100115. Geometria Riemanniana. 10 *Jordi Cardiel*

Problema 1. *Bonus track. Demostreu les següents afirmacions:*

1. $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ *no és exhaustiva.*

   Demostració. Sigui $Y \in \exp \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Aleshores, $\exists X (X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \wedge \exp X = Y)$. Sigui $\mathrm{vp}\, X$ el conjunt de valors propis d'X. Com $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\, X = 0$, d'on el polinomi característic associat a X és $p_X(\lambda) = \lambda^2 + \det X$. Aleshores, o bé els $\mathrm{vp}\, X = \{\sqrt{-\det X}, -\sqrt{-\det X}\}$ o bé $\mathrm{vp}\, X = \{0\}$ (si les arrels coincideixen, $\det X = 0$). Considerem J_X la matriu canònica de Jordan associada a X. De l'alternativa anterior i aplicant exp, tenim que o bé

   $$\exp J_X = \exp \begin{pmatrix} \sqrt{-\det X} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\det X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-\det X}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-\det X}} \end{pmatrix}$$

   o bé

   $$\exp J_X = \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Suposem que $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \exp \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ $(\exists X (X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \wedge \exp X = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)))$. Si J_X és la matriu canònica de Jordan associada a X, tenim que

   $$\begin{aligned} \exp J_X &= \exp P^{-1} X P && (\exists P (P \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \wedge J_X = P^{-1} X P)) \\ &= P^{-1} \exp X P && (\text{Propietat de } \exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) \\ &= P^{-1} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) P \end{aligned}$$

   Per l'alternativa anterior, $\exp J_X$ és una matriu canònica de Jordan. Però, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ també és una matriu canònica de Jordan que no és de la forma de cap alternativa, contradicció. Aleshores, $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \notin \exp \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. És fàcil veure que $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Per tant, $\exp \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ($\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ no és exhaustiva). □

2. *El grup de Lie* $\mathrm{SU}(2)$ *és diffeomeorf a l'esfera* $\mathbb{S}^3$.

   Demostració. Recordem que $\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : A\overline{A^t} = Id \wedge \det A = 1\}$. Veiem que $\mathrm{SU}(2) = \{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$. En efecte,

   (a) Sigui $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(2)$. Per definició de $\mathrm{SU}(2)$, $\det \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right) = \alpha\omega - \beta\gamma = 1$ i $\overline{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right)^t} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right)^{-1}$. Aleshores, $\left(\begin{smallmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\omega} \end{smallmatrix}\right) = \overline{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right)^t} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha\omega - \beta\gamma}\left(\begin{smallmatrix} \omega & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \omega & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{smallmatrix}\right)$, d'on deduïm que $\gamma = -\overline{\beta}$ i $\omega = \overline{\alpha}$. Per tant, $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)$ i $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = \alpha\omega - \beta\gamma = 1$, d'on $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{smallmatrix}\right) \in \{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$.

   (b) Sigui $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) \in \{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}$. Tenim que $\det \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. A més,

   $$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)\overline{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)^t} &= \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} |\alpha|^2+|\beta|^2 & \overline{\alpha}\overline{\beta}-\overline{\beta}\overline{\alpha} \\ \overline{\beta}\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\overline{\beta} & |\beta|^2+|\alpha|^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \overline{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)^t}\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} |\alpha|^2+|\beta|^2 & \overline{\alpha}\beta-\beta\overline{\alpha} \\ \overline{\beta}\alpha-\alpha\overline{\beta} & |\beta|^2+|\alpha|^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

   d'on $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SU}(2)$.

   Sigui $\mathbb{S}^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Considerem $f : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ definida per $f(z,w) := \left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{smallmatrix}\right)$ amb inversa $f^{-1} : \mathrm{SU}(2) \to \mathbb{S}^3$ definida per $f^{-1}(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)) = (\alpha, \beta)$. És evident que f, f^{-1} són classe $\mathscr{C}^\infty$. Per tant, $f : \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ és un difeomorfisme. □