Problema 1. *Considerem l'aplicació de H al pla $x_0 = 0$, que envia $x \in H$ a la intersecció de $x_0 = 0$ amb la recta que uneix x amb $(-1, 0, 0)$. Demostreu que indueix una isometria entre H i $\mathbb{D}^2$.*

Demostració. Considerem a $\mathbb{R}^2_1$ la mètrica de Lorentz $g_{\mathbb{R}^2_1} := -\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ i a $\mathbb{D}^2$ la mètrica $g_{\mathbb{D}^2} := \frac{4(\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v)}{(1-u^2-v^2)^2}$. Sigui $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2_1 : g_{\mathbb{R}^2_1}((x, y, z), (x, y, z)) = -1 \wedge x > 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2_1 : -x^2 + y^2 + z^2 = -1 \wedge x > 0\}$ i $g_H := g_{\mathbb{R}^2_1}|_H$. Definim $\varphi : (H, g_H) \to (\mathbb{D}^2, g_{\mathbb{D}^2})$ donada per $\varphi(x, y, z) := (\frac{y}{x+1}, \frac{z}{x+1})$[1]. Fixem-nos que φ esta ben definida:

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{R}^2}(\varphi(x,y,z), \varphi(x,y,z)) &= (\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v)(\varphi(x,y,z), \varphi(x,y,z)) && (g_{\mathbb{R}^2} := \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v) \\ &= \big(\tfrac{y}{x+1}\big)^2 + \big(\tfrac{z}{x+1}\big)^2 = \tfrac{x^2-1}{(x+1)^2} = 1 - \tfrac{2}{x+1} < 1 && (\text{Per definició de } \varphi \text{ i } (x,y,z) \in H) \end{aligned}$$

Clarament $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(H, \mathbb{D}^2)$. Volem veure que φ és una isometria, és a dir, $\varphi^* g_{\mathbb{D}^2} = g_H$. Fem uns càlculs previs. Tenim que $\varphi^*\mathrm{d}u = \frac{-y\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y}{(x+1)^2}$ i $\varphi^*\mathrm{d}v = \frac{-z\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}z}{(x+1)^2}$, d'on deduïm

$$\varphi^*(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u) = \varphi^*\mathrm{d}u \otimes \varphi^*\mathrm{d}u = \frac{y^2\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - y(x+1)(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x) + (x+1)^2\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y}{(x+1)^4}$$

$$\varphi^*(\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v) = \varphi^*\mathrm{d}v \otimes \varphi^*\mathrm{d}v = \frac{z^2\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - z(x+1)(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x) + (x+1)^2\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z}{(x+1)^4}$$

Necessitarem la següent igualtat:

$$\begin{aligned} y(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x) + z(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x) &= \mathrm{d}x \otimes (y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) + (y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) \otimes \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{d}x \otimes \big(\tfrac{\mathrm{d}(y^2+z^2)}{2}\big) + \big(\tfrac{\mathrm{d}(y^2+z^2)}{2}\big) \otimes \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{d}x \otimes \big(\tfrac{\mathrm{d}(x^2-1)}{2}\big) + \big(\tfrac{\mathrm{d}(x^2-1)}{2}\big) \otimes \mathrm{d}x && ((x,y,z) \in H) \\ &= 2x\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x \end{aligned}$$

De les tres darreres igualtats, obtenim

$$\begin{aligned} & \varphi^*(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v) \\ &= \varphi^*(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u) + \varphi^*(\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v) \\ &= \frac{(y^2+z^2)\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - (x+1)\big(y(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}x) + z(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}x)\big) - (x+1)^2(\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{\big((x^2-1) - 2x(x+1)\big)\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + (x+1)^2(\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{-(x+1)^2\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + (x+1)^2(\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{g_H}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Ara,

$$\begin{aligned} \varphi^* g_{\mathbb{D}^2} &= \frac{4\varphi^*(\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + \mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v)}{\big(1 - (\frac{y}{x+1})^2 - (\frac{z}{x+1})^2\big)^2} && (\text{Per } \varphi^*) \\ &= \frac{4g_H}{(x+1)^2\big(\frac{(x+1)^2-(y^2+z^2)}{(x+1)^2}\big)^2} && (\text{Càlcul anterior}) \\ &= \frac{4(x+1)^2 g_H}{\big((x+1)^2 - (x^2-1)\big)^2} && ((x,y,z) \in H) \\ &= \frac{4(x+1)^2 g_H}{\big(2(x+1)\big)^2} = g_H \end{aligned}$$

Per tant, φ és isometria. □

[1] φ és l'aplicació de H al pla $x_0 = 0$ que envia $x \in H$ a la intersecció de $x_0 = 0$ amb la recta que uneix x amb $(-1, 0, 0)$.