Московский
Физико-Технический Институт

Кафедра общей физики

Лабораторная работа №3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Студент:
Павел Северилов
671 группа

12 декабря 2017 г.

1 Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно - модулированных гармонических колебаний.

2 Теоретический материал

2.1 Спектральный анализ

Рассмотрим функцию вида:

$$f(t) = A_1 cos(\omega_1 t - \alpha_1) + ... + A_n cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

или, что то же самое:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i cos(\omega_i t - \alpha_i)$$

Причем, A_i, ω_i, α_i - постоянные константы. Множество пар (ω_i, A_i), $i \in 1..N$ - называется спектром функции $f(t)$.

2.2 Периодические сигналы

Часто встречаемая задача - разложение сложного сигнала на гармонические колебания различных частот ω. Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется *разложением в ряд Фурье*.

Пусть заданная функция $f(t)$ - периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения сигнала $f(t)$ Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t) \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \tag{2}$$

где $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$. Постоянные a_n и b_n определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t)\, dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t)\, dt \tag{4}$$

причем точку t_1 можно выбрать любую.

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{5}$$

$$\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \tag{6}$$

3 Работа и измерения

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

V_0 - амплитуда, τ - длительность, $f_{\text{повт}} = \frac{2\pi}{T}$ - частота повторения.
Согласно формуле 3 находим:

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \, dt = V_0 \frac{\tau}{T}; \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n f_{\text{повт}} t) \, dt \sim \frac{\sin(x)}{x}$$

В силу чётности функции $\forall n \in N \; b_n = 0$. Таким образом, спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов должен выглядеть как график $\frac{\sin(x)}{x}$.

Ход работы

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф*

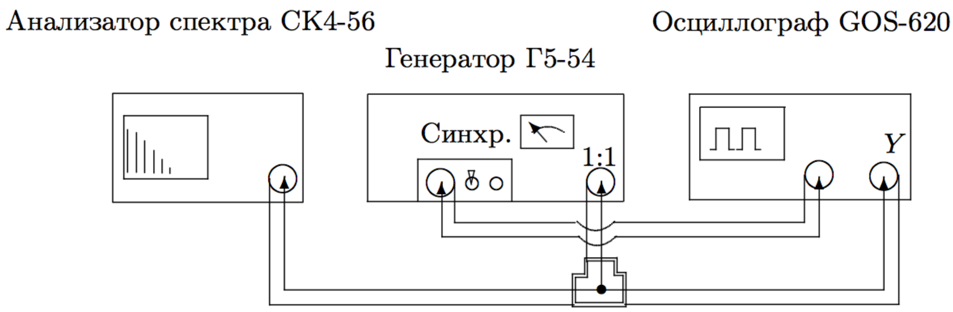


Рис. 1: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Собираем схему согласно 1. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических прямоугольных импульсов. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 25 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$$

При увеличении частоты повторений $f_{\text{повт}}$ вдвое при неизменном τ, увеличивается расстояние $\delta\nu$. При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, уменьшается ширина спектра, в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

Измерения

τ, мкс	25	30	50	60	80	100	130	150
n, клеток	7,5	6,5	4	3	2,5	2	1,5	1
$1/\tau$, кГц	40	33,3	20	16,7	12,5	10	7,7	6,7
$\Delta\nu$, кГц	37,5	32,5	20	15	12,5	10	7,5	5

Таблица 1: Зависимость ширины $\Delta\nu$ спектра от длительности импульса τ

Построим график по полученным данным. Ошибка для клеток – половина клетки, тогда в соответствии с $m_x = 5$ кГц/дел получаем $\sigma_{\Delta\nu} = 2.5$ кГц

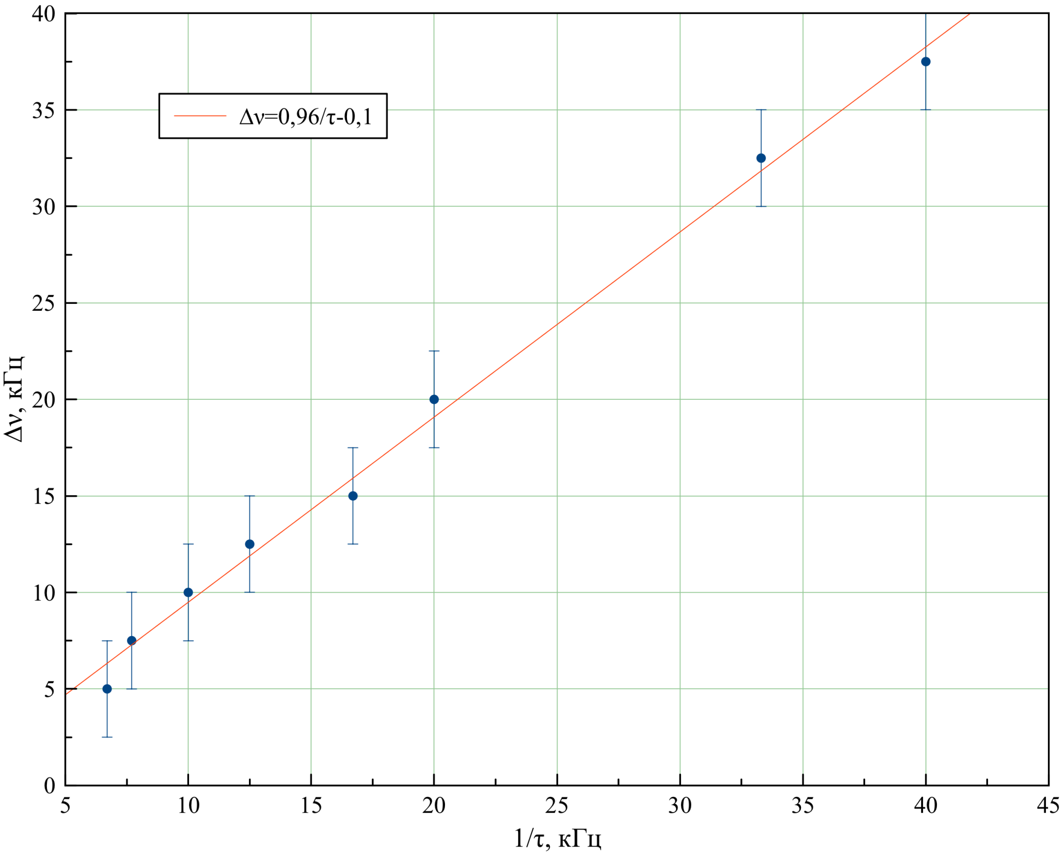
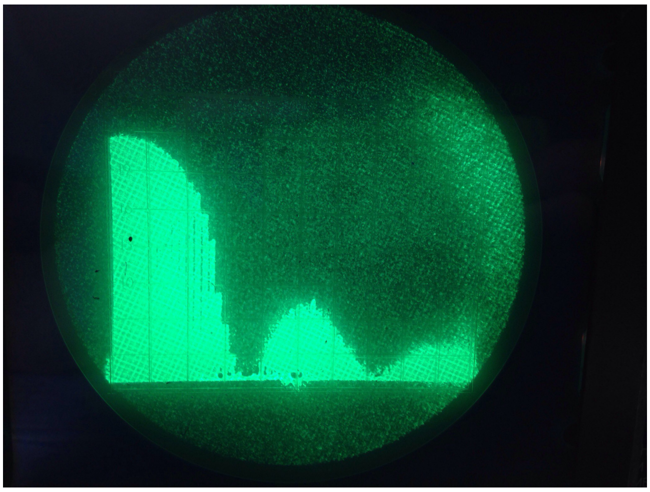


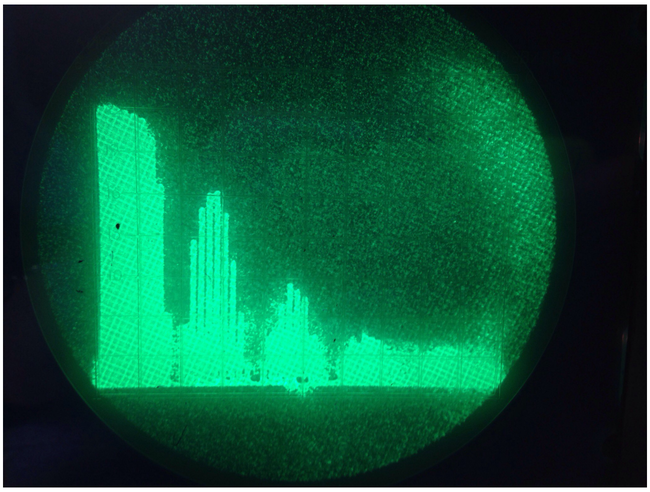
Рис. 2: График зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

Получили зависимость $\Delta\nu = 0,96/\tau - 0,1$. Тогда из графика находим $\Delta\nu\tau = 0.96 \pm 0.10$, что подтверждает справедливость соотношения неопределенности.

Спектры при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $m_x = 5$ кГц/дел при $\tau = 50$ мкс и $\tau = 100$ мкс:



$\tau = 50$ мкс



$\tau = 100$ мкс

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Рассмотрим периодическую последовательность *цугов* гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ. Тогда согласно 3:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1)\, dt \qquad (7)$$

Работа

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34*

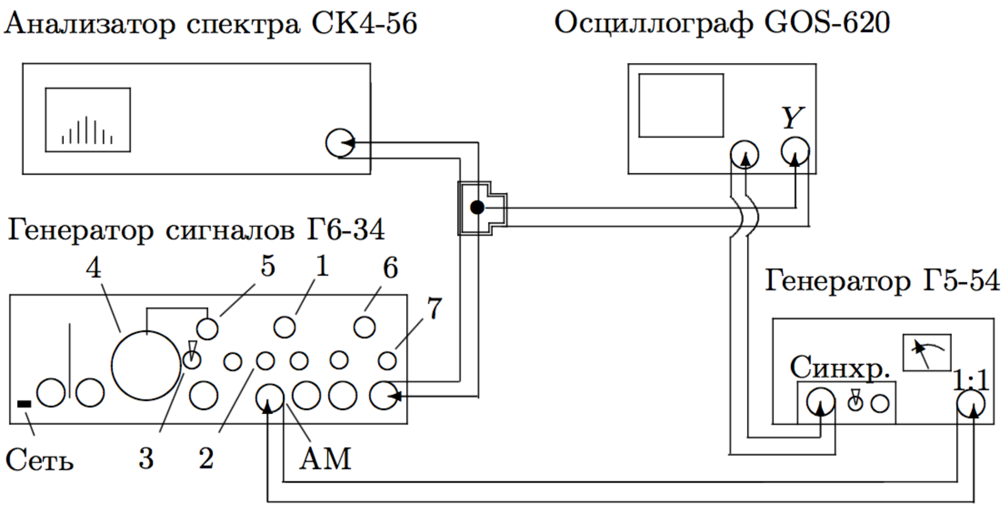


Рис. 3: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Собираем схему согласно 3. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических цугов гармонических колебаний, получаемых модулированием синусоиды прямоугольными импульсами. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$\nu_0 = 25 \text{ кГц}, f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 100 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$$

При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, вдвое уменьшается ширина спектра, в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

При изменении несущей частоты $\nu_0 = 25, 10$ или 40 кГц при неизменных $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц, $\tau = 100$ мкс, $m_x = 5$ кГц, изменяется сдвиг спектра по оси частот.

$f_{\text{повт}}$, кГц	1	2	3	4	5	6	8
m_x, кГц/дел	1	1	1	1	1	2	2
$\delta\nu$, кГц	1,2	2,2	3,2	4,3	5,5	6,4	8,4

Таблица 2: Зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от $f_{\text{повт}}$ при $\tau = 50$мкс

По полученным данным построим график:

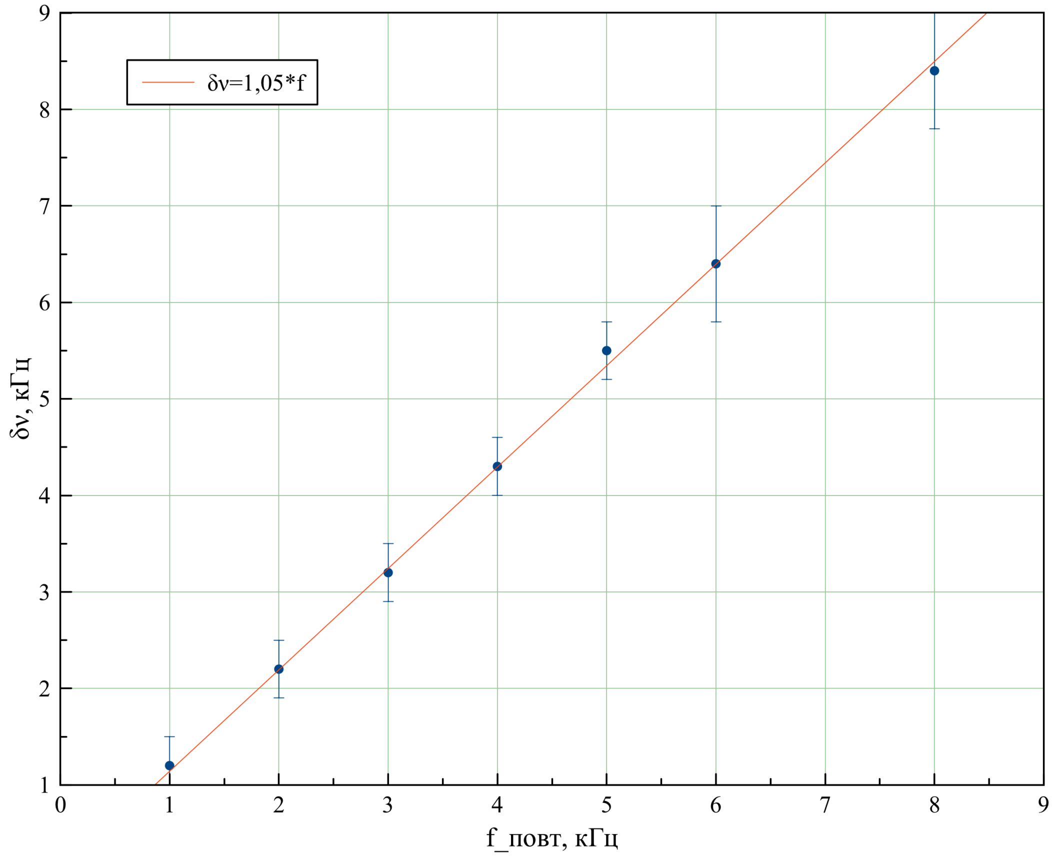


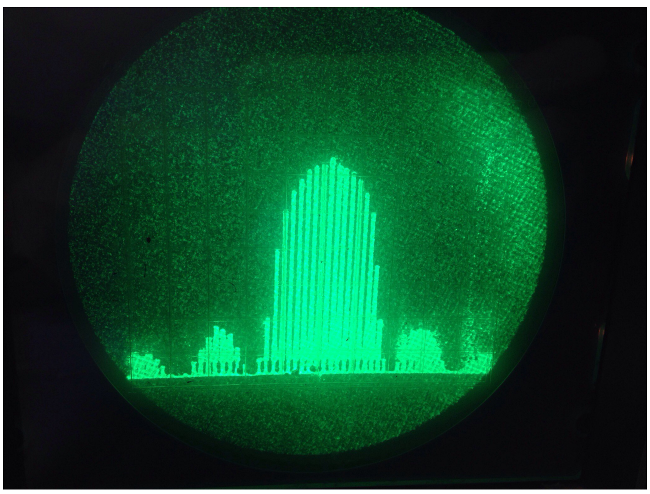
Рис. 4: График зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Получили зависимость $\delta\nu = 1,05 \cdot f_{\text{повт}}$. Тогда из графика находим

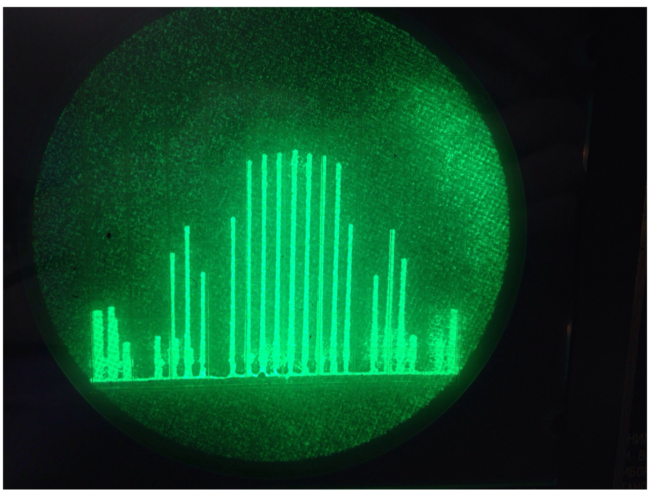
$$\delta\nu / f_{\text{повт}} = 1,05 \pm 0,15,$$

откуда получаем $\Delta\nu\tau = 1,05 \pm 0,15$, что подтверждает справедливость соотношения неопределенности.

Спектры цугов при $\tau = 100$ мкс, $m_x = 5$ кГц/дел при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $f_{\text{повт}} = 2$ кГц:



$f_{\text{повт}} = 1$ кГц



$f_{\text{повт}} = 2$ кГц

B. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых, в свою очередь, меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0[1 + m\cos(\Omega t)]\cos(\omega_0 t) \tag{8}$$

Коэффициент m - глубина модуляции и по определению:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \tag{9}$$

Работа

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34*

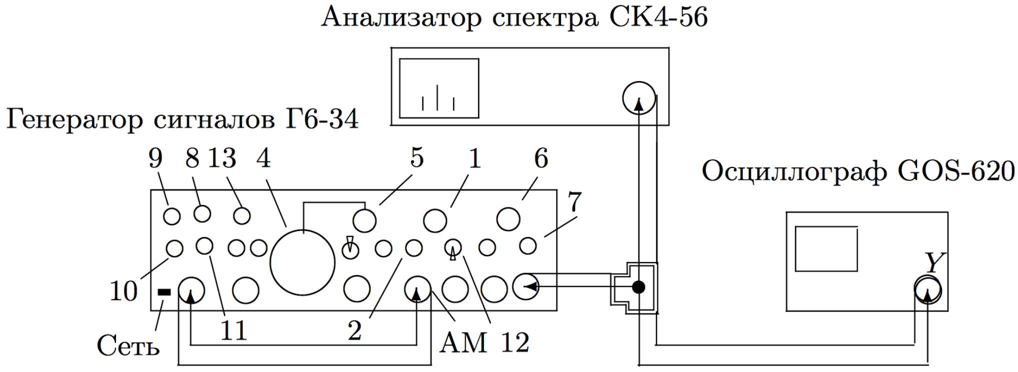


Рис. 5: Схема для исследования спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Собираем схему согласно 5. Получаем на экране осциллографа гармонический сигнал, модулированный по амплитуде. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала.

Чтобы измерить глубину модуляции, измерим A_{max}, A_{min} и подставим в формулу 9. Построим график отношения $a_{бок}/a_{осн}$ в зависимости от m.

Рассчитаем теоретический коэффициент наклона, воспользовавшись формулой:

$$f(t) = A_0\cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 + \Omega t) + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega_0 - \Omega t). \tag{10}$$

$$a_{осн} = A_0,\ a_{бок} = \frac{A_0 m}{2} \Rightarrow k_{теор} = 0.5$$

Таблица 3: Зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии $a_{бок}/a_{осн}$ от глубины модуляции m

$2A_{min}$, мм	$2A_{max}$, мм	m	$a_{бок}$, мм	$a_{осн}$, мм	$a_{бок}/a_{осн}$
0	4,4	1	3,2	6,4	0,5
1,6	3,6	0,385	1	6	0,167
0,6	4,6	0,769	2,5	6	0,417
1,2	4	0,538	1,8	6	0,3
2,4	2,4	0	0	6	0

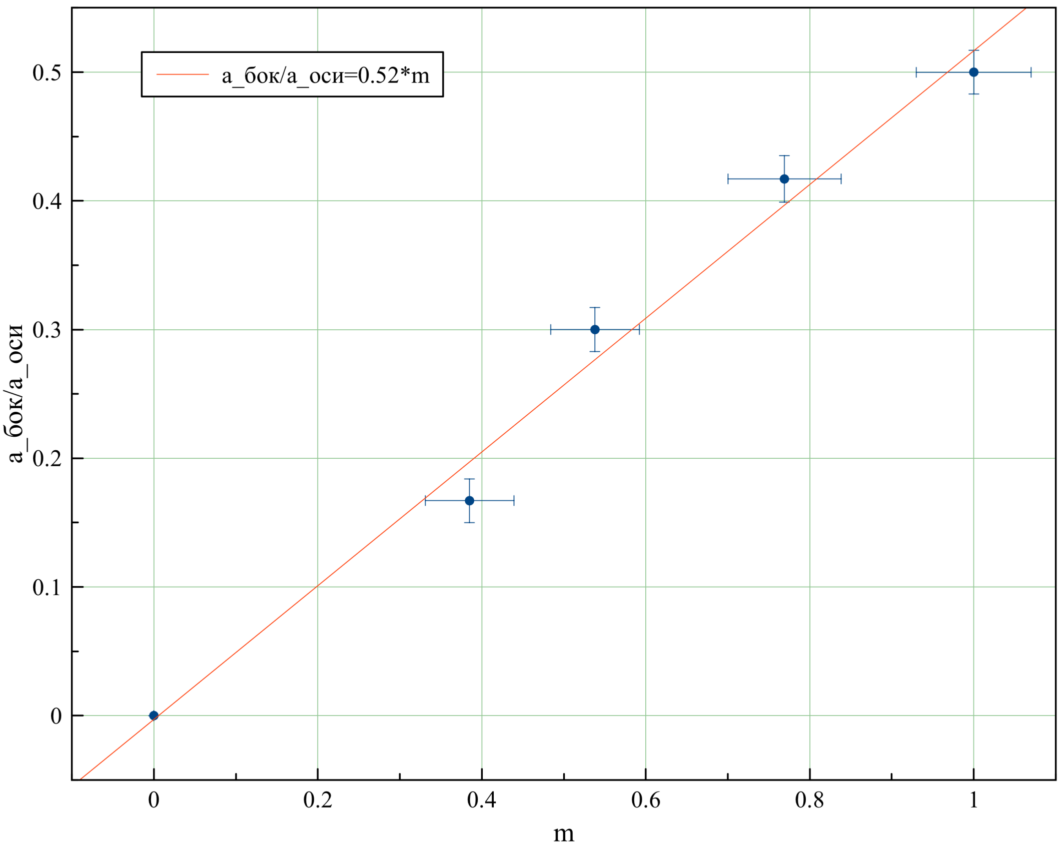


Рис. 6: График зависимости $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$

Из графика находим $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}m} = 0.52 \pm 0.05$, что в пределах погрешности совпадает со значением, рассчитанным теоретически.

4 Вывод

Изучили спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно - модулированных гармонических колебаний. В двух разных опытах получили результаты, подтверждающие соотношение неопределенности. Точность в первых двух опытах достаточно высокая, т.к. имели возможность менять масштаб, и значения задавались точно. В третьем опыте получили менее точное значение, но совпадающее с теоретическим, полученным из разложения в ряд Фурье. Основной вклад в погрешность в данном опыте вносит отсутствие мелких делений на анализаторе спектра и осциллографе. В третьем опыте экспериментально подтвердили вид разложения амплитудно-модулированных колебаний.