Examen diagnóstico
Análisis y diseño de algoritmos

Carlos Andres Delgado S, Msc
carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co

Agosto de 2023

1. Inducción matemática

1. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=-3}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$

2. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=0}^{n}(8i^2 + \frac{3}{6}) = \frac{(n+1)(8n(2n+1)+3)}{6}$$

3. Demostrar por inducción matemática que 1 + $2^n < 3^n$ para $n \in Z^+$.

4. Demuestre por inducción matemática, que si un conjunto A tiene n elementos,entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos.

2. Sumatorias

1. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=100}^{45000}(2i+8)$$

2. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-40}^{2n}\sum_{j=40}^{n^2}(2ij+8j)$$

3. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuelvala $4+6+8+10+12+14+16+\ldots\}$ el indice i arranca desde 1 hasta n. Pista la suma en $i=20$ da 460 y $i=50$ da 2650.

4. Indique una sumatoria que represente la suma de la siguiente sucesión y resuelvala $(-4)+(-1)+4+11+20+31+44+\ldots\}$ el indice i arranca desde 1 hasta n. Pista la suma en $i=20$ da 2770 y $i=50$ da 42675.

3. Recurrencias

1. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 2,4,6,8,10$ para R.R $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n, T(1) = 8$

2. ¿Que valores toma $T(n)$ en $n = 3,9,27,81,343$ para R.R $T(n) = 5T(\frac{n}{3}) + 2n, T(1) = 9$

4. Conteo en algoritmos

1. El problema subset-sum consiste en encontrar n números de un conjunto C cuya suma sea M ¿Cuantas posibilidades deben analizarse para encontrar todas las soluciones en términos de n?

2. ¿Cuantas posibles ordenaciones existen para un arreglo de tamaño n?

3. ¿Cuantas comparaciones tiene que hacer para encontrar el valor máximo de un arreglo de enteros A?

4. ¿Cuantas comparaciones tiene que hacer para hallar la máxima diferencia en un arreglo de enteros positivos A?. Se define la máxima diferencia como dos elementos $a_i \in A$ y $a_j \in A$ con $i \neq j$ donde $|A_i - A_j|$ es máxima.

Ayudas

Sumatorias

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{(n+1)} - a}{r-1} \text{ Si } r \neq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} ar^k = (n+1)a \text{ Si } r = 1$$

Potencias y logaritmos

- $a^{log_b(n)} = n^{log_b(a)}$
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$
- $\frac{a^i}{b^i} = (\frac{a}{b})^i$
- $log_a(b) = \frac{log_c(a)}{log_c(b)}$

1. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=-3}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + 14$$

Paso base

Paso inductivo $P(n) \to P(n+1)$

1)

$P(-3)$

$$\sum_{i=-3}^{-3} i^2 = (-3)^2 = 9$$

$$= \frac{-27}{3} + \frac{9}{2} + \frac{-3}{6} + 14$$

$$-9 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 14$$

$$5 + \frac{8}{2} = 9$$

Paso inductivo $P(n) \longrightarrow P(n+1)$

$n = n+1$

$$\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + \boxed{14}$$

$$\sum_{i=-3}^{n+1} i^2 = \underbrace{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + \cdots + n^2}_{\sum_{i=-3}^{n} i^2} + (n+1)^2$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + \boxed{14} + (n+1)^2$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 + 2n + 1 + 14$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + n^2 + 2n + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 14$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n^2 + 2n + \frac{5}{6} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$(n+1)^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n^2 + \frac{2n}{2} + n + \frac{5}{6} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + n^2 + \frac{2n}{2} + n + \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$\frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{2}{6} + \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + \frac{n+1}{6} + 14$$

$$\frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{2}{6} + \boxed{\frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + 14}$$

$$\frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{3} + \frac{3n}{3} + \frac{1}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + 14$$

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + 14$$

$$\frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} + 14$$

2. Demuestre por inducción matemática que:

$$\sum_{i=0}^{n}(8i^2+\frac{3}{6})=\frac{(n+1)(8n(2n+1)+3)}{6}$$

Paso base $P(0)$

$\frac{3}{6}$ $\quad \frac{(1)(3)}{6}=\frac{3}{6}$ ✓

Paso Inductivo

1) $\frac{(n+2)(8(n+1)(2n+3)+3)}{6} \Leftarrow$ Formula $n=n+1$

$$\sum_{i=0}^{n+1}(8i^2+\frac{3}{6}) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n}(8i^2+\frac{3}{6})}_{P(n)} + \underbrace{8(n+1)^2+\frac{3}{6}}_{i=n+1} \qquad P(n)+\Delta_{i=n+1}$$

$$\frac{(n+1)(8n(2n+1)+3)}{6}+\frac{48(n+1)^2}{6}+\frac{3}{6}$$

$$\frac{(n+1)(8n(2n+1)+3)+48(n+1)^2+3}{6}$$

$$\frac{(n+1)(16n^2+8n)+3(n+1)+48(n+1)^2+3}{6}$$

$$16n^3+8n^2+16n^2+8n+3n+3+48n^2+96n+48+3$$

$$16n^3+72n^2+107n+54 \quad \Big| \; n+2$$

$$-16n^3-32n^2 \qquad 16n^2+40n+27$$

$$40n^2+107n+54$$

$$-40n^2-80n$$

$$27n+54$$

$$-27n-54$$

$$0$$

$$\frac{(n+2)(16n^2+40n+27)}{6}$$

$$8(n+1)(2n+3)+3=(8n+8)(2n+3)+3$$

$$16n^2+24n+16n+24+3$$

$$16n^2+40n+27$$

3. Demostrar por inducción matemática que $1+2^n<3^n$ para $n\in Z^+$. $n\geq 2$

$P(1)$ $\quad 1+2<3^1$

$P(2)$ $\quad 1+4<3^2$ ✓ $\quad 5<9$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\qquad 1 + 2^n < 3^n$

$1 + 2^{n+1} < 3^{n+1}$

$1 + 2 \times 2^n < 3 \times 3^n$

4. Demuestre por inducción matemática, que si un conjunto A tiene n elementos,entonces $P(A)$ tiene 2^n elementos.

$A = \{1, 2\}$ $\qquad A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \boxed{\{1, 3\}}, \boxed{\{2, 3\}}, \{1, 2, 3\}\}$

$P(0) \qquad \emptyset \to \{\emptyset\} \qquad 2^0 = 1$ ✓

$P(n) = \{\underline{\qquad\qquad\qquad}\}$
$\quad 2^n$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad 6$

2^{n+1}

agrego

$2 \times 2^n = 2^{n+1}$

conj $1 \to 1$

conj2 $\; n$

con3 $\; C(n, 2) = \dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}$

conj 4 = $C(n, 3) = \dfrac{n!}{(n-3)!\,3!}$

conj = $C(n, n) = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} C(n, i) = 2^n$$

$A = \emptyset \qquad P(A) = \{\emptyset\}$ $\qquad 1$

$A = \{1\} = \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ $\qquad 2$

$A = \{1, 2\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ $\; 4$

1. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=100}^{45000}(2i+8)$$

2. Resuelva la siguiente sumatoria:

$$\sum_{i=-40}^{2n}\sum_{j=40}^{n^2}(2ij+8j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$i = i - 100$

$$\sum_{i=1}^{44900}(2(i+100)+8)$$

$$\sum_{i=1}^{44900} 2i+208 = 44900(44901) + 208(44901)$$

$$\sum_{i=100}^{45000} 2i+8 = \sum_{i=1}^{45000}(2i+8) - \sum_{i=1}^{99}(2i+8)$$

$$45000(45001) - 99(100) + 8(45000) - 8(99)$$

$$\sum_{i=-40}^{2n}\sum_{j=40}^{n^2}(2ij+8j)$$

$8 \times 39 = 8 \times 40 - 8$

$8(40-1)$

$$\sum_{i=-40}^{2n}\sum_{j=1}^{n^2-39} 2i(j+39) + 8(j+39)$$

$$\sum_{i=1}^{2n+41}\sum_{j=1}^{n^2-39} 2(i-41)(j+39) + 8(j+39)$$