2 Mòduls

Mòduls lliures i generadors

23. Considerem $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}^2$ com a $\mathbb{Z}$-mòduls.

    (a) Demostreu que $\{2,5\}$ és un sistema generador de $\mathbb{Z}$. És linealment independent? Conté una base? Es pot ampliar a una base? Trobeu totes les possibles bases de $\mathbb{Z}$.

    (b) Demostreu que $\{(2,5),(3,5)\}$ és un subconjunt linealment independent de $\mathbb{Z}^2$. És una base de $\mathbb{Z}^2$? Descriviu com són totes les bases de $\mathbb{Z}^2$.

    (c) És cert que tot conjunt de n elements linealment independents de $\mathbb{Z}^n$ és una base? I que tot conjunt de n generadors de $\mathbb{Z}^n$ és linealment independent?

24. (La llei modular) Sigui M un R-mòdul amb submòduls A, B, C. Suposem que $C \subseteq B$. Proveu que aleshores $C + (B \cap A) = B \cap (C + A)$. És necessària la hipòtesi $C \subseteq B$?

25. Sigui R un anell commutatiu no nul ($R \neq 0$). Demostreu que $\oplus_{i\in I} R \cong \oplus_{j\in J} R$ si i només si $|I| = |J|$ (feu per separat el cas en què I, J son finits).

26. Sigui K un cos i $R = \mathrm{End}_K(K^{(\mathbf{N})})$. Proveu que $R \cong R \oplus R$. Per tant, la hipòtesi de commutativitat en l'exercici anterior és fonamental.

27. Siguin M, N dos R-mòduls. Demostreu que el conjunt

    $$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \{f\colon M \to N \mid f \text{ morfisme de } R\text{-mòduls.}\},$$

    és un R-mòdul amb les operacions donades per

    $$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \qquad (r \cdot f)(m) := rf(m).$$

    (a) Descriviu $\mathrm{Hom}_R(R, M)$, $\mathrm{Hom}_R(R^2, M)$.

    (b) Donats $m, n \in \mathbb{N}$, descriviu $\mathrm{Hom}_R(R^n, R^m)$ i $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n))$.

28. (El grup de Baer-Specher, 1937) Considereu el $\mathbb{Z}$-modul $M = \prod_{i\geq 0} \mathbb{Z}$. Demostreu que M no és lliure.

29. Sigui V un K-espai vectorial de dimensió finita $n > 0$ amb una K-base $\{e_1, \dots, e_n\}$ i $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Denotem per (V, f) el $K[x]$-mòdul V amb l'estructura determinada per f. Trobeu morfismes de $K[x]$-mòduls α, β,

    $$K[x]^n \xrightarrow{\alpha} K[x]^n \xrightarrow{\beta} (V, f) \to 0,$$

    de manera que β sigui exhaustiva, Im(α)=Ker(β), i per tant $(V, f) \cong K[x]^n/\alpha(K[x]^n)$.

30. Siguin n un enter positiu i $\mathbb{Z}^n$ el $\mathbb{Z}$-mòdul lliure amb base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Sigui L el submòdul generat per

    $$\{f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \mid i = 1, \dots, n\}.$$

    Suposem que $d = \det(a_{ij}) \neq 0$. Demostreu que $\mid \mathbb{Z}^n/L \mid = \mid d \mid$.

    Sigui $a + bi$ un element no nul de $\mathbb{Z}[i]$. Veieu que $\mid \mathbb{Z}[i]/(a+bi) \mid = a^2 + b^2$.

31. (a) Sigui $f\colon R^n \to R^m$ un morfisme exhaustiu d'R-mòduls. Vegeu que $n \geq m$.
    (b) Sigui $g\colon R^n \to R^m$ un morfisme injectiu d'R-mòduls. Vegeu que $n \leq m$.

32. Sigui R un anell. Demostreu les propietats següents d'endomorfismes de R-mòduls finitament generats.
    (a) Si M_R és finitament generat i $f\colon M \to M$ és exhaustiu, aleshores f és isomorfisme.
    (b) Si M_R és lliure de rang n, aleshores tot conjunt de n generadors de M és base.
    (c) Si tot endomorfisme injectiu de R-mòduls finitament generats és isomorfisme, aleshores tot ideal primer de R és maximal. Podeu demostrar el recíproc?

33. Sigui R un anell i $I \leq R$ un ideal. Demostreu que IM és un R-submòdul de M i que M/IM és un R/I-mòdul de forma natural.

34. Sigui R un anell local amb ideal maximal $\mathfrak{m}$ i $k = R/\mathfrak{m}$. Sigui M un R-mòdul finitament generat. Demostreu que $m_1, \ldots, m_n \in M$ formen un conjunt generador minimal de M si i només si $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_n}$ son una k-base de $M/\mathfrak{m}M$.

35. Sigui R un anell i I un ideal finitament generat tal que $I = I^2$. Demostreu que I està generat per un idempotent $I = eR$ i que aquest és únic.

36. (a) Demostreu que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ és un $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-mòdul que no és lliure. Vegeu que existeix un $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-mòdul tal que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus M$ és lliure.
    (b) Sigui P un R-mòdul tal que existeix Q amb $P \oplus Q$ lliure. Demostreu que existeix M lliure tal que $P \oplus M$ és lliure.

37. Sigui $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ una successió exacta de R-mòduls. Demostra que si M' i M'' són finitament generats, llavors M també ho és.

38. Sigui R un anell i I, J ideals de R tals que $I + J = R$. Demostreu que I, J són finitament generats si i només si, $I \cap J$ és finitament generat.

39. (*Lemma del 5 (curt)*) Considereu el següent diagrama de mòduls i morfismes de mòduls en què les files són successions exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma_2"] & L \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & L' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demostreu que si γ_1, γ_3 son isomorfismes, aleshores γ_2 és un isomorfisme.

Condicions de cadena

40. Sigui R un anell no nul. Demostreu que $\operatorname{Spec}(R)$ té elements minimals. Si R és noetherià, demostreu que a més R té un nombre finit d'ideals primers minimals.

41. Demostreu que si A és una k-àlgebra de dimensió finita, aleshores és artiniana (i noetheriana).

42. Demostreu que el grup abelià $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ és artinià, però no noetherià.

43. Sigui R un anell noetherià i M un R-mòdul finitament generat. Demostreu que existeix una successió exacta de la forma

$$R^n \xrightarrow{\alpha} R^m \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0.$$

Això s'anomena una *presentació del mòdul*.

44. Proveu que si R és artinià, aleshores $N(R)$ és nilpotent.

45. Sigui R un anell i $R[[x]]$ l'anell de series formals. Demostreu que si R és noetherià, aleshores $R[[x]]$ també ho és.