Teorema dels models acíclics

Jordi Cardiel

Denotarem per $\mathscr{T}, \mathscr{K}$ les categories d'espais topològics i de complexos de cadenes (no-negatius). L'objectiu és generalitzar les idees de la demostració de l'axioma d'homotopia (per homologia singular) en un context categòric.
Per demostrar l'axioma d'homotopia, és suficient veure que existeix una homotopia de cadenes $D = \{D_n^X : C_n(X) \to C_{n+1}(X \times \mathbb{I})\}$ entre $C_\bullet(\iota_0^X), C_\bullet(\iota_1^X) : C_\bullet(X) \to C_\bullet(X \times \mathbb{I})$, on $\iota_i^X(x) = (x, i)$. L'aciclicitat de $H_\bullet(\Delta^n \times \mathbb{I})$, estendre per linealitat de $\mathscr{T}(\Delta^n, X)$ a $C_n(X)$ i la naturalitat dels morfismes de $\mathscr{K}$ són els detalls tècnics cabdals per la construcció de l'homotopia de cadenes natural entre $C_\bullet(\iota_0^X)$, $C_\bullet(\iota_1^X)$. Donem una formulació més general.

Definició 1. *Sigui $\mathscr{C}$ una categoria, $\mathscr{M}$ una col·lecció d'objectes de $\mathscr{C}$ i $F : \mathscr{C} \to \mathscr{K}$ un functor covariant.*

1. *F és acíclic en $\mathscr{M}$ si $F(M)$ és acíclic per tot $M \in \mathscr{M}$.*
2. *F és lliure en $\mathscr{M}$ si existeixen $M_j \in \mathscr{M}$ i $m_j \in F(M_j)$ tals que $\mathscr{B} = \{F(f)(m_j) : f \in \mathscr{C}(M_j, X)\}$ és una base de $F(X)$ per tot $X \in \mathscr{C}$.*

Direm que $\mathscr{C}$ és una categoria amb models $\mathscr{M}$ si $\mathscr{M}$ és una col·lecció d'objectes de $\mathscr{C}$. La condició d'aciclicitat ve motivada per l'aciclicitat de $H_\bullet(\Delta^n \times \mathbb{I})$; la condició de llibertat, per l'extensió per linealitat de $\mathscr{T}(\Delta^n, X)$ a $C_n(X)$.

Exemple 1. Sigui $\mathscr{C} = \mathscr{T}$, $\mathscr{M} = \{\Delta^n : n \geq 0\}$ i $F = C_\bullet$. Com Δ^n són contràctils per tot $n \geq 0$, $H_\bullet(\Delta^n)$ és acíclic. Aleshores, $C_\bullet$ és acíclic en $\mathscr{M}$. Sigui $id_{\Delta^n} \in C_\bullet(\Delta^n)$ la identitat. Tenim que

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= \{C_\bullet(f)(id_{\Delta^n}) : f \in \mathscr{T}(\Delta^n, X)\} \\ &= \{f \circ id_{\Delta^n} : f \in \mathscr{T}(\Delta^n, X)\} \\ &= \{f : f \in \mathscr{T}(\Delta^n, X)\} \\ &= \mathscr{T}(\Delta^n, X) \end{aligned}$$

Per tant, $\mathscr{B}$ són bases de $C_\bullet(X)$ i $C_\bullet$ és lliure en $\mathscr{M}$.

El resultat principal és el teorema dels models acíclics.

Teorema 1. *Sigui $\mathscr{C}$ una categoria amb models $\mathscr{M}$ i $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{K}$ functors covariants tals que F és lliure en $\mathscr{M}$ i G és acíclic en $\mathscr{M}$. Tota transformació natural $H_0(F) \to H_0(G)$ ve induïda per una única transformació natural $F \to G$ llevat d'una homotopia de cadenes (natural).*

Veiem que l'axioma d'homotopia per homologia singular és conseqüència del teorema dels models acíclics.

Corol·lari 1 (Axioma d'homotopia)**.** *Siguin X, Y espais topològics, $f, g : X \to Y$ aplicacions contínues homòtopes. Aleshores, f, g indueixen el mateix morfisme en homologia (singular).*

Demostració. Considerem els functors covariants $C_\bullet, G : \mathscr{T} \to \mathscr{K}$, G definit per $G(X) = C_\bullet(X \times \mathbb{I})$ i $G(f) = f \times id_\mathbb{I}$. $C_\bullet$ és lliure en $\{\Delta^n : n \geq 0\}$ i G és acíclic en $\{\Delta^n \times \mathbb{I} : n \geq 0\}$. $C_\bullet(\iota_0^X), C_\bullet(\iota_1^X)$ indueixen la mateixa transformació natural $H_0(C_\bullet) \to H_0(G)$. En efecte, si $\gamma : \mathbb{I} \to X \times \mathbb{I}$ és el camí definit per $\gamma(t) = (x, t)$, aleshores,

$$\begin{aligned} C_0(\iota_0^X)(x) + \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}} &= (x,0) + \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}} && (\text{Per definició de } H_0(\iota_0^X)) \\ &= (x,0) + d_1^{X\times\mathbb{I}}\gamma + \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}} && (d_1^{X\times\mathbb{I}}\gamma \in \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}}) \\ &= (x,0) + (x,1) - (x,0) + \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}} && (d_1^{X\times\mathbb{I}}\gamma = (x,1) - (x,0)) \\ &= (x,1) + \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}} \\ &= C_0(\iota_1^X)(x) + \operatorname{im} d_1^{X\times\mathbb{I}} && (\text{Per definició de } H_0(\iota_1^X)) \end{aligned}$$

La naturalitat és deu a la functorialitat de H_0 i que $f \times id_{\mathbb{I}} \circ \iota_0^X = \iota_0^Y \circ f$, $f \in \mathscr{T}(X,Y)$. Pel teorema dels models acíclics, existeix una homotopia de cadenes natural entre $C_\bullet(\iota_0^X)$ i $C_\bullet(\iota_1^X)$. Si existeix una homotopia de cadenes entre $C_\bullet(\iota_0^X), C_\bullet(\iota_1^X)$ i $F : X \times \mathbb{I} \to Y$ és l'homotopia entre f i g,

$$\begin{aligned}
H_\bullet(f) &= H_\bullet(F \circ \iota_0^X) && (f = F \circ \iota_0^X) \\
&= H_\bullet(F) \circ H_\bullet(\iota_0^X) && (\text{Per functorialitat de } H_\bullet) \\
&= H_\bullet(F) \circ H_\bullet(\iota_1^X) && (H_\bullet(\iota_0^X) = H_\bullet(\iota_1^X) \text{ ja que } C_\bullet(\iota_0^X) \simeq C_\bullet(\iota_1^X)) \\
&= H_\bullet(F \circ \iota_1^X) && (\text{Per functorialitat de } H_\bullet) \\
&= H_\bullet(g) && (g = F \circ \iota_1^X)
\end{aligned}$$

que és el que volíem veure. □

Ara, veiem una conseqüència dels models acíclics que estableix una relació entre els grups d'homologia del producte d'espais topològics amb els grups d'homologia dels espais topològics.

Corol·lari 2 (Eilenberg-Zilber)**.** *Sigui X, Y espais topològics. Existeix una equivalència de cadenes natural entre $C_\bullet(X \times Y)$ i $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$*

Demostració. Considerem la categoria $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ de parells d'espais topològics i $\mathscr{M} = \{(\Delta^n, \Delta^m) : n, m \geq 0\}$. Considerem $F : \mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \mathscr{K}$ el functor covariants definit per $F(X,Y) = C_\bullet(X,Y), F(f,g) = C_\bullet(f \times g)$. F és acíclic i lliure en $\mathscr{M}$. En efecte, $H_\bullet(\Delta^n \times \Delta^m)$ és acíclic ja que $\Delta^n \times \Delta^m$ és contràctil i, si $\delta_n \in C_\bullet(\Delta^n \times \Delta^n)$ és el morfisme diagonal,

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &= \{F(f,g)(\delta_n) : (f,g) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^n), (X,Y))\} \\
&= \{C_\bullet(f \times g)(\delta_n) : (f,g) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^n), (X,Y))\} \\
&= \{(f,g) : (f,g) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^n), (X,Y))\} \\
&= \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^n), (X,Y))
\end{aligned}$$

és base de $C_\bullet(X \times Y)$.
Considerem $G : \mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \mathscr{K}$ el functor covariants definit per $G(X,Y) = C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y), G(f,g) = C_\bullet(f) \otimes C_\bullet(g)$. G és acíclic i lliure en $\mathscr{M}$. En efecte, per tot $q > 0$, $H_q(C_\bullet(\Delta^n) \otimes C_\bullet(\Delta^m)) \cong \bigoplus_{r+s=q} H_r(\Delta^n) \otimes H_s(\Delta^m) \oplus \bigoplus_{r+s=q-1} \operatorname{Tor}(H_r(\Delta^n), H_s(\Delta^m)) = 0$ pel teorema algebraic de Künneth i perquè $H_r(\Delta^n)$, $H_s(\Delta^m) = 0$ i

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &= \{G(f,g)(id_{\Delta^n} \otimes id_{\Delta^m}) : (f,g) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^m), (X,Y))\} \\
&= \{(C_\bullet(f) \otimes C_\bullet(g))(id_{\Delta^n} \otimes id_{\Delta^m}) : (f,g) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^m), (X,Y))\} \\
&= \{f \otimes g : (f,g) \in \mathscr{T} \times \mathscr{T}((\Delta^n, \Delta^m), (X,Y))\} \\
&= \mathscr{T}(\Delta^n, X) \otimes \mathscr{T}(\Delta^m, Y)
\end{aligned}$$

és base de $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$.
Siguin $X, Y \in \mathscr{T}$ i $\{X_i, i \in \mathscr{I}\}, \{Y_j, j \in \mathscr{J}\}$ les famílies de components arc-connexes de X, Y, respectivament. Aleshores, $\{X_i \times Y_j : (i,j) \in \mathscr{I} \times \mathscr{J}\}, \{X_i \otimes Y_j : (i,j) \in \mathscr{I} \times \mathscr{J}\}$ són bases de $H_0(X \times Y), H_0(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) (\cong H_0(X) \otimes H_0(Y))$, respectivament. Definim les transformacions naturals $\rho_{-1} : H_0(X \times Y) \to H_0(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)), \eta_{-1} : H_0(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) \to H_0(X \times Y)$ com $\rho_{-1}(X_i \times Y_j) = X_i \otimes Y_j, \eta_{-1}(X_i \otimes Y_j) = X_i \times Y_j$ i estenent per linealitat. Fixem-nos que $\eta_{-1} \circ \rho_{-1} = id_{H0(X \times Y)}, \rho_{-1} \circ \eta_{-1} = id_{H_0(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y))}$.
Pel teorema dels models acíclics, existeixen transformacions naturals $\rho : C_\bullet(X \times Y) \to C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y), \eta : C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) \to C_\bullet(X \times Y)$ que indueixen ρ_{-1}, η_{-1}, respectivament. A més, $\eta \circ \rho$ i $id_{C_\bullet(X \times Y)}$ indueixen $id_{H_0(X \times Y)}$ (similarment, $\rho \circ \eta$ i $id_{C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)}$ indueixen $id_{H_0(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y))}$). Aleshores, pel teorema dels models acíclics, existeix una homotopia de cadenes natural entre $\eta \circ \rho$ i $id_{C_\bullet(X \times Y)}$ (similarment, existeix una homotopia de cadenes natural entre $\rho \circ \eta$ i $id_{C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)}$), com volíem veure. □

Ara, demostrem el teorema del models acíclics. La idea és la següent: construirem nivell a nivell la transformació natural $F \to G$ mitjançant inducció, com si a un gratacel fiquéssim pas a pas cada pis. El següent diagrama potser ajuda al enteniment del pas inductiu:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[dd, dashed, "d'_{n+1}"] & & \vdots \arrow[dd, dashed, "\Delta'_{n+1}"] \\
\vdots \arrow[dd, "d_{n+1}"] & & \vdots \arrow[dd, "\Delta_{n+1}"] & \\
 & F_n(M_j) \arrow[rr, dashed, "\phi_n(M_j)"] \arrow[dl, dashed, "F_n(f)"] \arrow[dd, dashed, "d'_n"] & & G_n(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_n(f)"] \arrow[dd, dashed, "\Delta'_n"] \\
F_n(X) \arrow[rr, "\phi_n(X)"] \arrow[dd, "d_n"] & & G_n(X) \arrow[dd, "\Delta_n"] & \\
 & F_{n-1}(M_j) \arrow[rr, dashed, "\phi_{n-1}(M_j)"] \arrow[dl, dashed, "F_{n-1}(f)"] \arrow[dd, dashed, "d'_{n-1}"] & & G_{n-1}(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_{n-1}(f)"] \arrow[dd, dashed, "\Delta'_{n-1}"] \\
F_{n-1}(X) \arrow[rr, "\phi_{n-1}(X)"] \arrow[dd, "d_{n-1}"] & & G_{n-1}(X) \arrow[dd, "\Delta_{n-1}"] & \\
 & F_{n-2}(M_j) \arrow[rr, dashed, "\phi_{n-2}(M_j)"] \arrow[dl, dashed, "F_{n-2}(f)"] \arrow[dd, dashed, "d'_{n-2}"] & & G_{n-2}(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_{n-2}(f)"] \arrow[dd, dashed, "\Delta'_{n-2}"] \\
F_{n-2}(X) \arrow[rr, "\phi_{n-2}(X)"] \arrow[dd, "d_{n-2}"] & & G_{n-2}(X) \arrow[dd, "\Delta_{n-2}"] & \\
 & \vdots \arrow[dd, dashed, "d'_1"] & & \vdots \arrow[dd, dashed, "\Delta'_1"] \\
\vdots \arrow[dd, "d_1"] & & \vdots \arrow[dd, "\Delta_1"] & \\
 & F_0(M_j) \arrow[rr, dashed, "\phi_0(M_j)"] \arrow[dl, dashed, "F_0(f)"] \arrow[dd, dashed, "\varepsilon_{F(M_j)}"] & & G_0(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_0(f)"] \arrow[dd, dashed, "\varepsilon_{G(M_j)}"] \\
F_0(X) \arrow[rr, "\phi_0(X)"] \arrow[dd, "\varepsilon_{F(X)}"] & & G_0(X) \arrow[dd, "\varepsilon_{G(X)}"] & \\
 & H_0(F(M_j)) \arrow[rr, dashed, "\Phi(M_j)"'] \arrow[dl, dashed, "H_0(F)(f)"] & & H_0(G(M_j)) \arrow[dl, dashed, "H_0(G)(f)"] \\
H_0(F(X)) \arrow[rr, "\Phi(X)"'] & & H_0(G(X)) &
\end{tikzcd}
$$

Demostració (Models acíclics). Sigui $\Phi : H_0(F) \to H_0(G)$ una transformació natural. Com F és lliure en $\mathscr{M}$, existeixen $M_j \in \mathscr{M}$ i $m_j \in F(M_j)$ tals que $\mathscr{B}_{F(X)}$ és una base de $F(X)$. Sigui $m_j \in \mathscr{B}_{F(X)} \cap F_0(M_j)$. Com G és acíclic en $\mathscr{M}$, la successió $G_0(M_j) \to H_0(G(M_j)) \to 0$ és exacta. Per exactitud, $\varepsilon_{G(M_j)} : G_0(M_j) \to H_0(G(M_j))$ és exhaustiva. Com $\Phi(M_j)\varepsilon_{F(M_j)}(m_j) \in H_0(G(M_j))$, per exhaustivitat de $\varepsilon_{G(M_j)}$,

$$\exists m'_j (m'_j \in G_0(M_j) \wedge \varepsilon_{G(M_j)}(m'_j) = \Phi(M_j)\varepsilon_{F(M_j)}(m_j))$$

Sigui X un objecte de $\mathscr{C}$ i $f \in \mathscr{C}(M_j, X)$. Definim $\phi_0(X) : F_0(X) \to G_0(X)$ sobre $\mathscr{B}_{F_0(X)}$ com $\phi_0(X)(F_0(f)(m_j)) = G_0(f)(m'_j)$ i estenent a $F(X)$. Veiem que $\varepsilon_{G(X)}\phi_0(X) = \Phi(X)\varepsilon_{F(X)}$. En efecte,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{G(X)}\phi_0(X)F_0(f)(m_j) &= \varepsilon_{G(X)}G_0(f)(m'_j) && \text{(Per definició de } \phi_0(X)\text{)} \\
&= H_0(G)(f)\varepsilon_{G(M_j)}(m'_j) && \text{(Per naturalitat dels morfismes de } \mathscr{K}\text{)} \\
&= H_0(G)(f)\Phi(M_j)\varepsilon_{F(M_j)}(m_j) && \text{(Per definició de } m'_j\text{)} \\
&= \Phi(X)H_0(F)(f)\varepsilon_{F(M_j)}(m_j) && \text{(Per naturalitat de } \Phi\text{)} \\
&= \Phi(X)\varepsilon_{F(X)}F_0(f)(m_j) && \text{(Per naturalitat dels morfismes de } \mathscr{K}\text{)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & F_0(M_j) \arrow[dl, dashed, "F_0(f)"'] \arrow[dd, dashed, "\varepsilon_{F(M_j)}"] & & G_0(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_0(f)"'] \arrow[dd, dashed, "\varepsilon_{G(M_j)}"] \\
F_0(X) \arrow[rr, "\phi_0(X)"] \arrow[dd, "\varepsilon_{F(X)}"] & & G_0(X) \arrow[dd, "\varepsilon_{G(X)}"] & \\
 & H_0(F(M_j)) \arrow[rr, dashed, "\Phi(M_j)"'] \arrow[dl, dashed, "H_0(F)(f)"'] & & H_0(G(M_j)) \arrow[dl, dashed, "H_0(G)(f)"'] \\
H_0(F(X)) \arrow[rr, "\Phi(X)"'] & & H_0(G(X)) &
\end{tikzcd}
$$

Sigui $g \in \mathscr{C}(X, Y)$. Veiem que ϕ_0 és natural. En efecte,

$$
\begin{aligned}
G_0(g)\phi_0(X)F_0(f)(m_j) &= G_0(g)G_0(f)(m'_j) && \text{(Per definició de } \phi_0(X)) \\
&= G_0(g \circ f)(m'_j) && \text{(Per functorialitat de } G_0) \\
&= \phi_0(Y)F_0(g \circ f)(m_j) && \text{(Per definició de } \phi_0(Y) \text{ i perquè } g \circ f \in \mathscr{C}(M_j, Y)) \\
&= \phi_0(Y)F_0(g)F_0(f) && \text{(Per functorialitat de } F_0)
\end{aligned}
$$

Suposem que $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ són transformacions naturals tals que $\Delta_k \phi_k(X) = \phi_{k-1}(X) d_k$ per $0 < k < n$ i $\varepsilon_{G(X)}\phi_0(X) = \Phi(X)\varepsilon_{F(X)}$. Sigui $m_j \in \mathscr{B}_{F(X)} \cap F_n(M_j)$. Tenim que

$$
\begin{aligned}
\Delta'_{n-1}\phi_{n-1}(M_j)d'_n(m_j) &= \phi_{n-2}(M_j)d'_{n-1}d'_n(m_j) && \text{(Per hipòtesi d'inducció)} \\
&= \phi_{n-2}(M_j)(0) = 0 && (d'_{n-1}d'_n = 0)
\end{aligned}
$$

Aleshores, $\phi_{n-1}(M_j)d'_n(m_j) \in \ker \Delta'_{n-1}$. Com G és acíclic en $\mathscr{M}$, $\operatorname{im} \Delta'_n = \ker \Delta'_{n-1}$. Per tant,

$$
\exists m'_j (m'_j \in G_n(M_j) \wedge \Delta'_n(m'_j) = \phi_{n-1}(M_j)d'_n(m_j))
$$

Definim $\phi_n(X) : F_n(X) \to G_n(X)$ sobre $\mathscr{B}_{F_n(X)}$ com $\phi_n(X)(F_n(f)(m_j)) = G_n(f)(m'_j)$ i estenent a $F_n(X)$. Veiem que $\Delta_k \phi_k(X) = \phi_{k-1}(X)d_k$. En efecte,

$$
\begin{aligned}
\Delta_n \phi_n(X) F_n(f)(m_j) &= \Delta_n G_n(f)(m'_j) && \text{(Per definició de } \phi_n(X)) \\
&= G_{n-1}(f)\Delta'_n(m'_j) && \text{(Per naturalitat dels morfismes de } \mathscr{K}) \\
&= G_{n-1}(f)\phi_{n-1}(M_j)d'_n(m_j) && \text{(Per definició de } m'_j) \\
&= \phi_{n-1}(X)F_{n-1}(f)d'_n(m_j) && \text{(Per naturalitat } \phi_{n-1}) \\
&= \phi_{n-1}(X)d_n F_n(f)(m_j) && \text{(Per naturalitat dels morfismes de } \mathscr{K})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & F_n(M_j) \arrow[dl, dashed, "F_n(f)"'] \arrow[dd, dashed, "d'_n"] & & G_n(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_n(f)"'] \arrow[dd, dashed, "\Delta'_n"] \\
F_n(X) \arrow[rr, "\phi_n(X)"] \arrow[dd, "d_n"] & & G_n(X) \arrow[dd, "\Delta_n"] & \\
 & F_{n-1}(M_j) \arrow[rr, dashed, "\phi_{n-1}(M_j)"'] \arrow[dl, dashed, "F_{n-1}(f)"'] & & G_{n-1}(M_j) \arrow[dl, dashed, "G_{n-1}(f)"'] \\
F_{n-1}(X) \arrow[rr, "\phi_{n-1}(X)"'] & & G_{n-1}(X) &
\end{tikzcd}
$$

La naturalitat de ϕ_n es comprova igual que la naturalitat de ϕ_0.
Sigui $\psi : F \to G$ una transformació natural que indueix Φ. Definim una homotopia de cadenes natural inductivament. Sigui $m_j \in F_0(M_j)$. Tenim que

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{G(M_j)}((\phi_0(M_j) - \psi_0(M_j))(m_j)) \\
=&\varepsilon_{G(M_j)}(\phi_0(M_j)(m_j)) - \varepsilon_{G(M_j)}(\psi_0(M_j)(m_j)) \\
=&\Phi(M_j)\varepsilon_{F(M_j)}(m_j) - \Phi(M_j)\varepsilon_{F(M_j)}(m_j) \\
=&0 && (\phi, \psi \text{ indueixen } \Phi)
\end{aligned}
$$

Com G és acíclic en $\mathscr{M}$, $\ker \varepsilon_{G(M_j)} = \operatorname{im} \Delta_1'$, d'on $\exists m_j'(m_j' \in G_1(M_j) \wedge \Delta_1' m_j' = (\phi_0(M_j) - \psi_0(M_j))(m_j))$.
Com F és lliure en $\mathscr{M}$, definim $D_0^X : F_0(X) \to G_1(X)$ per $D_0^X(F_0(f)(m_j)) =_0 G(f)(m_j')$ i estenent per linealitat. Tenim que $\Delta_1 D_0^X = \phi_0(X) - \psi_0(X)$.
Suposem que $D_0^X, \ldots, D_{n-1}^X$ són tals que $\Delta_{k+1} D_k^X + D_{k-1}^X d_k = \phi_k(X) - \psi_k(X)$ per $0 < k < n$ i $\Delta_1 D_0^X = \phi_0(X) - \psi_0(X)$. Sigui $m_j \in F_n(M_j)$. Tenim que

$$\begin{aligned}
&\Delta_n'(\phi_n(M_j) - \psi_n(M_j) - D_{n-1}^{M_j} d_n')(m_j) \\
&= (\Delta_n' \phi_n(M_j) - \Delta_n' \psi_n(M_j) - \Delta_n' D_{n-1}^{M_j} d_n')(m_j) \\
&= (\phi_{n-1}(M_j) d_n' - \psi_{n-1}(M_j) d_n' - (\phi_{n-1}(M_j) - \psi_{n-1}(M_j) - D_{n-2}^{M_j} d_{n-1}') d_n')(m_j) && \text{(Per inducció)} \\
&= (\phi_{n-1}(M_j) d_n' - \psi_{n-1}(M_j) d_n' - \phi_{n-1}(M_j) d_n' + \psi_{n-1}(M_j) d_n' + D_{n-2}^{M_j} d_{n-1}' d_n')(m_j) && (d_{n-1}' d_n' = 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Com G és acíclic en $\mathscr{M}$, $\ker \Delta_n' = \operatorname{im} \Delta_{n+1}'$, d'on

$$\exists m_j'(m_j' \in G_{n+1}(M_j) \wedge \Delta_{n+1}' m_j' = (\phi_n(M_j) - \psi_n(M_j) - D_{n-1}^{M_j} d_n')(m_j))$$

Com F és lliure en $\mathscr{M}$, definim $D_n^X : F_n(X) \to G_{n+1}(X)$ per $D_n^X(F_n(f)(m_j)) = G_n(f)(m_j')$ i estenent per linealitat. Per definició, tenim que $\Delta_{n+1} D_n^X + D_{n-1}^X d_n = \phi_n(X) - \psi_n(X)$. $\square$