Problema 1. *Proveu que:*

1. *Si A és una R-àlgebra, el producte $A \times A \to A$ donat per $(a, a') \mapsto aa'$ és bilineal.*

   Demostració. Sigui $\varphi : A \times A \to A$ definit per $\varphi(a, a') := aa'$. Fixem $a \in A$. Veiem que $\varphi(a, -) : A \to A$ definit per $\varphi(a, -)(a') := \varphi(a, a')$ és un morfisme de R-mòduls. Donats $a_1, a_2 \in A$,

$$\begin{aligned}
\varphi(a,-)(a_1+a_2) &= \varphi(a, a_1+a_2) && \text{(Per definició de } \varphi(a,-)) \\
&= a(a_1+a_2) && \text{(Per definició de } \varphi) \\
&= aa_1 + aa_2 && (A\ R\text{-àlgebra}) \\
&= \varphi(a,a_1) + \varphi(a,a_2) && \text{(Per definició de } \varphi) \\
&= \varphi(a,-)(a_1) + \varphi(a,-)(a_2) && \text{(Per definició de } \varphi(a,-))
\end{aligned}$$

   Donats $r \in R$, $a' \in A$,

$$\begin{aligned}
\varphi(a,-)(ra') &= \varphi(a, ra') && \text{(Per definició de } \varphi(a,-)) \\
&= a(ra') && \text{(Per definició de } \varphi) \\
&= r(aa') && (A\ R\text{-àlgebra}) \\
&= r\varphi(a,a') && \text{(Per definició de } \varphi) \\
&= r\varphi(a,-)(a') && \text{(Per definició de } \varphi(a,-))
\end{aligned}$$

   Aleshores, $\forall a(a \in A \Rightarrow \varphi(a, -) \in \mathrm{Hom}_R(A, A))$. Simètricament, $\forall a'(a' \in A \Rightarrow \varphi(-, a') \in \mathrm{Hom}_R(A, A))$, on $\varphi(-, a')(a) := \varphi(a, a')$. Per tant, $\varphi \in \mathrm{Bil}_R(A \times A, A)$. □

2. *Si M i N són R-mòduls, llavors el conjunt $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ és també un R-mòdul amb estructura natural. Deduïu que l'aplicació ev : $M \times \mathrm{Hom}_R(M, N) \to N$ donada per $(m, \varphi) \mapsto \varphi(m)$ és bilineal.*

   Demostració. Siguin $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Definim $(f_1 + f_2) : M \to N$ per $(f_1 + f_2)(m) := f_1(m) + f_2(m)$. Siguin $r \in R$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Definim $rf : M \to N$ per $rf(m) := r(f(m))$. Clarament $(f_1 + f_2), (rf) \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$.
   Veiem que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ és un R-mòdul. Clarament $(\mathrm{Hom}_R(M, N), +)$ és un grup abelià. Veiem que $\mu : R \times \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, N)$ definit per $\mu(r, f) := rf$ satisfà els axiomes necessaris. Siguin $r, r_1, r_2 \in R$, $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ i $m \in M$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
(r(f_1+f_2))(m) &= r(f_1+f_2)(m) && \text{(Per definició de } rf) \\
&= r(f_1(m)+f_2(m)) && \text{(Per definició de } (f_1+f_2)) \\
&= r(f_1(m)) + r(f_2(m)) && (N\ R\text{-mòdul}) \\
&= (rf_1)(m) + (rf_2)(m) && \text{(Per definició de } rf) \\
&= (rf_1 + rf_2)(m) && \text{(Per definició de } (f_1+f_2))
\end{aligned}$$

   d'on deduïm $r(f_1 + f_2)) = rf_1 + rf_2$.

$$\begin{aligned}
((r_1+r_2)f)(m) &= (r_1+r_2)(f(m)) && \text{(Per definició de } rf) \\
&= r_1(f(m)) + r_2(f(m)) && (N\ R\text{-mòdul}) \\
&= (r_1f)(m) + (r_2f)(m) && \text{(Per definició de } rf) \\
&= (r_1f + r_2f)(m) && \text{(Per definició de } (f_1+f_2))
\end{aligned}$$

   d'on deduïm $(r_1 + r_2)f = r_1f + r_2f$.

$$\begin{aligned}
((r_1r_2)f)(m) &= (r_1r_2)(f(m)) && \text{(Per definició de } rf) \\
&= r_1(r_2(f(m))) && (N\ R\text{-mòdul}) \\
&= r_1((r_2f)(m)) && \text{(Per definició de } rf) \\
&= (r_1(r_2f))(m) && \text{(Per definició de } rf)
\end{aligned}$$

d'on deduïm $(r_1r_2)f = r_1(r_2f)$.

$$\begin{aligned}
(1_R f)(m) &= 1_R(f(m)) && \text{(Per definició de } rf\text{)}\\
&= f(m) && \text{(}1_R \text{ element neutre de } R\text{)}
\end{aligned}$$

d'on deduïm $1_R f = f$. Aleshores, μ satisfà els axiomes de R-mòdul, d'on $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ és R-mòdul. Comprovem que ev és R-bilineal. Fixem $m \in M$. Veiem que $ev(m,-) : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to N$ definit per $ev(m,-)(\varphi) := ev(m,\varphi)$ és un morfisme de R-mòduls. Donats $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$,

$$\begin{aligned}
ev(m,-)(\varphi_1+\varphi_2) &= ev(m,\varphi_1+\varphi_2) && \text{(Per definició de } ev(m,-)\text{)}\\
&= (\varphi_1+\varphi_2)(m) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= \varphi_1(m)+\varphi_2(m) && \text{(Per definició de } (\varphi_1+\varphi_2)\text{)}\\
&= ev(m,\varphi_1)+ev(m,\varphi_2) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= ev(m,-)(\varphi_1)+ev(m,-)(\varphi_2) && \text{(Per definició de } ev(m,-)\text{)}
\end{aligned}$$

Donats $r \in R$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$,

$$\begin{aligned}
ev(m,-)(r\varphi) &= ev(m,r\varphi) && \text{(Per definició de } ev(m,-)\text{)}\\
&= (r\varphi)(m) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= r(\varphi(m)) && \text{(Per definició de } r\varphi\text{)}\\
&= r\cdot ev(m,\varphi) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= r\cdot ev(m,-)(\varphi) && \text{(Per definició de } ev(m,-)\text{)}
\end{aligned}$$

Per tant, $\forall m(m \in M \Rightarrow ev(m,-) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N),N))$. Fixem $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Veiem que $ev(-,\varphi) : M \to N$ definit per $ev(-,\varphi)(m) := ev(m,\varphi)$ és un morfisme de R-mòduls. Donats $m_1, m_2 \in M$,

$$\begin{aligned}
ev(-,\varphi)(m_1+m_2) &= ev(m_1+m_2,\varphi) && \text{(Per definició de } ev(-,\varphi)\text{)}\\
&= \varphi(m_1+m_2) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= \varphi(m_1)+\varphi(m_2) && (\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N))\\
&= ev(m_1,\varphi)+ev(m_2,\varphi) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= ev(-,\varphi)(m_1)+ev(-,\varphi)(m_2) && \text{(Per definició de } ev(-,\varphi)\text{)}
\end{aligned}$$

Donats $r \in R$, $m \in M$,

$$\begin{aligned}
ev(-,\varphi)(rm) &= ev(rm,\varphi) && \text{(Per definició de } ev(-,\varphi)\text{)}\\
&= \varphi(rm) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= r\varphi(m) && (\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N))\\
&= r\cdot ev(m,\varphi) && \text{(Per definició de } ev\text{)}\\
&= r\cdot ev(-,\varphi)(m) && \text{(Per definició de } ev(-,\varphi)\text{)}
\end{aligned}$$

Per tant, $\forall \varphi(\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \Rightarrow ev(-,\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(M,N))$. Aleshores, $ev \in \mathrm{Bil}_R(M \times \mathrm{Hom}_R(M,N),N)$. □

Problema 2. *Denotem per* $\mathrm{Bil}_R(M\times N, L)$ *el conjunt d'aplicacions bilineals de* $M \times N$ *a* L*. Proveu que*

1. *Donats* R*-mòduls* M, N*, aleshores existeix un* R*-mòdul* $M \otimes_R N$ *amb una aplicació bilineal* $t : M \times N \to M \otimes_R N$ *tal que compleix la propietat (universal) següent: "Per a tot* R*-mòdul* L *i tota aplicació* $f : M \times N \to L$ *bilineal, existeix una única* $\tilde{f} : M \otimes_R N \to L$ *tal que* $f = \tilde{f} \circ t$*." És a dir, el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\
L &
\end{tikzcd}$$

és commutatiu. Escrivim $t(m,n) = m \otimes_R n$ *i diem que és un tensor elemental. Diem que* $M \otimes_R N$ *és el producte tensorial de* M *i* N*.*

Demostració. Denotem per $F_R(M\times N)$ el R-mòdul lliure generat per $M\times N$ i considerem el R-submòdul de $F_R(M\times N)$

$$\begin{aligned}E := \langle &(m+m',n)-(m,n)-(m',n),(m,n+n')-(m,n)-(m,n'),\\ &(rm,n)-r(m,n),(m,rn)-r(m,n)\rangle_{m,m'\in M,n,n'\in N}\end{aligned}$$

Veiem que $F_R(M\times N)/E$ satisfà la propietat universal del producte tensorial. Sigui L R-mòdul i $f\in \mathrm{Bil}_R(M\times N,L)$. Definim $\tilde{f}:F_R(M\times N)/E\to L$ per $\tilde{f}((m,n)+E):=f(m,n)$ i estenem per linealitat. Si $\tilde{f}$ esta ben definida, clarament $\tilde{f}\in \mathrm{Hom}_R(F_R(M\times N)/E,L)$ i és única (unívocament determinada per f). Veiem que esta ben definida. Siguin $(m,n)+E,(m',n')+E\in F_R(M\times N)/E$ tal que $(m,n)+E=(m',n')+E$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\tilde{f}((m,n)+E)&=f(m,n) && \text{(Per definició de } \tilde{f})\\ &=f((m',n')+e) && ((m,n)+E=(m',n')+E\Rightarrow \exists e(e\in E\wedge (m,n)=(m',n')+e))\\ &=f(m',n')+f(e) && (f\in \mathrm{Bil}_R(M\times N,L))\\ &=f(m',n') && (\forall e(e\in E\Rightarrow f(e)=0_L))\\ &=\tilde{f}((m',n')+E) && \text{(Per definició de } \tilde{f})\end{aligned}$$

Ara, si $\iota: M\times N\hookrightarrow F_R(M\times N)$ és la inclusió i $\pi: F_R(M\times N)\twoheadrightarrow F_R(M\times N)/E$ és la projecció, considerem $t:\pi\circ\iota$. Fixem $m\in M$. Veiem que $t(m,-): N\to F_R(M\times N)/E$ és un morfisme de R-mòduls. Donats $n_1,n_2\in N$,

$$\begin{aligned}t(m,-)(n_1+n_2)&=t(m,n_1+n_2) && \text{(Per definició de } t(m,-))\\ &=(m,n_1+n_2)+E && \text{(Per definició de } t)\\ &=((m,n_1)+(m,n_2))+E\\ &=((m,n_1)+E)+((m,n_2)+E)\\ &=t(m,n_1)+t(m,n_2) && \text{(Per definició de } t)\\ &=t(m,-)(n_1)+t(m,-)(n_2) && \text{(Per definició de } t(m,-))\end{aligned}$$

Donats $r\in R$, $n\in N$,

$$\begin{aligned}t(m,-)(rn)&=t(m,rn) && \text{(Per definició de } t(m,-))\\ &=(m,rn)+E && \text{(Per definició de } t)\\ &=r(m,n)+E\\ &=r((m,n)+E) && \text{(Per definició d'}E)\\ &=r\cdot t(m,n) && \text{(Per definició de } t)\\ &=r\cdot t(m,-)(n) && \text{(Per definició de } t(m,-))\end{aligned}$$

Aleshores, $\forall m(m\in M\Rightarrow t(m,-)\in \mathrm{Hom}_R(N,F_R(M\times N)/E))$. Simètricament, $\forall n(n\in N\Rightarrow t(-,n)\in \mathrm{Hom}_R(M,F_R(M\times N)/E))$ on $t(-,n)(m):=t(m,n)$. Per tant, $t\in \mathrm{Bil}_R(M\times N,F_R(M\times N)/E)$. Ara,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t(m,n))&=\tilde{f}((m,n)+E) && \text{(Per definició de } t:=\pi\circ\iota)\\ &=f(m,n) && \text{(Per definició de } \tilde{f})\end{aligned}$$

Doncs, existeix un R-mòdul $F_R(M\times N)/E$ amb una aplicació bilineal $t\in \mathrm{Bil}_R(M\times N,F_R(M\times N)/E)$ que compleix la propietat universal del producte tensorial. □

2. *Deduïu que el parell* $(M\otimes_R N,t)$ *és únic tret d'isomorfisme i que a més* $\mathrm{Bil}_R(M\otimes_R N,L)\cong \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N,L)$.

Demostració. Siguin F,F' R-mòduls amb $t\in \mathrm{Bil}_R(M\times N,F),t'\in \mathrm{Bil}_R(M\times N,F')$ tals que satisfan la propietat universal del producte tensorial. De la propietat universal del producte tensorial, obtenim el diagrama commutatiu

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, dotted, "id_F"] & F & & F' \arrow[r, dotted, "id_{F'}"] & F' \\
& & M \times N \arrow[ull, "t"] \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "t'"] \arrow[urr, "t'"] \arrow[dll, "t"'] \arrow[dl, "t'"] \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "t'"] & & \\
F \arrow[r, dotted, "\exists!\tilde{t}'"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "\exists!(\tilde{t}\circ\tilde{t}')"'] & F' \arrow[rr, dotted, "\exists!\tilde{t}"] \arrow[rrr, dotted, bend right, "\exists!(\tilde{t}'\circ\tilde{t})"'] & & F \arrow[r, dotted, "\exists!\tilde{t}'"] & F'
\end{tikzcd}
$$

d'on deduïm que $\tilde{t} \circ \tilde{t}' = id_F$ i $\tilde{t}' \circ \tilde{t} = id_{F'}$. Per tant, $F \cong F'$. $\square$

Problema 3. *Calculeu els productes següents de grups abelians:*

1. $\mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$.

   Solució. Tenim que $\mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \cong \mathbb{Z}/((n) + (m)) = \mathbb{Z}/(\gcd\{n, m\})$. $\square$

2. $\mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

   Solució. Sigui $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ definida per $f(x) := nx$. Considerem la successió exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow 0$$

   Apliquem $- \otimes_Z \mathbb{Q}$ a la successió exacta curta, d'on obtenim la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{f \otimes_{\mathbb{Z}} id_{\mathbb{Q}}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \overset{\pi \otimes_{\mathbb{Z}} id_{\mathbb{Q}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/(n) \otimes_Z \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

   Com $\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$, tenim la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{f'} \mathbb{Q} \overset{\pi \otimes_{\mathbb{Z}} id_{\mathbb{Q}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/(n) \otimes_Z \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

   on $f'(\frac{a}{b}) = n\frac{a}{b}$. Fixem-nos que f' és un isomorfisme, d'on, per exactitud, deduïm que $\mathbb{Z}/(n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$. $\square$

3. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

   Solució. Tenim $f \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ definida per $f(a, b) := ab$. Per la propietat universal del producte tensorial, $\exists! \tilde{f}(\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Q}))$ definida per $\tilde{f}(a \otimes_Z b) := ab$. Considerem $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q} \otimes_Z \mathbb{Q})$ definida per $g(a) := a \otimes_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Q}}$. Es comprova que g és la inversa de $\tilde{f}$, d'on deduïm que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$. $\square$

Problema 4. *Proveu les propietats següents:*

1. $R \otimes_R M \cong M$.

   Demostració. Considerem $f : \mathrm{Bil}_R(R \times M, M)$ definit per $f(r, m) := rm$. Aleshores, $\exists! \tilde{f}(\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_R(R \otimes_R M, M))$ definit per $\tilde{f}(r \otimes_R m) := rm$. Considerem $g \in \mathrm{Hom}_R(M, R \otimes_R M)$ definit per $g(m) := 1_R \otimes_R m$. Tenim que

$$\begin{aligned}
g(\tilde{f}(r \otimes_R m)) &= g(rm) && \text{(Per definició de } \tilde{f}\text{)} \\
&= 1_R \otimes_R (rm) && \text{(Per definició de } g\text{)} \\
&= r(1_R \otimes_R m) \\
&= r \otimes_R m
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \tilde{f}(g(m)) &= \tilde{f}(1_R \otimes_R m) && \text{(Per definició de } g\text{)} \\ &= 1_R m && \text{(Per definició de } \tilde{f}\text{)} \\ &= m \end{aligned}$$

d'on $g \circ \tilde{f} = id_{R \otimes_R M}$ i $\tilde{f} \circ g = id_M$. Per tant, $R \otimes_R M \cong M$. □

2. $(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)$.

Demostració. Per la propietat universal de la suma directa (és un límit), $\exists! f (f \in \mathrm{Hom}_R((M \times N) \oplus (M' \times N), (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)))$ definit per $f((m,n),(m',n')) := (m \otimes_R n, m' \otimes_R n')$ tal que el següent diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, hook] \arrow[d] & (M \times N) \oplus (M' \times N) \arrow[d, dotted, "f"] & M' \times N \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ M \otimes_R N \arrow[r, hook] & (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N) & M' \otimes_R N \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Considerem $g \in \mathrm{Hom}_R((M \oplus M') \times N, (M \times N) \oplus (M' \times N))$ definit per $g((m,m'),n) := ((m,n),(m', n))$. Per la propietat universal del producte tensorial,

$$\begin{tikzcd} (M \oplus M') \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d] & (M \times N) \oplus (M' \times N) \arrow[r, "f"] & (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N) \\ (M \oplus M') \otimes_R N \arrow[urr, dotted, "\exists! \varphi"] & & \end{tikzcd}$$

on $\varphi \in \mathrm{Hom}_R((M \oplus M') \otimes_R N, (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N))$ vindrà definida per $\varphi((m,m') \otimes_R n) := (m \otimes_R n, m' \otimes_R n)$. Novament per la propietat universal de la suma directa,

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr, hook] & M \otimes_R N \arrow[r, hook] & (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N) \arrow[d, dotted, "\exists! \psi"] & M' \otimes_R N \arrow[l, hook'] & M' \times N \arrow[l] \arrow[dl, hook'] \\ & (M \oplus M') \times N \arrow[r] & (M \oplus M') \otimes_R N & (M \oplus M') \times N \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

on $\psi \in \mathrm{Hom}_R((M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N), (M \oplus M') \otimes_R N)$ vindrà definida per $\psi(m \oplus_R n, m' \oplus_R n') := (m, 0_{M'}) \otimes_R n + (0_M, m') \otimes_R n'$. Tenim que

$$\begin{aligned} \psi(\varphi((m,m') \otimes_R n)) &= \psi(m \otimes_R n, m' \otimes_R n) && \text{(Per definició de } \varphi\text{)} \\ &= (m, 0_{M'}) \otimes_R n + (0_M, m') \otimes_R n && \text{(Per definició de } \psi\text{)} \\ &= ((m, 0_{M'}) + (0_M, m')) \otimes_R n \\ &= (m, m') \otimes_R n \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(m \otimes_R n, m' \otimes_R n')) &= \varphi((m, 0_{M'}) \otimes_R n + (0_M, m') \otimes_R n') && \text{(Per definició de } \psi\text{)} \\ &= \varphi((m, 0_{M'}) \otimes_R n) + \varphi((0_M, m') \otimes_R n') && (\varphi \text{ morfisme de } R\text{-mòduls}) \\ &= (m \otimes_R n, 0_{M'} \otimes_R n) + (0_M \otimes_R n, m' \otimes_R n') && \text{(Per definició de } \varphi\text{)} \\ &= (m \otimes_R n, m' \otimes_R n') \end{aligned}$$

d'on $\psi \circ \varphi = id_{(M \oplus M') \otimes_R N}$ i $\varphi \circ \psi = id_{(M \oplus N) \otimes_R (M' \oplus N)}$. Per tant, $(M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)$. □

3. *$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$.*

   Demostració. Sense fer els detalls, per la propietat universal del producte tensorial i la commutativitat del següent diagrama

$$\begin{tikzcd}
(m,n) \arrow[d, mapsto, shift left] & M \times N \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[dr] & M \otimes_R N \arrow[d, dotted, shift left] & m \otimes_R n \arrow[d, dotted, mapsto, shift left] \\
(n,m) \arrow[u, mapsto, shift left] & N \times M \arrow[r] \arrow[u, shift left] \arrow[ur] & N \otimes_R M \arrow[u, dotted, shift left] & n \otimes_R m \arrow[u, dotted, mapsto, shift left]
\end{tikzcd}$$

   deduïm que $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$. □

4. *$M \otimes_R (N \otimes_R L) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R L$.*

   Demostració. Per la propietat universal de la suma directa tenim els morfismes de R-mòduls $((- \otimes_R -) \otimes_R -)$ i $(- \otimes_R (- \otimes_R -))$ tals que

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R N) \times L \arrow[d, hook] & M \otimes_R N \arrow[l, hook'] & M \times N \arrow[l] \arrow[d, hook] & M \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & M \times (N \otimes_R L) \arrow[d, hook] \\
(M \otimes_R N) \otimes_R L & & (M \times N) \times L \arrow[ll, dotted, "((- \otimes_R -) \otimes_R -)"'] \arrow[r, shift left, "\alpha"] & M \times (N \times L) \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[rr, dotted, "(- \otimes_R (- \otimes_R -))"] & & M \otimes_R (N \otimes_R L) \\
(M \otimes_R N) \times L \arrow[u, hook] & & L \arrow[ll, hook'] \arrow[u, hook] & N \times L \arrow[r] \arrow[u, hook] & N \otimes_R L \arrow[r, hook] & M \times (N \otimes_R L) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

   on $((- \otimes_R -) \otimes_R -)((m,n),l) := (m \otimes_R n) \otimes_R l$ i $(- \otimes_R (- \otimes_R -))(m,(n,l)) := m \otimes_R (n \otimes_R l)$. Per la propietat universal del producte tensorial, com $(- \otimes_R (- \otimes_R -))$ i $(- \otimes_R (- \otimes_R -))$ són R-bilineals, tenim nous morfismes de R-mòduls

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R N) \times L \arrow[d, hook] & M \otimes_R N \arrow[l, hook'] & M \times N \arrow[l] \arrow[d, hook] & M \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & M \times (N \otimes_R L) \arrow[d, hook] \\
(M \otimes_R N) \otimes_R L \arrow[rrrrr, dotted, bend left=40, "\exists! \overline{(- \otimes_R (- \otimes_R -)) \circ \alpha}"] & & (M \times N) \times L \arrow[ll, dotted, "((- \otimes_R -) \otimes_R -)"'] \arrow[r, shift left, "\alpha"] & M \times (N \times L) \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[rr, dotted, "(- \otimes_R (- \otimes_R -))"] & & M \otimes_R (N \otimes_R L) \arrow[lllll, dotted, bend left=40, "\exists! \overline{((- \otimes_R -) \otimes_R -) \circ \beta}"] \\
(M \otimes_R N) \times L \arrow[u, hook] & & L \arrow[ll, hook'] \arrow[u, hook] & N \times L \arrow[r] \arrow[u, hook] & N \otimes_R L \arrow[r, hook] & M \times (N \otimes_R L) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

   on $\overline{(- \otimes_R (- \otimes_R -) \circ \alpha}((m \otimes_R n) \otimes_R l) := m \otimes_R (n \otimes_R l)$ i $\overline{((- \otimes_R -) \otimes_R -) \circ \beta}(m \otimes_R (n \otimes_R l)) := (m \otimes_R n) \otimes_R l$. D'aquí deduïm que $M \otimes_R (N \otimes_R L) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R L$. □

5. *Què val $R^n \otimes_R R^m$?*

   Solució. Volem veure que $R^n \otimes_R R^m \cong R^{nm}$. Procedim per inducció en n. Si $n = 1$, clarament $R \otimes_R R^m \cong R^m$. Suposem que per $n-1$ és cert. Tenim que

$$\begin{aligned}
R^n \otimes_R R^m &= (R \oplus R^{n-1}) \otimes_R R^m \\
&\cong (R \otimes_R R^m) \oplus (R^{n-1} \otimes_R R^m) && ((M \oplus M') \otimes_R N \cong (M \otimes_R N) \oplus (M' \otimes_R N)) \\
&\cong R^m \oplus R^{m(n-1)} && \text{(Hipòtesi d'inducció)} \\
&= R^{nm}
\end{aligned}$$

com volíem veure. □

6. *Si P i P' són projectius finitament generats, ho és $P \otimes_R P'$?*

Demostració. Com P, P' projectius, $P \cong \bigoplus_{i\in\mathscr{I}} P_i, P' \cong \bigoplus_{j\in\mathscr{J}} P'_j$ on P_i, P'_j lliures i podem suposar $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ finits ja que P, P' finitament generats. Aleshores,

$$\begin{aligned} P \otimes_R P' &\cong \big(\bigoplus_{i\in\mathscr{I}} P_i\big) \otimes_R \big(\bigoplus_{j\in\mathscr{J}} P'_j\big) \\ &\cong \bigoplus_{(i,j)\in\mathscr{I}\times\mathscr{J}} (P_i \otimes_R P'_j) \end{aligned}$$

Com P_i, P'_j lliures, $P_i \otimes_R P'_j$ lliures, d'on deduïm que $P \otimes_R P'$ és projectiu (suma directa de R-mòduls lliures). Nota: Aquest exercici esta fatal perquè anava fatal i no em sabia ni la definició de projectiu □

Problema 5. 1. *Donades R-àlgebres A i B, deduïu que $A\otimes_R B$ també és una R-àlgebra amb $(a\otimes_R b)(a'\otimes_R b') = aa' \otimes_R bb'$.*

Demostració. Veiem que $\mu : (A\otimes_R B)\times(A\otimes_R B) \to A\otimes_R B$ definida per $\mu(a\otimes_R b, a'\otimes_R b') := aa'\otimes_R bb'$ esta ben definida. Considerem $f : A\times B\times A\times B \to A\otimes_R B$ definida per $f(a,b,a',b') := aa'\otimes_R bb'$ la qual és morfisme de R-mòduls component a component. Aleshores, obtenim un morfisme de R-mòduls $\tilde{f} : A\otimes_R B\otimes_R A\otimes_R B \to A\otimes_R B$. Com $A\otimes_R B\otimes_R A\otimes_R B \cong (A\otimes_R B)\otimes_R (A\otimes_R B) : h$, tenim una correspondència de $h\circ\tilde{f}$ amb un element de $\mathrm{Bil}_R((A\otimes_R B)\times(A\otimes_R B), A\otimes_R B)$, que és justament μ. Veiem que $A\otimes_R B$ és una R-àlgebra. Com A, B són R-àlgebres, en particular són R-mòduls, d'on $A\otimes_R B$ és R-mòdul. Sigui $r\in R$, $a, a'\in A$, $b, b'\in B$. Aleshores,

$$\begin{aligned} r((a\otimes_R b)(a'\otimes_R b')) &= r(aa'\otimes_R bb') && ((x\otimes_R y)(x'\otimes_R y') = xx'\otimes_R yy') \\ &= r(aa')\otimes_R bb' \\ &= (ra)a'\otimes_R bb' && (A\ R\text{-àlgebra}) \\ &= (ra\otimes_R b)(a'\otimes_R b') && ((x\otimes_R y)(x'\otimes_R y') = xx'\otimes_R yy') \\ &= (r(a\otimes_R b))(a'\otimes_R b') \end{aligned}$$

Similarment, $r((a\otimes_R b)(a'\otimes_R b')) = (a\otimes_R b)(r(a'\otimes_R b'))$. Per tant, $A\otimes_R B$ és R-àlgebra. □

2. *Proveu que si I, J són ideals d'un anell R, aleshores $R/I\otimes_R R/J \cong R/(I+J)$ (com R-àlgebres).*

Demostració. Sigui $\varphi : R/I\times R/J \to R/(I+J)$ definida per $\varphi(r+I, r+J) := rr' + (I+J)$. Fixem $r+I\in R/I$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \varphi(r+I,-)((r_1+J)+(r_2+J)) &= \varphi(r+I,(r_1+J)+(r_2+J)) && (\text{Def. de } \varphi(r+I,-)) \\ &= \varphi(r+I,(r_1+r_2)+J) \\ &= r(r_1+r_2)+(I+J) && (\text{Per definició de } \varphi) \\ &= rr_1+rr_2+(I+J) \\ &= (rr_1+J)+(rr_2+J) \\ &= \varphi(r+I,r_1+J)+\varphi(r+I,r_2+J) && (\text{Per definició de } \varphi) \\ &= \varphi(r+I,-)(r_1+J)+\varphi(r+I,-)(r_2+J) && (\text{Def. de } \varphi(r+I,-)) \end{aligned}$$

Donat $r' \in R$,

$$\begin{aligned}
\varphi(r+I,-)(r'(r''+J)) &= \varphi(r+I, r'(r''+J)) && \text{(Per definició de } \varphi(r+I,-)\text{)}\\
&= \varphi(r+I, r'r''+J)\\
&= r(r'r'') + (I+J) && \text{(Per definició de } \varphi\text{)}\\
&= r'(rr'') + (I+J)\\
&= r'(rr'' + (I+J))\\
&= r'\varphi(r+I, r''+J) && \text{(Per definició de } \varphi\text{)}\\
&= r'\varphi(r+I,-)(r''+J) && \text{(Per definició de } \varphi(r+I,-)\text{)}
\end{aligned}$$

d'on deduïm que $\forall r+I(r+I \in R/I \Rightarrow \varphi(r+I,-) \in \mathrm{Hom}_R(R/J, R/(I+J)))$. Simètricament, $\forall r+J(r+J \in R/J \Rightarrow \varphi(-,r+J) \in \mathrm{Hom}_R(R/i, R/(I+J)))$. Per tant, $\varphi \in \mathrm{Bil}_R(R/I \times R/J, R/(I+J))$. Per la propietat universal del producte tensorial, $\exists! f(f \in \mathrm{Hom}_R(R/I \otimes_R R/J, R/(I+J)))$ definit per $f((r+I)\otimes_R (r+J)) := rr' + (I+J)$. Considerem $g \in \mathrm{Hom}_R(R/(I+J), R/I \otimes_R R/J)$ definit per $g(r+(I+J)) := (r+I)\otimes_R (1_R + J)$. Tenim que

$$\begin{aligned}
f(g(r+(I+J))) &= f((r+I)\otimes_R (1_R+J)) && \text{(Per definició de } g\text{)}\\
&= r1_R + (I+J) && \text{(Per definició de } f\text{)}\\
&= R + (I+J)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
g(f((r+I)\otimes_R (r'+J))) &= g(rr' + (I+J)) && \text{(Per definició de } f\text{)}\\
&= (rr'+I)\otimes_R (1_R+J) && \text{(Per definició de } g\text{)}\\
&= r'((r+I)\otimes_R (1_R+J))\\
&= (r+I)\otimes_R (r'1_R+J)\\
&= (r+I)\otimes_R (r'+J)
\end{aligned}$$

d'on deduïm que $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$. □

3. *Proveu que* $R[x,y] \cong R[x] \otimes_R R[y]$.

Demostració. Definim $f \in \mathrm{Hom}_R(R[x]\times R[y], R[x,y])$ per $f(x^\alpha, y^\beta) := x^\alpha y^\beta$ i estenem per linealitat. A aquestes alçades és evident que és R-bilineal. Per la propietat universal del producte tensorial, $\exists! \tilde{f}(\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_R(R[x]\otimes_R R[y], R[x,y]))$ definida per $\tilde{f}(x^\alpha \otimes_R y^\beta) := x^\alpha y^\beta$ i estenem per linealitat. Si considerem $g \in \mathrm{Hom}_R(R[x,y], R[x]\otimes_R R[y])$ definida per $g(x^\alpha y^\beta) := x^\alpha \otimes_R y^\beta$. g és l'invers de $\tilde{f}$. Per tant, $R[x,y] \cong R[x]\otimes_R R[y]$. □