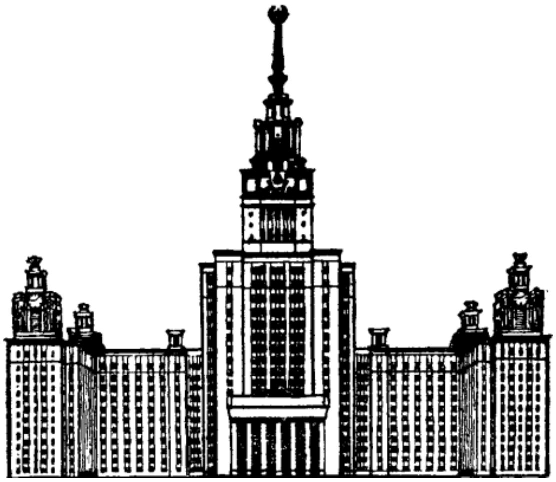

Практическая работа по предмету «Введение в численные методы»

Задание выполнил студент 218 - ой группы - Касумов Руслан Раидинович.

2022

Интерполирование. Вариант V2

Задача состояла в следующем:
Функция f(x) задана таблично на отрезке [0, a] в точках x_i ,

$$x_i = ih,\ \ i = 0,1,\ \ldots\ ,N,\ \ \ h = a / N$$

а) Построить интерполяционный многочлен по точкам x_i
б) Приблизить функцию по методу наименьших квадратов полиномом заданной степени n, n = 4. Оценить погрешность.
в) Результаты сравнить.

V2

Ex.2

отрезок $[0,2]$, $n = 4$

i	x	f(x)
0	0	0
1	0,1	0,000479
2	0,2	0,006732
3	0,3	0,026932
4	0,4	0,058195
5	0,5	0,074809
6	0,6	0,030482
7	0,7	0,120319
8	0,8	0,387483
9	0,9	0,712619
10	1	0,958924
11	1,1	0,939074
12	1,2	0,48283
13	1,3	0,472619
14	1,4	1,802771
15	1,5	3,16575
16	1,6	4,052411
17	1,7	3,922967
18	1,8	2,403475
19	1,9	0,515462
20	2	4,352169

Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа

Необходимо построить интерполяционный многочлен по точкам x_i. Будем его строить в форме Лагранжа.

Представим искомый полином $P_n(x)$, в виде:

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,Q_j(x),$$

В выданном варианте n = 21, поэтому Q_j - это многочлен 20-ой степени, который имеет вид $Q_j=\prod_{i=0,i!=j}^{20}\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)$.

В файле **plm.m** приведена программа, разработанная в среде Matlab, которая выводит на экран искомый полином, а также рисует его график **(рис 1).** На графике красными маркерами выделены точки, которые были заданы по условию.

Видно, что полученный полином достаточно неплохо интерполирует искомую функцию, однако на отрезках [0, 0.1] и [1.8, 2] колебания функции существенно возрастают.

Приближение функции методом наименьших квадратов

В выданном варианте n = 4. Значит $f_0=1, f_1=x, f_2=x^2, f_3=x^3, f_4=x^4$
и строим функцию в виде: $F=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$.
Рассмотрим разность $(y_i-F(x_i))^2$. Суммарная квадратичная погрешность имеет вид:
$J=\sum_{i=0}^{20}(y_i-F(x_i))^2=\sum_{i=0}^{20}\left(y_i-\sum_{k=0}^{4}a_k x_i^k\right)^2$. Необходимо найти такой набор коэффициентов a_k, при которых суммарная квадратичная погрешность оказывается минимальной.

Построение требуемой функции сводится к задаче поиска экстремума для функции нескольких переменных. Также можно показать, что точка минимума всегда определяется из условия равенства нулю всех частных производных первого порядка в этой точке.
Теперь ищем значения a_k, , при которых достигается минимум.

Частные производные: $\frac{\partial J}{\partial a_l} = -2\sum_{i=0}^{20}(y_i - \sum_{k=0}^{4} a_k x_i^k) x_i^l = 0, l = 0,1,\ldots,4$ Отсюда приходим к равенствам

$\sum_{k=0}^{4} \gamma_{lk} a_k = b_l$, l = 0,1, … , 4, где $\gamma_{lk} = \sum_{i=0}^{20} x_i^l x_i^k$, $b_l = \sum_{i=0}^{20} x_i^l y_i$.

Таким образом, получена система из пяти линейных уравнений, в которой пять неизвестных.

Вычислим коэффициенты γ_{lk}, при неизвестных с помощью программы **sqr.m**, написанной в среде Matlab, а затем решим полученную систему, воспользовавшись приложением.

$F(x) = -0.0598 + 1.5201x - 5.4556x^2 + 6.5768x^3 - 1.9323x^4$

График представлен на **рисунке 2**. Оценка погрешности представлена на **рисунке 3**.

Видно, что до точки x = 1.2 функция достаточно хорошо себя показывает, после этой точки погрешность начинает возрастать.

Сравнение результатов

На **рисунке 4** приведены детальные графики функций. Оранжевым цветом нарисована функция интерполяции Лагранжа, синим цветом функция, которая аппроксимируется методом наименьших квадратов, а красным цветом выделены начальные условия.

Сравнивая результаты, замечаем, что функция, полученная методом наименьших квадратов труднее подается отклонениям, то есть она обладает устойчивостью к изменениям. Полином Лагранжа наоборот, менее устойчив к отклонениям, к такому выводу можно прийти, если посмотреть на отрезки [0, 0.2] и [1.8, 2].

Также, оранжевый график функции проходит через все заданные точки, а синий нет.

Рисунок 1

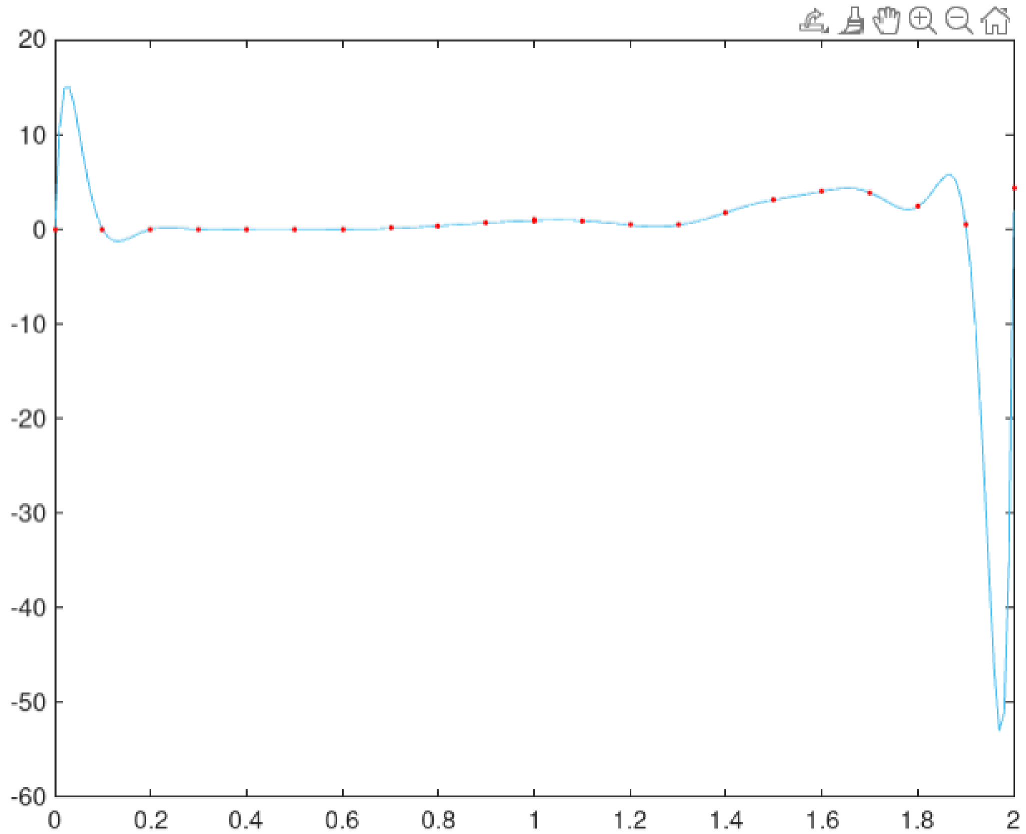

Рисунок 2

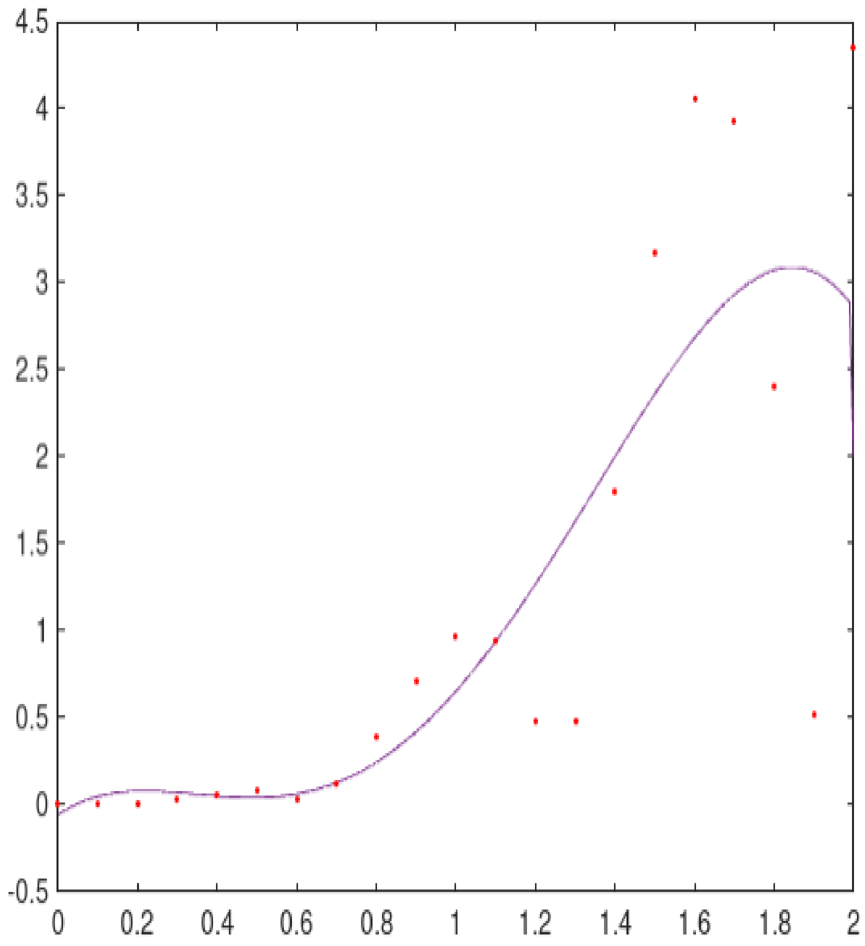

Рисунок 3

```
0.0: 0.059800
0.1: 0.043559
0.2: 0.068787
0.3: 0.040216
0.4: 0.011403
0.5: 0.037128
0.6: 0.027925
0.7: 0.002604
0.8: 0.146935
0.9: 0.296660
1.0: 0.309724
1.1: 0.002400
1.2: 0.783319
1.3: 1.154135
1.4: 0.196209
1.5: 0.806069
1.6: 1.371335
1.7: 0.992225
1.8: 0.668146
1.9: 2.546556
2.0: 1.496569
```

Рисунок 4