100114. Topologia de varietats.
Seminari 2. Homologia de superfícies. *Jordi Cardiel*

1. *Fent servir la successió exacta llarga de Mayer-Vietoris, calculem l'homologia de l'esfera, el tor i el pla projectiu.*

Calcularem l'homologia de $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ ($\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ via Mayer-Vietoris i $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ via Künneth) i $\mathbb{RP}^n$.
Calculem l'homologia de $\mathbb{S}^n$. Veurem que, si $n > 0$,

$$H_p(\mathbb{S}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0 \end{cases}, H_p(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, n \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n \end{cases}$$

Amb homologia reduïda, és equivalent a veure que, per tot $n \geq 0$,

$$\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n \end{cases}$$

Procedim per inducció en n. Si $n = 0$, $\mathbb{S}^0 = \{1\} \sqcup \{-1\}$. Per l'axioma de la dimensió, $\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^0) \cong \widetilde{H}_p(\{1\}) \oplus \widetilde{H}_p(\{-1\}) \cong 0 \oplus 0 = 0$. Com $\mathbb{S}^0$ no és buit i l'homologia singular és una teoria d'homologia amb coeficient $\mathbb{Z}$, $H_0(\mathbb{S}^0) \cong H_0(\{1\}) \oplus H_0(\{-1\}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, d'on $\widetilde{H}_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}$.
Suposem que per $i < n$ el resultat és cert. Siguin $p \in \mathbb{S}^n, U = \mathbb{S}^n - \{p\}, V = \mathbb{S}^n - \{-p\}$. $U, V \subset \mathbb{S}^n$ són oberts (ja que en un espai Hausdorff $\{p\}, \{-p\}$ són tancats), $U, V \simeq \{*\}$, $U \cap V \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ i $U \cup V = \mathbb{S}^n$. Considerem la successió de Mayer-Vietoris per homologia reduïda:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(U) \oplus \widetilde{H}_p(V) \arrow[r, "k_* - \ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(U \cap V) \arrow[r, "\iota_* \oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_{p-1}(U) \oplus \widetilde{H}_p(V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \arrow[r] & \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per exactitud de la successió de Mayer-Vietoris, $\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \cong \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ ($n > 0$). Per hipòtesi d'inducció,

$$\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \cong \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p-1 = n-1 \\ 0 & \text{si } p-1 \neq n-1 \end{cases} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n \end{cases}$$

Calculem l'homologia de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ via Künneth. La fórmula de Künneth diu

$$H_n(X \times Y) \cong \Big(\bigoplus_{p=0}^{n} H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p=1}^{n} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), H_{n-p}(Y)) \Big)$$

Aleshores, distingint si $n \neq m$ i $n = m$, obtenim

$$H_p(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, n, m, n+m \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n, m, n+m \end{cases}, H_p(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0, 2n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq 0, n, 2n \end{cases}$$

Calculem l'homologia de $\mathbb{T}^2$ via Mayer-Vietoris. Sigui $\pi : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \twoheadrightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{I}/\sim (=: \mathbb{T}^2)$ el pas al quocient, on $\forall (x, y)((x, y) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I} \to (x, 0) \sim (x, 1) \wedge (0, y) \sim (1, y))$. Com $\mathbb{T}^2$ és arc-connex, $H_0(\mathbb{T}^2) = 0$. Siguin $p \in Int(\mathbb{I} \times \mathbb{I})$, $U = \pi(\mathbb{I} \times \mathbb{I} - \{p\})$ i $V = \pi(Int(\mathbb{I}\times\mathbb{I}))$. Tenim que $U \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, $V \simeq \{*\}$, $U \cap V \simeq \mathbb{S}^1$ i $U \cap V = \mathbb{T}^2$. Considerem la successió de Mayer-Vietoris per homologia reduïda. Si $p \geq 3$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(U\cap V) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(U)\oplus\widetilde{H}_p(V) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{T}^2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per exactitud de la successió de Mayer-Vietoris, $\widetilde{H}_p(\mathbb{T}^2) = 0$ si $p \geq 0$. De Mayer-Vietoris, obtenim la següent successió exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_1(\mathbb{T}^2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(\mathbb{T}^2) \arrow[r, "D"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r, "k_*-\ell_*"] & \widetilde{H}_1(\mathbb{T}^2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenim que (fent un abús de notació) $\iota_* \oplus j_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ esta definida per $\iota_* \oplus j_*(1) = (1, 0) + (0, 1) - (1, 0) - (0, 1) = (0, 0)$. Aleshores, $\ker \iota_* \oplus j_* = \mathbb{Z}$ i $\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = 0$. Per exactitud de la successió, D és injectiva i $k_* - \ell_*$ és exhaustiva. Aleshores, $\widetilde{H}_2(\mathbb{T}^2) \cong \operatorname{im} D = \ker \iota_* \oplus j_* = \mathbb{Z}$ i, pel primer teorema d'isomorfisme, $\widetilde{H}_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\ker k_* - \ell_* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, com volíem. Fixem-nos que el càlcul coincideix amb Künneth.
Calculem l'homologia de $\mathbb{RP}^2$. Veurem que

$$H_p(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{Z}/(2) & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

Considerem $\pi : \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2/(\mathbb{Z}/(2))(= \mathbb{RP}^2)$ la identificació dels antipodals. Siguin $p, -p \in \mathbb{S}^2$, $U = \pi(\mathbb{S}^2 - \{p, -p\})$, $V = \pi(\mathscr{B}(p; \varepsilon) \sqcup \mathscr{B}(-p; \varepsilon))$. U, V són oberts, $U \simeq \mathbb{S}^1$, $V \simeq \{*\}$, $U \cap V \simeq \mathbb{S}^1$ i $U \cup V = \mathbb{RP}^2$. Considerem la successió de Mayer-Vietoris per homologia reduïda. Si $p \geq 3$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(U\cap V) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(U)\oplus\widetilde{H}_p(V) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(\mathbb{RP}^2) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(\mathbb{RP}^2) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{RP}^2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

De Mayer-Vietoris, obtenim la següent successió exacta llarga:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(\mathbb{RP}^2) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_1(\mathbb{RP}^2) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(\mathbb{RP}^2) \arrow[r, "D"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "k_*-\ell_*"] & \widetilde{H}_1(\mathbb{RP}^2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenim que $\iota_* \oplus j_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ esta definida per $\iota_* \oplus j_*(1) = 2$. Aleshores, $\ker \iota_* \oplus j_* = 0$ i $\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = 2\mathbb{Z}$. Per exactitud de la successió, D és injectiva i $k_* - \ell_*$ és exhaustiva. Aleshores, $\widetilde{H}_2(\mathbb{RP}^2) \cong \operatorname{im} D = \ker \iota_* \oplus j_* = 0$ i, pel primer teorema d'isomorfisme, $\widetilde{H}_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/\ker k_* - \ell_* = \mathbb{Z}/\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = \mathbb{Z}/(2)$, com volíem.

2. *Com ho faries per calcular l'homologia de qualsevulla d'elles (superfícies compactes)?*

Pel teorema de classificació de les superfícies compactes connexes, tota superfície compacta connexa és homeomorfa a una superfície compacta connexa orientable de gènere g (és a dir, homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ si $g = 0$ o a $\#_g\mathbb{T}^2$ si $g > 0$) o bé una superfície compacta connexa no-orientable de gènere g (és a dir, homeomorfa a $\#_g\mathbb{RP}^2$ per $g > 0$). Si $g > 0$, les superfícies compactes connexes orientables i no-orientables de gènere g corresponen amb un $4g$-gon amb costats identificats per les etiquetes $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \dots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ i amb un $2g$-gon amb costats identificats per les etiquetats $\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_g, \alpha_g$. Aleshores, calcularem l'homologia de qualsevol d'elles buscant un recobriment adequat per fer servir Mayer-Vietoris.

3. *Descriu de manera general $H_*(S_g)$ i $H_*(N_g)$ on S_g és una superfície compacta connexa orientable de gènere g i N_g és una superfície compacta connexa no-orientable de gènere g.*

Com S_g, N_g són arc-connexes, $H_0(S_g), H_0(N_g) \cong 0$.
Considerem P_{4g} el $4g$-gon descrit abans (per les superfícies compactes connexes orientables de gènere $g > 0$) sense identificar i $q : P_{4g} \twoheadrightarrow S_g$ el pas al quocient. Sigui $p \in Int(P_{4g})$, $U = q(Int(P_{4g}))$ i $V = q(P_{4g} - \{p\})$. Tenim que U, V són oberts, $U \simeq \{*\}$, $V \simeq \bigvee_{2g} \mathbb{S}^1$, $U \cap V \simeq \mathbb{S}^1$ i $U \cup V = S_g$. Considerem la successió de Mayer-Vietoris per homologia reduïda. Si $p \geq 3$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(U\cap V) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(U)\oplus\widetilde{H}_p(V) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(S_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_p(\bigvee_{2g}\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(S_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{2g}\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(S_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \widetilde{H}_p(S_g) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per exactitud de la successió de Mayer-Vietoris, $\widetilde{H}_p(S_g)$ per $p \geq 3$. De Mayer-Vietoris, tenim la següent successió exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(S_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{2g}\widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_1(S_g) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(S_g) \arrow[r, "D"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] & \bigoplus_{2g}\mathbb{Z} \arrow[r, "k_*-\ell_*"] & \widetilde{H}_1(S_g) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenim que $\iota_* \oplus j_* : \mathbb{Z} \to \bigoplus_{2g}\mathbb{Z}$ esta definida per $\iota_* \oplus j_* = e_1 + e_2 - e_1 - e_2 + \ldots + e_{2g-1} + e_{2g} - e_{2g-1} - e_{2g} = (0,\ldots,0)$, on $e_i = (0,\ldots,0,\overset{i)}{1},0,\ldots,0)\bigoplus_{2g}\mathbb{Z}$. Aleshores, $\ker \iota_* \oplus j_* = \mathbb{Z}$ i $\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = 0$. Per exactitud de la successió, D és injectiva i $k_* - \ell_*$ és exhaustiva. Aleshores, $\widetilde{H}_2(S_g) \cong \operatorname{im} D = \ker \iota_* \oplus j_* = \mathbb{Z}$ i, pel primer teorema d'isomorfisme, $\widetilde{H}_1(S_g) \cong \bigoplus_{2g}\mathbb{Z}/\ker k_* - \ell_* = \bigoplus_{2g}\mathbb{Z}/\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = \bigoplus_{2g}\mathbb{Z}/0 \cong \bigoplus_{2g}\mathbb{Z}$, com volíem.
Considerem Q_{2g} el $2g$-gon descrit abans (per les superfícies compactes connexes no-orientables de gènere $g > 0$) sense identificar i $q : Q_{2g} \twoheadrightarrow N_g$ el pas al quocient. Sigui $p \in Int(Q_{2g})$, $U = q(Int(Q_{2g}))$ i $V = q(Q_{2g} - \{p\})$. Tenim que U, V són oberts, $U \simeq \{*\}$, $V \simeq \bigvee_g \mathbb{S}^1$, $U \cap V \simeq \mathbb{S}^1$ i $U \cup V = N_g$. Considerem la successió de Mayer-Vietoris per homologia reduïda. Si $p \geq 3$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(U\cap V) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(U)\oplus\widetilde{H}_p(V) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(N_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_p(\bigvee_{g}\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(N_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_*\oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{g}\widetilde{H}_p(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_*-\ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_p(N_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \widetilde{H}_p(N_g) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per exactitud de la successió de Mayer-Vietoris, $\widetilde{H}_p(N_g)$ per $p \geq 3$. De Mayer-Vietoris, tenim la següent successió exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(N_g) \arrow[r, "D"] \arrow[d, equal] & \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\iota_* \oplus j_*"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_g \widetilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "k_* - \ell_*"] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{H}_1(N_g) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{H}_2(N_g) \arrow[r, "D"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\iota_* \oplus j_*"] & \bigoplus_g \mathbb{Z} \arrow[r, "k_* - \ell_*"] & \widetilde{H}_1(N_g) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Tenim que $\iota_* \oplus j_* : \mathbb{Z} \to \bigoplus_g \mathbb{Z}$ esta definida per $\iota_* \oplus j_*(1) = e_1 + e_1 + \ldots + e_g + e_g = (2, \ldots, 2)$. Aleshores, $\ker \iota_* \oplus j_* = 0$ i $\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = \langle (2, \ldots, 2) \rangle$. Tenim que $\langle (1, \ldots, 1), e_2, \ldots, e_g \rangle$ és una base de $\bigoplus_g \mathbb{Z}$, $\operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = 2\mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_{g-1} 0)$. Per exactitud de la successió, D és injectiva i $k_* - \ell_*$ és exhaustiva. Aleshores, $\widetilde{H}_2(S_g) \cong \operatorname{im} D = \ker \iota_* \oplus j_* = 0$ i, pel primer teorema d'isomorfisme, $\widetilde{H}_1(S_g) \cong \bigoplus_g \mathbb{Z} / \ker k_* - \ell_* = \bigoplus_g \mathbb{Z} / \operatorname{im} \iota_* \oplus j_* = \bigoplus_g \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z} \oplus (\bigoplus_{g-1} 0)) \cong \mathbb{Z}/(2) \oplus (\bigoplus_{g-1} \mathbb{Z})$, com volíem.

4. *Per cadascun dels dos grups abelians graduats següents, descriu dos espais topològics no homòtops tals que la seva homologia coincideixi.*

$$A_p \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ p = 0 \\ \bigoplus_5 \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(2) & si\ p = 1 \\ 0 & si\ p \geq 2 \end{cases}, \quad B_p \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ p = 0, 2 \\ \bigoplus_6 \mathbb{Z} & si\ p = 1 \\ 0 & si\ p \geq 3 \end{cases}$$

Pel grup abelià graduat A_p, considerem N_6 i $\mathbb{RP}^1 \vee (\bigvee_5 \mathbb{S}^1)$. És clar que $H_*(N_6) \cong A_p \cong H_*(\mathbb{RP}^1 \vee (\bigvee_5 \mathbb{S}^1))$. Si fóssin homotòpicament equivalents, els grups d'homotopia serien isomorfs. Però, els primers grups d'homotopia no ho són, ja que els següents són clarament no isomorfs:

$$\pi_1(N_6) \cong \langle a_1, a_2, a_3 | a_1^2 a_2^2 a_3^2 = e \rangle$$
$$\pi_1(\mathbb{RP}^1 \vee (\bigvee_5 \mathbb{S}^1)) \cong (*_5 \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}/(2)$$

Similarment, pel grup abelià graduat B_p, considerem S_3 i $\mathbb{S}^2 \vee (\bigvee_6 \mathbb{S}^1)$. És clar que $H_*(S_3) \cong B_p \cong H_*(\mathbb{S}^2 \vee (\bigvee_6 \mathbb{S}^1))$, però $\pi_1(S_3) \ncong \pi_1(\mathbb{S}^2 \vee (\bigvee_6 \mathbb{S}^1))$:

$$\pi_1(S_3) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1} = e \rangle$$
$$\pi_1(\mathbb{S}^2 \vee (\bigvee_6 \mathbb{S}^1)) \cong \pi_1(\mathbb{S}^2) * (*_6 \pi_1(\mathbb{S}^1)) \cong *_6 \mathbb{Z}$$