Geometria Riemanniana. Curs 2023-2024

Seminari 2. Models del pla hiperbòlic

(I) **Model del semiplà**. En el model del semiplà $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ la mètrica s'expressa com

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Utilitzem la variable complexa $z = x + iy$, $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ i $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{\mathrm{Im}(z)^2}$.

Exercici 1. Demostreu:

(i) Tota homografia $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ és una isometria de $\mathbb{H}^2$.

(ii) El grup d'isometries que preserven l'orientació satisfà

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$$

(iii) Utilitzeu els apartats anteriors i l'exercici 14 de la llista 2 per descriure les geodèsiques de $\mathbb{H}^2$.

(II) **Model del disc**.

En aquest model $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, la mètrica s'expressa com

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

En variable complexa: $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} < 1\}$ i $ds^2 = 4\frac{dzd\bar{z}}{(1-z\bar{z})^2}$.

Exercici 2. Considereu l'esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{CP}^1$.

(i) Trobeu una homografia $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, que porti 0, 1, ∞ a 1, i, -1, respectivament.

(ii) Demostreu que l'homografia anterior és una isometria entre $\mathbb{H}^2$ i $\mathbb{D}^2$.

(iii) Descriviu les geodèsiques de $\mathbb{D}^2$.

(iv) Demostreu que el diferencial de longitud d'arc (o element de línia) d'un arc de circunferència de radi $\rho > 0$ i paràmetre angular $\theta \in (0, 2\pi)$ és

$$ds = \sinh(\rho) d\theta$$

(v) Quina és l'expressió de la mètrica en coordenades polars $\rho > 0$ i $\theta \in (0, 2\pi)$?

(III) **Model de l'hiperboloide**.

Considerem l'espai $\mathbb{R}^2_1$, amb el producte de Lorentz

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot (y_0, y_1, y_2) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

i el full superior de l'hiperboloide

$$H = \{x \in \mathbb{R}^2_1 \mid x \cdot x = -1, \ x_0 > 0\}$$

Exercici 3. La restricció del producte de Lorentz és una mètrica de Riemann a H.

Considerem l'aplicació de H al pla $x_0 = 0$, que envia $x \in H$ a la intersecció de $x_0 = 0$ amb la recta que uneix x amb $(-1, 0, 0)$.

Exercici 4. L'aplicació anterior indueix una isometria entre H i $\mathbb{D}^2$. (Per simplificar càlculs, podeu fer servir coordenades $x_1 = r\cos\theta$ i $x_2 = r\sin\theta$ al pla).

Siguin $J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$,

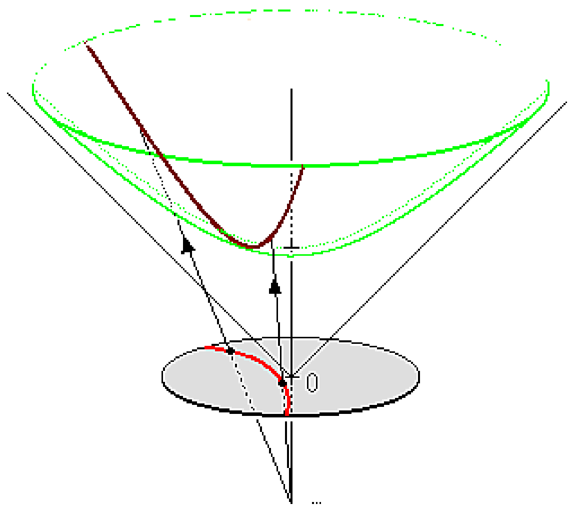
$$\mathrm{SO}(2,1) = \{A \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R}) \mid A^t J A = J\}$$

i $\mathrm{SO}^+(2,1) = \{A \in \mathrm{SO}(2,1) \mid AH = H\}$ (és a dir, les matrius de $\mathrm{SO}(2,1)$ que preserven els fulls de l'hiperboloide i no els permuten).

Exercici 5. (i) Demostreu que $\mathrm{Isom}^+(H) \cong \mathrm{SO}^+(2,1)$

(ii) Deduïu l'isomorfisme de grups de Lie $\mathrm{SO}^+(2,1) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

(iii) Demostreu que les geodèsiques de H són de la forma $H \cap \Pi$, on $\Pi \subset \mathbb{R}^2_1$ és un pla que passa per l'orígen.



`Font de la imatge: Wikipedia`

(IV) **Model projectiu**. És la projectivització del model anterior, és a dir enviem un punt $p \in H$ a la intersecció de la recta que passa per 0 i p amb el pla $x_0 = 1$. És un disc en una carta afí del pla projectiu (no és el de la imatge, que està en el pla $x_0 = 0$ i correspon al model del disc). Malauradament, no tenim temps de fer cap exercici.