Envolvent injectiu sobre cossos residuals

Jordi Cardiel

Abstract

We study the notion of injective hull of a module, i.e. the minimal injective over the module. Then, we specialize to the context of local artinian and noetherian rings R with residue field $\kappa = R/\mathfrak{m}$ and show that the ring of endomorphisms of the injective hull of κ is isomorphic to the $\mathfrak{m}$-adic completition of R. As a consequence, we show that the ring of endomorphisms of the Prüfer p-group is isomorphic to the p-adic integers.

Contents

La motivació principal d'aquest treball és demostrar l'isomorfisme $\mathbb{Z}_p$ amb el conjunt d'endomorfismes del p-grup de Prüfer. El p-grup de Prüfer és defineix com la unió ascendent dels grups

$$\mathbb{Z}/(p) \subset \mathbb{Z}/(p^2) \subset \mathbb{Z}/(p^3) \subset \dots$$

És a dir, el p-grup de Prüfer és $\varinjlim \mathbb{Z}/(p^n)$. L'objectiu és desenvolupar unes eines (que són resultat de la teoria de Matlis per a injectius indescomponibles sobre un anell commutatiu noetherià) per tal de demostrar aquest isomorfisme en un context més general i veure com s'aplica al p-grup de Prüfer.

1 Injectivitat

En aquesta secció introduïm tota la maquinària d'àlgebra commutativa per arribar als resultats que desitgem.

1.1 Mòduls injectius

Recordem que I R-mòdul és injectiu si per tot monomorfisme de R-mòduls $g : A \to B$ i per tot morfisme de R-mòduls $h : A \to I$ existeix un morfisme de R-mòduls $h' : B \to I$ tal que el següent diagrama

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, hook, "g"] & B \arrow[ul, dotted, "h'"'] \end{tikzcd}$$

és commutatiu.
La injectivitat de I es pot expressar com a una propietat del functor contravariant $\mathrm{Hom}_R(-, I) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$, on Mod_R denota la categoria de R-mòduls. En general, si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

és una successió exacta curta en Mod_R, aleshores, per tot I R-mòdul

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,I)} \mathrm{Hom}_R(B,I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g,I)} \mathrm{Hom}_R(A,I)$$

és exacte. La condició d'injectivitat ens diu que $\mathrm{Hom}_R(g,I)$ és exhaustiu, és a dir, que la successió curta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f,I)} \mathrm{Hom}_R(B,I) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g,I)} \mathrm{Hom}_R(A,I) \longrightarrow 0$$

és exacte. Deduïm que I R-mòdul sigui injectiu és equivalent a que $\mathrm{Hom}_R(-,I)$ és exacte (és a dir, que la darrera successió curta és exacte).

Lema 1.1. *Sigui $R \to S$ un morfisme d'anells. Si E és un R-mòdul injectiu, aleshores $\mathrm{Hom}_R(S,E)$ és un S-mòdul injectiu.*

Proof. Sigui S-mòdul M i, M_R, M pensat com a R-mòdul. Tenim la correspondència

$$\mathrm{Hom}_R(M_R,E) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_S(M,\mathrm{Hom}_R(S,E)),$$

donada per

$$\alpha \longmapsto (m \mapsto (s \mapsto \alpha(sm)))$$

amb inversa

$$\beta \longmapsto (m \mapsto \beta(m)(1_S))$$

Com E és R-mòdul injectiu, $\mathrm{Hom}_R(-,E)$ és exacte. Per la correspondència,

$$\mathrm{Hom}_R(-,E) = \mathrm{Hom}_S(-,\mathrm{Hom}_R(S,E)),$$

d'on deduïm que $\mathrm{Hom}_S(-,\mathrm{Hom}_R(S,E))$ és exacte i, per tant, $\mathrm{Hom}_R(S,E)$ és S-mòdul injectiu. □

1.2 Extensió essencial

Introduïm la següent definició que farem servir en aquesta secció.

Definició 1.2. *Siguin $M \subset E$ R-mòduls. $M \subset E$ és una extensió essencial si tot R-submòdul no trivial d'E interseca M no trivialment.*

Lema 1.3. *Siguin $M \subset E$ R-mòduls. Són equivalents:*

1. *$M \subset E$ és una extensió essencial.*
2. *$\forall x(x \in E - \{0\} \Rightarrow \exists r(r \in R \wedge rx \in M - \{0\}))$.*

   Proof. Suposem que $M \subset E$ és una extensió essencial. Sigui $x \in E - \{0\}$. Per essencialitat, $(x) \cap M \neq \{0\}$. Aleshores, $\exists r(r \in R \wedge rx \in M - \{0\})$.
   Suposem que $\forall x(x \in E - \{0\} \Rightarrow \exists r(r \in R \wedge rx \in M - \{0\}))$. Sigui $E' \subset E$ R-submòdul no trivial d'E. Sigui $x \in E' - \{0\}$ (existeix per no trivialitat). Com $E' \subset E$, $x \in E - \{0\}$, d'on $\exists r(r \in R \wedge rx \in M - \{0\}))$ per hipòtesi. Com $rx \in E' \cap M$ i $rx \neq 0$, deduïm que $E' \cap M \neq \{0\}$. Per tant, E és una extensió essencial. □

Tenim el següent resultat sobre R-mòduls injectius i extensions essencials.

Lema 1.4. *Sigui I R-mòdul injectiu, $E \subset I$ R-submòdul. Són equivalents:*

1. *E injectiu.*

2. *Per tot $E \subset E' \subset I$ amb $E \subset E'$ extensió essencial, $E = E'$.*

Proof. Suposem E injectiu. Sigui $E' \subset I$ amb $E \subset E'$ extensió essencial. Per injectivitat d'E,

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, hook] & E' \arrow[ul, dotted, "\exists\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Suposem que $\ker\alpha \neq \{0\}$. Com $E \subset E'$ és una extensió essencial i $\ker\alpha$ R-submòdul d'E' no trivial, $\ker\alpha \cap E \neq \{0\}$. Però, $\ker\alpha \cap E = \ker id_E$ i $\ker id_E = \{0\}$, contradicció. Per tant, $\ker\alpha = \{0\}$. Aleshores, $E' \cong E'/\ker\alpha \cong \operatorname{im}\alpha \subset E$, d'on deduïm que $E = E'$ per doble inclusió (ja que $E \subset E'$).
Suposem que per tot $E \subset E' \subset I$ amb $E \subset E'$ extensió essencial, $E = E'$. Siguin $M \subset N$ R-mòduls i $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, E)$. Sigui

$$\mathscr{S} := \{(M', \varphi') \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Mod}_R) \times \operatorname{Hom}_R(M', J) : M \subset M' \subset N \wedge \varphi'|_M = \varphi\}$$

conjunt parcialment ordenat per l'ordre $\leq$ definit per

$$(M', \varphi') \leq (M'', \varphi'') :\iff M' \subset M'' \wedge \varphi''|_{M'} = \varphi'$$

$\mathscr{S} \neq \emptyset$, ja que $(M, \varphi) \in \mathscr{S}$. Considerem una cadena $\{(M_i, \varphi_i) : i \in \mathscr{I}\}$ de $\mathscr{S}$. Tenim que $(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} M_i, \varphi) \in \mathscr{S}$ és una cota superior de $\{(M_i, \varphi_i) : i \in \mathscr{I}\}$, on $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i, J)$ ve definida per $\varphi(x) := \varphi_i(x)$ si $x \in M_i$. Aleshores, pel lema de Zorn, $\mathscr{S}$ té un element maximal $(M', \varphi') \in \mathscr{S}$.
Sigui $\iota : E \hookrightarrow I$ la inclusió. Per injectivitat d'I,

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[u, "\iota\circ\varphi'"] \arrow[r, hook] & N \arrow[ul, dotted, "\exists\psi"'] \end{tikzcd}$$

Suposem que $\psi(N) \not\subset E$. Tenim $E \subsetneq E + \psi(N) \subset I$, d'on $E \subset E + \psi(N)$ no és essencial. Aleshores, existeix $K \subset E + \psi(N)$ no trivial tal que $K \cap E = \{0\}$. Com $M' \subset \psi^{-1}(E) \subsetneq \psi^{-1}(E + K)$,

$$\pi \circ \psi|_{\psi^{-1}(E+K)} : \psi^{-1}(E + K) \to E + K \twoheadrightarrow E$$

és tal que $(\pi \circ \psi|_{\psi^{-1}(E+K)})|_{M'} = \varphi'$ i $\psi^{-1}(E + K) \subset N$. Aleshores, $(M', \varphi') \leq (\psi^{-1}(E + K), \pi \circ \psi|_{\psi^{-1}(E+K)}) \in \mathscr{S}$, contradicció amb la maximalitat de (M', φ').
Per tant, $\psi(N) \subset E$. Tenim que $\psi : N \to \psi(N) \hookrightarrow E$ i $\psi|_M = (\iota \circ \varphi')|_M = \varphi'|_M = \varphi$, d'on deduïm que E és injectiu ($\psi \in \operatorname{Hom}_R(N, E)$ estén $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, E)$). $\square$

Recordem que un R-mòdul M és noetherià si i només si tot R-submòdul de M és finitament generat. Denotem per $(0 :_R x)$ l'aniquil·lador de $x \in R$; similarment, $(0 :_R I)$ és l'aniquil·lador de I, $I \subset R$ ideal.

Lema 1.5. *Sigui R anell noetherià, I R-mòdul injectiu.*

1. *Sigui $f \in R$. Aleshores, $\bigcup_{n>0}(0 :_I f^n)$ R-submòdul injectiu de I.*

   Proof. Sigui $E' \subset I$ amb $\bigcup_{n>0}(0 :_I f^n) \subset E'$ extensió essencial. Suposem que $\bigcup_{n>0}(0 :_I f^n) \subsetneq E'$ i volem arribar a contradicció. Aleshores, $\exists x (x \in E' - \bigcup_{n>0}(0 :_I f^n))$. Considerem l'ideal $\bigcup_{n>0}(0 :_R f^n x) \subset R$. Com R és noetherià,

$$\exists g_1 \ldots \exists g_t \Big(g_1, \ldots, g_t \in R \wedge \bigcup_{n>0} (0 :_R f^n x) = (g_1, \ldots, g_t) \Big)$$

Com $g_1,\dots,g_t \in \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x)$, $\exists n_1 \dots \exists n_t(n_1,\dots,n_t > 0 \wedge \forall i(g_i f^{n_i} x = 0))$. Definim

$$x' := f^{\max\{n_i\}} x \in E' - \bigcup_{n>0}(0:_I f^n)$$

Sigui $r \in (g_1,\dots,g_t)$. Aleshores, $\exists a_1 \dots \exists a_t(a_1,\dots,a_t \in R \wedge r = \sum_{i=1}^t a_i g_i)$. Per tant,

$$\begin{aligned} rx' &= \sum_{i=1}^t a_i (g_i f^{\max\{n_i\}} x) && \text{(Per definició de } x'\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^t a_i 0 \,(=0) && (\forall i (g_i f^{n_i} x = 0)) \end{aligned}$$

Per tant, $r \in (0:_R x')$ i $(g_1,\dots,g_t) \subset (0:_R x')$. Com

$$\begin{aligned} (0:_R x') &= (0:_R f^{\max\{n_i\}} x) && \text{(Per definició de } x'\text{)} \\ &\subset \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x) && (\max\{n_i\} > 0) \end{aligned}$$

deduïm per doble inclusió que

$$(0:_R x') = \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x)$$

Sigui $r \in (g_1,\dots,g_t)$. Aleshores, $\exists a_1 \dots \exists a_t(a_1,\dots,a_t \in R \wedge r = \sum_{i=1}^t a_i g_i)$, d'on

$$r(f^n x') = \sum_{i=1}^t a_i g_i f^n f^{\max\{n_i\}} x = 0 \implies r \in \bigcap_{n>0}(0:_R f^n x') \subset \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x')$$

Per tant, $(g_1,\dots,g_t) \subset \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x')$. Com

$$\begin{aligned} \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x') &= \bigcup_{n>0}(0:_R f^{n+\max\{n_i\}} x) \\ &\subset \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x) \end{aligned}$$

deduïm que

$$\bigcup_{n>0}(0:_R f^n x) = \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x')$$

Per transitivitat de $=$,

$$(0:_R x') = \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x')$$

Sigui $y \in (x') \cap \bigcup_{n>0}(0:_I f^n)$. Aleshores, $\exists n(n>0 \wedge y f^n = 0)$ i $\exists r'(r' \in R \wedge r'x' = y)$, d'on

$$\begin{aligned} r' f^n x' &= y f^n && (r'x' = y) \\ &= 0 && (y f^n = 0) \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} r' \in \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x') &\implies r' \in (0:_R x') && \Big((0:_R x') = \bigcup_{n>0}(0:_R f^n x')\Big) \\ &\implies y = r'x' = 0 && (r'x' = y) \end{aligned}$$

Per tant, $(x') \cap \bigcup_{n>0}(0:_I f^n) = \{0\}$, d'on deduïm que $\bigcup_{n>0}(0:_I f^n) \subset E'$ no és una extensió essencial, contradicció. Per tant, $\bigcup_{n>0}(0:_I f^n) = E'$ i, per 1.4, $\bigcup_{n>0}(0:_I f^n)$ és R-submòdul injectiu de I. $\square$

2. *Sigui $J \subset R$ ideal. Aleshores, $\bigcup_{n>0}(0 :_I J^n)$ R-submòdul injectiu de I.*

   Proof. Com R és noetherià, $\exists f_1 \dots \exists f_t(f_1, \dots f_t \in R \wedge J = (f_1, \dots, f_t))$. Aleshores, com

$$\bigcup_{n>0}(0 :_I J^n) = \bigcup_{n>0}(0 :_{\bigcup_{n>0}(0 :_{\cdots_{(\bigcup_{n>0}(0 :_{(\bigcup_{n>0}(0 :_I f_1^n)} f_2^n))}} \cdots f_{t-1}^n)} f_t^n)$$

   ens reduïm al cas anterior i procedim per inducció. □

1.3 Envolvent injectiu

Introduïm la noció d'envolvent injectiu, que utilitzarem en la següent secció. La idea és barrejar les dos nocions anteriors.

Definició 1.6. *Siguin $M \subset I$ R-mòduls. Direm que I és l'envolvent injectiu de M si I és injectiu i $M \subset I$ és una extensió essencial.*

Enunciem el següent resultat sense demostració, el qual dona altres caracteritzacions i la unicitat llevat isomorfisme de l'envolvent injectiu.

Proposició 1.7. *Sigui $M \subset I$ R-mòduls. Són equivalents:*

1. *$M \subset I$ és l'extensió essencial maximal.*
2. *I és injectiu i $M \subset I$ és una extensió essencial.*
3. *I és injectiu minimal sobre M.*

A més, tot R-mòdul té un envolvent injectiu i donats I, I' envolvents injectius de M, existeix un isomorfisme $g : I \to I'$ tal que $g|_M = id_M$.

Proof. Veure [Lam99], 3.29., 3.30. i 3.32. □

Escriurem per $E_R(M)$ l'envolvent injectiu del R-mòdul M. Necessitarem el següent resultat per la següent resultat per la següent secció.

Lema 1.8. *Sigui R anell, $\mathfrak{a}$ ideal de R i M R-mòdul tal que $\mathfrak{a}M = \{0\}$. Aleshores, $E_{R/\mathfrak{a}}(M) \cong (0 :_E \mathfrak{a})$.*

Proof. Tenim que $\mathfrak{a}M, \mathfrak{a}(0 :_E \mathfrak{a}) = \{0\}$. Aleshores, considerem M i $(0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a})$ com $R/\mathfrak{a}$-mòduls. Com $M \subset E_R(M)$ i $\mathfrak{a}M = \{0\}$, deduïm que $M \subset (0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a})$. Com tot $R/\mathfrak{a}$-submodul de $(0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a})$ és R-submòdul de $E_R(M)$, necessàriament $M \subset (0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a})$ és una extensió essencial.
Veiem que podem completar el diagrama de $R/\mathfrak{a}$-mòduls

$$\begin{tikzcd}
 & (0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a}) & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, hook, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

En efecte, si els pensem com R-mòduls, per injectivitat de $E_R(M)$ tenim que

$$\begin{tikzcd}
 & E_R(M) & \\
 & (0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a}) \arrow[u, hook, "\iota"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, hook, "g"] & B \arrow[uul, dotted, "\exists(\iota \circ h)'"']
\end{tikzcd}$$

commuta. De la commutativitat es comprova que $\operatorname{im}(\iota \circ h') \subset (0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a})$, d'on deduïm que $(0 :_{E_R(M)} \mathfrak{a})$ és injectiu. $\square$

2 Envolvent injectiu sobre cossos residuals

Recordem que un anell R és local si només té un ideal maximal $\mathfrak{m}$. En aquest cas, diem que $R/\mathfrak{m}$ és el cos residual de R.

2.1 Resultats sobre anells artinians locals

Sigui M R-mòdul (R no necessàriament local). Definim la longitud de M com

$$\ell_R(M) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists(0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M)\}$$

Es pot comprovar que ℓ_R és una funció additiva, és a dir, donada una successió exacta curta a Mod_R

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

tenim que $\ell_R(B) = \ell_R(A) + \ell_R(C)$.
Considerarem en aquesta secció anells artinians locals. D'aquestes condicions, es dedueix que l'anell artinià local és noetherià i té R té longitud finita com a R-mòdul.

Lema 2.1. *Sigui $(R, \mathfrak{m})$ anell artinià local, M R-mòdul finitament generat. Aleshores,*

$$\ell_R(M) = \ell_R(\operatorname{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m})))$$

Proof. Tenim que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E_R(R/\mathfrak{m})) &\cong E_{R/\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{m}) && \text{(Isomorfisme via } \varphi \mapsto \varphi(1_R + \mathfrak{m})) \\ &\cong R/\mathfrak{m} && \text{(Tot mòdul sobre un cos és injectiu i } R/\mathfrak{m} \text{ és minimal)} \end{aligned}$$

Aleshores,

$$\ell_R(R/\mathfrak{m}) = \ell_R(\operatorname{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m})))$$

Procedim per inducció en $\ell_R(M)$, M R-mòdul finitament generat. Tenim que existeix $\pi : M \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ morfisme de R-mòduls exhaustiu. Considerem la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \ker \pi \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

Com $E_R(R/\mathfrak{m})$ és injectiu, obtenim la successió exacta curta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E_R(R/\mathfrak{m})) \xrightarrow{\pi_*} \operatorname{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m})) \xrightarrow{\iota_*} \operatorname{Hom}_R(\ker \pi, E_R(R/\mathfrak{m})) \longrightarrow 0$$

De les darreres successions exactes curtes, deduïm que

$$\begin{aligned} &\ell_R(\operatorname{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m}))) \\ &= \ell_R(\operatorname{Hom}_R(R/\mathfrak{m}, E_R(R/\mathfrak{m}))) + \operatorname{Hom}_R(\ker \pi, E_R(R/\mathfrak{m})) && \text{(Per additivitat de } \ell_R) \\ &= \ell_R(R/\mathfrak{m}) + \ell_R(\ker \pi) && \text{(Hipòtesi d'inducció)} \\ &= \ell_R(M) && \text{(Per additivitat de } \ell_R) \end{aligned}$$

com volíem veure. $\square$

Corol·lari 2.2. *Sigui $(R, \mathfrak{m})$ anell artinià local, M R-mòdul finitament generat. Aleshores,*

$$M \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m})), E_R(R/\mathfrak{m}))$$

En particular, $R \cong \operatorname{Hom}_R(E_R(R/\mathfrak{m}), E_R(R/\mathfrak{m}))$.

Proof. Per tot $m \in M - \{0\}$, existeix un morfisme de R-mòduls no trivial $h_m : (m) \to R/\mathfrak{m}$. Com $E_R(R/\mathfrak{m})$ injectiu i $R/\mathfrak{m} \subset E_R(R/\mathfrak{m})$,

$$\begin{tikzcd}
 & E_R(R/\mathfrak{m}) & \\
 & R/\mathfrak{m} \arrow[u, hook, "\iota'"] & \\
0 \arrow[r] & (m) \arrow[u, "h_m"] \arrow[r, hook, "\iota"] & M \arrow[uul, dotted, "\exists(\iota'\circ h_m)'"']
\end{tikzcd}$$

Per tant, el morfisme $M \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m})), E_R(R/\mathfrak{m}))$ definit via $m \mapsto ((\iota' \circ h_m)' \mapsto (\iota' \circ h_m)'(m))$ esta ben definit i és injectiu (ja que per construcció té nucli trivial). A més, com

$$\begin{aligned}
\ell_R(\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m})), E_R(R/\mathfrak{m}))) &= \ell_R(\mathrm{Hom}_R(M, E_R(R/\mathfrak{m}))) && \text{(Per 2.1)} \\
&= \ell_R(M) && \text{(Per 2.1)}
\end{aligned}$$

deduïm que és isomorfisme. El darrer isomorfisme resulta de

$$\begin{aligned}
R &\cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R, E_R(R/\mathfrak{m})), E_R(R/\mathfrak{m})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_R(E_R(R/\mathfrak{m}), E_R(R/\mathfrak{m})) && (E_R(R/\mathfrak{m}) \cong \mathrm{Hom}_R(R, E_R(R/\mathfrak{m})))
\end{aligned}$$

on el darrer isomorfisme és general per tot R-mòdul. □

2.2 Resultats sobre anells noetherians locals

Volem aplicar 1.8 al ideal $\mathfrak{m}^n$.

Proposició 2.3. *Sigui $(R, \mathfrak{m})$ un anell noetherià local. Aleshores,*

1. $E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}) \cong (0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$.

   Proof. $\mathfrak{m}^n$ és un ideal de R i $\mathfrak{m}^n(R/\mathfrak{m}) = \{0\}$. Per 1.8, $E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}) \cong (0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$. □

2. $E_R(R/\mathfrak{m}) = \bigcup_{n>0}(0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$.

   Proof. Com R és noetherià i $E_R(R/\mathfrak{m})$ és un R-mòdul injectiu, $\bigcup_{n>0}(0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$ és un R-submòdul injectiu d'$E_R(R/\mathfrak{m})$ per 1.5. Fixem-nos que

   $$R/\mathfrak{m} \subset (0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n) \subset E_R(R/\mathfrak{m})$$

   Com $E_R(R/\mathfrak{m})$ és l'envolvent injectiu de $R/\mathfrak{m}$, $E_R(R/\mathfrak{m})$ és l'injectiu més petit que conté $R/\mathfrak{m}$, d'on resulta $E_R(R/\mathfrak{m}) \subset \bigcup_{n>0}(0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$ i, per tant, $E_R(R/\mathfrak{m}) = \bigcup_{n>0}(0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$. □

Corol·lari 2.4. *Sigui $(R, \mathfrak{m})$ anell noetherià local. Aleshores,* $\varinjlim E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}) \cong E_R(R/\mathfrak{m})$.

En particular, tenim la filtració $\{E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}) : n \in \mathbb{N}\}$. Els endomorfismes preserven la filtració, ja que

$$\mathrm{im}\left(\varphi : (0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n) \to \bigcup_{n>0}(0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)\right) \subset (0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)$$

En efecte, de forma heurística, tenim que $f((0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n))\mathfrak{m}^n = f((0 :_{E_R(R/\mathfrak{m})} \mathfrak{m}^n)\mathfrak{m}^n) = f(\{0\}) = \{0\}$, d'on es dedueix la inclusió. Aquesta preservació simplifica la demostració del resultat següent.

Teorema 2.5. *Sigui $(R, \mathfrak{m})$ anell noetherià local. Aleshores,* $\mathrm{Hom}_R(E_R(R/\mathfrak{m}), E_R(R/\mathfrak{m})) \cong \varprojlim R/\mathfrak{m}^n$.

Proof. Tenim que

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R(E_R(R/\mathfrak{m}), E_R(R/\mathfrak{m})) & \\
\cong\ &\mathrm{Hom}_R(\varinjlim E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}), \varinjlim E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m})) & \text{(Per 2.4)} \\
\cong\ &\mathrm{Hom}_R(\varinjlim E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}), E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m})) & \text{(Endomorfismes preserven la filtració)} \\
\cong\ &\varprojlim \mathrm{Hom}_R(E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m}), E_{R/\mathfrak{m}^n}(R/\mathfrak{m})) & \text{(Hom preserva els colímits)} \\
\cong\ &\varprojlim R/\mathfrak{m}^n & \text{(Per 2.2)}
\end{aligned}
$$

com volíem veure. □

2.3 p-grup de Prüfer

Considerem $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$. Es una comprovació rutinària veure que $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z} \cong \varinjlim \mathbb{Z}/(p^n)$. Amb 2.5, serà suficient veure que $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ és l'envolvent injectiu de $\mathbb{Z}/(p)$ sobre $\mathbb{Z}$.

Definició 2.6. *Un $\mathbb{Z}$-mòdul G és divisible si $\forall x \forall n((x \in G \wedge n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists y(y \in G \wedge ny = x))$.*

Proposició 2.7. *Tot $\mathbb{Z}$-mòdul J divisible és injectiu.*

Proof. Siguin $A \subset B$ $\mathbb{Z}$-mòduls i $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, J)$. Volem estendre φ a un element de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, J)$. Sigui

$$\mathscr{S} := \{(A', \varphi') \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A', J) : A \subset A' \subset B \wedge \varphi'|_A = \varphi\}$$

conjunt parcialment ordenat per l'ordre $\leq$ definit per

$$(A', \varphi') \leq (A'', \varphi'') :\iff A' \subset A'' \wedge \varphi''|_{A'} = \varphi'$$

$\mathscr{S} \neq \emptyset$, ja que $(A, \varphi) \in \mathscr{S}$. Considerem una cadena $\{(A_i, \varphi_i) : i \in \mathscr{I}\}$ de $\mathscr{S}$. Tenim que $(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i, \varphi) \in \mathscr{S}$ és una cota superior de $\{(A_i, \varphi_i) : i \in \mathscr{I}\}$, on $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigcup_{i \in \mathscr{I}} A_i, J)$ ve definida per $\varphi(x) := \varphi_i(x)$ si $x \in A_i$. Aleshores, pel lema de Zorn, $\mathscr{S}$ té un element maximal $(A', \varphi') \in \mathscr{S}$.
Volem veure que $A' = B$. Suposem que $A' \subsetneq B$. Sigui $x \in B - A'$. Suposem que $\forall n(n \in \mathbb{Z} \Rightarrow nx \notin A')$. Definim $\varphi'' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A' + \mathbb{Z}x, J)$ per $\varphi''(a + nx) := \varphi(a)$. Tenim que $(A', \varphi') \leq (A' + \mathbb{Z}x, \varphi'') \in \mathscr{S}$, contradicció amb la maximalitat de (A', φ'). Suposem que $\exists n(n \in \mathbb{Z} \wedge nx \in A')$ A més, imposem que n sigui mínima. Per divisibilitat de J, $\forall x(x \in A' \Rightarrow \exists y(y \in J \wedge ny = \varphi(nx)))$. Considerem $\varphi'' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A' \oplus \mathbb{Z}, J)$ definit per $\varphi''(a, m) := \varphi(a) + mny$. Considerem $\varphi_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A' \oplus \mathbb{Z}, B)$ definit per $\varphi_0(a, m) := a + mnx$. Si $(a, m) \in \ker \varphi_0$, $\varphi''(a, m) = \varphi(a) + mny = \varphi(a) + m\varphi(nx) = \varphi(a + mnx) = \varphi(0) = 0$. Per tant, $\ker \varphi_0 \subset \ker \varphi''$, d'on tenim la factorització

$$
\begin{tikzcd}
A' \oplus \mathbb{Z} \arrow[rr, "\varphi''"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & & J \\
& A' + x(n) \arrow[ur, dotted, "\overline{\varphi}_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\overline{\varphi}_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A' + x(n), J)$ definida per $\overline{\varphi}_0(a + mnx) := \varphi(a) + mnz$. Obtenim $(A', \varphi') \leq (A' + x(n), \overline{\varphi}_0) \in \mathscr{S}$, contradicció amb la maximalitat de (A', φ'). Per tant, $A' = B$. □

El recíproc també és cert. És fàcil veure que $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ és p-divisible i, per tant, divisible. Com $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ és un $\mathbb{Z}$-mòdul, deduïm que $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ és injectiu per 2.7.
A més, $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ és essencial sobre $\mathbb{Z}/(p)$ ($\cong \mathbb{Z}_{(p)}/(p)\mathbb{Z}_{(p)}$) ja que (recordem 1.3)

$$p\Big(\sum_{j=0}^{i} a_j p^{-j} + \mathbb{Z}\Big) = \sum_{j=0}^{i-1} a_{j-1} p^{-j} + (p^i) \in \mathbb{Z}/(p)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_{(p)}}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z}) && \text{(Hom-sets coincideixen)} \\
&\cong \varprojlim \mathbb{Z}_{(p)}/\big((p)\mathbb{Z}_{(p)}\big)^n && ((\mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_{(p)}/(p)\mathbb{Z}_{(p)}) \text{ anell noetherià local i } 2.5) \\
&\cong \varprojlim \mathbb{Z}/(p^n) && (\mathbb{Z}_{(p)}/\big((p)\mathbb{Z}_{(p)}\big)^n \cong \mathbb{Z}/(p^n)) \\
&\cong \mathbb{Z}_p
\end{aligned}$$

d'on resulta l'isomorfisme.

References

[Lam99] T. Y. Lam. "Free Modules, Projective, and Injective Modules". In: *Lectures on Modules and Rings*. New York, NY: Springer New York, 1999, pp. 1–120. ISBN: 978-1-4612-0525-8. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0525-8_1.