Seminari avaluable d'Àlgebra commutativa
2 d'abril de 2024

En tot el seminari, R serà un anell commutatiu. Donats R-moduls N, M, L, diem que una aplicació $f\colon M \times N \to L$ és *R-bilineal* si, fixat $m \in M$, l'aplicació $f(m, \text{-})\colon N \to L$ és R-lineal (respectivament, fixat $n \in N$, l'aplicació $f(\text{-}, n)\colon M \to L$) és R-lineal). Una *R-àlgebra* és un anell commutatiu A que és R-mòdul i tal que $r(ab) = (ra)b = a(rb)$ per $r \in R$, $a, b \in A$.

1. Proveu que:

   (i) Si A és una R-álgebra, el producte $A \times A \to A$ donat per $(a, a') \mapsto aa'$ és bilineal.

   (ii) Si M i N són R-mòduls, llavors el conjunt

   $$\mathrm{Hom}_R(M, N) := \{f\colon M \to N \mid f \text{ és morfisme de mòduls}\}$$

   és també un R-mòdul amb estructura natural. Deduïu que l'aplicació

   $$\mathrm{ev}\colon M \times \mathrm{Hom}_R(M, N) \to N$$

   donada per $(m, \varphi) \mapsto \varphi(m)$ és bilineal.

2. Denotem per $\mathrm{Bil}_R(M \times N, L)$ el conjunt d'aplicacions bilineals de $M \times N$ a L. Proveu que

   (i) Donats R-mòduls M, N, aleshores existeix un R-mòdul $M \otimes_R N$ amb una aplicació bilineal

   $$t\colon M \times N \to M \otimes_R N$$

   tal que compleix la propietat (universal) següent: "Per a tot R-mòdul L i tota aplicació $f\colon M \times N \to L$ bilineal, existeix una única $\tilde{f}\colon M \otimes_R N \to L$ tal que $f = \tilde{f} \circ t$." És a dir, el diagrama

   $$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ L & \end{tikzcd}$$

   és commutatiu. Escrivim $t(m, n) = m \otimes n$ i diem que és un *tensor elemental.* Diem que $M \otimes_R N$ és el *producte tensorial de* M i N. (Indicació: Considereu l'R-mòdul lliure F sobre el conjunt $M \times N$ i denoteu la base canònica per $(e_{(m,n)})_{m \in M, n \in N}$. Ara feu quocient pel submòdul K de F generat per $e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} e_{(m',n)}$; $e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}$; $e_{(rm,n)} - re_{(m,n)}$; $e_{(m,rn)} - re_{(m,n)}$).

   (ii) Deduïu que el parell $(M \otimes_R N, t)$ és únic tret d'isomorfisme i que a més $\mathrm{Bil}(M \times N, L) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R, L)$.

3. Calculeu els productes següents de grups abelians:

   (i) $\mathbb{Z}/(n) \otimes \mathbb{Z}/(m)$.

(ii) $\mathbb{Z}/(n) \otimes \mathbb{Q}$.

(iii) $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}$.

4. Proveu les propietats següents:

   (i) $R \otimes_R M \cong M$.

   (ii) $(M \oplus M') \otimes_R N \cong M \otimes_R N \oplus M' \otimes_R N$.

   (iii) $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$,

   (iv) $M \otimes_R (N \otimes_R L) \cong (M \otimes_R N) \otimes_R L$.

   (v) Què val $R^n \otimes_R R^m$?

   (vi) Si P i P' són projectius finitament generats, ho és $P \otimes_R P'$?

5. (i) Donades R-àlgebres A i B, deduïu que $A \otimes_R B$ també és una R-àlgebra amb $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$. (Indicació: Apliqueu la mateixa idea que a la construcció de l'exercici 2).

   (ii) Proveu que si I, J són ideals d'un anell R, aleshores $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J)$ (com R-àlgebres).

   (iii) Proveu que $R[x, y] \cong R[x] \otimes_R R[y]$.

6. Proveu que $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, L)) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L)$.

7. (i) Proveu que $N \to M \to L \to 0$ és exacta si i només si per a tot K tenim $0 \to \mathrm{Hom}(L, K) \to \mathrm{Hom}(M, K) \to \mathrm{Hom}(N, K)$ és exacta.

   (ii) Utilitzant (i) (amb $\mathrm{Hom}_R(N, P)$ per P arbitrari) i l'exercici 6, proveu que si $N \to M \to L \to 0$ és exacta, aleshores per a tot K tenim que $N \otimes_R K \to M \otimes_R K \to L \otimes_R K \to 0$ és exacta. Doneu un exemple on $N \otimes_R K \to M \otimes_R K$ no sigui injectiva.

   (iii) Donat un ideal I de R i un R-mòdul M, proveu que $M \otimes_R R/I \cong M/IM$. (Indicació: considereu la successió $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ i tensoritzeu per M).