$n\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4(n)} - 1}{3/4 - 1}\right) + 3^{\log_4(n)} c$$

$$b^{\log(n)} = n^{\log(b)}$$

$$\frac{\log(3)}{\log(4)}$$

$$n\left(\frac{n^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)} - 1}{-1/4}\right) + n^{\log_4(3)} \cdot c$$

$$-4n\left(n^{\log_4(3) - \log_4(4)} - 1\right) + n^{\log_4(3)} \cdot c$$

$$-4n\left(n^{\log_4(3) - 1} - 1\right) + n^{\log_4(3)} c = -4n^{\log_4(3)} + 4n + n^{\log_4(3)} \cdot c$$

$$O(n)$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1$, $T(1) = \Theta(1)$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \qquad T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 1\right) + 1 = 2^2\boxed{T\left(\frac{n}{2^2}\right)} + \underline{2 + 1}$$

$$T(n) = 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + 2 + 1$$

$$T(n) = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$T(n) = 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + 2^{i-1} + 2^{i-2} + \dots + 2^1 + 2^0 \qquad \frac{n}{2^i} = 1$$

$$i = \log_2(n)$$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)}T(1) + \left(2^{\log_2(n)-1} + 2^{\log_2(n)-2} + \dots + 2^1 + 2^0\right)$$

$$T(n) = nc + \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i \qquad 2^{\log(n)} = n^{\log_2(2)} = n$$

$$T(n) = cn + \frac{2^{\log_2(n)} - 1}{2 - 1} = cn + n - 1$$

$$\boxed{(c+1)n - 1}$$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1) = \Theta(1)$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n^2$

Recurrencias

Resuelva por el método de iteración

$T(n) = 2T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n,\ T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = T(n/2) + 1,\ T(1) = \Theta(1)$

Demuestre que $T(n) = T(n/2\rfloor) + n$, es $\Omega(n\log n)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \underbrace{1 + 1}_{2}$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \underbrace{1 + 1 + 1}_{3}$$

$T(1)$

$\frac{n}{2^i} = 1 \qquad i = \log_2(n)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^i}\right) + i$$

$$T(n) = T(1) + \log_2(n) \qquad O(\log_2(n))$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$O(n\log_3(n))$

$O(n\log_2(n))$

$$T(n) = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 \times \frac{n}{2} + n$$

$$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \underbrace{2^2 \frac{n}{2^2} + \frac{2}{2}n + n}_{3n}$$

$i = \log_2(n)$

$$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + in$$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} T(1) + \log_2(n)\, n \qquad O(n\log_2(n))$$

$$T(n) = n + \log_2(n) \times n$$

$$\log_3(n) = \frac{\log_2(n)}{\log_2(3)} \qquad \log_3(n) = c \times \log_2(n)$$

$$O(f(n)) \qquad c \times f(n)$$

$$\log_b a = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)} = c \times \log_c(a)$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \qquad T(1) = 1 \qquad f(n) = n^2$$

$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right) + n^2$$

$$T(n) = 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2$$

$$T(n) = 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \left(\frac{n}{2^2}\right)^2\right) + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2$$

$$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2\left(\frac{n}{2^2}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2$$

$$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2\frac{n^2}{2^4} + 2\frac{n^2}{2^2} + n^2$$

$$T(n) = 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^2}{2^2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2^0}$$

$$T(n) = 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) + \frac{n^2}{2^{i-1}} + \frac{n^2}{2^{i-2}} + \dots + \frac{n^2}{2^1} + \frac{n^2}{2^0}$$

$$T(1) \qquad \frac{n}{2^i} = 1 \qquad 2^i = n \qquad i = \log_2(n)$$

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} T(1) + \frac{n^2}{2^{\log_2(n)-1}} + \frac{n^2}{2^{\log_2(n)-2}} + \dots + \frac{n^2}{2^1} + \frac{n^2}{2^0}$$

$$T(n) = n + \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \frac{n^2}{2^i} \qquad \frac{1}{2^i} = \frac{1^i}{2^i} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$T(n) = n + n^2 \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = n + n^2 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(n)} - 1}{1/2 - 1}$$

$$n + n^2 \frac{n^{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} - 1}{-1/2} = n - 2n^2\left(n^{\log_2(1) - \log_2(2)} - 1\right)$$

$$n - 2n^2\left(n^{0-1} - 1\right) = n - 2n + 2n^2 \qquad O(n^2)$$

$$= 2n^2 - n$$

Recurrencias

Iteración con árboles de recursión

$T(1) = 1$

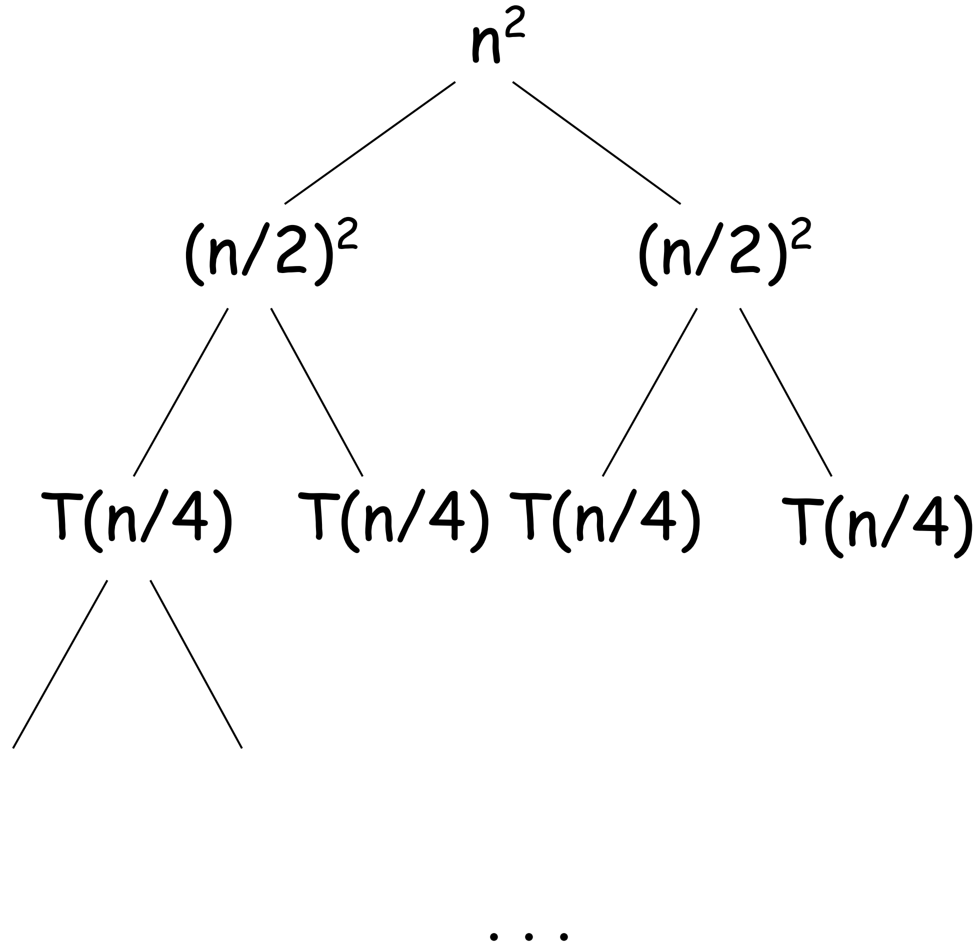
$T(n) = 2T(n/2) + n^2$

Recurrencias

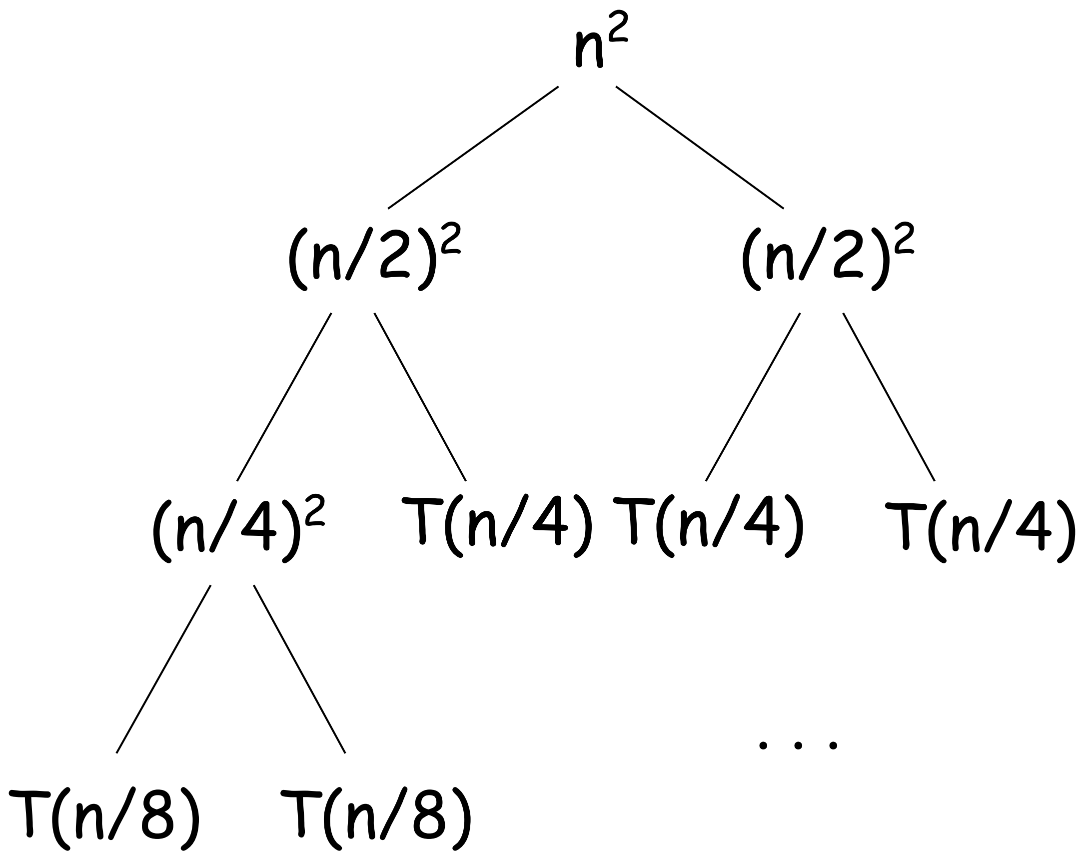
$$n^2$$

$$T(n/2) \qquad\qquad T(n/2)$$

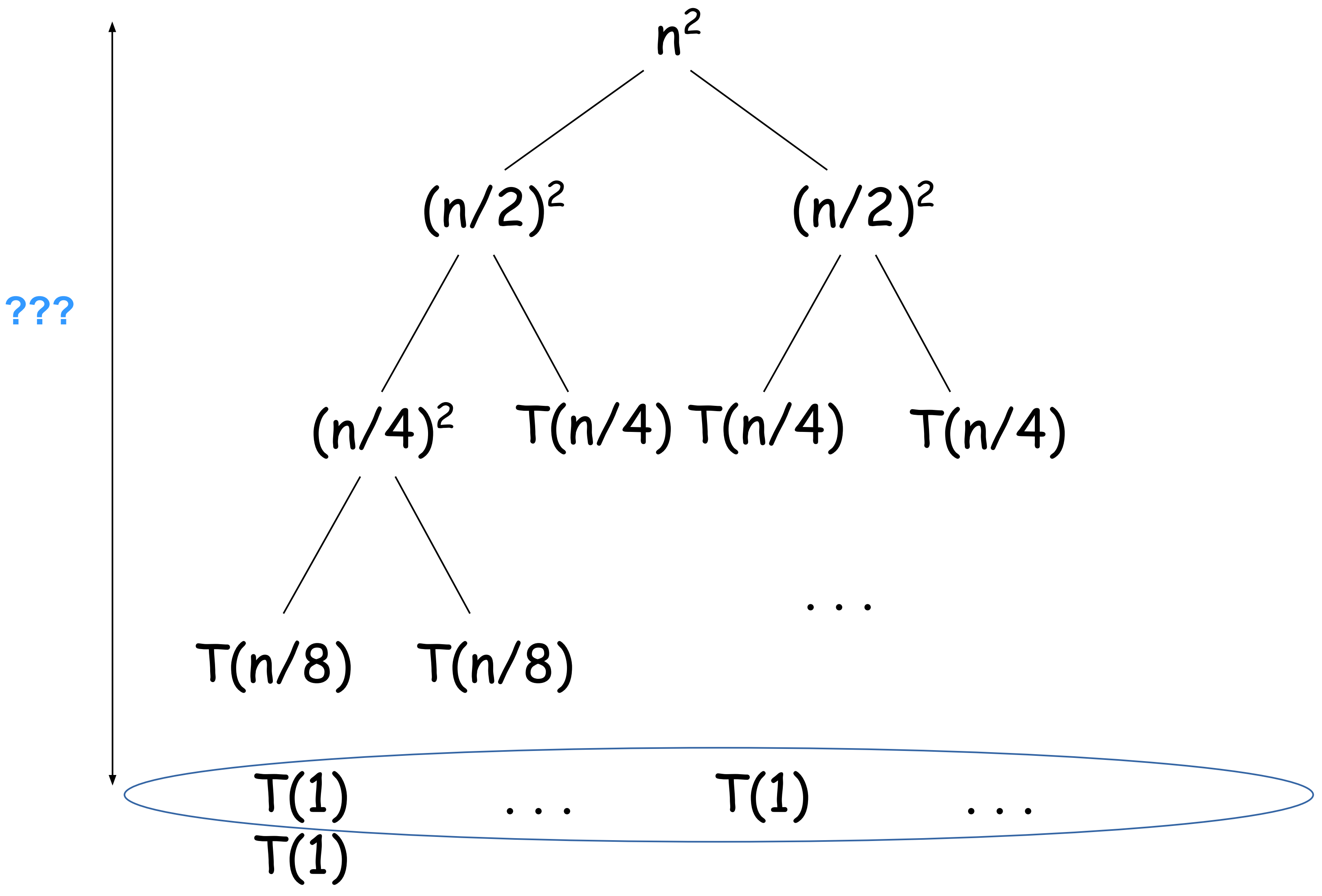
Recurrencias



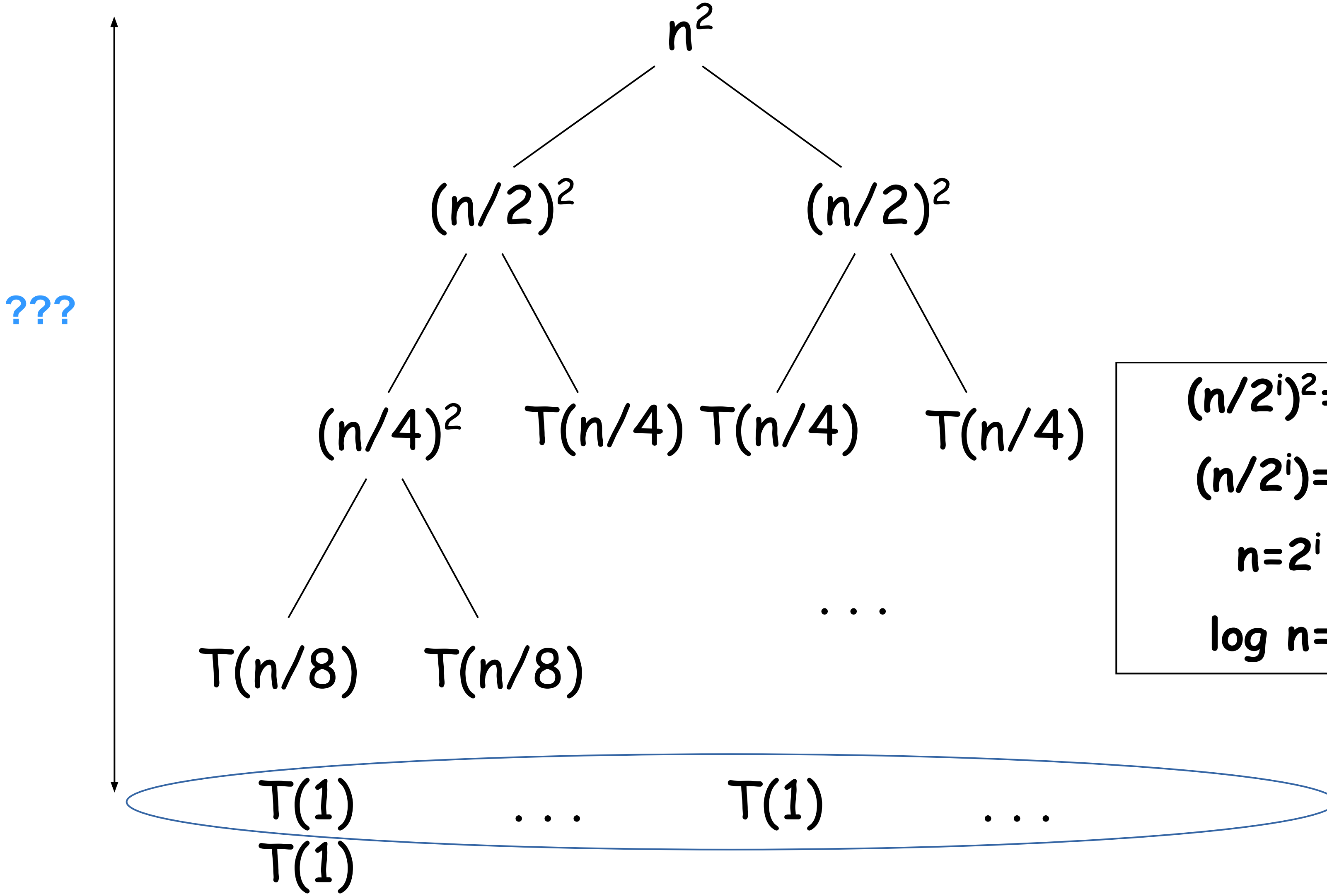
Recurrencias



Recurrencias

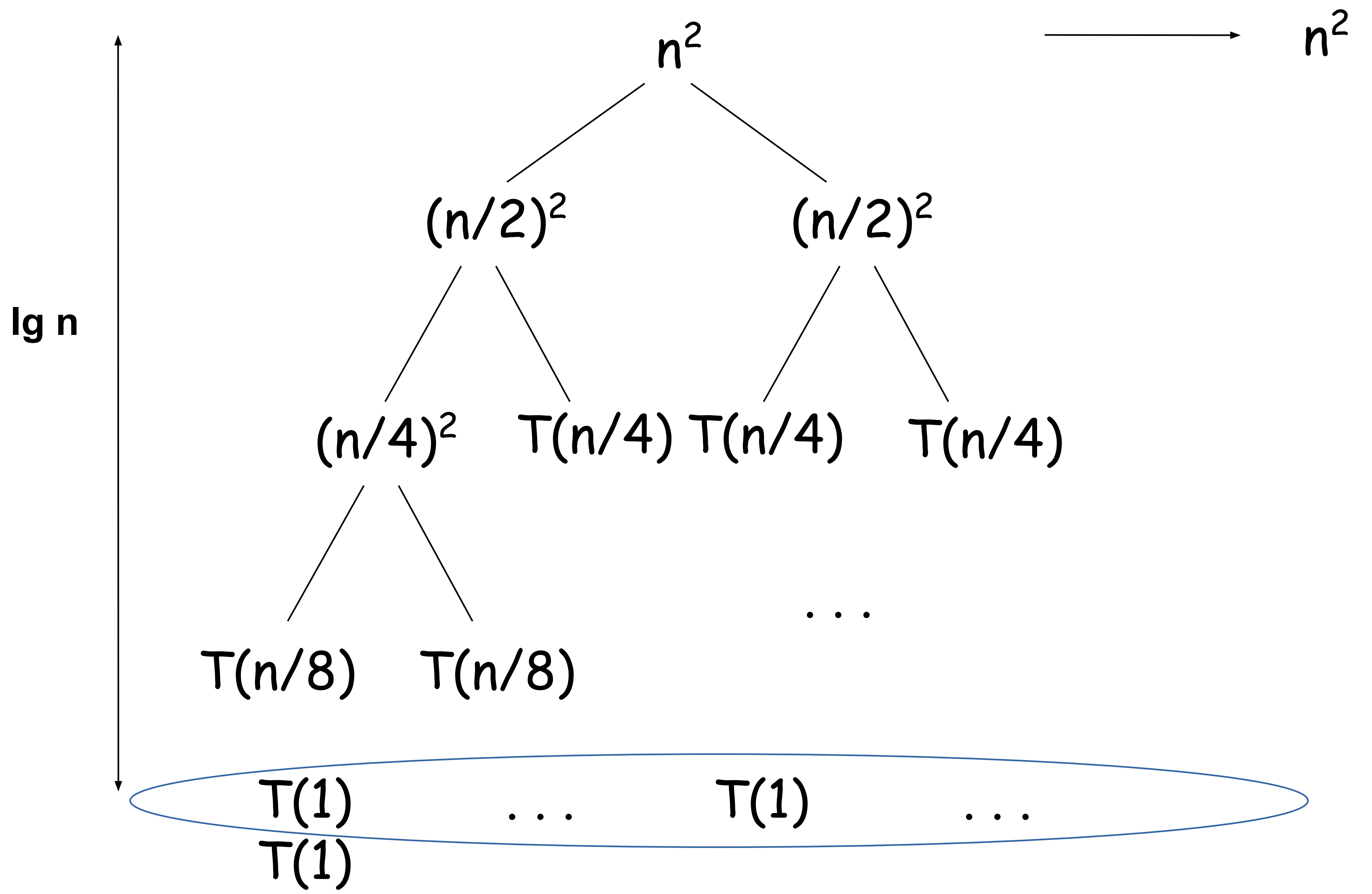


Recurrencias

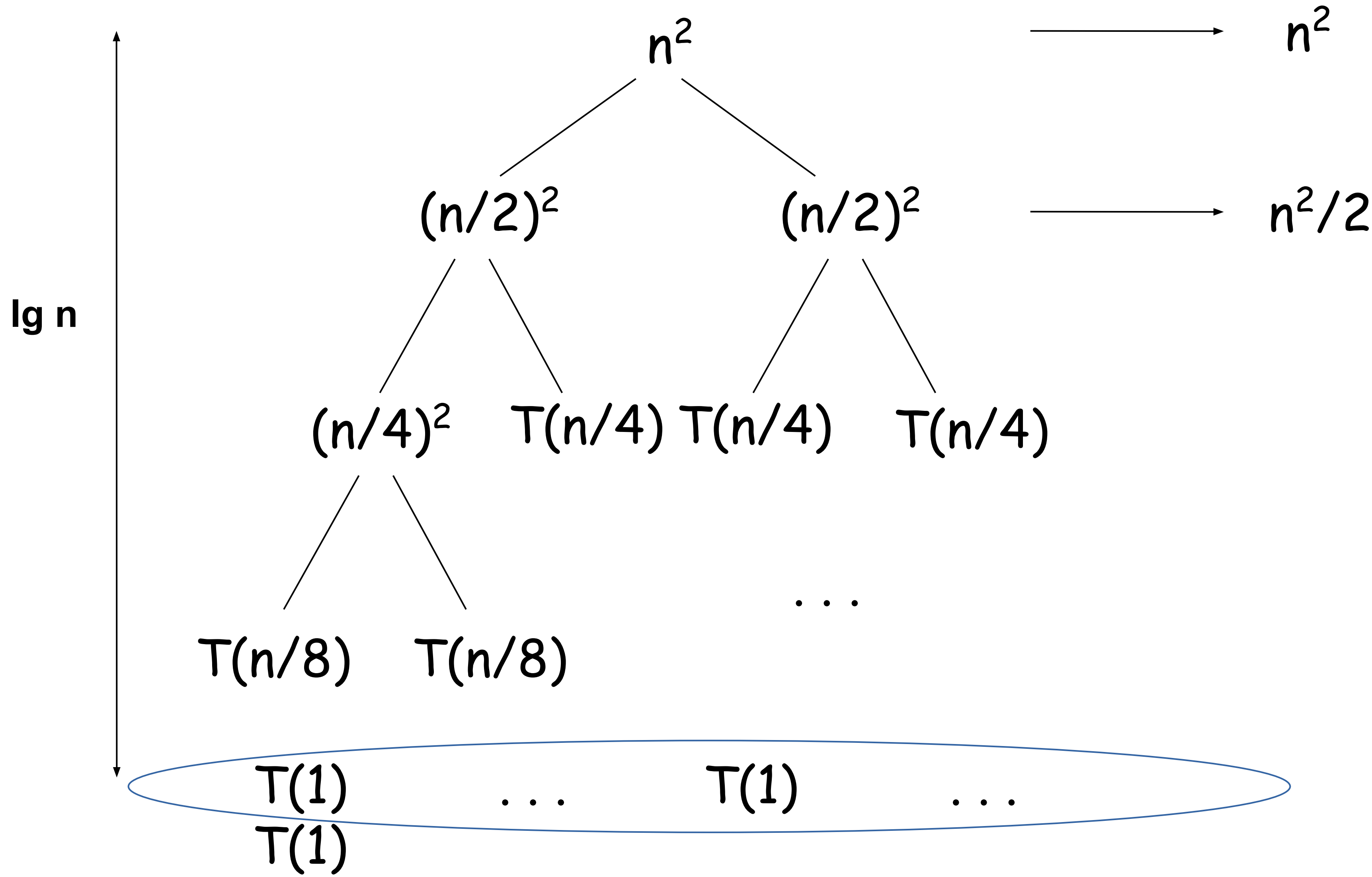


$$(n/2^i)^2=1$$
$$(n/2^i)=1$$
$$n=2^i$$
$$\log n=i$$

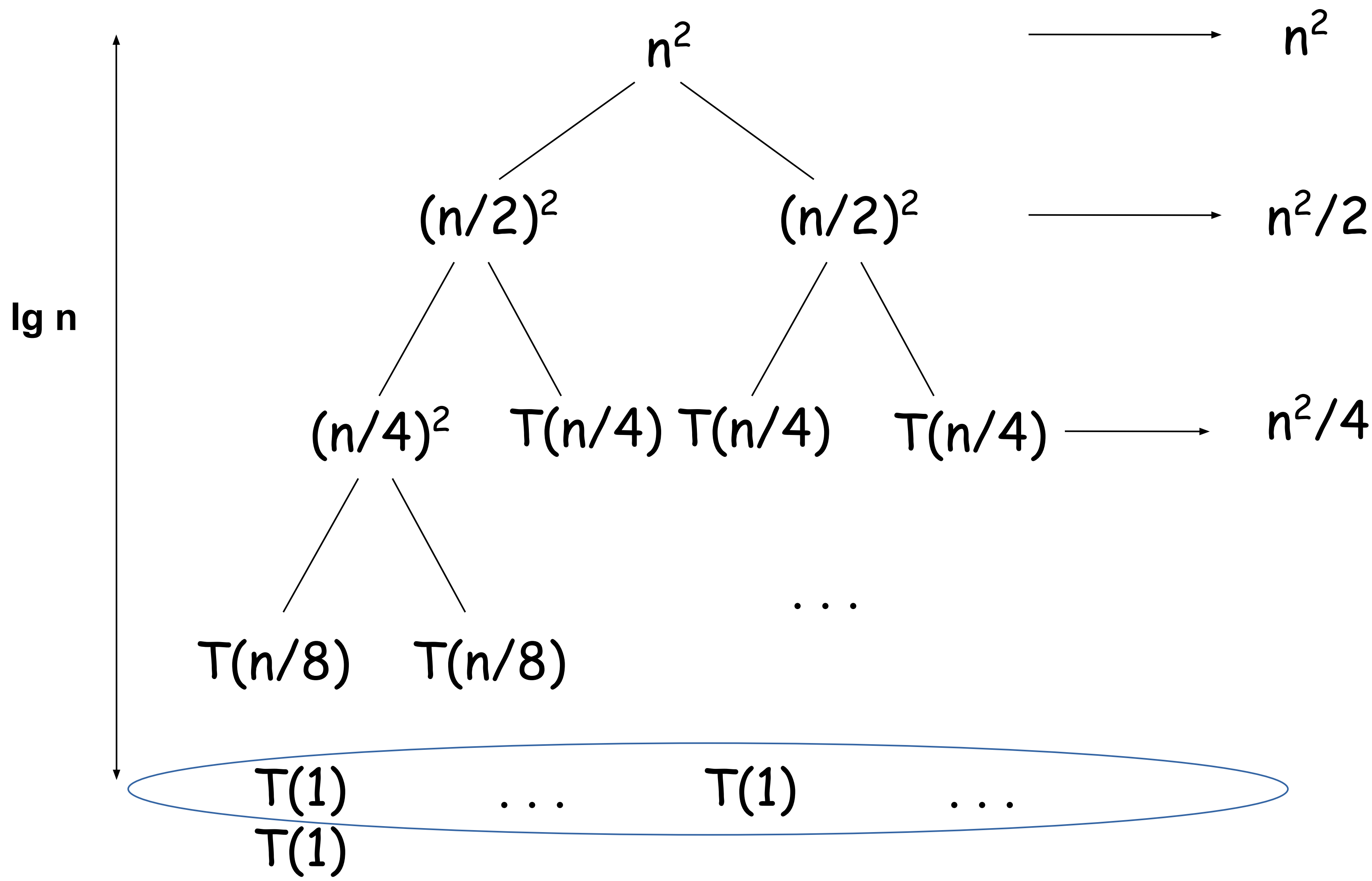
Recurrencias



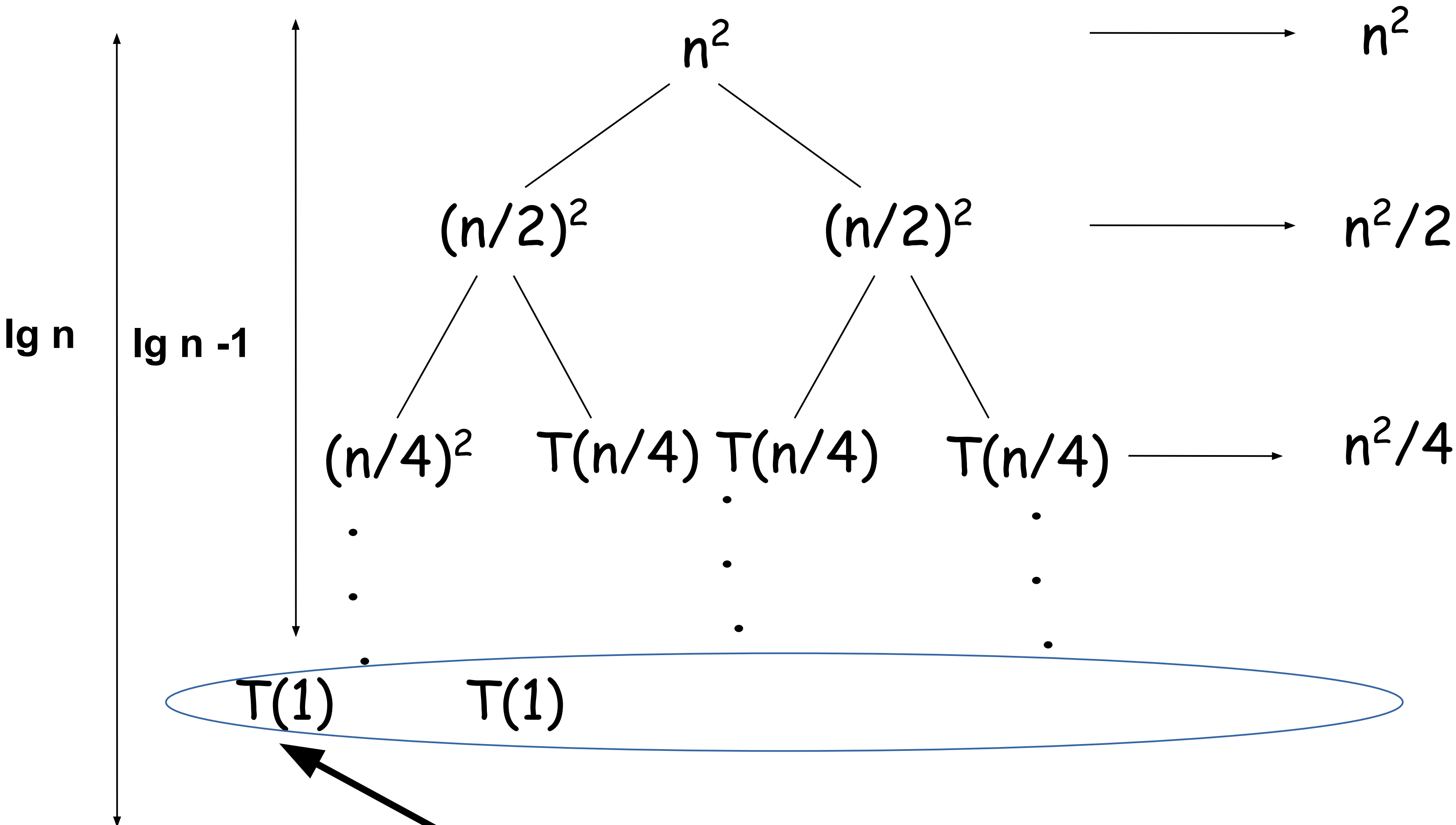
Recurrencias



Recurrencias

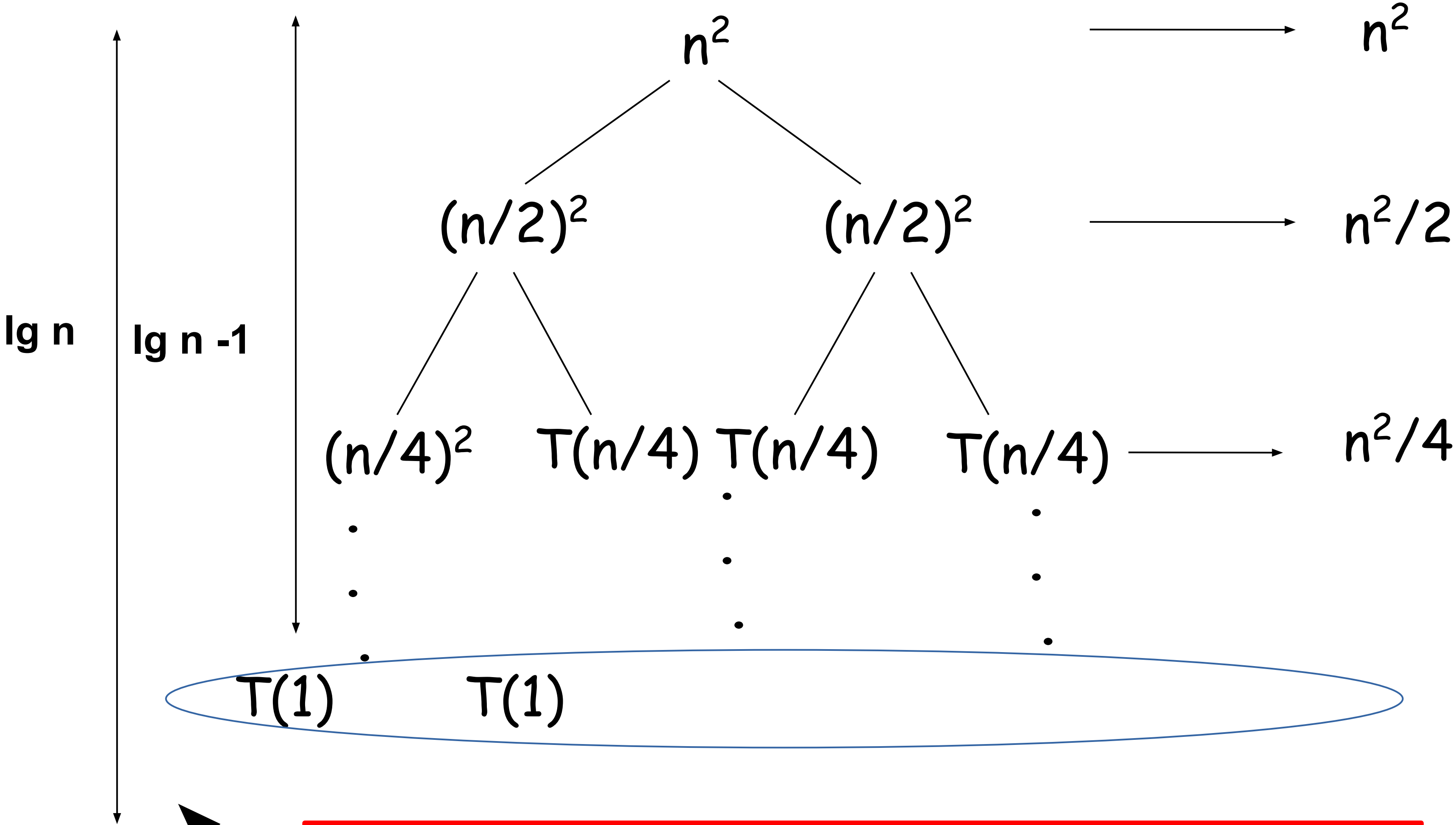


Recurrencias



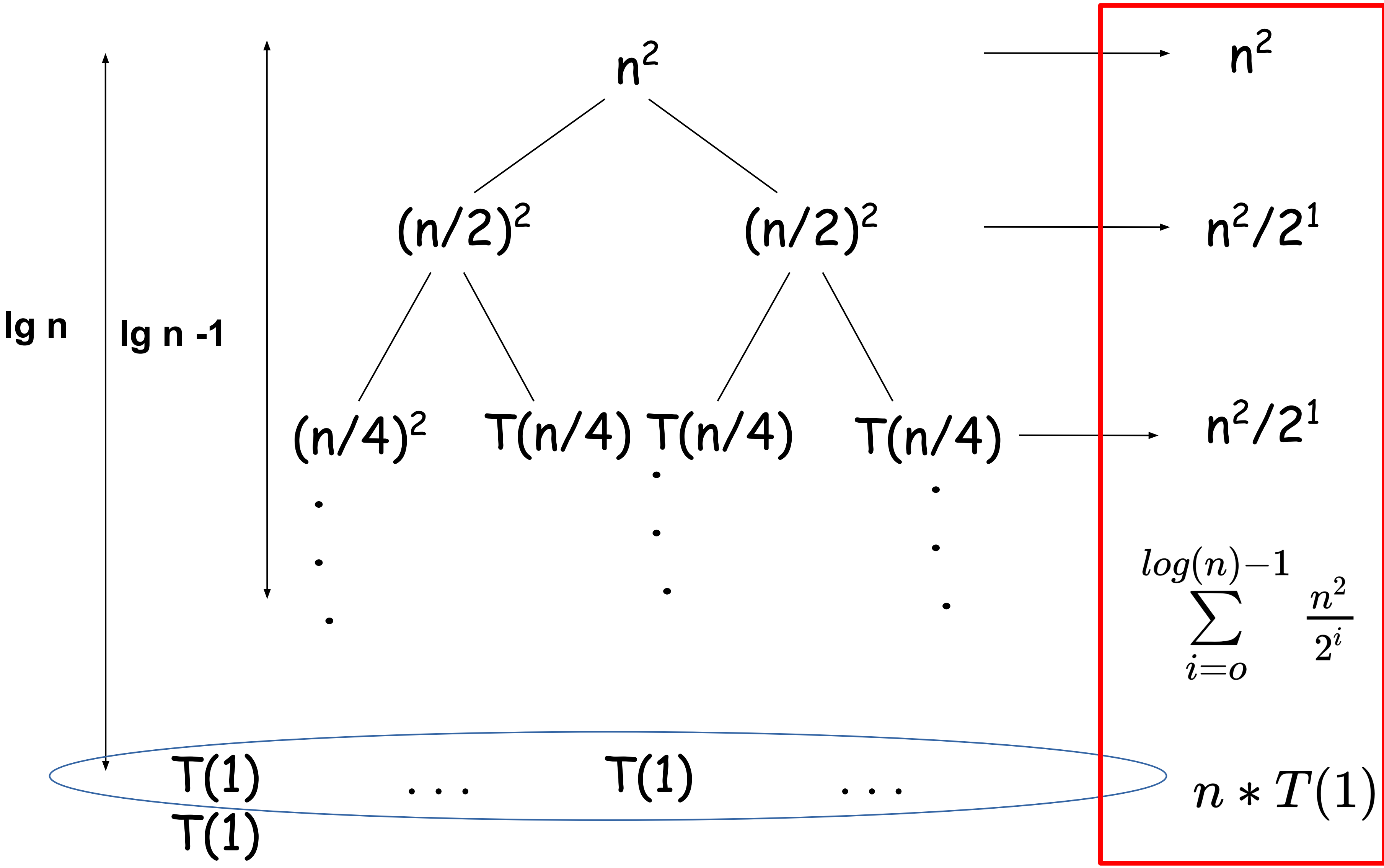
¿Cuantas hojas T(1) tenemos?

Recurrencias



Si recuerda en un árbol m-ario se tienen máximo m^h. En este caso al ser arbol binario m=2, tenemos $2^{\log(n)}$ hojas. Por lo tanto se

Recurrencias



Recurrencias

$$T(n) = n * T(1) + \sum_{i=o}^{log(n)-1} \frac{n^2}{2^i}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{0.5^{log(n)} - 1}{0.5 - 1}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{n^{log(0.5)} - 1}{-0.5}$$

$$T(n) = n * c + n^2 \frac{n^{-1} - 1}{-0.5}$$

$$T(n) = n * c - \frac{n}{0.5} + \frac{n^2}{0.5} = O(n^2)$$

Recurrencias

Resuelva construyendo el árbol

$T(n) = 2T(n/2) + 1$, $T(1) = \Theta(1)$

$T(n) = 2T(n/2) + n$, $T(1) = \Theta(1)$

Recurrencias

Resuelva la recurrencia $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$

Indique una cota superior y una inferior

Recurrencias

Método maestro

Permite resolver recurrencias de la forma:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$, donde $a \geq 1$, $b > 1$

Recurrencias

Dado T(n) = aT(n/b) + f(n), donde a≥1, b>1, se puede acotar asintóticamente como sigue:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Si $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$

2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$

Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ para algún $\varepsilon > 0$

3. $T(n) = \Theta(f(n))$

Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ si a*f(n/b) ≤c*f(n)

para algun c<1

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $n = O(n^{2-\varepsilon})$?

Recurrencias

Dado T(n) = 9T(n/3) + n

$$n^{\log_3 9} = n^2 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $n = O(n^{2-\varepsilon})$?

Si $\varepsilon = 1$ se cumple que $n = O(n)$, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Recurrencias

T(n) = T(2n/3) + 1

$$n^{\log_{3/2}1} = n^0 = 1 \quad \textbf{Vs} \quad f(n) = 1$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $1 = O(n^{0-\varepsilon})$?

No existe $\varepsilon > 0$

Recurrencias

T(n) = T(2n/3) + 1

$$n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \quad \text{vs} \quad f(n) = 1$$

Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$?

Es $1 = \Theta(1)$?

Si, por lo tanto, se cumple que:

$$T(n) = \Theta(1 * \lg n) = \Theta(\lg n)$$

Recurrencias

T(n) =3 T(n/4) + nlgn

$$n^{\log_4 3} = n^{0.793} \quad \text{vs} \quad f(n) = n\lg n$$

Es $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$?

Es $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$?

Es $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$?

Si, y además, $af(n/b) \leq cf(n)$

$3(n/4)\lg(n/4) \leq cn\lg n$

$3(n/4)\lg n - 3(n/4)*2 \leq cn\lg n$

$(3/4)n\lg n \leq cn\lg n \rightarrow c=3/4$ y se concluye que $T(n) = \Theta(n\lg n)$

Recurrencias

$T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

Muestre que no se puede resolver por el método maestro

Recurrencias

Resuelva usando método del maestro

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

Recurrencias

Método de sustitución

Suponer la forma de la solución y probar por inducción matemática

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Suponer que la solución es de la forma $T(n)=O(n\lg n)$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Se supone que se cumple para $n/2$ y se prueba para n

Hipotesis inductiva: $T(n/2) \leq cn/2\lg(n/2)$

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n,\ T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Hipótesis inductiva: $T(n/2) \leq cn/2 \lg (n/2)$

Paso inductivo:

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 2(cn/2 \lg (n/2)) + n \\
&\leq cn \lg (n/2) + n \\
&= cn \lg (n) - cn + n, \text{ para } c \geq 1, \text{ haga } c=1 \\
&\leq cn \lg n
\end{aligned}
$$

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Paso base: si $c=1$, probar que $T(1)=1$ se cumple

$T(1) \leq 1*1\lg 1$?

$1 \leq 0$?

No, se debe escoger otro valor para c

Recurrencias

$T(n)=2T(\lfloor n/2 \rfloor)+n$, $T(1)=1$

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

Paso base: si $c=2$, probar que $T(1)=1$ se cumple

$T(1) \leq 2*1\lg 1$?

$1 \leq 0$?

No, se puede variar k.

Para esto, se calcula $T(2)$ y se toma como valor inicial

Recurrencias

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

$T(2)=2T(0)+2=4$

Paso base: si $c=1$, probar que $T(2)=4$ se cumple

$T(2) \leq 1*2\lg 2$?

$4 \leq 2$?

No, se puede variar c.

Recurrencias

Probar que $T(n) \leq cn\lg n$.

$T(2)=2T(0)+2=4$

Paso base: si $c=3$, probar que $T(2)=4$ se cumple

$T(2) \leq 3*2\lg 2$?

$4 \leq 6$?

Si, se termina la demostración

Recurrencias

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1,\ T(1)=O(1),\ T(2) = O(1)$

Suponer que la solución es de la forma $T(n)=O(2^n)$

Probar que $T(n)\leq c2^n$.

Se supone que se cumple para $n-1$ y se $n-2$ prueba para n

Hipotesis inductiva: $T(n-1) \leq c2^{(n-1)}$ y $T(n-2) \leq c2^{(n-2)}$

Recurrencias

$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+1,\ T(1)=O(1),\ T(2)=O(1)$

Ahora se debe probar que: $T(n) \leq c2^n$

$$T(1) \leq c2^1 \rightarrow 1 \leq 2*c$$

$$T(2) \leq c2^2 \rightarrow 1 \leq 4*c$$

$$T(3) \leq c2^3 \rightarrow 2 \leq 8*c$$

$$T(4) \leq c2^4 \rightarrow 3 \leq 16*c$$

$$T(5) \leq c2^5 \rightarrow 5 \leq 32*c$$

$$T(6) \leq c2^6 \rightarrow 8 \leq 64*c$$

$$T(7) \leq c2^7 \rightarrow 13 \leq 128*c$$

$$T(8) \leq c2^8 \rightarrow 21 \leq 256*c$$

Con $c=1$, se cumple.

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 4

Gracias

Próximo tema:

Divide y vencerás