

# 人工智能顶级实战工程师就业课程

## 数学基础-数据分析



主讲人：米老师

# 一、函数

给定一个数集A，对A施加一个对应的法则/映射f，记做: $f(A)$ ，那么可以得到另外一个数集B，也就是可以认为 $B=f(A)$ ；那么这个关系就叫做函数关系式，简称函数。三个重要的因素：定义域A、值域B、对应的映射法则f。

A	1	3	5	7	9	11	13
B	2	4	6	8	10	12	14

$$B = f(A) = A + 1$$

# 常见函数

常函数:  $y = C$

一次函数:  $y = ax + b$

二次函数:  $y = ax^2 + bx + c$  幂函数:  $y = x^a$

指数函数:  $y = a^x$ , a的取值范围为:  $a > 0 \& a \neq 1$

对数函数:  $y = \log_a(x)$ , a的取值范围为:  $a > 0 \& a \neq 1$

# 反函数

若函数  $f : D \rightarrow f(D)$ , 它存在逆映射  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ , 则此映射  $f^{-1}$  称为函数  $f$  的反函数.

例如, 因函数  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  是单射, 所以此函数有反函数. 下面来具体求反函数的解析式.

$$f: x \mapsto y = x^3 \quad y \text{ 用 } x \text{ 来表示}$$

$$? \leftarrow y \quad x \text{ 如何用 } y \text{ 来表示?}$$

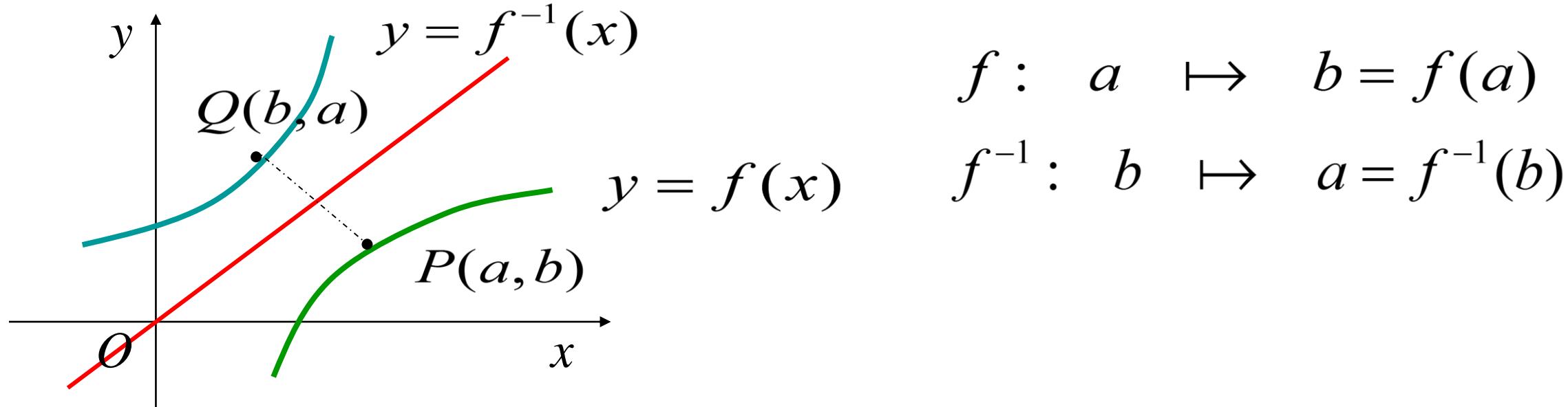
$$y = x^3 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}}$$

而由于习惯上自变量用  $x$  表示, 应变量用  $y$  表示, 所以直接函数  $y = x^3$  的反函数就是

$$y = x^{\frac{1}{3}}.$$

# 反函数的性质

( 1 ) 函数  $f(x)$  与其反函数  $f^{-1}(x)$  关于直线  $y = x$  对称.



( 2 ) 若  $f(x)$  是定义在  $D$  上的单调函数，则与其反函数  $f^{-1}(x)$  存在，且  $f^{-1}(x)$  也是单调函数，且单调性相同。

# 复合函数

设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D_1$ ，函数  $u = g(x)$  在  $D$  上有定义，且  $g(D) \subset D_1$ ，则函数  $y = f[g(x)]$ ,  $\forall x \in D$  称为由函数  $u = g(x)$  和函数  $y = f(u)$  构成的复合函数，其定义域为  $D$ ，变量  $u$  称为中间变量。函数  $f$  和  $g$  构成的复合函数通常记为  $f \circ g$ ，即  $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ 。

$$x \xrightarrow{g} g(x) = u \xrightarrow{f} f(u) = f[g(x)]$$

如，物体运动的动能  $E = mv^2/2$ ，而自由落体的速度  $v = g t$ ，所以自由落体的动能是时间  $t$  的复合函数

$$E = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

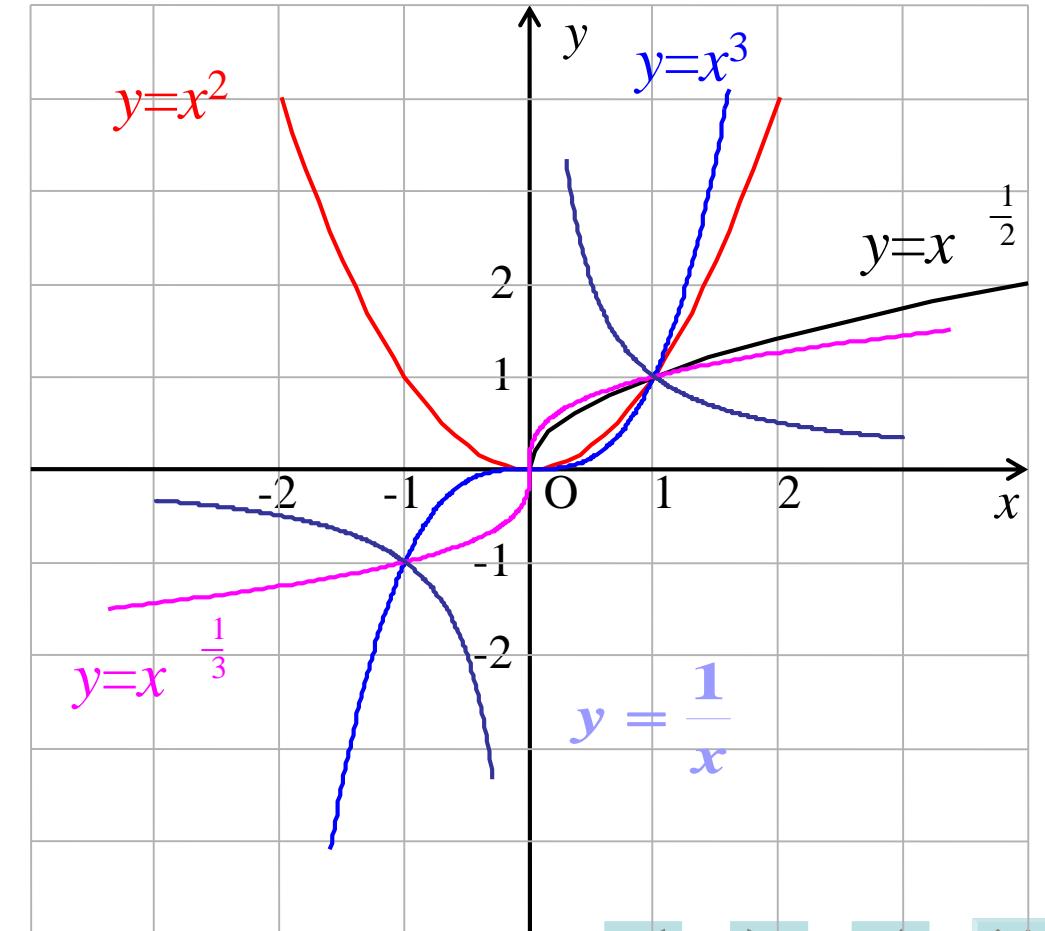
# 基本初等函数 (Basic Elementary Functions)

## 1) 幂函数(Power Function)

幂函数的定义域随 $a$ 而异，但不论 $a$ 为何值，它在 $(0, +\infty)$ 内总有定义。幂函数图形都经过 $(1, 1)$ 点。

常见的幂函数及其图形：

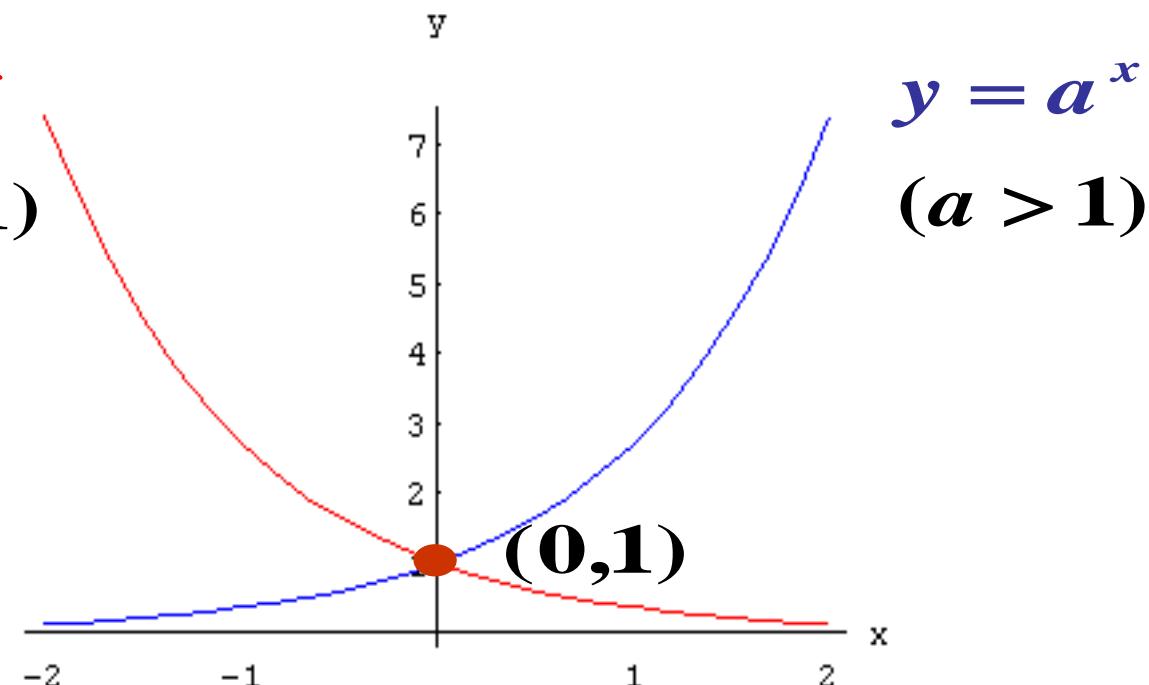
$$y = x^a \quad (a \text{是常数})$$



## 2) 指数函数 (Exponential Function)

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

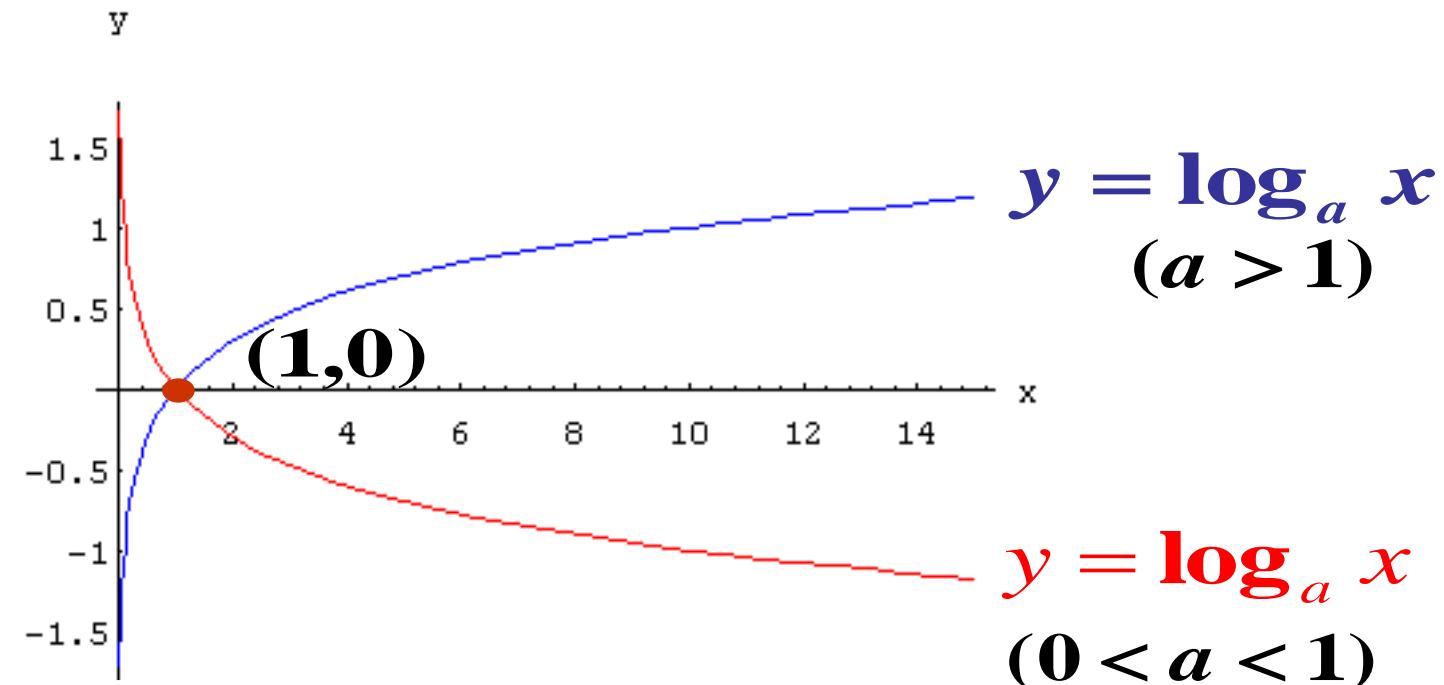
定义域为 $(-\infty, +\infty)$ , 值域  
为 $(0, +\infty)$ , 都通过 $(0, 1)$ 点。  
当 $a>1$ 时, 函数单调增加;  
当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少。



### 3) 对数函数 (Logarithmic Function)

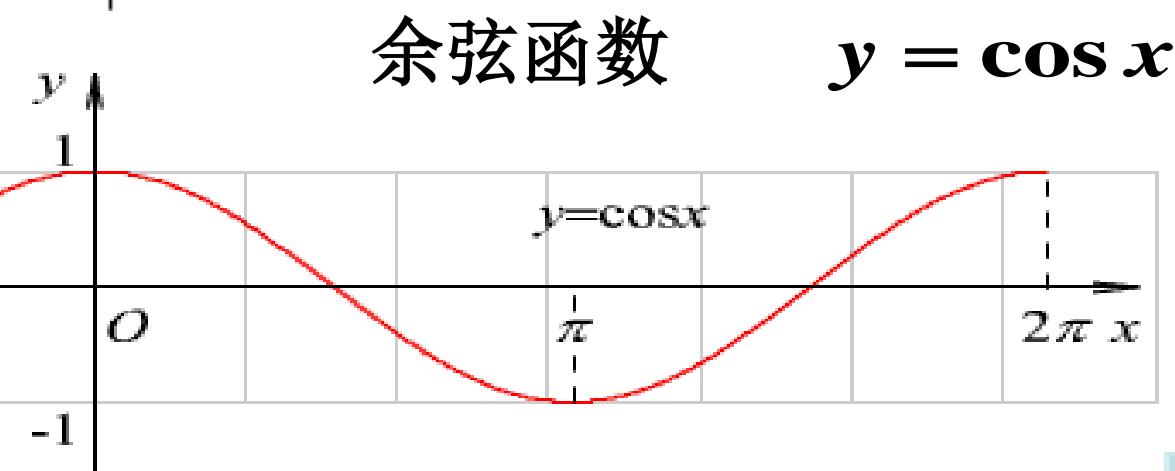
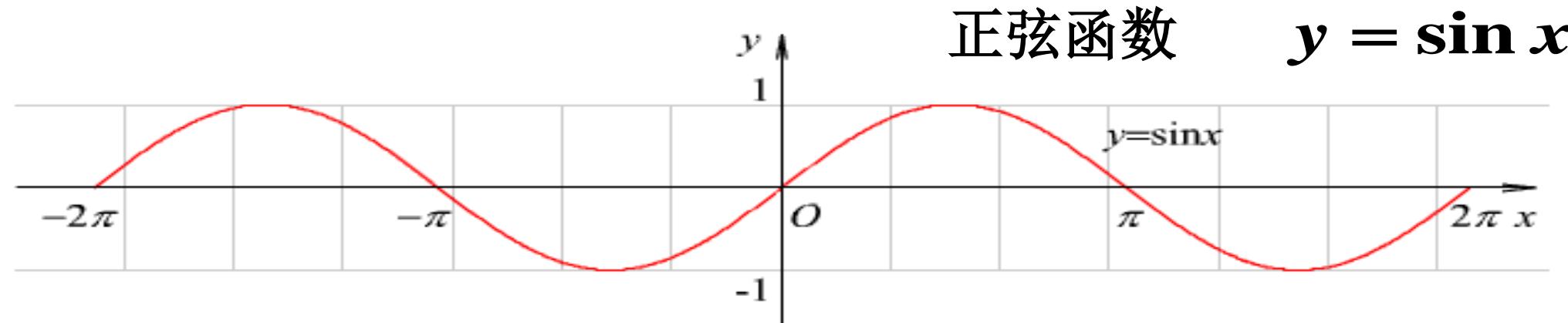
$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

对数函数是指数函数  
 $y=a^x$ 的反函数, 定义域为  
(0, +∞), 图形通过(1, 0)点。  
当  $a>1$  时, 函数单调增  
加; 当  $0<a<1$  时, 函数单  
调减少。



## 4) 三角函数 (Trigonometric Function)

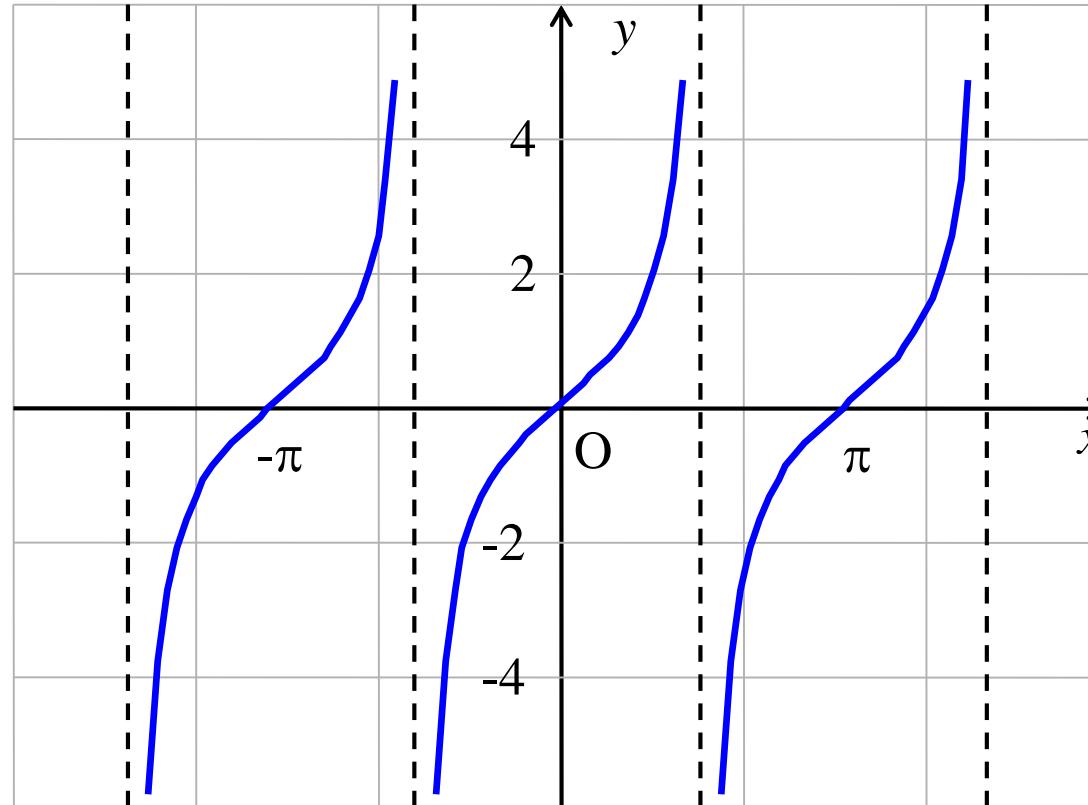
$y = \sin x$  与  $y = \cos x$  的定义域均为  $(-\infty, +\infty)$ , 均以  $2\pi$  为周期。 $y = \sin x$  为**奇函数**,  $y = \cos x$  为**偶函数**。它们都是**有界函数**。



# 正切函数 $y = \tan x$

定义域:  $x \neq (2n+1)\pi/2$ 。

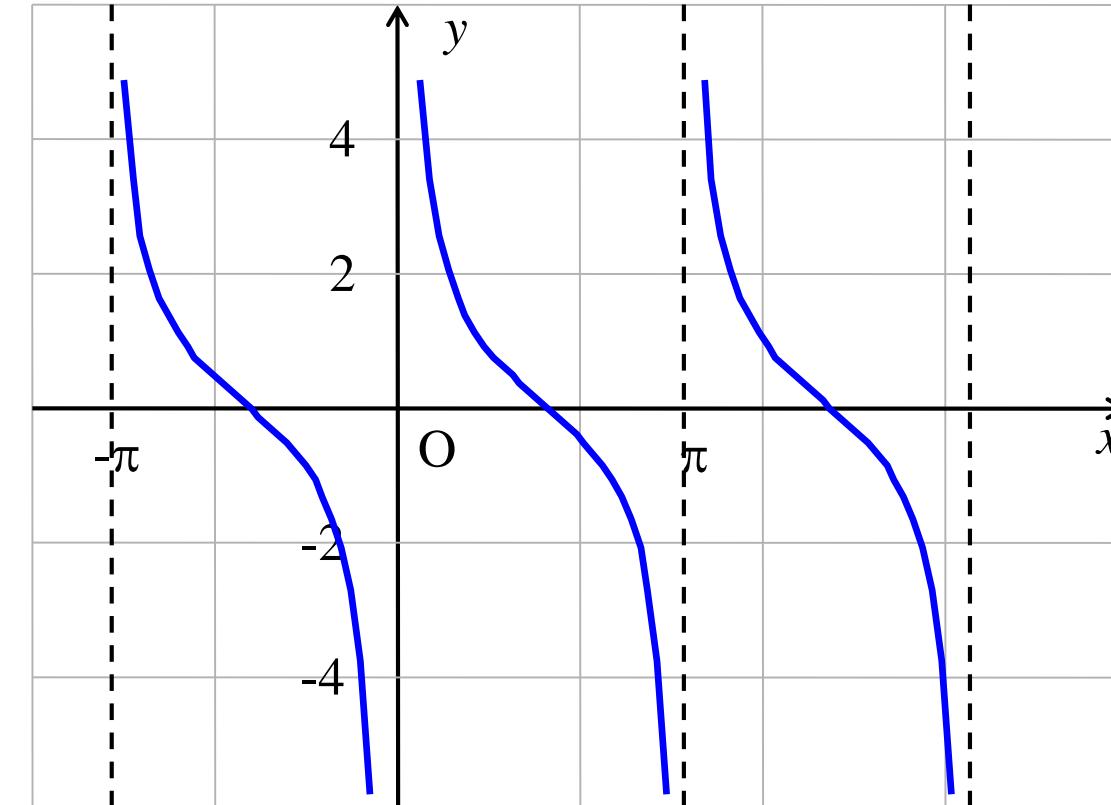
周期:  $\pi$ 。奇函数。



# 余切函数 $y = \cot x$

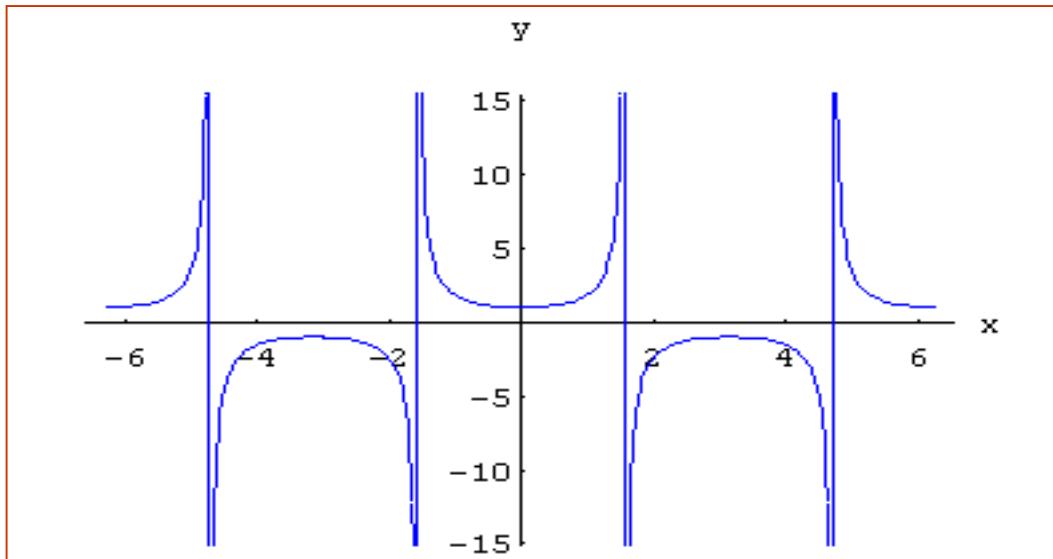
定义域:  $x \neq n\pi$ 。

周期:  $\pi$ 。奇函数。



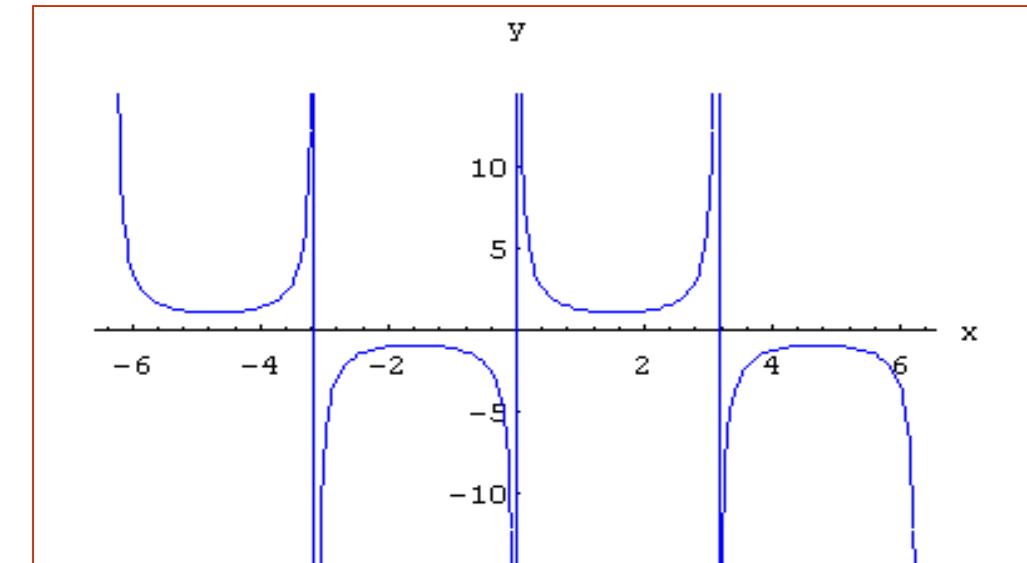
## 正割函数

$$y = \sec x \quad (= \frac{1}{\cos x})$$



## 余割函数

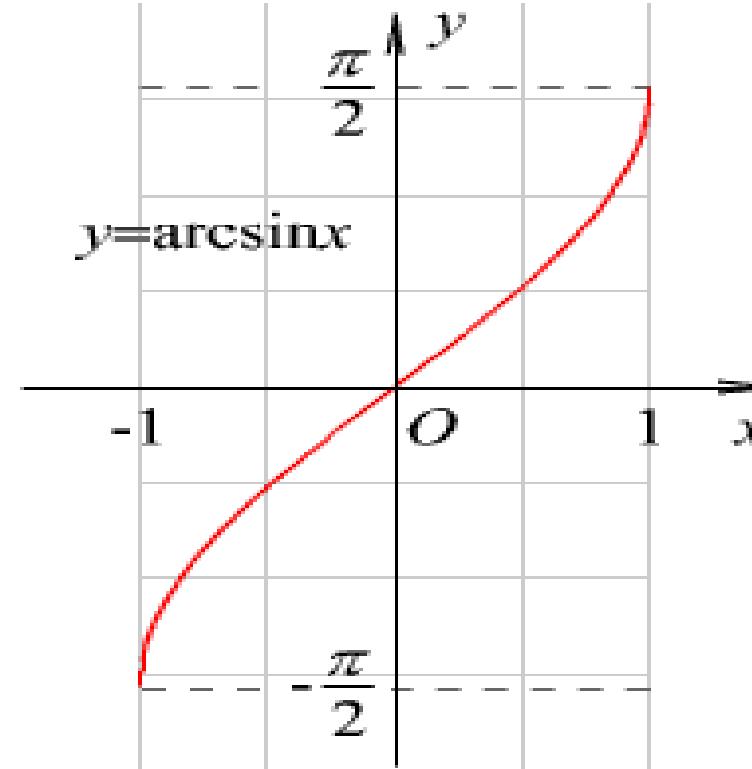
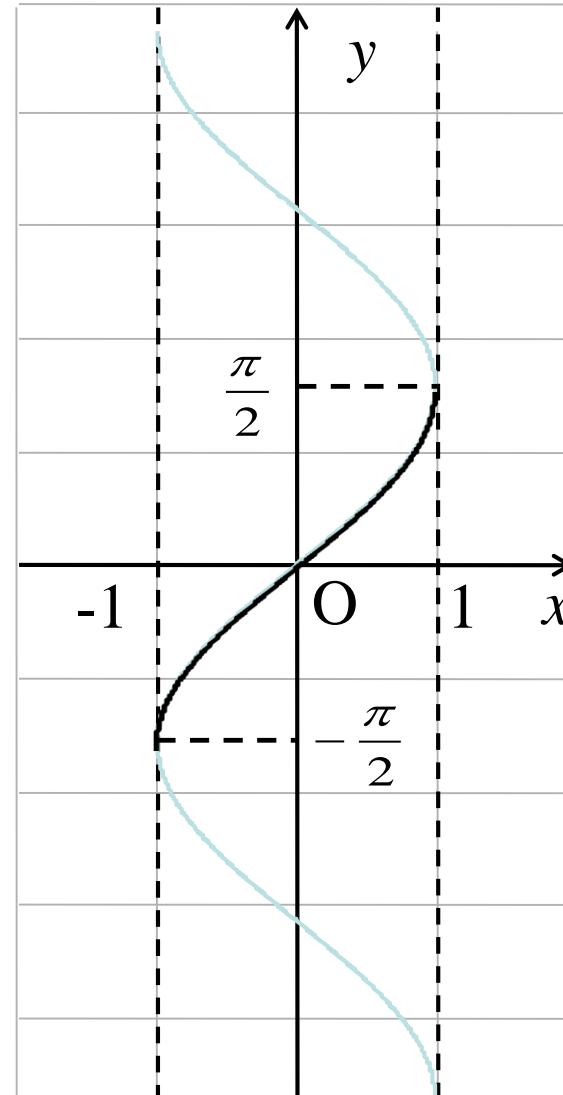
$$y = \csc x \quad (= \frac{1}{\sin x})$$



## 5) 反三角函数(Anti-Trigonometric Function)

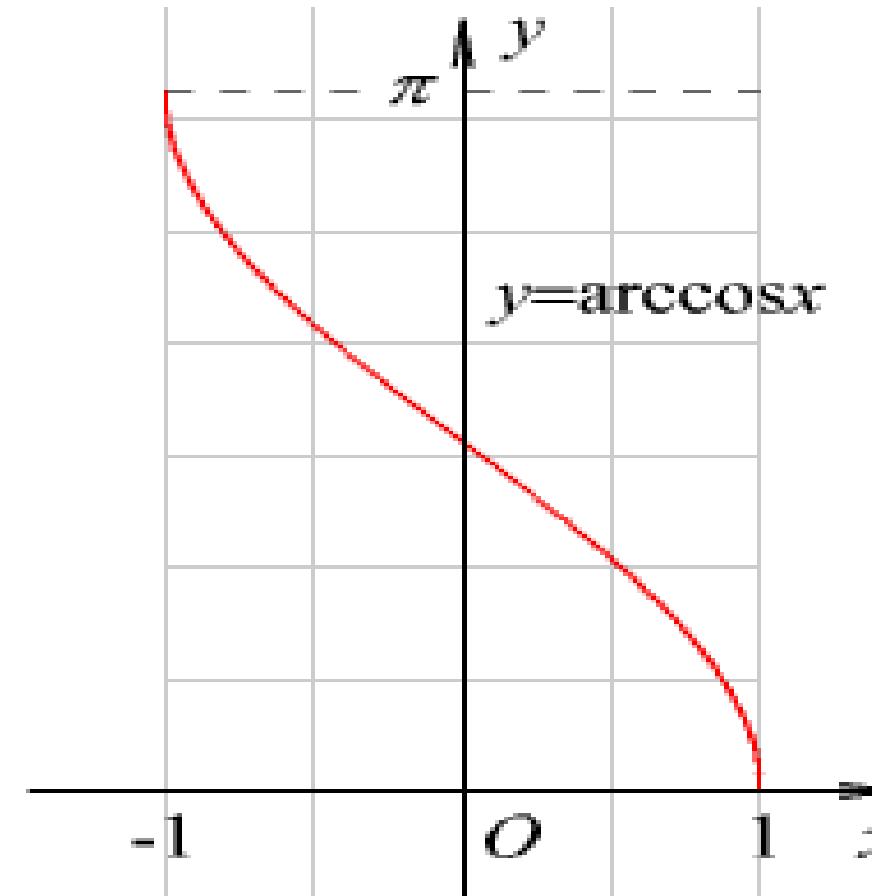
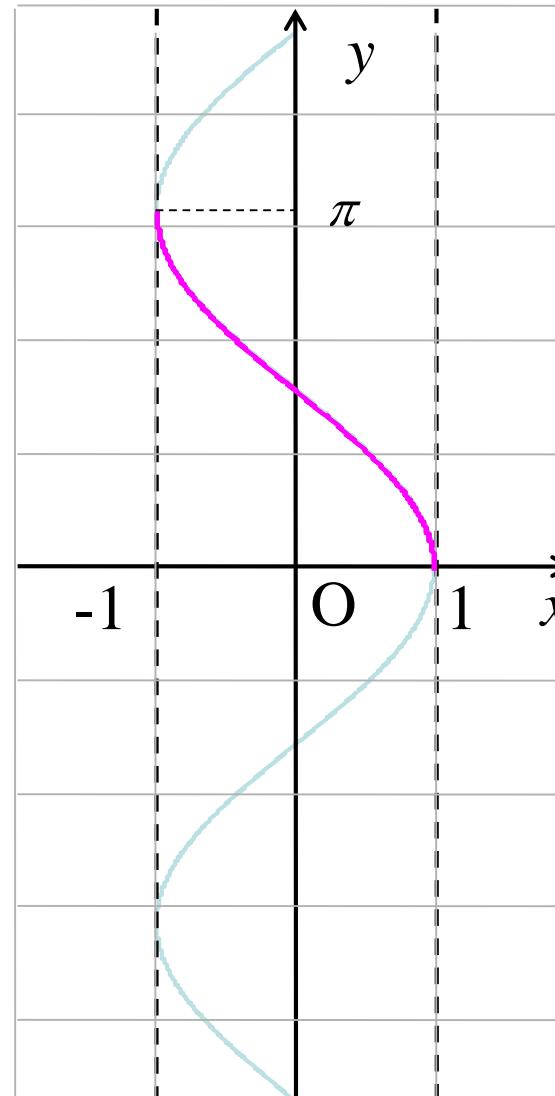
反正弦函数

$$y = \arcsin x$$

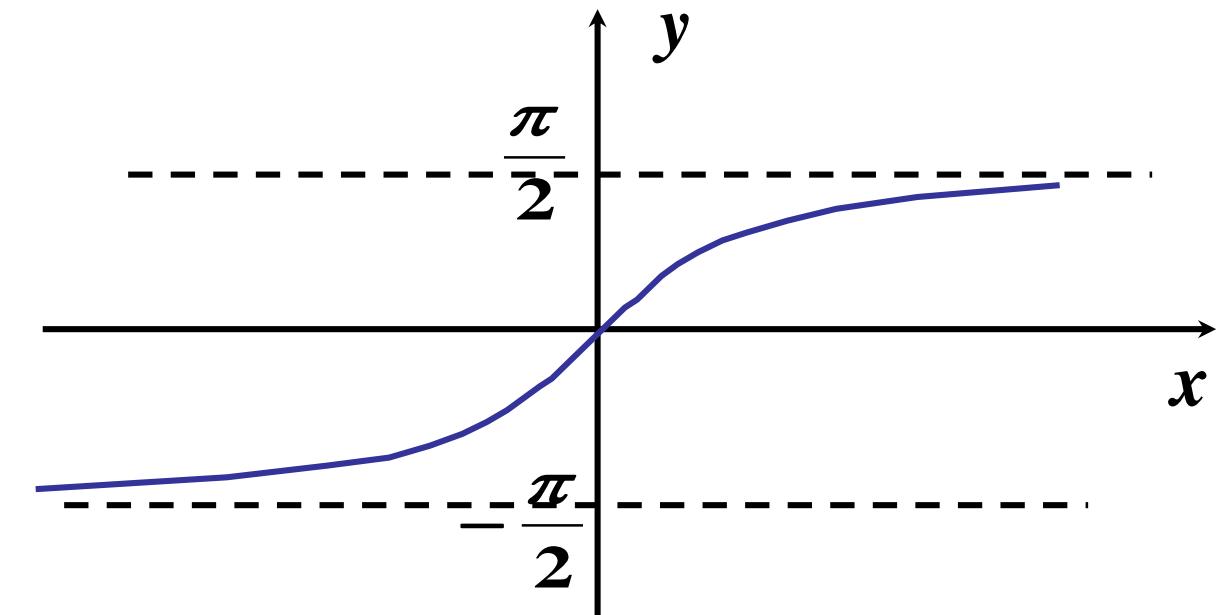
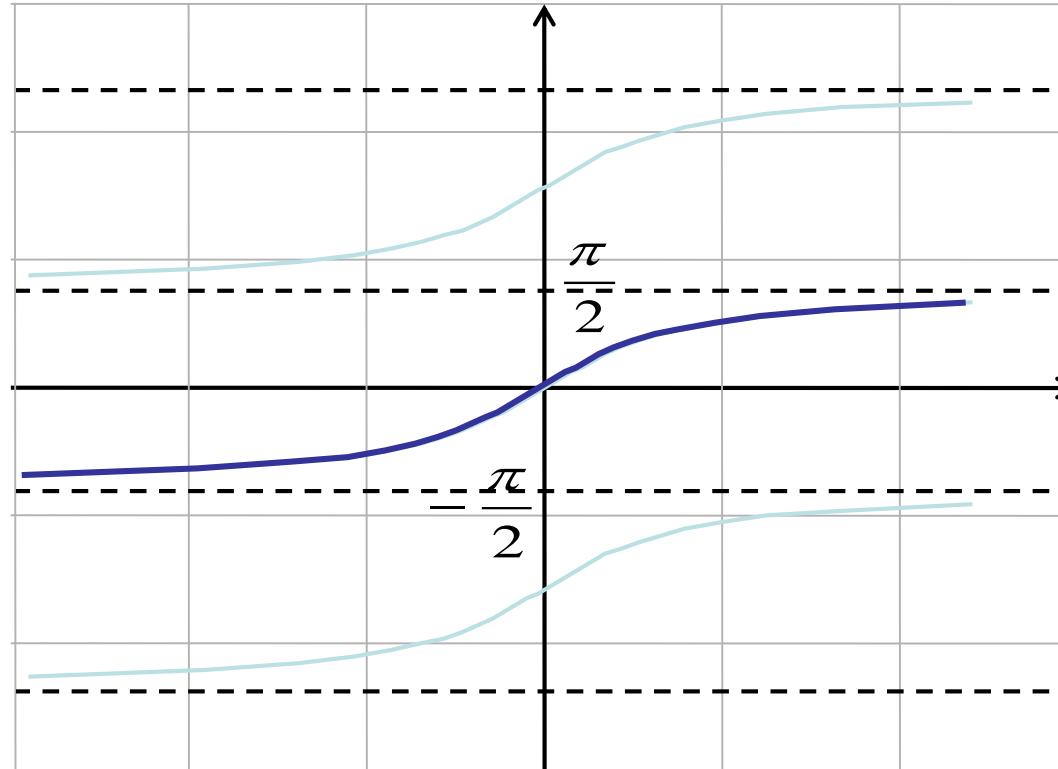


# 反余弦函数

$$y = \arccos x$$

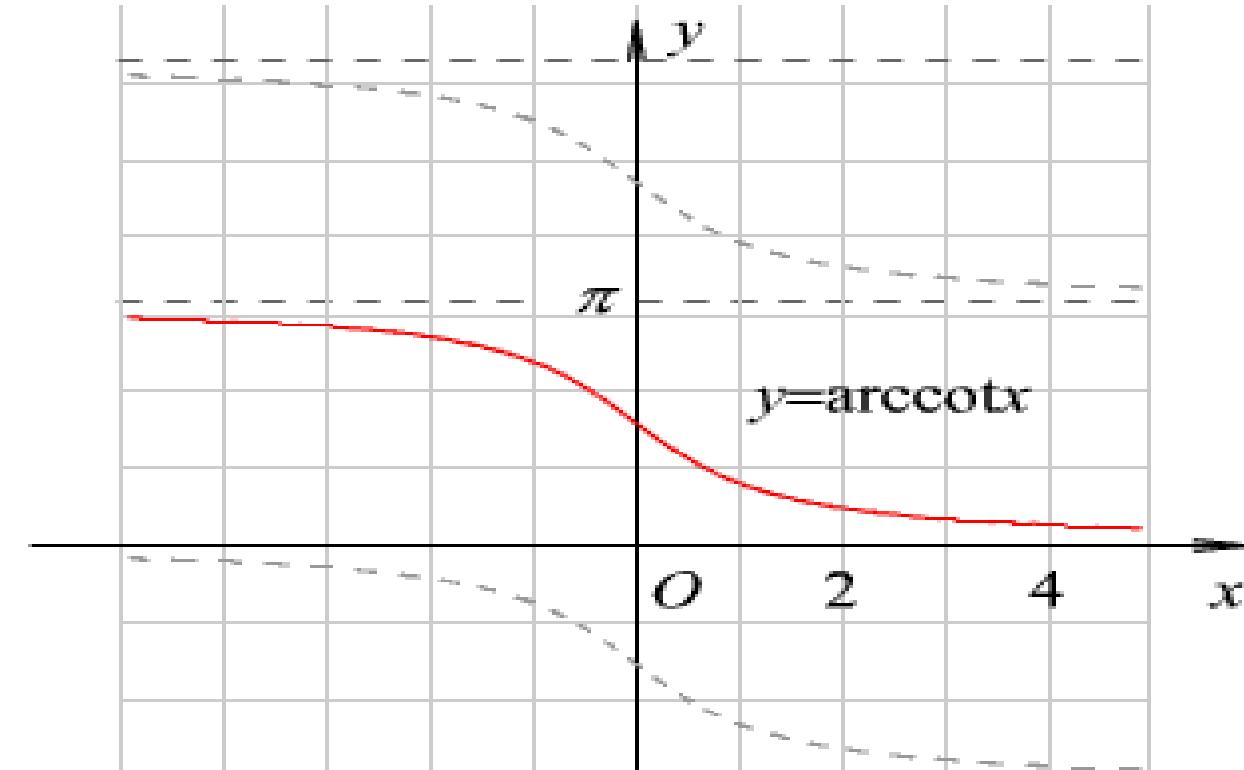
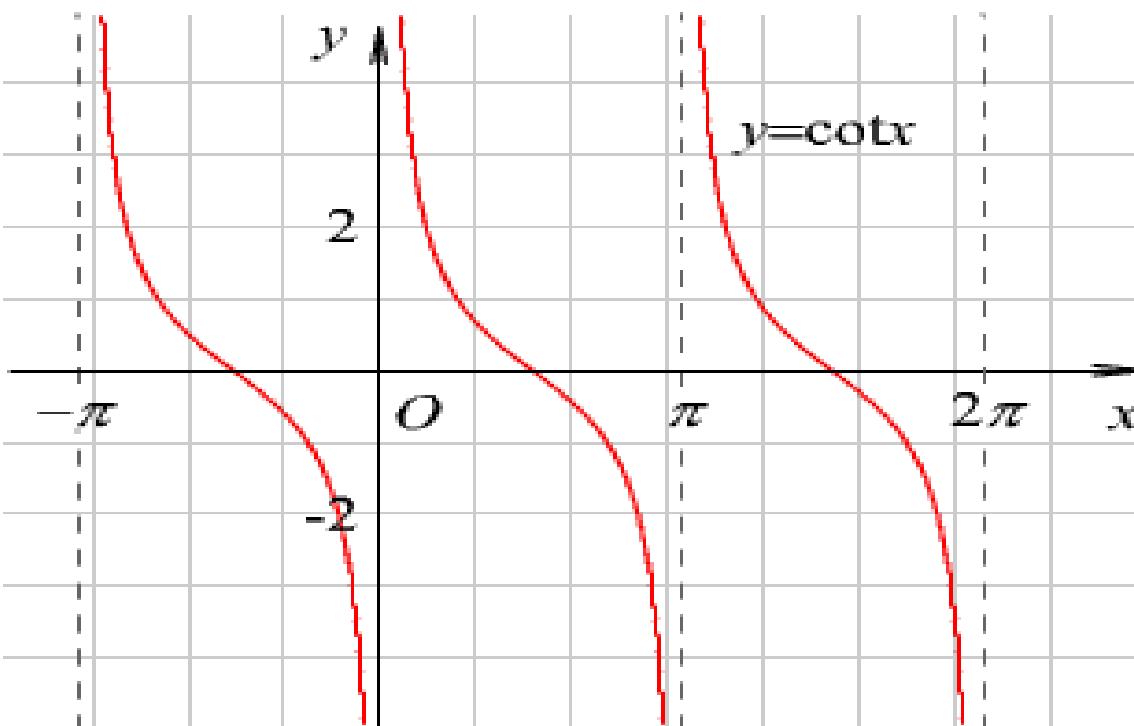


# 反正切函数 $y = \arctan x$



## 反余切函数

$$y = \operatorname{arccot} x$$



# 二、极限

## 中国古代的极限思想

(1) “截杖说”(庄子) ——

一尺之棰，日取其半，万世不竭。

第一天剩下 $1/2$ ，第二天剩下 $1/4$ ，第三天剩下 $1/8$ ，…，第 $n$ 天剩下 $1/2^n$ ，… …

所以，所余杖棰长度组成数列

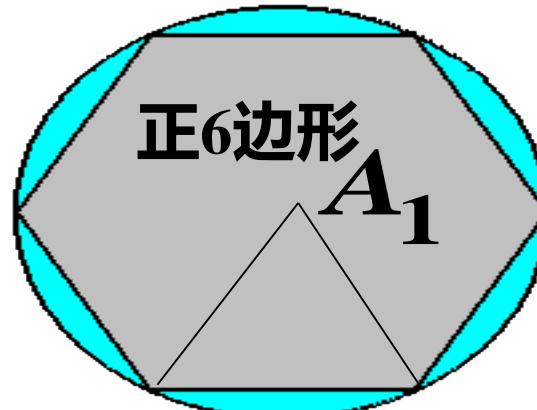
$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2^n}, \quad \dots$$

显然，该数列中的项随着 $n$  的增大 越来越接近 0.

而且随着 $n$  的无限增大，该数列的项会 无限接近 0.

## (2) “割圆术”(刘徽) —

割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。

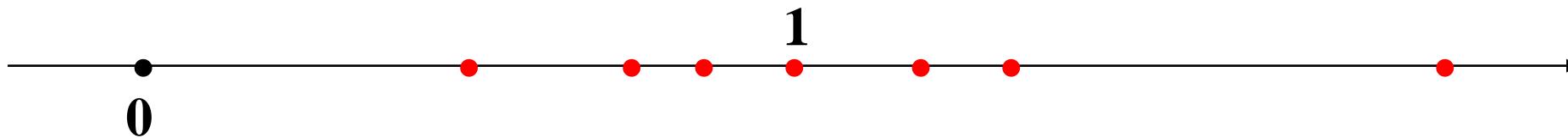
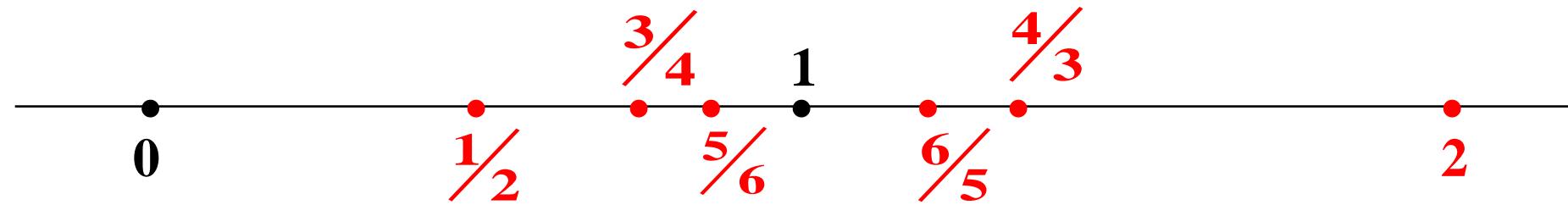


正24边形…

基本思想是用内接正  $6 \cdot 2^{n-1}$  边形的面积  $A_n$  来近似圆面积，  
而且随着  $n$  的无限增大，多边形的面积  $A_n$  将无限接近圆面积。

# 考察数列

$$\left\{ \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} \right\} 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6} \dots, 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$$



在数学上如何来刻画与 1 无限接近这个现象呢？

答：用“距离”来衡量

$$x_n \text{与 } 1 \text{ 的距离} \quad |x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^{n+1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

可见， $n$  越大， $|x_n - 1|$  就越小，即  $x_n$  与 1 就越接近。

给定 0.01，欲使  $\frac{1}{n} < 0.01$ ，即  $n > 100$ .

即从第100项往后， $x_n$  与 1 间的距离就可以小于 0.01.

给定 0.0012，欲使  $\frac{1}{n} < 0.0012$ ，即  $n > \frac{10000}{12} = 833 \frac{1}{3}$ .

即从第833 项往后的所有项与 1 间的距离都小于 0.0012 .

给定  $10^{-9}$ ，欲使  $\frac{1}{n} < 10^{-9}$ ，即  $n > 10^9$ .

即从第  $10^9$  项往后的所有项与 1 间的距离小于  $10^{-9}$ .

初步推断：无论有一个多么小的正数  $\varepsilon$ ，

总可以找到一个正整数  $N$ ，当  $n > N$  时， $|x_n - 1| < \varepsilon$ 。

### 数列极限的定义

设  $\{x_n\}$  为一数列。若有常数  $a$ ，对任意给定的正数  $\varepsilon$ （无论它有多小），总存在正整数  $N$ ，使当  $n > N$  时，不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  恒成立，则称  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的极限或称  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ ，记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

若这样的  $a$  不存在，则称数列  $\{x_n\}$  无极限或  $\{x_n\}$  发散或不存在。

# 极限的 $\varepsilon - N$ 语言

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$



$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时}, |x_n - a| < \varepsilon.$

说明：

- (1)  $\varepsilon$  是任意的，这样才能表示无限接近。
- (2)  $N$  是相应于 $\varepsilon$  的，只要  $N$  存在，而不必找其最小值。

# 用定义证明数列极限的证明思路

欲证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  关键找  $N$  !

a. 分析过程 :

从最后的结论不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  出发 ,

i. 解出  $n$  应大于怎样的数 , 对此数取整即得  $N$ .

ii. 解不出  $n$  , 必须对结论不等式进行适当的放大 ,

使放大后的不等式能解出  $n$  .

b. 证明过程 :

取定上述  $N$  , 将分析过程逆推.

# 例1. 已知

$$x_n = \frac{n + (-1)^n}{n}, \quad \text{证明数列} \{x_n\} \text{的极限为1.}$$

**证:**  $|x_n - 1| = \left| \frac{n + (-1)^n}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n}$

$\forall \varepsilon > 0$ , 欲使  $|x_n - 1| < \varepsilon$ , 即  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , 只要  $n > \frac{1}{\varepsilon}$

因此, 取  $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$\left| \frac{n + (-1)^n}{n} - 1 \right| < \varepsilon$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n} = 1$

例2. 证明 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} = 0$ .

分析 :  $|x_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} \right|$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 为使  $|x_n - 0| < \varepsilon$ ,

只需要  $\frac{\left| \cos \frac{n\pi}{2} \right|}{n} < \varepsilon$ ,  $n$  无法解出!

注意到  $\frac{\left| \cos \frac{n\pi}{2} \right|}{n} \leq \frac{1}{n}$ , 故只需要

$\frac{1}{n} < \varepsilon$  即  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ .



证明 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} = 0$ .

证:  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ , 则当  $n > N$  时, 就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} = 0$ .

练习. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0.$

分析:  $|x_n - 0| = \frac{1}{(n+1)^2}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 为使  $|x_n - 0| < \varepsilon$ ,

只需要  $\frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon$ , 即  $(n+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ , 即  $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ .

证:  $\forall \varepsilon > 0$  (不妨设  $\varepsilon < 1$ ), 取  $N = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1]$ , 则当  $n > N$  时,

就有  $\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0.$

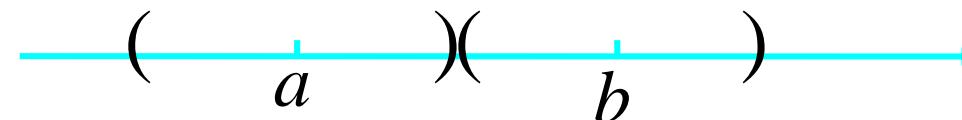
另证:  $|x_n - 0| = \frac{1}{(n+1)^2} < \boxed{\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}}$ , 为使  $|x_n - 0| < \varepsilon$ ,

只需要  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , 即  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . 从而取  $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$  即可.

# 收敛数列的性质

定理1. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它的极限唯一。

证：反证法。设 $x_n \rightarrow a, x_n \rightarrow b$ , 且 $a < b$ . 取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

 则由极限定义知，对此  $\varepsilon > 0$  ,

$\exists$  正整数  $N_1$ , 当 $n > N_1$  时,  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 即有  $x_n < \frac{a+b}{2}$

$\exists$  正整数  $N_2$ , 当 $n > N_2$  时,  $|x_n - b| < \varepsilon$ , 即有  $x_n > \frac{a+b}{2}$

故取  $N = \max \{N_1, N_2\}$ , 当 $n > N$  时, 有

$x_n < \frac{a+b}{2}$  且  $x_n > \frac{a+b}{2}$ . 矛盾！从而假设不成立！

于是由  $a, b$  的大小任意性可推知  $a = b$ . 即极限唯一。

证：设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 取  $\varepsilon = 1$  则  $\exists$  正整数  $N$ ,

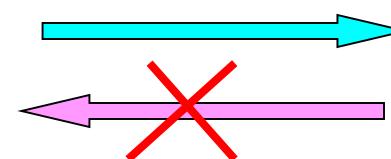
当  $n > N$  时，有  $|x_n - a| < 1$ , 从而有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

再取  $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$

则有  $|x_n| \leq M$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 故数列 $\{x_n\}$ 有界。

注：数列收敛



数列有界

如，数列  $\{(-1)^{n+1}\}$  有界但不收敛。

### 定理3. (收敛数列的保号性)

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  且  $a > 0 (< 0)$ , 则  $\exists$  正整数  $N$ ,  
当  $n > N$  时, 有  $x_n > 0 (< 0)$ .

证: 只证  $a > 0$  的情况.



取  $\epsilon = \frac{a}{2}$ , 则由极限定义知,  $\exists$  正整数  $N$ ,

当  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \frac{a}{2}$ , 即  $\frac{a}{2} < x_n < \frac{3a}{2}$

因  $a > 0$ , 故  $x_n > 0$ .

推论: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  且  $\exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时,  
 $x_n \geq 0 (\leq 0)$ , 则  $a \geq 0 (\leq 0)$ .

# 1、自变量趋于有限值 $x_0$ 时函数的极限

(1)  $x \rightarrow x_0$     (2)  $x \rightarrow x_0^+$     (3)  $x \rightarrow x_0^-$

# 2、自变量趋于无穷大时函数的极限

(4)  $x \rightarrow \infty$     (5)  $x \rightarrow +\infty$     (6)  $x \rightarrow -\infty$

考察函数  $f(x)$  自变量变化过程的六种形式.

# 自变量 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

如何刻画  $x \rightarrow x_0$  ?

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

即  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域， $\delta$  是个较小的正数。

如何刻画对应函数值的变化？

要有对应函数值，就要先使函数在  $x_0$  的去心  $\delta$  邻域内有定义，而函数在  $x_0$  有无定义则无要求。

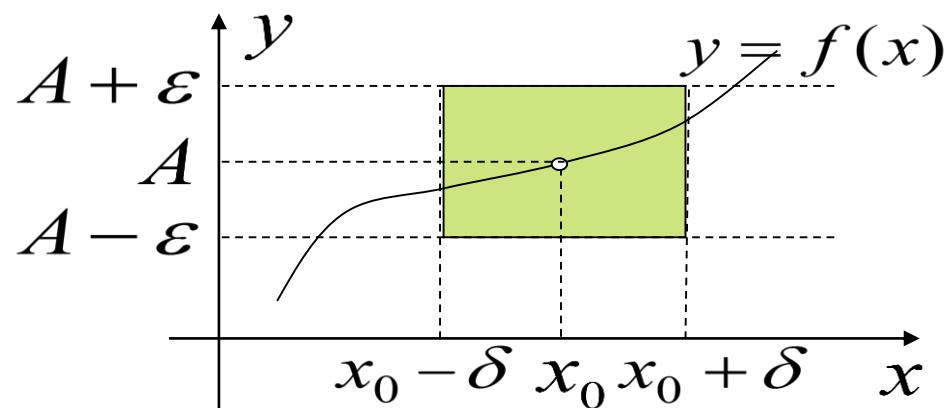
如何刻画对应的函数值无限接近于某个常数  $A$  ？

$$\forall \varepsilon > 0, |f(x) - A| < \varepsilon, x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta).$$

# 自变量 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限定义

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某一去心邻域内有定义。如果存在常数  $A$ ，对任意给定的正数  $\varepsilon$ （无论它有多小），总存在正数  $\delta$ ，使得当  $x$  满足  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，对应的函数值都有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的极限，记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$

几何解释：



$\varepsilon - \delta$  语言描述：

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,$   
 $\exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}$   
 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

例1. 证明:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = 4$ .

分析:  $|f(x) - A| = \left| \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} - 4 \right| = |2(x + 1) - 4|$   
 $= 2|x - 1| < \varepsilon$

证:  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时, 必有

$$\left| \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} - 4 \right| < \varepsilon, \text{ 因此 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = 4.$$

# 左极限与右极限（单侧极限）

**左极限：**  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A =: f(x_0^-)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  
 $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

**右极限：**  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A =: f(x_0^+)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  
 $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

易见，

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

例2. 试证函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$  当  $x \rightarrow 1$  时极限不存在 .

证明：从右图易见，

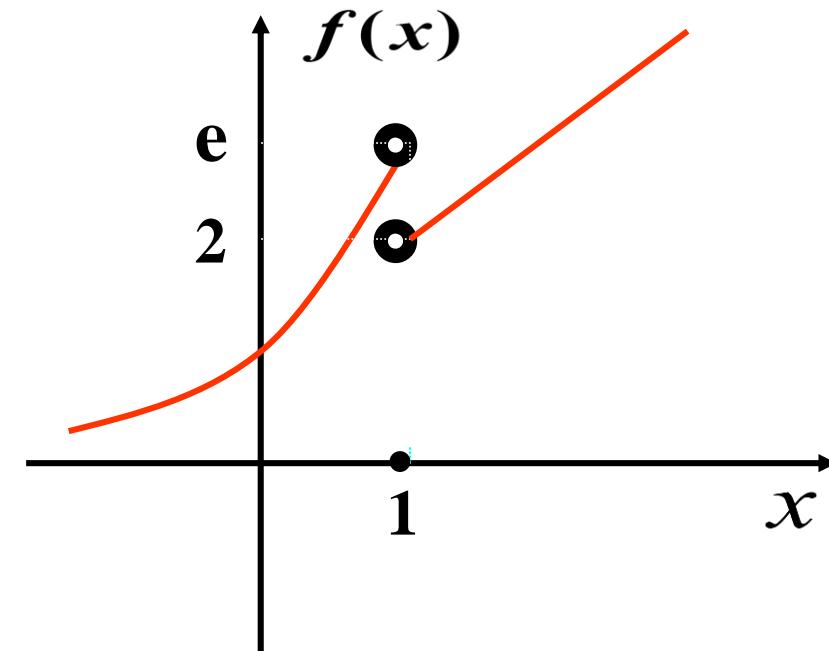
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

显然  $e \neq 2$ ，从而

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

故函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow 1$  时极限不存在。



# 自变量 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限

如何刻画  $x \rightarrow \infty$  ?

$|x| > X$ , 其中  $X$  是个较大的数。

如何刻画对应函数值  $f(x)$  的变化 ?

要有对应函数值 , 首先要使函数在  $|x| > X$  内有定义。

如何刻画对应的函数值  $f(x)$  无限接近于某个常数  $A$  ?

$\forall \varepsilon > 0$ , 当  $|x| > X$  时,  $|f(x) - A| < \varepsilon$  .

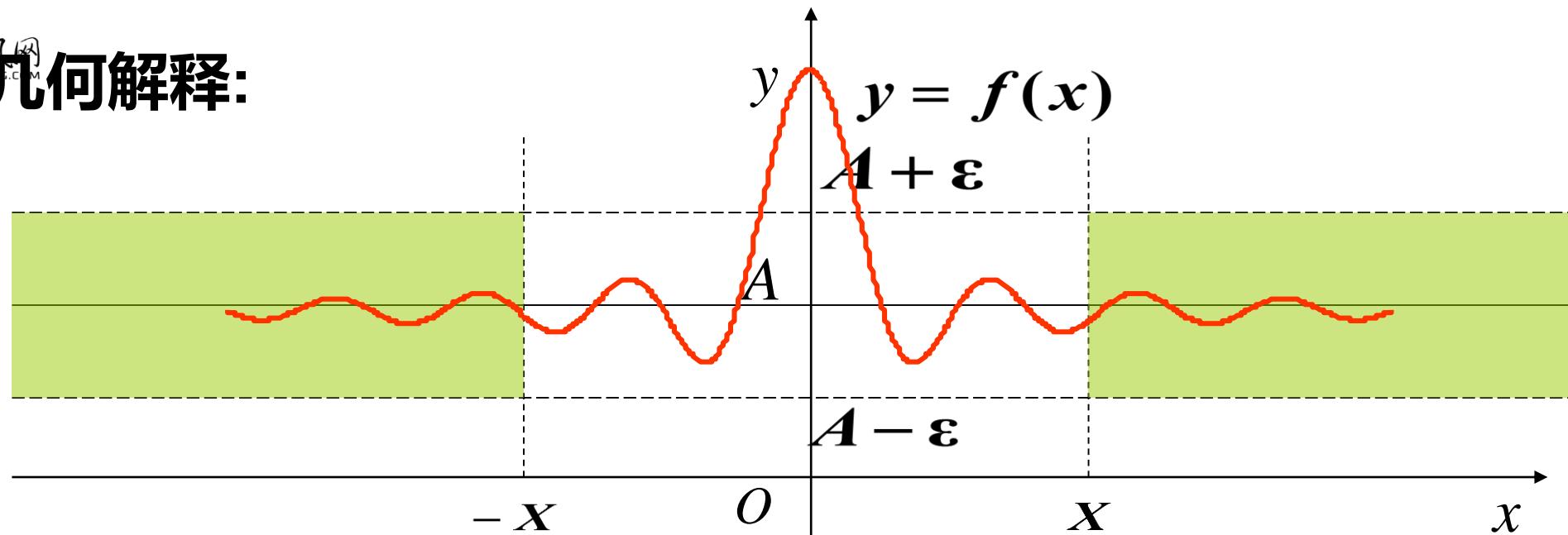
# 自变量 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限定义

设函数  $f(x)$  在当  $|x|$  大于某一正数时有定义。如果存在常数  $A$ ，对任意给定的正数  $\varepsilon$ （无论它有多小），总存在正数  $X$ ，使得当  $x$  满足  $|x| > X$  时，对应的函数值都有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $A$  为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限，记作  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  或  $f(x) \rightarrow A$  ( $x \rightarrow \infty$ )。

$\varepsilon - X$  语言描述：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

# 几何解释:



直线  $y = A$  为曲线  $y = f(x)$  的**水平渐近线**.

## 2. 左极限与右极限 (单侧极限)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x < -X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x > X \text{ 时}, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

例3. 证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ .

分析: 欲使  $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ ,

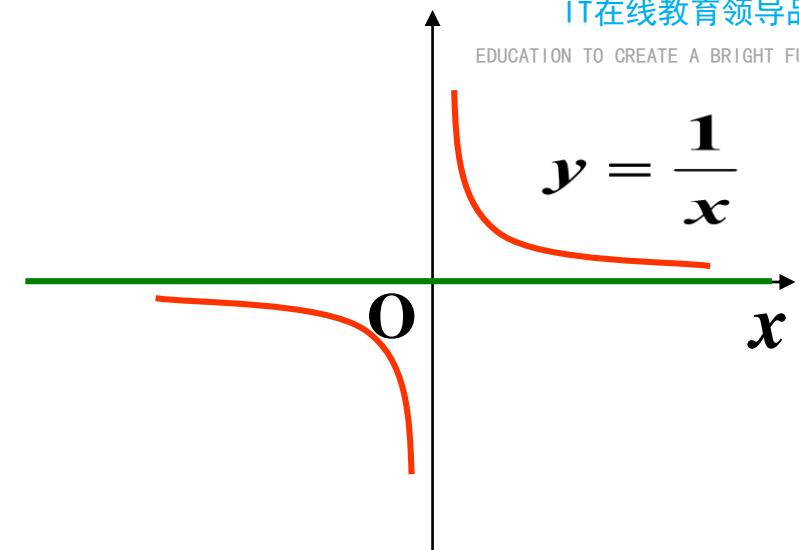
即  $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$

证:  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $X = \frac{1}{\varepsilon}$ , 则当  $|x| > X$  时, 就有

$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

从图中可见,  $y = 0$  为  $y = \frac{1}{x}$  的水平渐近线.



### 三、函数极限的性质

**定理 1 ( 函数极限唯一性 )**

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在，则此极限唯一。

**定理 2 ( 函数极限的局部有界性 )**

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则存在常数  $M > 0$  和  $\delta > 0$ ,

使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq M$ .

**证 :** 因  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得

当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . 特别地取  $\varepsilon = 1$ , 则

$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq 1 + |A|$ . 取  $M = 1 + |A|$  即可.

## 定理 3 (函数极限的局部保号性)

如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而且  $A > 0$  ( $A < 0$ ), 那么存在常数  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

证: 只证  $A < 0$  的情况. 因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$ ,

取  $\epsilon = -\frac{A}{2}$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,

有  $|f(x) - A| < -\frac{A}{2}$ , 即  $f(x) < A - \frac{A}{2}$ ,

从而  $f(x) < \frac{A}{2} < 0$ .

# 极限存在的两个准则

**准则I（两边夹）：**若数列 $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  和  $\{z_n\}$  满足下列条件:

- (1)  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > n_0$  时,  $y_n \leq x_n \leq z_n$ ,
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

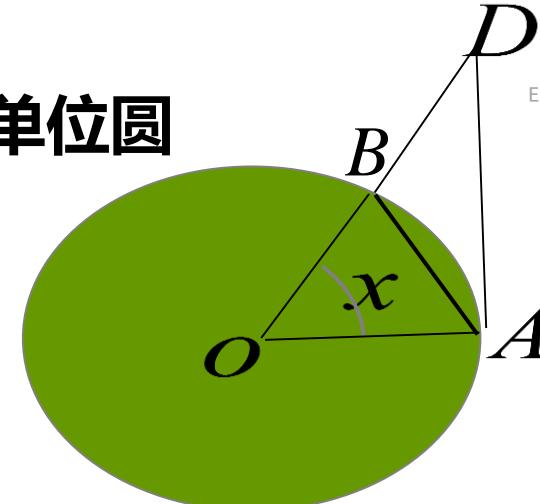
**准则II：**单调有界数列必有极限

# 两个重要极限

## 第一个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

单位圆



证：当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时，

$\triangle AOB$  的面积 < 圆扇形  $AOB$  的面积 <  $\triangle AOD$  的面积

即  $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

即  $\sin x < x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$  从而  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

显然有  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (0 < |x| < \frac{\pi}{2})$

又  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

# 第二个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$e = 2.718281828459045\dots$$

证明思路：

1. 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是单调有界数列从而极限存在，

其中， $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

2. 其次利用两边夹准则证明

3. 再用变量代换法证明

4. 联合上面两个结论可得

详细证明过程课下自学！

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

先证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，其中 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

第一步，证明数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的。

$$\begin{aligned}x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = C_n^0 (\frac{1}{n})^0 + C_n^1 (\frac{1}{n})^1 + C_n^2 (\frac{1}{n})^2 + \cdots + C_n^n (\frac{1}{n})^n \\&= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots \\&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots \\&\quad + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{同理, } x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) + \cdots \\&\quad + \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n+1}) \\&\quad + \frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \cdots (1 - \frac{n}{n+1})\end{aligned}$$

易见， $x_{n+1} > x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ .

## 第二步，证明数列 $\{x_n\}$ 有界.

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots \\&\quad + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\&= 1 + \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - (\frac{1}{2})^n) < 3\end{aligned}$$

其中我们用了不等式  $2^{n-1} \leq n!$  (数学归纳法)

于是，由单调增加和有界性知数列 $\{x_n\}$ 极限存在，记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

# 下证：函数极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

一方面，当  $x > 1$  时，设  $n \leq x < n + 1$ ，则

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = e \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (\text{因 } n \rightarrow +\infty \text{ 时, } x \rightarrow +\infty)$$

另一方面, 当  $x \rightarrow -\infty$  时,

令  $x = -(t + 1)$ , 则  $t \rightarrow +\infty$ , 从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{t+1})^{-(t+1)} \\&= \lim_{t \rightarrow +\infty} (\frac{t}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{t})^{t+1} \\&= \lim_{t \rightarrow +\infty} [(1 + \frac{1}{t})^t (1 + \frac{1}{t})] = e\end{aligned}$$

故  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  ( 因  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  )

注意：

$$(1) \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

$$(2) \lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e \quad \text{或} \quad \lim_{\square \rightarrow 0} \left(1 + \square\right)^{\frac{1}{\square}} = e$$

练习1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$      $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

解:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x.$

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$

求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$

解 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e}.$

## 三、导数

### 引例1 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

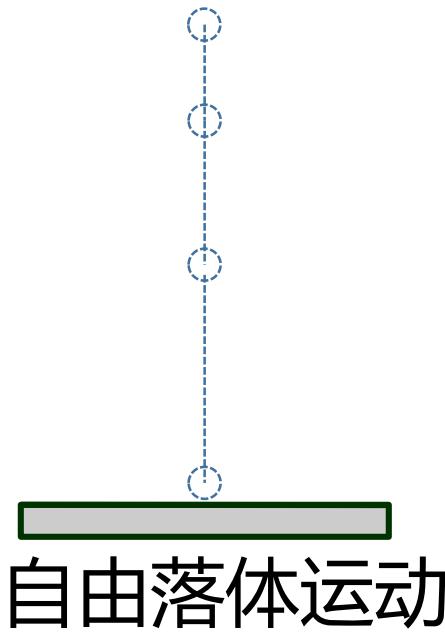
$$s = f(t)$$

则  $t_0$  到  $t$  的平均速度为

$$\vec{v} = \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$

而在  $t_0$  时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$



$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

## 引例2 曲线的切线斜率

曲线  $C: y = f(x)$  在  $M$  点处的切线

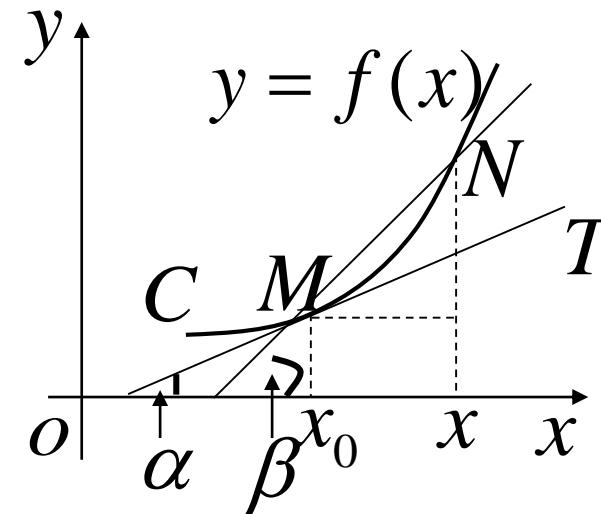
割线  $MN$  的极限位置  $MT$   
(当  $\beta \rightarrow \alpha$  时)

切线  $MT$  的斜率

$$k = \tan \alpha = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \tan \beta$$

割线  $MN$  的斜率  $\tan \phi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



# 导数的定义

**定义1.** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义 ,

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$   $\Delta y = f(x) - f(x_0)$   
 $\Delta x = x - x_0$

存在, 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称此极限为

$y = f(x)$  在点  $x_0$  的导数. 记作:

$$y' \Big|_{x=x_0}; f'(x_0); \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}; \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

即  $y' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# 1. 常数和基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1},$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x,$$

$$(e^x)' = e^x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arc cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## 2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设  $u = u(x), v = v(x)$  都可导, 则

$$(1) \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (2) \quad (Cu)' = Cu' \quad (C \text{是常数}),$$

$$(3) \quad (uv)' = u'v + uv', \quad (4) \quad \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

## 3. 反函数的求导法则

如果函数  $x = f(y)$  在区间  $I_y$  内单调、可导且  $f'(y) \neq 0$ , 则它的反函数  $y = f^{-1}(x)$  在区间  $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$  内也可导, 且有

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

## 4. 复合函数求导法则

设  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

例1求  $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$  的导数.

解:  $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (3x)' - (7)'$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3.$$

例2. 已知  $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin \frac{\pi}{2}$ , 求  $f'(x)$  及  $f'(\frac{\pi}{2})$ .

解:  $f'(x) = (x^3)' + (4\cos x)' - (\sin \frac{\pi}{2})'$   
 $= 3x^2 - 4\sin x - 0 = 3x^2 - 4\sin x,$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = f'(x)|_{x=\frac{\pi}{2}} = 3(\frac{\pi}{2})^2 - 4\sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi^2 - 4.$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

例3. 求  $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$  的导数.

解 :  $y' = (\sqrt{x})' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} \ln x + 1 \right).$$

例4.  $y = e^x (\sin x + \cos x)$ , 求  $y'$ .

解 :  $y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x (\sin x + \cos x)'$

$$= e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x)$$
$$= 2e^x \cos x.$$

**高阶导数.** 若函数  $y = f(x)$  的导数  $y' = f'(x)$  可导, 则称  $f'(x)$  的导数为  $f(x)$  的**二阶导数**, 记作  $y''$  或  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , 即

$$y'' = (y')'$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

类似地, 二阶导数的导数称为三阶导数, 依次类推,

$n - 1$  阶导数的导数称为  $n$  阶导数, 分别记作

$$y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$$

或  $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$
$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地,  $f(x)$  称为零阶导数;  $f'(x)$  称为一阶导数.

# 导数的应用1：函数单调性

通过函数的导数的值，可以判断出函数的单调性、驻点以及极值点：

若导数大于0，则单调递增；若导数小于0，则单调递减；导数等于零的点为函数驻点。

如果函数的导函数在某一个区间内恒大于零(或恒小于零)，那么函数在这一个区间单调递增(或单调递减)，这种区间就叫做单调区间。

函数的驻点和不可导点处函数有可能取得极大值或者极小值(即极值可疑点)；对于极值点的判断需要判断驻点附近的导函数的值符号，如果存在使得之前区间上导函数值都大于零，而之后的区间上都小于零，那么这个点就是一个极大值点，反之则是一个极小值点。

# 曲线的凹凸性

定义. 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续,  $\forall x_1, x_2 \in I$ ,

(1) 若恒有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ,

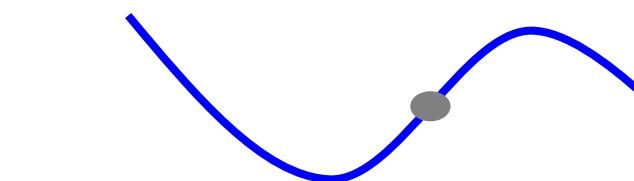
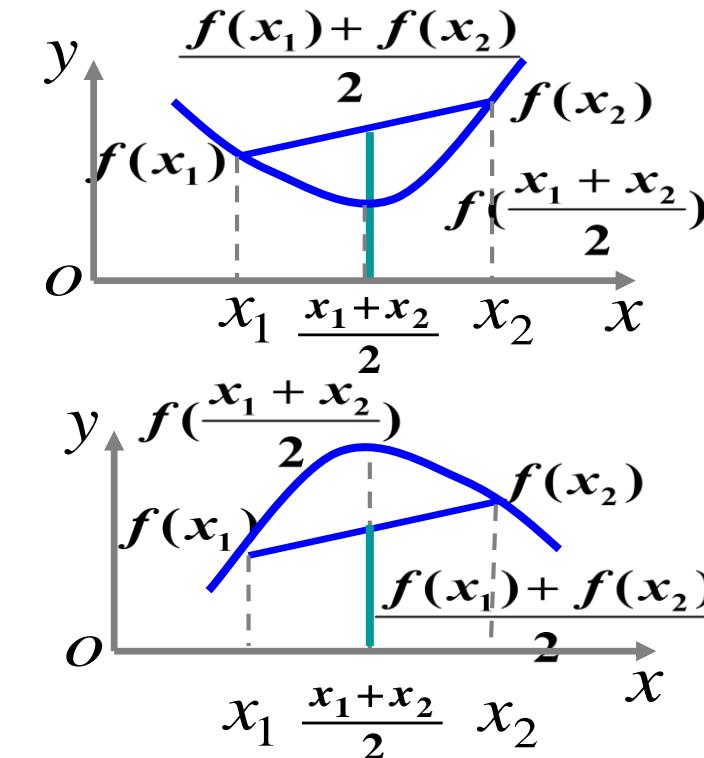
则称  $f(x)$  的 图形是凹的;

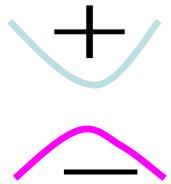
(2) 若恒有  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ,

则称  $f(x)$  的图形是凸的.

连续曲线上凹弧与凸弧的分界点

称为曲线的拐点.

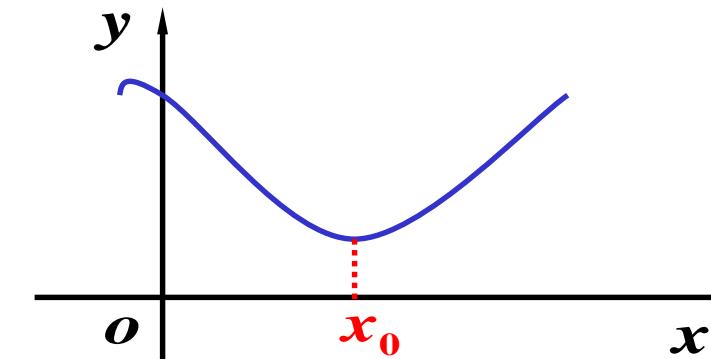
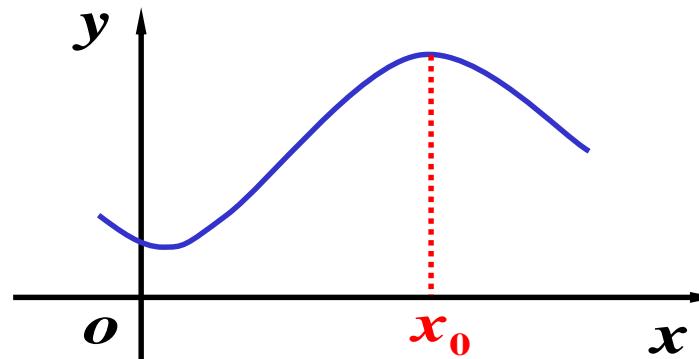
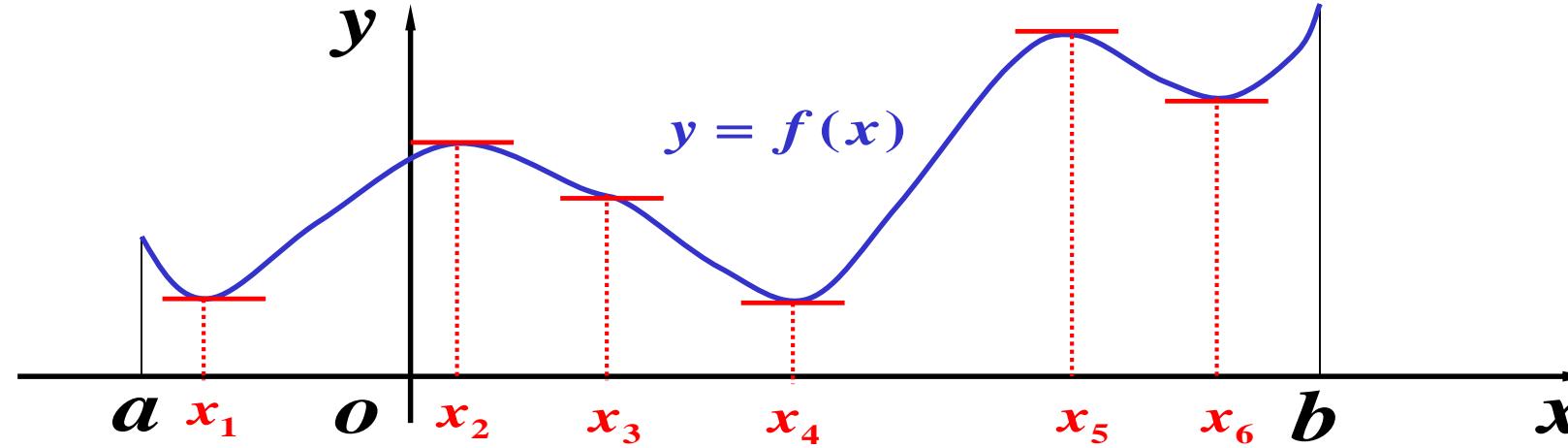




**定理(凹凸判定法)** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有二阶导数

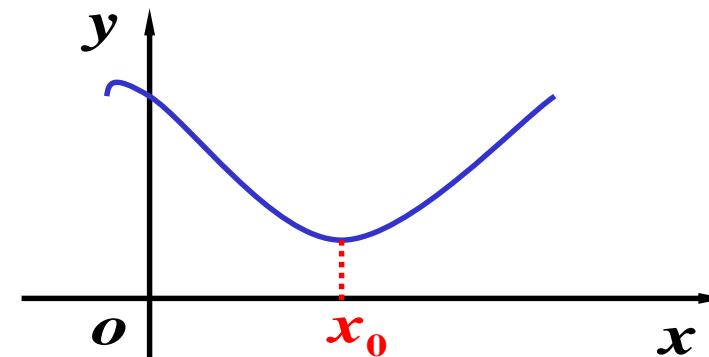
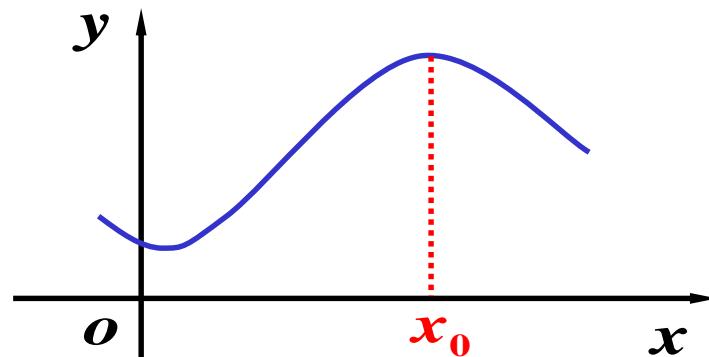
- (1) 在  $I$  内  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $I$  内图形是凹的 ;
- (2) 在  $I$  内  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $I$  内图形是凸的 .

## 一、函数的极值及其求法



定义设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个邻域  $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  有定义,

且当  $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  时, 恒有  $f(x) < f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的一个**极大值**; 如果当  $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  时, 恒有  $f(x) > f(x_0)$ , 则称  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的一个**极小值**.

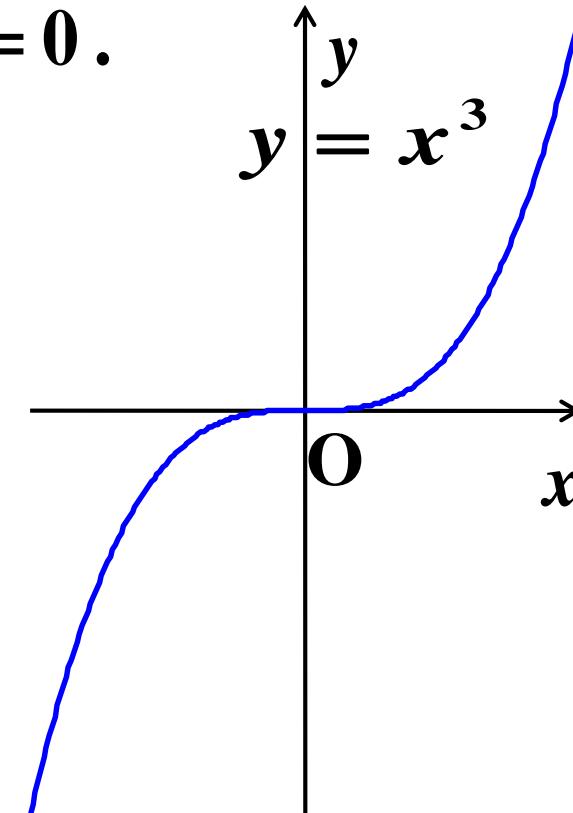


函数的极大值与极小值统称为**极值**,使函数取得极值的点称为**极值点**.

若  $f(x)$  在极值点  $x_0$  处可导，则  $f'(x_0)=0$ .

导数等于零的点称为驻点.

对可导函数来讲，极值点必为驻点，



## 极值存在的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续,且在 $x_0$ 的某去心邻域 $\overset{0}{\cup}(x_0, \delta)$ 内可导,

(1) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$

若当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$

则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极大值

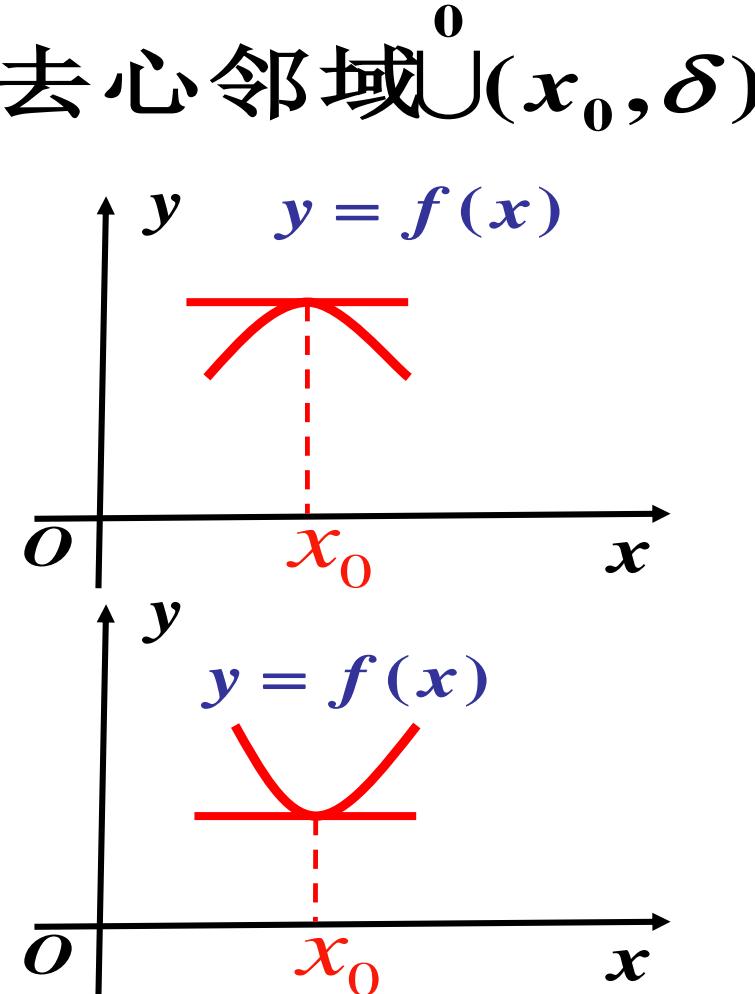
(2) 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$

若当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$

则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处取得极小值

(3) 当 $x \in \overset{0}{\cup}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 符号保持不变

则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处无极值



# 例1. 求函数 $f(x) = (x - 1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解: (1) 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$  且在  $(-\infty, +\infty)$  内连续

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x - 1) \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{x - \frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$$

2) 求极值可疑点 令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = \frac{2}{5}$ ;

3) 列表判断 另  $x_2 = 0$  为不可导点

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	$\infty$	-	0	+
$f(x)$		0		-0.33	

$\therefore x = 0$  是极大点, 其极大值为  $f(0) = 0$

$x = \frac{2}{5}$  是极小点, 其极小值为  $f(\frac{2}{5}) = -0.33$

## 极值存在的第二充分条件

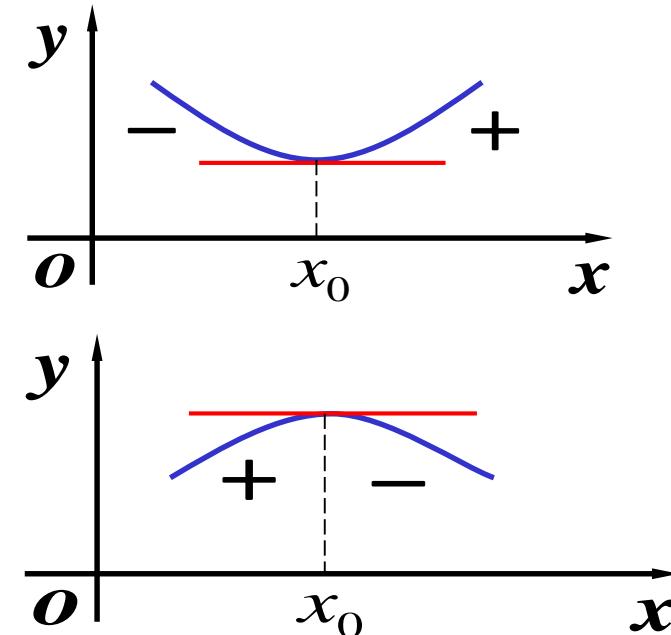
设函数  $f(x)$  在它的驻点  $x_0$  处二阶可导，则

- (1) 如果  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  为极小值点;
- (2) 如果  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  为极大值点;
- (3) 如果  $f''(x_0) = 0$ , 则无法判断.

称为“二阶导数非零法”

说明：

- (1) 此法只适用于驻点,不能用于判断不可导点;
- (2) 当  $f''(x_0) = 0$  时, 失效, 如:  $x^2, x^3$  在  $x = 0$  处 .



例2 求出函数  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$  的极值.

解  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x + 4)(x - 2)$ ,

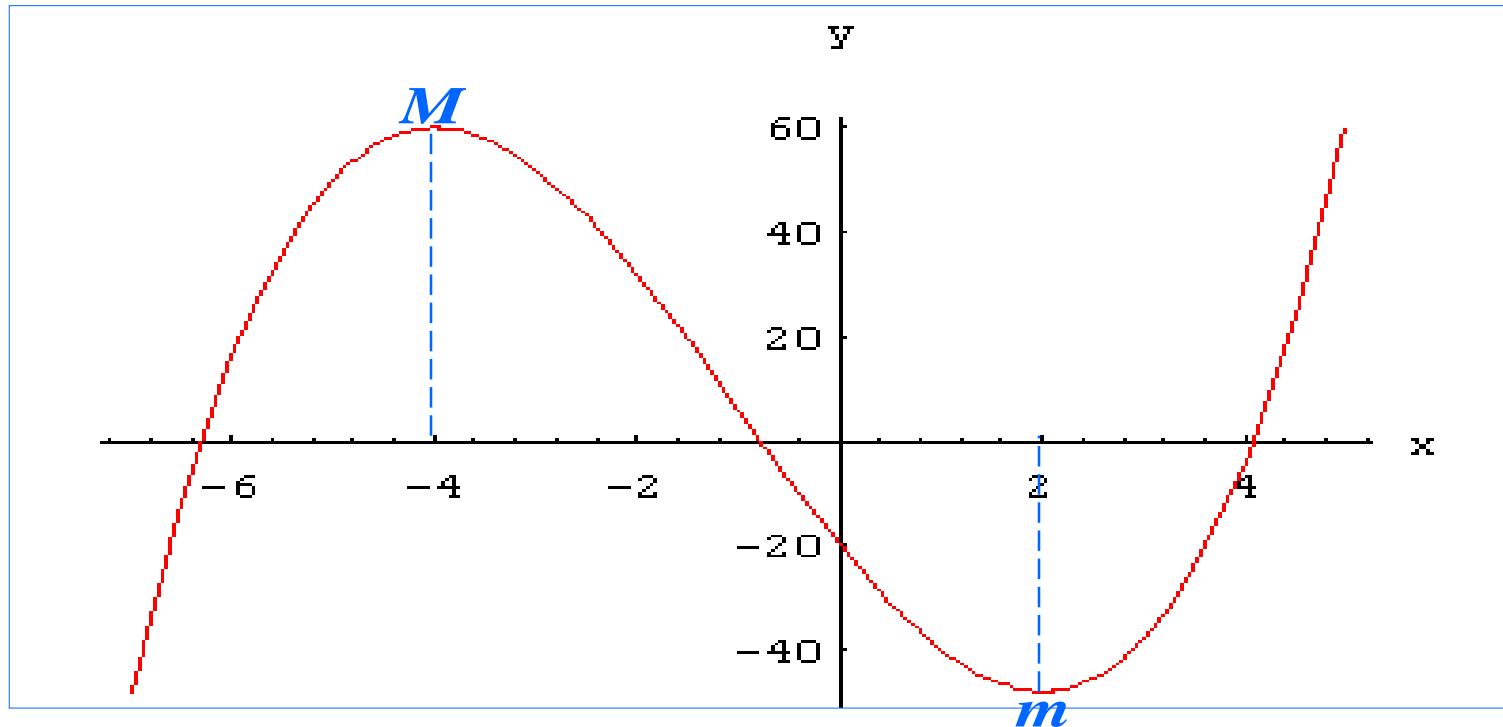
令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$ .

$$f''(x) = 6x + 6,$$

$\therefore f''(-4) = -18 < 0$ , 故极大值  $f(-4) = 60$ ,

$f''(2) = 18 > 0$ , 故极小值  $f(2) = -48$ .

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$  图形如下



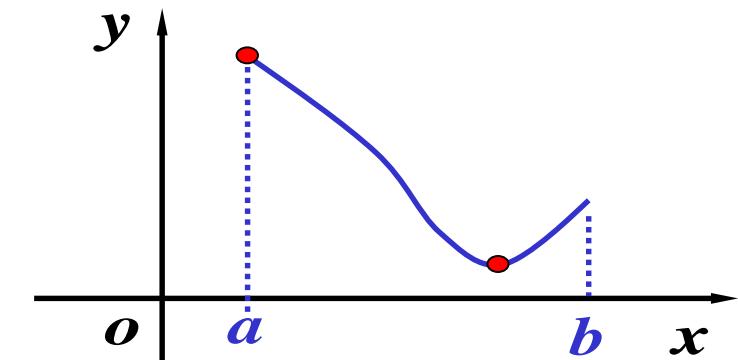
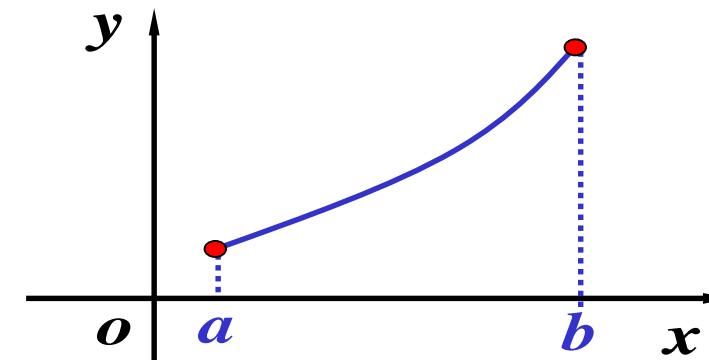
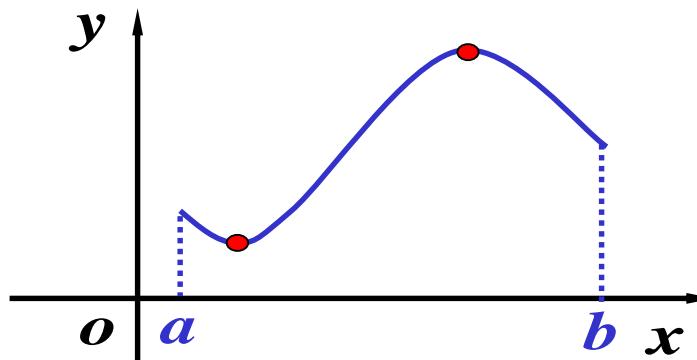
## 求极值的步骤：

- (1) 确定函数的定义域;
- (2) 求导数  $f'(x)$ ;
- (3) 求定义域内部的极值嫌疑点(即驻点或一阶导数不存在的点);
- (4) 用极值的判定第一或第二充分条件. 注意第二充分条件只能判定驻点的情形.

## 二、函数的最大值、最小值问题

极值是局部性的, 而最值是全局性的.

若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值与最小值存在.



## 具体求法：

- (1) 求出定义域内部的极值嫌疑点(驻点和不可导点)  
 $x_1, \dots, x_k$ , 并算出函数值  $f(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) ;
- (2) 求出端点的函数值  $f(a), f(b)$  ;
- (3) 最大值  $M = \max\{f(x_1), \dots, f(x_k), f(a), f(b)\}$   
最小值  $m = \min\{f(x_1), \dots, f(x_k), f(a), f(b)\}$ .

例3 求函数  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  的在  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

解  $\because f'(x) = 6(x + 2)(x - 1)$

解方程  $f'(x) = 0$ , 得  $x_1 = -2, x_2 = 1$ .

计算  $f(-3) = 23$ ;

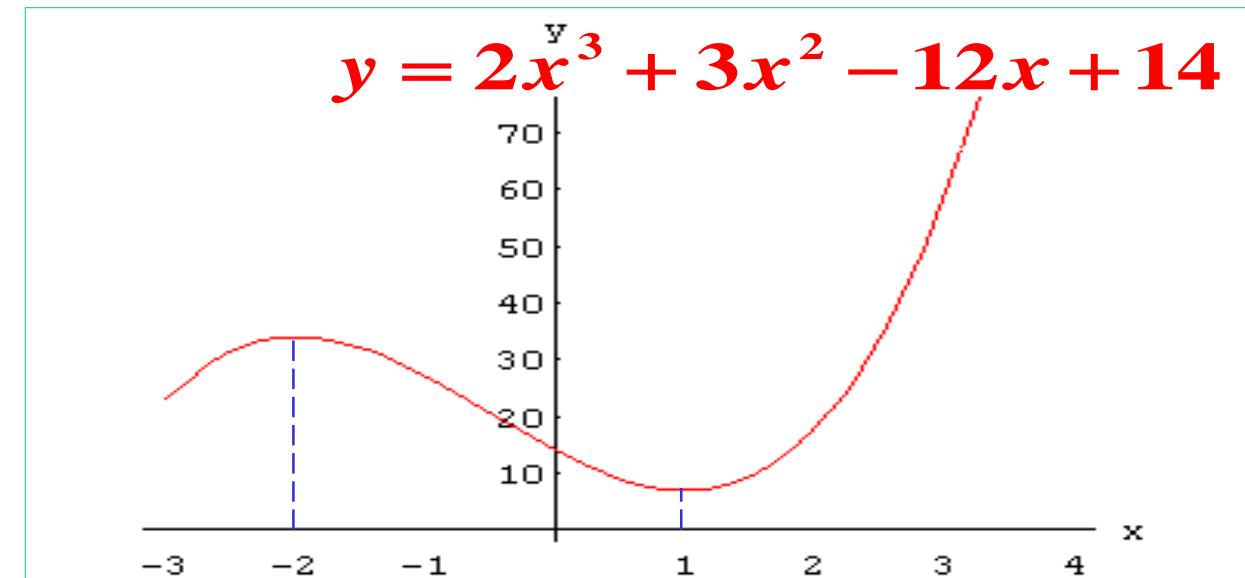
$f(-2) = 34$ ;

$f(1) = 7$ ;

$f(4) = 142$ ;

比较得

最大值  $f(4) = 142$ , 最小值  $f(1) = 7$ .



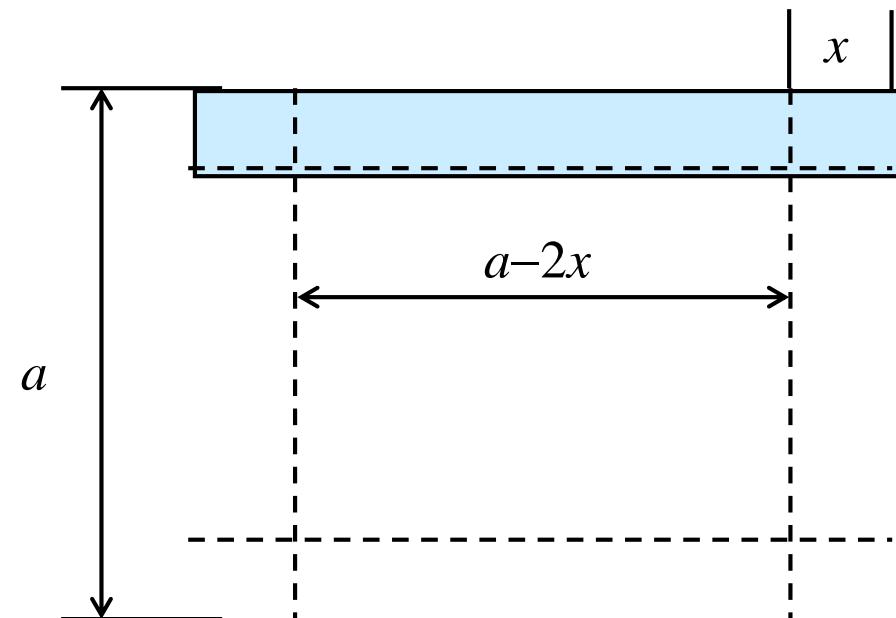
## 说明：

- 1) 如果  $f(x)$  在  $[a,b]$  上单调, 则它的最值必在端点处取到;
- 2) 如果  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 且在  $(a,b)$  内可导, 且有惟一驻点, 则若为极小值点必为最小值点, 若为极大值点必为最大值点;

更进一步, 若**实际问题**中有最大(小)值, 且有惟一驻点, 则不必判断极大还是极小, 立即可以断定该驻点即为最大(小)值点.

例4 将边长为 $a$ 的正方形铁皮,四角各截去相同的小正方形,折成一个无盖方盒,问如何截,使方盒的容积最大? 为多少?

解 设小正方形的边长为 $x$ , 则方盒的容积为

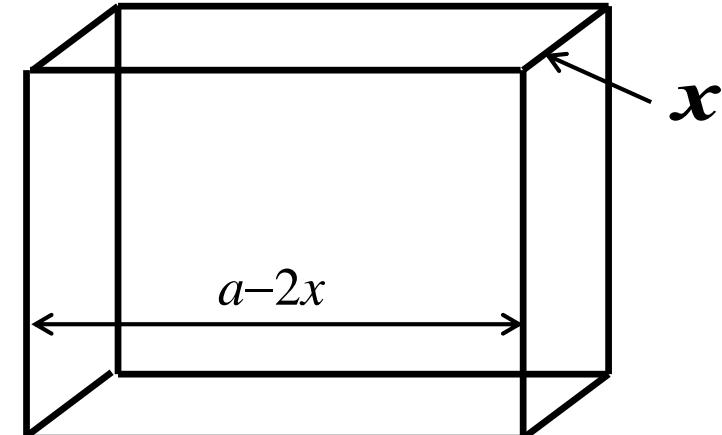


例4 将边长为 $a$ 的正方形铁皮,四角各截去相同的小正方形,折成一个无盖方盒,问如何截,使方盒的容积最大? 为多少?

解 设小正方形的边长为 $x$ , 则方盒的容积为

$$V = x(a - 2x)^2, \quad x \in \left(0, \frac{a}{2}\right),$$

求导得  $V' = (a - 2x)(a - 6x),$



例4 将边长为 $a$ 的正方形铁皮,四角各截去相同的小正方形,折成一个无盖方盒,问如何截,使方盒的容积最大? 为多少?

解 设小正方形的边长为 $x$ , 则方盒的容积为

$$V = x(a - 2x)^2, \quad x \in \left(0, \frac{a}{2}\right),$$

求导得  $V' = (a - 2x)(a - 6x)$ , 惟一驻点  $x = \frac{a}{6}$ ,

$$V'' = 24x - 8a, \quad V''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0,$$

所以当  $x = \frac{a}{6}$  时,  $V$  有最大值  $V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2}{27}a^3$ .

练习 要做一个容积为 $V$ 的圆柱形罐头筒，怎样设计才能使所用材料最省？

解 即表面积最小。

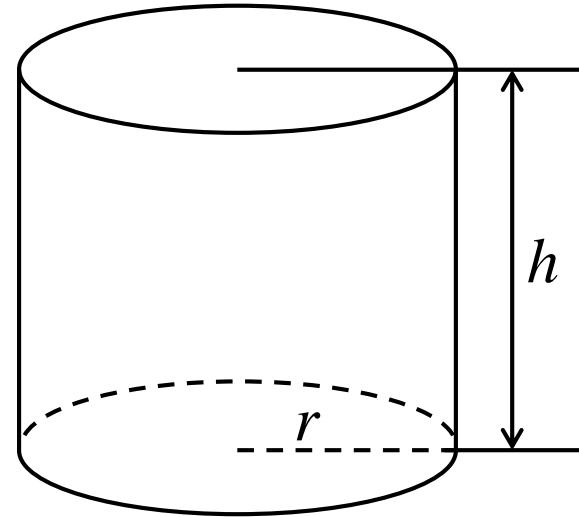
设底半径为 $r$ , 高为 $h$ ,

$$\text{则容积 } V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2},$$

总的表面积为

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r \in (0, +\infty)$$

$$\text{令 } S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0, \text{ 得惟一驻点 } r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},$$



由实际问题, 此时表面积最小。

$$\text{此时 } h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{Vr}{\pi r^3} = 2r, \quad \text{即高与底面直径相等。}$$

# 导数应用3 Taylor公式

Taylor(泰勒)公式是用一个函数在某点的信息描述其附近取值的公式。如果函数足够平滑，在已知函数在某一点的各阶导数值的情况下，Taylor公式可以利用这些导数值来做系数构建一个多项式近似函数在这一点的邻域中的值。

若函数 $f(x)$ 在包含 $x_0$ 的某个闭区间 $[a,b]$ 上具有n阶函数，且在开区间 $(a,b)$ 上具有 $n+1$ 阶函数，则对闭区间 $[a,b]$ 上任意一点 $x$ ，有Taylor公式如下：  
( $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的n阶导数， $R_n(x)$ 是Taylor公式的余项，是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小)

# Taylor公式

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

**麦克劳林公式 ( 特殊  $x_0=0$  )**

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n * (n - 1)!$$

# Taylor公式-余项

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

佩亚诺(Peano)余项 :  $R_n(x) = o[(x - x_0)^n]$

拉格朗日(Lagrange)余项 :  $R_n(x) = f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

# 几个常见的初等函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + o(x^{2m-1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$$

## 几个常见的初等函数的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

# Taylor公式应用1

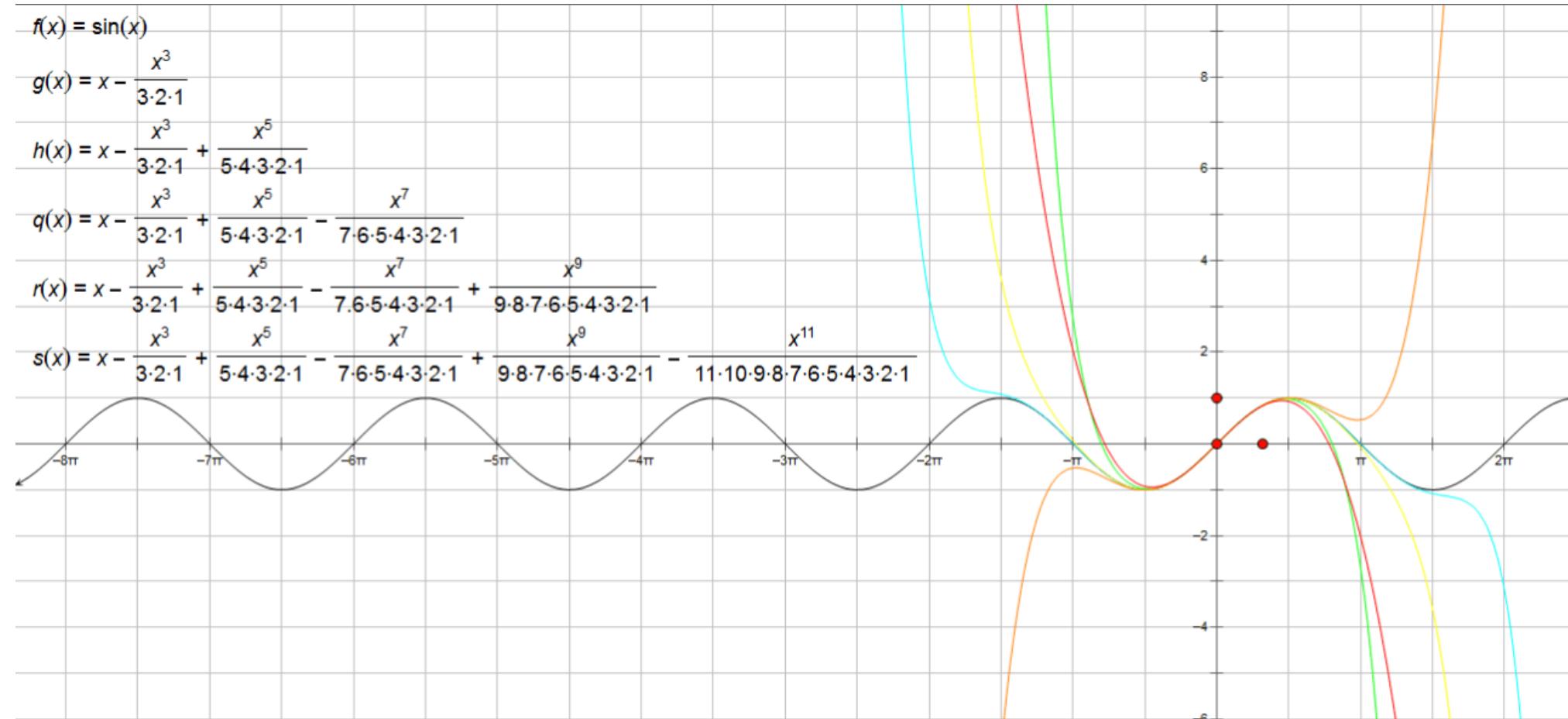
展开三角函数 $y=\sin(x)$ （使用麦克劳林公式进行展开操作）

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{2m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$$

# Taylor公式应用1

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{2m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$$



# Taylor公式应用2

$$y = e^x \Rightarrow y' = y = e^x$$

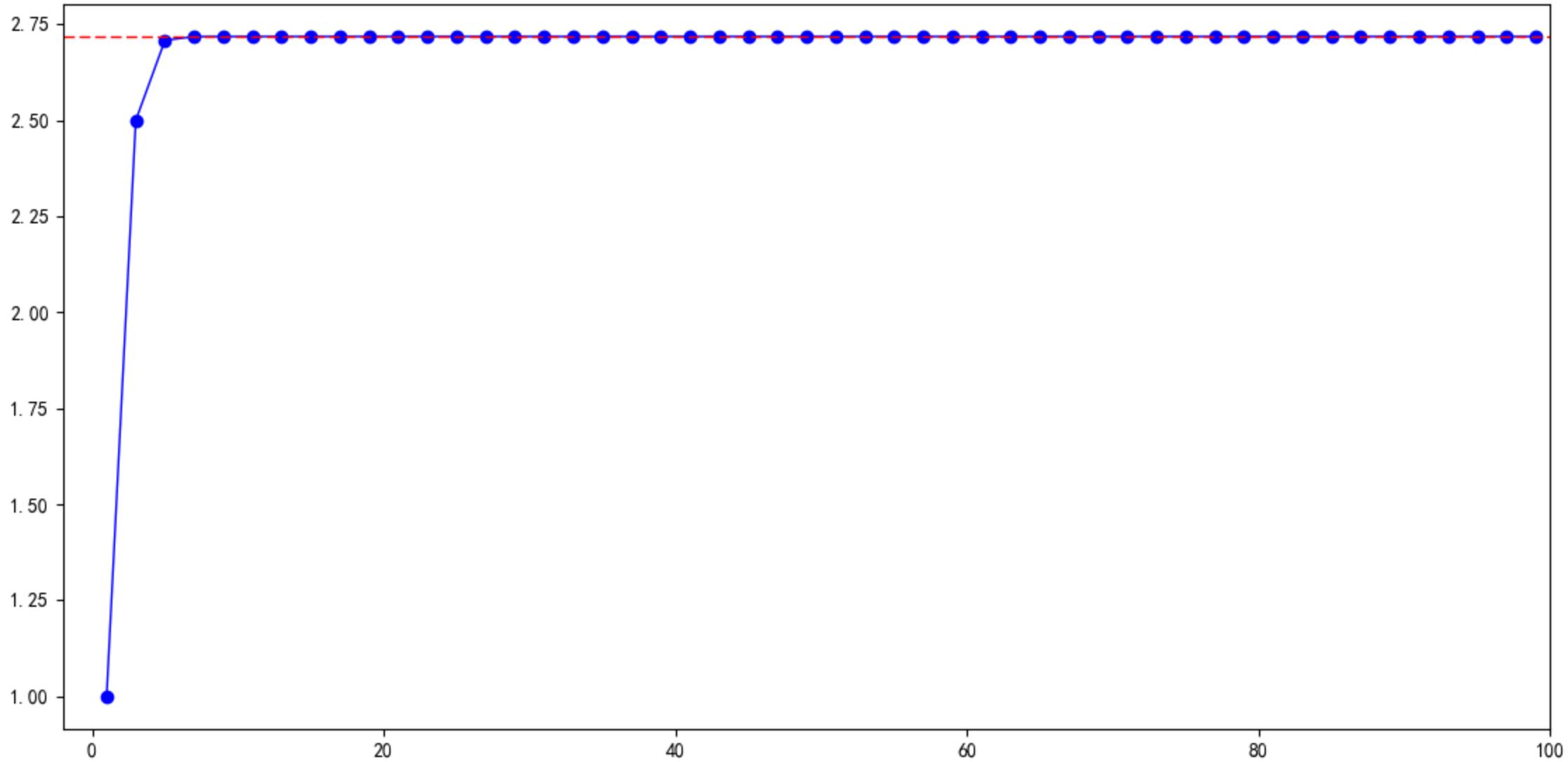
计算近似值  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  , 并估计误差值

$$e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{令 } x_0 = 0 \Rightarrow e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} & \text{令 } x = 1 \\ \Rightarrow e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} & \quad \text{令 } n = 10 \\ \Rightarrow e \approx 2.7182815 \end{aligned}$$

$$\delta = |R_{10}| = \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!} + \dots = \frac{1}{11!} \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots\right) < \frac{1}{11!} \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \dots\right) = \frac{12}{11 \cdot 11!} = 2.73 \cdot 10^{-8}$$

# Taylor公式应用2



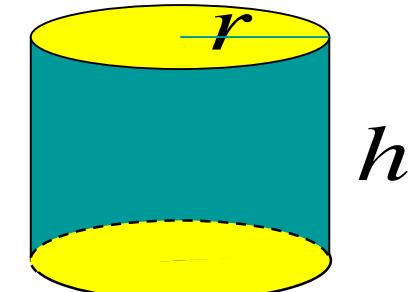
# 四、多元函数的极限

## 多元函数的概念

引例：

圆柱体的体积

$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r, h) \mid r > 0, h > 0\}$$

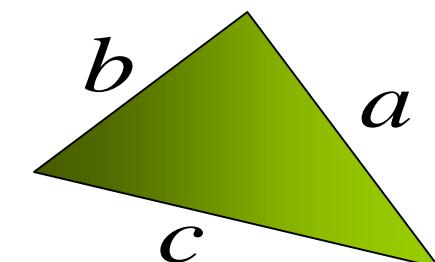


定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \quad (R \text{ 为常数}), \quad \{(V, T) \mid V > 0, T > T_0\}$$

三角形面积的海伦公式

$$(p = \frac{a + b + c}{2})$$



$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\{(a, b, c) \mid a > 0, b > 0, c > 0, a + b > c\}$$

# 1. 二元函数的定义

设  $D$  是平面上的一个点集，如果对于每个点  $P(x, y) \in D$ ，变量  $z$  按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称  $z$  是变量  $x, y$  的二元函数，记为  $z = f(x, y)$ （或记为  $z = f(P)$ ）。

类似地可定义三元及三元以上函数。

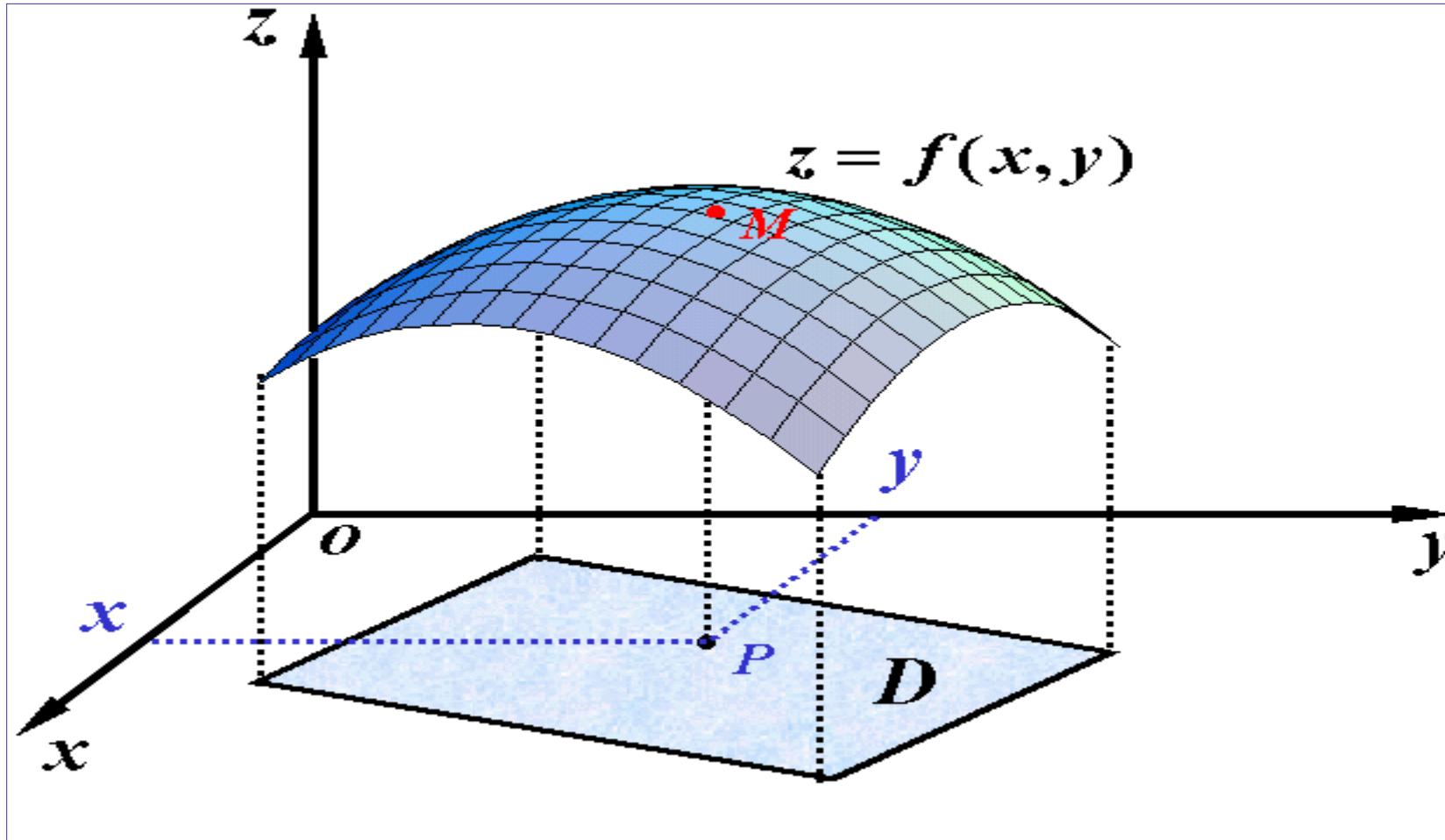
当  $n \geq 2$  时， $n$  元函数统称为多元函数。

多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念。

## 2. 二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形

设函数  $z = f(x, y)$  的定义域为  $D$ ，对于任意取定的  $P(x, y) \in D$ ，对应的函数值为  $z = f(x, y)$ ，这样，以  $x$  为横坐标、 $y$  为纵坐标、 $z$  为竖坐标在空间就确定一点  $M(x, y, z)$ ，取  $(x, y)$  遍  $D$  上一切点时，得一个空间点集  $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ ，这个点集称为二元函数的图形。

(如下页图)



二元函数的图形通常是一张曲面.

例如，二元函数  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

定义域为 圆域  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

图形为中心在原点的上半球面。

又如,  $z = \sin(xy)$ ,  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

说明：二元函数  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$

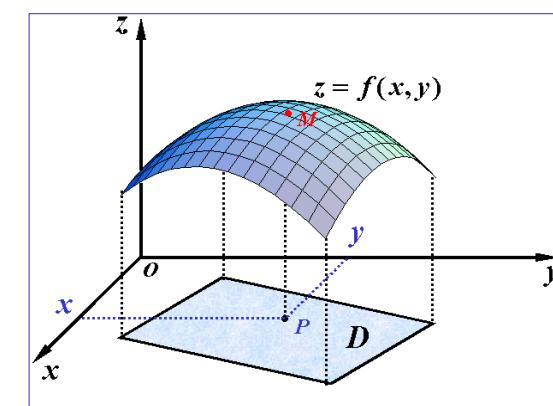
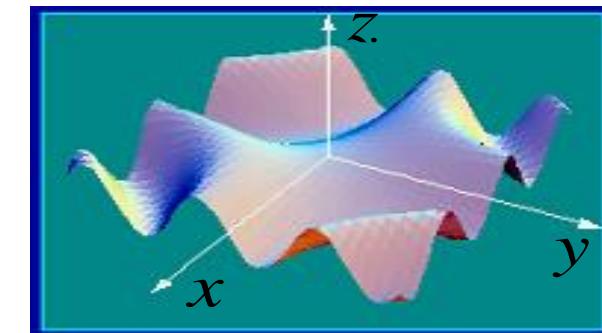
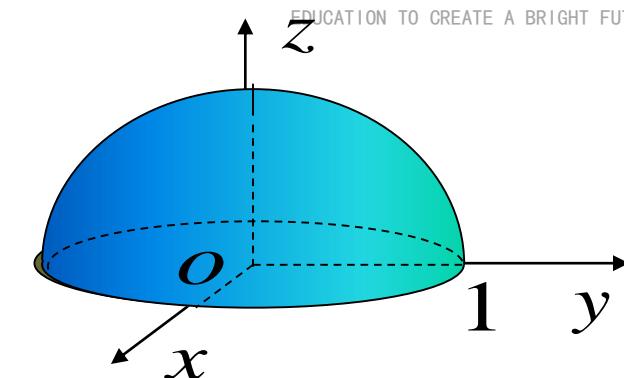
的图形一般为 空间曲面  $\Sigma$ 。

三元函数  $u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2)$

定义域为 单位闭球体

$\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

图形为  $\mathbf{R}^4$  空间中的超曲面。



# 多元函数的极限

## 回忆一元函数极限的概念

若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当点  $x \in \hat{U}(x_0, \delta)$  时,

$f(x) \in U(a, \varepsilon)$ , 即  $|f(x) - a| < \varepsilon$ , 则称

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a .$$

## 现在进行形式上的推广

# 多元函数的极限

设二元函数  $f(P) = f(x, y)$  的定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是其聚点. 如果存在常数  $A$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得在  $P_0$  的空心  $\delta$  邻域内的一切点  $P(x, y)$  都成立

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

则称常数  $A$  为函数  $f(x, y)$  当  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad f(x, y) \rightarrow A \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

也记作  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$  或  $f(P) \rightarrow A (P \rightarrow P_0)$

二元函数的极限也称为二重极限.

例1. 设  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$  ( $x^2 + y^2 \neq 0$ )

求证 :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$

证:  $\because \left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon$  要证

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\varepsilon}, \text{ 当 } 0 < \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ 时, 总有}$

$$|f(x, y) - 0| \leq x^2 + y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

故

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

# 五、多元函数偏导数

在一个多变量的函数中，偏导数就是关于其中一个变量的导数而保持其它变量恒定不变。假定二元函数 $z=f(x,y)$ ，点 $(x_0, y_0)$ 是其定义域内的一个点，将 $y$ 固定在 $y_0$ 上，而 $x$ 在 $x_0$ 上增量 $\Delta x$ ，相应的函数 $z$ 有增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ ； $\Delta z$ 和 $\Delta x$ 的比值当 $\Delta x$ 的值趋近于0的时候，如果极限存在，那么此极限值称为函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 处对 $x$ 的偏导数(partial derivative)，记作： $f'_x(x_0, y_0)$

$$\text{对 } x \text{ 的偏导数} : \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$$\text{对 } y \text{ 的偏导数} : \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

推广

对于三元函数  $u = f(x, y, z)$  可类似

定义  $u$  在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  分别对  $x, y, z$  的偏导数.

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

$$f_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y},$$

$$f_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$

偏导数是多元函数对其中某一个自变量（其余自变量视为常量）的变化率

例1 求  $z = x^2 + 3xy + y^2$  在点(1, 2) 处的偏导数.

解法1:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$$

$$\therefore \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

解法2:

$$z \Big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \left. (2x + 6) \right|_{x=1} = 8$$

$$z \Big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \left. (3 + 2y) \right|_{y=2} = 7$$

# 高阶偏导数

函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial z}{\partial \mathbf{y}} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = f''_{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = f''_{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial z}{\partial \mathbf{y}} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = f''_{21}$$

纯偏导

混合偏导

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如 ,  $z = f(x, y)$  关于  $x$  的三阶偏导数为

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

$z = f(x, y)$  关于  $x$  的  $n-1$  阶偏导数 , 再关于  $y$  的一阶偏导数为

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} \right)$$

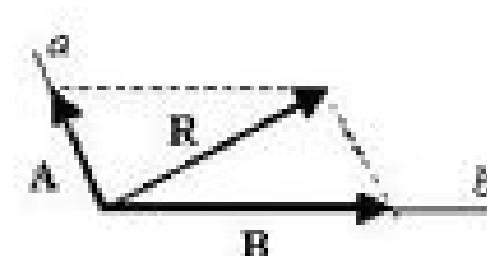
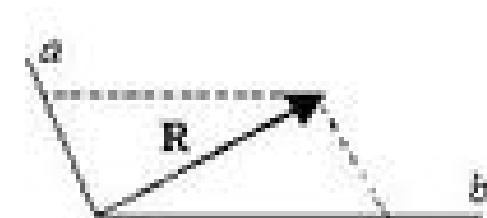
定义 : 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数 .

# 线性代数（补充知识）

- 线性(linear)指量(变量)与量(变量)之间按比例、成直线关系，在数学上可以理解为一阶导数为常数的函数；而非线性(non-linear)是指不成比例、没有直线关系，一阶导数不是常数的函数。
- 线性代数中的基本量指的是向量，基本关系是严格的线性关系；也就是可以简单的将线性代数理解为向量与向量之间的线性关系的映射。

## 一、向量

- 向量：是指具有n个互相独立的性质(维度)的对象的表示，向量常使用字母+箭头的形式进行表示，也可以使用几何坐标来表示向量，比如  $\vec{a} = \vec{OP} = xi + yj + zk$ ，可以用坐标(i,j,k)表示向量a
- 向量的模：向量的大小，也就是向量的长度，向量坐标到原点的距离，常记作|a|
- 单位向量：长度为一个单位(即模为1)的向量就叫做单位向量



# 向量的运算

- 设两向量为： $\vec{a} = (x_1, y_1)$  ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$
- 向量的加法/减法满足平行四边形法则和三角形法则

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

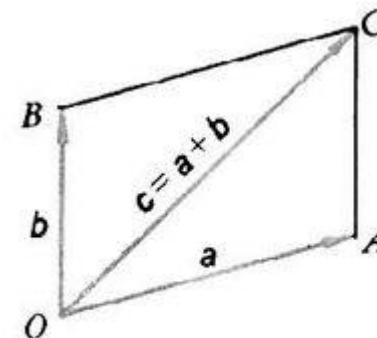


图 4 向量的加法

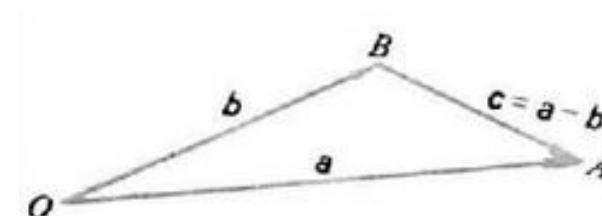


图 5 向量的减法

- 数乘：实数 $\lambda$ 和向量 $a$ 的乘积还是一个向量，记作 $\lambda a$ ，且 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$ ；数乘的几何意义是将向量 $a$ 进行伸长或者压缩操作

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

# 向量的运算

- 设两向量为： $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ， $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ，并且a和b之间的夹角为: $\theta$
- 数量积：两个向量的数量积(内积、点积)是一个数量/实数，记作  $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \theta$$

- 向量积：两个向量的向量积(外积、叉积)是一个向量，记作  $\vec{a} \times \vec{b}$ ；  
向量积即两个不共线非零向量所在平面的一组法向量。

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin \theta$$

# 方向导数

**定义：**若函数  $f(x, y, z)$  在点  $P(x, y, z)$  处沿方向  $l$  (方向角为  $\alpha, \beta, \gamma$ ) 存在下列极限：

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\rho} \text{ 记作 } \frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left( \begin{array}{l} \rho = |\Delta \vec{l}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \\ \Delta x = \rho \cos \alpha, \quad \Delta y = \rho \cos \beta, \quad \Delta z = \rho \cos \gamma \end{array} \right)$$

则称  $\frac{\partial f}{\partial l}$  为函数在点  $P$  处沿方向  $l$  的**方向导数**.

**定理:** 若函数  $f(x, y, z)$  在点  $P(x, y, z)$  处可微 ,

则函数在该点沿任意方向  $l$  的方向导数存在 , 且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

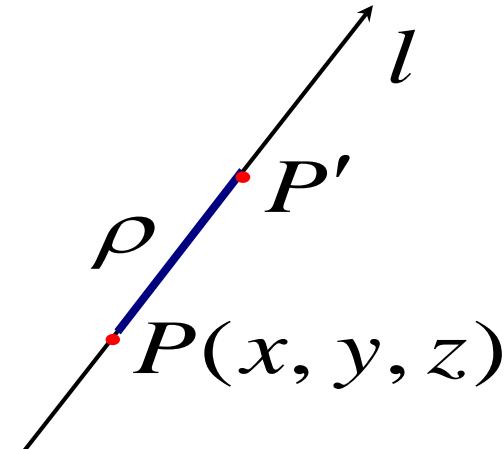
其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为  $l$  的方向角 .

**证明:** 由函数  $f(x, y, z)$  在点  $P$  可微 , 得

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(\rho)$$

$$= \rho \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) + o(\rho)$$

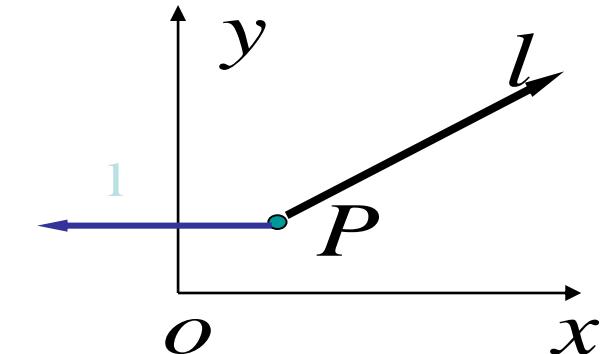
故  $\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$



对于二元函数  $f(x, y)$ , 在点  $P(x, y)$  处沿方向  $l$  (方向角

为  $\alpha, \beta$  ) 的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho} \\ &= f_x(x, y) \cos \alpha + f_y(x, y) \cos \beta\end{aligned}$$



$$(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad \Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta)$$

特别:

• 当  $l$  与  $x$  轴同向 ( $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ ) 时, 有  $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$

• 当  $l$  与  $x$  轴反向 ( $\alpha = \pi, \beta = \frac{\pi}{2}$ ) 时, 有  $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial x}$

例1. 求函数  $u = x^2yz$  在点  $P(1, 1, 1)$  沿向量  $\vec{l} = (2, -1, 3)$  的方向导数 .

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

解: 向量  $\vec{l}$  的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_P &= \left. \left( 2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} \right) \right|_{(1, 1, 1)} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}}\end{aligned}$$

**例2** 求函数  $z = xe^{2y}$  在点  $P(1,0)$  处沿从点  $P(1,0)$  到点  $Q(2,-1)$  的方向的方向导数.

**解** 方向  $l$  即向量  $PQ = (1, -1)$  的方向, 与  $l$  同方向的单位向量  $e_l = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = (\cos\alpha, \cos\beta)$

因为函数可微分, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = e^{2y} \Big|_{(1,0)} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,0)} = 2xe^{2y} \Big|_{(1,0)} = 2,$$

所以所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{(1,0)} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**练习** 求 $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ 在点(1,1,2)沿方向 $l$ 的方向导数,其中 $l$ 的方向角分别为 $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .

**解** 与 $l$ 同方向的单位向量

$$e_l = (\cos 60^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

因为函数可微分,且

$$f_x(1,1,2) = (y+z)|_{(1,1,2)} = 3,$$

$$f_y(1,1,2) = (x+z)|_{(1,1,2)} = 3,$$

$$f_z(1,1,2) = (y+x)|_{(1,1,2)} = 2.$$

所以  $\frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(1,1,2)} = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(5 + 3\sqrt{2})$ .

# 梯度(gradient)的概念及计算

在空间的每一个点都可以确定无限多个方向，因此，一个多元函数在某个点也必然有无限多个方向导数。在这无限多个方向导数中，最大的一个(它直接反映了函数在这个点的变化率的数量级)等于多少？它是沿什么方向达到的？描述这个最大方向导数及其所沿方向的矢量，就是我们下面讨论的梯度。梯度是场论里的一个基本概念。所谓“场”，它表示空间区域上某种物理量的一种分布。从数学上看，这种分布常常表示为  $\Omega$  上的一种数值函数或向量函数。能表示为数值函数  $u = u(x, y, z)$  的场，称为数量场，如温度场、密度场等。

## 方向导数公式

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

令向量  $\vec{G} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$$\vec{l}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{G} \cdot \vec{l}^0 = |\vec{G}| \cos(\vec{G}, \vec{l}^0) \quad (|\vec{l}^0| = 1)$$

当  $\vec{l}^0$  与  $\vec{G}$  方向一致时, 方向导数取最大值:

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right) = |\vec{G}|$$

这说明

$\vec{G}$ :  $\begin{cases} \text{方向: } f \text{ 变化率最大的方向} \\ \text{模: } f \text{ 的最大变化率之值} \end{cases}$

# 1. 梯度定义

向量  $\vec{G}$  称为函数  $f(P)$  在点  $P$  处的梯度 (gradient),  
记作  $\text{grad}f$  即

$$\text{grad}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

同样可定义二元函数  $f(x, y)$  在点  $P(x, y)$  处的梯度

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

说明： 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影.

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , 引用记号 称为奈布拉(Nebla)算符,

或称为向量微分算子或哈密顿(W.R.Hamilton)算子.

则梯度可记为  $\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \nabla f$ .

函数f沿梯度方向增加(上升)最快,  
函数f沿负梯度方向减小(下降)最快。

$$\mathbf{grad}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

或       $\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$   
 $= \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\}$

$$\mathbf{grad}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0, y_0, z_0) &= \{f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0)\} \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

以三元函数为例，设 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处可微分，则函数在该点的梯度为

$$\begin{aligned}\text{grad}f &= \nabla f \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial(f)}{\partial(x, y, z)} \right)\end{aligned}$$

**梯度是函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P$ 处取得最大方向导数的方向，**

**最大方向导数为**

$$|\text{grad}f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

**函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P$ 处沿方向  $\vec{l}$  的方向导数**

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \text{grad}f \cdot \vec{l}^0 = \nabla f \cdot \vec{l}^0.$$

**例1**

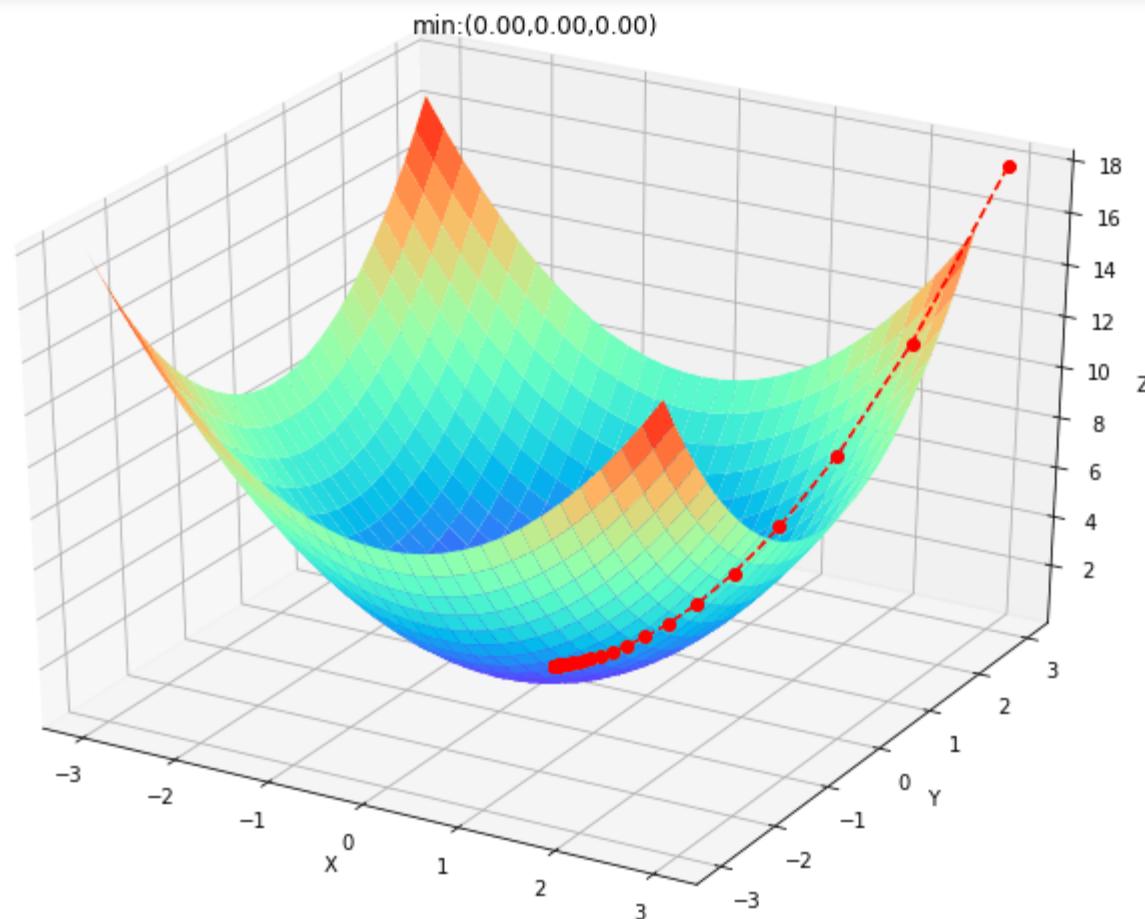
求  $\text{grad} \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

**解**

这里  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ .

因为  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$ ,

所以  $\text{grad} \frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \vec{i} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \vec{j}$ .



2018年1月14日星期日

例2 设  $(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ ,  $p(1, 1, 0)$ .

问  $f(x, y, z)$  在  $p$  处沿什么方向变化最快, 在这方向的变化率是多少?

解:

$$\nabla f = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = (3x^2 - y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\nabla f(1, 1, 0) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

沿  $\nabla f(1, 1, 0)$  方向增加 (上升) 最快,  
 $-\nabla f(1, 1, 0)$  方向减小 (下降) 最快。

$$\max \left\{ \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_p \right\} = |\text{grad } f| = |\nabla f(1, 1, 0)| = 3$$

$$\min \left\{ \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_p \right\} = -|\text{grad } f| = -|\nabla f(1, 1, 0)| = -3$$

# 参考文献

- 1.华东师范大学数学系, 数学分析, 高等教育出版社, 2013 ;
- 2.同济大学数学系, 高等数学, 高等教育出版社, 2016。



# THANK YOU

上海育创网络科技有限公司