Geometria Riemanniana

E. Gallego (T), J.Porti (E i S)

10 de juny de 2024

Índex

1 Varietats diferenciables.

1.1 *Prerequisits.* Del curs de geometria diferencial de corbes i superfícies: primera forma fonamental, segona forma fonamental, curvatures principals, curvatura de Gauss. El Teorema Egregi ens diu que K, la curvatura de Gauss, només depèn de la primera forma fonamental: geometria intrínseca. La noció de geodèsica forma part de la geometria intrínseca. Càlcul de diverses variables: teoremes de la funció inversa, de la funció implícita i teorema del rang.

1.2 *Superfície regular.* Un subconjunt $S \subset \mathbb{R}^3$ és *superfície regular* si per a tot $p \in S$ existeix un entorn obert V de p a $\mathbb{R}^3$ i una aplicació

$$\mathbf{x} : U \longrightarrow V \cap S$$

d'un obert $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

i) $\mathbf{x}$ és diferenciable (les component són funcions reals diferenciables).

ii) $\mathbf{x}$ és homeomorfisme.

iii) $d\mathbf{x}_q$ és injectiva per a tot $q \in U$.

Observació. Per homeomorfisme entenem que $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ existeix i és contínua. És a dir $\mathbf{x}^{-1}$ és restricció d'una funció contínua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida en un obert que conté $V \cap S$.

1.3 *Superfície abstracta.* Ampliem la noció de superfície regular. Donem una primera definició de varietat diferenciable de dimensió 2. El primer que farem és desfer-nos-en de l'ambient $\mathbb{R}^3$ en el qual vivia la superfície.

Definició. Una superfície abstracta és un conjunt S i una família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ amb $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to S$ injectives amb $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ oberts tals que:

i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = S$.

ii) Per qualsevol α, β amb $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ els conjunts $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W), \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ són oberts de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ i $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ són diferenciables

- Quan $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ diem que $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ és una *parametrització* o *sistema coordenat* o *entorn coordenat* de S al voltant de p.
- Si $q = \mathbf{x}_\alpha(u, v)$ diem que (u, v) són les coordenades de q en aquest sistema coordenat.
- La família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ s'anomena *estructura diferenciable.*
- Els canvis de paràmetre $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ i $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ són difeomorfismes de $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ i $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ respectivament.

Observació. És habitual afegir un tercer axioma que exigeix que l'estructura sigui *maximal.* És a dir, que tota altra família $(U_\beta, \mathbf{x}_\beta)$ que compleix *i)* i *ii)* ja està a la família inicial.

Si comparem la definició de superfície regular amb la de superfície abstracta veiem que la diferència és que en el cas regular no demanem explícitament la diferenciabilitat dels canvis.

Això és automàtic per ser subespais de $\mathbb{R}^3$. La condició *ii)* en la definició de superfície abstracta és la que ens permet parlar de diferenciabilitat en S.

Propietat. Sigui p un punt d'una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ i $(U, \mathbf{x})$, $(V, \mathbf{y})$ parametritzacions amb $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Llavors $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$ és difeomorfisme (h i h^{-1} diferenciables).

Demostració. Per definició $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ és homeomorfisme. Considerem $r \in \mathbf{y}^{-1}(W)$ i $q = h(r)$. Per ser $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ parametrització el rang del jacobià és 2, suposem que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

(si cal canviem l'ordre de les variables). Ampliem $\mathbf{x}$ a $\mathbb{R}^3$ com $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de manera que $F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t)$. És clar que F és diferenciable i $\det dF_q \neq 0$. Pel teorema de la funció inversa existeix un entorn M al voltant de $\mathbf{x}(q)$ a $\mathbb{R}^3$ tal que F^{-1} existeix i és diferenciable a M. Llavors tenim un obert N a V al voltant de r tal que $\mathbf{y}(N) \subset M$ (per continuïtat) i $F^{-1} \circ \mathbf{y}|_N = h|_N$ que és composició d'aplicacions C^∞. Podem fer servir el mateix argument per h^{-1} i hem acabat. $\square$

Podem definir que és una aplicació diferenciable entre superfícies abstractes.

Definició. Siguin S_1, S_2 superfícies abstractes, $f : S_1 \to S_2$ és *diferenciable* a $p \in S_1$ si donada una parametrització $(V, \mathbf{y})$ de S_2 al voltant de $f(p)$ existeix una parametrització $(U, \mathbf{x})$ de S_1 al voltant de p amb $f(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ tal que $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2$ és diferenciable. Diem que f és diferenciable a S_1 si és diferenciable a cada $p \in S_1$.

Observació. La condició *ii)* en la definició de superfície regular assegura que la noció de diferenciabilitat no depèn de les cartes triades. L'aplicació $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$ s'anomena *expressió en coordenades* de f.

1.4 *Exemples: $\mathbb{R}P^2$ i ampolla de Klein.* Considerem l'esfera unitat $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ com superfície regular, per exemple les projeccions superiors i inferiors sobre els plans coordenats són cartes locals (inverses de les parametritzacions).[1] També és una superfície abstracta amb les mateixes parametritzacions. Sigui $A(p) = -p$ l'aplicació antipodal, definim la relació d'equivalència a S^2 tal que $p \sim q$ si i només si $q = p$ o $q = A(p)$. El pla projectiu és $\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$. Sigui π la projecció de S^2 sobre $\mathbb{R}P^2$. Considerem parametritzacions $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ de S^2 compatibles amb l'estructura diferenciable i tals que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap A \circ \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \emptyset$ (els oberts no contenen punts antipodals). Aleshores, per ser A difeomorfisme i S^2 superfície regular, la família $(U_\alpha, \pi \circ \mathbf{x}_\alpha)$ defineix una superfície abstracta. En efecte:

1. $\pi \circ \mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}P^2$ és injectiva.
2. $\bigcup \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}P^2$.
3. Diferenciabilitat
$$(\pi \circ \mathbf{x}_\beta)^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{x}_\alpha) = \mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$$
és de classe C^∞.

[1] Per exemple $(x, y) \to (x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ parametritza l'hemisferi superior $z > 0$

Si fem el mateix amb un tor de revolució T^2 centrat a l'origen i identifiquem punts antipodals obtenim l'ampolla de Klein.

Observació. Quan parlem d'orientació veurem que aquestes superfícies no són orientables. A més són compactes. Es pot provar que tota superfície regular compacta a $\mathbb{R}^3$ ha de ser orientable (veure [Sam69]). Llavors ni $\mathbb{R}P^2$ ni K son superfícies regulars de $\mathbb{R}^3$.

1.5 *Espai tangent en una superfície abstracta.* Per una superfície parametritzada S l'espai tangent T_pS s'identifica amb les derivades de corbes contingudes a S que passen per p. A l'espai afí $\mathbb{R}^n$ el tangent en un punt s'identifica amb l'espai de direccions. Què fem en una superfície abstracta? Pensem a $\mathbb{R}^2$ i procedim després per analogia.

Sigui $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2$ una corba diferenciable amb $\alpha(0) = p$. Posem $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ amb $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ i $\alpha'(0) = w$. Sigui f una funció diferenciable en un entorn de p, restringim f a α i fem la derivada direccional:

$$(D_w f)(p) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\right|_{t=0} = \left(u'(0)\frac{\partial}{\partial u} + v'(0)\frac{\partial}{\partial v}\right)(f).$$

La derivada direccional només depèn del valor de $w = \alpha'(0)$ i no de tota la corba $\alpha(t)$.

Definició. Sigui S una superfície abstracta, una aplicació diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ s'anomena corba sobre S. Suposem $\alpha(0) = p$ i que $\mathcal{D}$ és el conjunt de les funcions diferenciables en algun entorn obert de p (gèrmens de funcions). El vector tangent a α quan $t = 0$ és el funcional

$$\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

definit per

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Un vector tangent en el punt $p \in S$ és el vector tangent en $t = 0$ per alguna corba $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ amb $\alpha(0) = p$.

L'ús d'una parametrització mostrarà que el conjunt de vectors tangents és un espai vectorial de dimensió 2 a cada punt. La base vindrà donada per les corbes coordenades $t \to \mathbf{x}(u_0 + t, v_0)$ i $t \to \mathbf{x}(u_0, v_0 + t)$.

Sigui $(U, \mathbf{x})$ una parametrització tal que $\mathbf{x}(0, 0) = p$. La funció s'escriu $f(u, v)$ i la corba $(u(t), v(t))$. Llavors

$$\alpha'(0)(f) = \left(u'(0) \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_0 + v'(0) \left.\frac{\partial}{\partial v}\right|_0\right)(f)$$

On $\partial/\partial u|_0$ és el vector tangent associat a la corba coordenada $t \to \mathbf{x}(t, 0)$ i aplica f a $(\partial f/\partial u)(0, 0)$. Anàlogament per l'altra variable.

Llavors T_pS és un espai vectorial bidimensional. L'elecció d'una parametrització $(U, \mathbf{x}(u, v))$ en un entorn de p dona lloc a la base $\partial/\partial u_q, \partial/\partial v_q$ a cada T_qS amb $q \in \mathbf{x}(U) \subset S$.

Abans de definir varietat diferenciable parlem de la diferencial d'una aplicació entre superfícies abstractes.

Definició. Sigui φ aplicació diferenciable entre superfícies abstractes S_1 i S_2. Donat $w = \alpha'(0) \in T_pS_1$ per a una corba α, definim $d\varphi_p \cdot w$ com $(\varphi \circ \alpha)'(0) \in T_{\varphi(p)}S_2$.

Exercici. Provar que $d\varphi_p$ està ben definida i és lineal. En coordenades és la matriu jacobiana de $\mathbf{x}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{y}$.

Amb això ja podem introduir la noció de varietat diferenciable

1.6 *Definició de varietat.* Considerem un espai topològic M Hausdorff amb base numerable. Recordem que Hausdorff vol dir que podem separar punts amb oberts.

Exemple. Considerem les línies del pla $r_1 : y = 1$ i $r_2 : y = -1$ amb les topologies induïdes i identifiquem els punts amb $x < 0$ considerant la topologia quocient. Els punts $(0, 1)$ i $(0, -1)$ són diferents però no es poden aïllar per oberts.

Exemple. Si considerem $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, on els oberts són els de $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ com a pla euclidià, llavors M no té base numerable. Si es treu aquesta condició aquesta varietat seria de dimensió dos i això no ens agrada (o si?).

Un altre raó, que veurem més endavant, per imposar aquestes condicions sobre la topologia es per poder tenir *particions de la unitat.*

Definició. Un *atles* $\mathcal{A}$ de classe C^r és una col·lecció de *cartes* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ on U_α dona un recobriment per oberts de M i $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ són homeomorfismes sobre oberts de $\mathbb{R}^n$ tals que si $W = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ llavors $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ és diferenciable de classe C^r a $\varphi_\beta(W)$.

Definició. Una *varietat diferenciable* M és un espai topològic Hausdorff amb base numerable i un atles maximal $\mathcal{A}$ de classe C^∞. Si les cartes locals són sobre $\mathbb{R}^n$ diem que la *dimensió* de M és n.

Notació i observacions

- Un atles $\mathcal{A}'$ és *compatible* amb $\mathcal{A}$ si la unió $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}$ és un atles.
- Si la varietat és C^0 diem que és una *varietat topològica.*
- En dimensió 2 superfície abstracta és el mateix que varietat diferenciable de dimensió 2. Si $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ era una estructura diferenciable llavors $\{(V_\alpha = \mathbf{x}(U_\alpha), \mathbf{x}_\alpha^{-1} = \varphi_\alpha)\}$ és un atles. Treballarem indistintament amb parametritzacions o amb cartes locals.
- Atles de classe C^ω, *varietat analítica.* Atles localment $\mathbb{C}^n$ amb cartes holomorfes, *varietat holomorfa.* Donem diferents estructures exigint propietats sobre els canvis de coordenades.

1.7 *Primers exemples.*

1. $\mathbb{R}^n$, considerem l'atles $(U = \mathbb{R}^n, \varphi = id)$. Qualsevol $\varphi(x) = Ax + t$ amb $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ i $t \in \mathbb{R}^n$ dona lloc a una carta compatible.

   Det fet qualsevol espai vectorial real és varietat diferenciable i qualsevol base ens dona un sistema de coordenades.

2. Tot obert U d'una varietat diferenciable és varietat diferenciable, si $\mathcal{A}$ és un atles la intersecció amb U dona les cartes i la restricció de les aplicacions a $U_\alpha \cap U$ són les coordenades. Per exemple $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ és varietat diferenciable.

3. S^n amb les cartes estereogràfiques, o amb les projeccions sobre plans coordenats.

4. L'espai projectiu $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ on $x \sim y$ si i només si $x = \lambda y$. Considerem la topologia quocient i el recobriment per les cartes afins $U_i = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ amb $x_i \neq 0\}$ i l'aplicació $\varphi_i([x_1, \ldots, x_{n+1}]) = (x_1/x_i, \ldots, \hat{1}, \ldots, x_{n+1}/x_i)$ on hem tret l'entrada al lloc i-èssim. Comprovem fàcilment que $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ són de classe C^∞ i (U_i, φ_i) és un atles diferenciable.

5. De forma similar el projectiu complex $\mathbb{C}P^n$ amb les cartes afins. Observem que és varietat real de dimensió $2n$ i holomorfa de dimensió n.

6. $M \times N$ on M i N són varietats. Per exemple el tor $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$,

Exercici. Considerem a $\mathbb{R}^2$ l'obert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x > 0\}$ i $\varphi(p) = (r(p), \theta(p))$ (coordenades polars). Provar que aquesta carta és compatible amb l'estructura ordinària de $\mathbb{R}^2$.

Exemple. (exercici de la llista) A $\mathbb{R}$ considerem la topologia ordinària, l'obert $U = \mathbb{R}$, els homeomorfismes $\varphi_1, \varphi_2 : U \to \mathbb{R}$ donats per $\varphi_1(t) = t$ i $\varphi_2(t) = t^3$. Llavors les estructures diferenciables donades per aquestes cartes no són compatibles ja que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(t) = t^3$ no és difeomorfisme.

Veurem més exemples quan parlem de la diferencial d'una aplicació diferenciable i amb les accions de grups sobre varietats.

1.8 *Aplicacions diferenciables.*

Definició. Donades M, N varietats diferenciables, una aplicació $f : M \to N$ és *diferenciable* de classe C^r en el punt p de M si existeixen cartes locals (U, φ) i (V, ψ) al voltant de p i $q = f(p)$ respectivament de manera que $f(U) \subset V$ i $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ és diferenciable de classe C^r a $\varphi(p)$. Diem que f és diferenciable en un entorn obert $U \subset M$ si és diferenciable a cada $p \in U$.

Nota: Denotem per $C^r(M, N)$ el conjunt d'aplicacions C^r entre dues varietats. $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ és l'*expressió en coordenades* de f. Si només diem diferenciable vol dir que és diferenciable de classe C^∞.

1.9 *Espai tangent en varietats.* Sigui M una varietat diferenciable. Procedim com en el cas de superfícies i considerem corbes $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de classe $C^r, r \geq 1$. Per a cada $p \in M$ denotem per $\mathcal{D}(p)$ la classe d'aplicacions C^1 definides en algun entorn obert de p. Aquest conjunt de fet és un àlgebra de classes d'equivalència de funcions: f, g definides en entorns oberts U, V respectivament de p són equivalents si existeix un entorn obert $W \subset U \cap V$ de p tal que $f|_W = g|_W$. Si cal, $[f]$ denota la classe d'una funció f de classe C^1 definida en un entorn de p.

Sigui $\alpha(t)$ corba C^1 amb $\alpha(0) = p \in M$, definim el *vector tangent* a la corba $\alpha(t)$ en p com l'aplicació $X : \mathcal{D}(p) \to \mathbb{R}$ tal que

$$Xf = \left(\frac{df(\alpha(t))}{dt} \right)_{t=0}.$$

En altres paraules, Xf és la derivada direccional de f en la direcció de la corba α. X satisfà

a) és lineal a $\mathcal{D}(p)$ i

b) $X(fg) = f(p)Xg + g(p)Xf$.

El conjunt d'aplicacions que satisfan a) i b) formen un espai vectorial real. Aquestes aplicacions s'anomenen *derivacions* en p.

Exercici. Provar que les aplicacions lineals $X : \mathcal{D}(p) \to \mathbb{R}$ que compleixen b) formen un espai vectorial real.

Denotem per T_pM el conjunt dels vectors tangents a $p \in M$. Veiem que aquest espai és de dimensió finita.

Demostració. Siguin $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ coordenades locals al voltant de p i $\varphi(p) = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ denotem per $\partial/\partial x_i|_p$ la derivació associada a la corba $t \to \varphi^{-1}(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0)$ llavors donada $\alpha(t) = \varphi^{-1}(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ tenim

$$\left(\frac{df(\alpha(t))}{dt}\right)_{t=0} = \left(\sum_i x_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) f$$

i tot vector tangent associat a una corba en p és combinació lineal dels $\partial/\partial x_i|_p$.
Recíprocament, donat $V = \sum_i \lambda_i \, \partial/\partial x_i|_p$ considerem la corba amb coordenades $x_i(t) = x_i^0 + \lambda_i t$. Llavors el vector tangent associat a aquesta corba té expressió V. Hem vist que $\{\partial/\partial x_i|_p\}$ són generadors. Veiem que són linealment independents, si $\sum_i \lambda_i \, \partial/\partial x_i|_p = 0$ apliquem aquest vector a cada funció coordenada x_i i veiem que $\lambda_i = 0$, llavors són linealment independents. □

Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ és una carta local llavors una base de T_qM per $q \in U$ ve donada per

$$\mathcal{B}_\varphi = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_q, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_q \right\}$$

on $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q$ correspon a la corba coordenada $\alpha_{i,q}(t) = \varphi(t_0, \ldots, t_i + t, \ldots t_n)$ essent $q = \varphi(t_0, \ldots, t_i, \ldots t_n)$.

Si $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ són coordenades al voltant d'un mateix punt la matriu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

és la que canvia coordenades en la base $\mathcal{B}_\varphi$ a coordenades en la base $\mathcal{B}_\psi$. És a dir

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}. \tag{1}$$

Podem pensar que si la corba que representa $\partial/\partial x_i|_p$ és $\alpha_i = \varphi^{-1}(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0)$, la seva imatge en coordenades $(y_1, \ldots, y_n)$ és

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0) = (y_1(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0), \ldots, y_n(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0)).$$

Derivant obtenim l'expressió (1).
Exercici. A $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ considerem la carta $(U = S^2 \setminus \{y = 0, x \geq 0\}, \Phi = (\theta, \varphi))$ de manera que $x = \cos\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\cos\varphi, z = \sin\varphi$ (θ longitud i φ latitud). Expressar $\partial/\partial\theta$ i $\partial/\partial\varphi$ respecte $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ de $\mathbb{R}^3$.

1.10 *Aplicació tangent o diferencial.* Considerem $f \in C^\infty(M, N)$, per a cada p i $v \in T_pM$ considerem una corba diferenciable tal que $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$ i la corba $\beta = f \circ \alpha$. Definim

$$df_p \cdot v = \beta'(0).$$

L'aplicació $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ està ben definida (no depèn de la α triada) i és lineal. Aquesta aplicació s'anomena *aplicació tangent* o *diferencial* de f en el punt p.

Demostració. Considerem $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ i $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ cartes locals de M i N respectivament amb $p \in U$ i $f(U) \subset V$. Tenim

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (y_1 = h_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = h_n(x_1, \ldots, x_m))$$

l'expressió en coordenades de f.
Si $\varphi \circ \alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_m(t))$, llavors l'expressió en coordenades de la corba β és

$$h(x_1(t), \cdots, x_m(t)) = (h_1(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \ldots, h_n(x_1(t), \ldots, x_m(t))).$$

L'expressió del vector tangent $\beta'(0)$ en la base $\{\partial/\partial y_i|_{f(p)}\}$ de $T_{f(p)N}$ és

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i'(0) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} x_i'(0) \frac{\partial h_n}{\partial x_i} \right). \tag{2}$$

Aquesta expressió mostra que df_p no depèn de la tria d'α ja que qualsevol altra tindrà les mateixes components $(x_1'(0), \ldots, x_m'(0))$. L'expressió (2) es pot posar en forma matricial i tenim

$$df_p \cdot v = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right) (x_j'(0)), \qquad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m.$$

Això mostra que df_p és lineal. En les bases de les referències x i y la matriu és $\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)_{i,j}$. $\square$

1.11 *Teoremes clàssics.* Una bona introducció als teoremes clàssics es troba a [Nic18], també és recomanable [Spi88]. Recordem les diferents versions del teorema del rang a $\mathbb{R}^n$. Sigui $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$, $p \in U$.

1. Si $n = m$ i el rang de df_p és n existeixen canvis de coordenades locals al voltant de p i $q = f(p)$ de manera que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

   És equivalent al teorema de la funció inversa: l'aplicació f admet inversa diferenciable que podem escriure localment com $f^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$.

2. Si $n < m$ i el rang de df_p és n (diferencial injectiva) tenim un encaix local

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n}).$$

   Veure la figura 1 .

3. Si $n > m$ i el rang de df_p és m (diferencial exhaustiva) tenim el teorema de la funció implícita o bé en coordenades al voltant de p

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$$

   que és una projecció.

Observació. El teorema de la funció implícita també s'acostuma a enunciar dient en quines condicions una equació $f(x, y) = 0$ té solució. Més concretament, si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ és diferenciable en un entorn obert de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f(x_0, y_0) = 0$ i amb matriu $\partial f_i / \partial x_{n+j}$, $1 \leq i, j \leq m$ amb determinant no nul, llavors hi ha entorns oberts $A \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 i $B \subset \mathbb{R}^m$ de y_0 de manera que existeix una única funció $g : A \to B$ diferenciable tal que $f(x, g(x)) = 0$. Veure la figura 2.

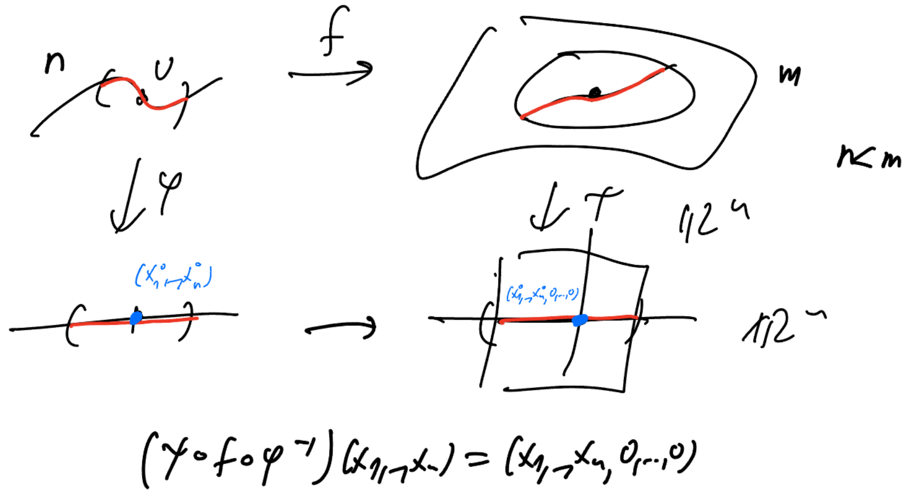


Figura 1: Una immersió canònica

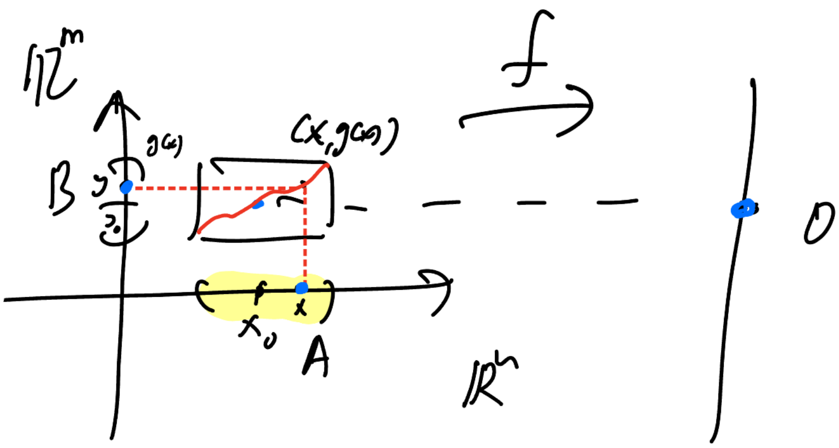


Figura 2: Teorema de la funció implícita

1.12 *Difeomorfismes.*

Definició. $f \in C^\infty(M,N)$ és *difeomorfisme* si és bijectiva amb $f^{-1} \in C^\infty(N,M)$. Diem que és *difeomorfisme local* en $p \in M$ si existeix un entorn obert U de p i un entorn obert V de $f(p) \in N$ tal que $f \in C^\infty(U,V)$ és difeomorfisme.

Teorema. *Si $f \in C^\infty(M,N)$ amb df_p isomorfisme aleshores f és difeomorfisme local a p.*

Demostració. Conseqüència directa de fer servir el teorema de la funció inversa de $\mathbb{R}^n$ en coordenades. $\square$

Exemple. $\mathbb{R}$ amb les estructures diferenciables no compatibles donades per $\varphi_1(t) = t$ i $\varphi_2(t) = t^3$ són difeomorfes. És suficient trobar una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de manera que $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(t)$ sigui difeomorfisme de $\mathbb{R}$. Cal que sigui bijectiva amb derivada mai nul·la. Per exemple $f(x) = x^3 + x + 1$ ho compleix.

Nota: Un gran problema de la geometria i la topologia és la classificació, mòdul difeomorfisme, de les varietats diferenciables. Podeu trobar a [Nic18, p. 17] i [Boo86, p. 104] una bona introducció al tema. Fem aquí un petit resum:

- En dimensió 1 només $\mathbb{R}$ o S^1, totes les demés són difeomorfes.
- En dimensió 2 compacte la classificació topològica coincideix amb la diferenciable: $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$ i sumes connexes. En el cas no compacte es pot fer una classificació estudiant el comportament a l'infinit.
- Per algunes esferes tenim una llista del nombre d'estructures diferenciables no difeomorfes, vegeu la taula 3 (les esferes topològiques amb estructures diferenciables no difeomorfes a la estàndard s'anomenen *esferes exòtiques*). Cal dir que la taula té un error: el cas $n = 3$ està complert, només hi ha una estructura a S^3 i el cas S^4 encara està obert. La primera esfera exòtica la va trobar Milnor a S^7 l'any 1963.

THE DIMENSION n AND NUMBER m OF NONDIFFEOMORPHIC STRUCTURES ON S^n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2

(El cas n=4 és obert)

Figura 3: Taula de [Boo86, p. 105]

1.13 *Immersions i subvarietats.*

Definició. $f \in C^\infty(M, N)$ és una *immersió* si df_p és injectiva per a cada $p \in M$.

Definició. Si f és immersió i homeomorfisme sobre la imatge $f(M) \subset N$ on s'ha considerat la topologia induïda per N diem que f és un *encaix*. També es diu *embedding*, o *immersió pròpia*.

Definició. Si $M \subset N$ i la inclusió $i : M \to N$ és un encaix diem que M és *subvarietat* de N.

Exemple. $\alpha(t) = (t, |t|)$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ no és diferenciable a $t = 0$, no és immersió.
Exemple. $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ la diferencial no és injectiva a $t = 0$. No és immersió.
Exemple. $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ és immersió però no és injectiva ja que $\alpha(2) = \alpha(-2)$. No és encaix.
Exemple. Considerem la corba $\alpha(t)$ definida a troços a $(-3, 0)$ per $\alpha(t) = (0, -(t + 2))$ si $t \in (-3, -1)$, $\alpha(t)$ una corba regular que enganxa diferenciablement si $t \in (-1, -1/\pi)$ i $\alpha(t) = (-t, -\sin(1/t))$ per la resta. És immersió, injectiva però no és homeomorfisme sobre la imatge.
Veiem els dibuixos dels exemples anteriors a la figura 4.

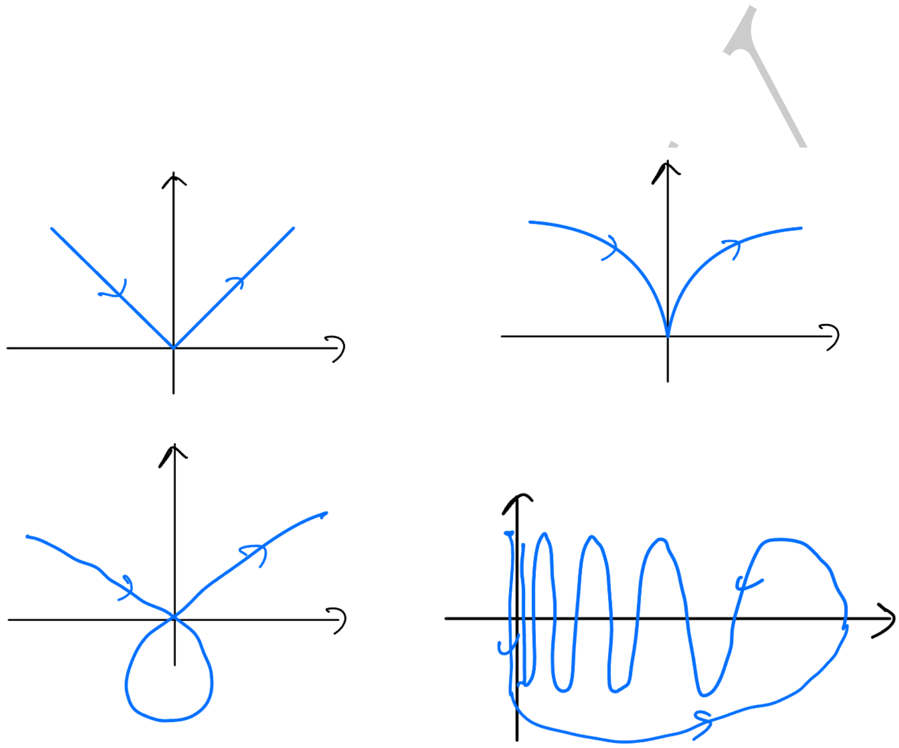


Figura 4: Diferents tipus d'immersions (o no)

Exemple. Una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ té l'estructura diferenciable donada per les parametritzacions $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \to S \subset \mathbb{R}^3$. Amb aquesta estructura les $\mathbf{x}_\alpha$ són diferenciables, de fet són un encaix. Un atles ve donat per $\{(V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha), \varphi_\alpha = \mathbf{x}_\alpha^{-1})\}_\alpha$. [2]

Exercici. Veure que $i : S \to \mathbb{R}^3$ és immersió pròpia (encaix) i per tant S subvarietat de $\mathbb{R}^3$.

Propietat. Si $f \in C^\infty(M, N)$ és immersió llavors és encaix local.

Demostració. Suposem $f(p) = q$ i considerem cartes (U, φ) i (V, ψ) de p i q respectivament. Sigui $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ l'expressió en coordenades i suposem que les coordenades de p i q són 0 (en els respectius espais). Per ser dh_0 injectiva, el nucli és 0 i el seu rang és m, la dimensió de M. Pel teorema del rang constant hi ha difeomorfismes $\varphi' : U' \to U''$ al voltant de $\varphi(p) = 0$ i $\psi' : V' \to V''$ al voltant de $\psi(q) = 0$ de manera que

$$\psi' \circ h \circ \varphi'^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Llavors

$$f : (\varphi^{-1} \circ \varphi'^{-1})(U'') \to (\psi^{-1} \circ \psi'^{-1})(V'') \cap f(M) \subset N$$

és homeomorfisme sobre la imatge. Veieu la figura 5. $\square$

1.14 *Immersió de* $\mathbb{R}P^2$. Aquest exemple es farà a classe de problemes i es pot trobar a [dC76]. Considerem $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$. Si A és l'aplicació antipodal és clar que $f \circ A = f$. La restricció a S^2 dona lloc a una aplicació de $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}^4$.
Com que la projecció $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ és difeo local per veure la diferenciabilitat de $(f|_{S^2}) \circ \pi^-$ n'hi ha prou veient que f és diferenciable a S^2. De fet ho és ja que ho és a $\mathbb{R}^3$ però fem el càlcul local per veure que és immersió.

[2]Podem parlar de '*superfícies' regulars* a $\mathbb{R}^n$: un subconjunt $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que per a tot $p \in M$ existeix un obert V de p a $\mathbb{R}^n$ i una $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to M \cap V$ tal que a) φ és difeomorfisme i $d\varphi_p$ és injectiva s'anomena superfície regular. És fàcil provar que M és varietat diferenciable.

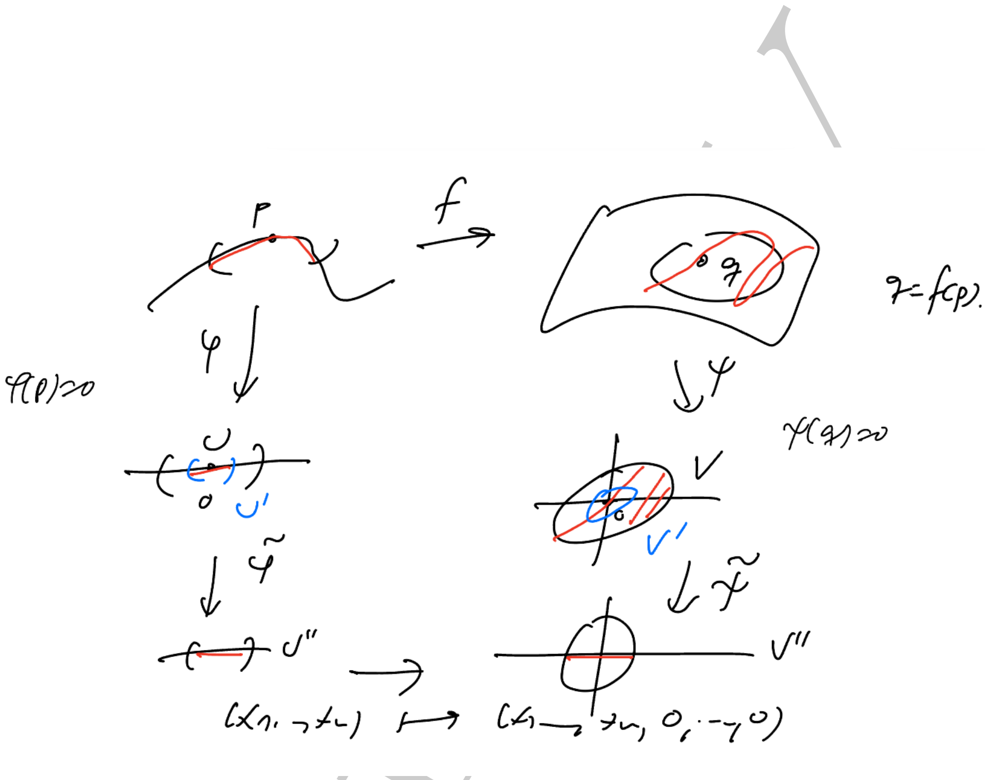


Figura 5: Forma local d'una immersió

Considerem la carta local tal que U és el casquet superior $z > 0$ i $\varphi^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. Llavors en coordenades locals, posant $Q = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, tenim

$$h(x, y) = f \circ \varphi^{-1}(x, y) = (x^2 - y^2, xy, xQ, yQ)$$

que és diferenciable ja que $x^2 + y^2 \neq 1$. La diferencial és

$$dh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \\ Q + xQ_x & xQ_y \\ yQ_x & Q + yQ_y \end{pmatrix}.$$

Si $x^2 + y^2 \neq 0$ el rang és 2 i és injectiva. Si $x^2 + y^2 = 0$ tenim $Q = 1$ i el rang també és 2. És immersió.
Per veure que és injectiva sobre $\mathbb{R}P^2$ veiem que si $f(p) = (a, b, c, d)$ amb $p \in S^2$ l'únic $q \in S^2$ amb $f(p) = f(q)$ és $\pm p$. Multiplicant les tres darreres igualtats entre elles veiem que $x^2yz = bc, y^2xz = bd, z^2xy = cd$, simplificant tenim

$$x^2d = bc, y^2c = bd, z^2b = cd.$$

Si b, c o d és un d'ells diferent de zero podem trobar el valors de x^2, y^2, z^2. Si $b = c = d = 0$ llavors $xy = xz = yz = 0$ i dues coordenades són 0 llavors la tercera és ± 1, que representa un punt del projectiu.
Tornem al cas en que coneixem x^2, y^2, z^2. Si tenim el signe d'una variable determina el de les altres i hem acabat de veure la injectivitat.
Falta veure que és un homeomorfisme sobre la imatge. Això és per ser el pla projectiu una varietat compacta. Ho veiem al següent apartat.

1.15 *Immersió de varietats compactes.* Suposem $f \in C^\infty(M, N)$ immersió injectiva amb M compacta, llavors f és encaix i $f(M) \subset N$ és subvarietat de N.

Demostració. Ja sabem que f és encaix local, f és contínua i M i $f(M)$ són Hausdorff ($f(M) \subset N$ té la topologia induïda i tot subespai d'un Hausdorff és Hausdorff, [Kos80, p. 58]). Llavors $f : M \to f(M)$ és contínua d'un compacte a un Hausdorff. Si $K \subset M$ és tancat llavors K és compacte per ser M compacte i llavors $f(K)$ és compacte, en efecte si $(U_\alpha : \alpha \in A)$ és un recobriment per oberts de $f(K)$ llavors $(f^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A)$ és recobriment per oberts de M del compacte K, podem extreure un recobriment finit $(f^{-1}(U_i) : i \in I)$, $|I| < \infty$. Com que $f(f^{-1}(U_i)) \subset U_i$ els U_i recobreixen K i $f(K)$ és compacte. Llavors $f(K)$ és tancat i hem provat que f és oberta, per tant f^{-1} és contínua i hem acabat. $\square$

1.16 *Fibrat tangent.* *Definició.* Sigui M varietat diferenciable, definim $TM = \{(x, v) : v \in T_xM\} = \bigcup_{x\in M} T_xM$ i $\pi : TM \to M$ la projecció natural. Aquest conjunt és el *fibrat tangent* de M.

Sigui $\mathcal{A}$ atles de M i $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ definim $\overline{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com $\overline{\varphi}(x, v) = (\varphi(x), v^1, \dots, v^n)$ amb

$$v = \sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .$$

Amb això TM és Hausdorff de base numerable i localment euclidiana. Com atles de TM prenem

$$\overline{\mathcal{A}} = \{(\pi^{-1}(U), \overline{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

Els canvis de coordenades ve donat per $(\psi \circ \varphi^{-1}, D(\psi \circ \varphi^{-1}))$ que és diferenciable.

Observació. Amb aquesta estructura la projecció natural $\pi : TM \to M$ és diferenciable.

Observació. No és cert que $TM = M \times \mathbb{R}^n$. Per exemple si $TS^2 = S^2 \times \mathbb{R}^2$ tindríem un camp diferenciable no nul a S^2 i pel teorema de Poincaré-Hopf sabem que no és cert.

Definició. Un *camp diferenciable* a M és una aplicació diferenciable $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}$. Denotem per $\mathcal{X}(M)$ l'espai vectorial real dels camps diferenciables de M.

1.17 *Topologia i particions de la unitat.* Hem dit que volem que les varietats siguin Hausdorff i amb base numerable. Aquests axiomes són equivalents a l'existència de *particions de la unitat*, fonamentals per poder reunir trossos i formar objectes globals, com per exemple camps o mètriques de Riemann. També és fonamental per poder definir la integració.

Definició. Un recobriment $\{U_\alpha\}$ per oberts és *localment finit* si per a qualsevol $p \in M$ existeix un entorn obert W de p tal que $U_\alpha \cap W \neq \emptyset$ només per un nombre finit d'oberts de la partició.

Definició. Donada $f \in C^\infty(M)$ el *suport* de f és

$$\sup(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}} \subset M.$$

Definició. Una *partició de la unitat* subordinada a un recobriment per oberts $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ és un conjunt de funcions diferenciables $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ tal que

1. $f_\alpha \geq 0$ i $\sup(f_\alpha) \subset U_\alpha$.
2. $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ és localment finit
3. $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ per a tot $p \in M$.

Teorema. *Una varietat diferenciable té particions de la unitat si i només si cada component connexa de M és un espai topològic Hausdorff amb base numerable.*

La demostració es pot trobar a [War83].

Observació. Farem servir particions de la unitat subordinades a recobriment que formen un atles $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

Exemple. No demostrem el teorema però podem veure un cas interessant a $\mathbb{R}^n$ d'una funció que val 1 en un entorn tancat i 0 fora d'un entorn obert. Considerem $V = B_2(p)$ i $U = B_1(p)$. Si $f(q) = \beta(-|p-q|)$ amb

$$\beta(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} \alpha(s)ds}{\int_{-2}^{-1} \alpha(s)ds}$$

amb

$$\alpha(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{(t+2)(-t-1)}\right) & t \in [-2,-1] \\ 0 & t \notin [-2,-1] \end{cases}$$

tenim que

$$f(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \in V^c \\ 1 & \text{si } q \in \overline{U}. \end{cases}$$

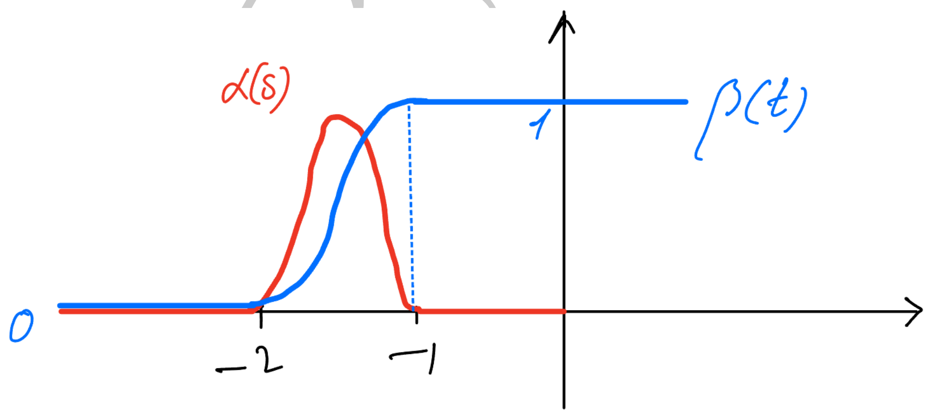


Figura 6: Funcions auxiliars

Propietat. Per a tot compacte K en un obert $V \subset M$ existeix una funció diferenciable ρ de manera que

$$\rho(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in V^c \\ 1 & \text{si } p \in K. \end{cases}$$

Demostració. Considerem el recobriment $\{V, U = M \setminus K\}$ i f, g partició de la unitat subordinada, és a dir $f(x), g(x) \geq 0, f(x) + g(x) = 1$ i $\sup(f) \subset U, \sup(g) \subset V$.
Llavors

- si $x \in V^c$ tenim $x \notin \sup(g)$ i $g(x) = 0$,
- quan $x \in V$ tenim que $g(x) = 1 - f(x)$ i si $x \in K$ llavors $x \notin \sup(f)$, $f(x) = 0$ i $g(x) = 1$.

Aleshores g és la funció ρ que busquem. □

Observació. Hem parlat de varietats abstractes però ens podem preguntar si qualsevol varietat diferenciable es pot pensar com a subvarietat d'algun $\mathbb{R}^N$. La resposta depèn de l'existència de particions de la unitat. Tenim els següents resultats de Whitney (llegir el comentaris de [dC92, p. 30]):

- Si $\dim M = n$ existeix una immersió de M sobre $\mathbb{R}^{2n}$ i una immersió pròpia (embedding, encaix) sobre $\mathbb{R}^{2n+1}$
- El resultat anterior és millorable: immersió a $\mathbb{R}^{2n-1}$ i encaix a $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercici. Fer el cas en que M és varietat compacta (és un exercici de la llista de classe).

Demostració. Per ser M compacta podem considerar un recobriment finit per cartes locals (U_i, φ_i) amb $i = 1, \ldots, N$. Sigui f_i una partició de la unitat subordinada a aquest recobriment. Considerem l'extensió de cada carta $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ multiplicant per f_i i prolongant per zeros fora de U_i, llavors tenim $\tilde{\varphi}_i = f_i \cdot \varphi_i$ a U_i i 0 fora de U_i. Considerem l'aplicació $\Phi : M \to (\mathbb{R}^n)^N \times \mathbb{R}^N$ donada per

$$\Phi(p) = (\tilde{\varphi}_1(p), \ldots, \tilde{\varphi}_N(p), f_1(p), \ldots, f_N(p)).$$

1. Φ és injectiva. Si $\Phi(p) = \Phi(q)$ llavors hi ha algun i tal que $f_i(p) = f_i(q) \neq 0$ (la suma és 1 algun $f_i(q)$ ha de ser no nul). Llavors $p, q \in U_i$ i $\varphi_i(p) = \varphi_i(q)$, per tant $p = q$ i Φ és injectiva.
2. $d\Phi_p$ és injectiva per a tot $p \in M$. Sigui $v \in T_pM$ tenim que

   $$d\Phi_p v = (df_1(p)v\varphi_1(p) + f_1(p)d\varphi_1(p)v, \ldots, df_N(p)v\varphi_N(p) + f_N(p)d\varphi_N(p)v; df_1(p)v, \ldots, df_N(p)v).$$

   Si $v \neq 0$ llavors $d\Phi_p v \neq 0$ ja que si $df_i(p)v = 0$ per a tot i per algun j tenim que $f_j(p) \neq 0$ llavors

   $$df_j(p)v\varphi_j(p) + f_j(p)d\varphi_j(p)v = f_j(p)d\varphi_j(p)v \neq 0$$

   per ser φ_j difeomorfisme.
3. Φ és un encaix per ser M compacte, tal i com es va fer a la pàgina 11 després de considerar la immersió de $\mathbb{R}P^2$ a $\mathbb{R}^4$.

$\square$

1.18 *Antiimatge de punts regulars.* Recordem que si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la antiimatge de 1 és l'esfera a $\mathbb{R}^3$ que és subvarietat. Fent servir el teorema del rang (funció implícita) això és un fet general.

Definició. Sigui $f \in C^\infty(M, N)$, un punt $p \in M$ és *punt crític* de f si df_p no és exhaustiva. La imatge d'un punt crític s'anomena *valor crític* de f. Si $a \in N$ no és valor crític diem que és un valor regular de f.

Teorema. *Sigui $f \in C^\infty(M, N)$ amb $\dim M = m > \dim N = n$. Si $a \in N$ és valor regular llavors $P = f^{-1}(a) \subset M$ és subvarietat de M de dimensió $m - n$ i $T_xP = \ker df_x$ per a tot $x \in P$.*

Demostració. Volem dotar P amb una estructura de varietat diferenciable i veure que $i : P \to M$ és un encaix. El rang de df_p és n per a qualsevol $p \in P$. Considerem cartes (U, φ) de M en p i (V, ψ) de a en N, per simplificar les expressions i sense pèrdua de generalitat suposarem que $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ i $\psi(a) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Sigui $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset \mathbb{R}^n$ una expressió en coordenades de f, dh_0 te rang n, llavors existeixen entorns oberts $U' \subset U \subset \mathbb{R}^m$ de 0 i $V' \subset V \subset \mathbb{R}^n$ de 0 i difeomorfismes $\varphi' : U' \to U''$, $\psi : V' \to V''$ de manera que

$$\psi' \circ h \circ \varphi'^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n).$$

Ara treballem en la carta local $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ al voltant de $p \in M$ amb $\tilde{U} = \varphi^{-1} \circ \varphi'^{-1}(U'')$ i $\tilde{\varphi} = \varphi' \circ \varphi$ i la carta local $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ al voltant de $a \in N$ amb $\tilde{V} = \psi^{-1} \circ \psi'^{-1}(V'')$ i $\tilde{\psi} = \psi' \circ \psi$.

Llavors $P \cap \tilde{U}$ són els punts de $\tilde{U}$ amb $x_1 = \cdots = x_n = 0$ (les x_i són les coordenades en la carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$) de M). Considerem $(P \cap \tilde{U}, \tilde{\varphi}')$ amb $\tilde{\varphi}'(x) = (x_{n+1}, \cdots, x_m)$ carta local de P al voltant de p. L'aplicació $\tilde{\varphi}$ és homeomorfisme i els canvis entre cartes d'aquest tipus són diferenciables ja que provenen de cartes a M que eren diferenciables. Ja tenim l'estructura de varietat diferenciable sobre P que voliem.

Per construcció és clar que i és encaix i que $\ker df_x$ és el tangent en $x \in P$.

$\square$

Exercici. Detallar les afirmacions finals del teorema: i és encaix i $T_x P = \ker df_x$.

Exemple. A classe de problemes es veuran $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ i $\mathrm{O}(n)$ com a varietats definides per equacions.[3]

Exemple. El tor $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ és $f^{-1}(0)$ amb $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - r^2$ amb $a > r$.

Exemple. A classe de problemes s'ha estudiat el cas $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - a^2$. Veiem quan el valors 0 és un valor regular. Tenim

$$df_{(x,y,z)} = (2z, 2y, -2z)$$

que val zero si i només si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Aquest punt només és de $f^{-1}(0)$ quan $a = 0$. Llavors si $a \neq 0$ tenim que 0 és valor regular i $f^{-1}(0)$ és subvarietat de dimensió 2 (superfície regular) de $\mathbb{R}^3$. Quan $a = 0$ en general no podem dir res però en aquest cas sabem que $z^2 = x^2 + y^2$ descriu un con i en el punt $(0, 0, 0)$ no tenim estructura diferenciable (les possibles direccions tangents (classe de corbes) formen un espai de dimensió 3).

Exemple. Si $f(x, y, z) = x^2 y^2 + z^2 - 2xyz$ no podem aplicar el criteri per decidir si $f^{-1}(0)$ és varietat o no ja que 0 no és valors regular. En canvi com que $f(x, y, z) = (xy - z)^2$ veiem que el conjunt $f^{-1}(0)$ és la sella donada per $z = xy$ que si que és superfície regular.

Exercici. Estudiar $F^{-1}(0, 0)$ si $F(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 + t^2 - 1)$. Defineix subvarietat a $\mathbb{R}^4$? Quina? Com és el seu espai tangent?

Exercici. Fer el mateix amb les equacions $x^2 + xy + z = 0 = x + y^2 - z^2$. Estudiar el cas en un entorn de $p = (-1, 1, 0)$ (és la corba intersecció de dues selles).

[3] 1) Si $\det : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, escrivim $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$. L'anomenem *grup especial lineal*. El tangent al neutre està format per les matrius de traça zero. 2) Pel *grup ortogonal* $\mathrm{O}(n)$ considerem l'aplicació $A \to A \cdot A^t$ sobre les matrius simètriques $\mathrm{Sim}(n, \mathbb{R})$ que és subespai vectorial de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, l'espai de totes les matrius.

1.19 *Orientació.* Diem que M és *orientable* si existeix un atles pel qual el jacobià (determinant) de tots els possibles canvis de variable entre cartes de l'atles són positius[4]. En cas contrari diem que és no orientable.

- Triar un atles amb aquesta condició és donar una orientació i diem que M està orientada.
- Si M és orientable i connexa hi ha dues classes d'orientació.
- Si tenim difeomorfisme $f \in C^\infty(M, N)$ llavors M és orientable si i només N és orientable.
- Sigui un difeomorfisme $f \in C^\infty(M, N)$ amb M, N connexes i orientades. Llavors f indueix una orientació en N si coincideix amb l'orientació inicial de N diem que f conserva la orientació. Això es veu en que el determinat de la diferencial de f és positiu si triem cartes orientades.

1.20 *Accions de grups.* Hem vist $\mathbb{R}P^2$ com el quocient de S^2 per la relació d'equivalència que identifica els punts antipodals. També hem vist el tor T^2 donant una relació d'equivalència a $\mathbb{R}^2$ que identifica punts $(x, y), (x', y')$ si i només si $(x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$. Són casos particulars d'una situació més general.

Definició. Sigui G un grup, diem que actua sobre una varietat diferenciable M si existeix una $\varphi : G \times M \to M$ tal que

i) Per cada g l'aplicació $\varphi_g \in C^\infty(M, M)$ donada per $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$ és difeomorfisme,

ii) $\varphi_e = \mathrm{id}$,

iii) $\varphi_{gg'} = \varphi_g \circ \varphi_{g'}$.

Nota: Escrivim $\varphi_g(p) = g \cdot p$, llavors ii) s'escriu $(gg') \cdot p = g \cdot (g' \cdot p)$.

Exemples. Veiem alguns exemples

1. L'acció natural de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$ (i la d'altres subgrups com $\mathrm{O}(n)$ o $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.
2. Les matrius de la forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
amb $a > 0$ són subgrup (tancat) de $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{R})$ i actuen sobre $\mathbb{R}$, *grup afí.* L'acció associada a un element és $x \mapsto ax + b$.
3. El grup d'isometries de $\mathbb{R}^n$ (espai euclidià) actua sobre $\mathbb{R}^n$. Aquest grup és $O(n) \times \mathbb{R}^n$, girs i translacions.

Definició. Una acció de G en M és *pròpiament discontinua* si $\forall p \in M$ existeix un entorn obert U de p tal que $U \cap gU = \emptyset$ per a tot $g \neq e$.

Donada una acció de G sobre M denotem per M/G l'espai quocient associat a la relació d'equivalència: $x \sim y$ *si i només si hi ha un* $g \in G$ *tal que* $y = g{\cdot}x$. Denotem per $\pi : M \to M/G$ la projecció de M en M/G. Es considera la topologia quocient en la qual $U \subset M/G$ és obert si i només si $\pi^{-1}(U)$ és obert de M. En aquesta topologia π és contínua.

Propietat. Si l'acció és pròpiament discontínua llavors M/G és varietat diferenciable i π és difeomorfisme local.

[4]Veurem que la orientabilitat d'una varietat és equivalent a l'existència d'una forma diferencial de grau màxim mai nul·la.

Demostració. Primer veiem que $\pi : M \to M/G$ és una aplicació oberta. En efecte, si W és un obert de M considerem un recobriment U_α de W per oberts tals que $U_\alpha \cap gU_\alpha = \emptyset$ per a tot $g \neq e$. Llavors $\pi|_{U_\alpha}$ són homeomorfismes i $\pi(W) = \pi(\bigcup W \cap U_\alpha) = \bigcup(\pi(W \cap U_\alpha))$ que és una unió d'oberts i per tant obert.

Per veure que M/G és Hausdorff siguin $[x], [y]$ punts diferents de M/G, llavors, per ser M Hausdorff, hi ha entorns U i V de x i y respectivament tals que $U \cap V = U \cap gU = V \cap gV = \emptyset$. Aleshores $\pi(U)$ i $\pi(V)$ són oberts de M/G que separen $[x]$ i $[y]$ i M/G és Hausdorff.

Sigui $\{U_i\}_{i \in I}$ base numerable d'oberts de M, W obert de M/G aleshores $\pi^{-1}(W)$ és obert de M i podem escriure $\pi^{-1}(W) = \bigcup_{j \in J \subset I} U_j$ per un cert subconjunt d'oberts de la base. Com que $W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup \pi(U_j)$ resulta que $\pi(U_i)$ és base numerable de M/G.

Sigui (U, φ) carta local al voltant de $p \in M$ tal que $U \cap gU = \emptyset$ per a tot $g \in G$ diferent del neutre. Llavors $\pi|_U : U \to \pi(U) = \tilde{U}$ és homeomorfisme. Considerem una atles $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M amb els obert com els que acabem de descriure. Sigui $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ on $\tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha \circ (\pi_\alpha|_{U_\alpha})^{-1}$. Estudiem la diferenciabilitat del canvi de cartes

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1} = \varphi_\alpha \circ (\pi_\alpha|_{U_\alpha})^{-1} \circ (\pi_\beta|_{U_\beta}) \circ \varphi_\beta^{-1}$$

però per ser U_α i U_β disjunts per l'acció

$$(\pi_\alpha|_{U_\alpha})^{-1} \circ (\pi_\beta|_{U_\beta}) = \varphi_g$$

per un cert g. Llavors $\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}$ és composició de difeomorfismes i per tant és difeomorfisme i $\tilde{\mathcal{A}}$ defineix un atles diferenciable. Per la mateixa definició π és difeomorfisme local. $\square$

Exemples.

1. L'acció antipodal de $\mathbb{Z}_2$ sobre S^n. Llavors $\mathbb{R}P^n = S^n/\mathbb{Z}_2$ és varietat diferenciable, l'espai projectiu de dimensió n.

2. L'acció per translacions de $\mathbb{Z}_n$ sobre $\mathbb{R}^n$. Obtenim els tors $\mathbb{T}^n$.

3. Si S és una superfície regular a $\mathbb{R}^3$ amb simetria respecte l'origen, és a dir que $A(p) = -p \in S$ per qualsevol $p \in S$. Llavors $S/\mathbb{Z}_2$ és superfície (varietat diferenciable de dimensió 2). Per exemple per un cilindre tenim la banda de Möbius infinita i per un tor l'ampolla de Klein.

4. Espais lenticulars. Sigui p un primer; α p-arrel de la unitat i $0 \leq k \leq p-1$ enter. Pensem S^3 com parells (z, z') de complexes amb $|z|^2 + |z'|^2 = 1$. Tenim l'acció de $\mathbb{Z}_p$ donada per $1 \cdot (z, z') = (\alpha z, \alpha^k z')$. El quocient $L_{p,k}$ s'anomena espai lenticular.

   Exercici. $L_{p,k}$ i $L_{p,l}$ són difeomorfs (isomètrics de fet) si k i l o k i l^{-1} són congruents mòdul p.

Observació. El tor $\mathbb{T}^2$ és difeomorf a $f^{-1}(0)$ amb $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}) - r^2$ amb $a > r$. Veurem que considerant el tor d'una o d'una altra manera obtindrem mètriques diferents.

Exercici. Hem vist vàries definicions del tor: $\mathbb{T}_1^2 = S^1 \times S^1$, $\mathbb{T}_2^2 = f^{-1}(0)$ on f és l'aplicació d'abans i $\mathbb{T}_3^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Comprovar que les estructures diferenciables són difeomeorfes.

1.21 *Camps diferenciables.*

Definició. Un *camp diferenciable* en una varietat diferenciable M és una aplicació diferenciable $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = \mathrm{id}$. Denotem per $\mathcal{X}(M)$ l'espai vectorial real de camps diferenciables en M.

Si $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ és una carta local, l'expressió local de X en aquesta carta és

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p .$$

La diferenciabilitat de X es veu en la diferenciabilitat de les funcions components $\lambda_i : U \to \mathbb{R}$.

Observació. Podem pensar en $X \in \mathcal{X}(M)$ com derivacions a $C^\infty(M)$:

$$Xf = \sum_i \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(M).$$

Definició. El *claudàtor o parèntesi de Lie* de dos camps diferenciables X, Y és el camp $[X, Y]$ definit per

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Fem servir coordenades per veure que $[X, Y]$ està ben definit, existeix i és únic. Si $X = \sum a_i \partial/\partial x_i$ i $Y = \sum b_j \partial/\partial x_j$, llavors

$$(XYf - YXf) = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Això prova que és únic. Si el donem en coordenades amb aquesta expressió llavors la unicitat implica que allà on s'intersequin els oberts coordenat el camp claudàtor coincideix.

Propietat. El parèntesi de Lie satisfà

i) $[X, Y] = -[Y, X]$

ii) És lineal respecte les constants en X i en Y

iii) Satisfà la identitat de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$

Exercici. Provar aquestes propietats.

Observació. Fent servir particions de la unitat podem construir camps diferenciables en qualsevol varietat que no siguin localment trivials. En efecte, considerem una partició de la unitat f_i associada a $(U_i, \varphi_i = x_1^i, \ldots, x_n^i)$ i el camp $X = \sum_i f_i \partial/\partial x_1^i$.
Òbviament no podem assegurar l'existència de camps sense zeros com mostra el cas de S^2 que no admet camps continus mai nuls.

1.22 *Flux associat a un camp.* A $\mathbb{R}^n$ el teorema d'existència i unicitat d'equacions diferencials ordinàries assegura que donat un camp X diferenciable i un punt $p \in \mathbb{R}^n$ existeix un entorn obert $U \subset \mathbb{R}^n$ de p, un nombre ϵ i una corba diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ i $\alpha(0) = p$. A més la dependència en p és diferenciable. La corba α s'anomena *corba integral* del camp X.

Aquest resultat es pot enunciar per varietats amb l'ús de cartes locals. De fet tenim que si $X \in \mathcal{X}(M)$, per a tot $p \in M$ existeixen un $\epsilon > 0$, un entorn obert U de p i una aplicació

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$$

de manera que per cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ l'aplicació $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ és difeomorfisme i les corbes $t \to \varphi(t, p)$ són corbes integrals de X que passen per p quan $t = 0$.

Definició. L'aplicació φ_t s'anomena *flux local* del camp X.

Propietat. Si φ_t és el flux local de X llavors

$$[X, Y]_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (Y - d\varphi_t Y)(\varphi_t(p)). \tag{3}$$

Veure [dC92] per la demostració.

Observació. De vegades l'expressió de la dreta de (3) s'anomena *derivada de Lie* del camp Y en la direcció del camp X i s'escriu $\mathcal{L}_X Y$[5].

1.23 *Altres fibrats: tensors i formes.* Hem considerat el fibrat vectorial $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ amb canvis de coordenades donats per $(\psi \circ \varphi^{-1}, D(\psi \circ \varphi^{-1}))$ en els oberts adequats. A cada punt $p \in M$ podem considerar els espais vectorials

$$T_pM^*, T_pM^* \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{r} T_pM^* \otimes T_pM \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{s} T_pM, T_pM^* \underbrace{\wedge \cdots \wedge}_{r} T_pM^*.$$

Notem que els elements de $T_pM^* \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{r} T_pM^* \otimes T_pM \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{s} T_pM$ es poden pensar com a aplicacions multilineals

$$\Phi : T_pM \underbrace{\times \cdots \times}_{r} T_pM \times T_pM^* \underbrace{\times \cdots \times}_{s} T_pM^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Tenim respectivament:

1. TM^* fibrat de 1-*formes diferencials*. Una 1-forma és una aplicació diferenciable (secció) $\omega : M \to TM^*$ tal que $\pi \circ \omega = \mathrm{id}$. El conjunt de 1-formes diferencials el denotem per $\Omega^1(M)$. La base natural de T_pM^* associada a la carta local $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ és $\{dx_1|_p, \ldots, dx_n|_p\}$. Localment s'escriuen com

   $$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} a^i(x_1, \ldots, x_n)dx_i, \quad a^i \in C^\infty(\varphi^{-1}(U)).$$

   Exercici. Comproveu que els canvis de coordenades al fibrat cotangent TM^* venen donats per $(\psi \circ \varphi^{-1}, (D(\varphi \circ \psi^{-1}))^t)$. És a dir, en la part lineal T_pM^* la matriu del canvi és la trasposta de la inversa de la matriu de canvi en la part lineal T_pM de TM.

[5]També és possible fer la derivada de Lie d'un tensor en M.

2. $\mathcal{T}_s^r(TM) = \bigcup_{p\in M} T_pM^* \otimes \underbrace{\cdots}_{r} \otimes T_pM^* \otimes T_pM \otimes \underbrace{\cdots}_{s} \otimes T_pM$ és el fibrat del tensors r-covariants i s-contravariants. Un tensor (r,s) és una secció diferenciable T de $\mathcal{T}_s^r(M)$, és a dir una $T : M \to \mathcal{T}_s^r(M)$ amb $\pi \circ T = \mathrm{id}$. Denotem per $\mathcal{T}_s^r(M)$ el conjunt del tensors diferenciables de tipus (r,s). Localment

$$T|_U = \sum_{I,J} t_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_s} dx_{j_1} \otimes \cdots \otimes dx_{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} = \sum_{I,J} t_J^I dx_I \otimes \frac{\partial}{\partial x_J},$$

amb $t_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_s} \in C^\infty(\varphi^{-1}(U))$.

Exemple. Donar, de forma diferenciable, una forma bilineal a cada tangent és donar un $g \in \mathcal{T}_0^2(M)$, localment $g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$.[6]

Nota: Per poder seguir la convenció dels sumatoris d'Einstein es posa $x^1, \dots, x^n$ per les funcions coordenades, llavors els subíndexs en els coeficients del tensors correspon a la covariància i el superíndexs a la contravariància, tenim llavors

$$g|_U = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad T|_U = t_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_s} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}.$$

3. Les formes diferencials són les seccions diferenciables de $\Omega^r(TM^*) = \bigcup_{p\in M} T_pM^* \wedge \underbrace{\cdots}_{r} \wedge T_pM^*$. Una base local ve donada per

$$\{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n\}$$

i la dimensió de $\Omega^r(T_pM^*)$ és $\binom{n}{r}$. Denotem per $\Omega^r(M)$ les r-formes diferencials. Localment les r-formes s'escriuen

$$\eta = \sum \lambda_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n.$$

Posem $\Omega(M) = \oplus_{r=0}^n \Omega^r(M)$ on $\Omega^0(M)$ són les funcions $C^\infty(M)$.

Observació. Observem que el canvi de coordenades es comporta diferent en camps i formes. Siguin $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ i $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ cartes locals amb $U \cap V \neq \emptyset$. Tenim

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i a^i \left(\sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a^i \right) \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

llavors

$$b^j = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a^i, \qquad \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = D(\psi \circ \varphi^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$$

i les coordenades dels camps canvien amb $D(\psi \circ \varphi^{-1})$, la matriu jacobiana del canvi $\psi \circ \varphi^{-1}$. Per 1-formes tenim

$$\omega = \sum_i a_i dx_i = \sum_i a_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j \right) = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} a_i \right) dy_j = \sum_j b_j dy_j,$$

[6] Si cada matriu (g_{ij}) és definida positiva tenim una mètrica de Riemann a M.

llavors

$$b_j = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} a_i, \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = D(\varphi \circ \psi^{-1})^t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n . \end{pmatrix}$$

i les coordenades dels camps canvien amb $D(\varphi \circ \psi^{-1})^t$ la trasposta del canvi invers $\varphi \circ \psi^{-1}$.

Hi ha una operació molt important, la *derivada exterior* que a $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^r(M)$ li fa correspondre

$$d\omega = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \in \Omega^{r+1}(M)$$

i estenem a tot $\Omega^r(M)$ per linealitat, és a dir si $\omega = f_I dx^I$ llavors $d\omega = df_I \wedge dx^I$.

Propietat. Si $\omega, \omega_i, \eta \in \Omega(M)$ llavors

a) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$

b) $\eta \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \eta \wedge \omega_1 + \eta \wedge \omega_2$

c) $f\omega \wedge \eta = \omega \wedge f\eta = f(\omega \wedge \eta)$

d) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$ on k i l són els ordres de ω i η respectivament.

e) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$ on f^* és l'aplicació dual associada a $f_* := df$ essent $f \in C^\infty(M, N)$.

f) L'operador diferencial és lineal en $\mathbb{R}$

g) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ on k és l'ordre de ω.

h) $d^2 = 0$

i) d és única amb les anteriors tres propietats.

j) $d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$.

k) Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ llavors

$$f^*(h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (h \circ f)(\det df) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Si ho fem per una varietat M obtenim el resultat anàleg.

(per detalls sobre camps i formes a $\mathbb{R}^n$ el llibre [Spi88] és una bona referència).

Veiem la relació que hem comentat abans entre la orientabilitat i i les formes.

Propietat. Donada M varietat diferenciable de dimensió n, són equivalents: a) M és orientable, b) Existeix una $\omega \in \Omega^n(M)$ mai nul.la.

Demostració. Si M és orientable existeix una atles $(U_i, \varphi_i = (x_1^i, \ldots, x_n^i))$ de manera que $\det d(\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)(x) > 0$. Sigui f_i una partició subordinada al recobriment i les formes locals $\omega_i = dx_1^i \wedge \cdots \wedge dx_n^i$. Llavors $\omega = \sum f_i \omega_i$ defineix una n-forma mai nul·la a M. En efecte si $v_1, \ldots, v_n$ és una base de T_pM compatible amb la orientació que dona l'atles tenim que

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_n) = \sum_i f_i(p)(dx_1^i \wedge \cdots \wedge dx_n^i)(v_1, \ldots, v_n) > 0$$

ja que $(dx_1^i \wedge \cdots \wedge dx_n^i)(v_1, \ldots, v_n)$ és el determinant de la matriu del canvi de bases que és positiu per estar en la mateixa orientació.

Si ω és una n-forma mai nul·la sigui l'aplicació $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, x_n)$ i un atles (U_i, φ_i). Si $\omega(\partial/\partial x_1^i, \ldots, \partial/\partial x_n^i) > 0$ cosiderem $\psi_i = \varphi_i$ i si $\omega(\partial/\partial x_1^i, \ldots, \partial/\partial x_n^i) < 0$ considerem $\psi_i = \sigma \circ \varphi_i$ aleshores l'atles (U_i, ψ_i) fa de M una varietat orientable. $\square$

Observació. Un tensor del tipus $(r, 1)$ es pot pensar com una aplicació r-lineal a valors en TM. Si $\phi \in \mathcal{T}_r^1(M)$ llavors podem associar-li $T : TM \times \cdots \times TM \to TM$ com $T(X_1, \ldots, X_r) \in \mathcal{X}(M)$ de manera que si $\omega \in \Omega^1(M)$ llavors $\omega(T(x_1, \ldots, x_n)) = \phi(X_1, \ldots, X_n; \omega)$. Notem per exemple que el parèntesi de Lie $[X, Y]$ no prové d'un tensor $\mathcal{T}_2^1(M)$ ja que no és lineal per les funcions i $[fX, gY] \neq fg[X, Y]$ com ho seria un tensor.

2 Varietats de Riemann.

2.1 *Varietat de Riemann.* Una *mètrica de Riemann* és un tensor g dues vegades covariant, simètric i definit positiu. Llavors una varietat de Riemann és una varietat diferenciable amb una mètrica de Riemann. Ho denotem per (M, g).
En coordenades $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$:

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}$$

amb les funcions g_{ij} diferenciables.
Propietat. Tota varietat diferenciable admet una mètrica de Riemann.

Demostració. Sigui M varietat diferenciable i (U_α, f_α) una partició de la unitat subordinada (que sempre existeix) a un recobriment per entorns amb coordenades $(x^1_\alpha, \dots, x^2_\alpha)$. Considerem els tensors globalment definits

$$g_\alpha(p)(v, w) = \begin{cases} f_\alpha(p) \cdot \langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle & \text{si } p \in U_\alpha \\ \\ 0 & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

on $\tilde{v} = d\varphi_\alpha(p)v$ i $\tilde{w} = d\varphi_\alpha(p)w$.
Aleshores $g = \sum g_\alpha$ és una mètrica de Riemann a M.
Hem provat que tota varietat diferenciable admet una mètrica de Riemann. □

Exercici. Provar que a S^2 no existeix una mètrica de Lorentz, és a dir que no existeix $S^2 \ni p \to \langle \cdot, \cdot \rangle_L$ diferenciable tal que el producte és congruent amb el producte donat per la matriu simètrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ([GHL90, p. 53]).

2.2 *Exemples.*

1. $\mathbb{R}^n$ i els seus oberts amb la mètrica euclidiana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eucl}}$.

2. $\varphi : S \mapsto M$, subvarietat immersa, la mètrica g_S ve donada per $\varphi^* g = g_S$ essent g mètrica de Riemann sobre M. És a dir,

   $$g_S(v, w) = g(d\varphi\ v, d\varphi\ w).$$

   En particular per immersions a $\mathbb{R}^n$, tenim $g_S(v, w) = \langle d\varphi\ v, d\varphi\ w \rangle_{\text{eucl}}$, la mètrica induïda per φ.

3. Si $a \in N$ és valor regular de $f : M^{n+k} \to N^k$ llavors $f^{-1}(a) = S \subset M$ és subvarietat de M (la inclusió natural i és un encaix). Podem considerar la mètrica induïda per la inclusió i.

   Exemple. La mètrica canònica de S^n és l'obtinguda per la inclusió de $f^{-1}(1)$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ on $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_i x_i^2$.

4. La *mètrica producte.* Si (M, g_M) i (N, g_N) són varietats de Riemann, la varietat producte $M \times N$ té una estructura natural de varietat de Riemann amb el producte

   $$g_{M \times N}(u, v) = g_M(d\pi_1 u, d\pi_1 v) + g_N(d\pi_2 u, d\pi_2 v)$$

on π_i són les projeccions de $M \times N$ sobre M i N respectivament.

Exercici. Provar que $g_{M\times N}$ defineix una mètrica de Riemann.

Exemple. La mètrica producte de $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ induïda per la mètrica canònica en S^1 dona lloc al *tor pla*.

5. $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ amb $g = (dx^2 + dy^2)/y^2$. És un model del pla hiperbòlic, el semiplà de Poincaré.
6. $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica $4\langle \cdot, \cdot \rangle/(1+|x|^2)^2$. Aquest espai és isomètric (ho veurem més endavant) a $S^n \setminus \{\text{Pol Nord}\}$.
7. $\mathbb{B}^n_1$, la bola de radi 1 centrada a l'origen, amb $g = 4\langle \cdot, \cdot \rangle/(1 - |x|^2)^2$.
8. El conjunt de les matrius complexes $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ amb
$$\langle A, B \rangle = \Re(tr(\bar{A}^t \cdot B)) \tag{4}$$
és una varietat de Riemann. En particular les subvarietats $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Gl}(n\mathbb{C})$, $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n), \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ etc. són varietats de Riemann amb la mètrica induïda per (4).

Definició. Un difeomorfisme $f \in C^\infty(M, N)$ entre varietats de Riemann és una *isometria* si $f^*g_N = g_M$, és a dir quan

$$g_M(u, v) = g_N(df \cdot u, df \cdot v), \quad \forall u, v \in T_pM, \quad \forall p \in M.$$

Definició. Una $f \in C^\infty(M, N)$ és *isometria local* si per tot $p \in M$ existeix un obert U de M de manera que $f : U \to f(U) \subset N$ és isometria.

Definició. Diem que les varietats de Riemann M i N són *localment isomètriques* si per a tot $p \in M$ existeix un U entorn obert de p en M i una $f : U \to f(U) \subset N$ isometria local.

Observació. Si $f \in C^\infty(M^m, N^n)$ tenim les aplicacions $df =: f_* : TM \to TN$ i $f^* : TN^* \to TM^*$ on
$$(f^*\omega)(v) = \omega(df \cdot v), \quad \omega \in TN^*, \quad v \in TM.$$
Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ són coordenades de M, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ coordenades de N i $h, g \in C^\infty(N)$ considerem $\omega = hdg \in \Omega^1(N)$ i $(x; v) \in TM$ llavors

$$(f^*\omega)(x; v) = h(f(x))dg(f(x); df\ v) = (h \circ f)d(g \circ f)(x; v).$$

També si $\omega(y) = \sum_{i=1}^m a_i(y)dy_i$ llavors

$$(f^*\omega)(x) = \sum_{i=1}^m (a_i \circ f)(x)d(y_i \circ f) = \sum_{i=1}^m (a_i \circ f)(x) \sum_{j=i}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Si $\omega \otimes \eta \in \mathcal{T}^0_2$
$$f^*(\omega \otimes \eta) = f^*\omega \otimes f^*\eta.$$
En aquest llenguatge, f és isometria si i només si

$$f^*g_N = g_M.$$

En coordenades, si $g_M = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ i $g_N = \sum_{i,j} h_{ij} dy_i \otimes dy_j$ cal que

$$g_M = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j = \sum_{i,j} (h_{ij} \circ f) d(y_i \circ f) \otimes d(y_j \circ f) = f^* g_N$$

que moltes vegades és fàcil de calcular.

Exemple. Si $M \subset N$ subvarietat i g_N mètrica de Riemann a N llavors $i^* g_N$ defineix una mètrica de Riemann a M. És el que fem amb les superfícies regulars de $\mathbb{R}^3$. Per exemple expressem en coordenades la mètrica a S^2 com a superfície regular de $\mathbb{R}^3$. Considerem les coordenades esfèriques $\varphi(p) = (\theta, \varphi)$ on $\theta \in (0, 2\pi)$ és la longitud, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ l'altitud i $p = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$. En aquestes coordenades la mètrica a S^2 s'expressa com

$$\begin{aligned} &(i \circ \varphi^{-1})^* (dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) = \\ &\qquad = d(\cos\theta\cos\varphi) \otimes d(\cos\theta\cos\varphi) + d(\sin\theta\cos\varphi) \otimes d(\sin\theta\cos\varphi) + \\ &\qquad\qquad + d(\sin\varphi) \otimes d(\sin\varphi) = \cos^2\varphi \, d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi. \end{aligned}$$

Exercici. Veure que $S^n \backslash \{PN\}$ amb la mètrica induïda com a subvarietat de $\mathbb{R}^{n+1}$ és isomètrica a $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica donada per

$$g = \frac{4\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{eucl}}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Indicació: Considerem π la projecció estereogràfica respecte el 'pol nord' $p_0 = (0, \dots, 1)$ llavors $\pi(x) = 1/(1 - x_{n+1})(x_1, \dots, x_n)$. Els vectors tangents a $p \in S^{n+1}$ són els v amb $\langle v, p \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0$. Veiem que si $\alpha(t) = \cos t \, p + \sin t \, v \subset S^n$ amb v unitari llavors la norma de $d\pi \cdot v = (\pi \circ \alpha)'(0)$ a $\mathbb{R}^n$ amb el producte donat per g és la norma euclidiana de v a $\mathbb{R}^{n+1}$ que és 1. Per la identitat de polarització tenim que $\pi^* g = \langle \cdot, \cdot \rangle_{S^n}$.

Exemple. En el cilindre Cil donat per l'equació $x^2 + y^2 = c^2$ de $\mathbb{R}^3$ considerem la mètrica induïda de la seva immersió natural en $\mathbb{R}^3$. En coordenades cilíndriques tenim $ds^2 = dz^2 + c^2 d\theta^2$. Considerem l'aplicació de Cil en $\mathbb{R}^2$ donada per $x = c\theta, y = z$. És una isometria local. Fem-ho fent servir el llenguatge de les formes. Volem veure que si $f : Cil \to \mathbb{R}^2$ llavors $f^* g_{\text{eucl}} = c^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz$.

$$f^*(dx \otimes dx + dy \otimes dy) = d(x \circ f) \otimes d(x \circ f) + d(y \circ f) \otimes d(y \circ f) = c^2 d\theta \otimes d\theta + dz \otimes dz.$$

Llavors és isometria local.

Exemple. Considerem la part amb $z > 0$ del con $\mathcal{C}$ d'equació $z^2 = \tan^2\alpha(x^2 + y^2)$. És localment isomètric a $\mathbb{R}^2$. En efecte, considerem la parametrització

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\alpha\cos\theta \\ y &= r\cos\alpha\sin\theta \\ z &= r\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

amb α l'obertura del con. Llavors, en aquestes coordenades $ds^2 = r^2\cos^2\alpha d\theta^2 + dr^2$. Fem el canvi $r' = r, \theta' = \theta\cos\alpha$ i veiem que tenim una isometria local.

Exemple. Considerem el grup $\mathrm{Af}_+(\mathbb{R})$ de les afinitats positives de $\mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ amb $a > 0$. El podem pensar com el subgrup de matrius

$$\mathrm{Af}_+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\} \subset \mathrm{Gl}(2, \mathbb{R}).$$

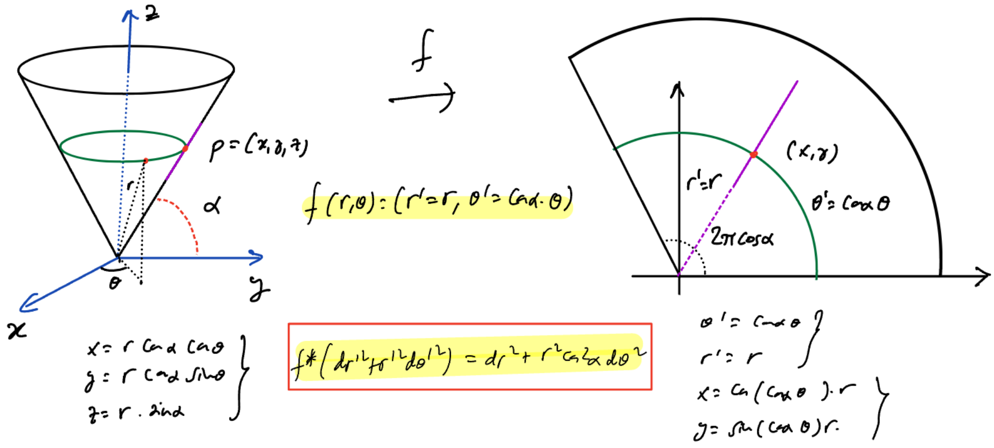


Figura 7: Isometria local del con en el pla

Considerem la mètrica invariant per l'esquerra tal que a $T_I \operatorname{Af}_+(\mathbb{R})$ és la mètrica euclidiana. Llavors si $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_I \operatorname{Af}_+(\mathbb{R})$ i $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenim

$$\langle u, v\rangle_I = \langle dL_g u, dL_g v\rangle_g = \langle g \cdot u, g \cdot v\rangle_g = \langle au, av\rangle_g = a^2 \langle u, v\rangle_g.$$

Si posem $a = y, b = x$ l'expressió de la mètrica en aquest grup és

$$\frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{y^2}$$

que és la mètrica hiperbòlica al semiplà. Aquest espai s'acostuma a denotar per $\mathbb{H}^2$.

2.3 *Longitud de corbes.*

Definició. Una *corba diferenciable* (parametritzada) sobre una varietat diferenciable M és una aplicació diferenciable γ d'un obert $I \subset \mathbb{R}$ en M.

Sobre una corba podem definir camps

Definició. Un camp diferenciable X sobre una corba γ és una aplicació diferenciable $X : I \to TM$ amb $(\pi \circ X)(t) = \gamma(t)$.

Definició. El camp $\gamma'(t) := d\gamma(d/dt)$ és el camp de velocitat de γ.

Definició. L'aplicació $\gamma : [a, b] \mapsto M$ amb $[a, b] \subset I$ s'anomena *segment.*

Definició. Una corba parametritzada γ és de *classe* C^1 *a trossos* si hi ha una partició de $I = \cup I_i$ de manera que γ és de classe C^1 a cada I_i. Denotem per D^1 les corbes de classe C^1 a trossos.

Definició. la *longitud* d'un segment de γ, corba C^1 a trossos, és

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

on $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))}$ és la *norma* del vector tangent $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Si ho posem en coordenades $(x^1, \dots, x^n)$ tenim

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum g_{ij}(\gamma(t)) x^{i\prime}(t) x^{j\prime}(t)} dt.$$

Aleshores, la funció *paràmetre arc* de γ és $s = \int_0^t \sqrt{\sum g_{ij}(\gamma(t)) x^{i\prime}(t) x^{j\prime}(t)} dt$. Es per això que de vegades es troba la notació

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$$

per indicar la mètrica.

Observació. Hem dit que la corba és C^1 a trossos, potser ens cal fer la integral a trossos també.

Exemple. La corba $\alpha(t) = (t, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ amb $t \in \mathbb{R}$ té longitud 2π amb la mètrica

$$g = \frac{4}{(1 + |x|^2)^2} \sum_{i=1}^m dx_i \otimes dx_i$$

de $\mathbb{R}^m$. En efecte, $\|\alpha'(t)\|^2 = 4/(1+t^2)^2$ i

$$L(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4dt}{(1+t^2)^2} = 2\pi.$$

Exemple. La corba $\alpha(t) = (t, 0, \dots, 0) \in B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$ amb $t \in (0,1)$ té longitud infinita amb la mètrica

$$g = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \sum_{i=1}^m dx_i \otimes dx_i$$

en la bola unitat $B(0,1)$.

Exercici. Comproveu que la longitud de α val infinit[7].

2.4 *Estructura d'espai mètric.* Anem a veure que tota (M, g) connexa és un espai mètric amb la distància

$$d(x,y) = \inf\left\{L(\gamma) \text{ tal que } \gamma : [a,b] \to M, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y,\ C^1 \text{ a trossos}\right\}.$$

i que les topologies de M com a varietat i com a espai mètric coincideixen.

Demostració. Comencem veient que (M,d) és espai mètric.

1. En primer lloc cal veure que $d(x,y)$ està *ben definida.* En efecte, el conjunt E_x de punts de M que es poden unir amb x per una corba D^1 és obert ja que si $z \in E_x$ una carta local connexa al voltant de z està clarament dins de E_x, llavors E_x és obert. Per altra banda $M \setminus E_x = \cup_{y \notin E_x} E_y$ també és obert, per ser M connexa $M = E_x$ i la distància està ben definida.

2. Òbviament $d(p,q)$ és no negativa.

3. $d(p,q) = d(q,p)$ ja que podem recorre una corba al revés i té la mateixa longitud.

[7]El segment de α de $t = 0$ a $t = a < 1$ medeix $2\,\mathrm{arctanh}(a)$, si $a \to 1$ aquest valor tendeix a infinit.

4. Siguin tres punts p_1, p_2, p_3 de M i corbes de classe D^1 (classe C^1 a trossos) qualsevol, γ_1 unint p_1 i p_2 i γ_2 unint p_2 i p_3. Denotem per $\gamma_1 * \gamma_2$ la concatenació de les corbes γ_1 i γ_2. Llavors
$$d(p_1, p_3) \leq L(\gamma_1 * \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$
i prenent ínfims queda provada la desigualtat triangular.

5. Cal veure que $d(p, q) = 0$ implica que $p = q$. Per provar això veurem primer algunes desigualtats.

   Sigui $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ carta local de manera que $\varphi(p) = 0$ i $\overline{B(0, a)} \subset \varphi(U)$. Escrivim $V_r = \varphi^{-1}(B(0, r)) \subset U$, $0 < r \leq a$. Sigui $K_r = \{(x, v) : x \in \overline{B(0, r)}, \|v\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Aquest conjunt és de fet $\overline{B(0, r)} \times S^{n-1}$. Sobre K_r, que és compacte, considerem la funció
$$F(x, v) = \left(\sum g_{ij}(x) v^i v^j\right)^{1/2}.$$
   Per cada r, la funció F assoleix un màxim M_r i un mínim m_r, si posem $M_a = M$ i $m_a = m$ tenim la desigualtat
$$0 < m \leq m_r \leq F(x, v) \leq M_r \leq M. \tag{5}$$
   Donat un altre vector $w = (w_1, \ldots, w_n)$ amb $\|w\| = \sum w_i^2$, posant $v = w/\|w\|$ de la desigualtat anterior tenim
$$0 < m\|w\| \leq m_r\|w\| \leq F(x, w) \leq M_r\|w\| \leq M\|w\| \tag{6}$$
   per qualsevol $x \in \overline{B(0, r)}$ i $w \neq 0$.

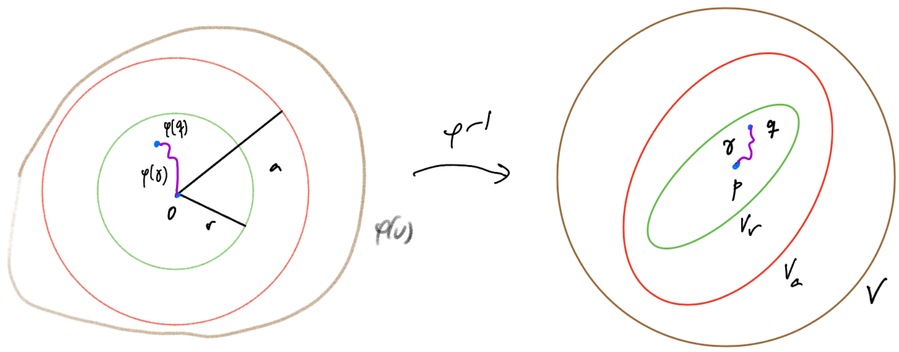


Figura 8: Entorns esfèrics

Sabem que a $\mathbb{R}^n$ la distància entre dos punts p i q la dona $\|p - q\|$.

Sigui ara q un punt de $\varphi^{-1}(\overline{B(0, r)})$ i una corba γ continguda en aquest conjunt amb $\gamma(a) = p$ i $\gamma(b) = q$, per (6) tenim
$$\begin{aligned} L(\gamma) \geq \int_a^b m_r \|(\varphi(\gamma(t))'\| dt = m_r L(\varphi \circ \gamma) \geq \\ \geq m_r \|\varphi(q)\| \geq m\|\varphi(q)\|. \end{aligned} \tag{7}$$
Per l'altra banda tenim
$$L(\gamma) \leq \int_a^b M_r \|(\varphi(\gamma(t))'\| dt = \int_a^b M_r \left(\sum_{i=1}^n (x^i)'^2\right)^{1/2} \leq \int_a^b M \left(\sum_{i=1}^n (x^i)'^2\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Anem a veure ja el que volíem, que $d(p,q) = 0$ implica $q = p$. Prenem un $q' \neq p$, existeix un r de manera que $\varphi(q') \notin \overline{B(0,r)}$. Sigui α corba D^1 que uneix p i q', existeix un b de manera que $\alpha(b)$ és el primer punt fora de V_r, tenim que $\|\varphi(\alpha(b))\| = r$. Sigui L' la longitud de α i L la longitud de α fins $\alpha(b)$. Per les desigualtats d'abans resulta que $L' \geq L \geq mr > 0$. Aleshores $d(p,q') > 0$. Hem provat que si $d(p,q) = 0$ necessàriament $p = q$.

Hem demostrat que (M,d) és espai mètric. Queda per veure que la topologia d'espai mètric, donada per les boles $B(p,r) = \{q \in M : d(p,q) < r\}$, i la de varietat coincideixen.

Escrivim les coses més acuradament. Si p,q estan a l'entorn coordenat U posem $d_E(p,q) = \|\varphi(p) - \varphi(q)\|$, aleshores $V_r = \{q : d_E(p,q) < r\}$. Sigui $S_\epsilon(p) = \{q : d(p,q) < \epsilon\}$. Veurem que tot obert V_r, que defineix la topologia de varietat, conté un S_ϵ que defineix la topologia d'espai mètric.

Observem que de la desigualtat (7) deduïm, agafant ínfims, que $0 < m d_E(p,q) \leq d(p,q)$ i de la (8) que $d(p,q) \leq M d_E(p,q)$. És a dir

$$0 < m d_E(p,q) \leq d(p,q) \leq M d_E(p,q). \tag{9}$$

- Fixem un V_r, volem trobar un ϵ de manera que $S_\epsilon(p) \subset V_r$. Sigui $x \in S_\epsilon(p)$, llavors per (9) resulta que $d_E(p,x) \leq d(p,x)/m < \epsilon/m$. Si $\epsilon < mr$ tenim $d_E(p,x) < r$ i $S_\epsilon(p) \subset V_r$.
- Fixem un $S_\epsilon(p)$, volem trobar un r de manera que $V_r \subset S_\epsilon(p)$. Sigui $x \in V_r$, llavors per (9) resulta que $d(p,x) \leq M d_E(p,x) < Mr$. Si $r < \epsilon/M$ tenim que $d(p,x) < \epsilon$ i $V_r \subset S_\epsilon(p)$.

Hem vist que les topologies coincideixen. □

Exercici. Proveu que E_x és obert.

Exercici. Provar que la distància entre dos punts $p,q \in \mathbb{R}^n$ considerant la mètrica euclidiana la dona $\|p - q\|$.

Ara ens plantegem la qüestió de si existeixen corbes que donen la distància a (M,d) de la mateixa manera que les rectes realitzen la distància a $\mathbb{R}^n$. Un dels objectius del curs es veure que sí, són les anomenades *geodèsiques*. Per exemple a S^n les geodèsiques són els cercles màxims.

2.5 *Volum.* Quan (M,g) és orientable sabem que existeix un element de volum, ω. És a dir, una forma diferenciable de grau màxim i mai nul·la. Triem que ω valgui 1 sobre les bases ortonormals positives.

Anem a veure que això es pot fer. Sigui (U,φ) carta local i $e_i = \partial/\partial x_i$. En un punt $p \in M$ sigui $v_1,\ldots,v_n$ base ortonormal positiva, sigui A la matriu del canvi de base, és a dir que $e_i(p) = \sum_j a_{ij} v_j$. En el punt p

$$g_{ij} = g(e_i,e_j) = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} g(v_k,v_l) = \sum_k a_{ik} a_{jk}.$$

Llavors l'expressió matricial de g en p en les coordenades de φ és $A^t A$. Per altra banda $\omega(e_1,\ldots,e_n) = \det(A)\omega(v_1,\ldots,v_n) = \det(A)$, aleshores

$$\omega(e_1,\ldots,e_n) = +\sqrt{\det(g_{ij})(p)}$$

i

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Nota: $\det(g_{ij}(x))$ representa el volum del paral·lelepípede definit per la base $e_1, \ldots, e_n$.

Exemple. Calculeu ω per S^2 a) en les coordenades estereogràfiques[8], b) en les coordenades esfèriques [9].

Definició. Sigui R una regió (conjunt obert i connex) amb clausura compacta contingut en un entorn coordenat (U, φ) el volum de R és

$$\mathrm{vol}(R) = \int_{\varphi(R)} \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Pel teorema del canvi de variable integral aquesta integral no depèn de les coordenades triades.

Fent servir el llenguatge de formes podem definir el volum per a qualsevol regió amb clausura compacta, ho fem utilitzant la forma de volum ω que dona 1 sobre bases ortonormals positives i fent trossos amb una partició de la unitat f_α subordinada a un atles:

$$\mathrm{vol}(R) = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(R \cap U_\alpha)} f_\alpha \omega.$$

2.6 *Derivada covariant a $\mathbb{R}^n$.* Siguin camps $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, els podem pensar com aplicacions de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Definim la *derivada covariant* del camp Y en la direcció de X en p com

$$\nabla_X Y(p) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y(\gamma(t)) = dY_p \cdot X_p.$$

amb γ corba diferenciable tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = X(p)$.

Nota: El vector $\nabla_X Y(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ només depèn del valor de X en p i del valor de Y al llarg d'una corba que passa per p en direcció X_p. El que fem es 'transportar paral·lelament' (per translació) el vector $Y(\gamma(t))$ de $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$ a $T_p\mathbb{R}^n$ i derivar.

Exercici. Provar que ∇ satisfà

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X (fY + gZ)_p = X_p(f)Y_p + X_p(g)Z_p + f(p)(\nabla_X Y)_p + g(p)(\nabla_X Z)_p$
3. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$,
4. $X \cdot \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

En coordenades cartesianes $(x_1, \ldots, x_n)$ si $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ i $Y = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ llavors

$$\left(\nabla_X Y\right)(p) = \sum_i X_p(b_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

[8]Per $(x, y, z) \in S^2$ la projecció estereogràfica és $\varphi(x, y, z) = (x, y)/(1 - z) = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ i la mètrica en aquestes coordenades és $g = 1/(1 + r^2)\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{eucl}}$ amb $r^2 = x'^2 + y'^2$. Llavors $\omega = dx' \wedge dy'/(1 + r^2)$.

[9]Si considerem la carta local amb $\psi^{-1}(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$ on $\theta \in (0, 2\pi)$ és la longitud i $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ l'altitud tenim que $g = \cos^2\varphi\, d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi$ aleshores $\omega = \cos\varphi\, d\theta \wedge d\varphi$.

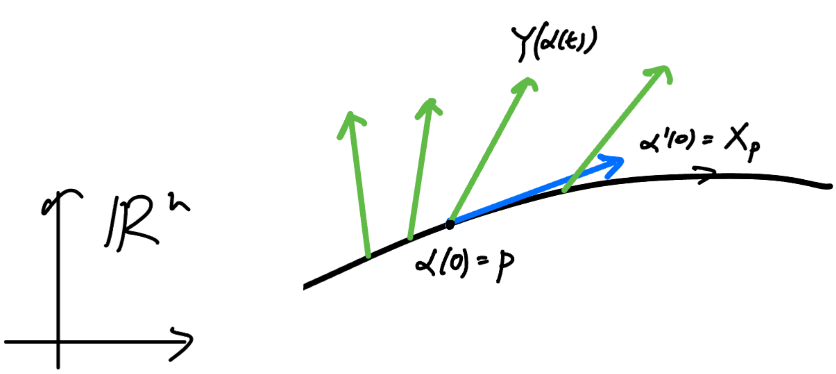


Figura 9: Derivada covariant $\nabla_{X_p} Y$. Fem $Y(\alpha(t)) - Y(p)$ on hem identificat els espais tangents $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$ i $T_p\mathbb{R}^n$ que viuen a punts diferents. Això en varietats requereix una mica més de feina.

2.7 *Derivada covariant a subvarietats de* $\mathbb{R}^n$. Sigui $\nabla^{\mathbb{R}^n}$ la derivada covariant vista a l'apartat anterior. Donada una subvarietat $S \subset \mathbb{R}^n$, per cada $p \in S$ tenim la projecció ortogonal

$$\pi : T_p\mathbb{R}^n \to T_pS.$$

Donats dos camps $X, Y \in \mathcal{X}(S)$

$$\left(\nabla_X Y\right)(p) := \pi\left(\nabla_X^{\mathbb{R}^n} Y(p)\right)$$

defineix una *derivació* que satisfà les mateixes propietats que la derivada covariant de camps diferenciables a $\mathbb{R}^n$. És la *derivada covariant* en S induïda per la derivada covariant de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. En el curs de Geometria diferencial de corbes i superfícies considerem parametritzacions $\varphi(u, v)$ de la superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, en aquest context

$$\frac{\partial}{\partial u} = \varphi_u, \quad \frac{\partial}{\partial v} = \varphi_v$$

i

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = \pi(\varphi_{uu}) = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN, \ldots.$$

Les funcions Γ_{ij}^k són els símbols de Christoffel i depenen de la primera forma fonamental i les seves primeres derivades.

2.8 *Connexió en una varietat.* Una *connexió afí* en una varietat diferenciable M és una aplicació

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

tal que

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(fX + gY) = X(f)Y + X(g)Z + f\nabla_X Y + g\nabla_X Z$.

Nota: ∇ és $\mathbb{R}$-bilineal en les variables X i Y.

Exercici. $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ defineix un tensor $(2,1)$. En efecte, es comprova que $T(fX, gY) = fgT(X,Y)$ per totes les funcions diferenciables f i g. Llavors $T_p(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ defineix una aplicació bilineal a valors en T_pM que depèn diferenciablement de p.[10]

Exemple. Sigui $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta local de M, podem definir una connexió a U fixant la condició $\nabla_X(\partial/\partial x_i) = 0$ per a tot $X \in \mathcal{X}(U)$ i $1 \le i \le n$. Diem que ∇ és una *connexió plana* a U

Exercici. Tota varietat M admet una connexió afí.[11]

Veiem com s'escriu $\nabla_X Y$ en coordenades. Sigui $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta local, per simplificar escrivim els camps coordenats com $X_i = \partial/\partial x_i$. Tenim $X = \sum a_i X_i$ i $Y = \sum b_i Y_i$ llavors

$$\nabla_X Y = \sum_j X(b_j) X_j + \sum_{i,j} a_i b_j \nabla_{X_i} X_j.$$

Sigui

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$$

llavors podem escriure

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(X(b_k) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k a_i b_j \right) X_k. \tag{10}$$

Definició. Les funcions $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ s'anomenen *símbols de Christoffel* de ∇ en les coordenades $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$.

L'expressió (10) mostra que el valor de $(\nabla_X Y)(p)$ només depèn del valor de X en p i del coneixement de Y en una corba que passa per p en la direcció de X_p.

Això ens permet definir la *derivada covariant* d'un camp V sobre una corba γ. En concret fem

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)} V.$$

Exercici. Comprovar que DV/dt està ben definida i que compleix que a) $D/dt(V+W) = DV/dt + DW/dt$, b) $DfV/dt = f'(t)V + fDV/dt$.

Si $V(t) = \sum v_i(t) X_i(\gamma(t))$ amb $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ i $\varphi(\gamma(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ en coordenades tenim

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j v_j' X_j + \sum_{i,j} x_i' v_j \nabla_{X_i} X_j, \tag{11}$$

on la prima vol dir derivada respecte t.

[10] En canvi $\nabla_X Y$ no és una magnitud tensorial ja que no és possible calcular $\nabla_v w$ per $X_p = v, Y_p = w \in T_pM$ cal conèixer el valor de Y en una corba en direcció de v.

[11] Considerem un atles $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ i una partició de la unitat f_α subordinada. A cada U_α donem la connexió plana ∇^α, llavors $\nabla = \sum_\alpha f_\alpha \nabla^\alpha$ defineix una connexió afí a M.

2.9 *Paral·lelisme.* La noció de derivada d'un camp sobre una corba ens permet parlar de *camps paral·lels* al llarg de corbes.

Definició. Sigui M varietat diferenciable amb una connexió afí ∇. Un camp V diem que és *paral·lel al llarg d'una corba* $\gamma : I \to M$ si

$$\frac{DV}{dt} = 0, \quad \forall t \in I.$$

El teorema d'existència i unicitat d'EDO's ens permet definir el transport paral·lel al llarg de corbes. Sigui γ corba diferenciable i $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ volem trobar un camp $V(t)$ que sigui paral·lel al llarg de γ amb $V(t_0) = V_0$. Suposem que la corba està en un entorn coordenat llavors podem fer servir l'expressió (11) i ens cal resoldre el sistema d'equacions diferencials per v^k

$$v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_j x_i' = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

amb la condició inicial $v_k(t_0) = v_k^0$ si $V_0 = \sum_i v_i^0 X_i(\gamma(t_0))$. Pel teorema d'existència local tenim solució local. Per unicitat coincidiran en les interseccions. □

Siguin $p, q \in M$ i γ corba diferenciable que uneix p i q. Per exemple $\gamma(0) = p$ i $\gamma(q) = 1$. Per qualsevol $v \in T_pM$ tenim associat un $\tau(\gamma)(v) \in T_qM$ que és $V(1)$ de l'únic camp paral·lel V amb la condició inicial $V(0) = v$.

Exercici. $\tau(\gamma) : T_pM \to T_qM$ és lineal i si la connexió és riemanniana aleshores $\tau(\gamma)$ és isometria.

Nota: L'aplicació $\tau(\gamma)$ depèn de la corba i s'anomena transport paral·lel de p a q al llarg de γ.

Nota: L'aplicació $\tau(\gamma)$ és la que *connecta* espais tangents i es podria fer servir per calcular derivades covariants.

Exemple. Fer el transport paral·lel al llarg del paral·lel d'un con. Ja hem donat a la pàgina 26 una isometria local entre el con i el pla. En ella, els meridians a distància r de l'origen seguint la generatriu van al troç de circumferència centrada a $(0,0)$ amb $\cos\alpha\theta$ imatge de θ (és el desenvolupament). Llavors θ en el pla va de 0 a $2\pi\cos\alpha$. Llavors un vector tangent al con que formi un angle β amb la generatriu es transporta al llarg d'un meridià complet al vector de mateixa norma que forma un angle $\beta - 2\pi(1 - \cos\alpha)$ amb la generatriu.

Exemple. Fer el transport paral·lel al llarg del paral·lel d'una esfera.

2.10 *Connexió de Levi-Civita o de Riemann.*

Definició. Direm que una connexió ∇ en una varietat de Riemann és de Levi-Civita o Riemanniana si

1. és de *torsió* nul·la: $T(X,Y) = \nabla_x Y - \nabla_Y X - [X,Y] \equiv 0$ i
2. és *compatible amb la mètrica*: $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

Teorema. *Si (M,g) és varietat de Riemann, existeix una única connexió de Levi-Civita.*

Demostració. Veurem primer la unicitat i després serà fàcil provar l'existència.

1. Unicitat. Suposem provada l'existència i sigui ∇ una connexió de Levi-Civita. Aleshores:

$$\begin{array}{rcl} Xg(Y,Z) & = & g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Yg(Z,X) & = & g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ -Zg(X,Y) & = & -\left(g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)\right) \end{array}$$

   Si ho sumem tot i fem servir que la connexió és sense torsió i compatible amb la mètrica, tenim la fórmula:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{ & Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) + \\ & + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g(X,[Y,Z])\}. \end{aligned} \tag{12}$$

   Aquesta equació la satisfà qualsevol connexió riemanniana $\widetilde{\nabla}$, i com que el terme de la dreta no depèn de ∇ tenim que $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$. Això prova la unicitat.

2. Només cal provar que la ∇ que defineix la fórmula (12) és connexió riemanniana. Això queda com exercici.

$\square$

2.11 *Càlcul dels símbols de Christoffel.* Recordem que Γ_{ij}^k donen les derivades

$$\nabla_{\partial/\partial x_i} \partial/\partial x_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial/\partial x_k.$$

Si $X_i = \partial/\partial x_i$, fent servir la fórmula (12)

$$g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) = \sum_k \Gamma_{ij}^r g_{kr} = \frac{1}{2}\left(X_i g_{jk} + X_j g_{ik} - X_k g_{ik}\right).$$

Invertint la matriu obtenim l'expressió

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \tag{13}$$

Exemple. Els símbols de Christoffel de $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica euclidiana són 0.
Exercici. Trobeu els símbols de Christoffel de $\mathbb{R}^2$ per les coordenades polars. I els de $\mathbb{R}^3$ per les coordenades esfèriques i cilíndriques.
Exercici. Trobeu els símbols de Christoffel del semiplà $\mathbb{H}^2$ amb la mètrica $(dx^2 + dy^2)/y^2$. Trobar el transport paral·lel del vector $v_0 = \partial/\partial y|_{(0,1)} \in T_{(0,1)}\mathbb{H}^2$ al llarg de la corba $\alpha(t) = (t, 1)$.
Exercici. Sigui $\varphi(u,v)$ parametrització d'una superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$, expresseu la derivada covariant i escriviu els símbols de Christoffel en funció dels coeficients de la primera forma fonamental

$$g = E du \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + G dv \otimes dv$$

i les seves derivades[12].

[12]Obtenim $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}.$

2.12 *Expressió en coordenades (altra notació).* Considerem una carta local $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ amb $e_i = \partial/\partial x^i$ i $\omega^i = dx^i$. Siguin camps $X = a^i e_i, Y = b^i e_i$.[13]
Anem a trobar una expressió per $\nabla_X Y(p)$ com a combinació lineal dels e_i. Per no carregar la notació no escriurem el punt p.
En primer lloc:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i} Y &= e_i(b^j)e_j + b^j \nabla_{e_i} e_j = \\ &= \frac{\partial b^j}{\partial x^i} e_j + b^j \Gamma^k_{ij} e_k = \\ &= \left(\frac{\partial b^k}{\partial x^i} + b^j \Gamma^k_{ij} \right) e_k.\end{aligned}$$

On les funcions diferenciables $\Gamma^k_{ij} : U \to \mathbb{R}$ són els anomenats *símbols de Christoffel* per les coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$.
Per simplificar escriurem

$$\nabla_{e_i} Y = b^k{}_{;i}\, e_k$$

amb $b^k{}_{;i} = \frac{\partial b^k}{\partial x^i} + b^j \Gamma^k_{ij}$. Aleshores

$$\nabla_X Y = a^i b^j{}_{;i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Nota: A $\mathbb{R}^n$ tenim que $b^k{}_{;i} = \partial b^k / \partial x^i$ ja que $\nabla_{e_i} e_j = 0$ i $\Gamma^k_{ij} = 0$.

2.13 *Definició de geodèsica.* Una *geodèsica* és una corba tal que γ' és un camp paral·lel al llarg de γ. Per simplificar escrivim

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

Les geodèsiques tenen velocitat constant ja que $\langle \gamma', \gamma' \rangle' = 0$ al llarg de γ. Per tant la parametrització és important. Notem que si γ és geodèsica amb $||\gamma'|| = c$ llavors la longitud $s(t)$ de $\gamma(t_0)$ a γ/t és $s(t) = c(t - t_0)$ i el paràmetre t és proporcional a l'arc.

Exemple. Les rectes $vt + a$ són geodèsiques de $\mathbb{R}^n$ però $vt^3 + a$ no ho són, encara que la seva imatge és la d'una geodèsica.

L'equació de les geodèsiques és

$$x''_k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} x'_i x'_j = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Es tracta d'un sistema d'equacions diferencials de segon ordre. Donar condicions inicials consisteix en donar un punt de pas i una velocitat en aquest punt. Aquest problema de Cauchy té solució única.

Més concretament: *si $p \in M$ i $v \in T_p M$ existeix un interval obert $(-\epsilon, \epsilon)$ i una única geodèsica γ tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$.*

Definició. Una geodèsica $\gamma : (a, b) \to M$ és *maximal* si no es pot estendre a un interval obert J que contingui a (a, b) estrictament.

[13] En la notació d'Einstein un tensor T que sigui r vegades covariant i s vegades contravariant s'escriurà en coordenades com $T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$. Per exemple una camp, que és de tipus $(0, 1)$ tindrà els índexs a *dalt*, i les formes, que són de tipus $(1, 0)$, a *sota*. Quan tinguem índexs a dalt i a baix iguals voldrà dir que s'estan sumant. Per exemple

$$X = a^i e_i := \sum_{i=1}^n a^i e_i, \quad , \eta = b_i \omega^i := \sum_{i=1}^n b_i \omega^i, \quad m^{rk} g_{ks} := \sum_{k=1}^n m^{rk} g_{ks}.$$

Definició. Una varietat de Riemann (M, g) és *geodèsicament completa* si per cada $(p, v) \in TM$ existeix una geodèsica $\gamma(t)$ passant per p amb velocitat v i definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Exemple. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no és geodèsicament completa. La geodèsica per $p = (1, 1)$ amb velocitat $v = (-1, -1)$ és $\gamma(t) = (1, 1) + t(-1, -1)$ que no està definida quan $t = 1$.

Exemple. Si $N \subset (M, g)$ varietat de Riemann amb la mètrica induïda, $\gamma \subset N$ és geodèsica si i només si la part tangent a N de $\nabla^M_{\gamma'}\gamma'$ és zero.

Exemple. Una corba γ de S^n amb la mètrica induïda com a subvarietat de $\mathbb{R}^{n+1}$, és geodèsica si

$$\nabla^{S^n}_{\gamma'}\gamma' = \pi(\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\gamma'}\gamma') = 0.$$

Llavors, com que $\nabla^{\mathbb{R}^{n+1}}_{\gamma'}\gamma' = \gamma''$ i la projecció de γ'' sobre S^n és $\gamma'' - \langle\gamma'', \gamma\rangle\gamma$, la corba γ de S^n és geodèsica si i només si

$$\gamma'' = \langle\gamma'', \gamma\rangle\gamma. \tag{14}$$

Donat un p i un $v \in T_pS^n = \langle p\rangle^\perp$ no nul, considerem la corba $\gamma_v(t) = \cos(|v|t)p + \sin(|v|t)(v/|v|)$. Es comprova que satisfà l'equació (14) per tant és geodèsica. Concretament la geodèsica que passa per p amb velocitat v. Són cercles màxims recorreguts a velocitat constant $|v|$. Aleshores S^n és geodèsicament completa.

Exercici. Determineu les geodèsiques del *semiespai de Poincaré*

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad g = 1/y^2(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

Comprovar que és geodèsicament complet.[14]

2.14 *Isometries: connexions i geodèsiques.* Comencem amb una qüestió tècnica

Lema. *Siguin $f \in C^\infty(M, N)$ difeomorfisme, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $g \in C^\infty(N)$ i $p \in M$.*

a) $(dfX)_{f(p)}g = X_p(g \circ f)$ *i* $((dfX)g) \circ f = X(g \circ f)$

b) $df[X, Y] = [dfX, dfY]$.

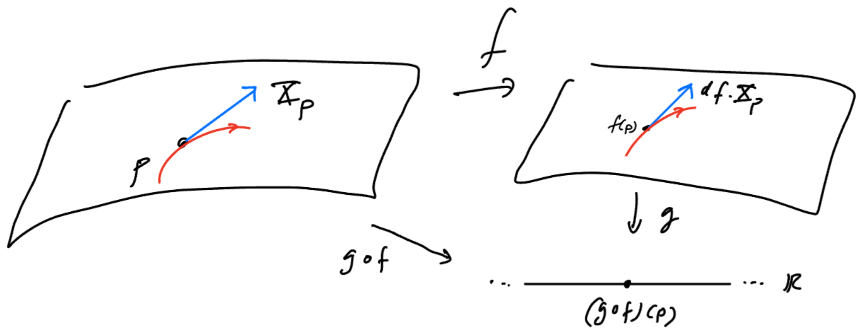


Figura 10: $(dfX)_{f(p)}g = X_p(g \circ f)$

[14]Es comprova que l'homotècia $z' = az$, $a > 0$, la translació $z' = z + b$, $b \in \mathbb{R}$ i la inversió $z' = 1/\bar{z}$ defineixen isometries de $\mathbb{H}^2$. Les equacions de les geodèsiques (veure (18) més endevant) són $x'' - 2x'y'/y = 0$, $y'' + (x'^2 - y'^2)/y^2 = 0$ i la corba $\alpha(t) = (0, k^2e^{at})$ és geodèsica que passa per $(0, k^2)$ quan $t = 0$ i tal que $||\alpha'|| = |a|$. Amb tot això veiem fàcilment que les geodèsiques són les semi-circumferències ortogonals a $y = 0$ amb la parametrització adequada.

Demostració. L'apartat a) és conseqüència directa de la definició $v_p \cdot f = (f(\alpha(t)))'|_{t=0}$ si $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = v \in T_pM$. Per altra banda

$$\begin{aligned}(df[X,Y])_{f(p)}g &= [X,Y]_p(g\circ f) = X_p\,Y(g\circ f) - Y_p\,X(g\circ f) = \\ &= X_p((dfYg)\circ f) - Y_p((dfXg)\circ f) = \\ &= dfX_{f(p)}(dfY)g - dfY_{f(p)}(dfX)g = \\ &= [df\,X, df\,Y]_{f(p)}g.\end{aligned} \tag{15}$$

□

Observació. Aquest lema també té sentit en molts casos els que f no és difeomorfisme. Sigui $f \in C^\infty(M,N)$ diem que $X \in \mathcal{M}, Y \in \mathcal{N}$ estan f-relacionats si $df\,X = Y$. Llavors es pots demostrat que per camps f-relacionats $df\,X_i = Y_i, i = 1,2$ tenim que $[X_1,X_2]$ i $[Y_1,Y_2]$ estan f-relacionats. És a dir que

$$df\,[X_1,X_2] = [df\,X_1, df\,X_2].$$

La demostració és com la del lema.

Proposició. *Les isometries conserven la connexió i per tant preserven geodèsiques.*

Demostració. Primer veiem que vol dir l'enunciat. Tenim $f : (M,g_M) \to (N,g_N)$ i les connexions de Levi-Civita associades ∇^M i ∇^N. Aleshores, donats camps X,Y de M tenim $\nabla^M_X Y$ i $\nabla^N_{dfX} dfY$. Veiem que $df\cdot\nabla^M_X Y = \nabla^N_{dfX} dfY$. Per això cal provar que per qualsevol $w \in T_qN$ es compleix que $g_N(df\cdot\nabla^M_X Y, w) = g_N(\nabla^N_{dfX} dfY, w)$. Posem $w = dfZ$ amb $Z \in T_pM$. Per fer més simple la notació posem $\tilde{X} = df\,X$ i el mateix per les imatges de Y i Z.

$$\begin{aligned}g_N(\nabla^N_{\tilde{X}}\tilde{Y},\tilde{Z}) &= \frac{1}{2}\Big[\tilde{X}g_N(\tilde{Y},\tilde{Z}) + \tilde{Y}g_N(\tilde{X},\tilde{Z}) - \tilde{Z}g_N(\tilde{X},\tilde{Y}) + \\ &+ g_N([\tilde{X},\tilde{Y}],\tilde{Z}) + g_N([\tilde{Z},\tilde{X}],\tilde{Y}) - g_N(\tilde{X},[\tilde{Y},\tilde{Z}])\Big] = \\ &+ \frac{1}{2}[Xg_M(Y,Z) + Yg_M(X,Z) - Zg_M(X,Y) + \\ &+ g_M([X,Y],Z) + g_M([Z,X],Y) - g_M(X,[Y,Z])] = \\ &= g_M(\nabla^M_X Y, Z).\end{aligned}$$

Ja que, pel lema anterior,

$$g_N(\tilde{X},[\tilde{Y},\tilde{Z}]) = g_M(X,[Y,Z])$$

i

$$\tilde{X}_{f(p)}g_N(\tilde{Y},\tilde{Z}) = (df\,X_p)g_N(df\,Y, df\,Z) = X_p\,g_N(df\,Y, df\,Z)\circ f = X_p\,g_M(Y,Z).$$

Per tants es preserven les connexions. Llavors és clar que es conserven les geodèsiques, si $\nabla^M_{\gamma'}\gamma' = 0$ també $\nabla^N_{df\,\gamma'}df\,\gamma' = 0$ i la imtage $f\circ\gamma$ d'una geodèsica γ de M és geodèsica a N.

□

Nota: El mateix val per isometries locals, ja que localment són isometries globals (entre els oberts corresponents) i la derivació covariant és una cosa local. Llavors les isometries locals porten geodèsiques a geodèsiques.

Observació.

Exemple. Hem vist (pag. 26) que $\mathcal{C}$, la part superior del con ($z > 0$), és localment isomètrica a un troç del pla. Aleshores les geodèsiques de $\mathcal{C}$ es corresponen amb les rectes d'aquest troç de pla. En particular, les generatrius de $\mathcal{C}$ són geodèsiques.

Exemple. $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ porta rectes de l'espai euclidià a geodèsiques del tor.

Exemple. Les geodèsiques de l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ són la projecció dels cercles màxims de l'esfera.

2.15 *Mètode variacional de càlcul (opcional).*
Una referència per aquest apartat és [Gir93, p. 81, p. 148]. Considerem una superfície S parametritzada per $\varphi(u, v)$ en un obert U del pla $\mathbb{R}^2$.[15] L'element d'arc és

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Definició. Una corba γ de la superfície és *geodèsica* si la seva acceleració no té component tangent a la superfície.

Exercici. Una corba γ de S és geodèsica si i només si $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ on ∇ és la connexió de Levi-Civita associada a $S \subset \mathbb{R}^3$.

Exercici. Si $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ aleshores les equacions de les geodèsiques en les coordenades (u, v) són:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Tenim dos problemes, 1) trobar els símbols de Christoffel i 2) resoldre les equacions. En general el segon problema és insoluble, el primer tant sols és una mica llarg. Donarem un mètode per trobar les equacions (16) de forma ràpida. Observem que el coneixement d'aquestes equacions ens dona automàticament els símbols de Christoffel Γ_{ij}^k.

Definició. $L(x, y, z, t) = E(x, y)z^2 + 2F(x, y)zt + G(x, y)t^2$

Definició. Direm que la corba $t \mapsto (u(t), v(t))$ satisfà les equacions d'Euler-Lagrange associades a la mètrica $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ si per $L = L(u(t), v(t), u'(t), v'(t))$ es compleix que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Exercici. Comproveu, fent un càlcul llarg però directe, que les equacions (16) són equivalents a les equacions (17).

Exemple. Pel pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2$ tenim l'element d'arc $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ quan x és real i y real positiu. Llavors $L = (x'^2 + y'^2)/y^2$ i

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{2x'}{y^2} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{2y'}{y^2} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{2(x'^2 + y'^2)}{y^3}$$

Ara

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{2}{y^3}(x''y - 2x'y') \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{2}{y^3}(y''y - 2y'^2).$$

[15] El que ara fem també és vàlid per varietats de Riemann abstractes. Es deixa com exercici escriure-ho tot bé.

I les equacions (17) són en aquest cas:

$$\frac{2}{y^3}(x''y - 2x'y') = 0$$
$$\frac{2}{y^3}(y''y - 2y'^2) = -\frac{2(x'^2 + y'^2)}{y^3}$$

Simplificant i tenint en compte que $y > 0$ arribem a les equacions de les geodèsiques

$$\begin{aligned} x'' - \frac{2}{y}x'y' &= 0 \\ y'' + \frac{1}{y}x'^2 - \frac{1}{y}y'^2 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Aleshores els símbols de Christoffels són $\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y}$, $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$, $\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$ i la resta són nuls.

Exercici. Resoleu aquestes equacions

Exercici. Trobeu les equacions de les geodèsiques i els símbols de Christoffel (en aquest ordre) si la primera forma fonamental ve donada per $ds^2 = du^2 + Gdv^2$

Exercici. Trobeu les equacions de les geodèsiques i els símbols de Christoffel d'una superfície de revolució. Estudieu cóm són les geodèsiques.

Exercici. Trobeu les equacions de les geodèsiques i els símbols de Christoffel per les superfícies reglades ($(u, v) \mapsto \alpha(u) + v\beta(u)$ amb α i β unitàries). Quan són aquestes superfícies localment isomètriques a un pla?

3 Geodèsiques

3.1 *Flux geodèsic.* Donat $(p, v) \in TM$ tenim una única geodèsica maximal $\gamma : (a, b) \to M$ amb $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$. Aquesta corba dona lloc a la corba $\widetilde{\gamma} = (\gamma, \gamma') : (a, b) \to TM$.

Definició. El *flux geodèsic* és el camp G de TM definit per $G(p, v) = \widetilde{\gamma}'(0)$.

Estudiem la seva expressió en coordenades. Donada una carta local $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ tenim coordenades $\widetilde{\varphi} = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ a TU de manera que $\widetilde{\varphi}(p, v) = (x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$ vol dir que

$$\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n), \qquad v = \sum_i y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Aleshores el flux geodèsic és

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x, y) y^i y^j \right) \frac{\partial}{\partial y^k}. \tag{19}$$

Exercici. Proveu la darrera expressió i deduïu que G és un camp diferenciable.[16]

3.2 *Qüestions generals sobre camps i fluxos.* Recordem alguns resultats fonamentals.

Teorema 1. *Sigui $X \in \mathcal{X}(M)$, per qualsevol $p \in M$ existeixen $a(p), b(p) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ i una corba $\gamma_p : (a, b) \to M$ tal que*

a) $0 \in (a, b)$, $\gamma_p(0) = p$

b) γ_p *és corba integral de* X *(és a dir,* $\gamma_p'(t) = X(\gamma_p(t))$*),*

c) (maximalitat) *si* $\mu : (c, d) \to M$ *satisfà les anteriors propietats aleshores* $(c, d) \subset (a, b)$ *i* $\mu = \gamma_p|_{(c,d)}$.

Teorema 2. *Sigui X com abans, $\mathcal{D}_t = \{m \in M : t \in (a(m), b(m))\}$ i $\varphi_t(m) = \gamma_m(t)$ definida sobre $\mathcal{D}_t$, aleshores*

a) *per qualsevol* $m \in M$ *existeix un entorn* V *de* m *i un* ϵ *tal que* $(t, p) \mapsto \varphi_t(p)$ *està definida a* $(-\epsilon, \epsilon) \times V$,

b) $\mathcal{D}_t$ *és obert per qualsevol* t,

c) $\cup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$,

d) $\varphi_t : \mathcal{D}_t \to \mathcal{D}_{-t}$ *és difeomorfisme amb inversa* φ_{-t},

e) *si* $s, t \in \mathbb{R}$ *llavors* $\mathrm{dom}(\varphi_s \circ \varphi_t) \subset \mathcal{D}_{s+t}$ *i quan* $st > 0$ *es dona la igualtat. A més, en el domini de* $\varphi_s \circ \varphi_t$ *es compleix que* $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

Nota: Per la darrera propietat es diu que φ_t és el *grup uniparamètric local* associat al camp X.

Les demostracions d'aquests teoremes les podeu trobar al llibre de Warner ([War83]).

[16] l'equació de les geodèsiques diu que $x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k x_i' x_j' = 0$ com que $x_k' = y_k$ tenim $y_k' = -\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j$ i obtenim l'expressió local del flux geodèsic G.

3.3 *Uniformització del domini de les geodèsiques.* Aplicant el teorema anterior tenim

Proposició. *Sigui (M, g) varietat de Riemann, si $p \in M$, existeix un entorn obert V de p, $\delta, \epsilon > 0$ i $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ amb $U = \{(q, v) : q \in V, v \in T_qM, \|v\| < \delta\}$ tal que $\gamma(t, q, v)$ és una geodèsica de M que per $t = 0$ passa pel punt q amb velocitat $\gamma'(0, q, v) = v$.*

Demostració. Apliquem el teorema general de fluxos al camp G sobre TM pel punt $(p, 0)$ i reduïm els entorns tot el que calgui. Més concretament, agafem $\widetilde{V}$ entorn de $\widetilde{p} = (p, 0) \in TM$ de manera que les corbes integrals del flux geodèsic G, $t \mapsto \widetilde{\varphi}_t(\widetilde{q})$, estiguin definides per $|t| < \epsilon$ si $\widetilde{q} \in \widetilde{V}$. Si $V \subset \pi(\widetilde{V})$ és obert coordenat, podem triar un $\delta > 0$ de manera que $U = \{(q, v) : q \in V, v \in T_qM, \|v\| < \delta\}$ estigui dins de $\widetilde{V}$. Amb això hem acabat. □

Lema. *Si la geodèsica $\gamma(t, q, v)$ està definida en un entorn $(-\epsilon, \epsilon)$ i $a > 0$, llavors $\gamma(t, q, av)$ està definida a $(-\epsilon/a, \epsilon/a)$ i*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Demostració. Si $f(t) = \gamma(t, q, v) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ i $s(t) = at$, llavors $h(t) = \gamma(at, q, v) = (x^1(s(t)), \ldots, x^n(s(t)))$. Tenim que

$$(x^k(s(t)))'' + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}(x^i(s(t)))'(x^j(s(t)))' = a^2(\nabla_{f'(s(t))} f'(s(t)))^k = 0.$$

Llavors $h(t)$ és la geodèsica que passa per q a temps $t = 0$ amb velocitat av, és a dir $h(t) = \gamma(t, q, av)$ i

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Llavors $\gamma(t, q, av)$ està definida per $|at| < \epsilon$, és a dir per $t \in (-\epsilon/a, \epsilon/a)$.

□

Corol·lari. *Al voltant de cada p hi ha un entorn V i un $\delta' > 0$ de manera que si $q \in V$ i $v \in T_qV$ amb $\|v\| < \delta'$, aleshores la geodèsica $\gamma(t, p, v)$ està definida per tot $t \in (-2, 2)$.*

Demostració. Considerem els entorns V i U de la proposició anterior. Sigui $a \cdot U = \{(q, v') : v' = av, (q, v) \in U\}$. Aleshores $\gamma(t, q, v') = \gamma(t, q, av)$ i pel lema $|t| < \epsilon/a$. Agafem $a = \epsilon/2$ i hem acabat.

□

3.4 *Aplicació exponencial.* Considerem un entorn U de TM com a la proposició i de manera que si $(p, v) \in U$ la geodèsica $\gamma(t, p, v)$ estigui definida per $|t| < 2$. Això ho podem fer pel lema de l'apartat anterior

Definició. L'*aplicació exponencial* $\exp : U \to M$ és

$$\exp(p, v) = \gamma(1, p, v) = \gamma(|v|, p, v/|v|).$$

Seguim la geodèsica unitària que surt de p amb direcció $v/|v|$ a una distància $|v|$.

Nota: Hem posat un domini una mica restrictiu. Trobar el domini pel qual exp està definida és una cosa no trivial. Si ens cal utilitzar el conjunt maximal pel qual exp està definida, l'escriurem com $\mathcal{D}$.

Observem que el domini de definició $\mathcal{D}$ és precisament el $\mathcal{D}_1$ del teorema 2 de la pàgina 41. Aleshores $\mathcal{D}$ és obert. De fet, si $M_0 = \{(p,0) \in TM\}$, llavors $\mathcal{D}$ és un entorn obert de M_0.

Nota: També utilitzarem la restricció de exp a T_pM, la denotem per $\exp_p$.

Exercici. Les aplicacions exp i $\exp_p$ són C^∞ en els seus dominis.

El punt $\exp_p(v)$ és l'únic punt de la geodèsica $\gamma(t,p,v)$ que la seva distància (amb signe) a p al llarg de la geodèsica és $|v|$.

A l'espai tangent T_pM tenim un producte escalar g_p induït per la mètrica g de M, aleshores

$$B_r(0) = \{v \in T_pM : g_p(v,v) < r^2\}$$

denota la bola oberta en T_pM de radi r.

Lema. *Si $v \in T_pM$ està en el domini de $\exp_p$, llavors la corba $t \mapsto \exp_p(tv)$ està definida per $t \in [0,1]$ i és una geodèsica que uneix p i $q = \exp_p(v)$.*

Demostració. Sigui $\alpha(t)$ la única geodèsica maximal amb $\alpha(0) = p$ i $\alpha'(0) = v$. Si c està entre 0 i 1, $\beta(t) = \alpha(ct)$ és geodèsica amb $\beta(0) = p$ i $\beta'(0) = cv$, llavors $\exp_p(cv) = \beta(1) = \alpha(c)$ i hem acabat. □

Proposició. *Sigui $p \in M$, existeix un ϵ de manera que $\exp_p : B_\epsilon(0) \to M$ és difeomorfisme sobre la imatge.*

Demostració. Estudiem la diferencial $d(\exp_p)_0$,

$$d(\exp_p)_0 \cdot v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp_p(tv)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\gamma(1,p,tv)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\gamma(t,p,v)) = v.$$

Aleshores $d(\exp_p)_0 = \mathrm{id}$. Apliquem el teorema de la funció inversa i hem acabat. □

Observació. Deduïm que per a tot $p \in M$ i qualsevol carta local (U,φ) al voltant de p tenim un entorn obert V relativament compacte (i.e. $\overline{V} \subset U$) tal que $\exp_q(tv) \in U$ si $q \in V$ i $\|v\| < \epsilon$.

Exemples. Veiem com és l'aplicació exponencial en alguns casos especials

1. A $\mathbb{R}^n$ tenim que
$$\exp_p(v) = p + v$$
i el seu domini és tot $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
2. A l'esfera S^n tenim que $\exp_p : B_\pi(0) \to S^n \setminus \{-p\}$ és difeomorfisme.

Exercici. Estudiar l'aplicació exponencial al cilindre de $\mathbb{R}^3$ i al tor pla.

Observació. Les geodèsiques a $\mathbb{R}^n$ satisfan algunes propietats:

1. Dos punts sempre es poden unir per una geodèsica.
2. La geodèsica que uneix dos punts és única.
3. La longitud de la geodèsica entre dos punts dona la distància entre els punts.

Aquestes propietats no són certes en general. 1) La *primera* falla per exemple si a $\mathbb{R}^2$ amb la mètrica ordinària li traiem un punt. 2) La *segona* falla quan volem unir el pol nord i el pol sud d'una esfera. 3) Considerem un cilindre, dos punts que no estiguin a la mateixa alçada es poden unir per infinites geodèsiques i totes elles donen longituds diferents.

Durant els següents apartats tractarem de treballar aquestes qüestions.

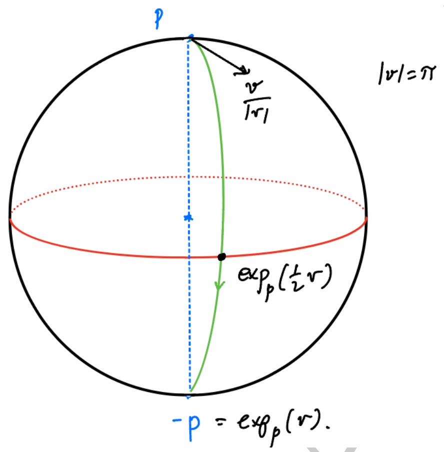


Figura 11: $\exp_p(v) = \cos(|v|)p + \sin(|v|)(v/|v|)$

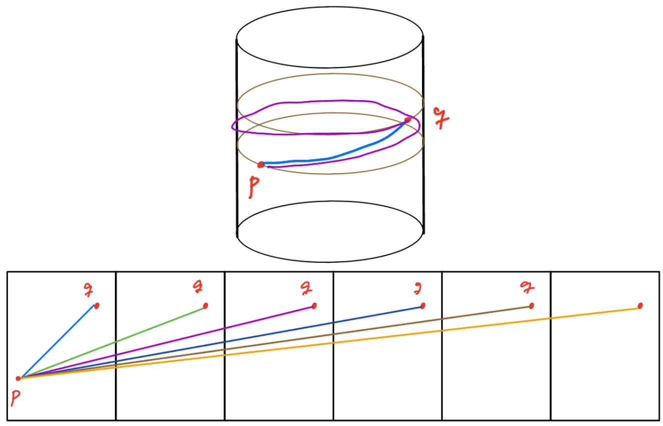


Figura 12: Geodèsiques al cilindre

3.5 *Coordenades normals geodèsiques.* Sigui $\exp_p : B_\epsilon(0) \to U$ difeomorfisme, U és un entorn obert de p. Fixem una base ortonormal e_i a T_pM, aleshores cada $q \in U$ és de la forma $\exp_p(\sum x^i e_i)$. Aleshores (U, φ) amb $\varphi(q) = (x^1, \ldots, x^n)$ s'anomenen coordenades normals geodèsiques al voltant de p.
Aquestes coordenades tenen algunes propietats interessants:

1. $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$,

2. la parametrització en coordenades normals de les geodèsiques que passen per p és $t \mapsto at$, amb $a \in \mathbb{R}^n$ constant,

3. $\Gamma_{ij}^k(0, \cdots, 0) = 0$. Això és conseqüència directa de la propietat anterior.

Demostració. Les geodèsiques per p amb direcció v són $c_v(t) = \exp_p(tv)$, llavors el vector tangent $v \in T_pM$ ve representat per la corba $c_v(t)$ quan $t = 0$. El vector $\partial/\partial x_i|_p$ ve representat per $c_{e_i}(t) = \exp_p(te_i)$ llavors $\partial/\partial x_i|_p = e_i$. Això mostra les dues primeres propietats.

Per la tercera només cal observar que per ser la corba de coordenades $x_i(t) = tv_i$ la geodèsica $c_v(t)$ tenim que

$$0 = x_k''(t) + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(c_v(t))x_i'(t)x_j'(t) = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(c_v(t))v_i v_j.$$

Aleshores quan $t = 0$ per a tot $v \in T_pM$ tenim que $v\Gamma^k v^t = 0$ on Γ^k és la matriu simètrica donada pels símbols de Christoffel. Llavors $\Gamma_{ij}^k(0, \ldots, 0) = 0$. □

Observació. La propietat 3 no és certa per a tot $q = \exp_p(tu) \in U$, en aquest punt només podem afirmar que $u\Gamma^k u^t = 0$ pel vector u i no per les altres direccions.

Exercici. Estudieu les coordenades normals geodèsiques al voltant d'un punt de S^n (per exemple el pol nord).

3.6 *Entorns.* Considerarem les següents situacions:

1. $U = \exp_p(V)$ difeomorfisme, U s'anomena *entorn normal de p*
2. $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$ s'anomena *bola normal de radi ϵ al voltant de p* (aquí $B_\epsilon(0)$ en un entorn V com el de l'apartat anterior).
3. Si U és entorn normal per cada $q \in U$ diem que U és *totalment normal*
4. U és *convex* si per qualsevol $p, q \in U$ existeix un *únic segment geodèsic* entre p i q que dona la distància mínima.

Enunciem el següent resultat sense prova.

Teorema. *Cada punt d'una varietat de Riemann està contingut en un entorn totalment normal. Cada punt té entorns convexos. A més, per cada $p \in M$ existeix r tal que si $r' < r$ aleshores $B_{r'}(p)$ és bola convexa.*

3.7 *Lema de Gauss.* Considerem $\exp_p$ sobre una bola $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ en la qual és difeomorfisme. Al tangent T_pM, que és espai vectorial tenim un producte escalar. Volem veure com es transforma aquest producte escalar via l'exponencial.

Evidentment $\exp_p$ no és isometria, en cas contrari totes les varietats de Riemann serien localment isomètriques a l'espai euclidià i això no és cert. El lema de Gauss ens dirà alguna cosa sobre aquest tema.

Definició. $S_r(p) = \exp_p(S_r(0))$ on $S_r(0)$ és l'esfera de radi r al tangent s'anomena esfera centrada en p de radi r (suposem que $\overline{B_r(0)} \subset V$ i en V l'exponencial és difeo).

Lema. *Sigui $\exp_p : B_r(0) \to B_r(p)$ difeo, $v \in B_r(0)$ i $w \in T_v(T_pM)$ aleshores si pensem també $v \in T_v(T_pM)$*

$$\langle v, w \rangle = g(d(\exp_p)_v \cdot v, d(\exp_p)_v \cdot w).$$

Abans de fer la demostració, veiem algunes coses.

1. Tenim que $\|d(\exp_p)_v v\| = \|v\|$
2. Tenim que si $v \perp w$ aleshores $g(d(\exp_p)_v \cdot v, d(\exp_p)_v \cdot w) = 0$. Això ens diu que els radis van perpendiculars a les esferes $S_r(p)$, ja que ho són en el tangent.

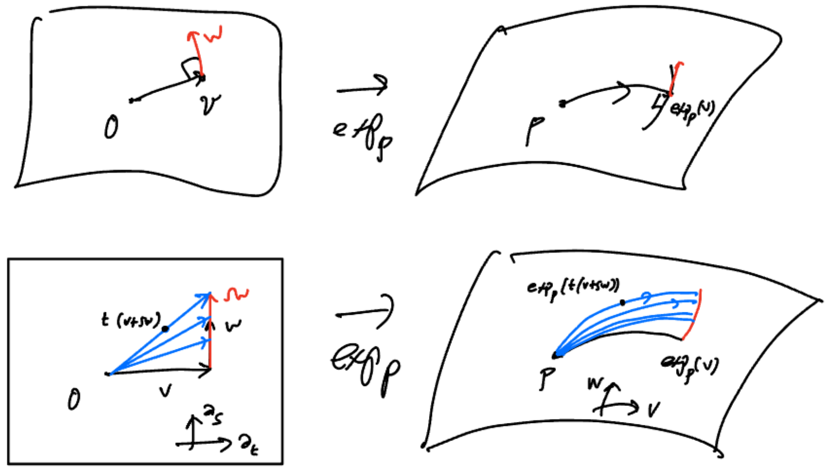


Figura 13: Es manté la perpendicularitat

3. Donat $q \in B_r(p)$ tenim que $q = \exp_p(v)$. Si $v \in S_{r'}(0)$ considerem per q les coordenades $r(p) = r'$ i $\theta^i(q)$ la coordenada angular i-èssima de v. Aquestes són les *coordenades polars* al voltant de p. De fet, si $(x^1, \dots, x^n)$ són coordenades normals geodèsiques $r^2 = \sum (x^i)^2$.

   El lema de Gauss ens diu que $\partial/\partial r$ és un camp perpendicular a les esferes $S_r(p)$, és a dir que $g(\partial/\partial r, \partial/\partial\theta^i) = 0$.

   A més el gradient[17] de la funció r és justament $\partial/\partial r$. En efecte, si $v = h\partial_r + \sum g_{i\partial_{\theta_i}}$ tenim que $g(v, \partial_r) = v(r)$ i $\operatorname{grad}(r) = \partial_r$.

Exemple. Sigui (M, g) una superfície, en coordenades polars tenim que la mètrica s'expressa com

$$ds^2 = dr^2 + \|\partial_\theta\|^2 d\theta^2 = dr^2 + \lambda^2 d\theta^2.$$

Veiem que significa el valor de λ. Calculem la longitud de la corba $\gamma(s) = (r_0, s)$ per $s \in (0, t)$. Aquesta corba és un arc de circumferència normal. Trobem la seva longitud. Obtenim

$$L_0^t(\gamma) = \int_0^t |\lambda(r, \theta)| d\theta.$$

Llavors per calcular λ cal conèixer la longitud d'arcs de circumferència.
Exercici. Expresseu λ^2 per $\mathbb{R}^2$, S^2 i $\mathbb{H}^2$ ($\lambda^2 = r^2, \sin^2 r, \sinh^2 r$ respectivament).

Demostració. Podem escriure $w = av + w'$ amb $w' \perp v$, llavors estudiem dos casos $w = v$ i $w \perp v$
En el primer cas considerem $\gamma(t) = (1+t)v$, llavors $\exp_p(\gamma(t))$ és una geodèsica i per tant sempre té la mateixa velocitat, en aquest cas és $\|v\|$. Hem provat que $\|d(\exp_p)_v v\| = \|v\|$ llavors

$$g(d(\exp_p)_v \cdot v, d(\exp_p)_v \cdot v) = \langle v, v \rangle$$

i hem vist el lema en el cas $w = av$.

[17] El gradient d'una funció f d'una varietat de Riemann és l'únic camp $\operatorname{grad}(f)$ tal que $g((\operatorname{grad} f)_p, v) = v(f)$ per a tot $v \in T_pM$.

Si $w \in T_v(T_pM) \cong T_pM$ és perpendicular a v considerem la variació $\gamma(t,s) = \exp_p(t(v+sw))$ denotem per V i per W els camps sobre la imatge de γ donats per

$$d\gamma(\partial_t), \quad d\gamma(\partial_s).$$

Observem que per ser aquests camps γ-relacionats amb els camps coordenats ∂_t i ∂_s tenim que $[V,W] = 0$.
Aleshores $V(1,0) = d(\exp_p)_v \cdot v$ i $W(1,0) = d(\exp_p)_v \cdot w$. Estudiem el producte $g(V,W)(t,s)$.

$$Vg(V,W)(t,s) = g(\nabla_V V, W) + g(V, \nabla_V W) = g(\nabla_V W, V).$$

Però $0 = [V,W] = \nabla_V W - \nabla_W V$, llavors

$$Vg(V,W)(t,s) = g(\nabla_W V, V) = \frac{1}{2} W g(V,V).$$

Però $V(t,0)$ és el camp tangent a una geodèsica, aleshores té norma constant. Deduïm que $(Vg(V,W))(t,0) = 0$. Aleshores $g(V,W)(t,0)$ és constant al llarg de la geodèsica, però $W(t,0) = d\exp_p(tv)(tw)$, si t va a zero tenim que $g(V,W)(t,0)$ es fa tan petit com vulguem. D'aquí podem concloure que $g(V,W)(1,0) = 0$ que és justament el que volíem. □

Corol·lari. *Sigui $p \in M$, U entorn normal de p i $B \subset U$ bola normal centrada en p. Si $\gamma : [0,1] \to B$ és un segment geodèsic amb $\gamma(0) = p$ i $c : [0,1] \to M$ corba C^1 a trossos que uneix p i $\gamma(1)$ tenim que $L(\gamma) \leq L(c)$. A més, $L(\gamma) = L(c)$ equival a que $\gamma([0,1]) = c([0,1])$ i c és una reparametrització de la geodèsica γ.*

Nota: Estem dient que localment les geodèsiques donen la distància entre punts.

Demostració. Considerarem dos casos.
Cas 1: $c([0,1]) \subset B$. Com que $\exp_p$ és difeomorfisme sobre U podem posar $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ amb $\|v(t)\| = 1$ i $r : (0,1] \to \mathbb{R}$ amb $r > 0$ de classe C^1 a trossos.

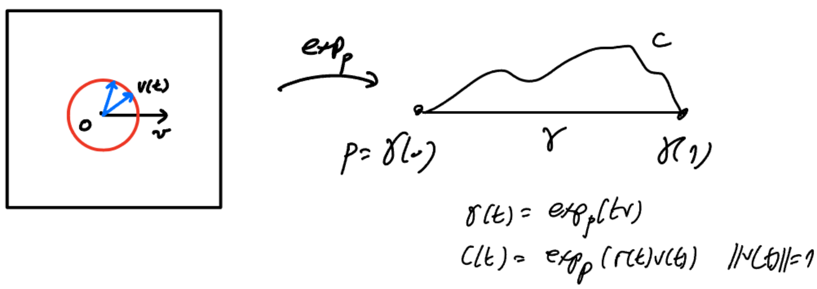


Figura 14: Les geodèsiques minimitzen localment les distàncies

Nota: Podem suposar que no es dona que $c(t_1) = p$, en aquest cas ignorem l'interval $[0, t_1]$.
Si $f(r,t) = \exp_p(rv(t))$ tenim

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Pel lema de Gauss $\frac{\partial f}{\partial r}$ i $\frac{\partial f}{\partial t}$ són perpendiculars i $\|\frac{\partial f}{\partial r}\| = ||v(t)|| = 1$. Aleshores

$$|c'(t)|^2 = |r'(t)|^2 + \|\frac{\partial f}{\partial t}\|^2 \geq |r'(t)|^2.$$

Integrem i
$$\int_\epsilon^1 |c'(t)|dt \geq \int_\epsilon^1 |r'(t)|dt \geq \int_\epsilon^1 r'(t)dt = r(1) - r(\epsilon).$$
Si $\epsilon \to 0$ tenim $L(\gamma) = r(1)$ i $L(c) \geq L(\gamma)$. Quan $L(c) = L(\gamma)$ vol dir que $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ i $v(t)$ és constant. Llavors c és reparametrització d'una geodèsica.

Cas 2: $c([0,1]) \not\subset B$. Sigui $t_1 \in (0,1)$ el primer punt tal que $c(t_1) \in \partial B$, si ρ és el radi de la bola B tenim que
$$L(c) \geq L_{[0,t_1]}(c) \geq \rho \geq L(\gamma)$$
i hem acabat. □

Nota: El mateix val per qualsevol punt $q \in B$ si bola és totalment normal (cosa que sempre podem fer).

Exercici. Sigui $\mathrm{diam}(U) = \sup\{d(p,q) : p, q \in U\}$, veieu que per tot $p \in M$ hi ha un ϵ i un entorn obert B amb $\mathrm{diam}(B) < \epsilon$ tal que si $q, q' \in B$ existeix un únic segment geodèsic de q a q' tal que la seva longitud és $d(q, q')$.

De fet encara podem dir més

Corol·lari. *Si una corba γ de p a q diferenciable a trossos dona la distància de p a q ($d(p,q)$) llavors és una geodèsica quan es parametritza per l'arc (o a velocitat constant).*

Demostració. Qualsevol segment de γ també dona la distància, en particular per un inclòs en una bola normal. Pel corol·lari anterior hem acabat. □

4 Curvatura

El teorema egregi de Gauss, que diu que la curvatura de Gauss d'una superfície només depèn de la primera forma fonamental, la mètrica, va induir el treball fonamental de Riemann. En aquest treball es van considerar les curvatures seccionals de superfícies de dimensió superior. Aquest tractament va portar més endavant a la introducció del tensor de curvatura. Introduirem primer el tensor de curvatura i les seves propietats i després veurem la més intuïtiva curvatura seccional. Es pot trobar una bona introducció històrica al treball de Riemann a [Spi79, cap. 4].

4.1 *Tensor de curvatura.*

Definició. La *curvatura* d'una varietat de Riemann M és una correspondència que associa a cada parell $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ una aplicació

$$R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

donada per

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

on ∇ és la connexió de Levi-Civita de M.

Observació. A do Carmo [dC92] es considera $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ que és el mateix però amb el signe canviat. Cal tenir-ho en compte si llegim aquest text.

Exercici. Per $\mathbb{R}^n$ amb la mètrica euclidiana

$$R(X,Y)Z = XYZ - YXZ - [X,Y]Z = 0$$

per a tot $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

Nota: Farem servir la notació d'Einstein quan sigui més còmode i definim[18]

$$\partial_i := \partial/\partial x_i, \qquad \nabla_i := \nabla_{\partial_i}, \qquad a_{i_1 \dots i_r, j} := \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j}.$$

Exercici. En coordenades

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)\partial_k.$$

Propietat.

a) R és lineal en les variables X, Y, Z,

b) En particular per cada $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ l'aplicació $R(X,Y)$ és lineal.

Observació. Aquí la linealitat fa referència a linealitat respecte funcions. És a dir,

$$R(fX + gX', Y)Z = fR(X,Y)Z + gR(X',Y)Z$$

per $X, X', Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ i el mateix per les altres variables.

[18] A la darrera notació hem posat una única coma, la notació amb punt i coma es fa servir per denotar les coordenades de ∇T. Per exemple si tenim el camp $T = t^j \partial_j$ llavors $\nabla_i T = t^j_{;i} \partial_j$ amb $t^j_{;i} = t^j_{,i} + t^r \Gamma^j_{ir}$.

Demostració. Veiem un cas per il·lustrar la necessitat del parèntesi de Lie en la definició. Provem que $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z$, la resta de casos es fa de forma similar.

$$\begin{aligned}
&R(fX,Y)Z = \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]}Z = \\
&= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y f\nabla_X Z - \nabla_{[fX,Y]}Z = f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - \nabla_{[fX,Y]}Z = \\
&= f(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z - Y(f)\nabla_X Z + Y(f)\nabla_X Z = fR(X,Y)Z
\end{aligned}$$

□

Propietat. Identitat de Bianchi:

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0.$$

Demostració. Exercici: és conseqüència immediata de la identitat de Jacobi i de la definició de curvatura. □

4.2 *Tensor de Riemann.*

Definició. S'acostuma a anomenar *tensor de Riemann* a

$$(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W).$$

També és habitual escriure $R(X,Y,Z,W) := (X,Y,Z,W)$.
Propietat. Tenim les identitats

a) $(X,Y,Z,W) + (Z,X,Y,W) + (Y,Z,X,W) = 0$

b) $(X,Y,Z,W) = -(Y,X,Z,W)$

c) $(X,Y,Z,W) = -(X,Y,W,Z)$

d) $(X,Y,Z,W) = (Z,W,X,Y)$.

Demostració. La propietat a) és Bianchi, la b) surt de la definició directament. Per veure c) provem primer que $(X,Y,Z,Z) = 0$ llavors si ho apliquem a $(X,Y,Z+W,Z+W)$ tenim la propietat c). Veiem que $(X,Y,Z,Z) = 0$.

$$(X,Y,Z,Z) = g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z)$$

però

$$g(\nabla_X\nabla_Y Z, Z) = Xg(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)$$

i

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z, Z) = \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z).$$

Llavors

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z,Z) &= Xg(\nabla_Y Z, Z) - Yg(\nabla_X Z, Z) - \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) = \\
&= \frac{1}{2}\left(X(Yg(Z,Z)) - Y(Xg(Z,Z)) - [X,Y]g(Z,Z)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Per provar d) escrivim les permutacions de a) i sumem

$$\begin{aligned}(X,Y,Z,W)+(Y,Z,X,W)+(Z,X,Y,W)&=0\\(Y,Z,W,X)+(Z,W,Y,X)+(W,Y,Z,X)&=0\\(Z,W,X,Y)+(W,X,Z,Y)+(X,Z,W,Y)&=0\\(W,X,Y,Z)+(Y,W,X,Z)+(X,Y,W,Z)&=0.\end{aligned}$$

Sumant fent servir les simetries b) i c) i obtenim

$$(Z,X,Y,W)+(W,Y,Z,X)=0$$

que implica la propietat d). □

4.3 *Expressió local del tensor de curvatura.*
Considerem coordenades locals $(U,\varphi=(x_1,\dots,x_n))$. Denotem per ∂_i els camps coordenats. Escrivim

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k=\sum_{l=1}^{n}R^l_{ijk}\partial_l$$

i

$$(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_s)=g(R(\partial_i,\partial_j)\partial_k,\partial_s)=\sum_l R^l_{ijk}g_{ls}=:R_{ijks}.$$

Exercici. Trobeu l'expressió

$$R^s_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^s_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x_j}+\sum_l(\Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl}).$$

Demostració.

$$\begin{aligned}R(\partial_i,\partial_j)\partial_k=\nabla_i\nabla_j\partial_k-\nabla_j\nabla_i\partial_k&=\nabla_i(\Gamma^r_{jk}\partial_r)-\nabla_j(\Gamma^r_{ik}\partial_r)=\\&=(\Gamma^r_{jk;i}-\Gamma^r_{ik;j})\partial_r+\Gamma^r_{jk}\nabla_i\partial_r-\Gamma^r_{ik}\nabla_j\partial_r=\\=(\Gamma^r_{jk;i}-\Gamma^r_{ik;j})\partial_r+\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{ir}\partial_s-\Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jr}\partial_s&=\sum_s\left(\frac{\partial\Gamma^s_{jk}}{\partial x_i}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x_j}+\sum_l(\Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl})\right)\partial_s.\end{aligned}$$

□

Observació. Si $X=u^i\partial_i, Y=v^j\partial_j, Z=w^k\partial_k$ (convenció d'Einstein: sumem índexs iguals a dalt i a baix), llavors

$$R(X,Y)Z=\sum_{i,j,k,l}R^l_{ijk}u^iv^jw^k\partial_l.$$

Aquesta expressió mostra el caràcter tensorial de $R(X,Y)Z$.
Propietat. Les simetries del tensor de Riemann es poden escriure en coordenades com

$$R_{ijks}+R_{kijs}+R_{jkis}=0$$

i

$$\begin{aligned}R_{ijks}&=-R_{jiks}\\R_{ijks}&=-R_{ijsk}\\R_{ijks}&=R_{ksij}.\end{aligned}$$

Exercici. Per una superfície parametritzada per $\varphi(u,v)$ trobeu el valor de $(\varphi_u,\varphi_v,\varphi_u,\varphi_v)$.

4.4 *Curvatura seccional.* Donat un espai vectorial euclidià V i $v, w \in V$ definim

$$|v \wedge w| = \sqrt{|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle^2}.$$

Aquesta expressió representa l'àrea del paral·lelogram determinat pels vectors v, w.

Propietat. Sigui $\sigma = \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} \subset T_pM$ pla vectorial del tangent a p, llavors

$$K(v, w) := \frac{(v, w, w, v)}{|v \wedge w|^2} = -\frac{(v, w, v, w)}{|v \wedge w|^2}$$

està ben definit, és a dir, no depèn del generadors v, w de σ triats. Té sentit parlar de $K(\sigma)$ que s'anomenarà *curvatura seccional* del pla $\sigma \subset T_pM$.

Demostració. Si v', w' és una altre base de σ podem passar de v, w a v', w' per composició de les transformacions elementals f_1 que porta $\{v, w\}$ a $\{w, v\}$, f_2 que porta $\{v, w\}$ a $\{\lambda v, w\}, \lambda \neq 0$ i f_3 que porta $\{v, w\}$ a $\{v + \lambda w, w\}$. Queda com exercici veure la invariància respecte aquestes transformacions elementals. $\square$

Exercici. Calculeu K per una superfície parametritzada per $\varphi(u, v)$. Comproveu que es tracta de la curvatura de Gauss.

Exercici. Considerem una superfície i coordenades polars de manera que $ds^2 = dr^2 + \lambda^2(r)d\theta^2$. Trobeu la curvatura seccional. En particular estudieu els casos $\lambda = r, \sin r, \sinh r$.

4.5 *La curvatura seccional determina R.* Es pot demostrar per força bruta la fórmula (veure per exemple [CE75]):

$$\begin{aligned} g(R(x,y)z,w) = & \frac{1}{6}\Big\{K(x+w,y+z)\|(x+w)\wedge(y+z)\|^2 \\ & - K(y+w,x+z)\|(y+w)\wedge(x+z)\|^2 \\ & - K(x,y+z)\|x\wedge(y+z)\|^2 - K(y,x+w)\|y\wedge(x+w)\|^2 \\ & - K(z,x+w)\|z\wedge(x+w)\|^2 - K(w,y+z)\|w\wedge(y+z)\|^2 \\ & + K(x,y+w)\|x\wedge(y+w)\|^2 + K(y,z+w)\|y\wedge(z+w)\|^2 \\ & + K(z,y+w)\|z\wedge(y+w)\|^2 + K(w,x+z)\|w\wedge(x+z)\|^2 \\ & + K(x,z)\|x\wedge z\|^2 + K(y,w)\|y\wedge w\|^2 \\ & - K(x,y)\|x\wedge w\|^2 - K(y,z)\|y\wedge z\|^2\Big\} \end{aligned}$$

També es compleix

$$g(R(u,v)w,z) = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left(K(u+sz, v+tw, u+sw, v+tz)\right)\Big|_{(s,t)=(0,0)}$$

on $K(u, v) = (u, v, v, u)/|u \wedge v|^2 = g(R(u, v)v, u)/|u \wedge v|^2$.

Vegem una demostració més algebraica del fet que K determina la curvatura de Riemann R.

Propietat. Suposem que tenim aplicacions $R, R' : V \times V \times V \to V$ trilineals de manera que $(x, y, z, t) = g(R(x, y, z), t)$ i $(x, y, z, t)' = g(R'(x, y, z), t)$ compleixen les propietats a), b), c) i d) del tensor de Riemann. Definim $K(\sigma)$ i $K'(\sigma)$ com la curvatura seccional de R i R' respectivament. Llavors si $K(\sigma) = K'(\sigma)$ es compleix que $R = R'$.

Demostració. Volem veure que $(x, y, z, t) = (x, y, z, t)'$ per $x, y, z, t \in V$. Per hipòtesi tenim que $(x, y, y, x) = (x, y, y, x)'$ llavors $(x, y, x, y) = (x, y, x, y)'$. Aleshores desenvolupant $(x + z, y, x + z, y) = (x + z, y, x + z, y)'$ veiem que $(x, y, z, y) = (x, y, z, y)'$. Llavors desenvolupant $(x, y + t, z, y + t) = (x, y + t, z, y + t)'$ i reordenant tenim que

$$(x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (y, z, x, t) - (y, z, x, t)'.$$

Llavors l'expressió $(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'$ és invariant per permutació cíclica dels primers tres elements. Si sumem les tres permutacions i apliquem la identitat de Bianchi a) obtenim que

$$3((x, y, z, t) - (x, y, z, t)') = 0$$

i amb això hem acabat. □

4.6 *Espais amb curvatura seccional constant.* Sigui M varietat de Riemann $p \in M$ i $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ aplicació trilineal definida per

$$g(R'(x, y, w), z) = g(x, w)g(y, z) - g(y, w)g(x, z).$$

Observem que si $(x, y, w, z)' = R'(x, y, w, z) = g(R'(x, y, w), z)$ llavors

$$R'(x, y, x, y) = |x \wedge y|^2.$$

Suposem que M té curvatura seccional constant (en p) llavors

$$K(x, y) = -R(x, y, x, y)/|x \wedge y|^2 = K_0$$

i

$$R(x, y, x, y) = -K_0|x \wedge y|^2 = -K_0 R'(x, y, x, y).$$

El tensor R' compleix les propietats a), b), c) i d) que compleix R. Comprovem la propietat a), les altres són trivials.

$$\begin{aligned}(x, y, w, z)' + (w, x, y, z)' + (y, w, x, z)' &= g(x, w)g(y, z) - g(y, w)g(x, z)+ \\ &g(w, y)g(x, z) - g(x, y)g(w, z) + g(y, x)g(w, z) - g(w, x)g(y, z) = 0.\end{aligned}$$

Llavors pel lema anterior $R = -K_0 R'$ és a dir que

$$g(R(X, Y)Z, W) = R(X, Y, Z, W) = -K_0(g(x, z)g(y, w) - g(y, z)g(x, w)). \tag{20}$$

Si considerem una base ortonormal (e_i) a T_pM i posem $R_{ijkl} = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ en el cas de curvatura constant K_0 la fórmula (20) implica que

$$R_{ijkl} = -K_0(g(e_i, e_k)g(e_j, e_l) - g(e_j, e_k)g(e_i, e_l)) = -K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}).$$

Llavors $K(p, \sigma) = K_0$ per a tot $\sigma \subset T_pM$ si i només si $R_{ijji} = K_0 = -R_{ijij}$ per $i \neq j$ i $R_{ijkl} = 0$ per la resta.

Exercici. Demostreu, fent servir el teorema egregi de Gauss si cal, que en una superfície de $\mathbb{R}^3$ la curvatura seccional ens dona la curvatura de Gauss.

4.7 *Altres tensors: Ricci i curvatura escalar.* Vegem alguns tensors d'interès però que no farem servir gaire durant el curs. Donats $x, y \in T_pM$ considerem l'aplicació lineal de T_pM en T_pM que a cada v fa correspondre $R(v,x)y$.

Definició. El tensor de Ricci és el tensor dues vegades covariant definit en cada T_pM com

$$\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{tr}\{Q(x,y) : v \mapsto R(v,x)y\},$$

on tr denota la traça d'una aplicació lineal.
Aquest tensor és simètric, si $\{e_i\}$ és base ortonormal respecte g_p llavors

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(x,y) = \sum_i g(R(e_i,x)y,e_i) &= \sum_i g(R(y,e_i)e_i,x) = \\ &= -\sum_i g(R(e_i,y)e_i,x) = \sum_i g(R(e_i,y)x,e_i) = \mathrm{Ric}(y,x).\end{aligned}$$

Trobem l'expressió en coordenades, tenim

$$\mathrm{Ric} = \sum_{i,j} R_{ij} dx_i \otimes dx_j, \quad R_{ij} = \mathrm{Ric}(\partial_i, \partial_j) = \mathrm{tr}(Q(\partial_i,\partial_j)).$$

Llavors com que

$$Q(\partial_i,\partial_j)(\partial_k) = R(\partial_k,\partial_i)\partial_j = \sum_r R^r_{kij}\partial_r$$

la traça de $Q(\partial_i,\partial_j)$ dona

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{kij}.$$

Hem dit que Ric és una forma bilineal simètrica, sigui A l'endomorfisme autoadjunt associat, és a dir A ve definit de manera única per la relació $g(A_p(v),w) = \mathrm{Ric}_p(v,w)$.

Definició. La *curvatura escalar* $R(p)$ en p és la traça de l'aplicació A_p.
Suposem $A(\partial_i) = \sum_k a_i^k \partial_k$, llavors

$$g(A(\partial_i),\partial_j) = \mathrm{Ric}(\partial_i,\partial_j) = R_{ij}.$$

Aleshores

$$R_{ij} = g(\sum_k a_i^k \partial_k, \partial_j) = \sum_k a_i^k g_{kj}.$$

Matricialment aquesta igualtat s'escriu

$$(\mathrm{Ric})_{ij} = (A \cdot G)_{ij}$$

llavors $(A)_{ij} = (\mathrm{Ric} \cdot G^{-1})_{ij} = \sum_k R_{ik} g^{kj}$ i

$$R = \sum_{i,k} R_{ik} g^{ki} = \sum_{i,k,r} R^r_{rik} g^{ki}.$$

Nota: Si fixem una base ortonormal una $\{e_i\}$ a T_pM llavors

$$\mathrm{Ric}(u,v) = \sum_i g(R(e_i,u)v,e_i), \qquad R = \sum_{i,j} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i).$$

Observació. A do Carmo [dC92] es considera la forma quadràtica de Ricci i amb un factor $1/(n-1)$. És a a dir

$$\operatorname{Ric}_p^{dC}(v) = \frac{1}{n-1}\operatorname{Ric}_p(v,v).$$

I la curvatura escalar considerada és

$$R^{dC}(p) = \frac{1}{n(n-1)}R(p).$$

4.8 *Sobre les curvatures.*

1. L'equació de camp gravitatori d'Einstein 'viu' en una varietat pseudoriemanniana (M,g) de dimensió 4, té com a incògnita el tensor mètric g, que representa el camp gravitatori, i s'escriu

   $$\operatorname{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = kT$$

   on Λ, k són constant i T és el tensor d'impulsió-energia. Vegeu [Gir93, p. 287] per una discussió i deducció d'aquest equació. En aquest mateix text es pot trobar com la llei de gravitació universal s'obté a partir d'aquesta equació.

   És un sistema d'equacions en derivades parcials de segon ordre:

   $$\operatorname{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta}, \quad \alpha,\beta = 0,1,2,3.$$

   Tenint en compte les simetries dels tensor ens queden 10 equacions i amb les identitats de Bianchi queden 6 equacions independents.

   El tensor $G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{2}Rg$ s'anomena tensor d'Einstein i les varietat de Riemann amb $G = 0$ són les varietats d'Einstein.

2. La positivitat del tensor de Ricci té conseqüències topològiques molt importants: teorema de Myers sobre el diàmetre, desigualtat de Bishop-Gromov sobre el volum de les boles, 'splitting theorem' en el que una varietat és isomètrica a $\mathbb{R} \times L$, convergència del flux de Ricci, etc.

3. Donada una varietat diferenciable i un interval obert (a,b) un flux de Ricci associa a cada $t \in (a,b)$ una mètrica de Riemann g_t de manera que

   $$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\operatorname{Ric}_{g_t}$$

   on Ric_{g_t} és el tensor de Ricci de la mètrica g_t. Té una certa analogia mab l'equació de la calor. L'estudi d'aquest flux va ajudar a resoldre la conjectura de geometrització de Thurston, a classificar les varietats de dimensió 3 i a resoldre la conjectura de Poincaré.

4. En varietats de Kähler[19] la curvatura de Ricci determina la primera classe de Chern de la varietat i per tant la topologia de la varietat.

[19]Una varietat de Kähler és una varietat de Riemann de dimensió parella de manera que el pla tangent admet una estructura complexa, $J_p \in \operatorname{End}(T_pM)$ amb $J_p^2 = -I$, tal que J és isometria.

4.9 *Equació de Jacobi.* Ens situem en una varietat de Riemann (M, g). Sigui

$$\alpha : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

tal que per cada s fixat $t \mapsto \alpha(t, s)$ és geodèsica. Diem que l'aplicació α és una *variació de geodèsiques*. Considerem els camps

$$T = d\alpha(\partial_t), \quad V = d\alpha(\partial_s).$$

Són camps α-relacionats amb els camps coordenats ∂_t, ∂_s llavors (vegeu (15))

$$\nabla_T V - \nabla_V T - d\alpha[\partial_t, \partial_s] = 0$$

i $\nabla_T V = \nabla_V T$. Per ser T camp tangent a geodèsiques resulta que $\nabla_T T = 0$, per tant:

$$\nabla_T \nabla_T V = \nabla_T \nabla_V T - \nabla_V \nabla_T T = R(T, V)T.$$

Aleshores V satisfà l'anomenada equació de Jacobi:

$$\nabla_T \nabla_T V = R(T, V)T. \tag{21}$$

Definició. Un camp J al llarg d'una geodèsica γ amb $\gamma' = T$ que satisfà (21) s'anomena *camp de Jacobi* al llarg de γ.

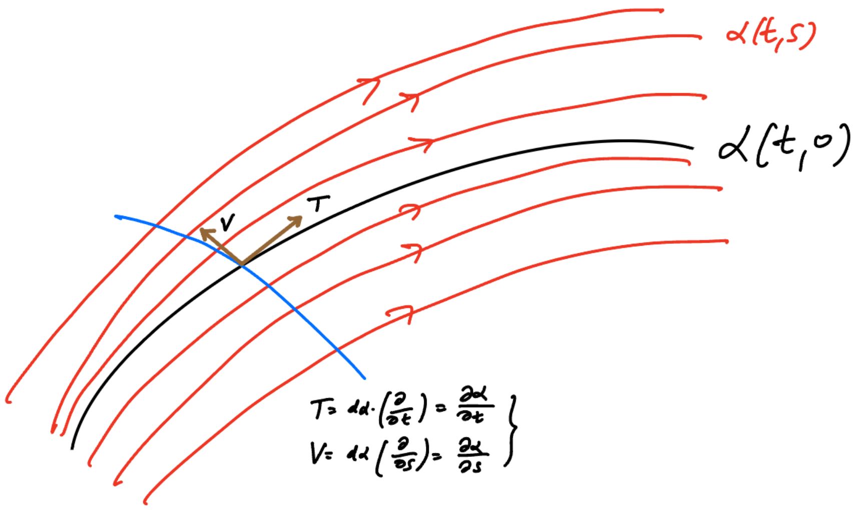


Figura 15: Variació de geodèsiques

Considerem, com abans, una variació per geodèsiques $\alpha(t, s)$ i sigui $\{e_i(t)\}$ base ortonormal i paral·lela al llarg de la geodèsica central $\gamma(t) = \alpha(t, 0)$. Escrivim

$$f_i(t) = g(J(t), e_i(t)), \qquad a_{ij}(t) = g(R(\gamma'(t), e_i(t))\gamma'(t), e_j(t)).$$

Llavors pel paral·lelisme i la ortonormalitat de la base $\{e_i(t)\}$ tenim que

$$f_j''(t) = \sum_i a_{ij}(t) f_i(t), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Matricialment podem escriure també

$$\begin{pmatrix} g(J,e_1) \\ \vdots \\ g(J,e_n) \end{pmatrix}'' = \big(g(R(T,e_i)T,e_j)\big) \cdot \begin{pmatrix} g(J,e_1) \\ \vdots \\ g(J,e_n) \end{pmatrix}.$$

De la teoria general d'equacions diferencials veiem que l'espai de solucions és un espai vectorial $2n$ dimensional. Existeix solució única fixant valors inicials de J i la seva derivada $\nabla_T J$ que, quan no hi hagi confusió denotarem per J' i anàlogament per J''. Això equival a donar $J(0)$ i $J'(0) = \nabla_T J|_{t=0}$. Per ser γ corba geodèsica tenim $\nabla_T T = 0$ llavors

$$g(J,T)'' = g(J'',T) = g(R(T,J)T,T) = 0.$$

Un camp de Jacobi el podem descompondre en part normal a γ i en part tangent, això és $J(t) = J_0(t) + \mu(t)T(t)$. Llavors l'equació de Jacobi implica que $\mu'' = 0$ i tot camp de Jacobi s'escriu

$$J(t) = J_0(t) + (at+b)T(t), a, b \in \mathbb{R}, \quad g(J_0,T) = 0.$$

4.10 *Camps de Jacobi com a camps associats a una variació de geodèsiques.* Hem vist que una variació de geodèsiques $\alpha(t,s)$ dona lloc a un camp de Jacobi $V(t) = d\alpha(\partial_s)|_{(t,0)}$ al llarg de la geodèsica central $\gamma(t) = \alpha(t,0)$. Anem a veure que tots els camps de Jacobi provenen d'una variació de geodèsiques. Concretament, volem veure que si $\gamma(t)$ és geodèsica amb $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = u$ i $J(t)$ és un camp de Jacobi al llarg de γ amb les condicions inicials $J(0) = v, J'(0) = w$ amb $v, w \in T_pM$ llavors existeix una variació de geodèsiques $\alpha(t,s)$ de manera que

1. $\gamma(t) = \alpha(t,0)$, és a dir, que γ és la geodèsica central de la variació.
2. Si $V(t) = d\alpha(\partial_s)|_{(t,0)}$, llavors $V(0) = v, V'(0) = w$.

Si trobem aquesta variació llavors $V(t)$ és camp de Jacobi al llarg de γ amb les mateixes condicions inicials que $J(t)$, per unicitat de les solucions d'equacions diferencials ordinàries tindrem que $J(t) = V(t) = d\alpha(\partial_s)|_{(t,0)}$.

Propietat. Sigui $c(s)$ corba diferenciable amb $c(0) = p, c'(0) = v$. Estenem per paral·lelisme sobre $c(s)$ els vectors $u, w \in T_pM$ a camps $U(s), W(s)$. Considerem la variació de geodèsiques

$$\alpha(t,s) = \exp_{c(s)}(t(U + sW)).$$

Llavors el camp de Jacobi

$$V(t) = d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\Big|_{(t,0)}$$

satisfà que $V(0) = v, V'(0) = w$.

Demostració. Ja sabem que $V(t)$ és camp de Jacobi, només cal estudiar $V(0)$ i $V'(0)$. Per una banda

$$V(0) = d\alpha(\partial_s)|_{(0,0)} = \frac{\partial\alpha}{\partial s}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial s}\exp_{c(s)}(0) = c'(s)_{s=0} = v.$$

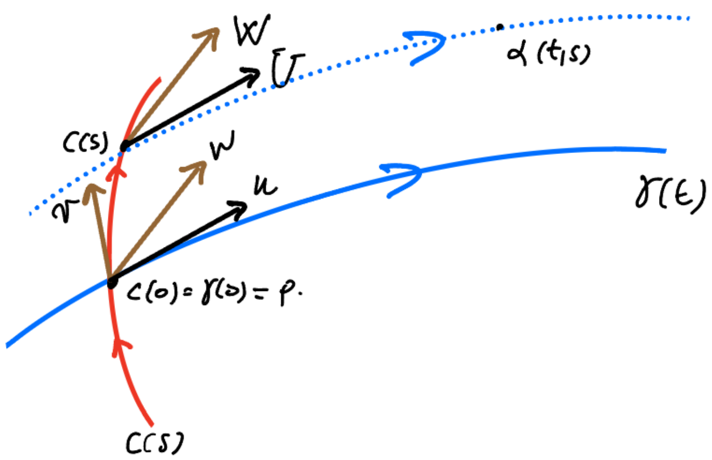


Figura 16: Variació de geodèsiques

Per altra banda, fent servir de nou la relació (15) tenim $\nabla_T V - \nabla_V T - d\alpha[\partial_t, \partial_s] = 0$ i $\nabla_T V = \nabla_V T$. Llavors

$$V'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial s}\bigg|_{(0,0)} = \nabla_T V|_{(0,0)} = \nabla_V T|_{(0,0)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \exp_{c(s)}(t(U + sW)) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{(0,0)} (U + sW) = w.$$

$\square$

4.11 *Separació de geodèsiques.* Ara anem a veure com es separen les geodèsiques de la geodèsica central. Concretament considerem la variació per geodèsiques

$$\alpha(t, s) = \exp_p(t(V + sW))$$

llavors $J(t) = d\alpha(\partial_s)|_{(t,0)} = (d\exp_p)_{tV}(tW)$ és camp de Jacobi amb $J(0) = 0, J'(0) = w$. Sigui $g(t) = \langle J, J\rangle(t)$ (aquí $\langle \cdot\ , \cdot\ \rangle$ denota el producte de la mètrica de Riemann de la varietat). Trobem $g^{(k)}(0)$ per $k \leq 4$ i amb això el polinomi de Taylor de $g(t)$ de grau 4.

1. $g(0) = \langle J, J\rangle(0) = 0$
2. $g'(t) = 2\langle J', J\rangle(t)$ i $g'(0) = 0$.
3. $g''(0) = 2(\langle J'', J\rangle + \langle J', J'\rangle)(t)$, llavors $g''(0) = 2|w|^2 = 2$.
4. Observem que per ser $J(t)$ camp de Jacobi es compleix $J'' = R(\gamma', J)\gamma'$, llavors $J''(0) = 0$. Tenim
$$g'''(t) = 2(\langle J'', J\rangle + \langle J', J'\rangle)'(t) = 2(\langle J''', J\rangle + 3\langle J'', J'\rangle)(t)$$
i $g'''(0) = 0$.
5. Tenim
$$g^{(iv)}(t) = 2(\langle J''', J\rangle + 3\langle J'', J'\rangle)'(t) = 2(\langle J^{(iv)}, J\rangle + 4\langle J''', J'\rangle + 3\langle J'', J''\rangle)(t),$$

aleshores

$$g^{(iv)}(0) = 8\langle J''', J'\rangle(0) = 8\langle J'''(0), w\rangle.$$

Ens cal estudiar $J'''(0)$. Sabem que $J'' = R(\gamma', J)\gamma'$, llavors $J''' = \nabla_{\gamma'} R(\gamma', J)\gamma'$. Sigui U un camp arbitrari al llarg de γ llavors si posem $T = \gamma'$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_T R(T,J)T, U\rangle &= T\langle R(T,J)T, U\rangle - \langle R(T,J)T, \nabla_T U\rangle = \\
&= T\langle R(T,U)T, J\rangle - \langle R(T,J)T, \nabla_T U\rangle = \\
&= \langle \nabla_T R(T,U)T, J\rangle + \langle R(T,U)T, \nabla_T J\rangle - \langle R(T,J)T, \nabla_T U\rangle.
\end{aligned}$$

Si fem $t = 0$ tenim

$$\langle \nabla_T R(T,J)T, U\rangle(0) = \langle R(T,U)T, \nabla_T J\rangle(0) = \langle R(\gamma', J')\gamma', U\rangle.$$

Llavors $J'''(0) = (R(\gamma', J')\gamma')(0) = R(\gamma'(0), w)\gamma'(0)$ i

$$g^{(iv)}(0) = 8\langle R(\gamma'(0), w)\gamma'(0), w\rangle.$$

Si suposem $\{\gamma'(0) = v, J'(0) = w\}$ base ortonormal de $\sigma \subset T_pM$ llavors com que

$$\langle R(\gamma'(0), w)\gamma'(0), w\rangle = -K(p,\sigma)$$

tenim

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p,\sigma)t^4 + o(t^4) \tag{23}$$

on $\lim_{t\to 0} o(t^4)/t^4 = 0$.
Com a conseqüència (fent servir que $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ prop de zero) tenim que

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3 + o(t^3).$$

Comparem com es separen les geodèsiques de la variació $\alpha(t,s) = \exp_p(tv(s))$ amb $|v| = 1$ i $v'(0) = w, |w| = 1$ respecte com es separen els rajos $tv(s)$ del raig central $tv(0)$ a l'espai tangent T_pM.

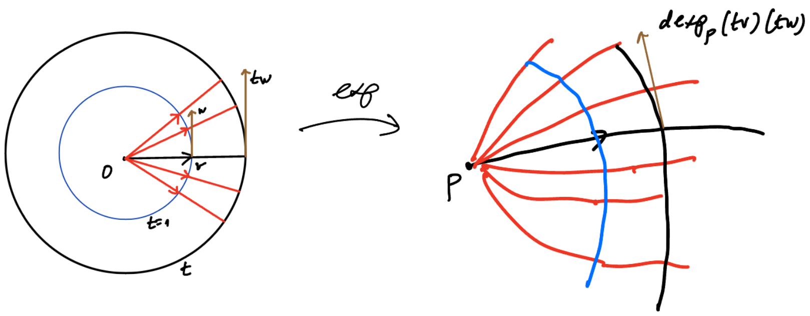


Figura 17: Separació de geodèsiques

a) Separació a T_pM de $t \mapsto tv(0)$, aquí la variació és $\beta(t,s) = tv(s)$ fem

$$|d\beta(\partial_s)|_{(t,0)} = \left|\frac{\partial \beta}{\partial s}\right|_{(t,0)} = |tv'(s)|_{(t,0)} = t.$$

b) Per altra banda

$$|d\alpha(\partial_s)|_{(t,0)} = \left|\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right|_{(t,0)} = |J(t)| \approx t - \frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3.$$

Veiem que si $K(p,\sigma)$ és positiva les geodèsiques se separen amb *menor velocitat* que els rajos i si $K<0$ amb *major velocitat.* Això tindrà conseqüències importants en l'estructura global de la varietat.

4.12 *Camps de Jacobi en espais de curvatura constant.* Sigui $\gamma : [0,l] \to M$ geodèsica normalitzada ($|\gamma'| = 1$) sabem que els camps de Jacobi són de la forma $J = J_0 + (at+b)T$ on J_0 normal a γ'. Considerem M de curvatura seccional constant K i J camp de Jacobi al llarg de γ i normal a γ'. Llavors per tot camp U sobre γ

$$\langle J'', U\rangle = \langle R(\gamma', J)\gamma', U\rangle = -K(\langle\gamma',\gamma'\rangle\langle J,U\rangle - \langle J,\gamma'\rangle\langle\gamma',U\rangle) = -K\langle J,U\rangle.$$

Llavors $J'' + KJ = 0$. Si $w(t)$ és camp unitari paral·lel al llarg de γ i perpendicular a γ' tenim

1. Si $K>0$
$$J(t) = \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}w(t)$$

2. Si $K=0$
$$J(t) = tw(t)$$

3. Si $K<0$
$$J(t) = \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}w(t)$$

són camps de Jacobi de γ amb condicions inicial $J(0)=0$ i $J'(0)=w(0)$.

Si $J = fw$ llavors, per ser w camp paral·lel $J' = f'w$ i $J'' = f''w$ llavors l'equació de Jacobi s'escriu

$$f'' + Kf = 0.$$

Les condicions inicials $J(0)=0, J'(0)=w(0)$ impliquen $f(0)=0, f'(0)=1$. Llavors l'equació és fàcil de resoldre.

4.13 *Punts conjugats.*

Definició. Sigui γ geodèsica amb $p=\gamma(0)$ i $q=\gamma(t_0)$ diem que q és *conjugat* a p al llarg de γ si existeix un camp de Jacobi J no idènticament nul sobre γ tal que $J(0)=J(t_0)=0$. La *multiplicitat* del punt conjugat és el màxim nombre de camps de Jacobi linealment independents que donen la propietat de conjugació.

Observació. Considerem camps de Jacobi J al llarg de γ que s'anul·len quan $t=0$. Un camp J com aquests queda completament determinat pel valor de $J'(0)$, llavors tenim que l'espai de solucions dels camps de Jacobi té dimensió $n=\dim M$. A més podem dir que un conjunt de camps de Jacobi $J_1(t),\cdots,J_k(t)$ nuls quan $t=0$ són linealment independents si i només si $J_1'(0),\ldots,J_k'(0)$ són linealment independents.

En efecte, suposem $\{J_i\}$ linealment independents, si $\sum_i a_i J_i'(0) = 0$ llavors $J = \sum_i a_i J_i$ és camp de Jacobi i ha de ser idènticament nul ja que s'anul·la el camp i la seva derivada en $t = 0$, per ser $\{J_i\}$ independents $a_i = 0$ i $\{J_i'(0)\}$ també son independents. Recíprocament, si $\{J_i'(0)\}$ són independents sigui $J = \sum_i a_i J_i = 0$, tenim que $\sum_i a_i J_i'(0) = 0$ llavors $a_i = 0$ i els J_i són independents.

Propietat. Sigui $\gamma : [0, a] \to M$ geodèsica amb $p = \gamma(0)$ i $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a])$. Els punts p i q són conjugats al llarg de γ si i només si $v_0 = t\gamma'(0)$ és punt crític de $\exp_p$. A més la multiplicitat de q és igual a la dimensió del nucli de $d\exp_p$ en el punt v_0.

Demostració. Recordem que per definició q és conjugat amb p si existeix un camp de Jacobi J al llarg de γ tal que $J(0) = J(t_0) = 0$. Sigui $v = \gamma'(0)$ i $w = J'(0)$, considerem la variació $\alpha(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$, hem vist que

$$d\alpha(\partial_s)|_{(t,0)} = (d\exp_p)_{tv}(tw) = J(t).$$

Si q és conjugat $J(t_0) = 0$ i $t_0 v$ és punt crític i viceversa.

Veiem la segona part. La multiplicitat és el nombre màxim de camps de Jacobi $J_1, \ldots, J_k$ linealment independents que s'anulen a 0 i a t_0. Però $J_1, \ldots, J_k$ són linealment independents si i només si $J_1'(0), \ldots, J_k'(0)$ ho són. Com que $J'(0) = w$ tenim llavors la mateixa dimensió que $\ker d\exp_{t_0 v}$. $\square$

Exemple. Estudiar els punts conjugats d'un punt de S^n. Estudiar la seva multiplicitat. Aquí l'espai te curvatura constant $K = 1$ els camps de Jacobi són $J(t) = \sin(t)w(t)$. Tenim que s'anul·la quan $t = 0, \pi$, són conjugats els punts antipodals. La multiplicitat és $n - 1$ ja que $w(0)$ és perpendicular a la direcció de la geodèsica.

Exercici. Comenteu i critiqueu els següents paràgrafs generats per l'IA ChatGPT a la pregunta: Què és un camp de Jacobi i perquè serveix?

> *Un camp de Jacobi és un concepte fonamental en la teoria de la geometria riemanniana i la teoria de les varietats. Es defineix com un conjunt de solucions de les equacions de Jacobi, que són equacions diferencials lineals de segon ordre que descriuen petites desviacions d'una geodèsica.*
>
> *Per entendre millor això, primer considerem què és una geodèsica. En una varietat riemanniana, una geodèsica és una corba que té la propietat de ser la més curta entre dos punts donats. Les equacions de Jacobi descriuen com varien els vectors tangents al llarg d'una geodèsica quan la corba és lleugerament pertorbada. En altres paraules, si tenim una geodèsica i després 'sacsegem' lleugerament la corba en una direcció particular, les equacions de Jacobi ens diuen com evoluciona aquesta pertorbació al llarg de la geodèsica.*
>
> *Els camps de Jacobi són importants perquè proporcionen informació crucial sobre la corbatura d'una varietat riemanniana. Per exemple, si hi ha camps de Jacobi que divergeixen, això suggereix que la varietat té corbatura positiva en aquella direcció. D'altra banda, si tots els camps de Jacobi convergeixen, això indica corbatura negativa. A més, els camps de Jacobi també estan relacionats amb l'estabilitat de les geodèsiques: si existeixen camps de Jacobi que creixen sense límit al llarg d'una geodèsica, això suggereix que la geodèsica és inestable.*
>
> *En resum, els camps de Jacobi són eines poderoses per analitzar la geometria i la topologia de varietats riemannianes, així com per comprendre l'estabilitat de les trajectòries en aquestes varietats.*

Exercici. Sigui $B_\epsilon(p) \subset M$ bola normal on M és varietat de Riemann amb curvatura seccional idènticament 0. Provar que $\exp_p : B_\epsilon(0) \to B_\epsilon(p)$ és isometria ([dC92, 5.1]).

Sigui $\exp_p : B_\epsilon(0) \to B_\epsilon(p)$ difeomorfisme ($B_\epsilon(p)$ bola normal) Sigui $w \in T_qM$ amb $q = \exp_p(t_0 v) \in B_{\epsilon(p)}$. Fem el transport paral·lel de w al llarg de la geodèsica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ i l'anomenen $E(t)$. Per ser $K = 0$ el tensor de curvatura és zero llavors

$$(tE(t))'' = 0 = R(\gamma', tE)\gamma'$$

i $J(t) = tE(t)$ és camp de Jacobi al llarg de $\gamma(t)$ amb condicions inicials $J(0) = 0, J'(0) = E(0)$.

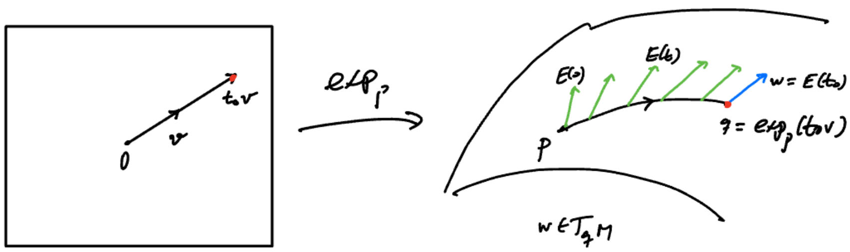


Figura 18: Camp paral·lel $E(t)$

Aleshores J és camp de Jacobi associat a la variació de geodèsiques

$$\alpha(s,t) = \exp_p(t(v + sE(0)))$$

i

$$J(t) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{(t,0)} \exp_p(t(v + sE(0))).$$

Tenim

$$t_0 w = t_0 E(t_0) = J(t_0) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{(t,0)} \exp_p(t(v + sE(0))) = (d\exp_p)_{t_0 v}(t_0 E(0)).$$

Finalment

$$|w| = |E(t_0)| = |E(0)| = |((d\exp_p)_{t_0 v}))^{-1} \cdot w|$$

on la segona igualtat és certa per ser E camp paral·lel. Llavors $(d\exp_p)_{t_0 v}$ és isometria lineal i $\exp_p$ és isometria.

Exercici. Sigui M varietat de Riemann amb $K \le 0$. Provar que $C(p) = \emptyset$ per a tot $p \in M$ ([dC92, 5.3]). [20]

Exemple. (Exercicis [dC92, 5.6] i [dC92, 5.7].) Sigui M varietat de Riemann dos dimensional, una superfície. Considerem una bola normal $B_\delta(p)$ i la superfície parametritzada donada per

$$f(\rho, \theta) = \exp_p \rho v(\theta), \quad \rho \in (0, \delta),\ \theta \in (-\pi, \pi),$$

[20] Fem servir l'indicació del do Carmo però en el següent capitol ho tornem a fer. Sigui J camp de Jacobi al llarg d'una geodèsica $\gamma : [0, a] \to M$ tal que $J(0) = J(a) = 0$ i no idènticament nul.

$$T\langle \nabla_T J, J\rangle = \langle \nabla_T \nabla_T J, J\rangle + \langle \nabla_T J, \nabla_T J\rangle = \langle R(T,J)T, J\rangle + |\nabla_T J|^2 \ge 0$$

per ser la curvatura seccional positiva. Però $\langle \nabla_T J, J\rangle(0) = \langle \nabla_T J, J\rangle(a) = 0$ llavors hem de tenir $T\langle \nabla_T J, J\rangle(t) = 0$ per a tot t. Aleshores

$$T\langle J, J\rangle = 2\langle \nabla_T J, J\rangle \equiv 0$$

ja que $\langle \nabla_T J, J\rangle(0) = 0$ i $T\langle \nabla_T J, J\rangle(t) = 0, \forall t$ i $|J|^2$ és constant, però com que és 0 a $t = 0$ ha de sempre nul, contradicció ja que és no idènticament nul.

on $v(\theta) = e^{i\theta} \subset T_pM$. Els parells (ρ, θ) són les *coordenades polars* al voltant de p dels punts del disc menys un radi, és a dir una parametrització de l'obert

$$B_\delta(p) \setminus \{\exp_p(\rho v(\pi)), \rho \in [0, \delta)\}.$$

Veiem com s'expressa la mètrica en aquestes coordenades. Fent servir el lema de Gauss i que les geodèsiques $\rho \to f(\rho, \theta)$ són unitàries.

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \rho} \right\rangle = |v(\theta)|^2 = 1, \quad g_{22} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle = \left| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|^2 =: \lambda^2(\rho, \theta), \quad g_{12} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle = 0.$$

El camp $J(\rho) = \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{(\rho,0)}$ és camp de Jacobi al llarg de la geodèsica $f(\rho, 0)$ amb $J(0) = 0$, $J'(0) = v'(0) = (0, 1)$ i $|J'(0)| = 1$. Llavors

$$\sqrt{g_{22}(t,0)} = |J(t)| = t - \frac{1}{6}K(p)t^3 + o(t^3).$$

Si derivem i fem límit veiem que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{g_{22}}_{tt}}{\sqrt{g_{22}}} = \lim_{t\to 0} \frac{(t - \frac{1}{6}K(p)t^3 + o(t^3))_{tt}}{t - \frac{1}{6}K(p)t^3 + o(t^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{-K(p)t + o(t)}{t - \frac{1}{6}K(p)t^3 + o(t^3)} = -K(p).$$

Notem que en els casos de curvatura constant $-1, 0, 1$ la funció λ és $\sinh r, r$ i $\sin r$ respectivament.

El coneixement de la longitud de les circumferències de radi r al voltant de p també ens permet calcular $K(p)$. En efecte, tenim

$$L(C_r) = \int_{-\pi}^{\pi} |\lambda(r, \theta)| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (r - \frac{1}{6}K(p)r^3 + o(r^3)) d\theta = 2\pi r(1 - \frac{1}{6}K(p)r^2 + o(r^2)).$$

D'aquí deduïm que

$$K(p) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(C_r)}{r^3}.$$

5 Completitud geodèsica

Fins ara hem estudiat geometria Riemanniana local. En aquest capítol veurem dos teoremes globals: el de completitud geodèsica i el de Hadamard que tracta sobre les varietats de Riemann de curvatura no positiva.

5.1 *Completitud.*

Definició. Una varietat de Riemann M és *extensible* o *ampliable* si existeix una varietat de Riemann connexa M' de manera que M és isomètrica a un obert propi de M' (no buit i no tot M'). Si això no passa diem que és *no extensible* o *no ampliable.*

Definició. Una varietat de Riemann és *geodèsicament completa* si per a qualsevol p de M l'aplicació $\exp_p$ està definida per a tot $v \in T_pM$. Equivalentment, si tota geodèsica $\gamma(t)$ que comença a p està definida per a tots els valors del paràmetre $t \in \mathbb{R}$ (rercordem que tota geodèsica que surt de p és de la forma $\exp_p(tv)$).

Exemple. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ no és geodèsicament completa. La geodèsica $\gamma(t) = (1,1) + t(-1,-1)$ no està definida per $t = 1$.

Propietat. Si M és geodèsicament completa llavors M és no-extensible.

Demostració. Si M fos extensible tindríem que M és isomètrica a un obert propi de M', que denotem també M. Per ser M' connexa ∂M no és buit a M'. Considerem $p \in \partial M$ i un entorn $U' \subset M'$ normal de p (i.e. $U' = \exp_p(V)$ per cert entorn obert V del $0 \in T_pM$). Sigui $q \in U' \cap M$ i $\tilde{\gamma}(t)$ geodèsica a U' que uneix p i q amb $\tilde{\gamma}(0) = p, \tilde{\gamma}(1) = q$. Llavors $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$ és geodèsica en M que deixa d'estar definida per algun $t \leq 1$. Contradicció amb què M és geodèsicament completa $\square$

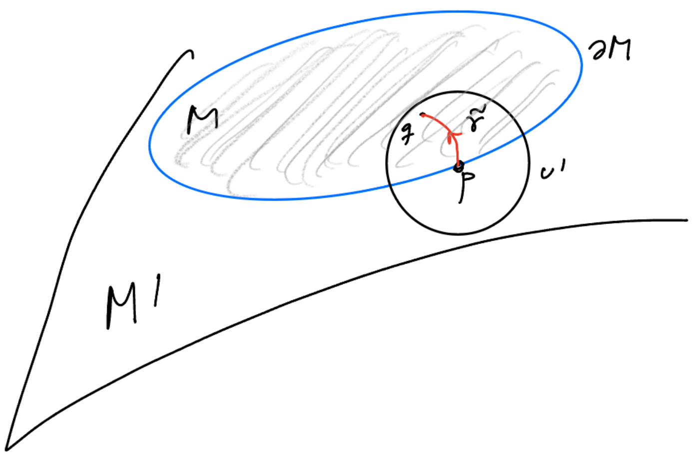


Figura 19: geodèsicament completa implica no-extensible

En una secció anterior ja hem vist que en una varietat de Riemann vista com a espai mètric, on la distància $d(p,q)$ és l'ínfim de les longituds de les corbes C^1 a trossos que uneixen dos punts, les topologies de varietat i d'espai mètric coincideixen. La demostració fent servir geodèsiques és més senzilla.

Propietat. Sigui (M,g) varietat de Riemann i $d : M \times M \to \mathbb{R}$ la funció distància donada per l'ínfim de les longituds de les corbes C^1 a trossos que uneixen dos punts, llavors

a) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ (desigualtat triangular),

b) $d(p,q) = d(q,r)$,

c) $d(p,q) \geq 0$ i $d(p,q) = 0$ si i només si $p = q$.

Aleshores, amb aquesta distància, (M,d) és un espai mètric.

Demostració. Les propietats a), b) i que $d(p,q) \geq 0$ són conseqüència directa de les propietats de l'ínfim. Que $p = q$ implica que $d(p,q) = 0$ també. Falta veure que si $d(p,q) = 0$ llavors $p = q$. Suposem que $p \neq q$ considerem una bola normal B_p de radi $r > 0$ al voltant de p i que no conté q. Com que la distància entre p i q és zero ha d'haver-hi una corba c que els uneix amb longitud menor que r. Però el segment dins B_p d'aquesta corba ja té longitud més gran o igual a r. Contradicció. □

Observació. Si hi ha una geodèsica minimitzant γ que uneix p i q (cosa que no passa necessàriament) llavors $d(p,q)$ és igual a la longitud de γ.

Exercici. Donar M i $p, q \in M$ de manera que no existeix geodèsica minimitzant entre p i q.

Propietat. La topologia de M coincideix amb la topologia d'espai mètric.

Demostració. Per ser l'exponencial $\exp_p$ difeomorfisme per un cert entorn obert del $0 \in T_pM$ per r prou petit la bola mètrica de radi r al voltant de p coincideix amb la bola normal ja que aquí els radis minimitzen la distància a p. Llavors les topologies coincideixen ja que tota bola normal conté una bola geodèsica i viceversa. □

Propietat. Llavors la funció $p \mapsto d(p, p_0)$ és contínua en la topologia de M, ja que ho és en la topologia mètrica.

Demostració. Per a tot $\epsilon > 0$ si $d(x, x_0) < \delta = \epsilon$ tenim $d(x_0, p_0) \leq d(x_0, x) + d(x, p_0)$ llavors $|d(x, p_0) - d(x_0, p_0)| \leq d(x, x_0) < \epsilon$. Llavors $f(x) = d(x, p_0)$ és contínua. □

Exercici. ([dC92, ex. 7.1]) Siguin M, N varietats de Riemann i $i : M \subset N$ immersió isomètrica. Provar que pot ser que $d_M > d_N$.

Per exemple $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ amb la mètrica induïda. La distància d_{S^2} entre dos punts d'un cercle màxim a S^2 és més gran que la distància $d_{\mathbb{R}^3}$ a $\mathbb{R}^3$.

5.2 *Teorema de Hopf-Rinow* Tenim un dels teoremes més importants del curs.

Teorema (Hopf-Rinow)**.** *Sigui M varietat de Riemann i $p \in M$. Les següents afirmacions són equivalents*

a) $\exp_p$ *està definida per a tot $v \in T_pM$*

b) Els tancats i fitats de M són compactes

c) M és completa com a espai mètric

d) M és geodèsicament completa

e) Existeix una successió de compactes $K_n \subset M, K_n \subset K_{n+1}$ amb $\cup_n K_n = M$ tals que si $q_n \notin K_n$ llavors $d(p, q_n) \to \infty$.

I qualsevol d'aquestes afirmacions implica que

f) Per a qualsevol $q \in M$ existeix una geodèsica γ que uneix p i q i amb $d(p,q) =$ longitud de la corba γ (geodèsica minimitzant).

Tenim un parell de conseqüències interessants d'aquest teorema

a) Si M és compacta llavors M és mètricament completa i per tant geodèsicament completa.

b) Tota subvarietat tancada d'una varietat de Riemann completa és completa amb la mètrica induïda. En particular, les subvarietats tancades de l'espai euclidià són completes. I també per subvarietats definides com antiimatge de punts regulars.

Observació. Compte que que encara no considerem les varietats amb vora!

Abans de fer la demostració recordem un parell de propietats importants:

Proposició.

1. *Si $p, q \in M$ i S esfera de radi δ amb centre p en (M, d). Per un δ prou petit existeix $p_0 \in S$ tal que*
$$d(p, p_0) + d(p_0, q) = d(p, q). \tag{24}$$

2. *Si una corba diferenciable a trossos $\gamma : [a, b] \to M$ amb paràmetre proporcional a la longitud d'arc té longitud menor o igual a la longitud de qualsevol altra corba diferenciable a trossos que uneix $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ llavors γ és geodèsica. En particular γ és regular.*

Demostració.

1. Per δ prou petit tenim, per ser $\exp_p$ difeomorfisme en un entorn de 0, que $S = \exp_p(\partial B_\delta(0))$ on $B_\delta(0)$ la bola euclidiana de radi δ a T_pM al voltant del 0. Per ser S compacte i d contínua existeix $p_0 \in S$ tal que $d(p_0, q) = d(S, q)$ (que és el mínim de les distàncies de q als punts de S). Sigui $\gamma : [a, b] \to M$ una corba de $p = \gamma(a)$ a $q = \gamma(b)$ i fem que $\delta < d(p, q)$, llavors γ talla S en un punt $\gamma(t)$. Tenim
$$L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,t]}) + L(\gamma|_{[t,b]}) \geq d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) \geq d(p, p_0) + d(p_0, q).$$
Llavors $d(p, q) \geq d(p, p_0) + d(p_0, q)$. Fent servir la desigualtat triangular veiem que
$$d(p, p_0) + d(p_0, q) = d(p, q).$$

2. Sigui $t \in [a, b]$ i W entorn totalment normal de $\gamma(t)$ (és a dir, és $\exp_p : W \to M$ és difeomorfisme sobre la imatge per a tot $p \in W$, sabem que existeixen). Hi ha un entorn tancat $I \subset [a, b]$ amb interior no buit de manera que $\gamma(I) \subset W$. La restricció de γ a I és una corba minimitzant en uneix entorn normal. Per estar parametritzada a velocitat constant ha de ser un arc de geodèsica radial. Llavors γ és geodèsica a t.

□

Demostració. (del Teorema de Hopf-Rinow).
• a) ⇒ f).

Suposem r la distància de p a q, sigui $B = B_\delta(p)$ bola normal (imatge difeomorfa per $\exp_p$ de $B_\delta(0) \subset T_pM$) i S l'esfera frontera de B. La funció $f : S \to \mathbb{R}$ donada per $f(x) = d(x, q)$ és contínua, per ser S compacte assoleix un mínim, sigui $x_0 \in S$ un punt on s'assoleix aquest mínim. Llavors $x_0 = \exp_p(\delta v)$ per $v \in T_pM$ unitari. Sigui la geodèsica unitària $\gamma(s) = \exp_p(sv)$, si provem que $\gamma(r) = q$ haurem acabat. Considerem el conjunt

$$A = \{s \in [0, r] : d(\gamma(s), q) = r - s\} \subset [0, r]. \tag{25}$$

És un conjunt no buit ja que $0 \in A$ i per la proposició anterior $\delta \in A$. El conjunt A és tancat gràcies a la continuïtat de d i γ. Suposem $s_0 \in A$ amb $s_0 < r$, veiem que existeix un δ' prou petit de manera que $s_0 + \delta' \in A$. Si provem això tindrem que $\sup A = r$ i per ser tancat $r \in A$ i aleshores $\gamma(r) = q$. Provem llavors que hi ha δ' amb $s_0 + \delta' \in A$. Sigui $B' = B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ bola normal i S' la seva frontera i $x_0' \in S$ un punt on $d(x, q)$ és mínim per $x \in S'$. El punt x_0' és el de la proposició d'abans i

$$d(\gamma(s_0), q)) = d(\gamma(s_0), x_0') + d(x_0', q) = \delta' + d(x_0', q).$$

Amb això i el fet que $d(\gamma(s_0), q) = r - s_0$ per ser $s_0 \in A$ tenim que

$$r - s_0 = \delta' + d(x_0', q). \tag{26}$$

D'aquesta igualtat i de la desigualtat triangular $d(p, q) \leq d(p, x_0') + d(x_0', q)$ resulta

$$d(p, x_0') \geq d(p, q) - d(x_0', q) = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'. \tag{27}$$

Per altra banda la corba en dos trossos que va de p a $\gamma(s_0)$ per γ i de $\gamma(s_0)$ a x_0' seguint el radi té longitud $s_0 + \delta'$ que per (27) és el valor més petit possible. Per tant, aquesta corba a trossos és minimitzant entre p i x_0', llavors per 2. de la proposició anterior és geodèsica i, per tant, és diferenciable. Deduïm que

$$\gamma(s_0 + \delta') = x_0'.$$

Això ens permet acabar, de la igualtat (26) tenim

$$r - s_0 = \delta' + d(x_0', q) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), q) \Rightarrow d(\gamma(s_0 + \delta'), q) = r - (s_0 + \delta')$$

i $s_0 + \delta' \in A$. Queda provat que a) implica f) ja que $\operatorname{long}(\gamma|_{[0,r]}) = d(p, q)$.

• a) ⇒ b). Sigui $A \subset M$ tancat i fitat. Llavors existeix una bola B de la mètrica d tal que $A \subset B$. Per ser certa la propietat f) tot punt de B és $\exp_p v$ per algun $v \in T_pM$ llavors $B \subset \exp_p \overline{B_r(0)}$. Per ser $\exp_p$ contínua i $\overline{B_r(0)}$ compacta resulta que $\exp_p \overline{B_r(0)}$ és compacte. Llavors A és tancat dins d'un compacte, per tant és compacte.

• b) ⇒ c). És suficient veure que tota successió de Cauchy és convergent. Sigui $\{p_n\}$ successió de Cauchy, qualsevol subconjunt de la successió és fitat, ja que és de Cauchy. La seva clausura llavors és tancada i fitada, per b) és compacta. Llavors conté una subsuccessió convergent i per ser $\{p_n\}$ de Cauchy és convergent.

• c) ⇒ d. Raonem per reducció a l'absurd. Suposem que no és geodèsicament completa. Llavors hi ha alguna geodèsica normalitzada $\gamma(s)$ definida només per $s < s_0$. Sigui $\{s_n\}$

successió convergent a s_0 amb $s_n < s_0$. Donat $\epsilon > 0$ existeix un n_0 tal que si $n, m > n_0$ llavors $|s_n - s_m| < \epsilon$. Llavors

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \epsilon.$$

Llavors $\{p_n = \gamma(s_n)\}$ és successió de Cauchy a M. Per ser la mètrica completa $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$. Sigui ara (W, δ) entorn totalment normal de p_0 (normal respecte cada punt de W i $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$ per cada $q \in W$). Sigui n_1 tal que si $n, m > n_1$ llavors $|s_n - s_m| < \delta$ i que $\gamma(s_n), \gamma(s_m)$ són de W. Existeix geodèsica única α que uneix $\gamma(s_n)$ amb $\gamma(s_m)$ amb longitud menor que δ. Les geodèsiques α i γ coincideixen allà on γ estigui definida. Com que $\exp_{\gamma(s_n)}$ és difeo en $B_\delta(0)$ i $W \subset \exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0))$, la geodèsica α estén γ més enllà de s_0.

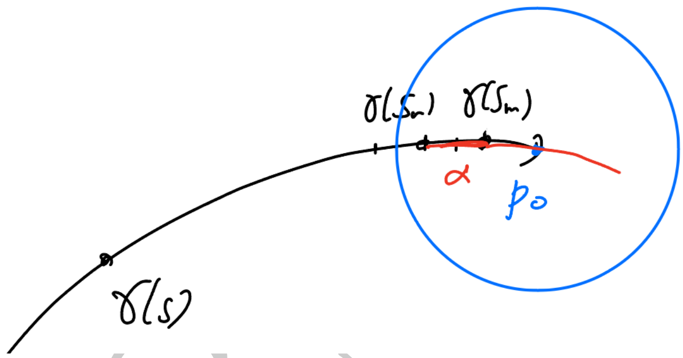


Figura 20: Extenem γ

- d) $\Rightarrow$ a). Geodèsicament completa és a) per a cada $p \in M$. La implicació és òbvia.
- b) $\iff$ e). Queda com exercici de topologia general. □

Exercici. Sigui $f : M_1 \to M_2$ difeomorfisme local amb M_2 varietat de Riemann. Provar que existeix una mètrica de Riemann en M_1 de manera que f és isometria local. Donar un exemple que mostri que encara que M_2 sigui completa M_1 no ho ha de ser necessàriament.
Definim a M_1 la mètrica $g_{M_2}(v, w) = g_{M_1}(df \cdot v, df \cdot w)$. Llavors f és isometria local.
Si considerem $M_1 = (-2\pi n, 2\pi n)$ per $n \in \mathbb{N}$, $M_2 = S^1 \subset \mathbb{C}$ amb les mètriques canòniques i $f(x) = e^{ix}$. Llavors f és isometria local, M_2 és completa però M_1 no ho és.

Exemple. Considerem el semiplà superior amb la mètrica $1/y\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{eucl}$. Provar que la longitud del segment 'vertical' $x = 0, \epsilon \leq y \leq 1$ amb $\epsilon > 0$ tendeix a 2 si $\epsilon > 0$. Concloure que el semiplà amb aquesta mètrica no és complet.

5.3 *Teorema de Hadamard.* Hem vist en un exercici que si M té curvatura no positiva en p llavors $C(p) = \emptyset$. Com a conseqüència tindrem un dels teoremes més importants del curs. Si afegim la condició de completitud podem dir una mica més.

Teorema (Hadamard)**.** *Sigui M varietat de Riemann completa, simplement connexa amb curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$ per a tot p de M i tot $\sigma \subset T_pM$. Llavors M és difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$. De fet $\exp_p : T_pM \to M$ és un difeomorfisme.*

Veurem dos resultats previs.

Propietat. Sigui M riemanniana completa amb curvatura seccional $K(p, \sigma) \leq 0$ per qualsevol punt p i tot 2-pla σ. Llavors el lloc conjugat $C(p) = \emptyset$ i l'exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ és difeomorfisme local.

Demostració. Considerem γ geodèsica que surt de p. Volem veure que els camps de Jacobi J al llarg de γ no idènticament nuls no s'anul·len enlloc més que quan $t = 0$. Sigui $f(t) = \langle J, J\rangle(t)$, tenim que $f(0) = 0$.
Per altra banda

$$f''(t) = \langle J, J\rangle'' = 2(\langle J', J'\rangle + \langle J'', J\rangle) = 2|J'|^2 - 2K(\gamma', J)|\gamma' \wedge J|^2 \geq 0$$

i la funció $f(t)$ és convexa. Llavors si $f(t_0) = 0$ per algun $t_0 > 0$ la funció ha de ser idènticament 0 a $[0, t_0]$ però hem quedat que J no és idènticament nul. Llavors $f(t) = \langle J, J\rangle(t) > 0$ per a tot $t > 0$ i p no té punts conjugats. Per tant $(d\exp_p)_v$ no té punts crítics i és invertible, llavors $\exp_p$ és difeomorfisme local.

$\square$

Observació. Pel següent resultat cal recordar que si una aplicació entre varietats satisfà la propietat d'aixecament de camins llavors l'aplicació és un recobriment[21] . La propietat diu que $f : X \to Y$ compleix la propietat d'aixecament de camins si per a tot camí continu α de p a q en Y per a tot $r \in f^{-1}(p)$ existeix un camí β a X amb $\beta(0) = r$ i $f \circ \beta = \alpha$.

Propietat. Sigui M varietat de Riemann completa $f : M \to N$ difeomorfisme local sobre N varietat de Riemann amb la propietat que $|df_p(v)| \geq |v|$. Llavors f és recobriment.

Demostració. Veure [dC92, pag. 150]. $\square$

Demostració. (*Hadamard*) Per ser M completa $\exp_p : T_pM$ està definida per a tot $v \in T_pM$ i és exhaustiva. Per la propietat anterior, per ser de curvatura seccional negativa, és difeomorfisme local. Podem fer el pull-back de la mètrica g de M, $g^* = (\exp_p)^*(g)$, d'aquesta manera $f = \exp_p$ és isometria local i $|df_v w|_g = |w|_{g^*}$. Aplicant la darrera propietat tenim que és un recobriment, però per ser M simplement connexa ha de ser un difeomorfisme. Hem acabat. $\square$

Exercici. Sigui $\pi : \tilde{M} \to M$ recobriment d'una varietat de Riemann M. Provar que es pot dotar $\tilde{M}$ d'una mètrica de Riemann de forma que π és isometria local. Provar que $\tilde{M}$ és completa si i només si M és completa.
Donat $p \in \tilde{M}$ i $u, v \in T_p\tilde{M}$ definim

$$g_{\tilde{M}}(v, w) = g_M(d\pi \cdot v, d\pi \cdot w).$$

Per ser π difeomorfisme local $g_{\tilde{M}}$ és diferenciable. És mètrica de Riemann i $\pi^* g_M = g_{\tilde{M}}$, és isometria local per definició.
Sigui $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ geodèsica amb $\gamma(0) = p$ i $\gamma'(0) = v$. Per ser recobriment existeix un únic aixecament $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{M}$ amb $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ i $\tilde{\gamma}(0) = \bar{p}$. Per ser π isometria local tenim que hi ha inversa local i és isometria, llavors $\tilde{\gamma}$ és geodèsica de $\tilde{M}$.
Si M és completa $\gamma(t)$ està definida per tot $t \in \mathbb{R}$ llavors $\tilde{\gamma}$ també. Com que totes les geodèsiques de $\tilde{M}$ es poden obtenir per aixecament (unicitat) llavors $\tilde{M}$ és completa. Recíprocament, si $\tilde{M}$ és completa tota geodèsica $\tilde{\gamma}(t)$ de $\tilde{M}$ està definida per tot $t \in \mathbb{R}$, llavors $\pi \circ \tilde{\gamma}$ està definida per a tot valor del paràmetre i és geodèsica.

[21] $\pi : \tilde{M} \to M$ és un recobriment (o revestiment) si π és exhaustiva, $\tilde{M}$ és connexa i per a cada $p \in M$ hi ha un entorn obert i connex de p a M de manera que $\pi^{-1}(U) = \cup_\alpha U_\alpha$ és unió d'oberts tals que $\pi|_{U_\alpha}$ és difeomorfisme

6 Exercicis

6.1 Llista 1. Varietats Diferenciables.

1. Sigui $S_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=\lambda\}$ on $\lambda \in \mathbb{R}$. Decidiu per a quins valors de λ el conjunt S_λ és una subvarietat de $\mathbb{R}^3$.

2. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions

$$x^2-y^2+u^2-v^2=1, \qquad x\,y+u\,v=0.$$

Demostreu que S és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^4$ i calculeu-ne la dimensió.

3. Demostreu que $\mathrm{GL}(n)=\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, el grup de les matrius $n\times n$ invertibles, és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n^2}$. Quina és la seva dimensió?

4. El grup $\mathrm{SL}(n)=\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ de les matrius $n\times n$ de determinant 1 és el nucli del morfisme de grups

$$\begin{aligned} \det\colon \mathrm{GL}(n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto |A| = \det A \end{aligned}$$

Comproveu que el morfisme det és una submersió en tots els punts de $\det^{-1}(1)$ i deduïu d'aquí que $\mathrm{SL}(n)$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimensió n^2-1.

Indicació: Comproveu que, fixat un punt $A\in\mathrm{SL}(n)$, la diferencial de det *en A està donada per*

$$D\det(A)\cdot B = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\det(A+sB) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}|A|\,\det(I+sBA^{-1}) = \mathrm{tr}(BA^{-1}).$$

5. Demostreu que el grup ortogonal $\mathrm{O}(n)=\{A\in\mathrm{GL}(n)\mid A\cdot A^t=I\}$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimensió $\frac{n(n-1)}{2}$.

Indicació: Sigui M_n l'espai de les matrius $n\times n$ i considereu l'aplicació

$$\begin{aligned} F\colon M_n &\longrightarrow \mathrm{Sim}(n) \\ A &\longmapsto A\cdot A^t \end{aligned}$$

on $\mathrm{Sim}(n)=\{C\in M_n\mid C^t=C\}$ és l'espai de les matrius simètriques. Comproveu que $\mathrm{Sim}(n)$ és un espai vectorial de dimensió $\frac{n(n+1)}{2}$ i que la diferencial de F en un punt $A\in\mathrm{O}(n)$ està donada per

$$DF(A)\cdot B = BA^{-1}+(BA^{-1})^t.$$

6. Un **grup de Lie** és un grup G dotat d'una estructura de varietat diferenciable respecte la qual les operacions de grup (multiplicació i inversió) són aplicacions diferenciables. Demostreu que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, són grups de Lie.

7. Comproveu que $\mathcal{A}=\{(\mathbb{R},x^3)\}$ és un atles diferenciable sobre $\mathbb{R}$. Demostreu que l'estructura de varietat diferenciable sobre $\mathbb{R}$ que defineix és isomorfa a la canònica.

8. Demostreu que tota varietat diferenciable de dimensió n admet un atles $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha)=\mathbb{R}^n$.

9. Doneu una demostració de la següent versió feble del teorema de Whitney: tota varietat diferenciable compacta M és difeomorfa a una subvarietat de $\mathbb{R}^n$ per a un n prou gran.

10. Sigui $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ l'esfera unitat de $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Considerem els oberts $U_1 = \mathbb{S}^n \backslash \{(0, ..., 0, 1)\}$ i $U_2 = \mathbb{S}^n \backslash \{(1, ..., 0, 0)\}$ i les projeccions estereogràfiques $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$, on $i = 1, 2$, definides per

$$\varphi_1(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, ..., x_n), \quad \varphi_2(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_1}(x_2, ..., x_{n+1}).$$

Comproveu que les cartes (U_1, φ_1) i (U_2, φ_2) defineixen un atles diferenciable de $\mathbb{S}^n$. Deduïu que $\mathbb{S}^n$ és una varietat diferenciable de dimensió n amb l'estructura definida per aquest atles.

b) Demostreu que aquesta estructura diferenciable coincideix amb l'estructura diferenciable de $\mathbb{S}^n$ com subvarietat de $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Sigui $\psi \colon (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to U \subset \mathbb{S}^2$ la parametrització d'un obert de $\mathbb{S}^2$ donada per

$$\psi(u, v) = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u).$$

Demostreu que ψ és un homeomorfisme i que (U, ψ^{-1}) és una carta local de $\mathbb{S}^2$ compatible amb l'estructura definida a l'apartat a) (en el cas $n = 2$).

d) Sigui $\phi : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^3$ definida per

$$\phi(u, v, w) = (\cos u \cos v \cos w, \cos u \cos v \sin w, \cos u \sin v, \sin u).$$

Demostreu que la imatge de ϕ és un obert V de $\mathbb{S}^3$ i que ϕ és un homeomorfisme sobre V. Comproveu que (V, ϕ^{-1}) és compatible amb l'atles de l'apartat a) (per $n = 3$).

11. Es considera a $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ la relació d'equivalència definida per

$$z_1 \sim z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 = \lambda \cdot z_2 \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Sigui $\mathbb{C}P^n$ l'espai quocient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ per aquesta relació d'equivalència. Demostreu que $\mathbb{C}P^n$ admet una estructura de varietat diferenciable exhibint un atles de l'estructura.

12. Si identifiquem $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ aleshores $S^2 = \{(x, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |x|^2 + t^2 = 1\}$. Demostreu que l'aplicació $\tilde{F} \colon \mathbb{C}^2 - \{0\} \to S^2$ donada per

$$\tilde{F}(z, w) = \frac{(2z\bar{w}, |w|^2 - |z|^2)}{|z|^2 + |w|^2}$$

indueix un difeomorfisme $F \colon \mathbb{C}P^1 \to S^2$. *Indicació:* l'aplicació inversa de F està donada per $F^{-1}(x, t) = [x : t + 1]$.

Doneu una expressió en coordenades de l'aplicació lineal tangent $T_pF \colon T_p\mathbb{C}P^1 \to T_{F(p)}S^2$ en un punt $p \in \mathbb{C}P^1$ qualsevol.

13. Sigui M una varietat diferenciable connexa. Demostreu que per a tot parell de punts $p, q \in M$ existeix una corba diferenciable $\gamma \colon [0, 1] \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$.

Indicació: demostreu primer que existeix una tal corba que és diferenciable a trossos.

14. Sigui $f \colon M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats. Suposem que $T_pf = 0$ per a tot $p \in M$. Demostreu que si M és connexa llavors f és constant.

15. Considerem les cartes locals (U, ψ_1^{-1}) i (U, ψ_2^{-1}) de l'esfera unitat S^2 de $\mathbb{R}^3$ on $U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ i

$$\psi_1(u, v) = \big(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\big), \qquad \psi_2(\phi, \theta) = (\cos\phi, \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta).$$

Determineu les matrius de canvi entre les bases (locals) de camps vectorials $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ i $\{\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$.

16. Es consideren les cartes $\varphi, \psi \colon M \to \mathbb{R}^2$ de la varietat $M = \mathbb{R}^2$ donades per $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ i $\psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_1 + \sinh y_2)$. Determineu la relació entre les bases de camps vectorials $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ i $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$ determinades per les cartes anteriors. (Observeu que $\frac{\partial}{\partial y_1} \neq \frac{\partial}{\partial x_1}$ malgrat que $y_1 = x_1$.)

17. Donades dues constants $a, b > 0$, considerem l'aplicacio $F \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$F(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = ((a + b\cos\theta)\cos\phi, (a + b\cos\theta)\sin\phi, b\sin\theta).$$

a) Demostreu que si $a \leq b$ llavors F no és immersió.

b) Demostreu que si $a > b$ aleshores F és un *embedding*.

18. Demostreu que l'aplicació diferenciable $F \colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ definida per

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2,\ xy\,, xz\,, yz)$$

indueix un embedding diferenciable de $\mathbb{R}P^2$ dins $\mathbb{R}^4$.

19. Sigui $F \colon \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^3$ definida per

$$F([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) = [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]$$

Demostreu que F és un *embedding* diferenciable.

20. Sigui M el subconjunt de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ format pels parells de vectors (u, v) tals que la dimensió del subespai generat per $\{u, v\}$ és 1.

a) Demostreu que M és una subvarietat diferenciable de dimensió 4 de $\mathbb{R}^6$ i trobeu un atles de M.

b) Determineu l'espai tangent a M en un punt (u, v) tal que $u_1 \neq 0$.

c) Decidiu si es pot expressar M com el conjunt de les solucions de dues equacions definides en un obert de $\mathbb{R}^6$.

d) Sigui $F \colon M \to \mathbb{R}P^2$ definida per $F(u, v) = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$. Demostreu que F és diferenciable i trobeu la matriu de $T_{(u,v)}F$ per a $u = v = e_1$, en bases convenients.

6.2 Llista 2. Camps Vectorials i Varietats de Riemann.

1. Considerem els camps vectorials diferenciables definits a $\mathbb{R}^2$ per

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \big(x - \frac{1}{2}\big)\frac{\partial}{\partial y} \qquad Z_2 = Z_1 + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Determineu els seus grups uniparamètrics associats i decidiu si són o no complets.

2. Sigui X el camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$X = (1 + z - x^2)\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y} - x(1+z)\frac{\partial}{\partial z}$$

i) Comproveu que X és tangent a l'esfera unitat S^2 de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que la restricció $Y = X|_{S^2}$ de X a S^2 és un camp vectorial complet amb un únic punt singular.

ii) Determineu el flux de Y fent servir les coordenades estereogràfiques

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{1+z}(x, y).$$

3. Calculeu el claudator de Lie, $[X, Y]$, dels camps X, Y de $\mathbb{R}^3$ següents

$$X = z^2\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = e^x\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

4. Es considera l'aplicació $\phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ així com la funció h i la forma diferencial α donades per

$$h(x, y) = x^2 y \qquad \alpha = (2x - y)\, dx + (x - y^2)\, dy$$

Comproveu que es compleix $\phi^* dh = d(h \circ \phi)$ i que $d(\phi^*\alpha) = \phi^* d\alpha$.

5. Sigui M una varietat orientable i sigui Γ un grup que actua lliurement i pròpiament discontinuament sobre M. Demostreu que la varietat quocient M/Γ és orientable si i només si cada element de Γ conserva l'orientació.

6. Demostreu que l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm \mathrm{Id}\}$ és orientable si i només si n és imparell.

7. Trobeu l'expressió local de la mètrica de l'esfera unitat $\mathbb{S}^2$ en les coordenades estereogràfiques respecte del pol nord.

8. Sigui $M = N/\Gamma$ la varietat quocient d'una varietat de Riemann N per l'acció d'un grup Γ que actua lliurement i pròpiament discontinuament. Demostreu que si Γ és un grup d'isometries respecte una mètrica g_N de N aleshores hi ha una única mètrica de Riemann g_M sobre M respecte la qual la projecció natural $\pi\colon N \to M$ és una isometria local.

9. Es considera el semipla de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ amb la mètrica hiperbòlica $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

a) Calculeu la longitud de les corbes $\alpha(t) = (x_0, t)$, on $0 < a \le t \le b$, i $\beta(t) = (t, y_0)$, on $a \le t \le b$.

b) Siguin $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tals que $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$. Calculeu la longitud de la corba $\gamma(\theta) = (x_0 + R\cos\theta, R\sin\theta)$ on $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

c) Calculeu el cosinus de l'angle que formen les corbes α i γ en els punt de tall.

10. Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió canònica ∇ de $\mathbb{R}^3$ en coordenades esfèriques.

11. Determineu la relació entre els símbols de Christoffel d'una mateixa connexió ∇ quan es refereixen a coordenades locals diferents.

12. Sigui ∇ la connexió canònica de $\mathbb{R}^n$ i considerem un difeomorfisme $f\colon U \to V$, on U i V són oberts connexos de $\mathbb{R}^n$. Demostreu que f preserva la connexio ∇, és a dir que es compleix $f_*\nabla_X Y = \nabla_{f_*X} f_*Y$, si i només si f és la restricció d'una (única) transformació afí de $\mathbb{R}^n$, és a dir la composició d'un isomorfisme lineal i d'una translació.

13. Suposem que un sistema de coordenades en una varietat riemanniana és ortogonal, és a dir que es compleix $g_{ij} = 0$ si $i \ne j$. Comproveu que els símbols de Christoffel en aquestes coordenades són $\Gamma_{ij}^k = 0$ si els tres índexs i, j, k són diferents, i

$$\Gamma_{ik}^i = \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}, \quad \forall\, i, k \qquad\qquad \Gamma_{kk}^i = \frac{-1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}, \quad \forall\, i \ne k.$$

14. Determineu el transport paral.lel, en $\mathbb{H}^2$, al llarg de les corbes $\alpha(t) = (t, 1)$ i $\beta(t) = (0, e^t)$.

15. Es considera la corba c de l'esfera unitat $\mathbb{S}^2$ definida per

$$c(t) = (\cos t \cos\alpha, \sin t \cos\alpha, \sin\alpha).$$

Determineu el transport paral·lel $v(t)$ del vector $c'(0)$ al llarg de $c(t)$. Determineu α per tal que es compleixi $v(2\pi) = v(0)$.

16. Siguin C_1 i C_2 dos meridians de l'esfera unitat S^2 formant un angle α. Es considera el camí c sobre S^2 que, sortint del pol nord, recorre C_1 fins l'equador, continua per l'equador fins trobar C_2 i finalment torna al pol nord al llarg d'aquest segon meridià. Sigui v un vector tangent a S^2 en el pol nord i denotem per w el seu traslladat paral·lel al llarg de c. Quin angle formen v i w?

17. Es considera $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\pm \mathrm{I}\}$ amb la mètrica induïda per la mètrica de l'esfera unitat S^2. Demostreu que les geodèsiques de $\mathbb{R}P^2$ són totes tancades i que dues d'elles es tallen en un únic punt. Quina és la seva longitud?

18. Demostreu que el semiespai de Poincaré $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ amb la mètrica

$$g_H = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

i $M = \mathbb{R}^3$ amb la mètrica $g_M = e^{-2w}(du^2 + dv^2) + dw^2$ són varietats riemannianes isomètriques. (*Indicació:* Cerqueu una isometria de la forma $F(u, v, w) = (x(u), y(v), z(w))$.)

19. Demostreu que les restriccions al semipla superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ de les homografies

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

on $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc > 0$, són isometries del pla hiperbòlic.

20. Sabem que les corbes $\gamma(t) = (x, ye^t)$ són geodèsiques del pla hiperbòlic. A partir d'aquí i utilitzant l'exercici 19, determineu totes les geodèsiques de $\mathbb{H}^2$.

21. Demostreu que si S és una superfície amb una mètrica riemanniana i E, F, G són els coeficients de la mètrica en un sistema de coordenades (u, v) llavors els corresponents símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita satisfan la fórmula

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}$$

22. Es considera una corba plana $\gamma(u) = (r(u), z(u))$ parametritzada per l'arc, i.e. $\|\dot\gamma\| = 1$, i tal que $r > 0$. Aquesta corba genera una superfície de revolució S de $\mathbb{R}^3$ que es pot parametritzar per $\Phi(u, \theta)(r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u))$. En aquestes coordenades la mètrica s'escriu

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)d\theta^2.$$

a) Comproveu, utilitzant l'equació variacional de les geodèsiques

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n,$$

que l'equació de les geodèsiques de S, en aquestes coordenades, és

$$\begin{cases} \ddot u - rr'\dot\theta^2 &= 0 \\ \ddot\theta + \dfrac{2rr'}{r^2}(\dot\theta\dot u) &= 0 \end{cases}$$

b) Deduïu que els meridians $t \mapsto (u(t), \theta_0)$ (amb $u(t) = at + b$) i els paral·lels $t \mapsto (u_0, \theta(t))$ pels que $r'(u_0) = 0$ (i amb $\theta(t) = at + b$) són geodèsiques.

c) Sigui $\beta = \beta(t)$ l'angle que forma una geodèsica $\gamma(u) = (r(u), z(u))$ amb els paral·lels de la superfície de revolució. Comproveu que es compleixen les igualtats

$$\cos\beta = r\dot\theta \qquad\qquad \frac{d}{dt}\big(r^2\dot\theta\big) = 0$$

i deduïu d'aquí la *relació de Clairaut*

$$r \cdot \cos\beta(t) = \text{constant}.$$

23. En una varietat de Riemann (M, g), l'aplicació $\tau\colon \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$ definida per $\tau(X) = g(X, \cdot)$ és un isomorfisme. Llavors es defineix el *gradient* d'una funció $h \in \mathcal{C}^\infty$ per $\operatorname{grad} h = \tau^{-1}(dh)$, és a dir que $\operatorname{grad} h$ és el camp vectorial caracteritzat per

$$dh(Y) = g(\operatorname{grad} h, Y).$$

Determineu l'expressió en coordenades del gradient d'una funció h en els següents cassos:

a) $M = \mathbb{R}^n$ amb les coordenades cartesianes i $M = \mathbb{R}^2$ amb les coordenades polars.

b) $M = \mathbb{S}^2$ amb les coordenades esfèriques.

c) M és el pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ amb les coordenades (x, y).

24. Siguin g i $\tilde{g}$ dues mètriques de Riemann sobre M conformement equivalents, és a dir que $\tilde{g} = \rho^2 g$ per a una certa funció no nul·la ρ. Demostreu que les corresponents connexions de Levi-Civita ∇ i $\tilde{\nabla}$ compleixen

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)U,$$

on $\omega = d(\log \rho)$ i $U = \operatorname{grad} \log \rho$. Com aplicació, comproveu els càlculs dels símbols de Christoffel del pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2$.

25. Es consideren els camps vectorials Z_1 i Z_2 de $\mathbb{R}^2$ definits per

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y} \qquad Z_2 = Z_1 + \frac{\partial}{\partial y}.$$

a) Demostreu que hi ha una única connexió ∇ a $\mathbb{R}^2$ respecte la qual els camps Z_1 i Z_2 són paral·lels.

b) Demostreu que les mètriques de Riemann de $\mathbb{R}^2$ que tenen ∇ per connexió de Levi-Civita són les mètriques amb coeficients

$$g_{11} = kx^2 - 2\alpha x + \beta, \qquad g_{12} = g_{21} = -kx + \alpha, \qquad g_{22} = k,$$

on $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ i es compleix $k > 0$ i $\alpha^2 < \beta k$.

6.3 Llista 3. Curvatura i geodèsiques.

1. Calculeu el tensor de curvatura de $\mathbb{S}^3$ amb la mètrica induïda per $\mathbb{R}^4$.

2. Considereu $\mathbb{R}^2$ dotat de la mètrica $g = \frac{1}{1+x^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Determineu el tensor de curvatura associat a aquesta mètrica. Pot ser $(\mathbb{R}^2, g)$ isomètric al pla euclidià?

3. Proveu que $\mathbb{H}^n$ amb la mètrica $g = x_n^{-2} \sum_i dx_i^2$ té curvatura seccional constant igual a -1.

4. Trobeu les curvatures seccionals de la mètrica

$$g = \frac{4}{(1 + K\|x\|^2)^2}(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

definida a tot $\mathbb{R}^n$ si $K \geq 0$ i a la bola de radi $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ si $K < 0$. Noteu que aquesta és la mètrica d'una esfera expressada en coordenades estereogrà fiques. Quin radi té aquesta esfera?

5. Donada una funció $\rho > 0$ definida en un obert de $\mathbb{R}^2$, considerem la mètrica $g = \rho(x, y)^2(dx^2 + dy^2)$ en aquest obert. Proveu que la curvatura d'aquesta superfície és $K = -\frac{1}{\rho^2}\Delta \log \rho$.

6. Sigui g el camp de formes bilineals sobre $\mathbb{R}^2$ amb els coeficients següents respecte la base canònica $g_{11} = 1 + 6x^2 + 18x^4$, $g_{21} = g_{12} = 1 + 6x^2$, $g_{22} = 2$.

(a) Demostreu que g defineix una mètrica riemanniana a $\mathbb{R}^2$.

(b) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita associada a g.

(c) Demostreu que les corbes $\alpha(t) = (t, -t^3)$ i $\beta(t) = (-t, t + t^3)$ son geodèsiques de $(\mathbb{R}^2, g)$.

(d) Calculeu una base de camps paral·lels respecte a la connexió de Levi-Civita asociada a g.

7. Sigui M una varietat amb una connexió ∇. Demostreu que una corba c sobre M admet una reparametrització que és una geodèsica si i només si els vectors $\frac{Dc'}{dt}$ i c' son linealment dependents. Demostreu que les geodèsiques del semipla de Poincaré són les rectes $x = cte$ i els arcs de circumferència ortogonals a $y = 0$.

8. Considerem $\mathbb{R}^3$ dotat de la mètrica

$$g = (a(x) + b(y))(dx^2 + dy^2) + dz^2$$

on a i b són funcions positives. Trobeu els símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita corresponent. Trobeu l'equació de les geodèsiques.

9. Sigui $h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció diferenciable. Sigui g la mètrica de $\mathbb{R}^3$ donada per

$$g = (1 + h(x)^2)\mathrm{d}x^2 + 2h(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

(a) Calculeu els símbols de Christoffel i la curvatura de la connexió de Levi-Civita ∇ associada a g.

(b) Calculeu els camps paral·lels de $(\mathbb{R}^3, \nabla)$.

(c) Demostreu que si $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tal que $\frac{dH}{dx} = h$, llavors per a tot $a \in \mathbb{R}$, les corbes $\gamma(t) = (t, a - H(t), t)$ són geodèsiques.

(d) És $(\mathbb{R}^3, g)$ localment isomètric a $(\mathbb{R}^3, \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$?

10. Considerem la funció $g \in C^\infty(TM)$ definida per $g(x, v) := g_x(v, v)$ (g denota alhora la mètrica i una funció en el fibrat tangent). Si $x(t)$ és una corba a M i $\widetilde{x}(t) = (x(t), x'(t))$, proveu que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial v^i}\right)_{\widetilde{x}} - \left(\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)_{\widetilde{x}} = 2g(\frac{Dx'}{dt}, \frac{\partial}{\partial x^i})$$

on $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n)$ són coordenades a TM corresponents a una carta local $(x^1, \ldots, x^n)$ de M.

11. Considereu una superfície amb mètrica

$$g(u, v) = \varphi(v)\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \phi(u)\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v.$$

Trobeu les equacions de les geodèsiques.

12. Descriviu l'aplicació exponencial des d'un punt de S^n. Feu el mateix per al tor $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ i per al cilindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (dotats de la mètrica producte).

13. Sigui $\alpha = \alpha(t)$ una corba parametritzada per l'arc en una varietat de Riemann M. Es defineix la seva *curvatura geodèsica* k_g com la norma del vector $D\alpha'(t)/dt$. Calculeu la curvatura geodèsica de la intersecció d'una recta del pla amb el semiplà de Poincaré.

14. Siguin $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ coordenades normals geodèsiques centrades en un punt p. Proveu que els símbols de Christoffel s'anul·len a p. Proveu que la curvatura geodèsica en $p = \alpha(0)$ d'una corba $\alpha(t)$ coincideix amb la curvatura a $\mathbb{R}^n$ de $\varphi \circ \alpha(t)$ en $t = 0$.

15. Proveu que respecte un sistema de coordenades geodèsiques $(x^1, \ldots, x^n)$ al voltant de $p \in M$ els coeficients de la mètrica compleixen

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$$

16. Sigui f una isometria d'una varietat de Riemann connexa M tal que $f(x_0) = x_0$ i $df_{x_0} = id$ per un cert $x_0 \in M$. Proveu que $f(x) = x$ per tot $x \in M$.

17. Sigui $\sigma : M \longrightarrow M$ una isometria d'una varietat de Riemann completa. Sigui $N = \{x \in M | \sigma(x) = x\}$. Donada un corba $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to N \subset M$, proveu que $\exp_{c(0)}(c'(0)) \in N$.

18. Sigui M una varietat de Riemann i $p \in M$. Proveu que la funció $d(p, \cdot)$ no és diferenciable en p. Trobeu exemples on $d(p, \cdot)$ tampoc sigui diferenciable a $M \setminus \{p\}$.

19. Sigui $\emptyset \neq U \subset M$ un obert propi d'una varietat de Riemann (M, g) connexa. Proveu que (U, g) no és completa.

20. Sigui M una varietat riemanniana. Diem que una corba $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ és *divergent* si per tot compacte $K \subset M$, existeix $t_0 > 0$ tal que $\gamma(t) \notin K$ per tot $t > t_0$. Demostreu que M és completa si i només si per tota corba γ divergent la següent integral impròpia és divergent

$$\int_0^\infty \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t.$$

21. Diem que una geodèsica $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$ és un *raig* començant a $\gamma(0)$ si minimitza la distància entre $\gamma(0)$ i $\gamma(s)$ per tot s. Si M és completa, no compacta i $p \in M$ proveu que hi ha un raig començant en p.

22. Una varietat de Riemann M s'anomena homogènia si per tot parell $p, q \in M$ existeix una isometria $f \colon M \to M$ amb $f(p) = q$. Demostreu que tota varietat de Riemann homogènia és completa.

23. Un espai simètric és una varietat de Riemann M tal que per tot punt p existeix una isometria $\sigma : M \to M$ amb $\sigma(p) = p$ i $\mathrm{d}\sigma = -\mathrm{id}$. Proveu que en aquest cas M és completa. Demostreu que tot espai simètric és homogeni (en el sentit de l'exercici anterior).

24. Si $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ és un recobriment riemannià (recobriment i isometria local) i M és completa llavors $\widetilde{M}$ és completa.

25. Sigui $J(t)$ un camp de Jacobi definit al llarg de la geodèsica $\gamma : I \to M$. Construïu $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ tal que $J = \frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0} = (df)\frac{\partial}{\partial s}$.

26. En una varietat de Riemann M, donats dos vectors $u, v \in T_pM$ ortonormals i $r > 0$, proveu que la longitud $L(r)$ de la corba $c_r(\theta) = \exp_p(r \cos\theta u + r \sin\theta v)$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ compleix

$$L(r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K_p(\langle u, v\rangle) r^3 + O(r^4).$$

27. Sigui M una superfície completa de curvatura constant K. Donada una corba $c(s)$ parametritzada per l'arc, considerem un camp $N(s)$ definit al llarg de c amb $g(N(s), c'(s)) = 0$ i $g(N(s), N(s)) \equiv 1$. Donat $t \in \mathbb{R}$, determineu la longitud de les corbes $c_t(s) = \exp_{c(s)} tN(s)$.

28. Donats dos camps de Jacobi $J_1(t), J_2(t)$ definits al llarg d'una geodèsica $\gamma(t)$ i tals que $J_1(0) = J_2(0) = 0$ demostreu

$$g(J_1(t), J_2(t)) = g(J_1'(0), J_2'(0))t^2 - \frac{1}{3} R(\gamma'(0), J_1'(0), J_2'(0), \gamma'(0))t^4 + O(t^5).$$

Deduïu que respecte un sistema de coordenades geodèsiques $(x_1, \ldots, x_n)$ al voltant de p tenim

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{rs} R_{irsj}(0) x_r x_s + O(|x|^3),$$

on $R_{irsj} = g(R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_r})\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.
Deduïu, usant $\det(A + \mathrm{id}) = 1 + \mathrm{tr}A + O(\sum_i A_{i,i}^2)$, que

$$\det(g_{ij}(x)) = 1 - \frac{1}{3}\mathrm{Ric}(x, x) + O(|x|^3).$$

29. Demostreu que la curvatura escalar $S(p)$ d'una varietat de Riemann M^n en un punt p ve donada per la integral

$$S(p) = \frac{n}{\mathrm{vol}(\mathrm{S}^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \mathrm{Ric}(x,x)dx$$

on S^{n-1} denota l'esfera formada pels vectors unitaris de T_pM. Deduïu de l'exercici anterior que el volum d'una petita bola geodèsica al voltant de p és

$$\mathrm{vol}(B_p(r)) = \frac{\mathrm{vol}(\mathrm{S}^{n-1})r^n}{n}\left(1 - \frac{1}{6(n+2)}S(p)r^2 + O(r^3)\right).$$

30. Sigui (M,g) una varietat de Riemann i ∇ la seva connexió de Levi-Civita. Una *referència mòbil* és una base local de camps $e_1,\ldots,e_n$ definits en un obert U de M. Denotem per $\theta^1,\ldots,\theta^n \in \Omega^1(U)$ la base dual de 1-formes diferencials, i.e. $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$.
Es defineixen les *formes de connexió* de ∇ relatives a la base $e_1,\ldots,e_n$ com les 1-formes $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$ determinades per

$$\nabla_X e_i = \sum \omega_i^j(X)e_j$$

a) Demostreu que si $e_1,\ldots,e_n$ són ortonormals llavors $\omega_i^j = -\omega_j^i$.

b) Demostreu que es compleix

$$d\theta^i - \sum_j \theta^j \wedge \omega_j^i = 0 \tag{28}$$

c) Es considera el cas particular de $M = \mathbb{R}^2$ amb una mètrica de Riemann g que, en coordenades polars $(r,\alpha) \in (0,\infty)\times(0,2\pi)$, s'escriu

$$g = dr^2 + \rho(r)^2\, d\alpha^2, \qquad \rho > 0.$$

Considerem la base ortonormal de camps $e_1 = \frac{\partial}{\partial r}, e_2 = \frac{1}{\rho(r)}\frac{\partial}{\partial\alpha}$. Determineu la seva base dual θ^1,θ^2 i calculeu les corresponents formes de connexió ω_i^j utilitzant la relació (28).

Calculeu $\nabla_{e_1}e_1$ i determineu a partir d'aquí l'aplicació exponencial $\exp_{(0,0)}$. Podem dir que aquesta varietat de Riemann és completa?

31. Seguint amb la notació de l'exercici 30, es defineixen les *formes de curvatura* de ∇ relatives a la base $e_1,\ldots,e_n$ com les 2-formes Ω_i^j determinades per

$$R(X,Y)e_i = \sum \Omega_i^j(X,Y)e_j$$

a) Demostreu que es compleix

$$d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{29}$$

b) Calculeu la curvatura de la mètrica g considerada a l'apartat c) de l'exercici 30 en els casos

$$\rho(r) = \frac{\sin(\mu r)}{\mu}, \qquad \rho(r) = \frac{\sinh(\mu r)}{\mu}$$

on μ és un nombre real positiu fixat.

7 Seminaris

7.1 Seminari 1. Grups de Lie.

Recordem que un **grup de Lie** és un grup G dotat d'una estructura de varietat diferenciable respecte la qual les operacions de grup (multiplicació i inversió) són aplicacions diferenciables. Denotem per $e \in G$ l'element neutre. Hem vist a problemes que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ i $\mathrm{O}(n)$ són grups de Lie.

Definició 1. Donat $x \in G$, definim la multiplicació per l'esquerra (i la multiplicació per la dreta) com les aplicacions

$$\begin{array}{rcl} L_x\colon G & \to & G \\ y & \mapsto & xy \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} R_x\colon G & \to & G \\ y & \mapsto & yx \end{array}$$

Definició 2. Un camp $X \in \mathcal{X}(M)$ és *invariant per l'esquerra* si $dL_g X = X$ per tot $g \in G$.

Exercici 1. Camps invariants i àlgebra de Lie

(i) Demostreu que L_g i R_g són difeomorfismes per tot $g \in G$.

(ii) Demostreu que el fibrat tangent d'un grup de Lie és trivial (equivalent, com a fibrat, a un producte $G \times \mathbb{R}^n$).

(iii) Demostreu que tot grup de Lie admet una mètrica de Riemann invariant per l'esquerra.

(iv) Sigui
$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{X}(G) \mid X \text{ es invariant per l'esquerra}\}.$$
Demostreu que hi ha un isomorfisme natural
$$\mathfrak{g} \cong T_e G$$

(v) Demostreu que si $X, Y \in \mathfrak{g}$ aleshores $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Definició 3. El parell $(\mathfrak{g}, [,])$ s'anomena *l'àlgebra de Lie de G*.

Definició 4. Un *grup uniparamètric* és un morfisme de grups $\phi\colon \mathbb{R} \to G$.

Exercici 2. Grups uniparamètrics.
Demostreu que per tot $v \in T_e G \cong \mathfrak{g}$ existeix un únic grup uniparamètric $\phi\colon \mathbb{R} \to G$ que compleix $\phi'(0) = v$.
Podeu fer servir les etapes següents.

(i) Per tot camp $X \in \mathfrak{g}$, considereu la corba integral $c(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ de X que compleix $c(0) = e$. Demostreu que $c(t + s) = c(t)c(s)$, per $s, t, s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (Indicació, considereu la corba $s \mapsto L_{c(t)}c(s)$).

(ii) Demostreu que la corba integral $c(t)$ està definida per tot $t \in \mathbb{R}$. En particular els camps de $\mathfrak{g}$ són complets.

Definició 5. L'*aplicació exponencial* de grups de Lie $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ està definida per $\exp(v) = \phi(1)$ on ϕ és el grup uniparamètric que compleix $\phi'(0) = v$.

Exercici 3. Propietats de l'exponencial de grups de Lie.
Demostreu:

(i) Per tot $v \in \mathfrak{g}$ i $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(tv)$.

(ii) Demostreu que $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ és diferenciable.

(Indicació: considereu el camp $Z \in \mathcal{X}(G \times \mathfrak{g})$ definit per $Z_{(g,X)} = (X_g, 0) \in T_gG \times T_X\mathfrak{g} \cong T_{(g,X)}(G \times \mathfrak{g})$. Sigui Ψ el flux d'aquest camp. Comproveu que l'exponencial és la projecció al primer factor de Ψ restringit a $\{e\} \times \mathfrak{g}$.)

(iii) L'aplicació diferencial $d\exp_0\colon T_0(T_eG) \to T_eG$ és la identitat.

(iv) L'exponencial $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ defineix un diffeomeorfisme entre un entorn de 0 a T_eG i un entorn de e a G.

Exercici 4. Grup de matrius $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(i) Demostreu que l'àlgebra de Lie de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ és l'espai vectorial de les matrius quadrades $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

(ii) Demostreu que el parèntesi de Lie de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ coincideix amb el commutador de matrius:

$$[A, B] = AB - BA$$

(Indicació: L'isomorfisme $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong T_e\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ fa correspondre la matriu (a_{ij}) al vector $\sum a_{ij}\partial_{x_{ij}}|_e$, on x_{ij} ón les coordenades de $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. El camp invariant esquerra corresponent és $\sum x_{ik}a_{kj}\partial_{x_{ij}}$).

(iii) Demostreu que l'exponencial de grups de Lie coincideix amb l'exponencial de matrius:

$$\exp(A) = \mathrm{Id} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

Exercici 5. Àlgebres de Lie de grups de matrius.

(i) Calculeu l'àlgebra de Lie de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. (Recordem que el diferencial del determinant a la identitat és la traça a $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$).

(ii) Calculeu l'àlgebra de Lie de $\mathrm{SO}(n)$. (Recordem $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \mid A^tA = \mathrm{Id}\}$).

(iii) Definim el següent grup de Lie:

$$\mathrm{SU}(n) = \{A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^tA = \mathrm{Id},\ \det(A) = 1\}.$$

Calculeu-ne l'àlgebra de Lie.

Exercici 6. Bonus track.
Demostreu les següents afirmacions:

(i) $\exp\colon \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ no és exhaustiva.

(ii) El grup de Lie $\mathrm{SU}(2)$ és diffeomeorf a l'esfera S^3.

7.2 Seminari 2. Models del pla hiperbòlic.

(I) **Model del semiplà**. En el model del semiplà $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ la mètrica s'expressa com

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Utilitzem la variable complexa $z = x + iy$, $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ i $ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{\mathrm{Im}(z)^2}$.

Exercici 7. Demostreu:

(i) Tota homografia $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ és una isometria de $\mathbb{H}^2$.

(ii) El grup d'isometries que preserven l'orientació satisfà

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$$

(iii) Utilitzeu els apartats anteriors i l'exercici 14 de la llista 2 per descriure les geodèsiques de $\mathbb{H}^2$.

(II) **Model del disc**.

En aquest model $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, la mètrica s'expressa com

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

En variable complexa: $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 1\}$ i $ds^2 = 4\frac{dz d\bar{z}}{(1-z\bar{z})^2}$.

Exercici 8. Considereu l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1$.

(i) Trobeu una homografia $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, que porti 0, 1, ∞ a 1, i, -1, respectivament.

(ii) Demostreu que l'homografia anterior és una isometria entre $\mathbb{H}^2$ i $\mathbb{D}^2$.

(iii) Descriviu les geodèsiques de $\mathbb{D}^2$.

(iv) Demostreu que el diferencial de longitud d'arc (o element de línia) d'un arc de circunferència de radi $\rho > 0$ i paràmetre angular $\theta \in (0, 2\pi)$ és

$$ds = \sinh(\rho) d\theta$$

(v) Quina és l'expressió de la mètrica en coordenades polars $\rho > 0$ i $\theta \in (0, 2\pi)$?

(III) **Model de l'hiperboloide**.

Considerem l'espai $\mathbb{R}^2_1$, amb el producte de Lorentz

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot (y_0, y_1, y_2) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

i el full superior de l'hiperboloide

$$H = \{x \in \mathbb{R}^2_1 \mid x \cdot x = -1,\ x_0 > 0\}$$

Exercici 9. La restricció del producte de Lorentz és una mètrica de Riemann a H.

Considerem l'aplicació de H al pla $x_0 = 0$, que envia $x \in H$ a la intersecció de $x_0 = 0$ amb la recta que uneix x amb $(-1, 0, 0)$.

Exercici 10. L'aplicació anterior indueix una isometria entre H i $\mathbb{D}^2$. (Per simplificar càlculs, podeu fer servir coordenades $x_1 = r\cos\theta$ i $x_2 = r\sin\theta$ al pla).

Siguin $J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

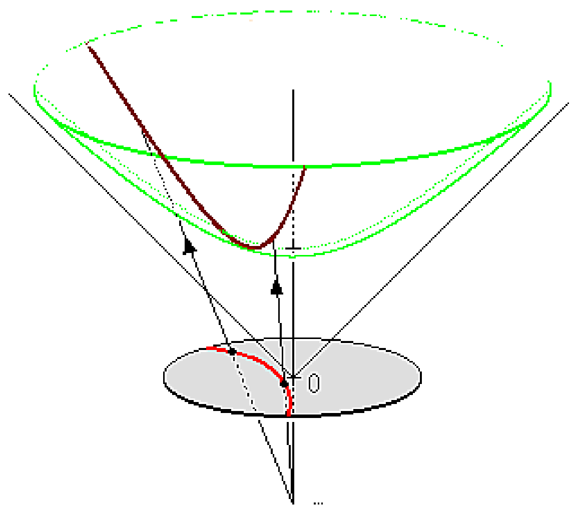
$$\mathrm{SO}(2,1) = \{A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \mid A^t J A = J\}$$

i $\mathrm{SO}^+(2,1) = \{A \in \mathrm{SO}(2,1) \mid AH = H\}$ (és a dir, les matrius de $\mathrm{SO}(2,1)$ que preserven els fulls de l'hiperboloide i no els permuten).

Exercici 11. (i) Demostreu que $\mathrm{Isom}^+(H) \cong \mathrm{SO}^+(2,1)$

(ii) Deduïu l'isomorfisme de grups de Lie $\mathrm{SO}^+(2,1) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

(iii) Demostreu que les geodèsiques de H són de la forma $H \cap \Pi$, on $\Pi \subset \mathbb{R}^2_1$ és un pla que passa per l'orígen.



Font de la imatge: Wikipedia

(IV) **Model projectiu**. És la projectivització del model anterior, és a dir enviem un punt $p \in H$ a la intersecció de la recta que passa per 0 i p amb el pla $x_0 = 1$. És un disc en una carta afí del pla projectiu (no és el de la imatge, que està en el pla $x_0 = 0$ i correspon al model del disc). Malauradament, no tenim temps de fer cap exercici.

7.3 Seminari 3. Camps de Jacobi i curvatura.

Exercici 12. Demostreu que una varietat de Riemann té curvatura constant K si i només si tota geodèsica γ i tot camp de Jacobi J ortogonal a γ compleix

$$J'' + K\,J = 0.$$

Exercici 13. Demostreu utilitzant camps de Jacobi que la curvatura seccional de l'esfera

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

és constant igual a 1. Utilitzeu els següents passos:

(i) Donats tres vectors u, v, $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ unitaris i ortogonals dos a dos, considereu la variació:

$$f(s,t) = \cos(t)u + \sin(t)(\cos(s)v + \sin(s)w)$$

Demostreu que és una variació per geodèsiques (per tot s, la corba $t \mapsto f(s,t)$ és una geodèsica).

(ii) Considereu el camp de Jacobi $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}$ i apliqueu l'equació de Jacobi. En particular podem obtenir tots els plans tangents en la construcció anterior.

Exercici 14. Demostreu utilitzant camps de Jacobi que la curvatura seccional del pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, amb la mètrica $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$, és constant igual a -1. En aquest cas considereu la variació

$$f(s,t) = (x+s, e^t)$$

per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$.

Exercici 15. (Exercici 28 de la llista 3) Donats dos camps de Jacobi $J_1(t), J_2(t)$ definits al llarg d'una geodèsica $\gamma(t)$ i tals que $J_1(0) = J_2(0) = 0$ demostreu

$$g(J_1(t), J_2(t)) = g(J_1'(0), J_2'(0))t^2 - \frac{1}{3}R(\gamma'(0), J_1'(0), J_2'(0), \gamma'(0))t^4 + O(t^5).$$

Deduïu que respecte un sistema de coordenades geodèsiques $(x_1, \ldots, x_n)$ al voltant d'un punt tenim

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{rs} R_{irsj}(0)x_r x_s + O(|x|^3),$$

on $R_{irsj} = g(R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_r})\frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.

Referències

[Boo86] William M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, volume 120 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, second edition, 1986.

[CE75] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.

[dC76] M. P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[dC92] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[GHL90] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.

[Gir93] Joan Girbau. *Geometria diferencial i relativitat*. IEC, Bellaterra :, 1993.

[Kos80] C. Kosniowski. *A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 1980.

[Nic18] Marcel Nicolau. *Varietats Diferenciables*. U.A.B., notes de curs, 17/18 edition, 2018.

[Sam69] Hans Samelson. Orientability of hypersurfaces in R^n. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22:301–302, 1969.

[Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Spi88] Michael Spivak. *Cálculo en variedades*. Reverté, 1988.

[War83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.