Resultats de teoria de Hodge

Jordi Cardiel

Índex

L'objectiu d'aquest document és presentar resultats bàsics de la teoria de Hodge per a varietats reals i complexes. En particular, varietats riemannianes compactes i varietats kählerianes, que són varietats diferenciables equipades d'una estructura complexa i una mètrica de Riemann compatible. Veurem l'anomenada descomposició de Hodge en ambdós casos.

1 Teoria de Hodge sobre varietats riemannianes compactes

Sigui (M, g) una n-varietat riemanniana orientada compacte, $\eta_M \in \Omega^n(M)$ element de volum de M.

1.1 $\star$

Definició 1.1. *Sigui $\star_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ l'operador definit per la identitat $\alpha \wedge \star_k \beta := g(\alpha, \beta)\eta_M$. Diem que $\star_k$ és l'operador de Hodge.*

Pensarem $\star_k$ com una família d'operadors per cada k i escriurem $\star$. Es comprova que $\star$ ve definit per un isomorfisme (veure [Voi02], 5.1.1.). La idea és que l'operador de Hodge completa una k-forma diferenciable al element de volum η_M. Tenim que $\Omega^k(M)$ és un espai prehilbertià si el dotem pel producte escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M g(\alpha, \beta)\eta_M = \int_M \alpha \wedge \star\beta$$

Veiem propietats de l'operador de Hodge.

Lema 1.2. *L'operador de Hodge satisfà $\star^2 = (-1)^{k(n-k)} id_{\Omega^k(M)}$, on $\star^2 : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^k(M)$.*

Demostració. Sigui $\beta \in \Omega^k(M)$. Tenim que

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \star\beta &= g(\alpha, \beta)\eta_M && (\star \text{ operador de Hodge}) \\
&= g(\star\alpha, \star\beta)\eta_M && (\star \text{ preserva } g) \\
&= g(\star\beta, \star\alpha)\eta_M && (g \text{ simètrica}) \\
&= \star\beta \wedge \star\star\,\alpha && (\star \text{ operador de Hodge}) \\
&= (-1)^{k(n-k)} \star\star\alpha \wedge \star\beta && (\alpha \in \Omega^k(M), \star\beta \in \Omega^{n-k}(M) \text{ i } \omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{\operatorname{ord}\omega_1 \operatorname{ord}\omega_2}\omega_2 \wedge \omega_1)
\end{aligned}$$

d'on deduïm que $\star^2 = (-1)^{k(n-k)} id_{\Omega^k(M)}$. $\square$

Lema 1.3. *$d^* := (-1)^k \star^{-1} d\star$ és l'operador adjunt de d.*

Demostració. Sigui $\alpha \in \Omega^{k-1}(M), \beta \in \Omega^k(M)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha, \beta\rangle &= \int_M d\alpha \wedge \star\beta && \text{(Per definició de } \langle\cdot,\cdot\rangle) \\
&= \int_M d(\alpha \wedge \star\beta) + (-1)^k \alpha \wedge d\star\beta && (\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M),\ d(\omega_1 \wedge \omega^2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2) \\
&= \int_M (-1)^k \alpha \wedge d\star\beta && \left(\text{Teorema de Stokes: } \int_M d(\alpha \wedge \star\beta) = 0\right) \\
&= \int_M (-1)^k \alpha \wedge \star(\star^{-1} d\star\beta) && (\star \text{ isomorfisme}) \\
&= \langle \alpha, (-1)^k \star^{-1} d\star\beta\rangle && \text{(Per definició de } \langle\cdot,\cdot\rangle)
\end{aligned}$$

com volíem veure. □

Definició 1.4. *Sigui $\Delta_k^d : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$ l'operador definit per $\Delta_k^d\alpha := (d_{k-1}d_k^* + d_{k+1}^* d_k)\alpha$. Diem que Δ_k^d és l'operador de Laplace-Beltrami.*

Escriurem, fent un abús de notació, Δ_d.

Lema 1.5. $\langle \alpha, \Delta_d\alpha\rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha\rangle + \langle d\alpha, d\alpha\rangle$.

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \Delta_d\alpha\rangle &= \langle \alpha, (dd^* + d^*d)\alpha\rangle && \text{(Per definició de } \Delta_d) \\
&= \langle \alpha, dd^*\alpha\rangle + \langle \alpha, d^*d\alpha\rangle && (\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ lineal}) \\
&= \langle d^*\alpha, d^*\alpha\rangle + \langle d\alpha, d\alpha\rangle && (d, d^* \text{ adjunts})
\end{aligned}$$

com volíem. □

Corol·lari 1.6. *Δ_d és autoadjunt.*

Demostració. Fent el mateix, $\langle \Delta_d\alpha, \alpha\rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha\rangle + \langle d\alpha, d\alpha\rangle = \langle \alpha, \Delta_d\alpha\rangle$. □

Corol·lari 1.7. $\ker \Delta_d = \ker d \cap \ker d^*$.

Demostració. Sigui $\alpha \in \ker \Delta_d$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
&\|d^*\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2 = \langle \alpha, \Delta_d\alpha\rangle = 0 && (\alpha \in \ker \Delta_d\text{: } \Delta_d\alpha = 0) \\
\implies &\|d^*\alpha\|^2 = 0 \wedge \|d\alpha\|^2 = 0 && (\|\cdot\| \geq 0) \\
\implies &d^*\alpha = 0 \wedge d\alpha = 0 && \text{(Per definició de } \|\cdot\|) \\
\implies &\alpha \in \ker d \cap \ker d^*
\end{aligned}$$

Aleshores, $\ker \Delta_d \subset \ker d \cap \ker d^*$. Sigui $\alpha \in \ker d \cap \ker d^*$. Aleshores, $\Delta_d\alpha = dd^*\alpha + d^*d\alpha = 0 + 0 = 0$, d'on $\alpha \in \ker \Delta_d$ i $\ker d \cap \ker d^* \subset \ker \Delta_d$. Per doble inclusió, $\ker \Delta_d = \ker d \cap \ker d^*$. □

1.2 Operadors diferencials el·líptics

Per descriure la descomposició de Hodge, requerim de les següents nocions. La referència principal d'aquesta subsecció és [Dem97].

Definició 1.8. *Siguin E, F fibrats vectorials reals (o complexos) de M. Un operador diferencial de grau δ de E a F és un operador $\mathbb{R}$-lineal (o $\mathbb{C}$-lineal) $P : \mathcal{C}^\infty(M,E) \to \mathcal{C}^\infty(M,F)$ de la forma*

$$Pf(x) = \sum_{|\alpha|\leq\delta} a_\alpha(x) D^\alpha f(x)$$

on $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ (o $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^r$), $F|_U \cong U \times \mathbb{R}^{r'}$ (o $F|_U \cong U \times \mathbb{C}^{r'}$) són trivializats localment en una carta local U de M equipada amb coordenades $(x_1, \ldots, x_m)$, on $a_\alpha(x) = (a_{\alpha_{\lambda,\mu}}(x))_{1\leq\lambda\leq r', 1\leq\mu\leq r}$ és una matriu d'ordre $r' \times r$ a coefficients a $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Definició 1.9. *Un operador diferencial P és el·líptic si $\sigma_P(p,\xi) = \sum_{|\alpha|=\delta} a_\alpha(x)\xi^\alpha \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ és injectiu per tot $p \in M$ i $\xi \in T_pM^* - \{0\}$.*

Lema 1.10. *El símbol de Δ_d és $\sigma_{\Delta_d}(\alpha)(\omega) = -g(\alpha,\alpha)\omega$.*

Demostració. És suficient demostrar la igualtat localment i per la mètrica $g := \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_i$ ([Voi02], 5.18). Es comprova que, si $\omega := \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1,\ldots,i_p} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \in \Omega^p(M)$, aleshores

$$\Delta_d\omega = -\sum_{i_1<\ldots<i_p} \Big(\sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j}\omega_{i_1,\ldots,i_p}\Big) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

d'on es dedueix el resultat (pels càlculs, veure [Dem97], IV.3.12.) □

Del darrer resultat es dedueix la el·lípticitat de Δ_d.
El següent resultat és cabdal pels resultats principals d'aquest treball. La demostració es basa en resultats de teoria el·líptica d'equacions en derivades parcials.

Teorema 1.11. *Sigui $P : E \to F$ un operador diferencial el·líptic sobre una varietat compacte tals que E, F tenen el mateix rang i tenen una mètrica. Aleshores, $\ker P \subset \mathcal{C}^\infty(E)$ és de dimensió finita, $P(\mathcal{C}^\infty(E)) \subset \mathcal{C}^\infty(F)$ és tancat i de codimensió finita i $\mathcal{C}^\infty(E) = \ker P \oplus P^*(\mathcal{C}^\infty(F))$.*

Demostració. Veure [Dem97], IV.2.4. □

1.3 Isomorfisme de Hodge

La idea és aplicar 1.11 a l'operador Δ_d.

Teorema 1.12. $\ker \Delta_k^d \cong H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d)$.

Demostració. Per la descomposició anterior, en particular tenim

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) &= \ker \Delta_d \oplus \Delta_d^*(\Omega^k(M)) && (\Delta_d \text{ operador el·líptic}) \\ &= \ker \Delta_d \oplus \Delta_d(\Omega^k(M)) && (\Delta_d \text{ autoadjunt}) \end{aligned}$$

Considerem el morfisme

$$\pi \circ \iota : \ker \Delta_d \hookrightarrow \ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)) \twoheadrightarrow H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d)$$

Sigui $\alpha \in \ker \pi \circ \iota$. Aleshores, $\alpha \in \mathrm{im}\, d$. Com $\alpha \in \ker \Delta_d$, en particular $\alpha \in \ker d^*$ ($\ker \Delta_d = \ker d \cap \ker d^*$), d'on deduïm que $\alpha \in \mathrm{im}\, d \cap \ker d^*$. Com d, d^* són adjunts, $\mathrm{im}\, d \cap \ker d^* = \mathrm{im}\, d \cap (\mathrm{im}\, d)^\perp = \{0\}$. Aleshores, $\alpha \in \{0\}$, d'on $\ker \pi \circ \iota \subset \{0\}$. Com la inclusió $\{0\} \subset \ker \pi \circ \iota$ és evident, per doble inclusió $\ker \pi \circ \iota = \{0\}$, d'on resulta la injectivitat de $\pi \circ \iota$.
Sigui $\alpha \in \ker d$. En particular, $\alpha \in \Omega^k(M) = \ker \Delta_d \oplus \Delta_d(\Omega^k(M))$, d'on $\exists\beta\exists\gamma(\beta \in \ker \Delta_d, \gamma \in \Omega^k(M) \wedge \alpha = \beta + \Delta_d\gamma)$. D'aquí obtenim que $d^*d\gamma = \alpha - \beta - dd^*\gamma \in \ker d$, ja que $\alpha, \beta, dd^*\gamma \in \ker d$. Per tant, $d^*d\gamma \in \ker d \cap \mathrm{im}\, d^* = \ker d \cap (\ker d)^\perp = \{0\}$, d'on deduïm que $d^*d\gamma = 0$. Aleshores, $\alpha = \beta + dd^*\gamma$. Passant al quocient, $\alpha + \mathrm{im}\, d = \beta + \mathrm{im}\, d$, d'on resulta l'exhaustivitat de $\pi \circ \iota$ (ja que hem vist que $\forall \alpha + \mathrm{im}\, d(\alpha + \mathrm{im}\, d \in H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d) \Rightarrow \exists\beta(\beta \in \ker \Delta_d \wedge \pi \circ \iota(\beta) = \alpha + \mathrm{im}\, d)))$.
Per tant, $\iota \circ \pi$ és isomorfisme, d'on resulta $\ker \Delta_d \cong H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d)$. □

Corol·lari 1.13. *$H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d)$ és de dimensió finita.*

Demostració. $\ker\Delta_d \cong H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d)$ i $\ker\Delta_d$ és de dimensió finita per 1.11. □

El darrer isomorfisme ens permet demostrar la dualitat de Poincaré per la cohomologia amb coeficients reals. Necessitem un lema previ sobre la commutativitat de $\star$ i Δ_d.

Lema 1.14. *$\star$ i Δ_d commuten.*

Demostració. Sigui $\alpha \in \Omega^k(M)$. Fixem-nos que

$$\begin{aligned}
d^*\alpha &= (-1)^k \star^{-1} d\star\alpha && \text{(Per definició de } d^*\text{)}\\
&= (-1)^k \star^{-1}\star^{-1}\star d\star\alpha\\
&= (-1)^k(-1)^{k(n-k)}\star d\star\alpha && (\star^2 = (-1)^{k(n-k)})
\end{aligned}$$

D'una banda,

$$\begin{aligned}
\star\Delta_d\alpha &= \star dd^*\alpha + \star d^* d\alpha && \text{(Per definició de } \Delta_d\text{)}\\
&= (-1)^k(-1)^{k(n-k)}\star d\star d\star\alpha + (-1)^{k+1}(-1)^{(k+1)(n-(k+1))}\star\star d\star d\alpha && (\alpha\in\Omega^k, d\alpha\in\Omega^{k+1})\\
&= (-1)^{k(n-k+1)}\star d\star d\star\alpha + (-1)^{k+1}(-1)^{(k+1)(n-(k+1))}(-1)^{k(n-k)} d\star d\alpha && (\star^2 = (-1)^{k(n-k)})\\
&= (-1)^{k(n-k+1)}\star d\star d\star\alpha + (-1)^{n-k} d\star d\alpha
\end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned}
\Delta_d\star\alpha &= dd^*\star\alpha + d^* d\star\alpha && \text{(Per definició de } \Delta_d\text{)}\\
&= (-1)^{n-k}(-1)^{k(n-k)} d\star d\star\star\alpha + (-1)^{n-k+1}(-1)^{(n-k+1)(k-1)}\star d\star d\star\alpha && (\star\alpha\in\Omega^{n-k})\\
&= (-1)^{n-k}(-1)^{k(n-k)}(-1)^{k(n-k)} d\star d\alpha + (-1)^{k(n-k+1)}\star d\star d\star\alpha && (\star^2 = (-1)^{k(n-k)})\\
&= (-1)^{n-k} d\star d\alpha + (-1)^{k(n-k+1)}\star d\star d\star\alpha
\end{aligned}$$

d'on resulta $\star\Delta_d = \Delta_d\star$. □

Teorema 1.15 (Dualitat de Poincaré)**.** *$H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d) \cong \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d),\mathbb{R})$.*

Demostració. Considerem la forma bilineal $\varphi : H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d)\times H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d)\to\mathbb{R}$ definida per

$$\varphi(\alpha + \operatorname{im} d, \beta + \operatorname{im} d) := \int_M \alpha\wedge\beta$$

Siguin $\alpha + \operatorname{im} d, \alpha' + \operatorname{im} d \in H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d)$ i $\beta + \operatorname{im} d, \beta' + \operatorname{im} d \in H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}),d)$ tal que $\alpha + \operatorname{im} d = \alpha' + \operatorname{im} d$ i $\beta + \operatorname{im} d = \beta' + \operatorname{im} d$. Aleshores, $\exists\gamma(\gamma\in\Omega^{k-1}(M)\wedge\alpha = \alpha' + d\gamma)$ i $\exists\gamma'(\gamma\in\Omega^{k-1}(M)\wedge\beta = \beta' + d\gamma')$. Pel teorema de Stokes i com $\beta', \alpha', d\gamma' \in \ker d$, obtenim

$$\begin{aligned}
&\int_M \alpha\wedge\beta\\
&= \int_M (\alpha' + d\gamma)\wedge(\beta' + d\gamma')\\
&= \int_M \alpha'\wedge\beta' + d(\gamma\wedge\beta') + (-1)^k\gamma\wedge d\beta' + d(\alpha'\wedge\beta') + (-1)^{k+1}d\alpha'\wedge\beta' + d(\gamma\wedge d\gamma') + (-1)^k\gamma\wedge d^2\gamma'\\
&= \int_M \alpha'\wedge\beta' + d(\gamma\wedge\beta') + d(\alpha'\wedge\beta') + d(\gamma\wedge d\gamma')\\
&= \int_M \alpha'\wedge\beta'
\end{aligned}$$

és a dir, $\varphi(\alpha + \operatorname{im} d, \beta + \operatorname{im} d) = \varphi(\alpha' + \operatorname{im} d, \beta + \operatorname{im} d)$. Per tant, φ esta ben definida.

Ara, considerem $\Phi : H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d) \to \mathrm{Hom}(H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d), \mathbb{R})$ definda per $\Phi(\alpha + \mathrm{im}\, d)(\beta + \mathrm{im}\, d) := \varphi(\alpha, \beta)$ (clarament ben definida). Sigui $\alpha + \mathrm{im}\, d \in \ker \Phi$. Aleshores, $\forall \beta + \mathrm{im}\, d(\beta + \mathrm{im}\, d \in H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d) \Rightarrow \Phi(\alpha + \mathrm{im}\, d)(\beta + \mathrm{im}\, d) = 0)$. Suposem que $\alpha + \mathrm{im}\, d \neq \mathrm{im}\, d$ (i, en particular, $\alpha \neq 0$). Com $\ker \Delta_d \cong H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d)$, podem suposar sense pèrdua de la generalitat que $\alpha \in \ker \Delta_d$. Per la commutativitat de $\star$ i Δ_d, $\star\alpha \in \ker \Delta_d$. Ara,

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha + \mathrm{im}\, d)(\star\alpha + \mathrm{im}\, d) &= \varphi(\alpha + \mathrm{im}\, d, \star\alpha + \mathrm{im}\, d) && \text{(Per definició de } \Phi) \\
&= \int_M \alpha \wedge \star\alpha && \text{(Per definició de } \varphi) \\
&= \|\alpha\|^2 \neq 0 && (\alpha \neq 0)
\end{aligned}$$

contradicció, ja que $\Phi(\alpha + \mathrm{im}\, d)(\star\alpha + \mathrm{im}\, d) = 0$. Per tant, $\alpha + \mathrm{im}\, d = \mathrm{im}\, d$, d'on $\ker \Phi \subset \{\mathrm{im}\, d\}$. Com $\{\mathrm{im}\, d\} \subset \ker \Phi$ és evident, per doble inclusió $\ker \Phi = \{\mathrm{im}\, d\}$, d'on Φ és injectiva.
Similarment, podriem haver definit $\Phi' : H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d) \to \mathrm{Hom}(H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d), \mathbb{R})$ injectiva. Com $H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d), H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d)$ són de dimensió finita, per la injectivitat de Φ i Φ', tenen la mateixa dimensió. Per tant, Φ és isomorfisme, d'on resulta $H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d) \cong \mathrm{Hom}(H^{n-k}(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R}), d), \mathbb{R})$. $\square$

2 Teoria de Hodge sobre varietats kählerianes

Sigui M una $2n$-varietat amb un atles holomorf.

2.1 ∂ i $\overline{\partial}$

Direm que una estructura quasi complexa en M és un endomorfisme $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -Id_{TM}$. El parell (M, J) s'anomenarà $2n$-varietat quasi complexa. Fixem-nos que J dota a TM (i per tant a TM^*) d'una estructura de $\mathbb{C}$-mòdul.
Considerem la complexificació de TM^*, $TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Podem estendre J^* a $TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ via $J^* \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}$. Per definició de J^*, $i \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{C}}$ i $-i \otimes_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{C}}$ són els valors propis de $J^* \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}$, deduïm la descomposició

$$TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \oplus \ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}})$$

Tenim que, si $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_n\}$ $\mathbb{C}$-bases de $\ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}), \ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}})$ respectivament,

$$\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p} \otimes_{\mathbb{C}} w_{j_1} \wedge \ldots \wedge w_{j_q} : 1 \leq i_1 < \ldots i_p \leq n \wedge 1 \leq j_1 < \ldots j_q \leq n\}$$

és una base de

$$\bigwedge^p \ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q \ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}})$$

d'on deduïm que té dimensió $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$. Aleshores, d'una banda tenim que $\dim_{\mathbb{C}}(TM^* \otimes_R \mathbb{C}) = \binom{2n}{k}$ i de l'altra

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{k} &= \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n}{k-p} \\
&= \sum_{p+q=k} \binom{n}{p}\binom{n}{q} \\
&= \sum_{p+q=k} \dim_{\mathbb{C}} \left(\bigwedge^p \ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q \ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \right) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^p \ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q \ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \right)
\end{aligned}$$

d'on deduïm la descomposició

$$TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p} \ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^{q} \ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}})$$

Aquest argument serveix per qualsevol $\mathbb{C}$-mòdul finitament generat amb una estructura quasi complexa.
La darrera descomposició indueix una descomposició en les seccions, és a dir, les k-formes $\mathbb{C}$-diferenciables:

$$\Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=K} \Omega^p(\ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}})) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^q(\ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}))$$

Escriurem $\mathcal{A}^{p,q}(M) := \Omega^p(\ker((J^* - iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}})) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^q(\ker((J^* + iId_{TM^*}) \otimes_{\mathbb{R}} Id_{\mathbb{C}}))$.
Recordem que d és la derivada exterior.

Definició 2.1. *Definim els operadors ∂ i $\overline{\partial}$ per*

$$\partial_{p,q} := \pi^{p+1,q} \circ (d \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}) \circ \iota^{p,q} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \hookrightarrow \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \Omega^{k+1}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathcal{A}^{p+1,q}(M)$$
$$\overline{\partial}_{p,q} := \pi^{p,q+1} \circ (d \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}) \circ \iota^{p,q} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \hookrightarrow \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \Omega^{k+1}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(M)$$

Es demostra que per una $2n$-varietat quasi complexa (M, J), M és n-varietat complexa si i només si $d = \partial + \overline{\partial}$. De $d^2 = 0$, es dedueix que $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$ i $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$. Obtenim el bicomplex de cocadenes $\mathcal{A}^{\bullet,\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^{0,0}(M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \mathcal{A}^{0,1}(M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \mathcal{A}^{0,2}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^{1,0}(M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \mathcal{A}^{1,1}(M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\partial"] & \mathcal{A}^{1,2}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^{2,0}(M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d] & \mathcal{A}^{2,1}(M) \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d] & \mathcal{A}^{2,2}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

De cada fila i cada columna podem definir una cohomologia:

Definició 2.2. *Definim els grups de cohomologia de Dolbeault i anti-Dolbeault com $H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(M), \overline{\partial})$ i $H^p(\mathcal{A}^{\bullet,q}(M), \partial)$ respectivament.*

Es pot comprovar que $H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(M), \overline{\partial}) = H^q(\mathcal{A}^{\bullet,p}(M), \partial)$ ja que ∂ i $\overline{\partial}$ són conjugats.
Volem ara recuperar els operadors de la secció anterior. Podem estendre $\star$ a $\mathcal{A}^{p,q}(M)$ completant el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^k(M) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\star"] & \Omega^k(M) \otimes_R \mathbb{C} \arrow[r, two heads, "\pi^{p,q}"] \arrow[d, "\star \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}"] & \mathcal{A}^{p,q}(M) \\
\Omega^{2n-k}(M) \arrow[r, hook] & \Omega^{2n-k}(M) \otimes_R \mathbb{C} \arrow[r, two heads, "\pi^{n-p,n-q}"] & \mathcal{A}^{n-p,n-q}(M)
\end{tikzcd}$$

Es comprova que el morfisme que fa commutatiu el diagrama és $\pi^{n-p,n-q} \circ (\star_k \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}) \circ \iota^{p,q}$. El denotem per $\star_{p,q}$. De forma similar a la secció anterior, obtenim que

$$\partial^*_{p,q} = - \star^{-1}_{2n-p+1,2n-q} \circ \partial_{2n-p,2n-q} \circ \star_{p,q} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p-1,q}(M)$$
$$\overline{\partial}^*_{p,q} = - \star^{-1}_{2n-p,2n-q+1} \circ \overline{\partial}_{2n-p,2n-q} \circ \star_{p,q} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p,q-1}(M)$$

són els operadors adjunts amb el producte escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge \overline{\star_{p,q}\beta}, \ \ \alpha, \beta \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

de $\partial, \overline{\partial}$. Ara, podem definir els operadors de Laplace-Beltrami sobre $\partial, \overline{\partial}$ com

$$\Delta^{\partial}_{p,q} := \partial_{p-1,q} \circ \partial^*_{p,q} + \partial^*_{p+1,q} \circ \partial_{p,q} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$$
$$\Delta^{\overline{\partial}}_{p,q} := \overline{\partial}_{p,q-1} \circ \overline{\partial}^*_{p,q} + \overline{\partial}^*_{p,q+1} \circ \overline{\partial}_{p,q} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

Per definir Δ_d sobre $\mathcal{A}^{p,q}(M)$, el pensem com $\pi^{p,q} \circ (\Delta^p_k \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}) \circ \iota^{p,q}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{p,q}(M) \arrow[r, hook, "\iota^{p,q}"] & \Omega^k(M) \otimes_R \mathbb{C} \arrow[r, "d^*_k \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "d_k \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr, "\Delta^d_k \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}"] & \Omega^{k-1}(M) \otimes_R \mathbb{C} \arrow[d, "d_{k-1} \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}"] & \\
 & \Omega^{k+1}(M) \otimes_R \mathbb{C} \arrow[r, "d^*_{k+1} \otimes_{\mathbb{R}} id_{\mathbb{C}}"] & \Omega^k(M) \otimes_R \mathbb{C} \arrow[r, two heads, "\pi^{p,q}"] & \mathcal{A}^{p,q}(M)
\end{tikzcd}$$

Tots els resultats de la secció anterior es compleixen amb aquests nous operadors. Cometrem abusos de notació i escriurem $\Delta^{\partial}_{p,q} = \Delta_{\partial}$ i viceversa.

2.2 Estructura hermítica i kähleriana

Definició 2.3. *Sigui (M, J) una $2n$-varietat quasi complexa i g mètrica de Riemann en M. g és compatible amb l'estructura quasi complexa J si $\forall p(p \in M \Rightarrow \forall u \forall v(u, v \in T_pM \Rightarrow g_p(v, w) = g_p(J(v), J(w))))$. En aquest cas, direm que g és una estructura hermítica en M, que (M, J) dotada d'una estructura hermítica és una varietat hermítica i anomenarem $\omega := g(J(\cdot), \cdot)$ la forma fonamental.*

Fixem-nos que tota varietat quasi complexa és una varietat hermítica: admet una estructura hermítica via $h_p(v, w) := g_p(v, w) + g_p(J(v), J(w))$, on g és una mètrica riemanniana de M arbitrària.
En coordenades holomorfes $(z_1, \dots, z_n)$, la forma fonamental s'escriu com

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j$$

Ara, considerem varietats complexes.

Definició 2.4. *Una estructura kähleriana és una estructura hermítica tal que la seva forma fonamental és tancada. Anomenarem n-varietat kähleriana a una n-varietat complexa equipada amb una estructura kähleriana.*

Lema 2.5. *Sigui (M, g, J) una n-varietat kähleriana. Aleshores, en tot entorn de $p \in M$ existeixen coordenades $z'_1, \dots, z'_n$ tals que $h = Id + O(\|z\|^2)$.*

Demostració. Considerem coordenades holomorfes $(z_1 \dots, z_n)$ centrades en $p \in M$. Llevat d'un canvi de coordenades lineal, podem suposar que $(h_{ij})(0) = Id_n$. Si $\partial_{z_k} := \frac{\partial}{\partial z_k}, \partial_{\overline{z}_k} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$, per holomorfia,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_{z_k} h_{ij}(0) z_k + \partial_{\overline{z}_k} h_{ij}(0) \overline{z}_k \right) + O(\|h\|^2) \qquad ((h_{ij})(0) = Id_n)$$

Fixem-nos que

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{z}_k} g_{i,j} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j &= \partial_{z_k} \overline{g_{i,j}} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (\partial_{\overline{z}} f = \partial_z \overline{f}) \\
&= \partial_{z_k} g_{j,i} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (g \text{ hermítica}) \\
&= -\partial_{z_k} g_{j,i} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (\wedge \text{ alternada}) \\
&= -\partial_{z_i} g_{j,k} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (i := k, k := i) \\
&= -\partial_{\overline{z}_i} g_{j,k} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (z_i := \overline{z}_i, \overline{z}_i := z_i) \\
&= -\partial_{z_i} \overline{g_{j,k}} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (\partial_{\overline{z}} f = \partial_z \overline{f}) \\
&= -\partial_{z_i} g_{k,j} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (g \text{ hermítica})
\end{aligned}$$

Tenim que $d\omega = 0$ ja que M és kähleriana. A més,

$$\begin{aligned}
d\omega &= (\partial + \overline{\partial}) \Big(\frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j \Big) && (M \text{ varietat complexa i } \omega \text{ en coord.}) \\
&= \frac{i}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} \partial_{z_k} h_{i,j} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j + \partial_{\overline{z}_k} h_{i,j} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && (\partial, \overline{\partial} \text{ en coordenades}) \\
&= \frac{i}{2} \sum_{i,j,k=1}^{n} (\partial_{z_k} h_{i,j} - \partial_{z_i} g_{k,j}) \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j && \begin{pmatrix} \partial_{\overline{z}_k} g_{i,j} \mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j \\ = -\partial_{z_i} g_{k,j} \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'on deduïm que $\partial_{z_k} h_{i,j} = \partial_{z_i} g_{k,j}$. Definim $z'_j := z_j + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{z_k} g_{i,j}(0) z_i z_k$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}z'_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}'_j \\
&= \mathrm{d}\Big(z_j + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{z_k} g_{i,j}(0) z_i z_k \Big) \wedge \mathrm{d}\Big(\overline{z}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{\overline{z}_k} g_{j,i}(0) \overline{z}_i \overline{z}_k \Big) \\
&= \Big(\mathrm{d}z_j + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} (\partial_{z_k} g_{i,j}(0) + \partial_{z_i} g_{k,j}(0)) z_k \mathrm{d}z_i \Big) \wedge \Big(\mathrm{d}\overline{z}_j + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} (\partial_{\overline{z}_k} g_{j,i}(0) + \partial_{\overline{z}_i} g_{j,k}(0)) \overline{z}_k \mathrm{d}\overline{z}_i \Big) \\
&= \Big(\mathrm{d}z_j + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{z_k} g_{i,j}(0) z_k \mathrm{d}z_i \Big) \wedge \Big(\mathrm{d}\overline{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{\overline{z}_k} g_{j,i}(0) \overline{z}_k \mathrm{d}\overline{z}_i \Big) \\
&= \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{z_k} g_{i,j}(0) z_k \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{\overline{z}_k} g_{j,i}(0) \overline{z}_k \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_i + O(\|z\|^2)
\end{aligned}$$

d'on deduïm que

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \big(\partial_{z_k} h_{ij}(0) z_k + \partial_{\overline{z}_k} h_{ij}(0) \overline{z}_k \big) + O(\|h\|^2) \Big) \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{z_k} g_{i,j}(0) z_k \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j + \sum_{i,k=1}^{n} \partial_{\overline{z}_k} g_{j,i}(0) \overline{z}_k \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_i \Big) + O(\|z\|^2) \\
&= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}z'_i \wedge \mathrm{d}\overline{z}'_j
\end{aligned}$$

com volíem veure. □

2.3 Identitats de Kähler i descomposició de Hodge

Sigui M n-varietat kähleriana amb forma fonamental ω. Definim l'operador de Lefschetz $L_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+2}(M)$ via $L_k(\alpha) := \omega \wedge \alpha$. Es comprova que els seu operador autoadjunt és $\Lambda_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-2}(M)$ definit via $\Lambda_k := \star_{2n-k+2}^{-1} \circ L_{2n-k} \circ \star_k$. Escriurem L i Λ.

Proposició 2.6. *$[\overline{\partial}^*, L] = i\partial$, $[\partial^*, L] = -i\overline{\partial}$, $[\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*$ i $[\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*$.*

Demostració. Demostrem només $[\overline{\partial}^*, L] = i\partial$. Les altres igualtats resulten de la propietat d'adjunció i per conjugació.
Donat $p \in M$, podem escollir coordenades holomorfes $(z_1, \ldots, z_n)$ tals que $\omega = \sum_{\ell=1}^n \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell$. En coordenades, podem veure que

$$\overline{\partial}^* \alpha = -\sum_{j=1}^n \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j} \alpha$$

on $\lrcorner$ és el producte interior. Fixem-nos que, si $\ell = j$,

$$\begin{aligned}
\partial_{z_j} \lrcorner (\mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j}\alpha) &= \partial_{z_j} \lrcorner (\mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell) \wedge \partial_{z_j}\alpha + \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha && (\lrcorner \text{ derivació}) \\
&= \big(\partial_{z_j} \lrcorner \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell - \mathrm{d}z_\ell \wedge \partial_{z_\ell} \lrcorner \mathrm{d}\overline{z}_\ell\big) \wedge \partial_{z_j}\alpha + \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha && (\lrcorner \text{ derivació}) \\
&= -\mathrm{d}z_\ell \wedge \partial_{z_\ell} \lrcorner \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j}\alpha + \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha && (\partial_{z_j} \lrcorner \mathrm{d}z_j = 0) \\
&= -\mathrm{d}z_\ell \wedge \partial_{z_j}\alpha + \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha && (\partial_{z_j} \lrcorner \mathrm{d}\overline{z}_j = 1)
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
[\overline{\partial}^*, L]\alpha &= \overline{\partial}^*(\omega \wedge \alpha) - \omega \wedge \overline{\partial}^*\alpha \\
&= -\sum_{j=1}^n \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}(\omega \wedge \alpha) + \omega \wedge \sum_{j=1}^n \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha \\
&= -\sum_{j=1}^n \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\Big(i\sum_{\ell=1}^n \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \alpha\Big) + i\sum_{\ell=1}^n \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \sum_{j=1}^n \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha \\
&= -\sum_{j=1}^n \Big(i\sum_{\ell=1}^n \partial_{z_j} \lrcorner \big(\mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j}\alpha\big)\Big) + \sum_{j=1}^n \Big(i\sum_{\ell=1}^n \mathrm{d}z_\ell \wedge \mathrm{d}\overline{z}_\ell \wedge \partial_{z_j} \lrcorner \partial_{z_j}\alpha\Big) \\
&= \sum_{j=1}^n \mathrm{d}z_\ell \wedge \partial_{z_j}\alpha \\
&= i\partial\alpha
\end{aligned}$$

com volíem. □

Proposició 2.7. *$\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\overline{\partial}}$.*

Demostració. Tenim que

$$\begin{aligned}
\Delta_d &= dd^* + d^*d && (\text{Definició de } \Delta_d) \\
&= (\partial + \overline{\partial})(\partial^* + \overline{\partial}^*) + (\partial^* + \overline{\partial}^*)(\partial + \overline{\partial}) && (d = \partial + \overline{\partial}) \\
&= (\partial + \overline{\partial})(\partial^* - i[\Lambda, \partial]) + (\partial^* - i[\Lambda, \partial])(\partial + \overline{\partial}) && ([\Lambda, \partial] = i\overline{\partial}^*) \\
&= \Delta_\partial + \overline{\partial}\partial^* - i\partial\Lambda\partial - i\overline{\partial}\Lambda\partial + i\partial^2\Lambda + i\partial\overline{\partial}\Lambda - i\Lambda\partial^2 + i\partial\Lambda\partial - i\Lambda\partial\overline{\partial} + i\partial\Lambda\overline{\partial} + \partial^*\overline{\partial} && (\text{Definició de } \Delta_\partial) \\
&= \Delta_\partial + \overline{\partial}\partial^* - i\overline{\partial}\Lambda\partial + i\partial\overline{\partial}\Lambda - i\Lambda\partial\overline{\partial} + i\partial\Lambda\overline{\partial} + \partial^*\overline{\partial} && (\partial^2 = 0)
\end{aligned}$$

Fixem-nos que

$$\begin{aligned}
\partial^*\overline{\partial} &= i[\Lambda, \overline{\partial}]\overline{\partial} && ([\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*) \\
&= i\Lambda\overline{\partial}\overline{\partial} - i\overline{\partial}\Lambda\overline{\partial} \\
&= -i\overline{\partial}\Lambda\overline{\partial} && (\overline{\partial}^2 = 0) \\
&= -i\overline{\partial}\Lambda\overline{\partial} + i\overline{\partial}\overline{\partial}\Lambda && (\overline{\partial}^2 = 0) \\
&= -\overline{\partial}(i[\Lambda, \overline{\partial}]) \\
&= -\overline{\partial}\partial^* && ([\Lambda, \overline{\partial}] = -i\partial^*)
\end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
\Delta_d &= \Delta_\partial + \overline{\partial}\partial^* - i\overline{\partial}\Lambda\partial + i\partial\overline{\partial}\Lambda - i\Lambda\partial\overline{\partial} + i\partial\Lambda\overline{\partial} + \partial^*\overline{\partial} \\
&= \Delta_\partial - i\overline{\partial}\Lambda\partial + i\partial\overline{\partial}\Lambda - i\Lambda\partial\overline{\partial} + i\partial\Lambda\overline{\partial} && (\partial^*\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial^*) \\
&= \Delta_\partial + \partial(i[\Lambda,\overline{\partial}]) + i[\Lambda,\overline{\partial}]\partial \\
&= \Delta_\partial + \partial\partial^* + \partial^*\partial && ([\Lambda,\overline{\partial}] = -i\partial^*) \\
&= 2\Delta_\partial && (\text{Definició de } \Delta_\partial)
\end{aligned}$$

La igualtat $\Delta_d = 2\Delta_{\overline{\partial}}$ és similar, d'on obtenim el resultat. □

Corol·lari 2.8. $\Delta_d(\mathcal{A}^{p,q}(M)) \subset \mathcal{A}^{p,q}(M)$.

Demostració. Donat $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$, $\Delta_d\omega = 2\Delta_\partial\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$. □

Corol·lari 2.9. *Si $\alpha \in \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ és harmònic, les seves components $\alpha^{p,q} \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$ són harmòniques.*

Demostració. Recordem la descomposició $\Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(M)$. Com $\ker \Delta_d \subset \Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, donat $\alpha \in \ker \Delta_d$, escrivim $\alpha = \sum_{p+q=k} \alpha^{p,q}$, on $\alpha^{p,q} \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$. Aleshores, $0 = \Delta_d\alpha = \sum_{p+q=k} \Delta_d\alpha^{p,q}$. Com $\Delta_d(\mathcal{A}^{p,q}(M)) \subset \mathcal{A}^{p,q}(M)$, deduïm que $\forall p \forall q (p+q=k \Rightarrow \alpha^{p,q} = 0)$. □

El recíproc és cert. En particular tenim la descomposició $\ker \Delta_k^d = \bigoplus_{p+q=k} \ker \Delta_{p,q}^{\overline{\partial}}$.

Teorema 2.10. *Donada M una varietat kähleriana compacte, $H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{C})) = \bigoplus_{p+q=k} H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(M), \overline{\partial})$.*

Demostració. Per el·lipticitat de $\Delta_{p,q}^{\overline{\partial}}$, deduïm que $\ker \Delta_{p,q}^{\overline{\partial}} \cong H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(M), \overline{\partial})$ de forma similar a 1.12. Per tant,

$$H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{C})) = H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \ker \Delta_k^d = \bigoplus_{p+q=k} \ker \Delta_{p,q}^{\overline{\partial}} \cong \bigoplus_{p+q=k} H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(M), \overline{\partial})$$

La igualtat vindrà donada pel fet que l'isomorfisme és canònic, en el sentit que no depèn de la mètrica de Kähler (veure [Voi02], 6.11.: la idea és considerar el $\mathbb{C}$-submòdul $K^{p,q} \subset H^k(\Omega^\bullet(M;\mathbb{C}))$ que consisteix en les classes de cohomologia representables per una forma tancada de tipus (p,q) i veure que $K^{p,q} = H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(M), \overline{\partial})$. Com $K^{p,q}$ no depèn de la mètrica, haurem acabat). □

Referències

[Dem97] J.P. Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. Université de Grenoble I, 1997. URL: https://books.google.es/books?id=jQHtGwAACAAJ.

[Voi02] Claire Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*. Ed. de LeilaTranslator Schneps. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2002.