

Problema 1. *Bonus track. Demostreu les següents afirmacions:*

1. $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ no és exhaustiva.

Demostració. Sigui $Y \in \exp \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Aleshores, $\exists X (X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \wedge \exp X = Y)$. Sigui $\mathrm{vp} X$ el conjunt de valors propis d' X . Com $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{tr} X = 0$, d'on el polinomi característic associat a X és $p_X(\lambda) = \lambda^2 + \det X$. Aleshores, o bé els $\mathrm{vp} X = \{\sqrt{-\det X}, -\sqrt{-\det X}\}$ o bé $\mathrm{vp} X = \{0\}$ (si les arrels coincideixen, $\det X = 0$). Considerem J_X la matriu canònica de Jordan associada a X . De l'alternativa anterior i aplicant \exp , tenim que o bé

$$\exp J_X = \exp \begin{pmatrix} \sqrt{-\det X} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\det X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{-\det X}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-\det X}} \end{pmatrix}$$

o bé

$$\exp J_X = \exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suposem que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \exp \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ($\exists X (X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \wedge \exp X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$). Si J_X és la matriu canònica de Jordan associada a X , tenim que

$$\begin{aligned} \exp J_X &= \exp P^{-1} X P & (\exists P (P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \wedge J_X = P^{-1} X P)) \\ &= P^{-1} \exp X P & (\text{Propietat de } \exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})) \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P \end{aligned}$$

Per l'alternativa anterior, $\exp J_X$ és una matriu canònica de Jordan. Però, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ també és una matriu canònica de Jordan que no és de la forma de cap alternativa, contradicció. Aleshores, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. És fàcil veure que $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Per tant, $\exp \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ($\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ no és exhaustiva). \square

2. El grup de Lie $\mathrm{SU}(2)$ és diffeomorfe a l'esfera \mathbb{S}^3 .

Demostració. Recordem que $\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = Id \wedge \det A = 1\}$. Veiem que $\mathrm{SU}(2) = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \}$. En efecte,

- (a) Sigui $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$. Per definició de $\mathrm{SU}(2)$, $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix} = \alpha\omega - \beta\gamma = 1$ i $\overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}^{-1}$. Aleshores, $\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\omega} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\omega - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \omega & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, d'on deduïm que $\gamma = -\bar{\beta}$ i $\omega = \bar{\alpha}$. Per tant, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ i $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = \alpha\omega - \beta\gamma = 1$, d'on $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \omega \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \}$.

- (b) Sigui $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \}$. Tenim que $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. A més,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}}^t &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\alpha} & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}}^t \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & \bar{\alpha}\beta - \beta\bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\beta - \beta\bar{\alpha} & |\beta|^2 + |\alpha|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'on $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$.

Sigui $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Considerem $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ definida per $f(z, w) := \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ amb inversa $f^{-1} : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathbb{S}^3$ definida per $f^{-1}(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}) = (\alpha, \beta)$. És evident que f, f^{-1} són classe \mathcal{C}^∞ . Per tant, $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ és un difeomorfisme. \square