Pràctiques d'Equacions Diferencials Ordinàries

Pràctica 3. Curs 2019/2020

1. Siguen

$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ e^t \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ \cos(t) \end{bmatrix}.$$

dues solucios de $x' = A(t)x$.

- Troba $A(t)$ i l'interval I on existix solució.
- Donat $t_0 \in I$ determina la matriu fonamental principal en t_0.

2. Siga la matriu

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{\pi}{t}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\pi}{t}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Per a quins intervals de $\mathbb{R}$ pot ser $\Phi(t)$ matriu fonamental d'un sistema diferencial lineal homogeni?
- Construix el sistema.

3. Se considera el problema de valors inicials

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + \cos(t), & x_1(0) = 1 \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 + t, & x_2(0) = 1 \end{cases}$$

- Comprova que les funcions
$$\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix}.$$
formen un sistema fonamental de solucions.
- Comprova la fòrmula de Jacobi-Liouville.
- Troba la (única) solució que complix les condicions inicials donades.

4. Resol les següents equacions diferencials lineals:

$$x' = Ax + b(t)$$

per a cadascun dels casos següents:

(a)
$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcula les solucions dels problemes de valors inicials corresponentes als sistemes (4b) i (4c) amb condicions inicials:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

respectivament.

5. Se considera l'equació diferencial lineal

$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = e^{-2t} \tag{1}$$

- Construix un sistema equivalent.
- Determina, per a l'esmentat sistema, una matriu fonamental principal en $t = 0$ i calcula la solució general.
- Determina la solució particular que per a $t = 0$ val $(1, 1, 1)^T$.
- A partir de l'apartat anterior, troba la solució de l'equaci¡o diferencial (1).

6. Pel mètode dels coeficients indeterminats, calcula una solució particular de

- $x'' - 3x' + 7x = 5te^{2t}$
- $x'' + 4x = 5\sin(3t) + \cos(3t) + \sin(2t)$
- $x'' - 2x' + 3x = t3 + \sin(t)$

7. Pel mètode de variació de les constants, cacula una solució particular de

- $x'' + x = \cot(t)$
- $x'' + 4x = \sec(2t)$
- $x'' - 6x' + 9x = \dfrac{e^{3t}}{t^2}$
- $x'' - x = e^{-t}\sin(e^{-t}) + \cos(e^{-t})$

8. El polinomi característic d'una edo lineal homogènia de coeficients constants és

$$P(r) = (r^2 - 4)(r^2 + 9)(r^2 + 2r + 2)r.$$

- Determina la dimensió del subespai vectorial de les solucions de l'edo associada.
- Quina dimensió té el subespai vectorial de les solucions periòdiques?
  Quin periode tenen?

9. Resoleu el problema de Cauchy

$$t^2x'' - 3tx' + 4x = \ln t, \quad x(1) = 1/4, x'(1) = 1/4.$$

10. Mitjançant el canvi de variable $s = \ln|t - c|$ resoleu l'equació d'Euler de segon ordre

$$(t - c)^2x'' + a(t - c)x' + bx = 0$$

on $a, b, c \in \mathbb{R}$.