Departamento Computación y Sistemas Inteligentes
Computación y Estructuras Discretas II
Seguimiento Inducción Estructural

Objetivos

- Reconocer el algoritmo de división y su uso para establecer propiedades sobre la estructura de los números enteros.
- Enunciar la definición del máximo común divisor entre dos números y utilizar el algoritmo de Euclides para su cálculo efectivo.

Conceptualización

Usando el material de la clase: slides, texto del libro, se plantean las siguientes preguntas para su material de estudio para el seguimiento

- Máximo común divisor
- Primos relativos
- Primos relativos dos a dos
- Dos formas distintas para calcular el máximo común divisor
- Mínimo común múltiplo
- Cuál es la diferencia entre un múltiplo y un divisor, cuántos divisores y múltiplos tiene un número x?
- Una forma de calcular el mínimo común múltiplo
- A es congruente B módulo M (tres teoremas)
- ¿Cuál es lema del algoritmo de Euclides?
- Describa los pasos del algoritmo de Euclides

Resolver los siguientes problemas.

101/11 $\quad 101 = 11 \times 9 + 2$

1. ¿Cuáles son el cociente (9) y el residuo (2) de dividir 101 entre 11?
2. ¿Cuáles son el cociente y el residuo de dividir -14 entre 3? **Proponga un residuo positivo y uno negativo**
   $-14/3 \rightarrow \quad -14 = 3(-4) - 2 \quad\quad -14 = 3(-5) + 1$
3. Encuentre el mcd entre los números: 24 y 36, 17 y 22 usando los dos métodos descritos en la conceptualización
4. Muestre si los números en las tripletas 10, 17, 21 y 10, 19, 24 son primos relativos dos a dos
5. Usando la regla de descomposición en factores primos, encuentre el máximo común divisor entre 120 y 500
6. Encuentre el mínimo común múltiplo entre 120 y 500
7. Determine si 17 es congruente con 5 módulo 6
8. Muestre si 24 y 14 son congruentes módulo 6
9. Proponga ejemplos que ilustren los 3 teoremas de congruencia
10. Muestre el paso a paso del algoritmo de Euclides para calcular mcd(91,287)
11. Muestre el paso a paso del algoritmo de Euclides para calcular mcd(414 y 662)

24	36	2
12	18	2
6	9	3
2	3	2
1	3	3

$24 = 2^3 \times 3 \quad\quad 36 = 2^2 \times 3^2 \quad\quad MCM = 2^2 \times 3$

$2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$ maximo comun divisor

4. Muestre si los números en las tripletas 10, 17, 21 y 10, 19, 24 son primos relativos dos a dos
5. Usando la regla de descomposición en factores primos, encuentre el máximo común divisor entre 120 y 500
6. Encuentre el mínimo común múltiplo entre 120 y 500
7. Determine si 17 es congruente con 5 módulo 6
8. Muestre si 24 y 14 son congruentes módulo 6
9. Proponga ejemplos que ilustren los 3 teoremas de congruencia
10. Muestre el paso a paso del algoritmo de Euclides para calcular mcd(91,287)
11. Muestre el paso a paso del algoritmo de Euclides para calcular mcd(414 y 662)

$24 = 2^3 \times 3$ $\quad 36 = 2^2 \times 3^2$ $\quad mcm = 2^2 \times 3$

4) 10 17 | 2×5 $mcd(10, 17) = 1$ | $mcd(10, 19) = 1$

10 21 | 17 | $mcd(10, 24) = 2$ X

$mcd(10, 21) = 1$ | $mcd(19, 24) = 1$

$mcd(17, 21) = 1$

5) $mcd(120, 500)$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$500 = 2^2 \times 5^3$

$2^2 \times 5 = 20$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

6) $mcm(120, 500)$

120	500	2
60	250	2
30	125	5
6	25	3
2	25	5
2	5	5
2	1	2
1	1	

$2^3 \times 5^3 \times 3^1$

3000

7) $17 \equiv 5 \mod 6$

$(17 - 5) \mod 6 = 0$

$17 \mod 6 = 5$

$5 \mod 6 = 5$

4. Muestre si los números en las tripletas 10, 17, 21 y 10, 19, 24 son primos relativos dos a dos
5. Usando la regla de descomposición en factores primos, encuentre el máximo común divisor entre 120 y 500
6. Encuentre el mínimo común múltiplo entre 120 y 500
7. Determine si 17 es congruente con 5 módulo 6
8. Muestre si 24 y 14 son congruentes módulo 6
9. Proponga ejemplos que ilustren los 3 teoremas de congruencia
10. Muestre el paso a paso del algoritmo de Euclides para calcular mcd(91,287)
11. Muestre el paso a paso del algoritmo de Euclides para calcular mcd(414 y 662)

8) $24 \equiv 14 \mod 6$

$24 \mod 6 = 0$ X 1

$14 \mod 6 = 2$

$10 \mod 6 = 4$ X 2

10) $mcd(91, 287) = 7$

$287 \mod 91 = 14$

$91 \mod 14 = 7$

$14 \mod 7 = 0$

11) $mod(414, 662) = 2$

$662 \mod 414 = 248$

$414 \mod 248 = 166$

$248 \mod 166 = 82$

$166 \mod 82 = 2$

$82 \mod 2 = 0$

10)

Teorema 1

Sean a y b números enteros y m un entero positivo. Entonces, $a \equiv b \pmod{m}$ *si, y sólo si,* $a \bmod m = b \bmod m = r$.

Teorema 2

Sea m un entero positivo. Los enteros a y b son congruentes módulo m si, y sólo si, existe un entero k tal que $a = b + km$.

El conjunto de todos los enteros congruentes a un entero *a* módulo *m* se denomina *clase de congruencia* módulo *m*.

Teorema 3

Sea m un entero positivo. Si $a \equiv b \pmod{m}$ *y* $c \equiv d \pmod{m}$, *entonces:*

$$a + c \equiv b + d \pmod{m} \text{ y } ac \equiv bd \pmod{m}.$$

1) $5 \equiv 19 \bmod 7$

$\downarrow$ a $\quad$ b

$5 \bmod 7 = 5$

$19 \bmod 7 = 5$

$19 = 5 + k \times 7$

$k = 2$

2) $5 = 19 + k \times 7$

$5 = 19 + (-2)7 = 19 - 14$

3) $a = 5 \quad b = 19 \quad m = 7$

$c = 33 \quad d = 12 \quad m = 7$ $\qquad 21 \bmod 7 = 0$ ✓

$(a + c) \equiv (b + d) \bmod m$

$38 \equiv 31 \bmod 7$ $\qquad 7 \bmod 7 = 0$

$165 \equiv 228 \bmod 7$ $\qquad 63 \bmod 7 = 0$