Problema 1. *Sigui A un domini Dedekind, i $K = \mathrm{Quot}(A)$. Considera per $\mathrm{IdEnter}(A)$ el monoid amb la multiplicació d'ideals generat pels ideals maximals de A, i considerem $(1) = A$ com element neutre en* $\mathrm{IdEnter}(A)$.

1. *Definim $\mathrm{IdFrac}(A)$ pels ideals fraccionaris de A, on $J \in \mathrm{IdFrac}(A)$ si $J \subset K$ és un A-mòdul i existeix $\beta \in A$ on $\beta J \subset A$ (en particular βJ és un ideal de A). Proveu primer que tot A-submòdul de K ($M \subset K$) finit generat és un ideal fraccionari de A.*

   Demostració. Escrivim

   $$\mathrm{IdFrac}(A) = \{J \subset \mathrm{Quot}(A) : J \ A\text{-mòdul} \wedge \exists\beta(\beta \in A \wedge \beta J \subset A)\}$$

   Sigui M A-submòdul de $\mathrm{Quot}(A)$ finitament generat. Aleshores,

   $$\exists n \exists m_1 \dots \exists m_n (n \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_n \in M \wedge M = m_1 A + \dots + m_n A)$$

   Com $M \subset \mathrm{Quot}(A)$, $\forall i(i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \exists a_i \exists b_i (a_i \in A, b_i \in A - \{0\} \wedge m_i = \frac{a_i}{b_i}))$. Considerem $\beta := \prod_{i=1}^n b_i \in A$. Aleshores, $\beta M = \sum_{i=1}^n (a_i \prod_{i \neq j} b_j) A \subset A$, d'on $M \in \mathrm{IdFrac}(A)$. $\square$

   Considerem $\mathrm{IdFrac}(A)$ amb l'operació multiplicació de A-mòduls, veieu que dóna a $\mathrm{IdFrac}(A)$ una estructura de monoid.

   Demostració. Siguin $J_1, J_2 \in \mathrm{IdFrac}(A)$. Veiem que la multiplicació d'A-mòduls esta ben definida a $\mathrm{IdFrac}(A)$. Tenim que $\exists\beta_1(\beta_1 \in A \wedge \beta_1 J_1 \subset A)$ i $\exists\beta_2(\beta_2 \in A \wedge \beta_2 J_2 \subset A)$. Aleshores, $(\beta_1\beta_2)J_1J_2 = (\beta_1 J_1)(\beta_2 J_2) \subset AA \subset A$, d'on $J_1J_2 \in \mathrm{IdFrac}(A)$.
   La multiplicació d'A-mòduls és associativa. En particular, donats $J_1, J_2, J_3 \in \mathrm{IdFrac}(A)$, $J_1(J_2J_3) = (J_1J_2)J_3$.
   Com A és anell commutatiu, el producte d'A-mòduls és commutatiu, d'on donats $J_1, J_2 \in \mathrm{IdFrac}(A)$ tenim $J_1J_2 = J_2J_1$.
   Veiem que A és l'element neutre de $\mathrm{IdFrac}(A)$. Clarament $A \in \mathrm{IdFrac}(A)$, ja que $\forall\beta(\beta \in A \Rightarrow \beta A \subset A)$ i A és A-mòdul. Donat $J \in \mathrm{IdFrac}(A)$, $JA = J = AJ$ es dedueix de la commutativitat de la multipliació d'A-mòduls, de que A és un anell amb unitat i de que J és A-mòdul.
   Aleshores, tenim que tots els axiomes de monoide es satisfan, d'on $\mathrm{IdFrac}(A)$ té estructura de monoide. $\square$

   Tot seguit demostreu que si $I \in \mathrm{IdFrac}(A)$ llavors $I(A : I) = A$ on $(A : I) = \{k \in K : kI \subset A\}$

   Demostració. Fixem-nos que en general, donat $I \subset A$ A-mòdul, $I(A : I) \subset A$. En efecte, si $\alpha \in I(A : I)$, podem escriure $\alpha = \sum_{i \in I} x_i y_i$ on $x_i \in I$ i $y_i \in (A : I)$. Com $y_i \in (A : I)$, per definició de $(A : I)$, $y_i I \subset A$, d'on deduïm que $\forall i(i \in I \Rightarrow x_i y_i \in A)$. Per tant, $\alpha = \sum_{i \in I} x_i y_i \in A$, d'on $I(A : I) \subset I$.
   Veiem ara que $\forall\mathfrak{p}(\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) - \{(0)\} \Rightarrow A \subsetneq (A : \mathfrak{p}))$. Sigui $\alpha \in \mathfrak{p} - \{0\}$. Considerem l'ideal αA. Com A és Dedekind, A és domini de factorització única per ideals, d'on

   $$\exists r \exists \mathfrak{p}_1 \dots \exists \mathfrak{p}_r (r \in \mathbb{N}, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \in \mathrm{Spec}(A) \wedge \alpha A = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r)$$

   Tenim $\alpha A \subset \mathfrak{p}$ i dos alternatives:

   (a) Suposem que $\alpha A = \mathfrak{p}$. Suposem que $\frac{1}{\alpha} \in A$. Aleshores, com $\alpha A = \mathfrak{p}$, $1 = \alpha\frac{1}{\alpha} \in \mathfrak{p}$, contradicció, ja que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Aleshores, $\frac{1}{\alpha} \notin A$. A més,

   $$\begin{aligned} \alpha A = \mathfrak{p} &\implies \tfrac{1}{\alpha}\mathfrak{p} \subset A \\ &\implies \tfrac{1}{\alpha} \in (A : \mathfrak{p}) \end{aligned}$$

   Per tant, $\frac{1}{\alpha} \in (A : \mathfrak{p}) - A$, d'on deduïm que $A \subsetneq (A : \mathfrak{p})$.

(b) Suposem que $\alpha A \subsetneq \mathfrak{p}$. Aleshores, $\exists i (i \in \{1, \ldots, r\} \wedge \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i)$. Sense pèrdua de la generalitat, suposem que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Considerem $\beta \in \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r - \alpha A$. Tenim que

$$\begin{aligned} \beta \in \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r - \alpha A &\implies \tfrac{\beta}{\alpha} \in \tfrac{1}{\alpha}\mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r - A \\ &\implies \tfrac{\beta}{\alpha} \notin A \end{aligned}$$

A més,

$$\begin{aligned} \beta\mathfrak{p} \subset \alpha A &\implies \tfrac{\beta}{\alpha}\mathfrak{p} \subset A \\ &\implies \tfrac{\beta}{\alpha} \in (A : \mathfrak{p}) \end{aligned}$$

d'on $\frac{\beta}{\alpha} \in (A : \mathfrak{p}) - A$ i, conseqüentment, $A \subsetneq (A : \mathfrak{p})$.

Veiem ara que $\forall \mathfrak{p} (\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) - \{(0)\} \Rightarrow \mathfrak{p}(A : \mathfrak{p}) = A)$. Com A és Dedekind, $\mathfrak{p}$ és maximal. Aleshores, com $\mathfrak{p}(A : \mathfrak{p})$ és un ideal d'A tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}(A : \mathfrak{p})$, per maximalitat o bé $\mathfrak{p}(A : \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ o bé $\mathfrak{p}(A : \mathfrak{p}) = A$. Suposem que $\mathfrak{p}(A : \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Sigui $x \in (A : \mathfrak{p}) - A$. Tenim que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}(A : \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} &\implies x\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p} \\ &\implies x \text{ enter sobre } A \end{aligned}$$

on la darrera implicació s'obté fent el mateix argument que la demostració de Cayley-Hamilton. Arribem a contradicció, ja que A al ser Dedekind, és integrament tancat. Per tant, $\mathfrak{p}(A : \mathfrak{p}) = A$.
Veiem ara que per tot ideal I d'A tenim $I(A : I) = A$. Sigui I ideal d'A. Com A Dedekind,

$$\exists s \exists \mathfrak{p}_1 \ldots \exists \mathfrak{p}_s (s \in \mathbb{N}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s \in \operatorname{Spec}(A) \wedge I = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s)$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} & I \cdot (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1) & \\ =\, & \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s \cdot (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1) & (I = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s) \\ =\, & A & (\forall i (i \in \{1, \ldots, s\} \Rightarrow \mathfrak{p}_i(A : \mathfrak{p}_i) = A)) \end{aligned}$$

Volem veure que $(A : I) = (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1)$. Sigui $\alpha \in (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1)$. Aleshores, escrivim $\alpha = \sum_{i \in I} \alpha_{i,s} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i,1}$ on $\alpha_{i,k} \in (A : \mathfrak{p}_k)$. Sigui $\beta \in I$. Com tenim la factorització $I = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s$, podem escriure $\beta = \sum_{j \in J} \beta_{j,1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{j,s}$ on $\alpha_{j,k} \in \mathfrak{p}_k$. Aleshores,

$$\alpha\beta = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_{i,s} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i,1} \cdot \beta_{j,1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{j,s} \in A$$

ja que $\alpha_{i,k} \in (A : \mathfrak{p}_k) \wedge \beta_{j,k} \in \mathfrak{p}_k \implies \alpha_{i,k}\beta_{j,k} \in A$. Per tant, $\alpha I \subset A$, d'on $\alpha \in (A : I)$ (i $(A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1) \subset (A : I)$). D'altra banda, tenim que

$$\begin{aligned} (A : I) &= (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1) \cdot I \cdot (A : I) & ((A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1) \cdot I = A) \\ &\subset (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1) & (I(A : I) \subset A) \end{aligned}$$

Per doble inclusió deduïm que $(A : I) = (A : \mathfrak{p}_s) \cdot \ldots \cdot (A : \mathfrak{p}_1)$.
Veiem ara que $\forall J (J \in \operatorname{IdFrac}(A) \Rightarrow J(A : J) = A)$, que és el resultat a demostrar. Tenim que $\exists \beta (\beta \in A \wedge \beta J \subset A)$. En particular, βJ és un ideal d'A. Pel claim anterior, tenim que

$$A = (\beta J)(A : \beta J) = J(\beta(A : \beta J))$$

Volem veure que $(A : J) = \beta(A : \beta J)$ i haurem acabat. Sigui $\alpha \in \beta(A : \beta J)$. Sigui $\gamma \in J$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= (\beta x)\gamma & (\alpha \in \beta(A : \beta J) \implies \exists x (x \in (A : \beta J) \wedge \alpha = \beta x)) \\ &= (\beta\gamma)x \in A & (x \in (A : \beta J)) \end{aligned}$$

Per tant, $\alpha J \subset A$ i $\alpha \in (A : J)$, d'on tenim la inclusió $\beta(A : \beta J) \subset (A : J)$. D'altra banda,

$$\begin{aligned} (A : J) &= (A : \beta J)\beta J(A : J) & ((A : \beta J)\beta J = A) \\ &\subset \beta(A : \beta J) & (J(A : J) \subset A) \end{aligned}$$

Aleshores, per doble inclusió, $(A : J) = \beta(A : \beta J)$, com volíem veure. $\square$

Proveu que $\mathrm{IdFrac}(A)$ *és un grup abelià lliure generat pels ideals primers de* A.

Demostració. Sigui $J \in \mathrm{IdFrac}(A)$. Aleshores, $\exists\beta(\beta \in A \wedge \beta J \subset A)$. Al ser A Dedekind,

$$\exists n \exists a_1 \dots \exists a_n \exists b_1 \dots \exists b_n \exists \mathfrak{p}_1 \dots \exists \mathfrak{p}_n (n, b_1 \leq a_1, \dots, b_n \leq a_n \in \mathbb{N},$$
$$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(A) \wedge \beta J = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n^{a_n}, \beta A = \mathfrak{p}_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n^{b_n})$$

d'on deduïm que $J = \mathfrak{p}_1^{a_1 - b_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n^{a_n - b_n}$. Aleshores, podem definir un morfisme d'A-mòduls

$$\mathrm{IdFrac}(A) \xrightarrow{\varphi} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathbb{Z}$$

definit via $\varphi(\mathfrak{p}^{a_\mathfrak{p}}) := (\delta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} a_\mathfrak{p})_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)}$, on $\delta_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ és la delta de Kronecker, i estenent per linealitat (ho podem fer ja que $\mathrm{Spec}(A)$ genera $\mathrm{IdFrac}(A)$ per la factorització anterior). Clarament φ esta ben definida i és isomorfisme ja que la factorització és única per ser A Dedekind. D'aquí deduïm es veu clarament que és lliure. Que $\mathrm{IdFrac}(A)$ és un grup abelià ve de que és monoide i de l'existència d'inversos de l'apartat anterior. □

Proveu que tot ideal fraccionari de A *és un* A*-mòdul finit generat.*

Demostració. Sigui $J \in \mathrm{IdFrac}(A)$. Com $J(A : J) = A$,

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \exists y_1 \dots \exists y_n (x_1, \dots, x_n \in J, y_1, \dots, y_n \in \Big((A : J) \wedge \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_A\Big)$$

Aleshores, com $y_i \in (A : J) \implies y_i J \subset A$, $J = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i J \subset \sum_{i=1}^{n} x_i A$. Aleshores, com A és noetherià, tot A-submòdul d'un finit generat és finit generat. Aleshores, J és finit generat. □

2. *Diem que un ideal fraccionari és principal si és de la forma* αA *per cert* $\alpha \in K^*$. *Diem dos ideals fraccionaris* $I_1 \equiv I_2$ *si* $I_1 I_2^{-1}$ *és un ideal fraccionari principal dins* $\mathrm{IdFrac}(A)$. *Veieu* $\equiv$ *és una relació d'equivalència i* $\mathrm{IdFrac}(A)/\equiv$ *és un grup abelià.*

   Demostració. Veiem la reflexivitat. Fixem-nos que A és un ideal fraccionari principal, ja que $A = 1_{\mathrm{Quot}(A)} A$ i $1_{\mathrm{Quot}(A)} \in \mathrm{Quot}(A)^*$. Aleshores, donat $I \in \mathrm{IdFrac}(A)$, $II^{-1} = A$, el qual és ideal fraccionari principal.
   Veiem la simetria. Siguin $I_1, I_2 \in \mathrm{IdFrac}(A)$. Suposem que $I_1 \equiv I_2 :\iff \exists\alpha(\alpha \in \mathrm{Quot}(A)^* \wedge I_1 I_2^{-1} = \alpha A)$. Tenim que $I_2 I_1^{-1} = \alpha^{-1}\alpha A I_2 I_1^{-1} = \alpha^{-1} I_1 I_2^{-1} I_2 I_1^{-1} = \alpha^{-1} A$, d'on deduïm que $I_2 \equiv I_1$.
   Veiem la transitivitat. Suposem que $I_1 \equiv I_2 :\iff \exists\alpha(\alpha \in \mathrm{Quot}(A)^* \wedge I_1 I_2^{-1} = \alpha A)$ i $I_2 \equiv I_3 :\iff \exists\alpha'(\alpha' \in \mathrm{Quot}(A)^* \wedge I_2 I_3^{-1} = \alpha' A)$. Aleshores, $I_1 I_3^{-1} = I_1 I_2^{-1} I_2 I_3^{-1} = (\alpha A)(\alpha' A) = \alpha\alpha' A$, d'on $I_1 \equiv I_3$. Per tant, $\equiv$ defineix una relació d'equivalència en $\mathrm{IdFrac}(A)$.
   Tot quocient d'un grup abelià és abelià, d'on $\mathrm{IdFrac}(A)/\equiv$ és un grup abelià. □

3. *Demostreu un isomorfisme de grups entre* $C\ell(A)$ *i* $\mathrm{IdFrac}(A)/\equiv$.

   Demostració. Per definició, $J \in \mathrm{IdFrac}(A)$ és A-mòdul i $\exists\beta(\beta \in A - \{0\} \wedge \beta J \subset A)$. En particular, βJ és un ideal d'A. Considerem $\varphi : \mathrm{IdFrac}(A) \to C\ell(A)$ definida via $\varphi(J) := [\beta J]$, on recordem que $C\ell(A) := \{I \neq (0) \text{ ideal d'}A\}/\sim$, on $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} :\iff \exists\alpha\exists\beta(\alpha, \beta \in A - \{0\} \wedge (\alpha)\mathfrak{a} = (\beta)\mathfrak{b})$.
   φ esta ben definit. En efecte, si $\exists\beta\exists\beta'(\beta, \beta' \in A - \{0\} \wedge \beta J, \beta' J \subset A)$, tenim que $\beta J \sim \beta J'$ (és llegir la definició de $\sim$).
   φ és morfisme de grups. En efecte, siguin $J_1, J_2 \in \mathrm{IdFrac}(A)$. Aleshores, $\exists\beta_1(\beta_1 \in A - \{0\} \wedge \beta_1 J_1 \subset A)$ i $\exists\beta_2(\beta_2 \in A - \{0\} \wedge \beta_2 J_2 \subset A)$. Tenim que $\varphi(J_1 J_2) = [\beta_1\beta_2 J_1 J_2] = [(\beta_1 J_1)(\beta_2 J_2)] = [\beta_1 J_1][\beta_2 J_2] = \varphi(J_1)\varphi(J_2)$ i $\varphi(A) = [A]$.

Calculem $\ker\varphi$. Sigui $J \in \ker\varphi$. Aleshores, per definició de φ,

$$\begin{aligned}\beta J \sim A &\implies \exists\alpha\exists\gamma(\alpha,\gamma \in A-\{0\} \wedge \beta\alpha J = \gamma A)\\ &\implies \beta J = \tfrac{\gamma}{\alpha}A \in \{\alpha A : \alpha \in \mathrm{Quot}(A)\}\end{aligned}$$

Per tant, $\ker\varphi \subset \{\alpha A : \alpha \in \mathrm{Quot}(A)\}$. Sigui $\alpha A \in \{\alpha A : \alpha \in \mathrm{Quot}(A)\}$. Clarament $\alpha A \sim A$. Aleshores, $\{\alpha A : \alpha \in \mathrm{Quot}(A)\} \subset \ker\varphi$. Per doble inclusió, $\ker\varphi = \{\alpha A : \alpha \in \mathrm{Quot}(A)\}$. Fixem-nos que amb aquesta caracterització es dedueix $\mathrm{IdFrac}(A)/\ker\varphi = \mathrm{IdFrac}(A)/\equiv$.
Veiem l'exhaustivitat de φ. Sigui $I \neq (0)$ ideal d'A i $\beta \in A-\{0\}$. Tenim que $\frac{1}{\beta}I \in \mathrm{IdFrac}(A)$, ja que $\frac{1}{\beta}I$ és A-mòdul i $\beta(\frac{1}{\beta}I) = I \subset A$. A més, $\varphi(\frac{1}{\beta}I) = [\beta(\frac{1}{\beta}I)] = [I]$, d'on resulta l'exhaustivitat.
Ara, pel primer teorema d'isomorfisme obtenim $\mathrm{IdFrac}(A)/\ker\varphi \cong C\ell(A)$. $\square$

4. *Demostreu que tot ideal en un domini de Dedekind A està generat com a molt per 2 elements.*

Demostració. Primer veiem que si A Dedekind i $\mathfrak{a}$ ideal d'A, $A/\mathfrak{a}$ és un domini d'ideals principals. Sigui $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A), n \in \mathbb{N}$. Sabem que $A/\mathfrak{p}^n \cong A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p}$. Com $A_\mathfrak{p}$ és un anell de valuació discreta, en particular és domini d'ideals principals, d'on deduïm que tot ideal d'$A/\mathfrak{p}^n$ és principal.
Sigui $\mathfrak{a}$ ideal d'A. Com A Dedekind, A domini de factorització única per ideals, d'on

$$\exists n\exists a_i \ldots \exists a_n \exists\mathfrak{p}_1 \ldots \exists\mathfrak{p}_n(n, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(A) \wedge \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n^{an})$$

Com A Dedekind, $\dim_{Krull}(A) = 1$, d'on $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ són maximals. En particular, coprimers dos a dos. Considerem la projecció $A \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{p}_i^{a_i}$, morfisme exhaustiu amb nucli $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{a_i} = \mathfrak{a}$, d'on la darrera igualtat la tenim per coprimalitat. Pel primer teorema d'isomorfisme, deduïm que $A/\mathfrak{a} \cong \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{p}_i^{a_i}$. Sigui $\mathfrak{b}$ ideal d'$A/\mathfrak{a}$. Podem pensar $\mathfrak{b}$ a $\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{p}_i^{a_i}$. Si $e_j = (\delta_{ij_{A/\mathfrak{p}_i^{a_i}}})_{i=1}^n$, tenim que $\mathfrak{b} = \sum_{j=1}^n \mathfrak{b}e_j$ i $\mathfrak{b}e_j = (b_j)$ ja que $A/\mathfrak{p}_i^{a_i}$ és principal. D'aquí deduïm que, a $A/\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} = \varphi^{-1}(b_1, \ldots, b_n)(A/\mathfrak{a})$. Per tant, $\mathfrak{b}$ és principal, d'on resulta el claim.
Demostrem ara l'enunciat. Sigui I un ideal no principal d'A. Sigui $a \in I - \{0\}$. Aleshores, $I/(a)$ és un ideal principal d'$A/(a)$, sigui $(b+(a))(A/(a)) = I/(a)$, on $b \in I$. Aleshores, deduïm que $I = (a, b)$. $\square$

Problema 2. *Sigui A un domini de Dedekind, i $K = \mathrm{Quot}(A)$. Sigui L/K una extensió finita i separable de cossos i escrivim $L = K(\alpha)$. Sigui B la clausura entera de A en L, on sempre podem pensar $\alpha \in B$. Considera $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X] \in A[X]$.*

1. *(Lema de Nakayama) Si B' és un subanell de B contenint A i satisfent les dues condicions següents:*
   - *L és generat per B' com a K-espai vectorial.*
   - *$B' + \mathfrak{m}B = B$ per a tot ideal primer no zero $\mathfrak{m}$ de A.*

   Demostreu llavors que $B' = B$.

Demostració. Primer veiem que $\exists\beta(\beta \in A-\{0\} \wedge \beta B \subset B')$. Per les hipòtesis, tenim que B és un $A[\alpha]$-submòdul de $\mathrm{Quot}(A[\alpha]) = \mathrm{Quot}(A)(\alpha)$ (ja que $B := \{\alpha \in \mathrm{Quot}(A)(\alpha) : \alpha \text{ enter sobre } A\}$) finit generat. Aleshores, pel problema 1, B és un ideal fraccionari de $A[\alpha]$, d'on resulta que $\exists\beta'(\beta' \in A[\alpha]-\{0\} \wedge \beta' B \subset A[\alpha])$ i, escrivint $\beta' = \sum_{i=0}^m a_i\alpha^i \in A[\alpha]$ i $\alpha \in B$, deduïm que $\exists\beta(\beta \in A-\{0\} \wedge \beta B \subset A[\alpha])$. Com $A[\alpha] \subset B'$ ja que B' genera $\mathrm{Quot}(A)(\alpha)$ com $\mathrm{Quot}(A)$-espai vectorial, deduïm el claim.
Ara, veiem que si $I \neq (0)$ és ideal d'A, $B' + IB = B$. Com A és Dedekind,

$$\exists s\exists\mathfrak{p}_1 \ldots \exists\mathfrak{p}_s(s \in \mathbb{N}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s \in \mathrm{Spec}(A) \wedge I = \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s)$$

Tenim que $B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B \subset B' + \mathfrak{p}_1 B, B' + \mathfrak{p}_2 B = B$. Fixem-nos que $B' \subset B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B$ i $\mathfrak{p}_2 B = \mathfrak{p}_2(B' + \mathfrak{p}_1 B) = \mathfrak{p}_2 B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B \subset B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B$. Com $B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B$ és un ideal que conté B' i $\mathfrak{p}_2 B$ i $B' + \mathfrak{p}_2 B$ és l'ideal més petit que els conté, tenim que $B' + \mathfrak{p}_2 B \subset B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B$. Per doble inclusió resulta $B = B' + \mathfrak{p}_2 B = B' + \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 B$. Per inducció en s, deduïm el claim.
Ara, considerem l'ideal d'A βA, on $\beta \in A$ és tal que $\beta B \subset B'$. Tenim $B = B' + \beta B \subset B' + B' = B' \subset B$, d'on per doble inclusió tenim $B = B'$. $\square$

2. *Suposem* $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X] = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ *on existeix un ideal primer* $\mathfrak{m}$ *de* A *on* $a_i \in \mathfrak{m}$ *per* $i = 0, \ldots, d-1$, $a_d = 1$ *i* $a_0 \notin \mathfrak{m}^2$ *(diem* $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X]$ *és un polinomi* $\mathfrak{m}$*-Eisenstein). Demostreu llavors* $\mathfrak{m}B$ *té en la seva factorització en ideals primers en* B *un únic ideal maximal, i es té* $A[\alpha] + \mathfrak{m}B = B$.

Demostració. Com A domini de Dedekind i L/K extensió finita i separable de cossos, B és domini de Dedekind. Recordem que

$$\begin{aligned} B &= \{\gamma \in K(\alpha) : \gamma \text{ enter sobre } A\} \\ &= \{\gamma \in K(\alpha) : \exists p(X)(p(X) \in A[X] \text{ mònic} \wedge p(\gamma) = 0)\} \end{aligned}$$

Aleshores, $\alpha \in B$ ja que $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X] \in A[X]$ (per hipòtesi), $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X]$ mònic i $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[\alpha] = 0$ (per definició de $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X]$). Com $\alpha \in B$, deduïm que $B(\mathfrak{m}B + \alpha B) \subset B$, és a dir, $\mathfrak{m}B + \alpha B$ ideal de B (fixem-nos que $\alpha B = A[\alpha]$).
Fixem-nos que $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{m}B + \alpha B$. Aleshores, $\exists j(j \in \{1, \ldots, n-1\} \wedge \mathfrak{m}B \subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^j)$. Veiem que $\mathfrak{m}B \subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1}$. Com $\alpha \in \mathfrak{m}B + \alpha B$, $\alpha^n \in (\mathfrak{m}B + \alpha B)^n$. Com $j < n$, tenim que $(\mathfrak{m}B + \alpha B)^n \subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1}$, d'on $\alpha^n \in (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1}$. Per $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, com $a_i \in \mathfrak{m}$, $a_i \alpha^i \in \mathfrak{m}(\mathfrak{m}B + \alpha B)^i$. De

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(\mathfrak{m}B + \alpha B)^i &\subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+i} && (\mathfrak{m}B \subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^j) \\ &\subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1} && (i \geq 1 \implies j + i \geq j + 1) \end{aligned}$$

deduïm que $a_i \alpha^i \in (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1}$. Aleshores,

$$\mathrm{Irr}(\alpha, K)[\alpha] = 0 \implies a_0 = -(\alpha^n + \ldots + a_1 \alpha) \in (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1}$$

De $a_0 \in (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1} \cap (\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2)$, deduïm que $\mathfrak{m} = a_0 A + \mathfrak{m}^2$. Per tant,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}B &= \mathfrak{m}B + \mathfrak{m}^2 B && (\mathfrak{m} = a_0 A + \mathfrak{m}^2) \\ &\subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1} + (\mathfrak{m}B)(\mathfrak{m}B) && (a_0 \in (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1}) \\ &\subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1} + (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{2j} && (\mathfrak{m}B \subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^j) \\ &\subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^{j+1} && (2j \geq j + 1) \end{aligned}$$

com volíem. Inductivament, deduïm que $\mathfrak{m}B \subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^n$.
Sigui $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ tal que $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}$. En particular, $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{p}$. Si escrivim $\mathrm{Irr}(\alpha, K)[X] = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Irr}(\alpha, K)[\alpha] = 0 &\implies \alpha^n = -(a_0 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) \in \mathfrak{m}B && (a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{m},\ 1, \ldots, \alpha^{n-1} \in B) \\ &\implies \alpha^n \in \mathfrak{p} && (\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{p}) \\ &\implies (\alpha + \mathfrak{p})^n = \alpha^n + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} && (\text{Pas al quocient } B/\mathfrak{p}) \\ &\implies \alpha + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} && (B/\mathfrak{p} \text{ domini}) \\ &\implies \alpha \in \mathfrak{p} \\ &\implies \alpha B \subset \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Ara, com $\mathfrak{m}B + \alpha B$ és l'ideal de B més petit que conté $\mathfrak{m}B$ i αB i $\mathfrak{m}B, \alpha B \subset \mathfrak{p}$, deduïm que $\mathfrak{m}B + \alpha B \subset \mathfrak{p}$. Per tant,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}B &\subset (\mathfrak{m}B + \alpha B)^n \\ &\subset \mathfrak{p}^n && (\mathfrak{m}B + \alpha B \subset \mathfrak{p}) \end{aligned}$$

Com B domini de Dedekind, B és domini de factorització única per ideals, d'on

$$\exists s \exists a_1 \ldots \exists a_s \exists \mathfrak{p}_1 \ldots \exists \mathfrak{p}_s (s, a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s \in \mathrm{Spec}(B) \wedge \mathfrak{m}B = \mathfrak{p}_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^{a_s})$$

Tenim que $\mathfrak{p}^n$ forma part de la factorització de $\mathfrak{m}B$, ja que $\mathfrak{m}B \subset \mathfrak{p}^n$. Suposem que $\mathfrak{p}$ no és l'únic ideal primer de la factorització. Escrivim $\mathfrak{m}B = \mathfrak{p}^n \cdot \mathfrak{p}_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^{a_s}$ Aleshores,

$$\begin{aligned}
n &\leq n[B/\mathfrak{p} : A/\mathfrak{m}] && ([B/\mathfrak{p} : A/\mathfrak{m}] \geq 1) \\
&< n[B/\mathfrak{p} : A/\mathfrak{m}] + \sum_{i=2}^{s} a_i[B/\mathfrak{p}_i : A/\mathfrak{m}] && \\
&= [K(\alpha) : K] && (\text{Teorema 4.8.3. dels apunts i } \mathfrak{m}B = \mathfrak{p}^n \cdot \mathfrak{p}_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_s^{a_s}) \\
&= \deg \operatorname{Irr}(\alpha, K)[X] && (K(\alpha)/K \text{ extensió finita i simple}) \\
&= n && (\operatorname{Irr}(\alpha, K)[X] = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0)
\end{aligned}$$

contradicció. Per tant, $\mathfrak{p}$ és l'únic ideal primer en la factorització de $\mathfrak{m}B$. Com B domini de Dedekind, en particular $\dim_{Krull}(B) = 1$. Per tant, $\mathfrak{p}$ és maximal, d'on resulta la primera part de l'enunciat.
Com $\mathfrak{m}B \subsetneq \mathfrak{m}B + \alpha B$ ideal de B i $\mathfrak{m}B$ ideal maximal de B, deduïm que $\mathfrak{m}B + \alpha B = B$, d'on resulta la segona part de l'enunciat. □

3. *Sigui B' un subanell de B contenint A, on B' genera L com K-espai vectorial i $\operatorname{Irr}(\alpha, K)[X]$ és $\mathfrak{m}$-Eisenstein per un ideal maximal de A amb $\alpha \in B' \subset B$ i $L = K(\alpha)$. Demostreu en aquesta situació que $B' = B$.*

Demostració. Com $\alpha \in B'$ i $A \subset B'$, $A[\alpha] \subset B'$, d'on deduïm

$$\begin{aligned}
B &= A[\alpha] + \mathfrak{m}B && (\operatorname{Irr}(\alpha, K)[X]\ \mathfrak{m}\text{-Eisenstein}) \\
&\subset B' + \mathfrak{m}B && (A[\alpha] \subset B') \\
&\subset B && (B' \subset B)
\end{aligned}$$

Per doble inclusió, $B' + \mathfrak{m}B = B$. Estem en les condicions del lema de Nakayama, d'on $B' = B$. □

4. *Proveu que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$ és integrament tancat.*

Demostració. Considerem $A := \mathbb{Z} \subset (1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}) =: B'$. B' genera $L := \mathbb{Z}(\sqrt[3]{3})$ com Quot($\mathbb{Z}$)-espai vectorial. $\operatorname{Irr}(\sqrt[3]{3}, \mathbb{Z})[X] = X^3 - 3 \in \mathbb{Z}[X]$ és (3)-Eisenstein ((3) ideal maximal de $\mathbb{Z}$). Aleshores, $B' = B$, B clausura entera de $A = \mathbb{Z}$ en $L = \mathbb{Z}(\sqrt[3]{3})$. Com $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}] = (1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^2}) = B'$, deduïm que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$ és integrament tancat. □