Geometria Riemanniana. Curs 2023-2024

Seminari 3. Camps de Jacobi i curvatura

Exercici 1. Demostreu que una varietat de Riemann té curvatura constant K si i només si tota geodèsica γ i tot camp de Jacobi J ortogonal a γ compleix

$$J'' + K\,J = 0.$$

Exercici 2. Demostreu utilitzant camps de Jacobi que la curvatura seccional de l'esfera

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

és constant igual a 1. Utilitzeu els següents passos:

(i) Donats tres vectors u, v, $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ unitaris i ortogonals dos a dos, considereu la variació:

$$f(s,t) = \cos(t)u + \sin(t)(\cos(s)v + \sin(s)w)$$

Demostreu que és una variació per geodèsiques (per tot s, la corba $t \mapsto f(s,t)$ és una geodèsica).

(ii) Considereu el camp de Jacobi $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}$ i apliqueu l'equació de Jacobi. En particular podem obtenir tots els plans tangents en la construcció anterior.

Exercici 3. Demostreu utilitzant camps de Jacobi que la curvatura seccional del pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, amb la mètrica $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, és constant igual a -1. En aquest cas considereu la variació

$$f(s,t) = (x+s, e^t)$$

per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$.

Exercici 4. (Exercici 28 de la llista 3) Donats dos camps de Jacobi $J_1(t), J_2(t)$ definits al llarg d'una geodèsica $\gamma(t)$ i tals que $J_1(0) = J_2(0) = 0$ demostreu

$$g(J_1(t), J_2(t)) = g(J_1'(0), J_2'(0))t^2 - \frac{1}{3}R(\gamma'(0), J_1'(0), J_2'(0), \gamma'(0))t^4 + O(t^5).$$

Deduïu que respecte un sistema de coordenades geodèsiques $(x_1, \ldots, x_n)$ al voltant d'un punt tenim

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{rs} R_{irsj}(0)x_r x_s + O(|x|^3),$$

on $R_{irsj} = g(R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_r})\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.