Geometria Riemanniana. Curs 2023-2024

Llista 2: Solució de l'exercici 13

Sabem que la mètrica és ortogonal. Això vol dir $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$, és a dir la matriu del producte escalar és diagonal:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

L'exercici consiteix a aplicar la fórmula

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

i a fer simplificacions. La primera observació és que la matriu inversa del producte escalar també és diagonal :

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g^{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix}$$

Per tant els coeficients de la inversa de la matriu compleixen $g^{kl} = 0$ per $k \neq l$ i $g^{kk} = g_{kk}^{-1}$. D'aquí és dedueix que només un terme del sumatori és diferent de zero i que $g^{kk} = 1/g_{kk}$:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2g_{kk}} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

Ara mirem cas per cas. Sense que serveixi de precedent, evitaré treballar amb subíndexos, que son un invent del dimoni, i agafaré valors:

- Pel cas en que i, j i k són diferents agafo 1, 2, i 3 i tenim

  $$\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2g_{33}} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \right)$$

  i sabem que $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$, per tant $\Gamma_{12}^3 = 0$.

- Pel cas $i = j \neq k$ agafo $i = j = 1$ i $k = 2$:

  $$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \frac{-1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}$$

- Pel cas $i \neq j = k$ trio $i = 1$ i $j = k = 2$:

  $$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}$$

- I finalment quan $i = j = k$ escric $i = j = k = 1$:

  $$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}$$

Llista 2: Solució de l'exercici 14

L'exercici té dues parts. En la primera calculem els símbols de Christoffel i en la segona el trasport paral·lel.

- Càlcul dels simbols de Chirstoffel. La mètrica té l'expressió

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Per aplicar les fórmules, reescrivim les coordenades com

$$x^1 = x$$
$$x^2 = y$$

i la mètrica com

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}$$

Com que la mètica és ortogonal ($g_{12} = 0$) apliquem les fórmules de l'exercici 13:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = \frac{y^2}{2} \frac{\partial y^{-2}}{\partial x} = 0, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{-1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{2} \frac{\partial y^{-2}}{\partial y} = \frac{1}{y},$$

que vol dir:

$$\nabla_{\partial_x} \partial_x = \frac{1}{y} \partial_y$$

El següent càlcul és

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2} \frac{\partial y^{-2}}{\partial x} = -\frac{1}{y}, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{y^2}{2} \frac{\partial y^{-2}}{\partial x} = 0,$$

és a dir:

$$\nabla_{\partial_x} \partial_y = \nabla_{\partial_y} \partial_x = -\frac{1}{y} \partial_x$$

El darrer càlcul és:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{-1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{y^2}{2} \frac{\partial y^{-2}}{\partial x} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{-1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{2} \frac{\partial y^{-2}}{\partial y} = \frac{1}{y},$$

és a dir:

$$\nabla_{\partial_y} \partial_y = \frac{1}{y} \partial_y$$

- Càlcul del trasport paral·lel de la corba $\alpha(t) = (t, 1)$. Tenim que:

$$x(t) = t$$
$$y(t) = 1$$

I el tangent és:

$$\alpha'(t) = (1, 0) = \partial_x.$$

Escrivim un camp al llarg de α com

$$X(t) = a(t)\partial_x + b(t)\partial_y$$

on $X(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{H}^2$. Que el camp sigui paral·lel vol dir que $\nabla_{\alpha'}X = 0$. Escrivim:

$$\nabla_{\alpha'(t)}X(t) = \nabla_{\partial_x}(a\partial_x + b\partial_y) = \frac{\partial a}{\partial t}\partial_x + a\nabla_{\partial_x}\partial_x + \frac{\partial b}{\partial t}\partial_y + b\nabla_{\partial_x}\partial_y$$

Utilizem els càlculs anteriors per $x = t$ i $y = 1$:

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x = \frac{1}{y}\partial_y = \partial_y \qquad\qquad \nabla_{\partial_x}\partial_y = -\frac{1}{y}\partial_y = -\partial_y$$

Per tant

$$\nabla_{\alpha'(t)}X(t) = \frac{\partial a}{\partial t}\partial_x + a\partial_y + \frac{\partial b}{\partial t}\partial_y + -b\partial_x = (a' - b)\partial_x + (b' + a)\partial_y$$

Si posem $\nabla_{\alpha'(t)}X(t) = 0$ obtenim l'equació diferencial

$$\begin{aligned} a' - b = 0 \\ b' + a = 0 \end{aligned}$$

que té per solució

$$\begin{aligned} a = a_0\cos(t) + b_0\sin(t) \\ b = b_0\cos(t) - a_0\sin(t) \end{aligned}$$

Observem que el trasport paral·lel gira els vectors a mesura que avancen. En particualr α no és una geodèsica.

- Càlcul del trasport paral·lel de la corba $\beta(t) = (0, e^t)$. En aquest cas

$$\begin{aligned} x(t) =& 0 \\ y(t) =& e^t \end{aligned}$$

i

$$\beta'(t) = (0, e^t) = e^t\partial_y = y\partial_y$$

Tornem a escriure un camp al llarg de β com

$$X(t) = a(t)\partial_x + b(t)\partial_y$$

i ser paral·lel vol dir $\nabla_{\beta'}X = 0$. Escrivim:

$$\nabla_{\beta'(t)}X(t) = \nabla_{e^t\partial_y}(a\partial_x + b\partial_y) = \frac{\partial a}{\partial t}\partial_x + a\nabla_{e^t\partial_y}\partial_x + \frac{\partial b}{\partial t}\partial_y + b\nabla_{e^t\partial_y}\partial_y$$

Utilizem els càlculs dels símbols de Christoffel per $x = 0$ i $y = e^t$:

$$\nabla_{e^t\partial_y}\partial_x = e^t\nabla_{\partial_y}\partial_x = e^t\frac{-1}{y}\partial_x = -\partial_x \qquad\qquad \nabla_{e^t\partial_y}\partial_y = e^t\nabla_{\partial_y}\partial_y = e^t\frac{-1}{y}\partial_y = -\partial_y$$

Per tant
$$\nabla_{\beta'(t)}X(t) = (a' - a)\partial_x + (b' - b)\partial_y$$
i hem de resoldre l'equació diferencial

$$a' - a = 0$$
$$b' - b = 0$$

que té per solució

$$a(t) = a_0 e^t$$
$$b(t) = b_0 e^t$$

Observem que β' és un vector paral·lel, és a dir β és geodèsica.