En tot el lliurament, R serà un anell commutatiu amb unitat i un DIP.

Problema 1. *Sigui M un R-mòdul M.*

1. *Si $m \in M$, definim l'anul·lador de m com $\operatorname{ann}_R(m) = \{r \in R : rm = 0_R\}$. Proveu que $\operatorname{ann}_R(m)$ és un ideal de R.*

   Demostració. Veiem que $\operatorname{ann}_R(m) = \{r \in R : rm = 0_R\}$ és un ideal de R. Per definició, $\operatorname{ann}_R(m) \subset R$. Siguin $r, r' \in \operatorname{ann}_R(m)$. Tenim que

$$\begin{aligned}(r - r')m &= rm - r'm && \text{(Distributivitat)}\\ &= 0_R - 0_R && (r, r' \in \operatorname{ann}_R(m))\\ &= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})\end{aligned}$$

   Aleshores, $r - r' \in \operatorname{ann}_R(m)$, d'on $\operatorname{ann}_R(m)$ és un subgrup additiu de R. Siguin $r \in R, a \in \operatorname{ann}_R(m)$. Tenim que

$$\begin{aligned}(ra)m &= r(am) && \text{(Associativitat)}\\ &= r0_R && (a \in \operatorname{ann}_R(m))\\ &= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})\end{aligned}$$

   Aleshores, $ra \in \operatorname{ann}_R(m)$, d'on deduïm $R \operatorname{ann}_R(m) \subset \operatorname{ann}_R(m)$. □

2. *Diem que m és de torsió si $\operatorname{ann}_R(m) \neq \{0_R\}$ i definim el submòdul de torsió de M com $T(M) = \{m \in M : \operatorname{ann}_R(m) \neq \{0_R\}\}$. Diem que M és lliure de torsió si $T(M) = \{0_R\}$. Proveu que $T(M)$ és un submòdul de M i $M/T(M)$ és lliure de torsió.*

   Demostració. Veiem que

$$\begin{aligned}T(M) &= \{m \in M : \operatorname{ann}_R(m) \neq \{0_R\}\}\\ &= \{m \in M : \exists r(r \in R - \{0_R\} \wedge rm = 0_R)\}\end{aligned}$$

   és R-submòdul de M. $T(M) \subset M$. Sigui $m_1, m_2 \in T(M)$. Aleshores, $\forall i(i \in \{1, 2\} \Rightarrow \exists r_i(r_i \in R - \{0_R\} \wedge r_i m_i = 0_R))$. Com R és DIP, R és domini. Per tant, $r_1 \neq 0_R \wedge r_2 \neq 0_R \Rightarrow r_1 r_2 \neq 0_R$. Tenim que

$$\begin{aligned}(r_1r_2)(m_1 - m_2) &= (r_1r_2)m_1 - (r_1r_2)m_2 && \text{(Distributivitat)}\\ &= (r_2r_1)m_1 - (r_1r_2)m_2 && (R \text{ commutatiu})\\ &= r_2(r_2m_1) - r_1(r_2m_2) && \text{(Associativitat)}\\ &= r_20_R - r_10_R && (r_1 \in \operatorname{ann}_R(m_1) \wedge r_2 \in \operatorname{ann}_R(m_2))\\ &= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})\end{aligned}$$

   Per tant, $\exists r(r \in R - \{0_R\} \wedge r(m_1 - m_2) = 0_R)$, és a dir, $m_1 - m_2 \in T(M)$, d'on $T(M)$ és un subgrup additiu de M. Sigui $r \in R, m \in T(M)$. $\exists r'(r' \in R - \{0_R\} \wedge r'm = 0_R)$. Per tant,

$$\begin{aligned}r'(rm) &= (r'r)m && \text{(Associativitat)}\\ &= (rr')m && (R \text{ commutatiu})\\ &= r(r'm) && \text{(Associativitat)}\\ &= r0_R && (r' \in \operatorname{ann}_R(m))\\ &= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})\end{aligned}$$

   Com $\exists r'(r' \in R - \{0_R\} \wedge r'(rm) = 0_R)$, $rm \in T(M)$, és a dir, $T(M)$ és tancat per multiplicació d'elements de R. Com $T(M)$ és un subgrup additiu de M i és tancat per multiplicació d'elements de R, és un R-submòdul de M.

Veiem que $T/T(M)$ és lliure de torsió. Clarament

$$\begin{aligned}\{T(M)\} \subset T(M/T(M)) &= \{m + T(M) : \exists r(r \in R - \{0_R\} \land r(m + T(M)) = T(M))\}\\ &= \{m + T(M) : \exists r(r \in R - \{0_R\} \land rm \in T(M))\}\end{aligned}$$

Sigui $m + T(M) \in T(M/T(M))$. $\exists r(r \in R - \{0_R\} \land rm \in T(M))$. Com $rm \in T(M)$, $\exists r'(r' \in R - \{0_R\} \land r'(rm) = 0_R)$. Com R és domini i $r, r' \neq 0_R$, deduïm que $m = 0_R$. Aleshores, $m + T(M) = 0_R + T(M) = T(M) \in \{T(M)\}$. Per tant, $T(M/T(M)) \subset \{T(M)\}$. Per doble inclusió, $T(M/T(M)) = \{T(M)\}$. □

3. *Proveu que $T(M \oplus N) = T(M) \oplus T(N)$.*

Demostració. Escrivim

$$\begin{aligned}T(M \oplus N) &= \{(m, n) \in M \oplus N : \exists r(r \in R - \{0_R\} \land r(m, n) = (rm, rn) = (0_R, 0_R))\}\\ T(M) \oplus T(N) &= \{(m, n) \in M \oplus N : \exists r_1(r_1 \in R - \{0_R\} \land r_1 m = 0_R) \land \exists r_2(r_2 \in R - \{0_R\} \land r_2 n = 0_R)\}\end{aligned}$$

Sigui $(m, n) \in T(M \oplus N)$. $\exists r(r \in R - \{0_R\} \land r(m, n) = (rm, rn) = (0_R, 0_R))$. Per tant, $\exists r(r \in R - \{0_R\} \land rm = 0_R) \land \exists r(r \in R - \{0_R\} \land rn = 0_R)$, és a dir, $(m, n) \in T(M) \oplus T(N)$ (i per tant $T(M \oplus N) \subset T(M) \oplus T(N)$).
Sigui $(m, n) \in T(M) \oplus T(N)$. $\exists r_1(r_1 \in R - \{0_R\} \land r_1 m = 0_R) \land \exists r_2(r_2 \in R - \{0_R\} \land r_2 n = 0_R)$. Com R és domini, $r_1 \neq 0_R \land r_2 \neq 0_R \Rightarrow r_1 r_2 \neq 0_R$. Tenim que

$$\begin{aligned}(r_1 r_2)(m, n) &= ((r_1 r_2)m, (r_1 r_2)n) & \\ &= ((r_2 r_1)m, (r_1 r_2)n) & (R \text{ commutatiu})\\ &= (r_2(r_2 m), r_1(r_2 n)) & (\text{Associativitat})\\ &= (r_2 0_R, r_1 0_R) & (r_1 \in \operatorname{ann}_R(m) \land r_2 \in \operatorname{ann}_R(n))\\ &= (0_R, 0_R) & (0_R \text{ element neutre additiu})\end{aligned}$$

Per tant, $\exists r(r \in R - \{0_R\} \land r(m, n) = (rm, rn) = (0_R, 0_R))$, és a dir, $(m, n) \in T(M \oplus N)$ (i per tant $T(M) \oplus T(N) \subset T(M \oplus N)$). Per doble inclusió, $T(M \oplus N) = T(M) \oplus T(N)$. □

4. *Calculeu $T(R)$ i $T(R/(a))$.*

Demostració. Ho fem directament:

$$\begin{aligned}T(R) &= \{r \in R : \exists r'(r' \in R - \{0_R\} \land r'r = 0_R)\} & (\text{Per definició de } T(R))\\ &= \{0_R\} & (R \text{ domini})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(R/(a)) &= \{r + (a) \in R + (a) : \exists r'(r' \in R - \{0_R\} \land r'(r + (a)) = (a))\} & (\text{Per definició de } T(R/(a)))\\ &= \{r + (a) \in R + (a) : \exists r'(r' \in R - \{0_R\} \land r'r \in (a))\} & \\ &= R/(a) & (r' = a \text{ i } (a) \text{ ideal})\end{aligned}$$

□

Problema 2. *Proveu que si M és un mòdul finitament generat i lliure de torsió és lliure.*

Demostració. Com M R-mòdul finitament generat, $\exists m_1 \ldots \exists m_s(m_1, \ldots, m_s \in M - \{0_R\} \land M = (m_1, \ldots, m_s))$. Sense pèrdua de la generalitat, podem suposar s mínima. Escrivim $\forall i(i \in \{1, \ldots, s\} \Rightarrow M_i := (m_1, \ldots, m_i))$. Veiem que M_1 és lliure. Sigui $f : R \to M_1$ morfisme de R-mòduls definida per $f(r) := rm_1$. f és exhaustiva ja que $M_1 := (m_1)$. Sigui $r \in \ker f$. Aleshores, $rm_1 = 0_R$. Suposem que $r \neq 0_R$. Aleshores, $m_1 \in T(M)$. Com M és lliure de torsió, $T(M) = \{0_R\}$, d'on deduïm que $m_1 = 0_R$, contradicció. Per tant, $r = 0_R \in \{0_R\}$, d'on $\ker f \subset \{0_R\}$. Com $\{0_R\} \subset \ker f$ és evident, per doble inclusió $\ker f = \{0_R\}$. Per tant, f és injectiva. Com f morfisme de R-mòduls és exhaustiva i injectiva, f és un isomorfisme. Per tant, $M_1 \cong R$ (M_1 és lliure).

Suposem que $j := \max\{i \in \{1, \ldots, s\} : M_i \text{ és lliure}\} < s$. M_{j+1} no és lliure. Aleshores, $\{m_1, \ldots, m_{j+1}\}$ és un sistema generador linealment dependent. Per tant,

$$\forall r_1 \ldots \forall r_{j+1}\Big(r_1, \ldots, r_{j+1} \in R \Rightarrow \Big(\sum_{k=1}^{j+1} r_k m_k = 0_R \wedge \exists k\Big(k \in \{1, \ldots, j+1\} \wedge r_k \neq 0_R\Big)\Big)\Big)$$

Suposem que $r_{j+1} \neq 0_R$. Aleshores, $\sum_{k=1}^{j+1} r_k m_k = \sum_{k=1}^{j} r_k m_k = 0_R$. Com M_j és lliure, $\{m_1, \ldots, m_j\}$ és un conjunt linealment independent. Per tant, $\sum_{k=1}^{j} r_k m_k = 0_R \Rightarrow \forall k(k \in \{1, \ldots, j\} \Rightarrow r_k = 0_R)$, contradicció. Per tant, $r_{j+1} \neq 0_R$.
Sigui $g : M_{j+1} \to M_j$ definida per $g(x) := r_{j+1}x$. g ben definida, ja que si $x = \sum_{k=1}^{j+1} r'_k m_k$, es comprova que $g(x) = \sum_{k=1}^{j}(r_{j+1}r'_k - r'_{j+1}r_k)m_k \in M_j$. Sigui $x \in \ker g$. Aleshores, $r_{j+1}x = 0_R$. Suposem que $x \neq 0_R$. Aleshores, $r_{j+1} \in T(M)$. Com M és lliure de torsió, $T(M) = \{0_R\}$, d'on deduïm que $r_{j+1} = 0_R$, contradicció. Per tant, $x = 0_R \in \{0_R\}$ i $\ker g \subset \{0_R\}$, d'on $\ker g = \{0_R\}$ per doble inclusió. Aleshores, $M_{j+1} \cong \operatorname{im} g$, contradicció, ja que com M_j és lliure i $\operatorname{im} g$ és R-submòdul de M_j, $\operatorname{im} g$ és lliure i M_{j+1} no ho és. Per tant $j = s$, com volíem veure. □

Problema 3. *Sigui M un R-mòdul finitament generat. Proveu que la successió exacta curta*

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0$$

és escindida. Deduïu que M és isomorf a la suma directa del seu submòdul de torsió i un mòdul lliure. Proveu que aquesta descomposició de M com a suma directa d'un mòdul de torsió i un mòdul lliure és única tret d'isomorfisme.

Demostració. Sigui M R-mòdul finitament generat. Aleshores, $M/T(M)$ és R-mòdul finitament generat i lliure de torsió, d'on deduïm que és lliure. Sigui $\{m_1 + T(M), \ldots, m_n + T(M)\}$ base de $M/T(M)$ tal que $\forall i(i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow m_i \notin T(M))$.
Sigui $\alpha : M/T(M) \to M$ definida per $\forall i(i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow \alpha(m_i + T(M)) := m_i)$ i estenent per linealitat. α esta ben definida i és morfisme de R-mòduls. Considerem $\pi : M \twoheadrightarrow M/T(M)$ la projecció canònica. Aleshores,

$$\begin{aligned} \pi \circ \alpha(m_i + T(M)) &= \pi(m_i) && \text{(Per definició de } \alpha) \\ &= m_i + T(M) && \text{(Per definició de } \pi) \end{aligned}$$

Deduïm que $\pi \circ \alpha = id_{M/T(M)}$. Per tant,

$$0 \longrightarrow T(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T(M) \longrightarrow 0$$

és escindida, o, equivalentment, $M \cong T(M) \oplus (M/T(M))$, on $T(M)$ és el R-submòdul de torsió de M i $M/T(M)$ R-mòdul lliure per l'observació inicial.
Sigui T_{tor} R-mòdul de torsió i L R-mòdul lliure tal que $M \cong T_{tor} \oplus L$. Tenim que

$$\begin{aligned} T(M) &\cong T(T_{tor} \oplus L) && (M \cong T_{tor} \oplus L) \\ &= T(T_{tor}) \oplus T(L) && (T(M \oplus N) = T(M) \oplus T(N)) \\ &= T(T_{tor}) \oplus \{0_R\} && (L \text{ lliure} \implies L \text{ lliure de torsió}) \\ &\cong T(T_{tor}) \\ &= T_{tor} && (T_{tor}\ R\text{-mòdul de torsió}) \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \frac{M}{T(M)} &\cong \frac{T(M) \oplus (M/T(M))}{T(M) \oplus \{0_R\}} \\ &\cong \frac{T_{tor} \oplus L}{T_{tor} \oplus \{0_R\}} && (T(M) \oplus (M/T(M)) \cong M \cong T_{tor} \oplus L \text{ i } T(M) \cong T_{tor}) \\ &\cong L \end{aligned}$$

Deduïm que la descomposició de M com a suma directa d'un R-mòdul de torsió i un R-mòdul lliure és única tret d'isomorfisme. □

Problema 4. *Sigui M un R-mòdul de torsió, és a dir, $T(M) = M$. Per a cada ideal (r) de R (recordem que és DIP), definim el submòdul (r)-primari de M com $T_{(r)} := \{m \in M : r^n m = 0_R$ per algunn $\geq 0\}$.*

1. *Proveu que $T_{(r)}$ és independent del generador que triem per l'ideal.*

   Demostració. Siguin $r, r' \in R$ tal que $(r) = (r')$. Sigui $m \in T_{(r)} := \{m \in M : \exists n(n \in \mathbb{N} \wedge r^n m = 0_R)\}$. $\exists n(n \in \mathbb{N} \wedge r^n m = 0_R)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
(r')^n &= (r''r)^n m && (r' \in (r') = (r'') \implies \exists r''(r'' \in R \wedge r' = r''r)) \\
&= (r'')^n r^n m && (R \text{ commutatiu}) \\
&= (r'')^n 0_R && (r^n m = 0_R) \\
&= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})
\end{aligned}$$

   Per tant, $m \in T_{(r')}$, d'on $T_{(r)} \subset T_{(r')}$. Per simetria, $T_{(r')} \subset T_{(r)}$. Per doble inclusió, $T_{(r)} = T_{(r')}$, com volíem veure. $\square$

2. *Proveu que si r, s són coprimers, llavors $T_{(rs)} \cong T_{(r)} \oplus T_{(s)}$.*

   Demostració. Sigui $m \in T_{(r)} \cap T_{(s)}$. Aleshores, $\exists n \exists n'(n, n' \in \mathbb{N} \wedge r^n m = s^{n'} m = 0_R)$. Com r, s coprimers, $(r, s) = R$. Aleshores, $\exists r' \exists s'(r', s' \in R \wedge r'r^n + s's^{n'} = 1_R)$. Per tant,

$$\begin{aligned}
m &= m(r'r^n + s's^{n'}) && (r'r^n + s's^{n'} = 1_R) \\
&= m(r'r^n) + m(s's^{n'}) && (\text{Distributivitat}) \\
&= r'(r^n m) + s'(s^{n'} m) && (\text{Associativitat i commutativitat}) \\
&= r'0_R + s'0_r && (r^n m = s^{n'} m = 0_R) \\
&= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})
\end{aligned}$$

   Per tant $m \in \{0_R\}$, d'on $T_{(r)} \cap T_{(s)} \subset \{0_R\}$. Com $\{0_R\} \subset T_{(r)} \cap T_{(s)}$ és evident, per doble inclusió $T_{(r)} \cap T_{(s)} = \{0_R\}$.
   Sigui $f : T_{(r)} \oplus T_{(s)} \to T_{(rs)}$ definida per $f(m, m') := m + m'$. Veiem que f esta ben definida. Sigui $(m, m') \in T_{(r)} \oplus T_{(s)}$. Aleshores, $\exists n \exists n'(n, n' \in \mathbb{N} \wedge r^n m = s^{n'} m' = 0_R)$. Tenim que

$$\begin{aligned}
(rs)^{\max\{n,n'\}} f(m, m') &= (rs)^{\max\{n,n'\}}(m + m') && (\text{Per definició de } f) \\
&= s^{\max\{n,n'\}}(r^{\max\{n,n'\}} m) + r^{\max\{n,n'\}}(s^{\max\{n,n'\}} m') && (\text{Lo de sempre}) \\
&= s^{\max\{n,n'\}} 0_R + r^{\max\{n,n'\}} 0_R && (r^n m = s^{n'} m' = 0_R) \\
&= 0_R && (\text{També lo de sempre})
\end{aligned}$$

   Per tant $f(m, m') \in T_{(rs)}$. f és clarament morfisme de R-mòduls i $\ker f = (T_{(r)} \cap T_{(s)}) \oplus (T_{(r)} \cap T_{(s)}) = \{(0_R, 0_R)\}$ (f injectiva). Comprovem l'exhaustivitat. Sigui $m \in T_{(rs)}$. $\exists n(n \in \mathbb{N} \wedge (rs)^n m = 0_R)$. Com $(r, s) = R$, $\exists r' \exists s'(r', s' \in R \wedge r'r^n + s's^{n'} = 1_R)$. Com $(rs)^n m$, $r'r^n m \in T_{(s)}$ i $s's^n m \in T_{(r)}$. Tenim que

$$\begin{aligned}
f(s's^n m, r'r^n m) &= s's^n m + r'r^n m && (\text{Per definició de } f) \\
&= (s's^n + r'r^n)m && (\text{Distributivitat}) \\
&= 1_R m && (r'r^n + s's^{n'} = 1_R) \\
&= m
\end{aligned}$$

   Per tant, $\forall m(m \in T_{(rs)} \Rightarrow \exists (x, x')((x, x') \in T_{(r)} \oplus T_{(s)} \wedge f(x, x') = m))$, és a dir, f exhaustiva. Deduïm que $T_{(r)} \oplus T_{(s)} \cong T_{(rs)}$ ja que f és isomorfisme. $\square$

3. *Proveu que $M \cong \bigoplus_p T_{(p)}$, on p es mou en els primers de R.*

   Demostració. Per tot p primer sigui $\iota_p : T_{(p)} \to \bigoplus_p T(M)(= M)$ i $\iota'_p : T_{(p)} \to \bigoplus_p T_{(p)}$ les respectives inclusions. Per la propietat universal de la suma directa,

$$\begin{tikzcd}
T_{(p)} \arrow[r, hook, "\iota'_p"] \arrow[dr, hook, "\iota_p"'] & \bigoplus_p T_{(p)} \arrow[d, dotted, "\exists!\iota"] \\
& T(M)
\end{tikzcd}$$

Per un argument similar a l'apartat anterior, $\ker \iota = \bigoplus_p \bigcap_p T_{(p)} = \bigoplus_p \{0_R\} = \{(0_R)_p\}$, d'on deduïm la injectivitat de ι.
Veiem l'exhaustivitat. Sigui $m \in T(M)$. $\exists r(r \in R - \{0_R\} \wedge rm = 0_R)$. Per tant, $m \in T_{(r)}$. Com R és DIP, R és DFU. Aleshores, $\exists e_1 \dots \exists e_n \exists p_1 \dots \exists p_n (e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in R$ primers $\wedge\, r = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i})$.
Aplicant l'isomorfisme del darrer apartat inductivament, obtenim el següent diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_p T_{(p)} \arrow[d, dotted, "\iota"] & \bigoplus_{i=1}^n T_{(p_i)} \arrow[l, hook', "\beta"'] & \bigoplus_{i=1}^n T_{(p_i^{e_i})} \arrow[l, hook', "T_{(p_i^{e_i})} \subset T_{(p_i)}"'] \\
T(M) & T_{(r)} \arrow[l, hook', "\iota_r"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, hook, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Aleshores, $\iota(\beta \circ \alpha(m)) = m$, d'on obtenim l'exhaustivitat $(\forall m(m \in T(M) \Rightarrow \exists m'(m' \in \bigoplus_p T_{(p)} \wedge \iota(m') = m)))$. $\square$

Problema 5. *Sigui p un primer i $T_{(p)}$ un R-mòdul finitament generat, no nul, (p)-primari d'acord amb la definició de l'exercici anterior.*

1. *Sigui* $\operatorname{ann}_R(T_{(p)}) = \{r \in R : rt \neq 0_R$ *per a tot* $t \in T_{(p)}\}$. *Proveu que és un ideal propi de R, generat per p^N per algun N.*

Demostració. Escrivim $\operatorname{ann}_R(T_{(p)}) := \{r \in R : \forall t(t \in T_{(p)} \Rightarrow rt = 0_R)\}$. Per definició, $\operatorname{ann}_R(T_{(p)}) \subset R$. Siguin $r, r' \in \operatorname{ann}_R(T_{(p)}), t \in T_{(p)}$. Tenim que

$$\begin{aligned}
(r - r')t &= rt - r't && \text{(Distributivitat)} \\
&= 0_R - 0_R && (r, r' \in \operatorname{ann}_R(m)) \\
&= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})
\end{aligned}$$

Aleshores, $r - r' \in \operatorname{ann}_R(T_{(p)})$, d'on $\operatorname{ann}_R(T_{(p)})$ és un subgrup de R. Siguin $r \in R, a \in \operatorname{ann}_R(T_{(p)}), t \in T_{(p)}$. Tenim que

$$\begin{aligned}
(ra)t &= r(at) && \text{(Associativitat)} \\
&= r0_R && (a \in \operatorname{ann}_R(m)) \\
&= 0_R && (0_R \text{ element neutre additiu})
\end{aligned}$$

Aleshores, $ra \in \operatorname{ann}_R(T_{(p)})$, d'on deduïm $R \operatorname{ann}_R(T_{(p)}) \subset \operatorname{ann}_R(T_{(p)})$. Per tant, $\operatorname{ann}_R(T_{(p)})$ és ideal.
Veiem que és propi. Per hipòtesi, $T_{(p)} \neq \{0_R\}$. $\exists t(t \in R - \{0_R\} \wedge t \in T_{(p)})$. Com $1_R \notin \operatorname{ann}_R(t)$, deduïm que $\operatorname{ann}_R(t) \subsetneq R$. Ara,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ann}_R(T_{(p)}) &= \{r \in R : \forall t(t \in T_{(p)} \Rightarrow rt = 0_R)\} && \text{(Per definició de } \operatorname{ann}_R(T_{(p)})) \\
&= \{r \in R : \forall t(t \in T_{(p)} \Rightarrow r \in \operatorname{ann}_R(t))\} && \text{(Per definició de } \operatorname{ann}_R(t)) \\
&= \bigcap_{t \in T_{(p)}} \operatorname{ann}_R(t) && \text{(Per definició de } \cap) \\
&\subset \operatorname{ann}_R(t) && (t \neq 0_R) \\
&\subsetneq R
\end{aligned}$$

com volíem veure.
Veiem que $\exists N(N \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ann}_R(T_{(p)}) = (p^N))$. Com $\operatorname{ann}_R(T_{(p)})$ és ideal de R i R és DIP, $\exists r(r \in R \wedge \operatorname{ann}_R(T_{(p)}) = (r))$. Sigui $r' \in \operatorname{ann}_R(T_{(p)})$. Tenim que $\forall t(t \in T_{(p)} \Rightarrow r't = 0_R)$, $\exists r''(r'' \in R \wedge r' = rr'')$ i $\exists n(n \in \mathbb{N} \wedge p^n t = 0_R)$ (ja que $t \in T_{(p)}$). Aleshores,

$$\begin{aligned}
(p^n - rr'')t &= p^n t - rr''t && () \\
&= p^n t - r't && () \\
&= 0_R - 0_R && () \\
&= 0_R
\end{aligned}$$

Sense pèrdua de la generalitat podem suposar que $t \neq 0_R$ ($T_{(p)} \neq \{0_R\}$). Com R és domini, deduïm que $p^n - rr'' = 0_R$ (d'on $p^n = rr'$). Com p primer i R DFU, $\exists u \exists n'(u \in U(R), n' \leq n \wedge r = up^{n'})$. Per tant,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ann}_R(T_{(p)}) &= (r) \\
&= (up^{n'}) && (r = up^{n'}) \\
&= (p^{n'}) && (u \in U(R))
\end{aligned}$$

com volíem veure. □

2. *Suposem que $T_{(p)}$ està generat per $\{t_1, \dots, t_s\}$. Proveu que hi ha un conjunt de generadors $\{y_1, \dots, y_s\}$ de $T_{(p)}$ tal que $\operatorname{ann}_R(y_1) = \operatorname{ann}_R(T_{(p)})$ $(= (p^N))$.*

Demostració. Com $T_{(p)}$ R-mòdul finitament generat, $\exists t_1 \dots \exists t_s(t_1, \dots, t_s \in T_{(p)} \wedge T_{(p)} = (t_1, \dots, t_s))$. Demostraré una igualtat que potser no és necessària, però la utilitzaré. Sigui $r \in \bigcap_{i=1}^s \operatorname{ann}_R(t_i), t \in T_{(p)}$. Tenim

$$\begin{aligned}
rt &= r\Big(\sum_{i=1}^s r_i t_i\Big) && \Big(t \in T_{(p)} \implies \exists r_1 \dots \exists r_s(r_1, \dots, r_s \in R \wedge t = \sum_{i=1}^s r_i t_i)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^s r_i(rt_i) \\
&= \sum_{i=1}^s r_i 0_R && \Big(r \in \bigcap_{i=1}^s \operatorname{ann}_R(t_i)\Big) \\
&= 0_R
\end{aligned}$$

Per tant, $\forall t(t \in T_{(p)} \Rightarrow r \in \operatorname{ann}_R(t))$, és a dir, $r \in \bigcap_{t \in T_{(p)}} \operatorname{ann}_R(t)$, d'on deduïm $\bigcap_{i=1}^s \operatorname{ann}_R(t_i) \subset \bigcap_{t \in T_{(p)}} \operatorname{ann}_R(t_i)$. La inclusió $\bigcap_{t \in T_{(p)}} \operatorname{ann}_R(t_i) \subset \bigcap_{i=1}^s \operatorname{ann}_R(t_i)$ és clara ja que $t_1, \dots, t_s \in T_{(p)}$. Per doble inclusió, $\bigcap_{i=1}^s \operatorname{ann}_R(t_i) = \bigcap_{t \in T_{(p)}} \operatorname{ann}_R(t)$.
Per un argument similar a la demostració de $\exists N(N \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ann}_R(T_{(p)}) = (p^N))$, podem fer-ho per $\operatorname{ann}_R(t)$, $t \in T_{(p)}$. Per tant, $\forall i(i \in \{1, \dots, s\} \Rightarrow \exists n_i(n_i \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ann}_R(t_i) = (p^{n_i})))$. Sense pèrdua de la generalitat, suposem que $n_s \leq \ldots \leq n_1$. Aleshores,

$$(p^{n_1}) \subset \cdots \subset (p^{n_s})$$

d'on

$$\operatorname{ann}_R(t_1) \subset \cdots \subset \operatorname{ann}_R(t_s)$$

Aleshores, $\bigcap_{i=1}^s \operatorname{ann}_R(t_i) = \operatorname{ann}_R(t_s)$ $(= \operatorname{ann}_R(T_{(p)}))$ i escollint el sistema generador $\{t_s, \dots, t_1\}$ l'enunciat segueix. □

3. *Sigui $T'_{(p)} = T_{(p)}/\langle y_1 \rangle$. Proveu que $T'_{(p)}$ és també finitament generat i (p)-primari. Si $y' \in T'_{(p)}$ satisfà $\operatorname{ann}_R(y') = (p^m)$, llavors $m \leq N$ i existeix $y \in T_{(p)}$ tal que la seva classe mòdul $\langle y_1 \rangle$ és y' i $\operatorname{ann}_R(y) = (p^m)$.*

Demostració. Com $T_{(p)} = (y_1, \ldots, y_s)$, $T_{(p)}/\langle y_1\rangle = (y_2+\langle y_1\rangle, \ldots, y_s+\langle y_1\rangle)$ (també és finitament generat). Podem escriure

$$\begin{aligned} T_{(p)}/\langle y_1\rangle &= \{m + \langle y_1\rangle : m \in T_{(p)}\} \\ &= \{m + \langle y_1\rangle : m \in \{m \in M : \exists n(n \in \mathbb{N} \wedge p^n m = 0_R)\}\} \\ &= \{m + \langle y_1\rangle : \exists n(n \in \mathbb{N} \wedge p^n(m + \langle y_1\rangle) = \langle y_1\rangle)\} \end{aligned}$$

Per tant, $T_{(p)}/\langle y_1\rangle$ és (p)-primari.
Veiem que si $y' \in T_{(p)}/\langle y_1\rangle$ satisfà $\operatorname{ann}_R(y') = (p^m)$, llavors $m \leq N$. Sigui $\pi : T_{(p)} \twoheadrightarrow T_{(p)}/\langle y_1\rangle$. Per exhaustivitat de π, $\exists y(t \in T_{(p)} \wedge \pi(y) = y')$. Tenim que

$$\begin{aligned} (p^N) &= \bigcap_{t \in T_{(p)}} \operatorname{ann}_R(t) & \\ &\subset \operatorname{ann}_R(y) & (y \in T_{(p)}) \\ &= \{r \in R : ry = 0_R\} & (\text{Per definició de } \operatorname{ann}_R(y)) \\ &\subset \{r \in R : ry \in \langle y_1\rangle\} & (0_R \in \langle y_1\rangle) \\ &= \operatorname{ann}_R(y') & (\text{Per definició de } \operatorname{ann}_R(y') \text{ i } \pi(y) = y') \\ &= (p^m) & (\text{Per hipòtesi}) \end{aligned}$$

Com $(p^N) \subset (p^m)$, $m \leq N$, com volíem.
Veiem que existeix $y \in T_{(p)}$ tal que la seva classe mòdul $\langle y_1\rangle$ és y' i $\operatorname{ann}_R(y) = (p^m)$. Tenim que $p^m \in \operatorname{ann}_R(y')$ ($\operatorname{ann}_R(y') = (p^m)$). Aleshores, $\exists r(r \in R \wedge p^m r = ry_1)$. Tenim que

$$\begin{aligned} p^{N-m} r y_1 &= p^{N-m} p^m y & (p^m y = r y_1) \\ &= p^N y & \\ &= 0_R & (y \in T_{(p)} \text{ i } \operatorname{ann}_R(T_{(p)})) \end{aligned}$$

Per tant, $p^{N-m} r \in \operatorname{ann}_R(y_1) = (p^N)$, d'on $\exists r'(r' \in R \wedge p^{N-m} r = r' p^N)$. Ara,

$$\begin{aligned} p^{N-m}(r - r' p^m) &= p^{N-m} r - r' p^m & (\text{Distributivitat}) \\ &= 0_R & (p^{N-m} r = r' p^m) \end{aligned}$$

Com R és domini i p primer, $r - r'p^m = 0_R$ (d'on $r = r'p^m$). Tenim que

$$\begin{aligned} p^m(y - r'y_1) &= p^m y - (r' p^m) y_1 & \\ &= p^m y - r y_1 & (r' p^m = r) \\ &= 0_R & (p^m y = r y_1) \end{aligned}$$

d'on $p^m \in \operatorname{ann}_R(y - r'y_1)$ i, en conseqüència, $(p^m) \subset \operatorname{ann}_R(y - r'y_1)$. Per un argument similar que abans hem vist (quan veiem que $m \leq N$), deduïm que $\operatorname{ann}_R(y - r'y_1) \subset \operatorname{ann}_R(\pi(y - r'y_1))$. Com $\pi(y - r'y_1) = \pi(y) = y'$ i $\operatorname{ann}_R(y') = (p^m)$, obtenim $\operatorname{ann}_R(y - r'y_1) \subset (p^m)$. Per doble inclusió, $\operatorname{ann}_R(y - r'y_1) \subset (p^m)$. $y - r'y_1$ és l'element que busquem. $\square$

4. *Proveu que existeixen enters positius $m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_s$ tals que $\operatorname{ann}_R(T_{(p)}) = (p^{m_s})$ i un isomorfisme de mòduls $T_{(p)} \cong R/(p^{m_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p^{m_s})$.*

Demostració. Procedim per inducció en s.
Sigui $s = 1$. Sigui $f : R \to T_{(p)}$ el morfisme de R-mòduls exhaustiu definit per $f(r) := ry_1$ (ben definit: $T_{(p)} = (y_1)$). Tenim que $\ker f = \operatorname{ann}_R(y_1) = (p^N)$. Aleshores, pel primer teorema d'isomorfisme, $R/(p^N) \cong \operatorname{im} f = T_{(p)}$.
Suposem el resultat cert per $<\ s$. Tenim que $T_{(p)}/\langle y_1\rangle = (y_2 + \langle y_1\rangle, \ldots, y_s + \langle y_1\rangle)$. Per hipòtesi d'inducció, $\exists m_1 \ldots \exists m_{s-1}(m_1 \leq \ldots \leq m_s \wedge T_{(p)}/\langle y_1\rangle \cong \bigoplus_{i=1}^{s-1} R/(p^{m_i}))$. Per l'apartat anterior, $\forall y'(y' \in T_{(p)}/\langle y_1\rangle \Rightarrow \exists y(y \in T_{(p)} \wedge (\pi(y) = y' \wedge \operatorname{ann}_R(y) = \operatorname{ann}_R(y'))))$ (recordem que podem trobar $n(y') \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{ann}_R(y') = (p^{n(y')})$). Aleshores, definim $\beta : T_{(p)}/\langle y_1\rangle \to T_{(p)}$ definida per $\beta(y') = y$ (ben definida per l'elecció de y). Es comprova que β és morfisme de R-mòduls ja que $\pi : T_{(p)} \twoheadrightarrow T_{(p)}/\langle y_1\rangle$ és morfisme de R-mòduls. També es comprova que $\pi \circ \beta = id_{T_{(p)}/\langle y_1\rangle}$. Aleshores,

$$0 \longrightarrow \langle y_1 \rangle \longrightarrow T_{(p)} \longrightarrow T_{(p)}/\langle y_1 \rangle \longrightarrow 0$$

escindeix, d'on $T_{(p)} \cong (T_{(p)}/\langle y_1 \rangle) \oplus \langle y_1 \rangle$. Del cas $s = 1$, $\langle y_1 \rangle \cong R/(p^{m_s})$ amb $m_1 \leq \cdots \leq m_{s-1} \leq m_s$. Per tant,

$$\begin{aligned} T_{(p)} &\cong (T_{(p)}/\langle y_1 \rangle) \oplus \langle y_1 \rangle \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{s-1} R/(p^{m_i}) \oplus R/(p^{m_s}) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{s} R/(p^{m_i}) \end{aligned}$$

i l'enunciat segueix. □

Problema 6. *Sigui M un R-mòdul finitament generat. Aleshores $M \cong F \oplus T$ on F és lliure i $T \cong \bigoplus_p T_{(p)}$. A més, per a cada p, tenim $T_{(p)} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} R/(p^{m_i})$ per certs $m_1, \ldots, m_s$.*

Demostració. Concloem:

$$\begin{aligned} M &\cong (M/T(M)) \oplus T(M) && \text{(Exercici 3.)} \\ &\cong (M/T(M)) \oplus \bigoplus_p T_{(p)} && \text{(Exercici 4.3.)} \\ &\cong (M/T(M)) \oplus \bigoplus_p \bigoplus_{i=1}^{s} R/(p^{m_{i,p}}) && \text{(Exercici 5.4.)} \end{aligned}$$

□