Geometria Riemanniana. Curs 2023-2024

Llista 3. Curvatura i geodèsiques

1. Calculeu el tensor de curvatura de $\mathbb{S}^3$ amb la mètrica induïda per $\mathbb{R}^4$.

2. Considereu $\mathbb{R}^2$ dotat de la mètrica $g = \frac{1}{1+x^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Determineu el tensor de curvatura associat a aquesta mètrica. Pot ser $(\mathbb{R}^2, g)$ isomètric al pla euclidià?

3. Proveu que $\mathbb{H}^n$ amb la mètrica $g = x_n^{-2} \sum_i dx_i^2$ té curvatura seccional constant igual a -1.

4. Trobeu les curvatures seccionals de la mètrica

$$g = \frac{4}{(1 + K\|x\|^2)^2}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

definida a tot $\mathbb{R}^n$ si $K \geq 0$ i a la bola de radi $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ si $K < 0$. Noteu que aquesta és la mètrica d'una esfera expressada en coordenades estereogrà fiques. Quin radi té aquesta esfera?

5. Donada una funció $\rho > 0$ definida en un obert de $\mathbb{R}^2$, considerem la mètrica $g = \rho(x, y)^2(dx^2 + dy^2)$ en aquest obert. Proveu que la curvatura d'aquesta superfície és $K = -\frac{1}{\rho^2}\Delta \log \rho$.

6. Sigui g el camp de formes bilineals sobre $\mathbb{R}^2$ amb els coeficients següents respecte la base canònica $g_{11} = 1 + 6x^2 + 18x^4,\ g_{21} = g_{12} = 1 + 6x^2,\ g_{22} = 2$.

(a) Demostreu que g defineix una mètrica riemanniana a $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita associada a g.

(c) Demostreu que les corbes $\alpha(t) = (t, -t^3)$ i $\beta(t) = (-t, t + t^3)$ son geodèsiques de $(\mathbb{R}^2, g)$.

(d) Calculeu una base de camps paral·lels respecte a la connexió de Levi-Civita asociada a g.

7. Sigui M una varietat amb una connexió ∇. Demostreu que una corba c sobre M admet una reparametrizació que és una geodèsica si i només si els vectors $\frac{Dc'}{dt}$ i c' son linealment dependents. Demostreu que les geodèsiques del semipla de Poincaré són les rectes $x = cte$ i els arcs de circumferència ortogonals a $y = 0$.

8. Considerem $\mathbb{R}^3$ dotat de la mètrica

$$g = (a(x) + b(y))(dx^2 + dy^2) + dz^2$$

on a i b són funcions positives. Trobeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita corresponent. Trobeu l'equació de les geodèsiques.

9. Sigui $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Sigui g la mètrica de $\mathbb{R}^3$ donada per

$$g = (1 + h(x)^2)\mathrm{d}x^2 + 2h(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

(a) Calculeu els símbols de Christoffel i la curvatura de la connexió de Levi-Civita ∇ associada a g.

(b) Calculeu els camps paral·lels de $(\mathbb{R}^3, \nabla)$.

(c) Demostreu que si $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tal que $\frac{dH}{dx} = h$, llavors per a tot $a \in \mathbb{R}$, les corbes $\gamma(t) = (t, a - H(t), t)$ són geodèsiques.

(d) És $(\mathbb{R}^3, g)$ localment isomètric a $(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$?

10. Considerem la funció $g \in C^\infty(TM)$ definida per $g(x,v) := g_x(v,v)$ (g denota alhora la mètrica i una funció en el fibrat tangent). Si $x(t)$ és una corba a M i $\widetilde{x}(t) = (x(t), x'(t))$, proveu que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial v^i}\right)_{\widetilde{x}} - \left(\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)_{\widetilde{x}} = 2g(\frac{Dx'}{dt}, \frac{\partial}{\partial x^i})$$

on $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ són coordenades a TM corresponents a una carta local $(x^1, \dots, x^n)$ de M.

11. Considereu una superfície amb mètrica

$$g(u,v) = \varphi(v)\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \phi(u)\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v.$$

Trobeu les equacions de les geodèsiques.

12. Descriviu l'aplicació exponencial des d'un punt de S^n. Feu el mateix per al tor $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ i per al cilindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (dotats de la mètrica producte).

13. Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc en una varietat de Riemann M. Es defineix la seva *curvatura geodèsica* k_g com la norma del vector $D\alpha'(t)/dt$. Calculeu la curvatura geodèsica de la intersecció d'una recta del pla amb el semiplà de Poincaré.

14. Siguin $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ coordenades normals geodèsiques centrades en un punt p. Proveu que els símbols de Christoffel s'anul·len a p. Proveu que la curvatura geodèsica en $p = \alpha(0)$ d'una corba $\alpha(t)$ coincideix amb la curvatura a $\mathbb{R}^n$ de $\varphi \circ \alpha(t)$ en $t = 0$.

15. Proveu que respecte un sistema de coordenades geodèsiques $(x^1, \dots, x^n)$ al voltant de $p \in M$ els coeficients de la mètrica compleixen

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$$

16. Sigui f una isometria d'una varietat de Riemann connexa M tal que $f(x_0) = x_0$ i $df_{x_0} = id$ per un cert $x_0 \in M$. Proveu que $f(x) = x$ per tot $x \in M$.

17. Sigui $\sigma : M \longrightarrow M$ una isometria d'una varietat de Riemann completa. Sigui $N = \{x \in M | \sigma(x) = x\}$. Donada un corba $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to N \subset M$, proveu que $\exp_{c(0)}(c'(0)) \in N$.

18. Sigui M una varietat de Riemann i $p \in M$. Proveu que la funció $d(p, \cdot)$ no és diferenciable en p. Trobeu exemples on $d(p, \cdot)$ tampoc sigui diferenciable a $M \setminus \{p\}$.

19. Sigui $\emptyset \neq U \subset M$ un obert propi d'una varietat de Riemann (M, g) connexa. Proveu que (U, g) no és completa.

20. Sigui M una varietat riemanniana. Diem que una corba $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ és *divergent* si per tot compacte $K \subset M$, existeix $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t) \notin K$ per tot $t > t_0$. Demostreu que M és completa si i només si per tota corba γ divergent la següent integral impròpia és divergent

$$\int_0^\infty \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

21. Diem que una geodèsica $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ és un *raig* començant a $\gamma(0)$ si minimitza la distància entre $\gamma(0)$ i $\gamma(s)$ per tot s. Si M és completa, no compacta i $p \in M$ proveu que hi ha un raig començant en p.

22. Una varietat de Riemann M s'anomena homogènia si per tot parell $p, q \in M$ existeix una isometria $f\colon M \to M$ amb $f(p) = q$. Demostreu que tota varietat de Riemann homogènia és completa.

23. Un espai simètric és una varietat de Riemann M tal que per tot punt p existeix una isometria $\sigma : M \to M$ amb $\sigma(p) = p$ i $\mathrm{d}\sigma = -\mathrm{id}$. Proveu que en aquest cas M és completa. Demostreu que tot espai simètric és homogeni (en el sentit de l'exercici anterior).

24. Si $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ és un recobriment riemannià (recobriment i isometria local) i M és completa llavors $\widetilde{M}$ és completa.

25. Sigui $J(t)$ un camp de Jacobi definit al llarg de la geodèsica $\gamma : I \to M$. Construïu $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ tal que $J = \frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0} = (df)\frac{\partial}{\partial s}$.

26. En una varietat de Riemann M, donats dos vectors $u, v \in T_pM$ ortonormals i $r > 0$, proveu que la longitud $L(r)$ de la corba $c_r(\theta) = \exp_p(r\cos\theta u + r\sin\theta v)$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) compleix

$$L(r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K_p(\langle u, v\rangle)r^3 + O(r^4).$$

27. Sigui M una superfície completa de curvatura constant K. Donada una corba $c(s)$ parametritzada per l'arc, considerem un camp $N(s)$ definit al llarg de c amb $g(N(s), c'(s)) = 0$ i $g(N(s), N(s)) \equiv 1$. Donat $t \in \mathbb{R}$, determineu la longitud de les corbes $c_t(s) = \exp_{c(s)} tN(s)$.

28. Donats dos camps de Jacobi $J_1(t), J_2(t)$ definits al llarg d'una geodèsica $\gamma(t)$ i tals que $J_1(0) = J_2(0) = 0$ demostreu

$$g(J_1(t), J_2(t)) = g(J_1'(0), J_2'(0))t^2 - \frac{1}{3}R(\gamma'(0), J_1'(0), J_2'(0), \gamma'(0))t^4 + O(t^5).$$

Deduïu que respecte un sistema de coordenades geodèsiques $(x_1, \ldots, x_n)$ al voltant de p tenim

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{rs} R_{irsj}(0)x_r x_s + O(|x|^3),$$

on $R_{irsj} = g(R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_r})\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.
Deduïu, usant $\det(A + \mathrm{id}) = 1 + \mathrm{tr}A + O(\sum_i A_{i,i}^2)$, que

$$\det(g_{ij}(x)) = 1 - \frac{1}{3}\mathrm{Ric}(x, x) + O(|x|^3).$$

29. Demostreu que la curvatura escalar $S(p)$ d'una varietat de Riemann M^n en un punt p ve donada per la integral

$$S(p) = \frac{n}{\mathrm{vol}(\mathrm{S}^{n-1})}\int_{S^{n-1}} \mathrm{Ric}(x, x)dx$$

on S^{n-1} denota l'esfera formada pels vectors unitaris de T_pM. Deduïu de l'exercici anterior que el volum d'una petita bola geodèsica al voltant de p és

$$\mathrm{vol}(B_p(r)) = \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{S}^{n-1})r^n}{n}\left(1 - \frac{1}{6(n+2)}S(p)r^2 + O(r^3)\right).$$