

**Librería prototipo para el análisis multifractal y de robustez mediante técnicas
de inteligencia artificial**

Carlos Andrés Delgado Saavedra, Ing

**Universidad del Valle
Facultad de ingeniería
Escuela de ingeniería de sistemas y computación
Santiago de Cali
2016**

**Librería prototipo para el análisis multifractal y de robustez mediante técnicas
de inteligencia artificial**

Carlos Andrés Delgado Saavedra, Ing
Código 1301662
`carlos.andres.delgado@correounivalle.edu.co`

**Documento presentado como requisito parcial para la obtención de
grado de Magíster en Ciencias de la Computación**

Director
Victor Andres Bucheli Guerrero, Ph.D.
`victor.bucheli@correounivalle.edu.co`

Universidad del Valle
Facultad de ingeniería
Escuela de ingeniería de sistemas y computación
Santiago de Cali
2016

Índice general

1. Propuesta de investigación	3
1.1. Descripción del problema	3
1.2. Pregunta de investigación	4
1.3. Hipótesis	4
1.4. Justificación	4
1.5. Objetivos	5
1.5.1. Objetivo general	5
1.5.2. Objetivos específicos	5
1.5.3. Objetivos estratégicos	5
1.5.4. Resultados esperados	6
1.5.5. Impacto esperado	6
1.5.6. Alcances	7
2. Revisión de literatura y estado del arte	8
2.1. Marco teórico	8
2.1.1. Glosario	8
2.1.2. Redes y redes complejas	9
2.1.3. Inteligencia artificial	18
2.2. Estado del arte	21
3. Metodología	24
3.0.1. Etapas del proyecto	24
3.0.2. Tareas a realizar	24
3.0.3. Cronograma de actividades	26
3.0.4. Presupuesto	28
3.0.5. Personal	28
3.0.6. Equipos	28
3.0.7. Otros	28
3.0.8. Total	29
4. Bibliografía	30

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de red típica, <i>vertex</i> y <i>edges</i> son respectivamente vértices y aristas. Tomado de [1]	10
2.2. Ejemplo de red de contactos sexuales. Tomado de [1]	10
2.3. La red de la izquierda es una red con distribución de grado Poisson y la de la derecha una libre de escala. Tomado de [1]	12
2.4. Red de mundo pequeño unidimensional. Tomado de [1]	12
2.5. Red con cobertura multifractal. Tomado de [2]	15

Lista de tablas

1.1. Resultados esperados	6
2.1. Técnicas de Box Covering para la medición de fractalidad	17
3.1. Cronograma de actividades	27
3.2. Presupuesto del personal del proyecto	28
3.3. Presupuesto de equipos del proyecto	28
3.4. Presupuesto de otros tópicos del proyecto	29
3.5. Presupuesto total del proyecto	29

Resumen

En este proyecto se plantea realizar la medición de parámetros para el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas mediante el uso de diferentes técnicas de inteligencia artificial, como es el caso de redes neuronales, computación evolutiva y lógica difusa. El objetivo del trabajo es mediante el uso de estas técnicas, plantear alternativas para reducir el espacio de búsqueda de soluciones debido a que la medición de estos parámetros son problemas NP-Hard[3]. Finalmente, se busca proveer una librería que se pueda integrar a Software o herramientas enfocadas en el estudio de redes complejas.

La fractalidad y multifractalidad son medidas útiles en ciertas áreas del conocimiento, como es el caso de la astronomía donde se han encontrado patrones fractales y multifractales en algunos fenómenos físicos o en el caso de ciencias sociales donde se puede describir el funcionamiento del comportamiento de los mercados[4], estas redes suelen ser de gran tamaño[5] y los algoritmos existentes requieren realizar una o varias iteraciones en las redes para realizar estas mediciones[3], por ello es importante estudiar estrategias que permitan reducir los pasos necesarios para hallar la medición fractalidad y multifractalidad de redes complejas.

Actualmente, existen técnicas para la medición de la fractalidad y multifractalidad en redes complejas, como es el caso de las técnicas de Box Covering[6]. Para el caso de la medición de robustez, se tienen estrategias basadas en la medición de parámetros en redes complejas, como es el caso del grado promedio, distancia promedio entre nodos, entre otros, a medida que van eliminando nodos[7]. Las estrategias anteriormente mencionadas realizan una gran cantidad de pasos y de exploraciones en las redes que comúnmente presentan una gran cantidad de nodos y conexiones, por lo que toman un tiempo considerable en encontrar las medidas[5].

Introducción

Las técnicas de inteligencia artificial, como es el caso de las redes neuronales, algoritmos evolutivos, algoritmos basados en enjambres y técnicas de aprendizaje de máquina *machine learning* se utilizan para encontrar soluciones a ciertos problemas en la computación, en donde otro tipo de soluciones no son prácticas debido a su alta complejidad.

En este proyecto, se va realizar un estudio sobre las técnicas de inteligencia artificial que puedan ser útiles en la medición de parámetros para el análisis multifractalidad y robustez en diferentes redes complejas basadas en modelos, como es el caso de la redes Barabasi-Albert[8] y las obtenidas de sistemas reales, como es el caso de la Intenet[9]. A partir del estudio se realiza el diseño de estrategias para solucionar el problema de la medición de estos parámetros utilizando técnicas de inteligencia artificial. Posteriormente, se busca determinar la complejidad computacional de las técnicas utilizadas y compararlas frente a otros algoritmos de medición de parámetros en algunas redes complejas.

Se plantea, utilizar los elementos que se han encontrado en los diferentes trabajos relacionados en la medición de la multifractalidad y robustez, para adaptarlos a diferentes técnicas de inteligencia artificial, para así diseñar que permitan realizar estas mediciones. Esto es debido que existen algoritmos de inteligencia artificial que se aplican en procesos de clasificación y reconocimiento de patrones, los cuales consideran potenciales para la medición de los parámetros requeridos debido a que en el caso de la medición de los parámetros para el análisis multifractal, puede verse como un problema en el que se requiere encontrar un patrón de subredes similares dentro de una red compleja.

La presente propuesta se estructura de la siguiente forma, en el capítulo 1 **propuesta de investigación** se presenta la propuesta de tesis de maestría, en la que se realiza la definición del problema, la pregunta e hipótesis de investigación, la justificación de este proyecto y los objetivos que se pretenden alcanzar. En el capítulo 2 **revisión del estado del arte y literatura** se realiza la revisión de antecedentes y conceptos teóricos necesarios para abordar el problema planteado en esta tesis. Finalmente, en el capítulo 3 **metodología** se presentan la estrategia de solución del problema, el cronograma de actividades y el presupuesto necesario para desarrollar esta tesis.

Capítulo 1

Propuesta de investigación

En el presente capítulo se realiza la descripción del problema, la hipótesis sobre la cual se plantea la pregunta de investigación, los objetivos que se pretenden alcanzar y los alcances del proyecto.

1.1. Descripción del problema

En sistemas complejos reales, tales como las redes de interacciones entre proteínas, redes de transporte urbano y redes sociales, las mediciones de multifractalidad y robustez son de gran importancia. La multifractalidad, por su parte, permite identificar subestructuras que son significativas en una red[2] y, por otra parte, la robustez es una métrica para el análisis de tolerancia a fallos[7].

Por lo tanto, proveer una librería que permita realizar estas mediciones en diferentes entornos de trabajo cobra importancia, ya que estas son de gran apoyo para diferentes áreas del conocimiento. Actualmente, en la literatura existen varias técnicas que, mediante estrategias de exploración, permiten realizar estas mediciones. Dichas estrategias realizan una búsqueda intensiva en el espacio de soluciones de estos problemas que son **NP-Hard**, por lo que se requiere una gran capacidad de procesamiento y tiempo de ejecución en redes de gran tamaño. Como consecuencia, es necesario buscar otras estrategias para la medición de estos parámetros, de tal forma que se pueda realizar una exploración *inteligente* para obtener una respuesta aproximada en un menor tiempo. Por lo anterior, se propone utilizar como alternativa el uso de técnicas de inteligencia artificial, pues estas permiten el diseño de soluciones que acorten el espacio de búsqueda.

Finalmente, es importante aportar una experiencia en el estudio de técnicas alternativas para la medición de características de redes complejas, ya que gran parte de las estrategias encontradas en la literatura son algorítmicas. Estas estrategias usualmente presentan un costo computacional no polinomial, dado que requieren realizar un gran número de pasos dentro

de las redes complejas para obtener las mediciones y muchas redes complejas son de gran tamaño.

1.2. Pregunta de investigación

¿Cómo proveer mediciones para análisis multifractal y de robustez en redes utilizando técnicas de inteligencia artificial?

Para responder esta pregunta, se deben responder las siguientes preguntas:

1. ¿Que mediciones son necesarias para el análisis multifractal y de robustez en redes complejas?
2. ¿Cuales técnicas de inteligencia artificial son útiles para la medición de multifractalidad y robustez?.
3. ¿Como plantear una solución basada en técnicas de inteligencia artificial que permita obtener mediciones para realizar el análisis de la multifractalidad y robustez en redes complejas?.
4. ¿Como se tiene certeza que la medida encontrada utilizando técnicas de inteligencia artificial es correcta?
5. ¿Que relaciones se pueden identificar entre la robustez y multifractalidad a partir del planteamiento de técnicas de inteligencia artificial para su medición?
6. ¿Como se puede reducir el espacio de búsqueda para los problemas de la medición de parámetros para el análisis de multifractalidad y robustez a medida que el tamaño de la red compleja aumenta?

1.3. Hipótesis

Se pueden diseñar soluciones a partir de las técnicas inteligencia artificial para la medición de parámetros requeridos en el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas con una complejidad inferior a las soluciones actualmente disponibles en la literatura.

1.4. Justificación

Este trabajo busca integrar el área de inteligencia artificial (IA) con el estudio de redes complejas, mediante el estudio de cómo las técnicas de inteligencia artificial pueden ayudar a la medición de parámetros en las redes complejas, específicamente aquellos requeridos para el análisis de fractalidad, multifractalidad y robustez. Los algoritmos de búsqueda de patrones, como el Box Covering son de búsqueda exhaustiva, de tal forma exploran el espacio de

búsqueda en su totalidad (es decir todas las posibles soluciones) para encontrar una solución óptima, lo que computacionalmente es costoso para entradas de gran tamaño, por esta razón en este trabajo se aborda el uso de estas técnicas donde mediante alguna estrategia se realiza el cálculo de las mediciones, pero debido a que no se explora todo el espacio de soluciones esta no es necesariamente óptima, sin embargo el proceso de búsqueda de la solución computacionalmente más económico.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Desarrollar una librería prototipo para la medición de parámetros para el análisis de la multifractalidad y robustez en redes complejas utilizando técnicas de inteligencia artificial.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Establecer que parámetros se requieren en el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas.
2. Identificar dos técnicas de inteligencia artificial que se puedan utilizar para la medición de parámetros en el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas.
3. Plantear estrategias de medición de parámetros para el análisis de la multifractalidad y robustez en redes complejas utilizando las técnicas de inteligencia artificial elegidas.
4. Desarrollar e implementar funciones que permitan realizar la medición de parámetros para el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas.
5. Realizar pruebas comparativas entre las soluciones basadas en inteligencia artificial y dos algoritmos encontrados en la literatura.
6. Análisis en base a los resultados obtenidos en las pruebas comparativas entre las soluciones basadas en inteligencia artificial y dos algoritmos encontrados en la literatura.

1.5.3. Objetivos estratégicos

1. Reducción del error en el cálculo de parámetros para el análisis de la multifractalidad y robustez en una red compleja.
2. Soportar diferentes tamaños de redes complejas.
3. Reducción del tiempo necesario para hallar parámetros para el análisis de la multifractalidad y robustez en redes complejas mediante técnicas de computación distribuida.

1.5.4. Resultados esperados

Objetivo específico	Resultado esperado
Establecer que parámetros se requieren medir en el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas.	Especificación de que parámetros se requieren medir en una red compleja para realizar el análisis de multifractalidad y robustez.
Identificar dos técnicas de inteligencia artificial que se puedan utilizar para la medición de parámetros en el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas.	Elección de dos técnicas de inteligencia artificial para la realización de la tesis.
Plantear estrategias de medición de parámetros para el análisis de la multifractalidad y robustez en redes complejas utilizando las técnicas de inteligencia artificial elegidas.	Planteamiento de las estrategias utilizadas en las técnicas de inteligencia artificial para el diseño de soluciones para la medición de los parámetros.
Desarrollar e implementar funciones que permitan realizar la medición de parámetros para el análisis de multifractalidad y robustez en redes complejas.	Librería prototipo que provea funciones la medición de los parámetros.
Realizar pruebas comparativas entre las soluciones basadas en inteligencia artificial y dos algoritmos encontrados en la literatura.	Datos y resultados sobre la medición de parámetros para el análisis de multifractalidad y robustez en diferentes redes complejas reales y generadas utilizando técnicas de inteligencia artificial y soluciones disponibles en la literatura.
Análisis en base a los resultados obtenidos en las pruebas comparativas entre las soluciones basadas en inteligencia artificial y dos algoritmos encontrados en la literatura.	Documento de análisis sobre las técnicas de inteligencia artificial utilizados en esta tesis y su desempeño.

Tabla 1.1: Resultados esperados

1.5.5. Impacto esperado

Impacto teórico

El trabajo realizado en esta tesis aporta una experiencia para que se propongan estrategias de inteligencia artificial para la medición de parámetros en redes complejas.

Impacto social

El estudio de la robustez y multifractalidad tiene implicaciones en sistemas reales, debido a que estos pueden ser modelados utilizando redes complejas, como es el caso de la Internet y el tráfico en una ciudad. La robustez permite estudiar la vulnerabilidad de ciertos sistemas reales como los sistemas de transporte; y la multifractalidad es un análisis que permite estudiar una red compleja a partir de algunos de sus componentes. Por lo tanto, el trabajo realizado en esta tesis puede prestar apoyo en el estudio de sistemas reales a partir de su modelado a través de redes complejas.

1.5.6. Alcances

Limites computacionales

Estratégicamente, se busca reducir la complejidad computacional del problema de la medición de parámetros para el análisis de multifractalidad y robustez en redes, sin embargo no es posible garantizar su aplicabilidad a cualquier red compleja.

Es posible, que por limitaciones de procesamiento no se puedan procesar redes complejas con gran tamaño, por lo que en las pruebas se establecerán límites al tamaño de las redes.

Solución óptima

Debido a que las técnicas de inteligencia artificial permiten generar estrategias para evitar explorar la totalidad del espacio de soluciones, no se puede asegurar que la solución encontrada sea la óptima.

Librería prototipo

La librería que se va a construir es únicamente para propósitos de validación de las técnicas aplicadas en esta tesis, por lo tanto, no representa un producto que se pueda utilizar comercialmente y sin conocimientos en redes complejas.

Validez de las pruebas

Se van a realizar pruebas en redes complejas representativas, para realizar el análisis de los algoritmos, sin embargo, debido a que pueden existir redes con características únicas, en las que las soluciones basadas en técnicas de inteligencia artificial podrían presentar resultados insatisfactorios, es otras palabras una medición correcta, las pruebas sólo validarán el trabajo realizado en algunas redes complejas.

Capítulo 2

Revisión de literatura y estado del arte

En este capítulo se presenta la revisión de conceptos que se requieren para el desarrollo del proyecto y del estado del arte sobre el análisis de multifractalidad y robustez.

2.1. Marco teórico

2.1.1. Glosario

- **Clique**[10]: Es un grafo no dirigido en el cual para todo par de vértices existe una arista que los conecta, esto es equivalente decir que es un grafo completo.
- **Diámetro de una red**[1]: Es el número de aristas de la distancia geodésica más larga entre un par de vértices de una red.
- **Distancia geodésica**[1]: Es el camino más corto entre un vértice y otro a través de una red. Es posible exista más de una camino geodésico.
- **Distribución de grado**[11] Es el recuento del número de vértices en un grafo que tienen un grado dado, tomando el número de vértices que tienen un grado dado este puede seguir una distribución de probabilidad.
- **Grado de un vértice**[10]: Es el número de conexiones asociadas a un vértice en un grafo.
- **Grafo**[10]: Un grafo es un conjunto de vértices o nodos unidos entre sí por aristas o arcos.
- **Grafo dirigido**[10]: Es un grafo en que las aristas o arcos tienen un sentido definido.

- **Grafo no dirigido**[10]: Es un grafo en que las aristas o arcos no tienen un sentido definido.
- **Hub**[12]: Vértice en una red libre de escala que tiene muchas conexiones.
- **Matriz de adyacencia**[10]: Es una matriz cuadrada que representa un grafo. El tamaño de la matriz es igual que el número de los vértices de un grafo y en cada fila i y columna j representadas por la posición (i, j) se tienen dos posibles valores: 1 para indicar que existe una arista entre i, j y 0 para indicar su ausencia.
- **Sistema complejo**[5]: Un sistema complejo es aquel que esta compuesto de muchos componentes que interactúan entre sí, la cual presenta comportamientos emergentes o no esperados que no se pueden explicar sólo tomando en cuenta la interacción de ss componentes, en otras palabras *el todo no es la simple suma de sus partes*.
- **Sistema complicado**[5]: Es un sistema el cual puede ser descrito completamente a partir de sus componentes, no presenta comportamiento emergentes.
- **Subgrafo** [10]: Es un grafo G' cuyos vértices y aristas es un subconjunto de otro grafo G , se dice que G' es subgrafo de G .
- **Topología**:[13] Es una rama de la matemáticas dedicada al estudio de la estructura de diferentes cuerpos geométricos.
- **World Wide Web**:¹ En español red informática mundial, es un sistema con documentos o páginas de hipertexto o hipermedios interconectadas entre sí y que son accesibles por Internet.

2.1.2. Redes y redes complejas

Redes complejas

Una red[1] o grafo es un conjunto de elementos, vértices o nodos los cuales están conectados entre sí por aristas tal y como se muestra en la figura 2.1. Los sistemas reales pueden ser modelados como redes. Algunas redes reales son la Internet, redes sociales de conocidos, redes de estructura en organizaciones, redes de negocios entre compañías, redes neuronales, redes metabólicas, redes de citas y muchas otras.

¹Tomado de: <https://www.w3.org/Help/#webinternet>, Consultado Enero de 2016

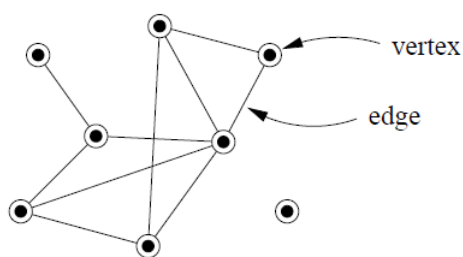


Figura 2.1: Ejemplo de red típica, *vertex* y *edges* son respectivamente vértices y aristas. Tomado de [1]

El estudio de redes, puede realizarse utilizando la matemática asociada en la teoría de grafos, que es perteneciente a las matemáticas discretas. Los estudios típicos en redes se aplican en áreas como la sociología donde se pueden modelar redes a partir de los resultados de cuestionarios acerca de las relaciones interpersonales como es el caso de la figura 2.2, en estos modelos sociales se pueden encontrar resultados interesantes como es el caso de la centralidad que son los individuos mejor conectados o relacionados y la conectividad donde se puede estudiar como está conectados los individuos.

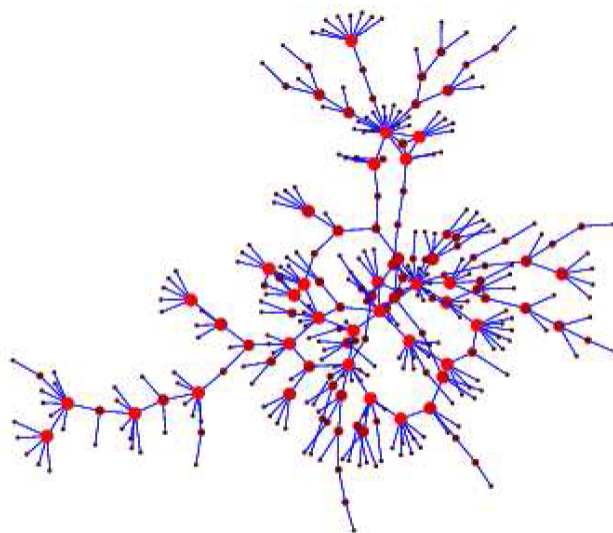


Figura 2.2: Ejemplo de red de contactos sexuales. Tomado de [1]

Definición formal

Una red o grafo se puede definir de la siguiente forma[14]:

$$R = (N, E) \quad (2.1)$$

Donde $N = N(R)$ es un conjunto de nodos y $E = E(R) \subset N \times N$ es un conjunto de enlaces o aristas. Cada enlace es un par (i, j) donde $i \wedge j \in N$, en el caso de los grafos no dirigidos este par es no ordenado y en el de los grafos dirigidos es ordenado. Estos enlaces también pueden tener un peso asociado que es un valor numérico $w_{i,j}$.

Algunos conceptos básicos:

1. **Adyacencia:** Dos nodos i y j son adyacentes si existe una arista que los conecta.
2. **Incidencia:** Un enlace es incidente a un nodo i si dicho enlace es de la forma (i, j) para algún $j \in N(R)$.
3. **Vecindario:** El vecindario de j , que se denota como $V(i)$ es el conjunto de los $j \in N(R)$ tales que $(i, j) \in E(R)$.

Propiedades redes complejas

Las propiedades estructurales de una red compleja son[5]:

1. **Distribución de grado:** Es la probabilidad que un nodo al azar tenga k conexiones, es denotado con $P(k)$.
2. **Coeficiente de agregación o clustering:** Es la probabilidad de tomando n nodos, exista un clique de tamaño n , denotada con C .
3. **Distancia más corta:** Es la misma distancia geodésica, es el número mínimo de brinco que se tienen que llegar desde un nodo de la red a otro. Es denotado con L_{ij} como la distancia más corta o mínima entre $v_i \in V$ y $v_j \in V$ donde V es el conjunto de vértices del grafo.
4. **Longitud promedio de la red:** Denotado con L , es el promedio de todas las longitudes mínimas L_{ij} .

Clasificación de redes complejas

De acuerdo a la distribución de grado se clasifican:

1. **Topología de Poisson:** $P(k) = e^{-z} \frac{z^k}{k!}$ También son conocidas como redes Erdos-Renyi
2. **Topología Exponencial:** $P(k) = Ce^{-ak}$.
3. **Topología libre de escala** $P(k) = Ck^{-\lambda}$, que corresponde a una ley de potencia. Se encuentra en muchos sistemas reales como es el caso de la Internet, redes de colaboración, entre otros. Estas redes tienen la característica de tener pocos nodos con muchas conexiones y muchos con pocas conexiones.

En diferentes estudios realizados por Erdos y Renty se encontró que las redes que se construyen añadiendo nuevos nodos y conexiones al azar presentan topologías Libre de escala, Poisson o exponencial. Sin embargo el proceso aleatorio por si mismo no genera una topología libre de escala, si no que existen procesos que dan prelación a ciertos nodos de tener conexiones frente a otros.

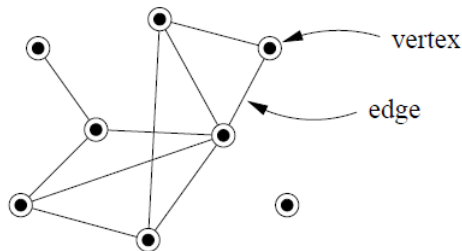


Figura 2.3: La red de la izquierda es una red con distribución de grado Poisson y la de la derecha una libre de escala. Tomado de [1]

Como se puede observar en la figura 2.3, la red de Poisson es más homogénea que en el caso libre de escala.

Redes de mundo pequeño

Las redes de mundo pequeño[9] tienen la característica que existen pocas conexiones es decir que el coeficiente de agrupación es grande, sin embargo la distancia geodésica promedio en la red es relativamente pequeña. Esta es característica de muchos sistemas reales, como es el caso de una red social, en donde los vértices son las personas y las aristas son las relaciones entre ellas.

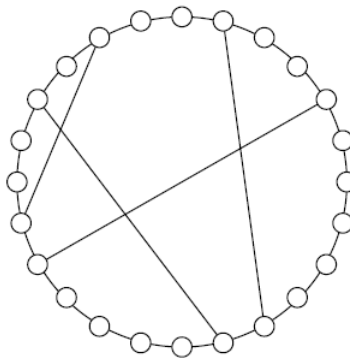


Figura 2.4: Red de mundo pequeño unidimensional. Tomado de [1]

Estas redes pueden ser construidas con un modelo de Watts y Strogatz, en los cuales una red de mundo pequeño se puede construir tomando una red de n nodos, los cuales se pueden disponer en forma de anillo tal y como se muestra en la figura 2.4 conectando los vértices vecinos entre sí, la probabilidad de que exista una arista entre dos vértices que no sean vecinos es p . Variando p se encuentra que si $p = 0$ se tienen una red regular y con $p = 1$ una red aleatoria. Estas redes siguen una distribución de grado de Poisson.

Redes en el mundo real

De acuerdo al área de estudio existen varios tipos de redes en el mundo real[1]:

- **Redes sociales:** Son un conjunto de personas o grupos de personas con algunos patrones de contacto o interacciones como es el caso de patrones de amistad, patrones de relaciones de negocio, patrones de relaciones entre compañías y redes de contacto sexual. Estas redes presentan propiedades de mundo pequeño[15]. Estos experimentos han dado origen al concepto de *seis grados de separación*. Los estudios sobre este tipo de redes sufren de problemas por inexactitud, subjetividad y pequeño tamaño.
- **Redes de información:** El clásico ejemplo de este tipo de redes son las redes de citaciones en artículos científicos. En las cuales los artículos más antiguos son citados por artículos más recientes, si el artículo A cita al artículo B entonces se crea una arista dirigida de A a B. El estudio sobre estas redes tienen una gran ventaja que es la exactitud y confiabilidad de los datos disponibles para ellas. Otro ejemplo de red de información es la *World Wide Web*, la cual se construye a partir de los enlaces entre las paginas en la Internet.
- **Redes tecnológicas:** Estas redes son aquellas que describen la distribución de algún recurso, como es el caso de la electricidad o la información. Una red de suministro eléctrico es un buen ejemplo de este tipo de red. Los estudios en este tipo de redes utilizan técnicas estadísticas las cuales permiten conocer probabilidad de falla, potencia esperada al final de una línea eléctrica, entre otras.
- **Redes Biológicas:** Un buen número de sistemas biológicos pueden ser representados a como redes. Uno de estos casos son el caso de las redes metabólicas donde los vértices son substratos metabólicos y las aristas representan reacciones metabólicas. Estas redes son usadas fuertemente para el estudio y análisis de sistemas biológicos que de otra forma serían complejos de abordar.

Robustez en redes

La robustez [7] es una medida que se aplica sobre grafos no dirigidos, esta indica el número mínimo de aristas que se deben remover de tal manera este deja de ser conexo, los algoritmos que se aplican suelen consistir en eliminar aristas o vértices, examinando algún parámetro en

el grafo modificado, por ejemplo el diámetro promedio, que es la distancia promedio entre dos nodos. En modelos de redes esta medida indica un grado de conectividad y tolerancia a los fallos (nodos que dejan de funcionar) de un sistema, como es el caso de los sistemas de transporte urbano[16] donde se pueden estos sistemas para determinar que elementos del mismo son criticos para su funcionamiento o en los casos donde se estudia que elementos de un sistema son vulnerables a ataques[17].

No existe una sola forma de realizar la medición de robustez en redes [7], esta puede ser medida de varias formas:

1. **A partir de las distancias entre nodos de una red:** En este tipo de medida se busca determinar como se comporta la distancia geodésica que se debe recorrer (posibles caminos) entre dos nodos a medida que algunos nodos van fallando, es decir que son eliminados de la red. Este caso ha sido estudiado en las redes de comunicaciones, como es el caso de las redes móviles[18], en donde es importante conocer que nodos de comunicación (configuraciones de antenas) son más propensos a fallar si otros nodos fallan.
2. **Como una medida de modularidad:** Es una medición relacionada con las estructuras internas de la red, como es el caso de las redes de comunicaciones en donde al eliminar algunos nodos relevantes en la red, puede producir fallas en algunos sectores de la red mientras que en otros sectores se presenta el servicio sin ningún inconveniente. Un ejemplo de esto es la diseminación de la información en una red distribuida[19] en donde se puede observar que algunos sectores de la red se presenta una mayor propagación de la información que en otros.
3. **Como una medida de conectividad:** Es una estrategia para conocer la conectividad entre diferentes grupos de nodos o estructuras que existen en la red a medida que se retiran las conexiones entre ellos. Una interpretación física es identificar la habilidad del sistema para sortear fallos o ataques, considere por ejemplos dos grupos de nodos A y B que se comunican a través de un enlace a una distancia dada, si empiezan a fallar las conexiones entre ellos, se examina la fortaleza el enlace que son el número de caminos entre A y B y la distancia que se requiere para que se puedan comunicar.

Fractalidad y Multifractalidad en Redes

La fractalidad[12] o dimensión fractal es una medida de autosimilaridad, es decir que un grafo o una red las grandes estructuras son similares a las micro-estructuras, también es una medición de repulsión entre diferentes *hubs*. Esta propiedad describe En una red de mundo pequeño son los nodos clave que se encuentran en casi todos los caminos entre un par de vértices. Esta medida es muy útil debido a que una red puede ser estudiada con a partir de un subgrafo de la red.

En sistemas reales las fractalidad y multifractalidad se presenta en un sistema cuando este presentan la tendencia a presentar comportamientos similares en diferentes escalas de observación y la geometría Euclidiana no permite caracterizar una dimensión fractal[20].

La propiedad fractal de una red puede ser descrita tomando el número mínimo de subgrafos o redes de diámetro l requeridos para cubrir toda la red y la dimensión fractal D_r es decir l^{-D_r} .

La multifractalidad[2] es una propiedad que se encuentra en muchas redes en donde estas no pueden ser estudiadas únicamente con una sola dimensión fractal D_r , es decir que para cubrir la red se necesita un conjunto de subgrafos con diferente estructura.

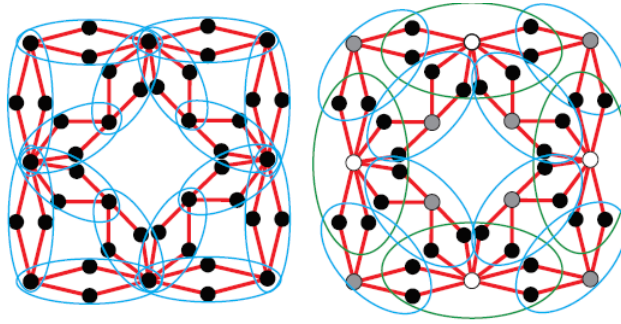


Figura 2.5: Red con cobertura multifractal. Tomado de [2]

En el caso de la figura 2.5 la red mostrada puede ser cubierta por dos diferentes estructuras de subgrafos.

El conjunto técnicas más utilizada para hallar la dimensión fractal o multifractal de una red, es conocida como técnicas de *Box Covering*[6] que consisten en encontrar cajas de tamaño l_B que cubran la red. En general, se tienen los siguiente pasos:

1. **Crear todas las posibles cajas:** Para cada nodo v_i en la red crear una caja B que contienen todos los nodos que se encuentran a una distancia de $r_B = (l_B - 1)/2$. Este nodo seleccionado es el centro de la red.
2. **Remover las cajas innecesarias:** Se busca y remueven las cajas que están totalmente contenidas en otra caja.
3. **Remover los nodos innecesarios:** Es un proceso de búsqueda donde se verifica cada nodo i y todas las cajas que contienen i . Si otro nodo $j \neq i$ está contenido en todas las cajas, este nodo es removido.
4. **Remover todos los pares innecesarios:** Tomando dos nodos i y j que están en dos cajas de tamaño 2: $B_{i1} = i, k_1$ y $B_{i2} = i, k_2$ y $B_{j1} = j, l_1$ y $B_{j2} = j, l_2$. Si $k_1 = l_1$ y $k_2 = l_2$ entonces B_{i2} y B_{j1} pueden ser eliminados.

5. **Buscar todas las cajas que podrían ser una solución:** Se agregan todas las B_i en la solución donde tienen un sólo nodo i presenten en esta caja. Eliminar todos los nodos $j \neq i$ cubiertos por B_i de otras cajas.
6. **Iterar:** Repetir los pasos 2 al 5 hasta que no existe un nodo cubierto por una simple caja y no sea parte de la solución.
7. **Partición del sistema:** Identificar si la red resultante puede ser dividida en pequeñas subredes con todos los subredes que contienen solo nodos en esta subred.
8. **Partición del sistema:** Encontrar el nodo que tiene el menor número de cajas N_{box} que lo cubren. Entonces, el algoritmo es dividido en N_{box} algoritmos. A cada una de estas cajas se le aplica el algoritmo de Box Covering.
9. **Iterar:** Repetir los pasos 2 al 8 hasta que no existan nodos no cubiertos.
10. **Identificar la mejor solución:** Elija la solución con el menor número de cajas. Esta es la mejor solución para un r_B dado.

Para obtener la dimensión fractal se aplica la formula: $N_B r_b^{-d_b}$, donde N_B es la distribución de grado de la caja y r_b la dimensión de la misma.

La complejidad de este algoritmo depende del tipo de red, debido a que el problema es NP-Hard, por ejemplo para el caso de algunas redes se pueden obtener complejidades de $O(N^3)$ y para redes regulares $O(2^N)$.

Las diferentes técnicas de BoxCovering[20] varían de acuerdo a la estrategia que se utilice para explorar la red compleja, algunas estrategias son descritas en la tabla 2.1.2.

Método de Box Counting	Descripción	Publicación
Método de Box Counting	<p>Es el más frecuentemente utilizado, requiere una señal binaria y consiste en cubrir la red con cajas de tamaño r, en donde la estructura de las cajas sea lo más similar posible, en general se busca determinar la dimensión fractal FD:</p> $FD = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(1/r)},$ <p>donde $N(r)$ es el número de cajas que se requieren para cubrir la red compleja. Este presenta limitaciones[21], debido a que funciona correctamente únicamente en redes autosimilares.</p>	Dimension of Strange Attractors, Autores: Russell, David A. Hanson, James D. y Ott, Edward[22]
Método de Box Counting Diferencial	<p>Es una adaptación del método de Box Counting, donde se busca resolver las limitaciones con respecto a las redes autosimilares, este consiste en obtener varios tamaños r de cajas y $N(r)$ es computado iterativamente entre el máximo y mínimo r obtenido.</p>	Texture segmentation using fractal dimension de B.B. Autores: Chaudhuri y N. Sarkar [23]
Método de Conteo Extendido	<p>Este método es aplicado a muchos subconjuntos de un conjunto fractal y establece que el máximo valor de la dimensión fractal dentro del conjunto de subconjuntos de una red es la dimensión fractal.</p>	Measuring fractal dimension and complexity—an alternative approach with an application , autor: K. Sandau, H. Kurz[24]

Tabla 2.1: Técnicas de Box Covering para la medición de fractalidad

2.1.3. Inteligencia artificial

Definiciones

La inteligencia artificial (IA)[25] es un área de ciencias de la computación que utiliza conceptos de matemáticas, lógica y filosofía para resolver problemas utilizando el paradigma de la inteligencia humana. Los algoritmos basados en IA se caracterizan por búsqueda de un estado objetivo en el conjunto de posibles estados producidos por las acciones de percepción de un elemento en el sistema.

Los tipos de inteligencia artificial son:

1. **Sistemas que piensan como humanos:** Estos sistemas intentan acercarse al funcionamiento del pensamiento humano, como es el caso las redes neuronales. Estos sistemas involucran aprendizaje, la automatización de procesos a partir de conceptos derivados del pensamiento humano, la toma de decisiones, resolución de problemas.
2. **Sistemas que actúan como humanos:** Se intenta reproducir el comportamiento humano, un claro ejemplo es robótica.
3. **Sistemas que piensan racionalmente:** Se utilizan conceptos de lógica matemática para acercarse al pensamiento lógico racional del ser humano, un ejemplo son los sistemas expertos.
4. **Sistemas que piensan racionalmente:** Son sistemas que intentan actuar racionalmente, como es el caso de los sistemas inteligentes.

Técnicas de inteligencia artificial

Algunas técnicas de inteligencia artificial que por su flexibilidad se consideran potenciales para la medición de parámetros para el análisis de la multifractalidad y robustez son:

1. Algoritmos genéticos.
2. Redes neuronales.
3. Algoritmos de enjambre.
4. Simulated annealing.
5. Aprendizaje automatico (machine learning)

Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos [26] son un proceso para dar solución a problemas mediante una serie de pasos inspirados en la evolución biológica, en donde se puede encontrar soluciones

mediante la especificación de individuos o posibles soluciones, que se a un proceso de evolución.

El proceso de evolución se describe de la siguiente forma:

1. Especificación de individuos: Se crean un conjunto de soluciones aleatorias del problema
2. Se evalúan las soluciones mediante un proceso de selección.
3. Las soluciones se combinan entre sí generando nuevas soluciones, las mejores soluciones del paso anterior tienen mayor probabilidad de estar en la combinación.
4. Se cambia al azar características de algunas soluciones
5. Se reemplazan los individuos bajo alguna condición (muerte de los individuos antiguos o se dejan los mejores) y se repite el paso 2, hasta que se alcanza un número de iteraciones o se cumple alguna condición.

Redes neuronales

Las redes neuronales [27] son una técnica basada en el funcionamiento del sistema nervioso de los animales. Consiste en una sistema interconectado de neuronas, cada neurona es una unidad que recibe una o más entradas y emite una salida que depende de:

1. Una función de propagación en cada neurona, que comúnmente consiste en la suma de los aportes de las entradas
2. Una función de activación, que indica el valor de la salida de la neurona, dependiendo de los valores de las entradas aplicados en la función de propagación.
3. Un peso sináptico: cada entrada de la neurona se multiplica por una constante, esta es la entrada que percibe la neurona.

Las redes neuronales suelen utilizarse en arquitecturas de una o más capas, dependiendo del problema que se desea resolver. En el problema tratado en este trabajo se utilizarán arquitecturas de tres capas, una de entrada, una de procesamiento y una de salida.

Una red neuronal *aprende* de su entorno, al modificar los pesos sinápticos. En este trabajo se utilizará el algoritmo **perceptrón multicapa**

Algoritmos de enjambre.

Los algoritmos de enjambre[28] son aquellos donde se utiliza el estudio colectivo de sistemas descentralizados y auto-organizados naturales, como es el caso de las hormigas y abejas.

Estos sistemas están formados por un conjunto de agentes simples que interactúan entre sí y su medio ambiente. Los agentes siguen reglas simples y aunque no existe una estructura de control centralizado para determinar el comportamiento, las interacciones conducen a procesos de emergencia, es decir un comportamiento global complejo. Estas técnicas son utilizadas para la solución de problemas que involucran búsqueda en espacios combinatorios amplios.

Simulated Annealing

Los algoritmos de simulated annealing[29] utilizan heurísticas basadas en conceptos de calentamiento y enfriamiento de materiales, el objetivo de estos algoritmos es encontrar una buena aproximación a un óptimo global. Estos algoritmos se basan en la existencia de un universo de estados s , el algoritmo realiza iteraciones desde un estado inicial s_i hasta un estado final s_f , las transiciones buscan pasar de un estado de mayor energía a uno de menor energía (menos calor), mediante la aplicación de una función de probabilidad $P(\delta E, T)$ donde δE representa una diferencia de energía entre el estado actual y el siguiente y T es la temperatura actual del sistema.

Aprendizaje automatico (machine learning)

Son técnicas que permiten proponer soluciones a problemas computacionales a través del aprendizaje, en otras palabras, consiste en generar programas que sean capaces de solucionar problemas a partir de la información que se ha suministrado de ellos. Estos algoritmos han sido enfocados hacia la solución de problemas **NP-Hard** como es el caso de diagnosticos médicos, análisis de mercados, clasificación de secuencias de ADN, entre otros[30].

Los sistemas de aprendizaje automático suelen modelarse los problemas de acuerdo a la siguiente clasificación

1. **Modelos geométricos:** Construidos en un espacio de 1 o más dimensiones, donde cada dimensión es un atributo del problema a estudiar, los atributos son clasificados en clases para poder obtener representaciones numéricas.
2. **Modelos probabilísticos:** Se intenta modelar un problema a partir de relaciones probabilísticas entre los diferentes atributos, en el caso de redes complejas existen propiedades que van de acuerdo a relaciones probabilísticas como es el caso de la distribución de grado.
3. **Modelos lógicos:** En este modelo se intentará describir un problema a partir de un conjunto de reglas lógicas.

Los algoritmos de aprendizaje automático se pueden clasificar en:

- **Aprendizaje supervisado:** Se establece una relación entre las entradas y salidas de

un sistema. En este tipo de aprendizaje se cuenta con datos de entrenamiento y prueba para establecer correctamente el modelo de un problema

- **Aprendizaje no supervisado:** Solo se tiene en cuenta las entradas del sistema.
- **Aprendizaje por refuerzo:** El sistema aprende a partir de la retroalimentación que da el mundo a real a sus salidas.

2.2. Estado del arte

Fractalidad y multifractalidad

Para el caso de la fractalidad están los trabajos de Molontay[31], en el cual se utiliza la técnica de Box Covering, que es aplicada sobre redes aleatorias y se realiza su estudio aplicando los modelos de Song-Havlin-Makse que consisten en medir el nivel de repulsión entre *hubs* y el modelo de *tree flowers* que permite medir la construcción recursiva de la red. La técnica es explicada en detalle en el trabajo de Dai-Jun[32], en donde se explica que para aplicar el algoritmo de búsqueda, primero se deben crear todas las posibles cajas en la red, luego se remueven las cajas innecesarias, es decir aquellas que quedan dentro de otras cajas. Posteriormente, se eliminan los nodos innecesarios que son aquellos que están dentro de las cajas, asumiendo que toda la caja es un solo nodo. En los resultados se ha encontrado que esta técnica encuentra la dimensión fractal de una red más rápido que otras técnicas de la literatura.

Otro trabajo en medición y aplicación de fractalidad en redes es el de Barriere y Comellas [33], donde se estudia la fractalidad y el efecto sobre redes de mundo pequeño en grafos Sierpinsky, que son grafos que presentan un alto nivel de heterogeneidad entre sus nodos, en este trabajo se realiza la medición de fractalidad para apoyar el proceso de generación estos grafos sin perder sus propiedades. También se han realizado trabajos utilizando variantes de algoritmos propuestos en la literatura, como es el caso del trabajo de Li Kuang titulado *A differential evolution box-covering algorithm for fractal dimension on complex networks*[34], en el cual se utiliza el algoritmo de coloreo de grafos iterativamente, a las cajas encontradas por un algoritmo de Box Covering, eliminando nodos que queden dentro de una caja. El número de colores da una aproximación a la dimensión fractal de la red, según los resultados del artículo utilizar estrategias híbridas permite obtener resultados en menor tiempo computacional, debido a que no se necesita explorar todo el espacio de soluciones si no una parte de él, sin embargo, advierten que la técnica no aplica para todos los tipos de red y que tiene cierto margen de error.

En el caso de la multifractalidad, se han realizado trabajos sobre el análisis multifractal en redes, como es el caso del trabajo de Wang titulado *Multifractal analysis of complex networks*[35], en el cual se realiza un estudio de patrones multifractales en diferentes redes reales como es el caso de la red mundial de computadores (WWW) y redes de interacciones proteína-proteína. En este estudio se utiliza la noción que los fractales no son homogéneos, dos

objetos pueden tener la misma dimensión fractal pero pueden verse totalmente diferentes. El algoritmo más aplicado para el análisis multifractal es el *fixed-size box-counting algorithm* el cual asume que la dimensión fractal es una función acotada que describe todas las posibles dimensiones fractales que se encuentran en la red. El análisis de sistemas multifractales, se encuentra el trabajo realizado por Macek titulado *Multifractality and intermittency in the solar wind*[36] en el cual se estudian patrones multifractales en el espectro del viento solar. En este trabajo se encontró que el viento solar presentar características espectrales como atractores fractales, por lo que este puede ser estudiado considerando las diferentes estructuras asociadas a cada uno de los atractores fractales. Un estudio interesante está enfocado en el análisis de vulnerabilidad de redes complejas de Li Gou[37], que realiza un estudio sobre diferentes redes a partir del cálculo de la dimensión fractal de ellas, se identifican las subredes relevantes del sistema complejo y se hace un análisis de vulnerabilidad sobre ellas, basado en como se afecta la distancia geodésica entre dos nodos, si algunos enlaces empiezan a fallar. En este trabajo llegan a la conclusión que la dimensión fractal no caracteriza a las redes, si no que da una noción de cubrimiento de las mismas, es de decir de la existencia de fuertes conexiones entre los diferentes nodos.

Robustez

Los trabajos en el caso de la medición de la robustez están asociados principalmente con la tolerancia a fallos, tal es el caso del trabajo de Calvo, Gallego[38], en este trabajo se realizó la modelación del sistema de metro utilizando las estaciones y las conexiones dadas por las rutas que pasan por ella, se determina que tanta tolerancia tiene un sistema de metro a las fallas, utilizando la medición de robustez a partir de determinar las líneas de metro funcionales después de que algunas líneas son sacadas del sistema. Finalmente, se realizó una comparación entre algunas ciudades alrededor del mundo, encontrando medidas similares de robustez. Otro trabajo relacionado con la robustez, es el estudio de los sistemas urbanos de transporte y su comportamiento en situaciones inesperadas donde uno o mas de sus nodos fallan, como es el caso del artículo de Laura Velez y Rafael Hurtado[16], donde se hace una revisión de la literatura asociada a este problema, desde la modelación del sistema de tráfico como una red y la medición de su vulnerabilidad mediante el método de eliminación de nodos, este trabajo resulta útil para esta propuesta de investigación ya que reúne conceptos para el estudio de la vulnerabilidad o robustez de las redes complejas. Otro trabajo interesante, es el presentado por Ronildo Silva [39], en donde se utiliza el estudio de robustez y otros parámetros de las redes Biológicas y se asocia con las redes de computadoras que conforman la Internet, se evalúan aspectos como la modularidad y capacidad evolutiva de la red, encontrándose grandes semejanzas entre las redes biológicas y la Internet, entre ellas está la evolución frente a los cambios, crecimiento de las redes y cambios en la arquitectura de la red con el paso del tiempo.

Otro estudio relevante es aplicado a la resistencia de las redes ante ataques, uno de ellos[17] estudia el comportamiento de sistemas de red a medida que sus componentes y enlaces son víctimas de ataques que los degradan o quedan por fuera de funcionamiento, la prueba que

se realiza para el estudio de las redes es eliminar paulatinamente el grado de ciertos vértices de forma aleatoria y posteriormente analizar factores como la distancia que se debe recorrer para comunicar dos nodos.

Técnicas de Inteligencia Artificial en redes complejas

Los trabajos donde se han utilizado técnicas de inteligencia artificial para la medición de parámetros en redes complejas están basados principalmente en estrategias para optimizar algoritmos ya existentes, como es el caso del trabajo de Zhou[40], en donde se explica la autosimiliidad en redes complejas celulares mediante un método de cobertura de aristas utilizando algoritmos de *Simulated Annealing* en un algoritmo de *Box Covering*. La propuesta de esta técnica consiste en encontrar un número mínimo de N cajas de tamaño l que pueda cubrir las aristas de la red. Las pruebas se realizaron sobre 43 redes celulares, encontrando que estas redes presentan una distribución de ley de potencia $N_e = l^{-D_E}$ donde la dimension fractal es $D_E = [2,67 \pm 0,15]$. Sin embargo, este resultado no puede concluir que exista un comportamiento de ley de potencia es las redes celulares.

Un libro relevante es el de Michell Kirley y Robert Stewart llamado *Multiobjective Evolutionary Algorithms on Complex Networks*[41], en donde se realiza una introducción del uso de algoritmos evolutivos multiobjetivo en redes complejas. Este libro ofrece diferentes acercamientos teóricos para permitir mapear los nodos de una red dentro de los individuos de una población, crear reglas de selección y evolución de tal manera se pueda modelar una red compleja y así aplicar algoritmos para la medición de parámetros en ellas.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se realiza la presentación sobre la estrategia para el desarrollo y la organización de las diferentes tareas que se requieren en este proyecto de maestría.

3.0.1. Etapas del proyecto

Para el desarrollo de este proyecto se establecen cuatro etapas:

1. **Etapas de estudio del estado del arte:** En esta etapa se realiza una búsqueda exhaustiva de trabajos relacionados con la medición de multifractalidad y robustez en redes, así mismo como técnicas de inteligencia artificial que permitan realizar esta medición
2. **Etapas de análisis del estado del arte:** Se busca establecer que elementos y conceptos encontrados en la etapa anterior pueden ser útiles para el desarrollo del proyecto
3. **Etapas de diseño de las técnicas:** En esta etapa se generan las técnicas para la medición de la multifractalidad y robustez en redes complejas.
4. **Etapas de implementación de librería prototipo:** En esta etapa se desarrolla la librería para realizar la medición, se realizan pruebas de funcionamiento y pruebas.
5. **Etapas de pruebas:** Se realizan pruebas en la librería prototipo para validar la medición correcta de los parámetros y su desempeño frente a otras soluciones encontradas en la literatura.

3.0.2. Tareas a realizar

Para cumplir cada uno de los objetivos específicos y las etapas del proyecto se estructuran las siguientes tareas.

Tareas continuas

- **T0:** Escritura del documento final del proyecto
- **T1:** Escritura de un artículo de divulgación científica acerca de los logros parciales del proyecto.

Etapas de estudio del estado del arte

- **T2:** Revisión de literatura sobre la medición de robustez y multifractalidad en redes complejas.
- **T3:** Revisión de literatura sobre técnicas de inteligencia artificial aplicadas en la medición de parámetros en redes complejas.
- **T4:** Revisión de literatura sobre procesamiento distribuido de algoritmos en redes complejas.

Etapas de análisis del estado del arte

- **T5:** Análisis y selección de las técnicas de inteligencia artificial para la medición de robustez y multifractalidad en redes complejas.
- **T6:** Identificación de los elementos para la medición de robustez y multifractalidad en redes complejas.
- **T7:** Identificación de las estrategias para el planteamiento de técnicas de inteligencia artificial para la solución del problema.

Etapas de diseño de las técnicas

- **T8:** Generación de las estrategias y heurísticas para las técnicas de inteligencia artificial que permitan la medición de robustez y multifractalidad en redes complejas.
- **T9:** Diseño de estrategias para el procesamiento distribuido de las técnicas diseñadas.
- **T10:** Realización de verificaciones teóricas y prácticas sobre la validez de las técnicas de inteligencia artificial diseñadas.

Etapas de implementación de librería prototipo y pruebas

- **T11:** Diseño y creación de una librería prototipo que proporcione funciones para la medición de multifractalidad y robustez a partir de lo realizado en las tareas T8, T9 y T10.

Etapas de pruebas:

- **T12:** Creación de escenarios de prueba
- **T13:** Realización de pruebas de rendimiento de la librería diseñada sobre los diferentes escenarios de prueba
- **T14:** Realización de pruebas comparativas de rendimiento de la librería diseñada frente a algoritmos disponibles para la medición de multifractalidad y robustez.
- **T15:** Análisis de los resultados obtenidos.

3.0.3. Cronograma de actividades

El proyecto está programado para ser realizado en seis meses o veinticuatro semanas, acorde a un proyecto de investigación en maestría, se presenta el siguiente cronograma:

Tarea Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
T0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
T1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
T2	X	X	X	X																				
T3	X	X	X	X																				
T4		X	X	X	X																			
T5						X	X	X	X															
T6						X	X	X	X															
T7								X	X	X														
T8											X	X	X	X	X	X								
T9												X	X	X	X	X								
T10																X	X	X						
T11																X		X	X	X	X			
T12																				X				
T13																					X	X	X	
T14																					X	X	X	
T15																							X	X

Tabla 3.1: Cronograma de actividades

3.0.4. Presupuesto

Para este proyecto se cuenta con un estudiante de maestría en ciencias de la computación y un profesor con título de doctorado de la Universidad del Valle.

3.0.5. Personal

A continuación se especifican los costos del personal del proyecto en pesos (COP). La dedicación del estudiante es de 40 horas semanales y del profesor de 5 horas por semana.

Insumo	Valor hora	Horas	Aporte Universidad	Aporte estudiante	Total
Estudiante maestría	35000	960		33600000	33600000
Profesor	50000	200	10000000		10000000
Total					43600000

Tabla 3.2: Presupuesto del personal del proyecto

3.0.6. Equipos

A continuación se especifican los costos de los equipos del proyecto en pesos (COP)

Insumo	Valor unidad	Número unidades	Aporte Universidad	Aporte estudiante	Total
Computador	2000000	1		2000000	2000000
Hora procesamiento distribuido	50000	100	5000000		10000000
Total					7000000

Tabla 3.3: Presupuesto de equipos del proyecto

3.0.7. Otros

A continuación se especifican los costos de otros tópicos del proyecto en pesos (COP)

Insumo	Valor unidad	Número unidades	Aporte Universidad	Aporte estudiante	Total
Presentación artículos en congresos	1500000	2		3000000	3000000
Total					3000000

Tabla 3.4: Presupuesto de otros tópicos del proyecto

3.0.8. Total

A continuación se especifican los costos totales del proyecto en pesos (COP)

Insumo	Aporte Universidad	Aporte estudiante	Total
Personal	33600000	10000000	43600000
Equipos	2000000	5000000	7000000
Otros	0	3000000	3000000
Total	53600000	18000000	71600000

Tabla 3.5: Presupuesto total del proyecto

Capítulo 4

Bibliografía

- [1] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM Rev.*, vol. 45, pp. 167–256, jan 2003.
- [2] S. Furuya and K. Yakubo, “Multifractality of complex networks,” *Physical Review E*, vol. 84, sep 2011.
- [3] C. Song, L. K. Gallos, S. Havlin, and H. A. Makse, “How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm,” *J. Stat. Mech.*, vol. 2007, pp. P03006–P03006, mar 2007.
- [4] P. Caraianni, “Evidence of multifractality from emerging european stock markets,” *PLoS ONE*, vol. 7, p. e40693, jul 2012.
- [5] M. Aldana, “Redes complejas : Estructura , dinámica y evolución.” <http://www.fis.unam.mx/~max/MyWebPage/notastwocolumn.pdf>. Consultado 11-01-2016.
- [6] C. M. Schneider, T. A. Kesselring, J. S. Andrade, and H. J. Herrmann, “Box-covering algorithm for fractal dimension of complex networks,” *Physical Review E*, vol. 86, jul 2012.
- [7] J. Martin Hernandez, *Measuring Robustness of Complex Networks*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2013.
- [8] A.-L. Barabási, *Network Science*. Cambridge University Press, 2016.
- [9] A. laszlo Barabasi and J. Frangos, *Linked: The New Science of Networks*. Perseus Books Group, 2002.
- [10] K. Rosen and J. Morales, *Matemática discreta y sus aplicaciones*. McGraw-Hill, 2004.
- [11] L. Barabási, *Linked : the new science of networks*. Cambridge, Mass: Perseus Pub, 2002.

- [12] G. Long and C. XU, “The fractal dimensions of complex networks,” *Chinese Physics Letters*, vol. 26, p. 088901, aug 2009.
- [13] M. Macho Stagler, “¿qué es la topología?.” <http://www.ehu.eus/~mtwmastm/sigma20.pdf>. Consultado 11-01-2016.
- [14] M. Newman, *Networks: An Introduction*. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 2010.
- [15] S. Milgram, “The small world problem,” *Psychology Today*, vol. 67, no. 1, pp. 61–67, 1967.
- [16] R. G. LOTERO VELEZ, Laura y HURTADO HEREDIA, “Vulnerabilidad de redes complejas y aplicaciones al transporte urbano: una revisión de la literatura,” *Revista EIA*, pp. 67–78, 2014.
- [17] S. Iyer, T. Killingback, B. Sundaram, and Z. Wang, “Attack robustness and centrality of complex networks,” *PLoS ONE*, vol. 8, p. e59613, apr 2013.
- [18] S. Mueller, R. Tsang, and D. Ghosal, “Multipath routing in mobile ad hoc networks: Issues and challenges,” in *Performance Tools and Applications to Networked Systems* (M. Calzarossa and E. Gelenbe, eds.), vol. 2965 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 209–234, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [19] P. Eugster, R. Guerraoui, A.-M. Kermarrec, and L. Massoulie, “Epidemic information dissemination in distributed systems,” *Computer*, vol. 37, pp. 60–67, May 2004.
- [20] R. Lopes and N. Betrouni, “Fractal and multifractal analysis: A review,” *Medical Image Analysis*, vol. 13, pp. 634–649, aug 2009.
- [21] F. m. c. Normant and C. Tricot, “Method for evaluating the fractal dimension of curves using convex hulls,” *Phys. Rev. A*, vol. 43, pp. 6518–6525, Jun 1991.
- [22] D. A. Russell, J. D. Hanson, and E. Ott, “Dimension of strange attractors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, pp. 1175–1178, Oct 1980.
- [23] B. Chaudhuri and N. Sarkar, “Texture segmentation using fractal dimension,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no. 1, pp. 72–77, 1995.
- [24] K. SANDAU and H. KURZ, “Measuring fractal dimension and complexity - an alternative approach with an application,” *Journal of Microscopy*, vol. 186, pp. 164–176, may 1997.
- [25] N. J. Nilsson, *Artificial Intelligence: A New Synthesis*. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1998.
- [26] A. G. Serrano, *Inteligencia artificial*. RC Libros, 1900.

- [27] J. R. H. Gonzalez, *Redes neuronales artificiales: Fundamentos, modelos y aplicaciones (Serie Paradigma) (Spanish Edition)*. RA-MA, 1995.
- [28] R. C. Eberhart, Y. Shi, and J. Kennedy, *Swarm Intelligence (The Morgan Kaufmann Series in Evolutionary Computation)*. Morgan Kaufmann, 2001.
- [29] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” *Science*, vol. 220, pp. 671–680, may 1983.
- [30] C. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)*. Springer, 2007.
- [31] R. Molontay, “Fractal characterization of complex networks,” Master’s thesis, Budapest University of Technology and Economics, 2015.
- [32] D.-J. Wei, Q. Liu, H.-X. Zhang, Y. Hu, Y. Deng, and S. Mahadevan, “Box-covering algorithm for fractal dimension of weighted networks,” *Sci. Rep.*, vol. 3, oct 2013.
- [33] L. Barrière, F. Comellas, and C. Dalfó, “Fractality and the small-world effect in sierpinski graphs,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 39, no. 38, p. 11739, 2006.
- [34] L. Kuang, Z. Zhao, F. Wang, Y. Li, F. Yu, and Z. Li, “A differential evolution box-covering algorithm for fractal dimension on complex networks,” in *Evolutionary Computation (CEC), 2014 IEEE Congress on*, pp. 693–699, July 2014.
- [35] D.-L. Wang, Z.-G. Yu, and V. Anh, “Multifractal analysis of complex networks,” *Chinese Physics B*, vol. 21, p. 080504, aug 2012.
- [36] W. M. Macek, “Multifractality and intermittency in the solar wind,” *Nonlin. Processes Geophys.*, vol. 14, pp. 695–700, nov 2007.
- [37] L. Gou, B. Wei, R. Sadiq, S. Mahadevan, and Y. Deng, “An improved vulnerability index of complex networks based on fractal dimension,” *CoRR*, vol. abs/1406.0379, 2014.
- [38] E. Calvo Gallego, “Evaluación de la robustez de las redes: Aplicación a sistemas de metro.” Recurso virtual, 2015.
- [39] R. M. Silva, “Una visión biológica para la arquitectura de internet,” *USBMed*, pp. 40–47, 2011.
- [40] W.-X. Zhou, Z.-Q. Jiang, and D. Sornette, “Exploring self-similarity of complex cellular networks: The edge-covering method with simulated annealing and log-periodic sampling,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 375, pp. 741–752, mar 2007.
- [41] M. Kirley and R. Stewart, “Multiobjective evolutionary algorithms on complex networks,” in *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 81–95, Springer Science Business Media.