Geometria Riemanniana. Curs 2023-2024

Llista 2. Camps Vectorials i Varietats de Riemann

1. Considerem els camps vectorials diferenciables definits a $\mathbb{R}^2$ per

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \big(x - \frac{1}{2}\big)\frac{\partial}{\partial y} \qquad Z_2 = Z_1 + \frac{\partial}{\partial y}.$$

Determineu els seus grups uniparamètrics associats i decidiu si són o no complets.

2. Sigui X el camp vectorial de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$X = (1 + z - x^2)\frac{\partial}{\partial x} - xy\frac{\partial}{\partial y} - x(1+z)\frac{\partial}{\partial z}$$

i) Comproveu que X és tangent a l'esfera unitat S^2 de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que la restricció $Y = X|_{S^2}$ de X a S^2 és un camp vectorial complet amb un únic punt singular.

ii) Determineu el flux de Y fent servir les coordenades estereogràfiques

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{1+z}(x, y).$$

3. Calculeu el claudator de Lie, $[X, Y]$, dels camps X, Y de $\mathbb{R}^3$ següents

$$X = z^2\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = e^x\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y^3\frac{\partial}{\partial z}.$$

4. Es considera l'aplicació $\phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ així com la funció h i la forma diferencial α donades per

$$h(x, y) = x^2 y \qquad \alpha = (2x - y)\,dx + (x - y^2)\,dy$$

Comproveu que es compleix $\phi^* dh = d(h \circ \phi)$ i que $d(\phi^*\alpha) = \phi^* d\alpha$.

5. Sigui M una varietat orientable i sigui Γ un grup que actua lliurement i pròpiament discontinuament sobre M. Demostreu que la varietat quocient M/Γ és orientable si i només si cada element de Γ conserva l'orientació.

6. Demostreu que l'espai projectiu $\mathbb{R}P^n = S^n/\{\pm \mathrm{Id}\}$ és orientable si i només si n és imparell.

7. Trobeu l'expressió local de la mètrica de l'esfera unitat $\mathbb{S}^2$ en les coordenades estereogràfiques respecte del pol nord.

8. Sigui $M = N/\Gamma$ la varietat quocient d'una varietat de Riemann N per l'acció d'un grup Γ que actua lliurement i pròpiament discontinuament. Demostreu que si Γ és un grup d'isometries respecte una mètrica g_N de N aleshores hi ha una única mètrica de Riemann g_M sobre M respecte la qual la projecció natural $\pi\colon N \to M$ és una isometria local.

9. Es considera el semipla de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ amb la mètrica hiperbòlica $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

a) Calculeu la longitud de les corbes $\alpha(t) = (x_0, t)$, on $0 < a \leq t \leq b$, i $\beta(t) = (t, y_0)$, on $a \leq t \leq b$.

b) Siguin $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tals que $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$. Calculeu la longitud de la corba $\gamma(\theta) = (x_0 + R\cos\theta, R\sin\theta)$ on $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

c) Calculeu el cosinus de l'angle que formen les corbes α i γ en els punt de tall.

10. Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió canònica ∇ de $\mathbb{R}^3$ en coordenades esfèriques.

11. Determineu la relació entre els símbols de Christoffel d'una mateixa connexió ∇ quan es refereixen a coordenades locals diferents.

12. Sigui ∇ la connexió canònica de $\mathbb{R}^n$ i considerem un difeomorfisme $f\colon U \to V$, on U i V són oberts connexos de $\mathbb{R}^n$. Demostreu que f preserva la connexio ∇, és a dir que es compleix $f_*\nabla_X Y = \nabla_{f_*X} f_*Y$, si i només si f és la restricció d'una (única) transformació afí de $\mathbb{R}^n$, és a dir la composició d'un isomorfisme lineal i d'una translació.

13. Suposem que un sistema de coordenades en una varietat riemanniana és ortogonal, és a dir que es compleix $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Comproveu que els símbols de Christoffel en aquestes coordenades són $\Gamma_{ij}^k = 0$ si els tres índexs i, j, k són diferents, i

$$\Gamma_{ik}^i = \Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}, \quad \forall\, i, k \qquad\qquad \Gamma_{kk}^i = \frac{-1}{2g_{ii}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}, \quad \forall\, i \neq k.$$

14. Determineu el transport paral.lel, en $\mathbb{H}^2$, al llarg de les corbes $\alpha(t) = (t, 1)$ i $\beta(t) = (0, e^t)$.

15. Es considera la corba c de l'esfera unitat $\mathbb{S}^2$ definida per

$$c(t) = (\cos t \cos\alpha, \sin t \cos\alpha, \sin\alpha).$$

Determineu el transport paral·lel $v(t)$ del vector $c'(0)$ al llarg de $c(t)$. Determineu α per tal que es compleixi $v(2\pi) = v(0)$.

16. Siguin C_1 i C_2 dos meridians de l'esfera unitat S^2 formant un angle α. Es considera el camí c sobre S^2 que, sortint del pol nord, recorre C_1 fins l'equador, continua per l'equador fins trobar C_2 i finalment torna al pol nord al llarg d'aquest segon meridià. Sigui v un vector tangent a S^2 en el pol nord i denotem per w el seu traslladat paral·lel al llarg de c. Quin angle formen v i w?

17. Es considera $\mathbb{R}P^2 = S^2/\{\pm \mathrm{I}\}$ amb la mètrica induïda per la mètrica de l'esfera unitat S^2. Demostreu que les geodèsiques de $\mathbb{R}P^2$ són totes tancades i que dues d'elles es tallen en un únic punt. Quina és la seva longitud?

18. Demostreu que el semiespai de Poincaré $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ amb la mètrica

$$g_H = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

i $M = \mathbb{R}^3$ amb la mètrica $g_M = e^{-2w}(du^2 + dv^2) + dw^2$ són varietats riemannianes isomètriques. (*Indicació:* Cerqueu una isometria de la forma $F(u, v, w) = (x(u), y(v), z(w))$.)

19. Demostreu que les restriccions al semipla superior $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ de les homografies

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

on $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc > 0$, són isometries del pla hiperbòlic.

20. Sabem que les corbes $\gamma(t) = (x, ye^t)$ són geodèsiques del pla hiperbòlic. A partir d'aquí i utilitzant l'exercici 19, determineu totes les geodèsiques de $\mathbb{H}^2$.

21. Demostreu que si S és una superfície amb una mètrica riemanniana i E, F, G són els coeficients de la mètrica en un sistema de coordenades (u, v) llavors els corresponents símbols de Christoffel de la connexió de Levi-Civita satisfan la fórmula

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \end{pmatrix}$$

22. Es considera una corba plana $\gamma(u) = (r(u), z(u))$ parametritzada per l'arc, i.e. $\|\dot{\gamma}\| = 1$, i tal que $r > 0$. Aquesta corba genera una superfície de revolució S de $\mathbb{R}^3$ que es pot parametritzar per $\Phi(u, \theta)(r(u)\cos\theta, r(u)\sin\theta, z(u))$. En aquestes coordenades la mètrica s'escriu

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)d\theta^2.$$

a) Comproveu, utilitzant l'equació variacional de les geodèsiques

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n,$$

que l'equació de les geodèsiques de S, en aquestes coordenades, és

$$\begin{cases} \ddot{u} - rr'\dot{\theta}^2 & = & 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{2rr'}{r^2}(\dot{\theta}\dot{u}) & = & 0 \end{cases}$$

b) Deduïu que els meridians $t \mapsto (u(t), \theta_0)$ (amb $u(t) = at + b$) i els paral·lels $t \mapsto (u_0, \theta(t))$ pels que $r'(u_0) = 0$ (i amb $\theta(t) = at + b$) són geodèsiques.

c) Sigui $\beta = \beta(t)$ l'angle que forma una geodèsica $\gamma(u) = (r(u), z(u))$ amb els paral·lels de la superfície de revolució. Comproveu que es compleixen les igualtats

$$\cos\beta = r\dot{\theta} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\big(r^2\dot{\theta}\big) = 0$$

i deduïu d'aquí la *relació de Clairaut*

$$r \cdot \cos\beta(t) = \text{constant}.$$

23. En una varietat de Riemann (M, g), l'aplicació $\tau \colon \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$ definida per $\tau(X) = g(X, \cdot)$ és un isomorfisme. Llavors es defineix el *gradient* d'una funció $h \in \mathcal{C}^\infty$ per $\operatorname{grad} h = \tau^{-1}(dh)$, és a dir que $\operatorname{grad} h$ és el camp vectorial caracteritzat per

$$dh(Y) = g(\operatorname{grad} h, Y).$$

Determineu l'expressió en coordenades del gradient d'una funció h en els següents cassos:

a) $M = \mathbb{R}^n$ amb les coordenades cartesianes i $M = \mathbb{R}^2$ amb les coordenades polars.

b) $M = \mathbb{S}^2$ amb les coordenades esfèriques.

c) M és el pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ amb les coordenades (x, y).

24. Siguin g i $\tilde{g}$ dues mètriques de Riemann sobre M conformement equivalents, és a dir que $\tilde{g} = \rho^2 g$ per a una certa funció no nul·la ρ. Demostreu que les corresponents connexions de Levi-Civita ∇ i $\tilde{\nabla}$ compleixen

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)U,$$

on $\omega = d(\log \rho)$ i $U = \operatorname{grad} \log \rho$. Com aplicació, comproveu els càlculs dels símbols de Christoffel del pla hiperbòlic $\mathbb{H}^2$.

25. Es consideren els camps vectorials Z_1 i Z_2 de $\mathbb{R}^2$ definits per

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \big(x - \frac{1}{2}\big)\frac{\partial}{\partial y} \qquad Z_2 = Z_1 + \frac{\partial}{\partial y}.$$

a) Demostreu que hi ha una única connexió ∇ a $\mathbb{R}^2$ respecte la qual els camps Z_1 i Z_2 són paral·lels.

b) Demostreu que les mètriques de Riemann de $\mathbb{R}^2$ que tenen ∇ per connexió de Levi-Civita són les mètriques amb coeficients

$$g_{11} = kx^2 - 2\alpha x + \beta, \qquad g_{12} = g_{21} = -kx + \alpha, \qquad g_{22} = k,$$

on $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ i es compleix $k > 0$ i $\alpha^2 < \beta k$.