**Seminari d'Àlgebra commutativa**
**21 de maig de 2024**

En tot el seminari $R$ és un domini de Dedekind, amb cos de fraccions $F$. Recordeu que un ideal enter és simplement un ideal de $R$, mentre que un ideal fraccional $I$ és un $R$-submòdul no nul de $F$ tal que $aI \subseteq R$ per algun $0 \neq a \in R$. Recordeu també que els ideals fraccionals formen un monoide $\mathrm{Frac}(R)$ amb el producte i neutre $R$, que un domini és de Dedekind si $\mathrm{Frac}(R)$ és un grup (i.e., donat $I$ fraccional, existeix $I^{-1}$ tal que $II^{-1} = R$).

1. Definim el *grup de classes* $C(R) = \mathrm{Frac}(R)/\mathrm{Prin}(R)$, on $\mathrm{Prin}(R) = \{\frac{a}{b}R \colon a, b \in R\}$ és el subgrup d'ideals *principals*. Proveu que $C(R)$ es pot identificar amb el conjunt de classes d'isomorfisme (com $R$-mòduls) d'ideals enters no nuls.

2. (i) Donat $I$ ideal fraccional, utilitzant que $II^{-1} = R$, proveu que $I$ és projectiu i finitament generat. Deduïu que $R$ és noetherià.

   (ii) Proveu que si $M$ és projectiu fg, aleshores $M$ és isomorf a una suma directa d'ideals (projectius).

   (iii) Deduïu que les classes d'isomorfisme d'ideals generen $\mathrm{K}_0(R)$.

3. (i) Proveu que tot ideal primer és maximal. Indicació: Suposeu que existeix $I$ primer no maximal, i agafeu $J$ ideal propi tal que $I \subsetneq J$. Considereu $K = J^{-1}I$.

   (ii) Proveu que tot ideal propi de $R$ factoritza de manera única com a producte d'ideals primers (=maximals). Indicació: Considereu el conjunt $\mathcal{C} = \{I \colon I \subsetneq R$ és ideal que no factoritza$\}$ i si $\mathcal{C} \neq \emptyset$ utilitzeu que $R$ és noetherià.

   (iii) Deduïu que $\mathrm{Frac}(R)$ és isomorf al $\mathbb{Z}$-mòdul lliure amb base el conjunt d'ideals primers de $R$.