Primer parcial (model)

12 d'abril de 2023

1.– Es considera la funció $f(x,y,z) = (x^2 + xy + z, x + y^2 - z^2)$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$.

(a) Proveu que $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ és un valor regular de f.

(b) Descriviu quin tipus de subvarietat de $\mathbb{R}^3$ és $P = f^{-1}(0,0)$?

(c) Doneu una base de l'espai tangent de P en el punt $(-1,1,0) \in P$.

2.– Al disc unitat $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ considerem la mètrica amb element de longitud $ds^2 = 4(dx^2+dy^2)/(1-|z|^2)^2$, on $|z|^2 = x^2+y^2$ i al semiplà $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ la mètrica amb element de longitud $ds^2 = (dx^2+dy^2)/y^2$. Sigui h l'aplicació de l'esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donada per

$$h(z) = \frac{(z+i)}{(iz+1)}, \quad z = x + iy.$$

(a) Proveu que h defineix un difeomorfisme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{H}^2$.

(b) Proveu que h és una isometria.

(c) Quina és la imatge d'un diàmetre (euclidià) de $\mathbb{D}$?

3.– Sigui $M \subset \mathbb{R}^3$ el primer quadrant obert i (x,y) les seves coordenades cartesianes. Es considera a M la mètrica de Riemann que fa que els camps

$$X = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial y}$$

siguin ortonormals.

(a) Doneu l'expressió del tensor mètric g d'aquesta mètrica en les coordenades (x,y).

(b) Calculeu la longitud de la corba $\alpha(t) = (t, y_0) \subset M$ quan $t \in [a,b]$.

(c) Proveu que M amb la distància induïda per g no és espai mètric complet.

(d) Calculeu $\nabla_X Y$ si ∇ és la connexió de Levi-Civita associada a g.

(e) Doneu les equacions de les geodèsiques de M.

4.– Qüestions

Per a cadascuna de les afirmacions següents, determineu si és certa o falsa. Justifiqueu la vostra decisió en cada cas amb un breu argument o bé amb un contraexemple.

(a) Siguin $(x_1,\dots,x_n)$ coordenades locals d'una varietat diferenciable llavors $[\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0$.

(b) Sigui $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ amb la mètrica induïda. Considerem a $\mathbb{R}^2$ la mètrica de Riemann que fa de la projecció estereogràfica $\pi(x,y,z) = (1-z)^{-1}(x,y)$ de $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ a $\mathbb{R}^2$ una isometria. La geodèsica de $\mathbb{R}^2$ que passa per $(1,0)$ amb velocitat $(0,1)$ és la recta $(1,0) + \lambda t(0,1)$ per una λ adequat.

(c) Els símbols de Christoffel Γ_{ij}^k d'una connexió afí satisfan que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

(d) El transport paral·lel conserva els angles.

Totes les respostes han d'estar degudament justificades.

No es pot fer servir calculadora. Entregeu exercicis (teoria i problemes) diferents en fulls separats posant nom, cognom(s) i NIU a cada full. La durada de la prova és de 150 minuts.