Examen diagnóstico
Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Carlos Andres Delgado S, Msc
carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Marzo de 2023

1. Matemáticas discretas I

1. Sea A y B conjuntos con cardinalidad m y n respectivamente, responda:
   a) Valor de $|P(A)|$
   b) Valor de $|A \times B|$
   c) Máximo y mínimo valor de $|A \cup B|$, argumente.
2. Una función f_1 es $O(n^2)$ y otra es $\Omega(n^3)$ ¿Que quiere decir esto?
3. Demuestre directamente que si n y m son pares, entonces $10n^2 + 4m$ es par.
4. Resuelva la siguiente sumatoria:
$$\sum_{i=100}^{45000} (2i + 8)$$
5. Resuelva la siguiente sumatoria:
$$\sum_{i=-40}^{2n} \sum_{j=40}^{n^2} (2ij + 8j)$$
6. Demuestre por inducción matemática que:
$$\sum_{i=-3}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$
El paso base debe hacerlo con $n = 0$

2. Matemáticas discretas II

1. El problema subset-sum consiste en encontrar 3 números de un conjunto C cuya suma sea M ¿Cuantas posibilidades deben analizarse para encontrar todas las soluciones?
2. ¿Cuantas aristas tiene un grafo K_n con $n \geq 3$.? Demuestre usando el teorema de Handshaking.
3. Dado un grafo $W_{3,4}$, ¿Cómo es la matriz de adyacencia de este grafo?
4. Dado un grafo no dirigido con la siguiente matriz de adyacencia:

```
0 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 1
0 0 1 0 1 0
1 1 0 1 0 1
1 0 1 0 1 0
```

¿Cuantos caminos hay del nodo 1 al nodo 6?

3. Habilidades de programación

1. Dado un arreglo A de enteros positivos, diseñe un algoritmo para encontrar el mínimo en un tiempo máximo de $O(n)$.
2. Dado un arreglo A de enteros positivos, se define la máxima diferencia como dos elementos $a_i \in A$ y $a_j \in A$ con $i \neq j$ donde $|A_i - A_j|$ es máxima, diseñe un algoritmo para encontrar esta diferencia en un tiempo máximo de $O(n)$.

max min

$$\sum_{i=100}^{45000}(2i+8) = \sum_{i=100}^{45000} 2i + \sum_{i=100}^{45000} 8$$

$$= \sum_{i=1}^{45000} 2i - \sum_{i=1}^{99} 2i + \sum_{i=1}^{45000} 8 - \sum_{i=1}^{99} 8$$

$$\cancel{2}\left(\frac{45000(45001)}{\cancel{2}}\right) - \cancel{2}\left(\frac{99(100)}{\cancel{2}}\right) + 8\times 45000 - 8\times 99$$

$$\boxed{45000\,(45001) - 99(100) + 8\times 45000 - 8\times 99}$$

$$\sum_{i=-40}^{2n}\sum_{j=40}^{n^2}(2ij+8j)$$

$$\sum_{i=-40}^{2n}\left(\sum_{j=1}^{n^2}(2i+8)j - \sum_{j=1}^{39}(2i+8)j\right)$$

$$\sum_{i=-40}^{2n}(2i+8)\underbrace{\left(\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right) - \frac{39(40)}{2}\right)}_{\text{cte}}$$

$$\underbrace{\left(\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right) - \frac{39(40)}{2}\right)}_{\times}\sum_{i=-40}^{2n}(2i+8)$$

$$\times\left(\sum_{i=-40}^{2n} 2i + \sum_{i=-40}^{2n} 8\right)$$

$$i = \{-40, -39, -38, -37, \dots 0, 1, 2, \dots 2n\}$$

$$2\sum_{i=-40}^{2n} i = 2(-40-39-38-37 \dots -1+0+1+2 \dots +2n)$$

$$-(40+39+38+\dots+1)$$

$$2\left(-\sum_{i=1}^{40} i + 0 + \sum_{i=1}^{2n} i\right)$$

$$2\left(-\frac{40(41)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2}\right)$$

$$\sum_{i=-40}^{2n} 8$$

$$i = -40, -39, -38, \dots -1, 0, 1, \dots 2n$$

$$8+8+8 \dots +8+8+8+\dots+8$$

$$\sum_{i=1}^{40} 8 + \underset{i=0}{8} + \sum_{i=1}^{2n} 8$$

$$8(40) + 8 + 8(2n)$$

$$8(2n+41)$$

$$\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right) - \frac{39(40)}{2}\Bigg)\left(-40\times41) + 2n(2n+1) + 8(2n+41)\right)$$

$$\sum_{i=-3}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$

$P(0)$ $\quad (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 \quad 14 = 14$

$9 + 4 + 1 + 0 = 14$

$P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$$\sum_{i=-3}^{n+1} i^2 = \sum_{i=-3}^{n} i^2 + \sum_{i=n+1}^{n+1} i^2$$

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = \sum_{i=3}^{5} i^2 + \sum_{i=6}^{8} i^2$$

$$\boxed{\sum_{i=-3}^{n} i^2} + (n+1)^2$$

$P(n)$

$n = n+1$

$$\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \boxed{\frac{n+1}{6}} + 14$$

$P(n) + (n+1)^2$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14 + (n+1)^2$$

$$\cancel{\frac{n^3}{3}} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14 + \cancel{n^2} + 2n + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$\frac{3n^2}{3} \quad \frac{3n + n}{3}$

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 \quad 3n + 1$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{3n}{3} + \frac{3n^2}{3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} = \boxed{\frac{(n+1)^3}{3}}$$

$$\cancel{\frac{n^2}{2}} + \frac{n}{6} + 14 + \cancel{\frac{2n}{2}} + \frac{2}{3} \qquad 13 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$$\frac{n^2}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{1}{2} = n^2 + 2n + 1$$

$$\frac{(n^2 + 2n + 1)}{2} = \boxed{\frac{(n+1)^2}{2}}$$

$$13 + \frac{1}{2} + \frac{3}{6}$$

$$\frac{n}{6} + 13 + \frac{1}{2} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$$

$$13 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 14$$

$$\frac{n}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{(n+1)}{6}}$$

Ayudas

Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{(n+1)} - a}{r-1} \text{ Si } r \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} ar^k = (n+1)a \text{ Si } r = 1$$

Potencias y logaritmos

- $a^{log_b(n)} = n^{log_b(a)}$
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- $\frac{a^i}{b^i} = (\frac{a}{b})^i$
- $log_a(b) = \frac{log_c(a)}{log_c(b)}$

Formulas solución método del maestro

Aplica para R.R de la forma $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$

- Si $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ entonces $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ entonces $T(n) = \Theta(log(n) * n^{log_b a})$
- Si $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ y existe un $c < 1$ tal que $af(\frac{n}{b}) <= cf(n)$ entonces $T(n) = \Theta(f(n))$.