Geometria Riemanniana. Curs 2023-2024

Llista 1. Varietats Diferenciables

1. Sigui $S_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \lambda\}$ on $\lambda \in \mathbb{R}$. Decidiu per a quins valors de λ el conjunt S_λ és una subvarietat de $\mathbb{R}^3$.

2. Sigui S el subconjunt de $\mathbb{R}^4$ definit per les equacions

$$x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 1, \qquad x\,y + u\,v = 0.$$

Demostreu que S és una subvarietat diferenciable de $\mathbb{R}^4$ i calculeu-ne la dimensió.

3. Demostreu que $\mathrm{GL}(n) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, el grup de les matrius $n \times n$ invertibles, és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n^2}$. Quina és la seva dimensió?

4. El grup $\mathrm{SL}(n) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ de les matrius $n \times n$ de determinant 1 és el nucli del morfisme de grups

$$\begin{aligned} \det\colon \mathrm{GL}(n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto |A| = \det A \end{aligned}$$

Comproveu que el morfisme det és una submersió en tots els punts de $\det^{-1}(1)$ i deduïu d'aquí que $\mathrm{SL}(n)$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimensió $n^2 - 1$.

Indicació: Comproveu que, fixat un punt $A \in \mathrm{SL}(n)$, la diferencial de $\det$ en A està donada per

$$D\det(A)\cdot B = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \det(A + sB) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} |A|\,\det(I + sBA^{-1}) = \mathrm{tr}(BA^{-1}).$$

5. Demostreu que el grup ortogonal $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n) \mid A \cdot A^t = I\}$ és una subvarietat de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimensió $\frac{n(n-1)}{2}$.

Indicació: Sigui M_n l'espai de les matrius $n \times n$ i considereu l'aplicació

$$\begin{aligned} F\colon M_n &\longrightarrow \mathrm{Sim}(n) \\ A &\longmapsto A \cdot A^t \end{aligned}$$

on $\mathrm{Sim}(n) = \{C \in M_n \mid C^t = C\}$ és l'espai de les matrius simètriques. Comproveu que $\mathrm{Sim}(n)$ és un espai vectorial de dimensió $\frac{n(n+1)}{2}$ i que la diferencial de F en un punt $A \in \mathrm{O}(n)$ està donada per

$$DF(A)\cdot B = BA^{-1} + (BA^{-1})^t.$$

6. Un **grup de Lie** és un grup G dotat d'una estructura de varietat diferenciable respecte la qual les operacions de grup (multiplicació i inversió) són aplicacions diferenciables. Demostreu que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, són grups de Lie.

7. Comproveu que $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$ és un atles diferenciable sobre $\mathbb{R}$. Demostreu que l'estructura de varietat diferenciable sobre $\mathbb{R}$ que defineix és isomorfa a la canònica.

8. Demostreu que tota varietat diferenciable de dimensió n admet un atles $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^n$.

9. Doneu una demostració de la següent versió feble del teorema de Whitney: tota varietat diferenciable compacta M és difeomorfa a una subvarietat de $\mathbb{R}^n$ per a un n prou gran.

10. Sigui $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ l'esfera unitat de $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Considerem els oberts $U_1 = \mathbb{S}^n \backslash \{(0, ..., 0, 1)\}$ i $U_2 = \mathbb{S}^n \backslash \{(1, ..., 0, 0)\}$ i les projeccions estereogràfiques $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$, on $i = 1, 2$, definides per

$$\varphi_1(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, ..., x_n), \quad \varphi_2(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_1}(x_2, ..., x_{n+1}).$$

Comproveu que les cartes (U_1, φ_1) i (U_2, φ_2) defineixen un atles diferenciable de $\mathbb{S}^n$. Deduïu que $\mathbb{S}^n$ és una varietat diferenciable de dimensió n amb l'estructura definida per aquest atles.

b) Demostreu que aquesta estructura diferenciable coincideix amb l'estructura diferenciable de $\mathbb{S}^n$ com subvarietat de $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Sigui $\psi \colon (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to U \subset \mathbb{S}^2$ la parametrització d'un obert de $\mathbb{S}^2$ donada per

$$\psi(u, v) = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u).$$

Demostreu que ψ és un homeomorfisme i que (U, ψ^{-1}) és una carta local de $\mathbb{S}^2$ compatible amb l'estructura definida a l'apartat a) (en el cas $n = 2$).

d) Sigui $\phi : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^3$ definida per

$$\phi(u, v, w) = (\cos u \cos v \cos w, \cos u \cos v \sin w, \cos u \sin v, \sin u).$$

Demostreu que la imatge de ϕ és un obert V de $\mathbb{S}^3$ i que ϕ és un homeomorfisme sobre V. Comproveu que (V, ϕ^{-1}) és compatible amb l'atles de l'apartat a) (per $n = 3$).

11. Es considera a $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ la relació d'equivalència definida per

$$z_1 \sim z_2 \quad \iff \quad z_1 = \lambda \cdot z_2 \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Sigui $\mathbb{C}P^n$ l'espai quocient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ per aquesta relació d'equivalència. Demostreu que $\mathbb{C}P^n$ admet una estructura de varietat diferenciable exhibint un atles de l'estructura.

12. Si identifiquem $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ aleshores $S^2 = \{(x, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |x|^2 + t^2 = 1\}$. Demostreu que l'aplicació $\tilde{F} \colon \mathbb{C}^2 - \{0\} \to S^2$ donada per

$$\tilde{F}(z, w) = \frac{(2z\bar{w}, |w|^2 - |z|^2)}{|z|^2 + |w|^2}$$

indueix un difeomorfisme $F \colon \mathbb{C}P^1 \to S^2$. *Indicació:* l'aplicació inversa de F està donada per $F^{-1}(x, t) = [x : t + 1]$.

Doneu una expressió en coordenades de l'aplicació lineal tangent $T_pF \colon T_p\mathbb{C}P^1 \to T_{F(p)}S^2$ en un punt $p \in \mathbb{C}P^1$ qualsevol.

13. Sigui M una varietat diferenciable connexa. Demostreu que per a tot parell de punts $p, q \in M$ existeix una corba diferenciable $\gamma \colon [0, 1] \to M$, tal que $\gamma(0) = p$ i $\gamma(1) = q$.

Indicació: demostreu primer que existeix una tal corba que és diferenciable a trossos.

14. Sigui $f \colon M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats. Suposem que $T_pf = 0$ per a tot $p \in M$. Demostreu que si M és connexa llavors f és constant.

15. Considerem les cartes locals (U, ψ_1^{-1}) i (U, ψ_2^{-1}) de l'esfera unitat S^2 de $\mathbb{R}^3$ on $U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ i

$$\psi_1(u, v) = \big(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\big), \qquad \psi_2(\phi, \theta) = (\cos\phi, \sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta).$$

Determineu les matrius de canvi entre les bases (locals) de camps vectorials $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ i $\{\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\}$.

16. Es consideren les cartes $\varphi, \psi \colon M \to \mathbb{R}^2$ de la varietat $M = \mathbb{R}^2$ donades per $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ i $\psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_1 + \sinh y_2)$. Determineu la relació entre les bases de camps vectorials $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ i $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$ determinades per les cartes anteriors. (Observeu que $\frac{\partial}{\partial y_1} \neq \frac{\partial}{\partial x_1}$ malgrat que $y_1 = x_1$.)

17. Donades dues constants $a, b > 0$, considerem l'aplicacio $F \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$F(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = ((a + b\cos\theta)\cos\phi, (a + b\cos\theta)\sin\phi, b\sin\theta).$$

a) Demostreu que si $a \leq b$ llavors F no és immersió.

b) Demostreu que si $a > b$ aleshores F és un *embedding.*

18. Demostreu que l'aplicació diferenciable $F \colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ definida per

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2,\ xy\ , xz\ , yz)$$

indueix un embedding diferenciable de $\mathbb{R}P^2$ dins $\mathbb{R}^4$.

19. Sigui $F \colon \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^3$ definida per

$$F([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) = [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]$$

Demostreu que F és un *embedding* diferenciable.

20. Sigui M el subconjunt de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ format pels parells de vectors (u, v) tals que la dimensió del subespai generat per $\{u, v\}$ és 1.

a) Demostreu que M és una subvarietat diferenciable de dimensió 4 de $\mathbb{R}^6$ i trobeu un atles de M.

b) Determineu l'espai tangent a M en un punt (u, v) tal que $u_1 \neq 0$.

c) Decidiu si es pot expressar M com el conjunt de les solucions de dues equacions definides en un obert de $\mathbb{R}^6$.

d) Sigui $F \colon M \to \mathbb{R}P^2$ definida per $F(u, v) = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$. Demostreu que F és diferenciable i trobeu la matriu de $T_{(u,v)}F$ per a $u = v = e_1$, en bases convenients.