Problema de programación dinámica

Multiplicación de matrices

A1*A2*A3*...*An

A1*A2*A3
20x50 50x10 10x5

A1*A2 = 20*50*10 = 10000 20x10
*A3 = 20*10*5 = 1000 20x5
--> 11000

A2*A3 = 50*10*5 = 2500 50x5
A1*x = 20*50*5 = 5000 20x5
--> 7500

A1 = p0p1
A2 = p1p2
..
An = pn-1 pn

p0xpn

¿Como sería una solución de fuerza bruta?

Tenemos que elegir los parentesis (agrupaciones)

A1*A2*A3
1x(2x3)
A1*A2*A3
(1x2)x3

A1*A2*A3*A4
((1x2)x(3x4)
((1x2)x3)x4
(1x(2x3))x4
1x((2x3)x4)
(1x(2x(3x4)))

1. Divide y vencerás
2. Problema debe tener subproblemas repetidos
3. Subestructura optima (estructura de datos que almacena las soluciones a subproblemas), todos los subproblemas deben estar mapeas en esta estructuras. Los subproblemas son independientes.
4. Problema de optimización (mejor solución)

$$m[i,j]: \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ \min_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j\} & \text{si } i<j \end{cases}$$

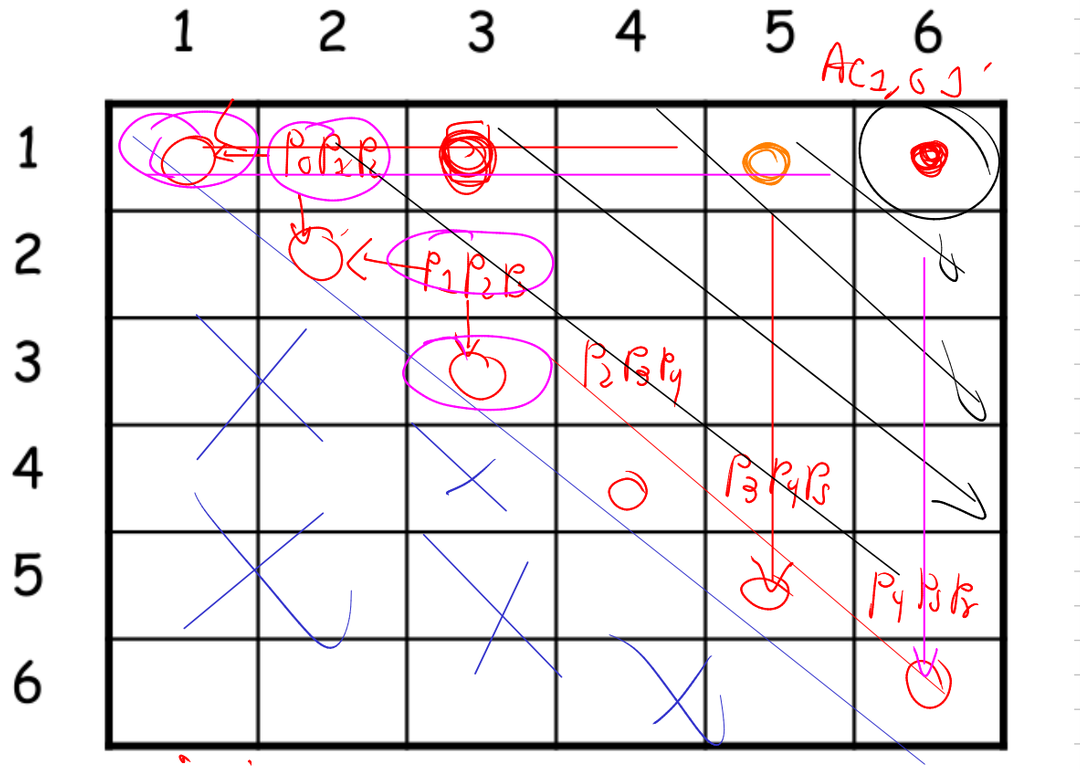
(A1 A2 A3)(A4 A5 A6)
(A1 A2 A3 A4)(A5 A6)
(A1 A2 A3 A4 A5) (A6)

M[1,5]+M[6,6]+P0P5P6

(A1 A2)(A3 A4 A5 A6)

M[1,2]+M[3,6]+P0P2P6

$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$



$A(i, j)$ $i \le k < j$

$A(1,1) + A(2,2) + P_0P_1P_2$

0 0

$A(2,3)$ $k=2$

$A(2,2) + A(3,3) + P_1P_2P_3$

i k $k+1$ j

$M[1,3]$ $k = 1, 2$

$P_0 \times P_1$ $P_1 \times P_3$

$\min(M[1,1] + M[2,3] + P_0P_1P_3,$

$M[1,2] + M[3,3] + P_0P_2P_3)$

$P_0 \times P_2$ $P_2 \times P_3$

$A_1 A_2$

P_0P_1 P_1P_2

$P_0 \times P_2$

A_3 P_2P_3

$A(1,5)$ $k = 1, 2, 3, 4$

$M[1,5] = \min$ (

$M[1,1] + M[2,5] + P_0P_1P_5,$

$M[1,2] + M[3,5] + P_0P_2P_5,$

$M[1,3] + M[4,5] + P_0P_3P_5,$

$M[1,4] + M[5,5] + P_0P_4P_5$)

A1	30x35
A2	35x15
A3	15x5
A4	5x10
A5	10x20
A6	20x25

$P = [30, 35, 15, 5, 10, 20, 25]$

$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6$

$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3$

$P = [30, 35, 15, 5, 10, 20, 25]$

	1	2	3	4	5	6
1	0	$k=1$ 15750	$k=1$ 7875			
2	X	0	$k=2$ 2625	$k=3$ 4375		
3	X	X	0	$k=3$ 750		
4	X	X	X	0	$k=4$ 10010	
5	X	X	X	X	0	$k=5$ 5000
6	X	X	X	X	X	0

$(A_1)(A_2 A_3)$

$M[1,1]$

$M[2,3]$

$$M[1,3] = \begin{cases} \underset{0}{M[\cancel{1,1}]} + \underset{2625}{M[2,3]} + 5250 = 7875 \\ M[1,2] + \overset{0}{M[\cancel{3},3]} + 2250 = 1800 \end{cases}$$

$p_0 p_1 \quad p_1 p_3$

$p_1 p_2 \quad p_2 p_3 \quad p_3 p_4$

$A_2(A_3 A_4)$

$p_2 p_4$

$k = 2, 3$

$$M[2,4] = \begin{cases} \underset{0}{M[\cancel{2,2}]} + \underset{750}{M[3,4]} + \underset{5250}{p_1 p_2 p_4} = 6000 \\ M[2,3] + M[4,4] + p_1 p_3 p_4 \quad 4375 \\ 2625 + 0 + 1750 \end{cases}$$

$p_1 p_2 \quad p_2 p_4$