En general se consideran una técnica avanzada de conteo. Por ejemplo, la relación de recurrencia $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ con $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$ resuelve la pregunta ¿cuántas cadenas de n bits no contienen dos ceros consecutivos?.

$n > 0$

$a_n \rightarrow f(n)$

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 3 & \text{si } n=1 \\ a_n + a_{n-1} \end{cases}$$

$a_1 = 2$
$a_2 = 3$

$a_3 = a_2 + a_1$
$a_3 = 2 + 3 = 5$

$a_4 = a_3 + a_2$
$a_4 = 5 + 3 = 8$

$a_n = 2^n$

Ejemplo

Sea $\{a_n\}$ una sucesión que satisface la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$, y supongamos que $a_0 = 2$ y que $a_1 = 3$. ¿Cuál es el valor de a_2 y de a_3?

$a_0 = 2$ $\quad a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + a_0$
$a_2 = 3 + 2 = 5$

$a_3 = a_2 + a_1$
$a_3 = 5 + 3 = 8$

Ejemplo $\quad a_0 = ?$ $\quad a_1 = ?$

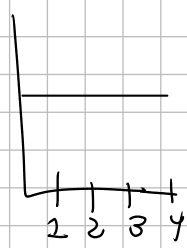
Determine si la sucesión $\{a_n\}$ es solución de la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$, donde $a_n = 3n$ para todo entero no negativo n. Responda a la misma pregunta para las sucesiones $a_n = 2^n$ y $a_n = 5$.

$\boxed{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}$ RR

$a_{100} = 2a_{99} - a_{98}$

$2(2a_{98} - a_{97})$ $\quad$?

$f(n) = 5$



$$\begin{cases} 3n = 2(3(n-1)) - 3(n-2) \\ 3n = 6n - \cancel{6} - 3n + \cancel{6} \end{cases}$$

$3n = 3n$ $\quad 1 = 1$ ✓

$2^n = 2^1 \times 2^{n-1} - 2^{n-2}$

NO

$2^n = 2^n - 2^{-2} 2^n$

$2^n = 2^n - \frac{1}{2^2} 2^n$

$2^n = 2^n - \frac{1}{4} 2^n$

$1 = 1 - \frac{1}{4}$

$0 = -\frac{1}{4}$ $\quad$ F

$5 = 2 \times 5 - 5$

$5 = (2-1)5$

$5 = 5$ ✓

Ejemplo

Suponga que una persona deposita 10.000 € en una cuenta bancaria que le proporciona un interés anual del 11 %. Si los intereses se abonan en la misma cuenta, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de treinta años?

$\boxed{a_0 = c}$ $\quad c = 10000 \quad a_{30} = (1.11)\, a_{29} \quad a_{30} = (1.11)^{30} c$

$a_1 = (1.11)\, a_0$

$a_2 = (1.11)\, a_1$

$a_3 = (1.11)\, a_2$

$a_4 = (1.11)\, a_3$

$\vdots$

$\boxed{a_n = (1.11)\, a_{n-1}}$

$a_0 = c$

$a_1 = (1.11)^1 a_0$

$a_2 = (1.11)\, a_1 = (1.11)(1.11\, a_0)$

$a_2 = (1.11)^2 a_0$

$a_3 = (1.11)\, a_2 = 1.11^3 a_0$

$a_4 = (1.11)^4 a_0$

$\vdots$

$\boxed{a_n = (1.11)^n a_0}$

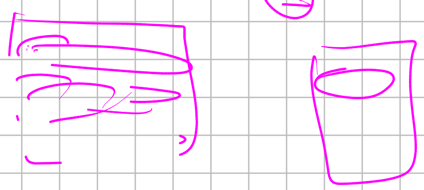
```
int a = n;   1
for (int i=0; i<n; i++) {
        ....
}
```

$n+1$ $\quad 0, 1, 2, 3, \quad n-1, n \to n+2$

```
def f(n:Int):Int = {
        if (n==0) 1
        else n*f(n-1)
}
```

$1 \quad \boxed{a_n = 1 + a_{n-1}} \quad \boxed{a_0 = 1}$

$O(n)$



```
def length(i:Int, l List[Int], acc:Int=0) {
        l match {
                case nil => acc
                case x::xs => length(i+1, xs, acc+1)
        }
}
```

```
List(1,2,3)
len(0, List(1,2,3),0)
len(1, List(2,3), 0 + 1)
len(2, List(3), 0 + 1 + 1)
len(3, nil, 0+1+1+1)
```

$(i, x::xs, acc) \to$

$(i+1, xs, acc+1)$

$(0, x::xs, 0) \to (1, xs::xs', 1) \to (2, \_, 2) \to (3, \_, 3) \quad (n, \_, n)$

$i = 0 \quad acc = 0 \quad i = n \quad acc = n$

$\boxed{acc = i}$

$acc = i$

$i \to \boxed{i+1}$

$acc \to acc + 1 \quad \boxed{i+1}$

Ejemplo

Considere el siguiente problema. Una pareja de conejos recién nacidos (uno de cada sexo) se sueltan en una isla. Los conejos no pueden tener descendencia hasta que cumplen dos meses. Una vez que cumplen dos meses, cada pareja de conejos tiene como descendencia otra pareja de conejos cada mes. Encuentre una relación de recurrencia para el número de parejas de conejos que habrá en la isla transcurridos n meses, suponiendo que ningún conejo muere.

Total	Meses	# Pareja-no	# Pareja repro
1	1	A	
1	2		A
2	3	A_1	A
3	4	A_2	A A_1
5	5	A_B A_{12}	A A_1 A_2
8	6	A_4 A_{13} A_{21}	A A_1 A_2 A_3 A_{12}

f(n-2) representa los hijos de las parejas que son reproducibles
f(n-1) representa las parejas que tenemos y siguen vivas

an = an-1 + an-3 , a0 = 1, a1 = 2, a2 = 0

n = 0, a0 = 1
n = 1, a1 = 2
n = 2, a2 = 0
n = 3, a3 = a2 + a0 = 0 + 1 = 1
n = 4, a4 = a3 + a1 = 1 + 2 = 3
n = 5, a5 = a4 + a2 = 3 + 0 = 3

Solucion $a_n = r^n$

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_k a_{n-k}$$

$$r^n = C_1 r^{n-1} + C_2 r^{n-2} + \dots + C_k r^{n-k}$$

$n-1-(n-k)$
$n-1-n+k = k-1$

$$\frac{r^n}{r^{n-k}} = \frac{C_1 r^{n-1}}{r^{n-k}} + \frac{C_2 r^{n-2}}{r^{n-k}} + \dots + \frac{C_k r^{n-k}}{r^{n-k}}$$

$$r^k = C_1 r^{k-1} + C_2 r^{k-2} + \dots + C_k$$

$$\boxed{r^k - C_1 r^{k-1} - C_2 r^{k-2} - \dots - C_k = 0}$$ Ecuacion caracteristica

$r^{n-(n-2)}$

$$a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}$$ $a_n = r^n$

$$r^n = 5r^{n-1} + 6r^{n-2} \rightarrow \frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{5r^{n-1}}{r^{n-2}} + \frac{6r^{n-2}}{r^{n-2}}$$

$$r^2 = 5r + 6 \qquad \boxed{r^2 - 5r - 6 = 0} \text{ E.C}$$

$$ar^2 + br + c$$

$$a_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(-6)}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{a_n = A6^n + B(-1)^n}$$

$(r-2)(r-3) = r^2 - 3r - 2r + 6$ $\quad$ $\underline{a_0 = 4}$ $\quad$ $\underline{a_1 = 6}$

$r^2 - 5r + 6$

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \rightarrow \frac{r^n}{r^{n-2}} = \frac{5r^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{6r^{n-2}}{r^{n-2}}$

$r^2 = 5r - 6$

$r^2 - 5r + 6 = 0$ $\quad$ $\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$ $\quad$ $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{4}{2} = 2$

$\boxed{a_n = A \times 3^n + B \times 2^n}$

$n = 0$ $\quad$ $4 = A \times 3^0 + B \times 2^0$

$n = 1$ $\quad$ $6 = A \times 3^1 + B \times 2^1$

$4 = A + B$ $\quad$ $4 = \frac{3}{2}A + B$

$\underline{6 = 3A + 2B} \rightarrow 3 = \frac{3}{2}A + B$

$1 = -\frac{1}{2}A$