# Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

## Programación dinámica

# El problema de la mochila 0/1

# Programación dinámica

Se tienen N objetos y una mochila de capacidad (de peso) M, cada objeto tiene un peso $w_i$, $1 \leq i \leq N$. Cada objeto puede estar, o no, en la mochila. Ademas, se tiene un beneficio $b_i$ por cada objeto

El problema consiste en maximizar el beneficio. La solución se representa indicando para cada objeto si se debe colocar o no en la mochila

# Programación dinámica

Se tienen N objetos y una mochila de capacidad (de peso) M, cada objeto tiene un peso $w_i$, $1 \le i \le N$. Cada objeto puede estar, o no, en la mochila. Además, se tiene un beneficio $b_i$ por cada objeto

De manera formal, el problema consiste en encontrar $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que:

$$\sum_{1 \le i \le N} b_i x_i \text{ sea máximo, sujeto a}$$

$$\sum_{1 \le i \le N} w_i x_i \le M$$

$x_i \in \{0,1\}$, donde 0 significa que el objeto i no se coloca en la mochila y 1 que si

# Programación dinámica

Se tienen N objetos y una mochila de capacidad (de peso) M, cada objeto tiene un peso $w_i$, $1 \leq i \leq N$. Cada objeto puede estar, o no, en la mochila. Además, se tiene un beneficio $b_i$ por cada objeto

De manera formal, el problema consiste en encontrar $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ tal que:

$$\sum_{1 \leq i \leq N} b_i x_i \text{ sea máximo, sujeto a}$$

Problema mochila(1, N, M)

$$\sum_{1 \leq i \leq N} w_i x_i \leq M$$

$x_i \in \{0,1\}$, donde 0 significa que el objeto i no se coloca en la mochila y 1 que si

# Programación dinámica

N=3, M=9, b=<10,6,8>, w=<3,4,5>

<1,0,1> es una solución que indica colocar en la mochila los objetos 1 y 3, esto implica un beneficio de 18

<1,1,0> es una solución que indica colocar en la mochila los objetos 1 y 2, esto implica un beneficio de 16

<0,1,1> es una solución que indica colocar en la mochila los objetos 2 y 3, esto implica un beneficio de 14

<1,0,0>, <0,1,0>, <0,0,1>

Debido a los pesos no se pueden colocar todos los objetos en la mochila

# Programación dinámica

N=3, M=9, b=<10,6,8>, w=<7,4,5>

Muestre soluciones indicando el beneficio

⟨1, 0, 0⟩   w = 7   b = 10

⟨0, 1, 0⟩   w = 4   b = 6

⟨0, 0, 1⟩   w = 5   b = 8

→ ⟨0, 1, 1⟩   w = 9   b = 14

# Programación dinámica

N=3, M=9, b=<10,6,8>, w=<7,4,5>

<1,0,0>: beneficio 10

<0,1,0>: beneficio 6

<0,0,1>: beneficio 8

<0,1,1>: beneficio 14

Solución óptima: <0,1,1>

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Muestre todas las soluciones indicando el beneficio.
Presente la solución óptima

<1,0,0,0> b=3 w=7

<0,1,0,0> b=2 w=5

<0,0,1,0> b=1 w=6

<0,0,0,1> b=4 w=8

<0,1,0,1> b=6 w=13

<1,1,1,0> b=6 w=18

<1,1,0,1> b=9 w=20

<1,1,0,0> w=12 b=5

<1,0,1,0> w=13 b=4

<1,0,0,1> w=15 b=7

<0,1,1,0> w=11 b=3

<0,0,1,1> w=14 b=5

<0,1,1,1> w=19 b=7

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

<1,1,1,0> W=18, B=6

<0,1,1,1> W=19, B=7

<1,0,1,1> W=21 X

<1,1,0,1> W=20, B=9

# Programación dinámica

$N=4$, $M=20$, $b=\langle 3,2,1,4\rangle$, $w=\langle 7,5,6,8\rangle$

Considere la solución óptima $\langle 1,1,0,1\rangle$

Encuentre subproblemas y soluciones óptimas a esos subproblemas (utilice la notación mochila(L,N,M) para indicar el problema de la mochila utilizando de L a N elementos y una capacidad M)

# Programación dinámica

Problema: encontrar $\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l \rangle$ tal que:

$$\sum_{k \le i \le l} b_i x_i$$ sea máximo, sujeto a

$$\sum_{k \le i \le l} w_i x_i \le P$$

Problema mochila(k, l, P)

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20) ...

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20)

entonces <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,20-8)

mochila(1,3,12) es el problema de colocar los elementos 1, 2 y 3 en la mochila de capacidad 12

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20)

entonces <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,20-8)

Si <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,12)

entonces <1,1> es una solución óptima de mochila(1,2,12)

Un 0 en la solución óptima significa que el elemento no se coloca en la mochila. Note que no se disminuye la capacidad de la mochila

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Si <1,1,0,1> es una solución óptima de mochila(1,4,20)

entonces <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,20-8)

Si <1,1,0> es una solución óptima de mochila(1,3,12)

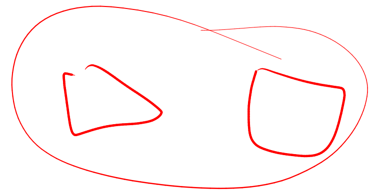
entonces <1,1> es una solución óptima de mochila(1,2,12)

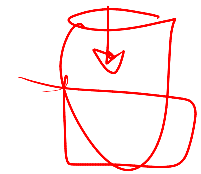
Si <1,1> es una solución óptima de mochila(1,2,12)

entonces <1> es una solución óptima de mochila(1,1,12-5)

# Programación dinámica

En términos generales se tiene que, sea $\langle y_1, y_2,\ldots,y_N\rangle$ una secuencia óptima para $\langle x_1,x_2,\ldots x_N\rangle$, dada una mochila de capacidad M, entonces:





- Si $y_N$=0 entonces $\langle y_1,\ldots,y_{N-1}\rangle$ es una secuencia óptima para mochila(1,N-1, M)

- Si $y_N$=1 entonces $\langle y_1,\ldots,y_{N-1}\rangle$ es una secuencia óptima para mochila(1,N-1, M-$w_N$)

# Programación dinámica

Si $\langle y_1, y_2,\ldots,y_N\rangle$ una secuencia óptima para mochila(1,N,M) entonces $\langle y_1, y_2,\ldots,y_i\rangle$ y $\langle y_{i+1}, y_{i+2},\ldots,y_N\rangle$ son soluciones optimas a los problemas:

$$mochila(1, j, \sum_{1\le i\le j} w_i x_i) \qquad y \qquad mochila(j+1, N, M - \sum_{1\le i\le j} w_i x_i)$$

NO VA

SI VA

# Programación dinámica

Sea $g_j(M)$ el valor de la solución óptima de mochila(1,j,M), por la subestructura óptima, se puede decir que:

$g_j(M)=max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$g_0(M)=0$

esto es, seleccionar el máximo entre los beneficios de 1) no colocar el elemento j en la mochila y 2) colocar j en la mochila, se debe entonces colocar el beneficio $b_j$ y disminuir el peso máximo de la mochila, que ahora será $M-w_j$

# Programación dinámica

El valor de $g_N(M)$ se expresa en términos de
$g_{N-1}(M)$ y $g_{N-1}(M-w_N)$

El valor de $g_{N-1}(M)$ se expresa en términos de
$g_{N-2}(M)$, $g_{N-2}(M-w_{N-2})$ y $g_{N-2}(M-w_{N-2}-w_{N-1})$

hasta llegar a $g_0(M)$ que vale 0

# Programación dinámica

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

1, 1, 0 1

mochila(1,4,20) tiene valor $g_4(20)$, donde:

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20) = \max(\cancel{g_2(20)}, g_2(14)+1)$ 5

$g_3(12) = \max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(20) = \max(\cancel{g_1(20)}, \cancel{g_1(15)}+2)$ 3 3 5

$g_1(18) = \max(\cancel{g_0(18)}, \cancel{g_0(8)}+3)$ 0 0

$g_2(14) = \max(g_1(14), g_1(9)+2)$

$g_2(12) = \max(g_1(12), g_1(7)+2)$

$g_2(6) = \max(g_1(6), g_1(1)+2)$

$g_1(20) = \max(\cancel{g_0(20)}, \cancel{g_0(13)}+3)$ 0 0 3

$$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$

# Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$$

$$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$$

$$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$$

$$b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle$$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20),\ g_0(13)+3)$

$g_1(15)=\max(g_0(15),\ g_0(8)+3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20),\ g_0(13)+3)$

$g_1(20)=\max(0,3)$

$g_1(15)=\max(g_0(15),\ g_0(8)+3)$

$g_1(15)=\max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$
$=5$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20),\ g_0(13)+3)$

$g_1(20)=3$

$g_1(15)=\max(g_0(15),\ g_0(8)+3)$

$g_1(15)=\max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20), g_1(15)+2)$
$=5$

$g_2(14)=\max(g_1(14), g_1(9)+2)$

$g_1(20)=\max(g_0(20), g_0(13)+3)$

$g_1(20)=3$

$g_1(15)=\max(g_0(15), g_0(8)+3)$

$g_1(15)=\max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$
$=5$

$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$

$g_1(14)=\max(g_0(14),\ g_0(7)+3)$

$g_1(14)=3$

$g_1(9)=\max(g_0(9),\ g_0(2)+3)$

$g_1(9)=3$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$g_2(20)=\max(g_1(20),\ g_1(15)+2)$$
$$=5$$

$$g_2(14)=\max(g_1(14),\ g_1(9)+2)$$
$$=\max(3,5)=5$$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$$
$$=\max(5,6)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$$

$$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$$

# Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$$
$$=\max(5,6)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$$

$$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$$

$$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$$

$$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$

$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$

$g_1(12)=\max(g_0(12),\ g_0(5)+3)$

$g_1(7)=\max(g_0(7),\ g_0(0)+3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12), g_1(7)+2)$

$g_2(6)=\max(g_1(6), g_1(1)+2)$

$g_1(12)=\max(g_0(12), g_0(5)+3)$
$=\max(0,3)$

$g_1(7)=\max(g_0(7), g_0(0)+3)$
$=\max(0,3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$

$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20), g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12), g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12), g_1(7)+2)$
$=\max(3,5)$

$g_2(6)=\max(g_1(6), g_1(1)+2)$

$g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)$

$b=\langle 3,2,1,4 \rangle$, $w=\langle 7,5,6,8 \rangle$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$
$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$
$=\max(3,5)$

$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$

$g_1(6)=0$
(no cabe)

$g_1(1)=0$
(no cabe)

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$$

$$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$$
$$=\max(5,6)$$

$$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$$

$$g_2(12)=\max(g_1(12),\ g_1(7)+2)$$
$$=\max(3,5)$$

$$g_2(6)=\max(g_1(6),\ g_1(1)+2)$$
$$=\max(0,2)$$

$$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$$

$$\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20),\ g_3(12)+4)$

$g_3(20)=\max(g_2(20),\ g_2(14)+1$

$=\max(5,6)$

$g_3(12)=\max(g_2(12),\ g_2(6)+1)$

$=\max(5,\ 3)$

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M),\ g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle,\ w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

$g_4(20)=\max(g_3(20), g_3(12)+4)$

$=\max(6,9)$

$=9$

9 es el valor óptimo

$\boxed{g_j(M)=\max(g_{j-1}(M), g_{j-1}(M-w_j)+b_j)}$ $\boxed{b=\langle 3,2,1,4\rangle, w=\langle 7,5,6,8\rangle}$

# Programación dinámica

Construir una matriz BMAX de dimensiones MXN de forma que BMAX[i,j] contenga el beneficio máximo que se puede obtener si la capacidad de I y se cuenta con los primeros J elementos

cap elementos

$$\mathrm{BMAX}(I,1) = \begin{cases} B(1) \text{ si } I \geq W(1) \\ 0 \text{ si } I < W(1) \end{cases}$$

No llevar

$$\mathrm{BMAX}(I,J) = \mathrm{MAX}(\ \mathrm{BMAX}(I,J-1),$$
$$\mathrm{BMAX}(I-W(J),\ j-1) + B(J)\ )$$

llevar

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

$$BMAX(I,1)=\begin{cases} B(1) \text{ si } I \geq W(1) \\ 0 \text{ si } I < W(1) \end{cases}$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | |
| 2 | 0 | | | |
| 3 | 0 | | | |
| 4 | 0 | | | |
| 5 | 0 | | | |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

Capacidades de la mochila

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | |
| 2 | 0 | | | |
| 3 | 0 | | | |
| 4 | 0 | | | |
| 5 | 0 | | | |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

B(1,2)

max ( B(1,1)

B(1-5

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(1,2)=MAX(BMAX(1,1), 5

BMAX(1-W(2), 1) + B(2) )

No cabe en la mochila, el elemento menos pesado es el 2 que pesa 5

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | | |
| 2 | 0 | | | |
| 3 | 0 | | | |
| 4 | 0 | | | |
| 5 | 0 | | | |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(5,2)=???

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | | | |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(5,2)=MAX(BMAX(5,1),
BMAX(5-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 0,
BMAX(0, 1) + 2 )

=MAX(0,2)=2

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | | |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(5,3)=MAX(BMAX(5,2),

BMAX(5-W(3), 1) + B(3) )

como 3 no cabe, el máximo sigue

siendo BMAX(5,2)=2

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(5,4)=MAX(BMAX(5,3),

BMAX(5-W(4), 1) + B(4) )

como 4 no cabe, el máximo sigue

siendo BMAX(5,3)=2

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | | | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(6,2)=MAX(BMAX(6,1),

BMAX(6-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 0,

BMAX(1, 1) + 2 )

=2

B[6,2] → B[6,1] = 0 ; B[1,1]+2 (B[1,1] = 0)

B[6,3] → B[6,2] = 2 ; B[0,2] +1 (B[0,2] = 0)

*donde BMAX(1,1) ya se conoce*

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(6,3)=MAX(BMAX(6,2),

BMAX(6-W(3), 2) + B(3) )

=MAX( 2,

BMAX(0, 1) + 1 )

=2

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | |
| 7 | 3 | | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(7,2)=MAX(BMAX(7,1),

BMAX(7-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 3,

BMAX(2,1) + 2 )

=MAX( 3, 2) = 3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | | |
| 8 | 3 | | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(8,2)=MAX(BMAX(8,1),
BMAX(8-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 3,
BMAX(3,1) + 2 )

=MAX( 3, 2) = 3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | | |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(8,4)=MAX(BMAX(8,3),

BMAX(8-W(4), 1) + B(4) )

=MAX( 3,

BMAX(0,1) + 4 )

0

=MAX( 3, 4) = 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 9 | 3 | | | |
| 10 | 3 | | | |
| 11 | 3 | | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),
BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(8,4)=MAX(BMAX(8,3),
BMAX(8-W(4), 1) + B(4) )
=MAX( 3,
BMAX(0,1) + 4 )
=MAX( 3, 4) = 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 9 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 10 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 11 | 3 | 3 | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(11,2)=MAX(BMAX(11,1),

BMAX(11-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 3,

BMAX(6,1) + 2 )

=MAX( 3, 2) = 3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 9 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 10 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 11 | 3 | 3 | | |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(11,3)=MAX(BMAX(11,2),

BMAX(11-W(3), 2) + B(3) )

=MAX( 3,

2 1

BMAX(5,2) + $\cancel{2}$ )

=MAX( 3, 4) = 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 9 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 10 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 11 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 12 | 3 | | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

El 4 se obtiene entonces por <0,1,1,0>

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(12,2)=MAX(BMAX(12,1),

BMAX(12-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 3,

BMAX(7,2) + 2 )

=MAX( 3, 5) = 5

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 9 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 10 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 11 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 12 | 3 | 5 | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

Se continua el proceso, al final se tendrá el valor optimo

N=4, M=20, b=<3,2,1,4>, w=<7,5,6,8>

Se crea una matriz de 20x4

BMAX(I,J)=MAX(BMAX(I,J-1),

BMAX(I-W(J), j-1) + B(J) )

BMAX(12,2)=MAX(BMAX(12,1),

BMAX(12-W(2), 1) + B(2) )

=MAX( 3,

BMAX(7,2) + 2 )

=MAX( 3, 5) = 5

Para obtener la respuesta se guardan los valores de j con los que se obtiene el valor máximo

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | X | X | X |
| 2 | 0 | X | X | X |
| 3 | 0 | X | X | X |
| 4 | 0 | X | X | X |
| 5 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 6 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| 9 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 10 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 11 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 12 | 3 | 5 | | |
| 13 | 3 | | | |
| 14 | 3 | | | |
| 15 | 3 | | | |
| 16 | 3 | | | |
| 17 | 3 | | | |
| 18 | 3 | | | |
| 19 | 3 | | | |
| 20 | 3 | | | |

$w = \langle 7, 5, 6, 8 \rangle$ $\quad$ $v = \langle 3, 2, 1, 4 \rangle$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\\17\\18\\19\\20 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccc}
0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 2. & 2. & 2. \\
0. & 0. & 2. & 2. & 2. \\
0. & 3. & 3. & 3. & 3. \\
0. & 3. & 3. & 3. & 4. \\
0. & 3. & 3. & 3. & 4. \\
0. & 3. & 3. & 3. & 4. \\
0. & 3. & 3. & 3. & 4. \\
0. & 3. & 5. & 5. & 5. \\
0. & 3. & 5. & 5. & 6. \\
0. & 3. & 5. & 5. & 6. \\
0. & 3. & 5. & 5. & 7. \\
0. & 3. & 5. & 5. & 7. \\
0. & 3. & 5. & 5. & 7. \\
0. & 3. & 5. & 6. & 7. \\
0. & 3. & 5. & 6. & 7. \\
0. & 3. & 5. & 6. & 9.
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$2 + 1 = 3$

$5 + 4$

$\langle 1, 1, 0, 1 \rangle$

6