Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Título Pendiete

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Actuario

PRESENTA
Ian Castillo Rosales

DIRECTOR DE TESIS
Dr. José Luis Ángel Pérez Garmendia

CO - DIRECTOR DE TESIS
Dr. Juan Carlos Pardo Millán

FES UNAM ACATLÁN

Título Pendiente

Ian Castillo Rosales

A la memoria de mi padre, Jacobo...

Mis más sinceros agradecimientos:

A mi madre y heroína de mi familia,
Azucena.

A mis amigos y directores,
Juan Carlos y José Luis

Al Centro de Investigación en Matemáticas,
Por la valiosa ayuda y confianza en mi trabajo.

A los miembros de mi honorable jurado:
A
B
C
D
E
Por sus invaluables comentarios de este trabajo

A mi hermano y mejor amigo Erick,
por todas sus muestras de apoyo durante mi tesis.

A mi novia Sandra,
por aguantar todas las pláticas matemáticas.

A todas las personas que conocí en mi estancia en el CIMAT,
por su solidaridad y apego.

Y a todos aquellos que me alentaron en la realización de este
proyecto, además de su valiosa amistad. En especial a
Brenda C, Brenda M, Dania, Mayra, Carlos, Gerardo y Jonhatan.

Índice general

Prefacio

Aquí va el prefacio.

El término martingala se originó dentro de los juegos de apuestas, y éste hace referencia a una estrategia donde se dobla la apuesta cada vez que se pierde y se detiene al momento en que se gana, obteniendo una ganancia de una unidad. Desafortunadamente, la cantidad promedio que el jugador debe apostar cuando, finalmente, se gana; es infinita.

Los orígenes de la definición de martingala se remontan a los textos de principios de 1930 por parte de Marcinkiewicz y Zygmund [6]; con el estudio de funciones ortogonales y la convergencia de ciertas series, sin embargo, la teoría de martingalas como la conocemos fue propuesta por J. L. Doob en su famoso libro *Stochastic Process* [3], donde por primera vez, describe los fundamentos y prueba grandes resultados de la teoría de martingalas.

Capítulo 1

Martingalas

En el presente capítulo presentamos la definición de martingala, así como algunas propiedades que surgen gracias a la estructura de estos procesos. Las martingalas son una de las herramientas más útiles de la teoría de probabilidad moderna. En particular, las martingalas son una referencia para el estudio de teoremas límite o convergencia, pues la teoría de martingalas proporciona pruebas más elegantes y estéticamente atractivas.

1.1. Definición

Consideremos un espacio de probabilidad conocido y fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, así como una sucesión de σ-algebras $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, tales que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ para todo $n \geq 0$.

Definición 1.1 (Martingala). Decimos que $X = (X_n, n \geq 0)$ es una $(\mathcal{F}_n)$-*martingala*, si

1. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ para cada n;
2. X_n es $\mathcal{F}_n$-medible, para cada n;
3. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] = X_m$ c.s., para todo $m \leq n$.

Podemos observar que (2) es *casi* una implicación de (3), la cual sostiene que X_m es casi seguramente igual a una variable aleatoria $\mathcal{F}_m$ medible.

Recordemos que la Ley Fuerte de los Grandes Números afirma que [4, p. 173]: si $(X_n, n \geq 0)$ es una sucesión de variables aleatorias las cuales son independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ y $\sigma^2_{X_n} < \infty$ para toda n, y si $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu$, casi seguramente. Por otro lado, la Ley Cero Uno de Kolmogorov nos asegura que [9, p. 381], si consideramos una sucesión de variables aleatorias $(X_n, n \geq 0)$ independientes entre si, el evento cola debe tener una probabilidad 0 o 1, es decir, debe ser una constante. Entonces, $\frac{S_n}{n} \to \mu$ cuando $n \to \infty$, donde μ es una variable aleatoria cuyo valor siempre es constante.

Es de poco interés el estudio de sucesiones convergentes a límites que sean constantes. Sin embargo, si escribimos la sucesión anterior de una manera distinta tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{n} = 0, \quad c.s.$$

Veamos en el siguiente ejemplo que una propiedad clave de la sucesión $(S_n - n\mu, n \geq 0)$ es que, si $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k \mid k \leq n)$, entonces la sucesión es una martingala.

Ejemplo 1.1. Sea $(X_n, n \geq 0)$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, para toda n. Para $n \geq 0$ sea $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k \mid k \leq n)$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$. Entonces tenemos que para toda $m \leq n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n - n\mu \mid \mathcal{F}_m] &= \mathbb{E}[S_m + (S_n - S_m) - n\mu \mid \mathcal{F}_m] \\
&= (S_m - n\mu) + \mathbb{E}[S_n - S_m \mid \mathcal{F}_m] \\
&= (S_m - n\mu) + \mathbb{E}\left[\sum_{k=m+1}^{n} X_k \mid \mathcal{F}_m\right] \\
&= (S_m - n\mu) + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{E}[X_k \mid \mathcal{F}_m] \\
&= (S_m - n\mu) + \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{E}[X_k] \qquad (1.1) \\
&= S_m - m\mu.
\end{aligned}$$

Donde (1.1) se cumple pues $\mathcal{F}_m$ es la información generada por las variables $X_0, X_1, \ldots, X_m$ y entonces $(X_k, k \geq m+1)$ es independiente de $\mathcal{F}_m$. Por lo tanto, $(S_n - n\mu, n \geq 0)$ es una *martingala.*

Una propiedad importante de las martingalas es que poseen una esperanza cuyo valor siempre es constante.

Proposición 1.1. *Si* $(X_n, n \geq 0)$ *es una martingala, entonces* $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0]$, *para toda* $n \geq 0$.

Demostración. Si $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala entonces tenemos que $X_0 = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0]$ para $n \geq 0$ por lo que

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[X_n],$$

para toda $n \geq 0$. □

Por otro lado, en general no sucede que si un proceso tiene un valor esperado constante, este proceso resulte ser una martingala. Sin embargo, con las condiciones necesarias la afirmación anterior llega a ocurrir. Para poder mostrar el resultado requerimos de una definición que será vital para desarrollo de este capítulo.

Definición 1.2 (Tiempo de Paro)**.** Una variable aleatoria $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es un tiempo de paro con respecto a $(\mathcal{F}_n)$ si $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Los tiempos de paro pueden ser pensados como aquel tiempo en el que ocurre algún evento de interés, con la convención de que el tiempo de paro toma el valor $+\infty$ si el evento nunca ocurre. El término "tiempo de paro"proviene de un concepto involucrado con los juegos de apuestas: dependiendo de ciertos eventos, un apostador puede dejar el juego en cualquier momento (un tiempo aleatorio), pero en el momento en que decide detenerse, esa decisión debe estar basada en los eventos que han ocurrido en el pasado y no en eventos futuros.

Proposición 1.2. *Sea τ un tiempo de paro acotado por c, es decir, $\mathbb{P}(\tau \leq c) = 1$ y sea $(X_n, n \geq 0)$ una martingala, entonces $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.*

Demostración. Observemos que a X_τ la podemos escribir como,

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{\{\tau = n\}}.$$

Entonces, sea $[c]$ la parte entera de c o el máximo entero no superior a c,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{\{\tau=n\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{[c]} X_n 1_{\{\tau=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{[c]} \mathbb{E}[X_n 1_{\{\tau=n\}}] \\
&= \sum_{n=0}^{[c]} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_[c] \mid \mathcal{F}_n] 1_{\{\tau=n\}}].
\end{aligned}$$

Notemos que podemos escribir a $\{\tau = n\}$ como $\{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$ donde ambos eventos pertenecen a $\mathcal{F}_n$ por ser τ un tiempo de paro, por lo tanto $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_\tau] &= \sum_{n=0}^{[c]} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{[c]} 1_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n]] \\
&= \sum_{n=0}^{[c]} \mathbb{E}[X_{[c]} 1_{\{\tau=n\}}] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{[c]} X_c 1_{\{\tau=n\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{[c]} \sum_{n=0}^{[c]} 1_{\{\tau=n\}}\right] \\
&= \mathbb{E}[X_{[c]}] = \mathbb{E}[X_0].
\end{aligned}$$

$\square$

La siguiente definición muestra que para un tiempo de paro τ, $\mathcal{F}_\tau$ puede ser interpretada la información disponible para algún momento aleatorio. Esta σ-algebra es conocida como *σ-algebra parada* y será de utilidad más adelante.

Definición 1.3. Sea τ un tiempo de paro, entonces tenemos que la σ-algebra parada en τ esta definida como,

$$\mathcal{F}_\tau = \{\Lambda \in \mathcal{F} \mid \Lambda \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \text{ para toda } n\}.$$

Veamos que la definición anterior tiene sentido, al probar que $\mathcal{F}_\tau$ es, efectivamente, una σ-algebra.

Proposición 1.3. *Sea τ un tiempo de paro, entonces $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-algebra.*

Demostración. Como $\{\tau \leq n\} = \Omega \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para toda n, de acuerdo a la definición de $\mathcal{F}_\tau$ se tiene que $\Omega \in \mathcal{F}_\tau$. Si $A \in \mathcal{F}_\tau$, podemos escribir a $A^c \cap B$ como $B \setminus (A \cap B)$ entonces:

$$A^c \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq n\} \setminus (A \cap \{\tau \leq n\}). \tag{1.2}$$

Donde, a la derecha de (1.2), ambas partes pertenecen a $\mathcal{F}_n$, por lo tanto, $A^c \in \mathcal{F}_\tau$. Por último, si $(A_k, k \geq 0) \in \mathcal{F}_\tau$ entonces observemos que

$$\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cap \{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} (A_k \cap \{\tau \leq n\}).$$

Se tiene entonces que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}_\tau$.

Como $\mathcal{F}_\tau$ contiene al conjunto Ω, y al ser cerrado bajo complementos y uniones contables, $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-algebra. □

Verifiquemos dos sencillas proposiciones que serán de ayuda a la hora de presentar un resultado importante, el Teorema de Paro Opcional de Doob.

Proposición 1.4. *Sean dos tiempos de paro, γ y τ, tales que $\gamma \leq \tau$, entonces $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathcal{F}_\tau$.*

Demostración. Si sabemos que $\gamma \leq \tau$, entonces $\{\tau \leq n\} \subset \{\gamma \leq n\}$, y por lo tanto $\{\tau \leq n\} = \{\gamma \leq n\} \cap \{\tau \leq n\}$. Si $\Lambda \in \mathcal{F}_\gamma$ entonces

$$\Lambda \cap \{\tau \leq n\} = \Lambda \cap \{\gamma \leq n\} \cap \{\tau \leq n\}.$$

Donde $\Lambda \cap \{\gamma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ por la definición de $\mathcal{F}_\gamma$, de igual manera $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ por ser τ un tiempo de paro. Por lo tanto, $\Lambda \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para toda n, es decir, $\Lambda \in \mathcal{F}_\tau$. □

Proposición 1.5. *Supongamos que $(X_n, n \geq 0)$ es una sucesión de variables aleatorias tales que para toda n se tiene que X_n es $\mathcal{F}_n$ medible. Consideremos un tiempo de paro τ, entonces X_τ es $\mathcal{F}_\tau$ medible.*

Demostración. Recordemos que podemos reescribir el término X_τ como

$$X_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} X_n 1_{\{\tau=n\}}.$$

Si consideremos un boreliano B, es necesario mostrar que el evento $\{X_\tau \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$, es decir, $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ para toda n. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} &= \bigcup_{i=0}^{n} \{X_\tau \in B\} \cap \{\tau = i\} \\ &= \bigcup_{i=0}^{n} \{X_i \in B\} \cap \{\tau = i\}.\end{aligned}$$

Como $\{X_i \in B\} \cap \{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$ para toda $i \leq n$, entonces tenemos que $\{X_\tau \in B\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, por lo que X_τ es $\mathcal{F}_\tau$ medible. □

Los siguientes teoremas muestran un poderoso resultado, que liga los conceptos presentados hasta ahora. Veamos que la propiedad de martingala se mantiene aún cuando se consideren tiempos de paro, en lugar de tiempos conocidos.

Teorema 1.1 (Teorema de Paro Opcional de Doob)**.** *Sea $X = (X_n, n \geq 0)$ una martingala, considere dos tiempos de paro γ y τ, acotados por una constante K, con $\gamma \leq \tau$ c.s., entonces*

$$\mathbb{E}[X_\tau \mid \mathcal{F}_\gamma] = X_\gamma, \quad c.s.$$

Demostración. Recordemos que la definición de esperanza condicional nos dice que [4, p. 200]: si una variable $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y consideramos $\mathcal{G}$ una sub σ-algebra de $\mathcal{A}$, entonces existe un elemento $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ donde la siguiente condición se cumple

$$\mathbb{E}[YX] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]X] \quad \text{para toda } X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}).$$

Al ser τ y γ tiempos acotados por una constante $K \in \mathbb{N}$, tenemos que $|X_\tau| \leq \sum_{n=0}^{K} |X_n|$, por lo que X_τ es integrable y por la misma razón, X_γ también es integrable. Por la Proposición 1.5 sabemos que X_γ es $\mathcal{F}_\gamma$ medible.

Basta probar entonces que $\mathbb{E}[X_\tau Z] = \mathbb{E}[X_\gamma Z]$ para toda variable aleatoria $\mathcal{F}_\gamma$ medible. Resulta equivalente a mostrar que si $\Lambda \in \mathcal{F}_\gamma$ entonces,

$$\mathbb{E}[X_\tau 1_\Lambda] = \mathbb{E}[X_\gamma 1_\Lambda].$$

Puesto que podemos aproximar una variable aleatoria cualquiera a partir de variables aleatorias simples y usando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue el cual afirma que [9, p. 187]: si $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ c.s. y $|X_n| \leq K$ c.s., entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

Definamos un nuevo tiempo aleatorio ϕ con $\Lambda \in \mathcal{F}_\gamma$,

$$\phi(\omega) = \gamma(\omega)1_\Lambda(\omega) + \tau(\omega)1_{\Lambda^c}(\omega).$$

Veamos que $\{\phi \leq n\} = (\Lambda \cap \{\gamma \leq n\}) \cup (\Lambda^c \cap \{\tau \leq n\})$, entonces, sabemos que como $\Lambda \in \mathcal{F}_\gamma$ tenemos que $(\Lambda \cap \{\gamma \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. Por otro lado, como $\Lambda \in \mathcal{F}_\gamma$ entonces $\Lambda^c \in \mathcal{F}_\gamma$ y por la Proposición 1.4, tenemos que $\Lambda^c \in \mathcal{F}_\tau$ por lo que $(\Lambda^c \cap \{\tau \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. Por lo tanto, ϕ es un tiempo de paro.

Por el hecho anterior y la Proposición 1.2 sabemos que $\mathbb{E}[X_\phi] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_\tau]$. Por último, veamos que,

$$\mathbb{E}[X_\phi] = \mathbb{E}[X_\gamma 1_\Lambda] + \mathbb{E}[X_\tau 1_{\Lambda^c}],$$
$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_\tau 1_\Lambda] + \mathbb{E}[X_\tau 1_{\Lambda^c}].$$

Por lo que, al sustraer $\mathbb{E}[X_\phi]$ de $\mathbb{E}[X_\tau]$ obtenemos

$$\mathbb{E}[X_\tau] - \mathbb{E}[X_\phi] = 0,$$
$$(\mathbb{E}[X_\tau 1_\Lambda] + \mathbb{E}[X_\tau 1_{\Lambda^c}]) - (\mathbb{E}[X_\gamma 1_\Lambda] + \mathbb{E}[X_\tau 1_{\Lambda^c}]) = 0,$$
$$\mathbb{E}[X_\tau 1_\Lambda] - \mathbb{E}[X_\gamma 1_\Lambda] = 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[X_\tau 1_\Lambda] = \mathbb{E}[X_\gamma 1_\Lambda]$ para todo $\Lambda \in \mathcal{F}_\gamma$. □

Con las conclusiones vistas hasta ahora podemos establecer un resultado parcial del recíproco de la Proposición 1.1, el cual nos asegura que, dadas las condiciones adecuadas, podemos afirmar que un proceso con esperanza constante, resulta ser una martingala.

Teorema 1.2. *Sea $(X_n, n \geq 0)$ una sucesión de variables aleatorias, tal que X_n es $\mathcal{F}_n$-medible para toda n. Supongamos que $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ para toda n y que $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$ para todo tiempo de paro acotado τ. Se tiene que, $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala.*

Demostración. Para verificar que $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala debemos verificar que se cumpla que para todo tiempo $0 \leq m < n < \infty$

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] = X_m.$$

Donde $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m]$ representa el valor esperado del proceso al tiempo n condicionado con respecto a la información a tiempo m. De la misma manera que en el Teorema 1.1, basta con verificar que $\mathbb{E}[X_n 1_\Lambda] = \mathbb{E}[X_m 1_\Lambda]$ para toda $\Lambda \in \mathcal{F}_m$. Sea $0 \leq m < n < \infty$ y $\Lambda \in \mathcal{F}_m$. Definamos el tiempo aleatorio τ como

$$\tau(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega \in \Lambda, \\ m & \text{si } \omega \notin \Lambda. \end{cases}$$

Podemos verificar fácilmente que τ es un tiempo de paro, ya que $\{\tau \leq n\} = (\Lambda \cap \{n = n\}) \cup (\Lambda^c \cap \{m \leq n\})$. Si $\omega \in \Lambda$ entonces $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, además $\Lambda \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$. Por otro lado, si $\omega \notin \Lambda$, entonces $\{m \leq n\} \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$ y como $\Lambda \in \mathcal{F}_m$ entonces $\Lambda^c \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$.

Al ser τ un tiempo de paro tenemos que

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_m 1_{\Lambda^c} + X_n 1_\Lambda].$$

Por otro lado

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_m 1_{\Lambda^c} + X_m 1_\Lambda].$$

Sustrayendo $\mathbb{E}[X_0]$ de $\mathbb{E}[X_\tau]$ tenemos

$$\mathbb{E}[X_m 1_{\Lambda^c}] + \mathbb{E}[X_n 1_\Lambda] - (\mathbb{E}[X_m 1_{\Lambda^c}] + \mathbb{E}[X_m 1_\Lambda]) = 0,$$
$$\mathbb{E}[X_n 1_\Lambda] - \mathbb{E}[X_m 1_\Lambda] = 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[X_n 1_\Lambda] = \mathbb{E}[X_m 1_\Lambda]$ para toda $\Lambda \in \mathcal{F}_m$, demostrando así que $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] = X_m$, es decir, $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala. □

1.2. Supermartingalas y Submartingalas

Para llegar a un segundo resultado importante en la teoría de martingalas, es necesario introducir un nuevo concepto asociado con nuestra Definición 1.1. Si reemplazamos la igualdad por una desigualdad en las condiciones dadas de la definición de martingala obtenemos el siguiente concepto.

Consideremos un espacio de probabilidad dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una sucesión creciente de σ-algebras $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$.

Definición 1.4. Una sucesión de variables $(X_n, n \geq 0)$ es llamada *submartingala* si,

1. $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ para cada n;
2. X_n es $\mathcal{F}_n$ medible, para cada n;
3. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] \geq X_m$ c.s., para todo $m \leq n$.

Si $(X_n, n \geq 0)$ es una submartingala, entonces definimos al proceso $(-X_n, n \geq 0)$, para toda $n \geq 0$, es una *supermartingala.* La sucesión $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala si y solo si es una submartingala y al mismo tiempo una supermartingala.

Recordemos que la desigualdad de Jensen nos asegura lo siguiente [4, p. 205]: si una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa, y las variables aleatorias X y $\phi(X)$ son integrables, entonces para cualquier σ-algebra $\mathcal{F}$ se tiene que $\phi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X) \mid \mathcal{F}]$. A través de este resultado podemos ligar las Definiciones 1.1 y 1.4 con la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Si $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala, coni ϕ una función convexa y $\phi(X_n)$ es integrable para toda n, entonces $(\phi(X_n), n \geq 0)$ es una submartingala.*

Demostración. Sea $m \leq n$, tenemos que $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] = X_m$, c.s., entonces al aplicar $\phi(\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m]) = \phi(X_m)$, c.s. y como ϕ es una función convexa podemos concluir de la desigualdad de Jensen

$$\mathbb{E}[\phi(X_n) \mid \mathcal{F}_m] \geq \phi(\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m]) = \phi(X_m).$$

Por lo tanto, $(\phi(X_n), n \geq 0)$ es una submartingala. □

Consideremos la función $\phi(x) = |x|$, la cual es una función convexa. Por la Proposición 1.6, tenemos que si $(M_n, n \geq 0)$ es una martingala entonces $X_n = |M_n|$ para toda n es una submartingala.

Recordemos que la propiedad de martingala se mantiene aún usando tiempos de paro acotados (Teorema 1.1), de igual manera, la propiedad de submartingala se mantiene bajo las mismas condiciones.

El siguiente teorema muestra la fuerte relación que existe entre las martingalas y submartingalas. El resultado asegura una descomposición única de un proceso submartingala como la suma de un proceso martingala y un proceso predecible.

Teorema 1.3 (Descomposición de Doob)**.** *Sea $(X_n, n \geq 0)$ es una submartingala. Entonces, se tiene la siguiente descomposición del proceso para cada $n \geq 1$*

$$X_n = X_0 + M_n + A_n, \qquad \textit{con } M_0 = A_0 = 0.$$

donde $(M_n, n \geq 0)$ es una martingala y $(A_n, n \geq 0)$ satisface que $A_{n+1} \geq A_n$, c.s. y A_{n+1} es $\mathcal{F}_n$-medible para toda n. Más aún, la descomposición es única.

Demostración. Como $(X_n, n \geq 0)$ es una submartingala se tiene que $\mathbb{E}[X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] \geq X_k$ entonces $\mathbb{E}[X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] - X_k \geq 0$. Sin embargo, X_k es una variable aleatoria $\mathcal{F}_k$-medible, por lo tanto $\mathbb{E}[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k] \geq 0$. Definamos al proceso $A_0 = 0$ y

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}], \quad \text{con } n \geq 1.$$

Por lo tanto, tenemos que $A_n \leq A_{n+1}$ c.s. y además A_k es $\mathcal{F}_{k-1}$-medible. Mostremos la existencia de la martingala $(M_n, n \geq 0)$.

Notemos que X_{n-1} es una variable $\mathcal{F}_{n-1}$-medible, entonces $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}] - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ambas igualdades obtenemos la siguiente igualdad

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = A_n - A_{n-1}.$$

Es decir

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - A_n = X_{n-1} - A_{n-1}.$$

Sin embargo, por definición sabemos que $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, entonces

$$\mathbb{E}[X_n - A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1} - A_{n-1}.$$

Por tanto, si definimos a $M_n = X_n - A_n$ para toda n, tenemos que $(M_n, n \geq 0)$ es una martingala. Aseguramos entonces la existencia de la descomposición.

Para demostrar la unicidad de la descomposición, supongamos que para la submartingala $(X_n, n \geq 0)$ existen dos descomposiciones tales que

$$\begin{aligned} X_n &= X_0 + M_n + A_n, \quad n \geq 1, \\ X_n &= X_0 + L_n + B_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

De la diferencia entre ambas descomposiciones obtenemos

$$M_n + A_n = L_n + B_n, \quad n \geq 1.$$

Es decir,

$$M_n - L_n = B_n - A_n, \quad n \geq 1.$$

Recordemos que por su construcción, B_n y A_n son variables $\mathcal{F}_{n-1}$ medibles, entonces $B_n - A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, por lo tanto, $M_n - L_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Tenemos entonces que $M_n - L_n = \mathbb{E}[M_n - L_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$. Por otro lado, sabemos que M_n y L_n son martingalas, entonces

$$M_n - L_n = \mathbb{E}[M_n - L_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} - L_{n-1} = B_{n-1} - A_{n-1}, \quad \text{c.s.}$$

Siguiendo inductivamente este procedimiento llegamos a que

$$M_n - L_n = M_0 - L_0, \quad \text{c.s.}$$

Por hipótesis sabemos que $M_0 = L_0 = 0$, y entonces podemos asegurar la unicidad de la descomposición ya que $M_n = L_n$, c.s. y ademas $B_n = A_n$, c.s. □

Corolario 1.4. *Sea $(X_n, n \geq 0)$ es una supermartingala. Entonces, existe una única descomposición del proceso para cada $n \geq 1$,*

$$X_n = X_0 + M_n - A_n,$$

con $M_0 = A_0 = 0$, $(M_n, n \geq 0)$ una martingala y un proceso $(A_n, n \geq 0)$ tal que $A_{n+1} \geq A_n$ c.s. y A_{n+1} es $\mathcal{F}_n$-medible para toda n.

Demostración. Si definimos a $Y_n = -X_n$ entonces, el proceso $(Y_n, n \geq 0)$ es una submartingala. Por el Teorema 1.3, tenemos la siguiente descomposición para el proceso

$$Y_n = Y_0 + L_n + B_n,$$

Entonces $X_n = X_0 - L_n - B_n$, al definir $M_n = -L_n$ y $A_n = B_n$ para toda $n \geq 1$. □

1.3. Desigualdades Maximales

A continuación mostramos las principales desigualdades para martingalas, las cuales serán una herramienta para el estudio de la convergencia de martingalas. Consideremos un espacio de probabilidad fijo y conocido $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una sucesión de σ-algebras $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ tales que $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ para toda n. Consideremos una sucesión de variables aleatorias integrables $(M_n, n \geq 0)$ y además, para cada n, se tiene que M_n es $\mathcal{F}_n$-medible. Definamos

$$M_n^* = \sup_{j \leq n} |M_j|.$$

Es claro que $M_n^* \leq M_{n+1}^*$, entonces para toda $m \leq n$ se tiene que $M_m^* = \mathbb{E}[M_m^* \mid \mathcal{F}_m] \leq \mathbb{E}[M_n^* \mid \mathcal{F}_m]$ c.s., además

$$M_n^* = \sup_{j \leq n} |M_j| \leq \sum_{j=0}^{n} |M_j|.$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[M_n^*] \leq \mathbb{E}[\sum_{j=0}^n |M_j|] < \infty$. Con estas condiciones, aseguramos que el proceso $(M_n^*, n \geq 0)$ es una submartingala. Estamos interesados en conocer la probabilidad de que el valor M_n^* supere una cantidad α.

Recordemos que la *Desigualdad de Markov* afirma que [4, p. 29] para una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se tiene que $\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \mathbb{E}[|X|]/\alpha$ para toda $\alpha > 0$, entonces

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^*]}{\alpha}. \tag{1.3}$$

En el caso donde $(M_n, n \geq 0)$ no solo cumple con las condiciones mencionadas, sino que además satisface que es una martingala, podemos reemplazar M_n^* por $|M_n|$ en el lado derecho de (1.3), dando como resultado el siguiente teorema.

Teorema 1.5 (Primera Desigualdad de Martingalas de Doob)**.** *Sea $(M_n, n \geq 0)$ una martingala o una submartingala positiva. Entonces*

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_n|]}{\alpha}.$$

Demostración. Consideremos en primer lugar el siguiente tiempo de paro

$$\tau = \text{mín}\{j : |M_j| \geq \alpha\}.$$

Veamos que sin importar que caso consideremos para $(M_n, n \geq 0)$ (martingala o submartingala positiva), $(|M_n|, n \geq 0)$ es una submartingala.

Si M una martingala, por la Proposición 1.6 tenemos que $(|M_n|, n \geq 0)$ es una submartingala. Por otro lado, si M es una submartingala positiva entonces resulta que $|M_n| = M_n$ para toda n. Por lo que $(|M_n|, n \geq 0)$ es una submartingala.

$$|M_m| \leq |\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_m]|. \tag{1.4}$$

De la desigualdad de Jensen tenemos que

$$|\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_m]| \leq \mathbb{E}[|M_n| \mid \mathcal{F}_m]. \tag{1.5}$$

De (1.4) y (2.9) tenemos que $(|M_n|, n \geq 0)$ es una submartingala.

Observemos que el evento $\{\tau \leq n, |M_\tau| \geq \alpha\}$ representa el primer momento en el que ocurre la condición $\{|M_\tau| \geq \alpha\}$ que resulta ser el mismo evento que $\{\sup_{j \leq n} |M_j| = M_n^* \geq \alpha\}$, entonces

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) = \mathbb{P}(\tau \leq n, |M_\tau| \geq \alpha). \tag{1.6}$$

Utilizando la desigualdad de Markov tenemos que

$$\mathbb{P}(\tau \leq n, |M_\tau| \geq \alpha) = \mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[M_n^*]}{\alpha} = \mathbb{E}\left[\frac{|M_\tau|}{\alpha} 1_{\{\tau \leq n\}}\right]. \tag{1.7}$$

Veamos por otro lado, en el conjunto $\{\tau \leq n\}$ tenemos que $M_\tau = M_{\tau \wedge n}$. De (1.6) y (1.7) tenemos que

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[|M_\tau| 1_{\{\tau \leq n\}}] = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[|M_{\tau \wedge n}| 1_{\{\tau \leq n\}}].$$

Además tenemos que

$$\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[|M_{\tau\wedge n}|1_{\{\tau\leq n\}}] \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[|M_{\tau\wedge n}|].$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}[|M_\tau|1_{\{\tau\leq n\}}] \leq \frac{\mathbb{E}[|M_{\tau\wedge n}|]}{\alpha}. \tag{1.8}$$

Por último, con una prueba análoga de la Proposición 1.2 se sabe que para un tiempo de paro τ acotado por $c \in \mathbb{N}$ y una submartingala $(X_n, n \geq 0)$ se tiene que $\mathbb{E}[X_\tau] \leq \mathbb{E}[X_c]$. Entonces,

$$\frac{\mathbb{E}[|M_{\tau\wedge n}|]}{\alpha} \leq \frac{\mathbb{E}[|M_n|]}{\alpha} \tag{1.9}$$

De (1.8) y (1.9) tenemos la desigualdad deseada

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_n|]}{\alpha}.$$

□

Será de mucha ayuda mostrar un sencillo pero valioso resultado que nos permitirá verificar, más adelante, nuestra segunda desigualdad de martingalas.

Lema 1.6. *Sean $p \geq 1$ y $X \geq 0$ una variable aleatoria, tal que $\mathbb{E}[X^p] < \infty$. Entonces*

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(X > \lambda)d\lambda.$$

Demostración. De las propiedades de la esperanza tenemos que

$$\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(X > \lambda)d\lambda = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{E}[1_{\{X>\lambda\}}]d\lambda = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\int_\Omega 1_{\{X>\lambda\}}d\mathbb{P}d\lambda.$$

Del teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\int_\Omega 1_{\{X>\lambda\}}d\mathbb{P}d\lambda &= \int_0^\infty\int_\Omega p\lambda^{p-1}1_{\{X>\lambda\}}d\mathbb{P}d\lambda \\
&= \int_\Omega\int_0^\infty p\lambda^{p-1}1_{\{X>\lambda\}}d\lambda d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega\int_0^X p\lambda^{p-1}d\lambda d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^X p\lambda^{p-1}d\lambda\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(X > \lambda)d\lambda = \mathbb{E}[X^p].$$

□

Teorema 1.7 (Desigualdad de Doob en L^p para Martingalas)**.** *Sea $M = (M_n, n \geq 0)$ una martingala o una submartingala positiva. Sea $1 < p < \infty$, entonces existe una constante c que depende solamente de p tal que*

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^p] \leq c\mathbb{E}[|M_n|^p].$$

Demostración. Consideremos el caso en que M es una martingala. Como $\phi(x) = |x|$ es una función convexa entonces por la Proposición 1.6 tenemos que $|M|$ es una submartingala. Consideremos además los siguiente procesos para una n fija,

$$\begin{aligned} X_n &= M_n 1_{\{|M_n| > \frac{\alpha}{2}\}}, \\ Z_j &= \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_j], \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Notemos que para un valor n conocido se tiene que $\mathbb{E}[Z_m \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_m] \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_k] = Z_k$ para $k \leq m \leq n$, por lo tanto Z_j, $0 \leq j \leq n$ es una martingala. Además

$$\begin{aligned} |M_j| &= |\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_j]| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[M_n 1_{\{|M_n > \frac{\alpha}{2}|\}} + M_n 1_{\{|M_n \leq \frac{\alpha}{2}|\}} \mid \mathcal{F}_j\right]\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[X_n + M_n 1_{\{|M_n \leq \frac{\alpha}{2}|\}} \mid \mathcal{F}_j\right]\right| \\ &\leq |\mathbb{E}\left[X_n \mid \mathcal{F}_j\right]| + \frac{\alpha}{2} \\ &= |Z_j| + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Entonces de (1.10) tenemos,

$$M_n^* = \sup_{j \leq n} |M_j| \leq \sup_{j \leq n} |Z_j| + \frac{\alpha}{2} = Z_n^* + \frac{\alpha}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(M_n^* > \alpha) \leq \mathbb{P}(Z_n^* + \frac{\alpha}{2} > \alpha) = \mathbb{P}(Z_n^* > \frac{\alpha}{2}). \tag{1.11}$$

Aplicando la Primera Desigualdad de Doob (Teorema 1.5) a (1.11)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n^* > \alpha) &\leq \mathbb{P}(Z_n^* > \frac{\alpha}{2}) \\ &\leq \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}[|Z_n|] \leq \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}[|X_n|] \text{ (Jensen)} \\ &= \frac{2}{\alpha}\mathbb{E}[|M_n| 1_{\{|M_n| > \frac{\alpha}{2}\}}]. \end{aligned}$$

Con este último resultado podemos aplicar a la igualdad del Lema 1.6 y verificar la desigualdad deseada

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_n^*)^p] &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathbb{P}(M_n^* > \lambda)d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[|M_n| 1_{\{|M_n| > \frac{\lambda}{2}\}}]d\lambda. \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Fubini y realizando los cálculos de la integral obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty 2p\lambda^{p-2}\mathbb{E}[|M_n|1_{\{2|M_n|>\lambda\}}]d\lambda \\
&= \mathbb{E}\left[|M_n|\int_0^{2|Mn|} 2p\lambda^{p-2}d\lambda\right] \\
&= \frac{2^p p}{p-1}\mathbb{E}[|M_n|^p].
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\mathbb{E}[(M_n^*)^p] \leq c\mathbb{E}[|M_n|^p], \quad \text{con} \quad c \leq \frac{2^p p}{p-1}.$$

Para el caso en que M es una submartingala positiva se procede con la misma demostración, con el conocimiento de que $|M|$ es una submartingala (Teorema 1.5). □

Con respecto al resultado anterior, hemos mostrado la relación existente entre la constante c y el valor p, sin embargo, se puede verificar que $c^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$ y entonces podemos escribir la desigualdad en términos de normas L^p.

Teorema 1.8 (Desigualdad de Doob en L^p para Martingalas)**.** *Sea* $M = (M_n, n \geq 0)$ *una martingala o una submartingala positiva. Sea* $1 < p < \infty$. *Entonces*

$$||M_n^*||_p \leq q||M_n||_p.$$

donde $||M_n||_p = (\mathbb{E}[|M_n|^p])^{\frac{1}{p}}$ *y* $q = \frac{p}{p-1}$.

Esta desigualdad nos será de gran ayuda a la hora de demostrar uno de los resultados más importantes en teoría de martingalas, el Teorema de Convergencia en Martingalas. Pero antes de demostrar el Teorema 1.8 verifiquemos los siguientes resultados.

Lema 1.9. *Sea* $X = (X_n, n \geq 0)$ *una submartingala y* $Y = (Y_n, n \geq 0)$ *una supermartingala. Entonces para todo* $\lambda > 0$

$$\lambda\mathbb{P}(X_n^* > \lambda) \leq \mathbb{E}[X_n^+ 1_{\{X_n^*>\lambda\}}], \tag{1.12}$$

$$\lambda\mathbb{P}(Y_n^* > \lambda) \leq \mathbb{E}[Y_0] - \mathbb{E}[Y_n 1_{\{Y_n^*\leq\lambda\}}]. \tag{1.13}$$

Demostración. Si definimos a τ de la siguiente manera

$$\tau = \text{ínf}\{k \leq n \mid X_k \geq \lambda\}$$

Con $\tau = n$, si $X_n^* > \lambda$ Entonces tenemos que, como X es una martingala

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}[X_0^+] &\leq \mathbb{E}[X_\tau^+] \\
&= \mathbb{E}[X_\tau^+ 1_{\{X_n^*\leq\lambda\}}] + \mathbb{E}[X_\tau^+ 1_{\{X_n^*>\lambda\}}] \\
&\leq \mathbb{E}[\lambda 1_{\{X_n^*\leq\lambda\}}] + \mathbb{E}[X_\tau^+ 1_{\{X_n^*>\lambda\}}] \\
&= \lambda\mathbb{P}(X_n^* \leq \lambda) + \mathbb{E}[X_n^+ 1_{\{X_n^*>\lambda\}}] \\
&= \lambda(1 - \mathbb{P}(X_n^* > \lambda)) + \mathbb{E}[X_n^+ 1_{\{X_n^*>\lambda\}}] \\
&\leq -\lambda\mathbb{P}(X_n^* > \lambda) + \mathbb{E}[X_n^+ 1_{\{X_n^*>\lambda\}}].
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda \mathbb{P}(X_n^* > \lambda) \leq \mathbb{E}[X_n^+ 1_{\{X_n^* > \lambda\}}]$.

Consideremos ahora el caso donde Y es una supermartingala. Definamos a τ como $\inf\{k \leq n \mid X_k \geq \lambda\}$, donde $\tau = n$ si $X_n^* < \lambda$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_0] &\geq \mathbb{E}[Y_\tau] \\
&= \mathbb{E}[Y_\tau 1_{\{Y_n^* > \lambda\}}] + \mathbb{E}[Y_\tau 1_{\{Y_n^* \leq \lambda\}}] \\
&\geq \mathbb{E}[\lambda 1_{\{Y_n^* > \lambda\}}] + \mathbb{E}[Y_\tau 1_{\{Y_n^* \leq \lambda\}}] \\
&= \lambda \mathbb{P}(Y_n^* > \lambda) + \mathbb{E}[Y_n 1_{\{Y_n^* \leq \lambda\}}].
\end{aligned}$$

□

Con el lema anterior podemos verificar el Teorema 1.8

Demostración. Verifiquemos el caso para una submartingala positiva. Supongamos en primer lugar que

$$||M_n^*||_p = \mathbb{E}[|M_n^*|^{\frac{1}{p}}]^p < \infty. \tag{1.14}$$

Del Lema 1.6 tenemos que para toda $p > 1$

$$\mathbb{E}[M_n^*]^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mathbb{P}(M_n^n > \lambda) d\lambda.$$

Del Lema 1.9 y como M es una submartingala positiva entonces

$$\mathbb{E}[M_n^*]^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mathbb{P}(M_n^n > \lambda) d\lambda \leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left(\frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* > \lambda\}}] \right) d\lambda.$$

Utilizando el teorema de Fubini obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n^*]^p &\leq \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \left(\frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* > \lambda\}}] \right) d\lambda \\
&= p \int_0^\infty \lambda^{p-2} \mathbb{E}[M_n 1_{\{M_n^* > \lambda\}}] d\lambda \\
&= p\ \mathbb{E}\left[M_n \int_0^{M_n^*} \lambda^{p-2} d\lambda \right] \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}].
\end{aligned} \tag{1.15}$$

De la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n^*]^p &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[M_n (M_n^*)^{p-1}] \\
&\leq q||M_n||_p ||(M_n^*)^{p-1}||_q \\
&= q||M_n||_p \mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[M_n^*]^p}{\mathbb{E}[(M_n^*)^p]^{\frac{1}{q}}} &\leq q||M_n||_p, \\
||M_n^*||_p &\leq q||M_n||_p.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si (1.14) no se cumple, entonces en (1.15) consideramos $(M_n^* \wedge C)$ en lugar de M_n^* con C como una constante, entonces

$$\mathbb{E}[M_n^* \wedge C]^p \leq q\mathbb{E}[M_n(M_n^* \wedge C)^{p-1}] \leq q||M_n||_p\mathbb{E}[(M_n^* \wedge C)^p]^{\frac{1}{q}}.$$

Entonces, del hecho de que $\mathbb{E}[M_n^* \wedge C]^p \leq C^p < \infty$, tenemos

$$\mathbb{E}[M_n^* \wedge c]^p \leq q^p||M_n||_p^n.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}[M_n^*]^p = \lim_{C \to \infty} \mathbb{E}[M_n^* \wedge C]^p \leq q^p\mathbb{E}[M_n]^p$$

Por último, el caso en que M es una martingala se reduce a la demostración anterior ya que $|M|^p$ con $p \geq 1$ es una submartingala positiva por la Proposición 1.6. □

Ahora introducimos el concepto de *cruces ascendentes*, donde utilizaremos la notación de Doob. Sea $(X_n, n \geq 0)$ una submartingala, y sea $a < b$. El número de cruces ascendentes de un intervalo $[a, b]$ es el número de veces en que el proceso comienza por debajo del valor de a y después de algunos pasos salta a algún valor por encima de b. Está noción puede ser expresada más adecuadamente usando tiempos de paro. Definamos

$$\tau_0 = 0,$$

inductivamente para $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \min\{k > \tau_0 : X_k \leq a\}, & \tau_1 &= \min\{k > \eta_1 : b \leq X_k\} \\ \eta_2 &= \min\{k > \tau_1 : X_k \leq a\}, & \tau_2 &= \min\{k > \eta_2 : b \leq X_k\} \\ &\vdots \\ \eta_{j+1} &= \min\{k > \tau_j : X_k \leq a\}, & \tau_{j+1} &= \min\{k > \eta_{j+1} : b \leq X_k\} \end{aligned}$$

Bajo las siguientes condiciones de que el mínimo de un conjunto vacío es $+\infty$ y el máximo es 0, entonces podemos definir

$$U_n^{[a,b]} = \max\{j : \tau_j \leq n\}, \tag{1.16}$$

y $U_n^{[a,b]}$ es el número de cruces ascendentes de $[a, b]$ antes del tiempo n.

Teorema 1.10 (Desigualdad de Cruces Ascendentes de Doob)**.** *Sea* $(X_n, n \geq 0)$ *una submartingala, sea* $a < b$ *y sea* $U_n^{[a,b]}$ *el número de cruces ascendentes de* $[a, b]$ *antes del tiempo* n *definida en (1.16). Entonces*

$$\mathbb{E}[U_n^{[a,b]}] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_n - a)^+].$$

donde $(X_n - a)^+ = \max(X_n - a, 0)$

Demostración. Consideremos al proceso $Y_n = (X_n - a)^+$. Por su construcción, $\eta_{n+1} > n$, notemos que podemos descomponer a Y_n como

$$Y_n = Y_{\eta_1 \wedge n} + \sum_{i=1}^{n}(Y_{\tau_i \wedge n} - Y_{\eta_i \wedge n}) + \sum_{i=1}^{n}(Y_{\eta_{i+1} \wedge n} - Y_{\tau_i \wedge n}). \tag{1.17}$$

Recordemos que cada cruce ascendente de X_n entre los tiempos 0 y n corresponde a un entero i tal que $\eta_i < \tau_i \leq n$. Por definición de Y_n tenemos que $Y_{\eta_i} = 0$ y además $Y_{\tau_i \wedge n} = Y_{\tau_i} \geq b - a$.

Además por definición de los tiempos de paro η_i y τ_i tenemos que para toda i, $Y_{\tau_i \wedge n} - Y_{\eta_i \wedge n} \geq 0$, entonces

$$(b-a)U_n^{[a,b]} \leq \sum_{i=1}^{n} (Y_{\tau_i \wedge n} - Y_{\eta_i \wedge n}). \tag{1.18}$$

Realizando el correspondiente despeje en (1.17) y sustituyendo en (1.18) obtenemos

$$(b-a)U_n^{[a,b]} \leq Y_n - Y_{\eta_1 \wedge n} - \sum_{i=1}^{n} (Y_{\eta_{i+1} \wedge n} - Y_{\tau_i \wedge n}).$$

Y como $Y_{\eta_1 \wedge n} \geq 0$, entonces

$$(b-a)U_n^{[a,b]} \leq Y_n - \sum_{i=1}^{n} (Y_{\eta_{i+1} \wedge n} - Y_{\tau_i \wedge n}). \tag{1.19}$$

Tomando la esperanza en ambos lados de (1.19) y con el hecho de que η_{i+1} y τ_i están acotadas por n entonces y $(Y_n, n \geq 0)$ es una submartingala ya que $\phi(x) = (x-a)^+$ es una función convexa entonces, y además $Y_{\eta_{i+1}} \geq Y_{\tau_i}$, es decir, $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_{\eta_{i+1} \wedge n} - Y_{\tau_i \wedge n})\right] \geq 0$

$$(b-a)\mathbb{E}[U_n^{[a,b]}] \leq \mathbb{E}[Y_n] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_{\eta_{i+1} \wedge n} - Y_{\tau_i \wedge n})\right] \leq \mathbb{E}[Y_n].$$

□

1.4. Teoremas de Convergencia de Martingalas

En esta última sección presentamos resultados respecto a la convergencia de martingalas, así como el concepto de *uniformemente integrables* para una colección de variables aleatorias, el cual tiene una relación fuerte con la convergencia de martingalas. Concluimos el primer capítulo con la prueba del Teorema del Límite Central de Martingalas análogo al conocido Teorema del Límite Central, pero mostrando las bondades de trabajar con las propiedades de las martingalas.

Teorema 1.11 (Teorema de Convergencia de Martingalas)**.** *Sea $(X_n, n \geq 0)$ una submartingala tal que $\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] < \infty$. Entonces $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ existe c.s. (y es finita c.s.). Más aún, $X \in L^1$.*

Demostración. Sea $U_n^{[a,b]}$ es número de cruces ascendentes de $[a,b]$ antes del tiempo n, como se definió en (1.16). Por su definición $U_n^{[a,b]}$ es no decreciente y acotado, por lo tanto $U(a,b) = \lim_{n\to\infty} U_n^{[a,b]}$ existe. Por el Teorema de Convergencia Monótona

$$\mathbb{E}[U(a,b)] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} U_n^{[a,b]}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n^{[a,b]}].$$

Por el Teorema 1.10 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(a,b)] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n^{[a,b]}] \\ &\le \frac{1}{b-a} \sup_n \mathbb{E}[(X_n - a)^+].\end{aligned}$$

Sabemos además, que para todo real a, x se tiene $(x-a)^+ \le x^+ + |a|$ entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(a,b)] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n^{[a,b]}] \\ &\le \frac{1}{b-a} \sup_n \mathbb{E}[(X_n - a)^+] \\ &\le \frac{1}{b-a}\left(\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] + |a|\right) \le \frac{c}{b-a} < \infty.\end{aligned}$$

Donde c es alguna constante y es finita por las condiciones estipuladas. Más aún, como $\mathbb{E}[U(a,b)] < \infty$ entonces $\mathbb{P}(U(a,b) < \infty) = 1$, es decir, el proceso X_n realiza un número finito de cruces ascendentes casi seguramente.

Veamos que el conjunto de puntos muestrales donde el límite de X_n no existe tiene probabilidad cero. Para esto, consideremos para todo $a < b$

$$\Lambda_{a,b} = \left\{\omega : \liminf_n X_n(\omega) \le a < b \le \limsup_n X_n(\omega)\right\}$$

Como X_n realiza un número finito de cruces ascendentes entonces $\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$, además si $\Lambda = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \Lambda_{a,b}$ entonces $\mathbb{P}(\Lambda) = 0$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\Lambda &= \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \Lambda_{a,b} \\ &= \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}} \left\{\omega : \liminf_n X_n(\omega) \le a < b \le \limsup_n X_n(\omega)\right\} \\ &= \left\{\omega : \liminf_n X_n(\omega) < \limsup_n X_n(\omega)\right\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}(\liminf_n X_n < \limsup_n X_n) = 0$. Entonces $\mathbb{P}(\liminf_n X_n = \limsup_n X_n\}) = 1$ concluyendo que $\lim_n X_n$ existe casi seguramente.

Veamos que $X = \lim_n X_n \in L^1$. Como X_n es un submartingala entonces tenemos que $\mathbb{E}[X_0] \le \mathbb{E}[X_n]$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n|] &= \mathbb{E}[X_n^+] + \mathbb{E}[X_n^-] \\ &= 2\mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_n] \\ &\le 2\mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_0]. \qquad (1.20)\end{aligned}$$

Entonces usando el Lema de Fatou [4, p. 205] y nuestra desigualdad (1.20), además de que por hipótesis $\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[\lim_n |X_n|\right] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] \le 2\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] - \mathbb{E}[X_0] < \infty,$$

lo que implica que X_n converge a un límite X finito y además $\mathbb{E}[X] < \infty$, es decir $X \in L^1$. □

Corolario 1.12. *Si X_n es una supermartingala no negativa, o una martingala acotada por arriba o acotada por debajo, entonces* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *existe c.s., y* $X \in L^1$.

Demostración. Si X_n es una supermartingala no negativa tenemos que $(-X_n, n \geq 0)$ es una submartingala acotada por arriba por 0 y se aplica el Teorema 1.11.

Si $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala acotada por debajo, entonces $X_n \geq -c$ casi seguramente, para toda n y alguna constante $c > 0$. Definamos $Y_n = X_n + c$, entonces, Y_n es una martingala no negativa y resulta ser una supermartingala no negativa, por lo que tenemos el caso anterior, donde aplicamos de nuevo el Teorema 1.11.

Si $(X_n, n \geq 0)$ es una martingala acotada por arriba, se tiene que $(-X_n, n \geq 0)$ es una martingala acotada por debajo. □

En general la convergencia L^1 del proceso X_n a X no se da. Para conseguir ese tipo de convergencia necesitamos hipótesis más fuertes, por lo que debemos introducir una nueva definición.

Definición 1.5. Un conjunto $\mathcal{H}$ de L^1 se dice que es una colección de variables aleatorias uniformemente integrables si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[|X| 1_{\{|X|\geq c\}}] = 0.$$

Con los siguientes resultados podemos asegurar la condición de integrabilidad a partir de dos condiciones.

Proposición 1.7. *Sea $\mathcal{H}$ una clase de variables aleatorias*

1. *Si* $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ *para alguna* $p > 1$, *entonces* $\mathcal{H}$ *es uniformemente integrable.*

2. *Si existe una variable aleatoria Y tal que $|X| < Y$ casi seguramente para toda $X \in \mathcal{H}$ y $\mathbb{E}[Y] < \infty$, entonces $\mathcal{H}$ es uniformemente integrable.*

Demostración. 1. Como $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, consideremos a K como la constante tal que $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[|X|^p] < K < \infty$. Si $0 < c \leq x$, entonces como $p > 1$ se tiene que $x^{1-p} \leq c^{1-p}$, si multiplicamos por x^p obtenemos $x \leq c^{1-p} x^p$, por lo tanto

$$|X| 1_{\{|X|>c\}} \leq c^{1-p} |X|^p 1_{\{|X|>c\}}.$$

Y entonces,

$$\mathbb{E}\left[|X| 1_{\{|X|>c\}}\right] \leq c^{1-p} \mathbb{E}\left[|X|^p 1_{\{|X|>c\}}\right] \leq \frac{k}{c^{p-1}},$$

si tomamos el supremo sobre toda $X \in \mathcal{H}$ y hacemos que $n \to \infty$, tenemos que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}\left[|X| 1_{\{|X|>c\}}\right] \leq \lim_{c\to\infty} \frac{k}{c^{p-1}} = 0.$$

2. Como $|X| \leq Y$ casi seguramente, para toda $X \in \mathcal{H}$, se tiene
$$|X| 1_{\{|X|>c\}} \leq Y 1_{\{Y>c\}}.$$
Tomando el supremo sobre toda $X \in \mathcal{H}$ y el límite en ambos lados de la desigualdad tenemos
$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}\left[|X| 1_{\{|X|>c\}}\right] \leq \lim_{c\to\infty} \mathbb{E}\left[Y 1_{\{Y>c\}}\right].$$
Por otro lado, tenemos que $\lim_{c\to\infty} Y 1_{\{Y>c\}} = 0$ c.s. y por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue obtenemos
$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}\left[|X| 1_{\{|X|>c\}}\right] \leq \lim_{c\to\infty} \mathbb{E}\left[Y 1_{\{Y>c\}}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{c\to\infty} Y 1_{\{Y>c\}}\right] = 0.$$
□

El siguiente resultado es una versión más fuerte del Teorema 1.11 para el caso de martingalas.

Teorema 1.13. *1. Sea $(M_n, n \geq 0)$ una martingala y supongamos que $(M_n, n \geq 0)$ es una colección de variables aleatorias uniformemente integrables. Entonces*
$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty \textit{ existe c.s.}$$
M_∞ está en L^1, y M_n converge a M_∞ en L^1. Más aún, la propiedad de martingala se mantiene para M_∞, es decir, $M_n = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n]$.

2. Sea $Y \in L^1$ y considere la martingala $M_n = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n]$. Entonces $(M_n, n \geq 1)$ es una colección de variables aleatorias uniformemente integrables.

Demostración. 1. De la definición de uniformemente integrable para variables aleatorias, tenemos que, para toda $\epsilon > 0$ existe una constante $c > 0$ tal que $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}[1_{\{|X|>c\}}|X|] \leq \epsilon$. Entonces
$$\mathbb{E}[|M_n|] = \mathbb{E}\left[|M_n| 1_{\{|M_n|>c\}}\right] + \mathbb{E}\left[|M_n| 1_{\{|M_n|\leq c\}}\right] \leq \epsilon + c.$$
Por lo tanto $(M_n)_{n\geq 0}$ está en acotado en L^1, es por esta razón que se tiene $\sup_n \mathbb{E}[M_n^+] < \infty$. Utilizando el Teorema 1.11
$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_\infty \text{ existe c.s. y } M_\infty \text{ está en } L^1.$$
Para mostrar la convergencia del proceso a la variables aleatoria M_∞ en L^1 veamos que para una constante N suficientemente grande $\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] < \epsilon$ para toda $n \geq N$.

Recordemos que una función cumple la condición de Lipschitz si [2, p. 169] dados dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y) existe una constante K tal que
$$\frac{d_Y(f(x) - f(y))}{d_X(x - y)} \leq K.$$

Si definimos

$$f_c(x) = \begin{cases} c, & \text{si } c > x; \\ x, & \text{si } |x| \leq c; \\ -c, & \text{si } x < -c. \end{cases}$$

Tenemos que $f_c(x)$ es Lipschitz. Por la integrabilidad uniforme sabemos que existe c suficientemente grande tal que para cualquier $\epsilon > 0$ dada:

$$\mathbb{E}[|f_c(M_n) - M_n|] < \frac{\epsilon}{3}, \text{ para toda } n; \tag{1.21}$$

$$\mathbb{E}[|f_c(M_\infty) - M_\infty|] < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.22}$$

Como $\lim_n M_n = M_\infty$ y por la condición de f_c tenemos que $\lim_n f_c(M_n) = f_c(M_\infty)$. Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue [4, p. 52] tenemos que para cualquier $n \geq N$, para N suficientemente grande

$$\mathbb{E}[|f_c(M_n) - f_c(M_\infty)|] < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.23}$$

Combinando los resultados (1.21), (1.22) y (1.23) obtenemos la desigualdad requerida para asegurar que $M_n \xrightarrow{L^1} M_\infty$. Para demostrar que $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ c.s. veamos que para cualquier conjunto $\mathcal{F}_n$-medible se tiene $\mathbb{E}[M_n 1_\Lambda] = \mathbb{E}[M_\infty 1_\Lambda]$. Consideremos $\Lambda \in \mathcal{F}_m$ y $n \geq m$. Entonces por la propiedad de martingala tenemos que

$$\mathbb{E}[M_n 1_\Lambda] = \mathbb{E}[M_m 1_\Lambda].$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[M_m 1_\Lambda] - \mathbb{E}[M_\infty 1_\Lambda]| &\leq |\mathbb{E}[(M_m - M_\infty)1_\Lambda]| \\ &\leq \mathbb{E}[|(M_m - M_\infty)1_\Lambda|] \\ &\leq \mathbb{E}[|M_m - M_\infty|], \end{aligned}$$

Donde $\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|] \to 0$ cuando $n \to 0$, por lo tanto, $\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_m] = M_m$ c.s.

2. Sabemos $(M_n, n \geq 0)$ es una martingala. Para una variable $Y \in L^1$, con $c > 0$ tenemos que

$$M_n 1_{\{|M_n > c|\}} = \mathbb{E}\left[Y 1_{\{|M_n > c|\}} \mid \mathcal{F}_n\right],$$

ya que el evento $\{|M_n| > c\}$ pertenece a $\mathcal{F}_n$. Por lo tanto, para cualquier constante $d > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|M_n| 1_{\{|M_n > c|\}}\right] &= \mathbb{E}\left[|Y| 1_{\{|M_n > c|\}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|Y| 1_{\{|Y > d|\}}\right] + d\mathbb{P}(|M_n| > c) \\ &\leq \mathbb{E}\left[|Y| 1_{\{|Y > d|\}}\right] + \frac{d}{c}\mathbb{E}[|M_n|]. \end{aligned}$$

Si tomamos un ϵ arbitrario y escogemos a la constante d tal que

$$\mathbb{E}\left[|Y|1_{\{|Y>d|\}}\right] < \frac{\epsilon}{2}.$$

Y c como la constante tal que

$$\frac{d}{c}\mathbb{E}[|M_n|] < \frac{\epsilon}{2},$$

entonces tenemos que $\mathbb{E}[|M_n|1_{\{|M_n>c|\}}] < \epsilon$ para todo n.

$\square$

La propiedad de martingala estudiada hasta el momento contempla números enteros positivos, pero también podemos considerar el conjunto de índices $-\mathbb{N}$: los enteros negativos. Una martingala reversible es una sucesión $(X_{-n}, n \in \mathbb{N})$ de variables aleatorias integrables si, X_{-n} es $\mathcal{F}_{-n}$ medible y satisface

$$\mathbb{E}[X_{-n} \mid \mathcal{F}_{-m}] = M_{-m}, \quad \text{c.s} \tag{1.24}$$

donde $0 \leq n < m$.

Teorema 1.14 (Teorema de Convergencia de Martingalas Reversibles)**.** *Sea $(X_{-n}, \mathcal{F}_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala reversible, y sea $\mathcal{F}_{-\infty} = \cap_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{-n}$. Entonces la sequencia (X_{-n}) converge c.s. y en L^1 al límite X c.s., cuando $n \to +\infty$ (en particular X es c.s. finita e integrable).*

Demostración. Sea $U_{-n}^{[a,b]}$ es el número de cruces ascendentes de $(X_{-n}, n \geq 0)$ de $[a, b]$ entre el tiempo $-n$ y 1. Entonces $U_{-n}^{[a,b]}$ es creciente mientras n crece, además consideremos $U^-(a, b) = \operatorname{lím}_n U_{-n}^{[a,b]}$, el cual existe por ser $U_{-n}^{[a,b]}$ una sucesión creciente y acotada. Por el Teorema de Convergencia Monótona

$$\mathbb{E}[U^-(a,b)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_{-n}^{[a,b]}] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(-X_0 - a)^+] < \infty.$$

Entonces $\mathbb{P}(U^-(a, b) < \infty) = 1$. El mismo argumento de los cruces ascendentes que se utilizó en la prueba del Teorema 1.11 implica que el $\operatorname{lím}_{n\to\infty} X_{-n} = X$ existe c.s.

Sea $\phi(x) = x^+ = (x \vee 0)$, la cual es una función convexa y creciente, entonces $\phi(X_{-n})$ es integrable para toda n. De la desigualdad de Jensen y (1.24) se infiere que

$$X_{-n}^+ \leq \mathbb{E}[X_0^+ \mid \mathcal{F}_{-n}].$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X_{-n}^+] \leq \mathbb{E}[X_0^+].$$

Del Lema de Fatou y por el hecho de que $X_{-n}^+ \geq 1$ y $X_{-n}^+ \to X^+$ c.s. se tiene

$$\mathbb{E}[X^+] \leq \liminf_n \mathbb{E}[X_{-n}^+] \leq \mathbb{E}[X_0^+] < \infty.$$

Implicando que $X^+ \in L^1$ y por el mismo argumento aplicado a la martingala $(-X_n)$ se muestra que $X^- \in L^1$, entonces $X \in L^1$.

La convergencia en L^1 es una implicación del Teorema 1.11, pues se demostró que, si $X_{-n} \to X$ c.s., si $X \in L^1$ y además (X_{-n}) es uniformemente integrable, entonces $X_{-n} \to X$ en L^1. □

Los Teoremas de Convergencia de Martingalas probados hasta ahora (Teoremas 1.11 y 1.14) son resultados de convergencia fuerte: todas las variables aleatorias están definidas en el mismo espacio de probabilidad y convergen fuertemente a variables aleatorias del mismo espacio, casi seguramente y en L^1.

Es posible desarrollar un resultado de convergencia débil, para una clase de martingalas que no satisfacen las condiciones mencionadas en el Teorema 1.11. El límite resulta una distribución normal y tal teorema es conocido como *Teorema del Límite Central para Martingalas.*

Teorema 1.15 (Teorema del Límite Central para Martingalas)**.** *Sea* $(X_n, n \geq 1)$ *una sucesión de variables aleatorias que satisface*

1. $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0.$
2. $\mathbb{E}[X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 1.$
3. $\mathbb{E}[|X_n|^3 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq K < \infty.$

Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *con* $S_0 = 0$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n = Z$, *donde* Z *es una variable aleatoria con distribución* $N(0,1)$, *además la convergencia es en distribución.*

Demostración. Para verificar la convergencia en distribución de la proposición haremos uso de las funciones características. Para $u \in \mathbb{R}$, recordemos que $\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}]$ es la función característica de X. Definamos la siguiente función como

$$\varphi_{n,j}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}X_j} \middle| \mathcal{F}_{j-1} \right].$$

Por el Teorema de Taylor [1, p. 358] tenemos

$$e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}X_j} = 1 + iu\frac{1}{\sqrt{n}}X_j - \frac{u^2}{2n}X_j^2 - \frac{iu^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\bar{X}_j^3, \tag{1.25}$$

donde $\bar{X}_j$ es un valor (aleatorio) que se encuentra entre 1 y X_j. Al tomar la esperanza condicional de ambos lados de (1.25) obtenemos

$$\varphi_{n,j}(u) = 1 + iu\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] - \frac{u^2}{2n}\mathbb{E}[X_j^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}] - \frac{iu^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}[\bar{X}_j^3 \mid \mathcal{F}_{j-1}].$$

Haciendo uso de las hipótesis (1) y (2) tenemos,

$$\varphi_{n,j}(u) = 1 - \frac{u^2}{2n} - \frac{iu^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}[\bar{X}_j^3 \mid \mathcal{F}_{j-1}]. \tag{1.26}$$

Además como $|\bar{X}_j| \leq |X_j|$ y $S_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$, para $1 \leq p \leq n$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_p}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{p-1}+X_p)}\right] \qquad (1.27)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}X_p}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}X_p}\middle|\mathcal{F}_{p-1}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\varphi_{n,p}(u)\right].
\end{aligned}
$$

Usando (1.27) y (1.26) tenemos

$$
\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_p}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\left[1 - \frac{u^2}{2n} - \frac{iu^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}[\bar{X}_j^3 \mid \mathcal{F}_{j-1}]\right]\right].
$$

Desarrollando la ecuación,

$$
\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_p} - \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\frac{iu^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}[\bar{X}_j^3 \mid \mathcal{F}_{j-1}]\right]. \tag{1.28}
$$

Tomando el módulo en ambos lados de (1.28) y usando la hipótesis (3)

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_p} - \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\right]\right| &\leq \mathbb{E}\left[|e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p1}}|\frac{|u|^3}{6n^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}[|\bar{X}_j^3| \mid \mathcal{F}_{j-1}]\right]\\
&\leq K\frac{|u|^3}{6n^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Si fijamos el valor de $u \in \mathbb{R}$ y hacemos tender a $n \to \infty$, eventualmente $n \geq u^2/2$ y es por esto que para una n suficientemente grande tenemos que $0 \leq 1 - \frac{u^2}{2} \leq 1$. Si multiplicamos el lado izquierdo de desigualdad anterior por $(1-u^2/2)^{n-p}$ para una n suficientemente grande

$$
\left|\left(1 - \frac{u^2}{2}\right)^{n-p}\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_p} - \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)^{n-p+1}\right]\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\right]\right| \leq K\frac{|u|^3}{6n^{\frac{3}{2}}}.
$$

Para finalizar, al usar la propiedad telescópica de sumas (finitas) observamos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_n}\right] - \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)^n\\
&= \sum_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)^{n-p}\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_p}\right] - \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)^{n-(p-1)}\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_{p-1}}\right].
\end{aligned}
$$

Usando la desigualdad del triángulo y de la última desigualdad tenemos que (siempre para $n \geq 2/u^2$)

$$
\left|\mathbb{E}\left[e^{iu\frac{1}{\sqrt{n}}S_n}\right] - \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)^n\right| \leq nK\frac{|u|^3}{6n^{\frac{3}{2}}} = K\frac{|u|^3}{6\sqrt{n}}. \tag{1.29}
$$

Como el lado derecho de (1.29) tiende a 0 y además

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{u^2}{2n}\right)^n = e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{1.30}$$

Usando la regla de L'Hôpital [2, p. 215], tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{iu\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right] = e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{1.31}$$

Por el Teorema de Continuidad de Lévy [4, p. 166], el cual nos permite relacionar la convergencia puntal (de las funciones características) con la convergencia en distribución, tenemos que $S_n/\sqrt{n}$ converge en distribución Z, donde la función característica de Z es $e^{-(u^2)/2}$, la cual es una función característica de una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. $\square$

La proposición anterior se establece de forma similar en el Teorema del Límite Central [4, p. 181] para variables independientes e idénticamente distribuidas X_n, con sumas parciales S_n. La condición (1) implica que (S_n) es una martingala, pues $X_n = S_n - S_{n-1}$.

Capítulo 2

Problema de Paro Óptimo

El propósito principal del presente capítulo es mostrar algunos resultados básicos de la teoría general de paro óptimo. Se estudiarán dos enfoques para resolver el problema de paro óptimo, una aproximación con martingalas y otra con cadenas de Markov, ambos a tiempo discreto.

2.1. Enfoque con Martingalas

Interpretaremos al proceso G_n como la ganancia obtenida si la observación de G es parada al tiempo n. Supongamos que nuestro proceso es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$ en el sentido de que, para toda n, la observación G_n es $\mathcal{F}_n$-medible.

Considere a la σ-álgebra $\mathcal{F}_n$ como la información del proceso G, disponible a tiempo n. Si se desea tomar una decisión con respecto al proceso, en este caso, detenerse o no; esta resolución deberá estar basada solamente en $\mathcal{F}_n$, es decir, no es posible realizar suposición alguna con respecto a G a un tiempo mayor a n.

Definamos nuestro problema de una manera más formal. Sea una sucesión adaptada de variables aleatorias no negativas $G = (G_n, n \geq 1)$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, \mathbb{P})$. Sea $\mathcal{M}_\tau$ el conjunto de tiempos de paro finitos casi seguramente, los cuales son mayores a τ (el cual puede ser un tiempo de paro). Estamos interesados en resolver el siguiente problema de paro óptimo

$$V_n = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau]. \tag{2.1}$$

Notemos que el problema de paro óptimo involucra dos tareas: mostrar el tiempo de paro que optimiza la esperanza (si es que existe) y calcular el valor óptimo para V.

Para asegurar la existencia de $\mathbb{E}[G_\tau]$ en (2.1) necesitamos agregar un supuesto adicional

$$\mathbb{E}\left[\sup_n G_n\right] < \infty. \tag{2.2}$$

Este supuesto nos asegura, uniformemente, que todas las esperanzas son finitas.

Parece razonable pensar que la decisión de detenerse debería estar basada en el valor esperado de los retornos observados hasta el momento de la decisión. Supongamos que no hemos detenido el proceso al momento n, entonces, deberíamos observar todas las cantidades $\mathbb{E}[G_\tau]$ para aquellos tiempos de paro $\tau \in \mathcal{M}_n$, los cuales pueden ser vistos como los potenciales retornos al no habernos detenido a tiempo n, y compararlos con el retorno G_n el cual representa la ganancia que obtendríamos si nos detenemos en ese momento.

Sería deseable poder observar el valor de $\sup_{\tau \in \mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n]$, sin embargo, una dificultad surge al tomar el supremo de las esperanzas condicionales en (2.2) sobre un conjunto no numerable de valores τ en $\mathcal{M}_n$, el valor $\sup_{\tau \in \mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n]$ no está definido como una función medible pues cada objeto en el supremo es una variable aleatoria.

2.1.1. Supremo Esencial

Para poder resolver este problema, es necesario introducir el concepto de supremo esencial. El siguiente teorema expresa la definición y funcionalidad del concepto del supremo esencial de variables aleatorias.

Teorema 2.1 (Supremo Esencial de Variables Aleatorias). *Sea $(Z_\alpha : \alpha \in I)$ una colección de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde I es un conjunto arbitrario de índices. Entonces existe un conjunto numerable $J \subset I$ tal que la variable aleatoria $Z^* : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definida por*

$$Z^* = \sup_{\alpha \in J} Z_\alpha,$$

satisface lo siguiente

1. $\mathbb{P}(Z_\alpha \leq Z^*) = 1, \quad \forall \alpha \in I,$
2. *Si $Y : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ es otra variable aleatoria que satisface (1), entonces*

$$\mathbb{P}(Z^* \leq Y) = 1,$$

La variable Z^* es conocida como el *supremo esencial* de $\{Z_\alpha : \alpha \in I\}$, y la representamos como $\operatorname{esssup}_{\alpha \in I} Z_\alpha$. Está determinada únicamente por las propiedades (1) y (2) excepto para un conjunto $\mathbb{P}-$nulo.

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $Z^* : \Omega \to [-1, 1]$, es decir

$$|Z_\alpha| \leq 1, \quad \forall \alpha \in I.$$

De otra forma, se puede utilizar la biyección $f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x)$ que mapea al conjunto $\mathbb{R}$ con el intervalo $[-1, 1]$.

Denotemos a $\mathcal{C}$ como la familia de conjuntos numerables de I

$$\mathcal{C} = \{C \in I \mid C \text{ es numerable}\}.$$

Si tomamos una sucesión creciente $(C_n : n \geq 1)$ en $\mathcal{C}$ de tal manera que

$$a = \sup_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in C} Z_\alpha\right] = \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in C_n} Z_\alpha\right] \in [-1, 1]$$

Entonces, $\cup_{n \geq 1} C_n$ es un conjunto numerable, pues es la unión de conjuntos numerables. Por lo tanto, podemos definir la variable aleatoria

$$Z^* = \sup_{\alpha \in J} Z_\alpha,$$

con $J = \cup_n C_n$. Verifiquemos ahora que nuestra variable aleatoria cumple con las propiedades (1) y (2).

(1) Si consideramos un índice arbitrario α tal que $\alpha \in J$, entonces es claro que la definición de $Z^* = \sup_{\alpha \in J} Z_\alpha$ cumple con las propiedades (1) y (2) pues J es un conjunto numerable de I. Por otra parte, si se considera un índice $\beta \in I \setminus J$ tal que

$$\mathbb{P}(Z_\beta > Z^*) > 0, \tag{2.3}$$

Entonces, para los índices $\{\beta : Z^* < Z_\beta\}$ se tiene que $\mathbb{E}[Z^*] < \mathbb{E}[Z_\beta]$. Del Teorema de Convergencia Monótona tenemos que

$$a = \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in C_n} Z_\alpha\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in C_n} Z_\alpha\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in J} Z_\alpha\right] = \mathbb{E}[Z^*] < \mathbb{E}[Z_\beta]$$

Además, para todo índice $\{\beta : Z^* < Z_\beta\}$ se tiene que $\mathbb{E}[\max(Z_\beta, Z^*)] = \mathbb{E}[Z_\beta]$, combinando estos resultados obtenemos

$$a < \mathbb{E}[\max(Z_\beta, Z^*)]. \tag{2.4}$$

Por otro lado, como $J \cup \{\beta\}$ es un conjunto que pertenece a $\mathcal{C}$ tenemos

$$\mathbb{E}\left[\max(Z_\beta, Z^*)\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in J \cup \{\beta\}} Z_\alpha\right] \leq \sup_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\sup_{\alpha \in C} Z_\alpha\right] = a. \tag{2.5}$$

De (2.4) y (2.5) tenemos

$$a < \mathbb{E}\left[\max(Z_\beta, Z^*)\right] \leq a.$$

La contradicción surge al suponer (2.3), por lo tanto $\mathbb{P}(Z_\alpha \leq Z^*) = 1$ para toda $\alpha \in I$.

(2) Para mostrar la segunda condición, consideremos una variable aleatoria Y que satisface (1), es decir, para toda $\alpha \in I$ se tiene que

$$\mathbb{P}(Z_\alpha \leq Y) = 1. \tag{2.6}$$

En particular, la condición (2.6) se cumple para toda $\alpha \in J$, donde J es un conjunto numerable, por lo tanto

$$Z^* = \sup_{\alpha \in J} Z_\alpha \leq Y, \ \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Es decir, $\mathbb{P}(Z^* \leq Y) = 1$ se cumple. $\square$

El siguiente corolario muestra que bajo ciertas condiciones, nuestras variables aleatorias Z_α se puede escoger al conjunto de índices de tal manera que el supremo esencial tenga una propiedad extra.

Corolario 2.2. *Si la familia* $(Z_\alpha : \alpha \in I)$ *cumple que para cualquier* α, $\beta \in I$ *existe un* $\gamma \in I$ *tal que* $Z_\alpha \vee Z_\beta \leq Z_\gamma$ *en un sentido* $\mathbb{P}$*-c.s., entonces el conjunto numerable* $J = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ *puede ser escogido de tal manera que*

$$Z^* = \lim_{n\uparrow\infty} Z_{\alpha_n}, \quad \mathbb{P}\text{-}c.s.$$

donde la sucesión $(Z_{\alpha_n})_{n\geq 0}$ *es creciente.*

Demostración. Supongamos que $J = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_, \cdots\}$ es el conjunto numerable del teorema anterior, entonces podemos reemplazar a J por una nueva sucesión

$$J^* = \{\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots\}.$$

donde $\alpha_0^* = \alpha_0$ y los elementos restantes estén determinados de manera inductiva como

$$\begin{aligned}
\alpha_1^* \text{ tal que } Z_{\alpha_1^*} &\geq \max(Z_{\alpha_0^*}, Z_{\alpha_0}) \text{ c.s.} \\
\alpha_2^* \text{ tal que } Z_{\alpha_2^*} &\geq \max(Z_{\alpha_1^*}, Z_{\alpha_1}) \text{ c.s.} \\
&\vdots \\
\alpha_{n+1}^* \text{ tal que } Z_{\alpha_{n+1}^*} &\geq \max(Z_{\alpha_n^*}, Z_{\alpha_n}) \text{ c.s.}
\end{aligned}$$

Como $Z_{\alpha_{n+1}^*} \geq Z_{\alpha_{n+1}}$ casi seguramente y como la sucesión $(Z_{\alpha_n^*}, n \geq 0)$ es una sucesión creciente cuyos elementos están acotados casi seguramente por Z^* tenemos que

$$Z^* \geq \lim_n Z_{\alpha_n^*} = \sup_{\alpha\in J^*} Z_\alpha \geq \sup_{\alpha\in J} Z_\alpha = Z^*, \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Por lo tanto $Z^* = \lim_{n\uparrow\infty} Z_{\alpha_n^*}$ $\mathbb{P}$-c.s. □

2.1.2. Solución al problema de paro óptimo

Con el concepto del supremo esencial podemos mostrar como el proceso

$$S_n = \operatorname*{esssup}_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n]. \tag{2.7}$$

puede generar una estrategia de paro óptima, al ser comparado con el proceso G_n. Recordemos que G_n puede ser visto como la ganancia obtenida si se detiene a tiempo n; por lo que, S_n puede entenderse como la mayor ganancia esperada si uno no se detiene a tiempo n.

Consideremos el siguiente caso, si $\tau = n$ es un tiempo de paro en $\mathcal{M}_n$ entonces, $S_n \geq G_n$ casi seguramente. La estrategia de paro óptimo consiste en detenerse al primer momento n donde $S_n = G_n$, pues se tendría el caso en que la mayor ganancia esperada después del tiempo n dada la información disponible resulta ser el valor que se obtiene al detenerse a tiempo n.

En otro caso, es decir, cuando se tiene que $S_n > G_n$, se puede interpretar que, la máxima ganancia esperada después del tiempo n, dada la información disponible es mayor a la ganancia que obtendríamos en caso de detenernos a tiempo n, lo cual, no es óptimo; por lo que no detenerse aparentaría tener un valor "mayor".

El proceso $(S_n : n \geq 1)$ es llamado *Envoltura de Snell* -nombrada así por el matemático Laurie Snell [5, p. 4]- pues "envuelve"la ganancia obtenida por el proceso $(G_n : n \geq 1)$.

Teorema 2.3. *Sea $n \in \{1, 2, \cdots\}$ fija, supongamos que se cumple*

$$\mathbb{E}\left[\sup_n G_n\right] < \infty.$$

Sea $\tau_n = \inf\{k \geq n : S_k = G_k\}$, suponiendo que $\mathbb{P}(\tau_n < \infty) = 1$. Consideremos el problema de paro óptimo definido en (2.1)

$$V_n = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau]$$

Entonces

1. *$S_n = \max(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n])$;*

2. *El proceso parado $(S_{k\wedge\tau_n} : k \geq n)$ es una martingala;*

3. *$V_n = \mathbb{E}[S_n]$ y el tiempo de paro τ_n son óptimos para (2.1);*

4. *El proceso $(S_k : k \geq n)$ es la mínima supermartingala que domina a $(G_k : k \geq n)$.*

Demostración. (1) Para probar nuestra igualdad veamos que se cumplen dos condiciones

$$S_n \leq \max(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]); \tag{2.8}$$
$$S_n \geq \max(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]). \tag{2.9}$$

Para mostrar que la primera desigualdad se cumple, definamos el siguiente concepto

$$\bar{\tau} = \max(\tau, n+1), \qquad \tau \in \mathcal{M}_n.$$

Sin importar que condición llegue a pasar, tenemos que $\bar{\tau} \in \mathcal{M}_{n+1}$. Ahora, consideremos el evento $\{\tau \geq n+1\}$, el cual puede ser visto como $\{\tau > n\}$, que pertenece a $\mathcal{F}_n$, por lo tanto, $\{\tau \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$. Con los resultados anteriores podemos observar que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[G_n 1_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[G_{\bar{\tau}} 1_{\{\tau \geq n+1\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= G_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau\geq n+1\}} \mathbb{E}[G_{\bar{\tau}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= G_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau\geq n+1\}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\bar{\tau}} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n].
\end{aligned}$$

Además, sabemos que $S_{n+1} = \text{esssup}_{\tau\in\mathcal{M}_{n+1}} \mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_{n+1}] \geq \mathbb{E}[G_{\tau^*} \mid \mathcal{F}_{n+1}]$ para toda $\tau^* \in \mathcal{M}_{n+1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n] &= G_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau\geq n+1\}}\mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\bar\tau} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] \\ &\leq G_n 1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau\geq n+1\}}\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &\leq \text{máx}(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]). \end{aligned} \tag{2.10}$$

De modo que, $\text{máx}(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n])$ es siempre mayor a $\mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n]$ para todo $\tau \in \mathcal{M}_n$, resulta ser una cota superior, de la propiedad del supremo esencial, sabemos que éste siempre es menor a cualquier cota superior, verificando entonces (2.8).

Para corroborar la segunda desigualdad, tenemos que, si S_n es mayor que $\text{máx}(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n])$, entonces tiene que ser mayor a G_n y al mismo tiempo, mayor a $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n])$. Por definición sabemos que

$$S_n \geq G_n, \qquad \mathbb{P}\text{-c.s.} \tag{2.11}$$

Entonces, basta mostrar que

$$S_n \geq \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].$$

Veamos ahora que, $(\mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_{n+1}] : \tau \in \mathcal{M}_{n+1})$ cumple con las condiciones del Corolario 2.2. Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_{n+1}$, denotemos a $\bar{A}$ como el complemento del conjunto A y definamos

$$\gamma = \alpha 1_A + \beta 1_{\bar{A}}, \quad \text{donde } A = \{\mathbb{E}[G_\alpha \mid \mathcal{F}_{n+1}] \geq \mathbb{E}[G_\beta \mid \mathcal{F}_{n+1}]\}.$$

Tenemos que γ es un tiempo de paro, pues la suma de tiempos de paro resulta ser un tiempo de paro y más aún $\gamma \in \mathcal{M}_{n+1}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G_\gamma \mid \mathcal{F}_{n+1}] &= \mathbb{E}[G_\alpha 1_A \mid \mathcal{F}_{n+1}] + \mathbb{E}[G_\beta 1_{\bar{A}} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \\ &= 1_A \mathbb{E}[G_\alpha \mid \mathcal{F}_{n+1}] + 1_{\bar{A}}\mathbb{E}[G_\beta \mid \mathcal{F}_{n+1}] \\ &= \text{máx}(\mathbb{E}[G_\alpha \mid \mathcal{F}_{n+1}], \mathbb{E}[G_\beta \mid \mathcal{F}_{n+1}]).\end{aligned}$$

Del Corolario 2.2 tenemos que existe una sucesión $\{\gamma_k : k \geq 1\} \in \mathcal{M}_{n+1}$ tal que

$$S_{n+1} = \underset{\tau\in\mathcal{M}_{n+1}}{\text{esssup}}\, \mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_{n+1}] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[G_{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}],$$

donde $\mathbb{E}[G_{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \leq \mathbb{E}[G_{\gamma_{k+1}} \mid \mathcal{F}_{n+1}]$, con $k \geq 1$, $\mathbb{P}$-c.s., entonces haciendo uso del Teorema de Convergencia Monótona tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[G_{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \middle| \mathcal{F}_n\right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[G_{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_n] \\ &\leq S_n (= \underset{\tau\in\mathcal{M}_n}{\text{esssup}}\, \mathbb{E}[G_\tau \mid \mathcal{F}_n]).\end{aligned} \tag{2.12}$$

De (2.11) y (2.12) sabemos que

$$S_n \geq \text{máx}(G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]). \tag{2.13}$$

Finalmente, debido a (2.8) y (2.9) tenemos que $S_n = \max\{G_n, \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]\}$.

(2) De la Propiedad (1) tenemos que para toda n

$$S_n \geq \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n].$$

Por lo que, S_n es una supermartingala. Veamos también que, si $n \leq k < \tau_n$, con τ_n como el primer momento después del tiempo n en el que $S_\ell = G_\ell$ entonces

$$S_k = \mathbb{E}[S_{k+1} \mid \mathcal{F}_k], \quad \text{c.s.} \tag{2.14}$$

De la misma definición de τ_n sabemos que

$$S_{\tau_n} = G_{\tau_n}. \tag{2.15}$$

De (2.14) y (2.15) tenemos que para toda $k \geq n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{(k+1)\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}[S_{(k+1)\wedge\tau_n} 1_{\{\tau_n \leq k\}} \mid \mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[S_{(k+1)\wedge\tau_n} 1_{\{k+1 \leq \tau_n\}} \mid \mathcal{F}_k] \\
&= \mathbb{E}[S_{k\wedge\tau_n} 1_{\{\tau_n \leq k\}} \mid \mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[S_{k+1} 1_{\{k+1 \leq \tau_n\}} \mid \mathcal{F}_k] \\
&= S_{k\wedge\tau_n} 1_{\{\tau_n \leq k\}} + 1_{\{k+1 \leq \tau_n\}} \mathbb{E}[S_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] \\
&= S_{k\wedge\tau_n} 1_{\{\tau_n \leq k\}} + 1_{\{k+1 \leq \tau_n\}} S_k \\
&= S_{k\wedge\tau_n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el proceso parado $(S_{k\wedge\tau_n} : k \leq n)$ es una martingala.

(3) Por la Propiedad (2) tenemos, en particular para $N > n$, que

$$\begin{aligned}
S_n = S_{n\wedge\tau_n} &= \mathbb{E}[S_{N\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[S_{N\wedge\tau_n} 1_{\{\tau_n < N\}} + S_{N\wedge\tau_n} 1_{\{\tau_n \geq N\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[S_{\tau_n} 1_{\{\tau_n < N\}} + S_N 1_{\{\tau_n \geq N\}} \mid \mathcal{F}_n].
\end{aligned}$$

De (2.15) tenemos

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathbb{E}[S_{\tau_n} 1_{\{\tau_n < N\}} + S_N 1_{\{\tau_n \geq N\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[G_{\tau_n} 1_{\{\tau_n < N\}} + S_N 1_{\{\tau_n \geq N\}} \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}[G_{\tau_n} 1_{\{\tau_n < N\}} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[S_N 1_{\{\tau_n \geq N\}} \mid \mathcal{F}_n].
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Para $n < N$ vemos que

$$\mathbb{E}[G_n \mid \mathcal{F}_N] \leq \mathbb{E}\left[\sup_n G_n \middle| \mathcal{F}_N\right]$$

Por lo que, de la definición del supremo esencial, sabemos que éste es la mínima cota superior del conjunto de variables aleatorias $\{\mathbb{E}[G_n \mid \mathcal{F}_N] : n < N\}$, por lo que

$$S_N = \operatorname*{esssup}_{\tau\in\mathcal{M}_N} \mathbb{E}[G_\tau \big| \mathcal{F}_N] \leq \mathbb{E}\left[\sup_n G_n \mid \mathcal{F}_N\right], \quad \text{para } n < N.$$

Y por lo tanto usando el Teorema de Convergencia Monótona, además del supuesto de que $\mathbb{E}[\sup_n G_n] < \infty$ implica que $\mathbb{E}[\sup_n G_n \mid \mathcal{F}_n] < \infty$ c.s.,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\uparrow\infty} \mathbb{E}[S_N 1_{\{\tau_n \geq N\}} \mid \mathcal{F}_n] &\leq \lim_{N\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sup_{n<N} G_n \mid \mathcal{F}_N\right] 1_{\{\tau_n \geq N\}} \middle| \mathcal{F}_n\right] \\
&\leq \lim_{N\uparrow\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{n<N} G_n 1_{\{\tau_n \geq N\}} \middle| \mathcal{F}_n\right] && (2.17) \\
&= \mathbb{E}\left[\lim_{N\uparrow\infty} \sup_{n<N} G_n 1_{\{\tau_n \geq N\}} \middle| \mathcal{F}_n\right] = 0. && (2.18)
\end{aligned}$$

La última igualdad se da por el supuesto de que $\mathbb{P}(\tau_n < \infty) = 1$, es decir, sabemos que $\tau_n = \inf\{k \geq n : S_k = G_k\}$ es finito casi seguramente, por lo que

$$1_{\{\tau_n \geq N\}} \to 0, \quad N \to \infty.$$

De (2.16) y (2.18) concluimos que si $N \to \infty$ entonces

$$S_n = \mathbb{E}[S_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n].$$

Por último, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n]] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[G_{\tau_n} \mid \mathcal{F}_n]] \\
&= \mathbb{E}[G_{\tau_n}] \leq \sup_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau] = V_n. && (2.19)
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $(S_n, n \geq 1)$ es una supermartingala y por el Teorema 1.1 tenemos que

$$S_n \geq \mathbb{E}[S_\tau \mid \mathcal{F}_n], \quad \text{para todo } \tau \in \mathcal{M}_n.$$

Luego, para todo $\tau \in \mathcal{M}_n$

$$\mathbb{E}[S_n] \geq \mathbb{E}[S_\tau],$$

En particular,

$$\mathbb{E}[S_n] \geq \sup_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}[S_\tau].$$

De la definición de S sabemos que $S_n \geq G_n$ $\mathbb{P}$-c.s., entonces

$$\mathbb{E}[S_n] \geq \sup_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}[S_\tau] \geq \sup_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau] = V_n. \tag{2.20}$$

De (2.19) y (2.20) tenemos que $\mathbb{E}[S_n] = V_n$ entonces

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[G_{\tau_n}] = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}[G_\tau] = V_n.$$

Es decir, $\mathbb{E}[S_n]$ y el tiempo de paro τ_n son óptimos para el problema de paro óptimo definido en (2.1).

(4) En la primera parte del Teorema, probamos que $(S_n, n \geq 1)$ es una supermartingala. Además, comprobamos que $S_n \geq G_n$ $\mathbb{P}$-c.s., para toda n, es decir, $(S_n, n \geq 1)$ domina al proceso $(G_n, n \geq 1)$. Para probar que S es la mínima supermartingala que domina a G supongamos que $(U_n, n \geq 1)$ es también una supermartingala que domina a G. De la demostración en (3) y al U dominar a G tenemos

$$S_k = \mathbb{E}[G_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_k] \leq \mathbb{E}[U_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_k].$$

Del Teorema de Paro Opcional de Doob y el Lema de Fatou aplicado al proceso de paro $U_{m\wedge\tau_n} \geq -\sup_{n\leq\gamma\leq\tau_k} |G_\gamma|$ obtenemos

$$\mathbb{E}[U_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}\left[\liminf_{m\to\infty} U_{m\wedge\tau_k} \middle| \mathcal{F}_k\right] \leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}[U_{m\wedge\tau_k} \mid \mathcal{F}_k] \leq \mathbb{E}[U_{m\wedge\tau_k} \mid \mathcal{F}_k] \leq U_k.$$

Por lo tanto, $(S_k : k \geq n)$ es la mínima supermartingala que domina a $(G_k : k \geq n)$.

□

2.2. Enfoque con Cadenas de Markov

En esta sección presentaremos los resultados básicos de la teoría de paro óptimo, considerando tiempos discreto y procesos de Markov. Sea $X = (X_n, n \geq 1)$ definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, \mathbb{P}_x)$ y tomando valores en un espacio medible $(E, \mathcal{E})$. Asumiremos además que para todo $x \in E$, la cadena X empieza en el estado x bajo la medida $\mathbb{P}_x$. Por cuestiones de simplicidad definiremos al espacio de probabilidad como $(\Omega, \mathcal{F}) = (E^{\mathbb{Z}_+}, \mathcal{E}^{\mathbb{Z}_+})$, así los operadores de traslación $\theta_n : \Omega \to \Omega$ pueden definirse como $f \circ \theta_n(\omega_m) = f(\omega_{m+n})$ para funcionales f del proceso canónico ω_m.

Recordemos que la propiedad de Markov nos dice que para toda función positiva, continua y uniformemente acotada f, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $x \in E$, condicionando a $X_n = x$, la distribución de X_{n+1} es

$$\mathbb{P}_{xy} = \mathbb{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = y), y \in \mathcal{E}$$

Además es independiente de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}$, entonces

$$\mathbb{E}[f(X_{n+k}) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+k}) \mid X_n] = \mathbb{E}_x[f(\tilde{X}_k)]\Big|_{x=X_n}.$$

donde $\tilde{X}$ es una copia independiente de X. Consideremos una función medible $G : E \to \mathbb{R}$ que satisface la siguiente condición (con $G(X_N) = 0$ si $N = \infty$):

$$\mathbb{E}_x\left[\sup_n |G(X_n)|\right] < \infty,$$

Para todo $x \in E$, consideramos el siguiente problema de paro óptimo

$$V_n(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_n} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)]. \tag{2.21}$$

Se ha reemplazado el proceso general G_n por un proceso dependiente solo del estado actual de la cadena de Markov, $G(X_n)$, usualmente G es una función continua. El siguiente resultado muestra la relación entre nuestro problema (2.21) y la *envoltura de Snell.*

Lema 2.4. *Supongamos que $\mathbb{P}_x(\tau_0 < \infty) = 1$ para toda $x \in E$, donde $\tau_0 = \text{ínf}\{k \geq 0 : S_k = G_k\}$. Sea S_n la envoltura de Snell dada en (2.7), entonces tenemos*

$$S_n = V(X_n), \quad \mathbb{P}_x\text{-c.s.} \tag{2.22}$$

Para toda $x \in E$, con $n \geq 1$.

Demostración. Veamos en primer lugar que si $\tau \in \mathcal{M}_0$ entonces $\tau \circ \theta_n \in \mathcal{M}_n$. En particular, si $\tau_k^B := \text{ínf}\{n \geq k : X_n \in B\}$ para un $B \in \mathcal{E}$. En ese caso tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau_0^B \circ \theta_k &= \text{ínf}\{m \geq 0 : X_{m+k} \in B\} \\
&= \text{ínf}\{n \geq k : X_n \in B\} - k \\
&= \tau_k^B - k.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
S_n &= \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{M}_n} E[G(X_\tau) \mid \mathcal{F}_n] \\
&\geq \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{M}_0} E[G(X_{n+(\tau\circ\theta_n)}) \mid \mathcal{F}_n] \\
&= \operatorname*{esssup}_{\tau \in \mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x[G(\tilde{X}_\tau)]\Big|_{x=X_n} \\
&= V(X_n).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Donde $\tilde{X}$ es una copia independiente de X. La desigualdad se da para una $\tau \in \mathcal{M}_0$, tenemos que $n + (\tau \circ \theta_n) \in \mathcal{M}_n$, sin embargo, no todos los tiempos de paro en $\mathcal{M}_n$ pueden ser escritos de esa manera. Además, como $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_0$ y del hecho anterior

$$\begin{aligned}
V(x) &\geq \sup_{\tau \in \mathcal{M}_1} \mathbb{E}_x[G(X_\tau)] \\
&\geq \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x[G(X_{1+(\tau\circ\theta_1)})].
\end{aligned}$$

Como $1+(\tau\circ\theta_1) \in \mathcal{M}_1$ entonces podemos hacer uso de la esperanza condicional y aplicar la propiedad de Markov

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x[G(\tilde{X}_\tau)]\Big|_{x=X_1}\right] &= \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x[\mathbb{E}[G(X_{1+(\tau\circ\theta_1)}) \mid \mathcal{F}_1]] \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x[G(\tilde{X}_\tau)]\Big|_{x=X_1}\right].
\end{aligned}$$

Por último, de la definición de tiempo de paro

$$\begin{aligned}
V(x) &\geq \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x[G(\tilde{X}_\tau)]\Big|_{x=X_1}\right] \\
&\geq \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x[G(\tilde{X}_{\tau_0})]\Big|_{x=X_1}\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\sup_{\tau\in\mathcal{M}_0} \mathbb{E}_x[G(\tilde{X}_\tau)]\Big|_{x=X_1}\right] \\
&\geq \mathbb{E}_x[V(X_1)].
\end{aligned}$$

Donde la igualdad es correcta al ser τ_0 óptimo en V, pues se tiene que, $\mathbb{E}[G_{\tau_0}] = \sup_{\tau\in\mathcal{M}_0}\mathbb{E}[G_\tau]$. Utilizando la propiedad de Markov en la desigualdad anterior, obtenemos

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x[V(X_1)] = \mathbb{E}_x[V(X_1) \mid \mathcal{F}_0].$$

De forma similar, tenemos que para $m \leq n$

$$V_m(x) \geq \mathbb{E}_x[V(X_n)] = \mathbb{E}_x[V(X_n) \mid \mathcal{F}_m].$$

Por lo tanto, $(V(X_n) : n \geq 1)$ es una supermartingala y entonces tenemos que

$$E[V(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_x[V(X_1)]\Big|_{x=X_n} \leq V(X_n). \tag{2.24}$$

De la definición de $V(x)$ tenemos que para cualquier tiempo de paro en $\mathcal{M}_1$

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x[G(X_\tau)].$$

En particular si definimos a $\tau = 1$ observamos que para toda $x \in E$

$$V(x) \geq G(x) \tag{2.25}$$

De (2.24) y (2.25) podemos concluir que V_n es una supermartingala que domina a G_n, entonces, utilizando (4) del Teorema 2.3 tenemos que

$$V(x) \geq S_n \tag{2.26}$$

Finalmente, al tener (2.23) y (2.26), podemos concluir la prueba. □

A continuación se expresa un resultado análogo al Teorema 2.3. Dada la función V, definimos los siguientes conceptos. La región de continuación está dada por

$$C = \{x \in E : V(x) > G(x)\}$$

Y la región de paro

$$P = \{x \in E : V(x) = G(x)\}$$

El óptimo tiempo de paro entonces debería ser

$$\tau_P = \text{ínf}\{n \geq 1 : X_n \in P\}$$

Teorema 2.5. *Supongamos que* $\mathbb{P}(\tau_P < \infty) = 1$ *para toda* $x \in E$. *Entonces*

1. *El proceso de paro* $(V(X_{n\wedge\tau_P}) : n \geq 1)$ *es una* $\mathbb{P}_x$*-martingala para cada* $x \in E$.

2. *El tiempo de paro* τ_P *es óptimo en (2.20).*

3. *El proceso* $(V(X_n) : n \geq 1)$ *es la mínima supermartingala que domina a* $(G(X_n) : n \geq 1)$

Demostración. El resultado se sigue directamente del Teorema 2.3 haciendo uso de (2.22). □

Capítulo 3

Movimiento Browniano

En el presente capítulo, enfocaremos nuestra atención al estudio del movimiento Browniano. Desde su construcción, por el método de Lévy; hasta sus propiedades trayectoriales y más importante aún, verificando que este proceso cumple con la Propiedad de Markov.

Conviene recordar algunas propiedades importantes de las variables aleatorias Gaussianas, las cuales estarán presentes en la construcción del movimiento Browniano.

3.1. Variables Aleatorias Gaussianas

Decimos que X se distribuye como una variable aleatoria Guassiana con media cero y varianza unitaria si su transformada de Fourier satisface la siguiente igualdad

$$\varphi_X(\lambda) := \mathbb{E}\left[\exp\{i\lambda X\}\right] = \exp\{\lambda^2/2\}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

De igual manera, las siguientes desigualdades serán una valiosa herramienta en la construcción del movimiento Browniano.

Proposición 3.1. *Sea X una variable aleatoria Gaussiana centrada y con varianza unitaria, entonces para todo $x > 0$ se tienen las siguientes desigualdades*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,$$

Demostración. Para mostrar el lado derecho de la desigualdad, recordemos que, si X es una variable aleatoria Gaussiana centrada y de varianza unitaria entonces, tenemos que para toda $x > 0$

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt. \tag{3.1}$$

Consideremos entonces, los valores t tales que $0 < x \leq t$. Entonces tenemos que, $1 \leq t/x$. De lo anterior y haciendo uso de (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{t}{x} e^{-t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.
\end{aligned}$$

Para probar el lado izquierdo, veamos que

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2} - (x^3) \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \leq 0. \tag{3.2}$$

Pues $f(0) < 0$. Además, tenemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Como $f'(x) > 0$, se tiene que $f(x)$ es siempre negativa y entonces de (3.2) tenemos la desigualdad deseada. $\square$

Tengamos presente el siguiente resultado que muestra la relación de convergencia en distribución y en probabilidad para variables aleatorias Gaussianas.

Teorema 3.1. *Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias Gaussianas tales que para toda n, $X_n \sim N(m_n, \sigma_n^2)$, es decir, media $m_n \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma_n^2 \geq 0$.*

1. *Si $X_n \to X$ en distribución entonces $X \sim N(m, n)$ donde $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ y $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$.*
2. *Si $X_n \to X$ en probabilidad entonces para toda $p \geq 1$, $X_n \to X$ en $\mathcal{L}^p$.*

Demostración. 1. Como X_n son variables aleatorias Gaussianas con media m_n y varianza σ_n^2, su función característica está definida por

$$\varphi_{X_n}(\lambda) = \exp\{im_n\lambda - \frac{\sigma_n^2}{2}\lambda^2\}.$$

Recordemos que el Teorema de Continuidad [9, p. 322] afirma que al ser $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión que converge en distribución a X, entonces tenemos que

$$\varphi_{X_n}(\lambda) \to \varphi_X(\lambda).$$

Veamos que, la transformada de Fourier $\varphi_X(\lambda)$ es la función característica de una variable aleatoria Gaussiana con media m y varianza σ^2, lo que implicaría que $X \sim N(m, \sigma^2)$.

Consideremos el módulo de $\varphi_{X_n}(\lambda)$, recordando de la identidad de Euler que $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$ y observemos que

$$\begin{aligned}
|\varphi_{X_n}(\lambda)| &= \left| \exp\left\{ im_n\lambda - \frac{\sigma_n^2}{2}\lambda^2 \right\} \right| \\
&= \left| \exp\left\{ im_n\lambda \right\} \right| \left| \exp\left\{ -\frac{\sigma_n^2}{2}\lambda^2 \right\} \right| \\
&= \exp\left\{ -\frac{\sigma_n^2}{2}\lambda^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Del Teorema de Mapeo Continuo [2, p. 21] tenemos que

$$|\varphi_{X_n}(\lambda)| = \exp\left\{-\frac{\sigma_n^2}{2}\lambda^2\right\} \to |\varphi_X(\lambda)|, \quad \text{para toda } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior, implica que $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \in [0,\infty)$, al ser una convergencia que no depende de λ.

Ahora, comprobemos que la sucesión de medias $(m_n, n \geq 1)$ es acotada, para esto, supongamos que existe una subsucesión $(n_k, k \geq 0)$ de tal manera que m_{n_k} diverge, es decir, $m_{n_k} \to \infty$ siempre que $k \to \infty$.

Consideremos un punto b de continuidad de la función de distribución de X, tal que, $b > a$, para toda $a \in \mathbb{R}$. Al distribuirse de manera normal las variables X_n, tenemos que

$$F_X(a) < F_X(b) = \lim_{k\to\infty} F_{X_{n_k}}(b) \leq \limsup_{k\to\infty} F_{X_{n_k}}(m_{n_k}) = \frac{1}{2},$$

lo cual resulta una contradicción, pues para cualquier variable aleatorias X con función de distribución F_X se tiene que $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. La contradicción surge que suponer la existencia de una subsucesión en la cual $(m_n, n \geq 1)$ no es acotada.

Por último, consideremos dos valores, m y m', de adherencia en la sucesión mencionada. Entonces, para toda $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$e^{im\lambda} = e^{im'\lambda},$$

se tiene que m y m' son iguales. Si tomamos a $m = \lim_n m_n$ y a $\sigma^2 = \lim_n \sigma_n^2$ tenemos que la transformada de Fourier de X es la función característica de una variable aleatoria Gaussiana, es decir, $X \sim N(m, \sigma^2)$.

2. La transformada de Laplace (también conocida como Función Generadora de Momentos) para una variable aleatoria X_n Gaussiana satisface para toda $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\theta X_n\}\right] = \exp\left\{m_n\theta + \frac{\sigma_n^2}{2}\theta^2\right\}.$$

Además del hecho de $e^{|x|} \leq e^x + e^{-x}$, se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\theta|X_n|\}\right] \leq \mathbb{E}[\exp\{\theta X_n\}] + \mathbb{E}[\exp\{-\theta X_n\}].$$

Por lo que,

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\exp\{\theta|X_n|\}\right] < \infty,$$

y esto para toda $\theta \in \mathbb{R}$. Luego, para $q \geq 0$, tenemos que para una $|x|$ suficientemente grande se cumple que $|x^q| \leq e^{\theta|x|}$, de esta desigualdad deducimos que

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[|X_n|^q\right] < \infty,$$

y entonces

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^q\right] < \infty. \tag{3.3}$$

Consideremos entonces, $p \geq 1$. Por hipótesis, la sucesión $(|X_n - X|^p, n \geq 1)$ converge a 0 en probabilidad, y es uniformemente integrable ya que si tomamos $q = 2p$ en (3.3), es acotada en $\mathcal{L}^2$. Por lo tanto,

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \to 0, \qquad n \to \infty.$$

□

Recordemos un último resultado antes de presentar la construcción del movimiento Browniano.

Proposición 3.2. *Sea $\bar{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector Gaussiano. Entonces $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes si y solamente si $COV(X_i, X_j) = 0$ para toda $i \neq j$.*

Demostración. Veamos en primer lugar el recíproco de la proposición. Sin perdida de generalidad supongamos que el vector $\bar{X}$ es centrado, es decir, para toda $\mathbb{E}[X_i] = 0$ con $1 \leq i \leq n$.

Como los componentes del vector no están correlacionados tenemos que la transformada de Fourier del vector $\bar{X}$ resulta un producto de transformada de Fourier, es decir, para toda $\lambda \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\langle \bar{X}, \lambda\rangle\right\}\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 \lambda_j^2\right\} = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\lambda_j X_j\right\}\right],$$

por lo tanto, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes. La condición necesaria de la proposición es clara basándose en el argumento anterior. □

3.2. Construcción

A continuación definiremos algunos conceptos referentes al movimiento Browniano.

Definición 3.1. La trayectoria de $(X_t, t \geq 0)$ se define como la función $t \to X_t(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

De la última definición podemos decir que el resultado de un experimento aleatorio puede observarse de una manera continua en el tiempo a través de un modelo matemático. Con los siguientes conceptos podemos caracterizar a los procesos por sus trayectorias.

Definición 3.2. Se dice que un proceso estocástico es continuo por la derecha (por la izquierda) si las trayectorias del proceso son continuas por la derecha (por la izquierda) casi seguramente.

De la misma manera, se dice que un proceso estocástico tiene límite por la derecha (por la izquierda).

El movimiento Browniano está estrechamente relacionado con la distribución Gaussiana, por lo que la siguiente definición será de ayuda para los siguientes resultados.

Definición 3.3. Una familia $(X_t, t \geq 0)$ de variables aleatorias es un proceso Gaussiano si para toda n y para toda $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n})$ es un vector Gaussiano con valores en $\mathbb{R}^n$, es decir, para cualquier combinación lineal de los elementos del vector, se tiene una variable aleatoria gaussiana.

Definición 3.4. Decimos que $B = (B_t, t \geq 0)$ es un movimiento Browniano real que empieza en 0 si B es un proceso Gaussiano centrado tal que para toda $s, t \geq 0$

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = COV(B_s, B_t) = s \wedge t. \tag{3.4}$$

El proceso B es conocido como movimiento Browniano estándar.

Proposición 3.3. *El proceso X es un movimiento Browniano si y solamente si*

1. $X_0 = 0$ *c.s.*
2. *Para $n \geq 2$ y para toda $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, los incrementos*

   $$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

   son independientes.
3. *Para toda $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s \sim N(0, t-s)$.*

Demostración. Veamos primero que el recíproco se cumple. Si 1, 2 y 3 se cumplen, mostremos que X es un movimiento Browniano. Consideremos los tiempos tales que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ y el vector Gaussiano $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$.

Como $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ es un vector Gaussiano, es claro que $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ también lo es, pues resulta una combinación lineal de un vector Gaussiano, además resulta ser centrado ya que $X_{t_i} \sim N(0, t_i)$.

Ahora supongamos que $s \leq t$, de 1 y 3 tenemos que X_s y $X_t - X_s$ son variables aleatorias independientes, lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t X_s] &= \mathbb{E}[(X_t - X_s + X_s)X_s] \\
&= \mathbb{E}[(X_t - X_s)X_s] + \mathbb{E}[X_s^2] \\
&= \mathbb{E}[X_t - X_s]\mathbb{E}[X_s] + \mathbb{E}[X_s^2] \\
&= \mathbb{E}[X_s^2] \\
&= s.
\end{aligned}$$

En general, $\mathbb{E}[X_t X_s] = s \wedge t$ para toda $s, t \geq 0$. Por lo tanto, X es un movimiento Browniano.

Supongamos ahora que X es un movimiento Browniano. Primero, observemos que $\mathbb{E}[X_0^2] = \mathbb{E}[X_0X_0] = 0$, por lo tanto, tenemos que X_0 c.s. Por otra parte, para $0 \leq s \leq t$, tenemos que la variable $X_t - X_s$ es una variable aleatoria Gaussiano centrada, pues X es un proceso Gaussiano centrado. Además observamos que la varianza de la variable $X_t - X_s$ es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] &= \mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - 2\mathbb{E}[X_tX_s] \\ &= t + s - 2s \\ &= t - s.\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $X_t - X_s \sim N(0, t - s)$.

Por último, veamos que los incrementos de X son independientes. Consideremos los tiempos tales que $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, como el vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ es Gaussiano entonces

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}),$$

también lo es y más aún, para toda $i < j$, tenemos

$$\begin{aligned}COV(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}, X_{j_{i+1}} - X_{t_j}) &= \mathbb{E}[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(X_{t_{j+1}} - X_{t_j})] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_{i+1}}X_{t_{j+1}} - X_{t_i}X_{t_{j+1}} - X_{t_{i+1}}X_{t_j} + X_{t_i}X_{t_j}] \\ &= \mathbb{E}[X_{t_{i+1}}X_{t_{j+1}}] - \mathbb{E}[X_{t_i}X_{t_{j+1}}] - \mathbb{E}[X_{t_{i+1}}X_{t_j}] + \mathbb{E}[X_{t_i}X_{t_j}] \\ &= t_{i+1} + t_i - t_{i+1} - t_i \\ &= 0,\end{aligned}$$

De la proposición 3.2, vemos que las variables $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes. □

Teorema 3.2 (Wiener, 1923). *El movimiento Browniano existe.*

Demostración. **(Lévy, 1948)** Para la prueba, consideremos la construcción del movimiento Browniano en el intervalo $[0, 1]$. La idea es construir el movimiento Browniano como límite uniforme de funciones continuas.

Primero vamos a construir al movimiento como un elemento aleatorio del espacio $\mathbb{C}[0, 1]$. Para ello, vamos a definir al conjunto de los diádicos en $[0, 1]$, es decir

$$\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \leq k \leq 2^k \right\},$$

Vamos a interpolar linealmente a través de estos puntos, y se verificará que el límite uniforme de estas funciones continuas existe y que éste cumpla con las propiedades del movimiento Browniano. Al final, se construye al movimiento Browniano en $\mathbb{R}_+$

Consideremos una familia de variables aleatorias $(\xi_{k,n}, 0 \leq k \leq 2^n, n \geq 1)$ Gaussianas centradas y con varianza unitaria. Definamos al proceso $(X_n(t), t \in [0, 1], n \geq 0)$ de manera recursiva, como sigue:

1. Sea $X_0(0) = 0$, $X_0(1) = \xi_{0,0}$ con X_0 lineal en $[0, 1]$.

2. Sea

$$X_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0, \\ X_0(\frac{1}{2}) + \frac{\xi_{1,1}}{2}, & \text{si } t = \frac{1}{2}, \\ X_0(1) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

con X_1 lineal en $[0, \frac{1}{2}]$ y en $(\frac{1}{2}, 1]$.

3. Considerando el caso para $n = 2$ tenemos que

$$X_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0, \\ X_1(\frac{1}{4}) + \frac{\xi_{1,2}}{2}, & \text{si } t = \frac{1}{4}, \\ X_1(\frac{1}{2}), & \text{si } t = \frac{1}{2}, \\ X_1(\frac{3}{4}) + \frac{\xi_{2,2}}{2}, & \text{si } t = \frac{3}{4}, \\ X_1(1), & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

con X_2 lineal en $[0, \frac{1}{4}]$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $(\frac{3}{4}, 1]$.

En general, para toda $n \geq 0$, el mapeo $t \to X_n(t)$ es lineal en cada uno de los intervalos de la forma

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right],$$

y además,

$$\begin{aligned} X_n\left(\frac{2j}{2^n}\right) &:= X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right), \\ X_n\left(\frac{2j+1}{2^n}\right) &:= X_{n-1}\left(\frac{2j+1}{2^n}\right) + \frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

Veamos que, para toda $n \geq 0$, el vector $(X_n(k/2^n), 0 \leq k \leq 2^n)$ es Gaussiano, centrado y de covarianza

$$\mathbb{E}\left[X_n\left(\frac{k}{2^n}\right) X_n\left(\frac{\ell}{2^n}\right)\right] = \frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}. \tag{3.5}$$

Para $n = 0$ tenemos que X_0 es lineal y su extremo $X_0(1)$ es una variable aleatoria Gaussiana centrada; en otras palabras, cualquier $X_0(1)$ es una combinación lineal de variables Gaussianas, más aún

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_0(0)X_0(1)\right] &= \mathbb{E}\left[0 \cdot X_0(1)\right] \\ &= 0 \\ &= \frac{0}{2^n} \wedge \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Supongamos valido el caso para $n-1$. Observemos que $(X_n(k/2^n), 0 \leq k \leq 2^n)$ es una combinación lineal del vector Gaussiano $(X_{n-1}(k/2^{n-1}), 0 \leq k \leq 2^{n-1})$ y de la familia de variables aleatorias Gaussianas $(\xi_{k,n}, o \leq k \leq 2^n)$, donde ambos componentes son independientes, por lo que, $(X_n(k/2^n), 0 \leq k \leq 2^n)$ es un vector Gaussiano.

Para $\ell > k$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n\left(\frac{k}{2^n}\right)X_n\left(\frac{\ell}{2^n}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(X_n\left(\frac{\ell}{2^n}\right)-X_n\left(\frac{k}{2^n}\right)+X_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\left(X_n\left(\frac{\ell}{2^n}\right)-X_n\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\right]+\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right].
\end{aligned}$$

De la misma manera se tiene para $\ell < k$, por lo que consideraremos únicamente el caso en que $\ell = k$

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] = \frac{k}{2^n}.$$

Cuando k es par, tenemos que $X_n(k/2^n) = X_n(2j/2^n) = X_{n-1}(j/2^{n-1})$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{2j}{2^n}\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X_{n-1}^2\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)\right]\\
&= \frac{j}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

Pero, $k = 2j$, entonces $j = k/2$, por lo que

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] = \frac{j}{2^{n-1}} = \frac{k}{2^n}.$$

Para el caso en el que k es impar tenemos que

$$\begin{aligned}
X_n\left(\frac{k}{2^n}\right) &= X_n\left(\frac{2j+1}{2^n}\right)\\
&= X_{n-1}\left(\frac{2j+1}{2^n}\right)+\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}\\
&= X_{n-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^n}\right)+\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right)+\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\left(X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right)+\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{4}\left(X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right)^2+\left(\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}\right)^2\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+3)/2}}\right)\left(X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{4}\left(X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\left(\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}\right)^2\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+3)/2}}\right]\mathbb{E}\left[X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right],
\end{aligned}$$

Sabemos que ξ es una variable Gaussiana independiente de X_n, además de tener media igual a 0 y varianza unitaria. Entonces,

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[\left(X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right)^2\right]+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Desarrollando el cuadrado y utilizando nuestro supuesto de covarianza para el proceso X_n tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] &= \frac{1}{4}\mathbb{E}\left[X_{n-1}^2\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)\right]+\mathbb{E}\left[X_{n-1}^2\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right] \\
&+ 2\mathbb{E}\left[X_{n-1}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)X_{n-1}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)\right]+\frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{j+1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{j}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{4j+2}{2^{n+1}}=\frac{2j+1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $n \geq 0$, $(X_n(t), t \in [0,1])$ es un proceso Gaussiano centrado y de covarianza definida en (3.5). Ahora probemos que el proceso $(X_n(t), 0 \leq t \leq 1)$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$, es decir, queremos verificar que para todo $\epsilon > 0$ existe una $N \geq n$

$$\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| < \epsilon.$$

Definamos los siguientes conjuntos,

$$A_n = \left\{\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| \geq 2^{-n/4}\right\}.$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{2n-1}\left\{\sup_{t\in[j/2^n,(j+1)/2^n]}|X_n(t)-X_{n-1}(t)|\geq 2^{-n/4}\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{2n-1}\left\{|\frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}|\geq 2^{-n/4}\right\}\right)\\
&\leq 2^n\mathbb{P}\left(|N(0,1)|\geq 2^{(n+2)/4}\right)\\
&= 2^{n+1}\mathbb{P}\left(N(0,1)\geq 2^{(n+2)/4}\right)\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{3n/4}e^{-2^{n/2}},
\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\sum\mathbb{P}(A_n)<\infty$, y entonces, por la Ley de Borel - Cantelli tenemos que existe un conjunto $\tilde{\Omega}\in\mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(\tilde{\Omega})=1$, tal que, para todo $\omega\in\tilde{\Omega}$ existe $N(\omega)<\infty$ donde

$$\sup_{t\in[0,1]}|X_n(t)-X_{n-1}(t)|\geq 2^{-n/4}\qquad \forall n\geq N.$$

Es decir, el proceso $X_n(t)$ converge uniformemente. Al ser, $(X_n(t);n\geq 0,0\leq t\leq 1)$ uniformemente convergente en $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$, dicho límite es una función continua , ya que $\mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$ es un espacio completo bajo una topología uniforme.

Sea

$$X(t):=\lim_{n\to\infty}X_n(t),\qquad t\in[0,1],$$

entonces, por construcción, el proceso $(X(t),0\leq t\leq 1)$ es un proceso Gaussiano que satisface

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(s)X(t)\right] &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n(s_n)X_t(t_n)]\\
&= \lim_{n\to\infty}s_n\wedge t_n\\
&= s\wedge t,
\end{aligned}$$

donde s_n y t_n son diádicos de la forma $j/2^n$ y tales que $s_n\to s$, $t_n\to t$. Por lo tanto, $(X(t),0\leq t\leq 1)$ es un movimiento Browniano en el intervalo $[0,1]$.

Para finalizar, consideremos $B_t^0,B_t^1,B_t^2,\ldots$ movimientos Brownianos independientes en el intervalo $[0,1]$ y definamos

$$B_t=\begin{cases}B_t^0, & \text{si } t\in[0,1]\\ B_{t-n}^n+\sum_{m=0}^{n-1}B_1^m, & \text{si } t\in[n,n+1)\end{cases}$$

Entonces, B_t es un movimiento Browniano en $\mathbb{R}_+$. $\square$

3.3. Trayectorias del movimiento Browniano

En esta sección, estudiaremos las propiedades trayectoriales del movimiento Browniano, y más específicamente probaremos el Criterio de Continuidad de Kolmogorov, resultado que nos asegura existe una versión continua del movimiento Browniano.

Definición 3.5. Sean $X = (X_t, t \in T)$ y $\tilde{X} = (\tilde{X}_t, t \in T)$ dos procesos definidos en un conjunto T. Decimos que $\tilde{X}$ es una modificación de X si para toda $t \in T$, $X_t = \tilde{X}_t$ c.s.

Si $\tilde{X}$ es una modificación de X, entonces para toda n y para toda $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$,

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = (\tilde{X}_{t_1}, \tilde{X}_{t_2}, \ldots, \tilde{X}_{t_n}) \qquad \text{c.s.}$$

En particular, si alguno de los procesos es un movimiento Browniano, el otro también. Sin embargo, X y $\tilde{X}$ pueden tener trayectorias completamente diferentes.

Definición 3.6. Decimos que X y $\tilde{X}$ son indistinguibles si

$$\mathbb{P}\left(\forall t \in T, X = \tilde{X}\right) = 1.$$

Si X y $\tilde{X}$ son indistinguibles entonces $\tilde{X}$ es una modificación de X, además, ambos procesos tienen las mismas trayectorias casi seguramente.

Por otra parte, observemos que si $\tilde{X} = (\tilde{X}_t, t \in T)$ es una modificación de $X = (X_t, t \in T)$ y ambos tienen trayectorias continuas casi seguramente, entonces X y $\tilde{X}$ son indistinguibles.

Definición 3.7. Sean dos procesos estocásticos definidos $(X_t, t \in T)$ y $(\tilde{X}_t, t \in T)$ definidos en los espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, respectivamente, y con el mismo espacio de estados $(E, \mathcal{E})$.

Decimos que X y $\tilde{X}$ son equivalente si para cualquier sucesión finita $t_1, t_2, \ldots, t_n$ donde $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ y $A \in \mathcal{E}$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left((X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \in A\right) = \mathbb{P}\left((\tilde{X}_{t_1}, \tilde{X}_{t_2}, \ldots, \tilde{X}_{t_n}) \in A\right)$$

Teorema 3.3 (Criterio de Continuidad de Kolmogorov)**.** *Sea $X = (X_t, t \in I)$ un proceso aleatorio indexado por un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con valores en (E, d) un espacio métrico completo. Supongamos que existen $p, \epsilon, c > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}\left[(d(X_s, X_t))^p\right] \leq c|t-s|^{1+\epsilon}, \qquad s, t \in I.$$

Entonces, existe una modificación $\tilde{X}$ de X, cuyas trayectorias son localmente Hölder de índice α, para toda $\alpha \in (0, \epsilon/p)$, es decir, para toda $T \geq 0$

$$d\left(\tilde{X}_s(\omega), \tilde{X}_t(\omega)\right) \leq K(\omega, T)|t-s|^{\alpha}, \qquad s, t \leq T.$$

Demostración. La demostración de este importante resultado se basa en tres principales problemas. Comprobar que las trayectorias del proceso X son α-Hölder continuas en el conjunto de números diádicos del intervalo $[0,1]$. "Extender" al proceso $\tilde{X}$ para un intervalo $[0,T]$, finalmente, mostrar que $\tilde{X}$ está bien definido y que resulta ser una modificación de nuestro proceso original.

Consideremos sin pérdida de generalidad que I es un intervalo acotado y para simplificar la notación, definamos $I = [0,1]$. De la desigualdad de Chebyshev veamos que para toda $a > 0$ y para toda $s, t \in [0,1]$ tenemos que

$$\mathbb{P}\left(d(X_s, X_t) > a\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(d(X_s, X_t)^p)\right]}{a^p} \leq c\frac{|t-s|^{1+\epsilon}}{a^p}. \tag{3.6}$$

Si consideramos a D_n como el conjunto de números diádicos del intervalo $[0,1)$ tales que $D_n = \{k/2^n : k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$, entonces $D_0, D_1, \ldots$ es una secuencia de conjuntos crecientes, por lo que podemos definir al siguiente conjunto $D = \cup_n D_n = \lim_n D_n$.

Tomemos a $s = (i-1)/2^n$, $t = i/2^n$ y $a = 1/2^{n\alpha}$. De (3.6), con α fija en $(0, \epsilon/p)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) > \frac{1}{2^{n\alpha}}\right) &\leq c\frac{|i/2^n - (i-1)/2^n|^{1+\epsilon}}{2^{-n\alpha p}} \\ &= \frac{c}{2^{n(1+\epsilon-\alpha p)}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq 2^n} d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) > \frac{1}{2^{n\alpha}}\right) &\leq \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}\left(d(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}) > \frac{1}{2^{n\alpha}}\right) \\ &= \frac{c2^n}{2^{n(1+\epsilon-\alpha p)}} \\ &= \frac{c}{2^{n(\epsilon-\alpha p)}}.\end{aligned}$$

Como $\alpha \in (0, \epsilon/p)$ entonces, $\epsilon - p\alpha > 0$, por lo tanto

$$\sum_{n\geq 1} \frac{c}{2^{n(1+\epsilon-\alpha p)}} < \infty.$$

En virtud del Lema de Borel-Cantelli sabemos que existe un conjunto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$, con $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$ tal que para cada $\omega \in \tilde{\Omega}$ existe una $n_0 := n_0(\omega) < \infty$ tal que para toda $n \geq n_0$,

$$d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \leq 2^{-n\alpha}, \quad \text{para toda} 1 \leq i \leq 2^n \tag{3.7}$$

En otras palabras,

$$\max_{1\leq i\leq 2^n} d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right) \leq 2^{-n\alpha}, \quad n \geq n_0.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{n\geq n_0} \max_{1\leq i\leq 2^n} \frac{d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right)}{2^{-n\alpha}} \leq 1.$$

Entonces,

$$\sup_{n\geq 1} \max_{1\leq i\leq 2^n} \frac{d\left(X_{\frac{i-1}{2^n}}, X_{\frac{i}{2^n}}\right)}{2^{-n\alpha}} \leq K(\omega).$$

Veamos que el hecho anterior implica la condición α-Hölder que buscamos observar en las trayectorias del proceso X.

Recordemos que $t \in D$ si y solo si podemos escribir a t como $\sum_{k=1}^{N} \zeta_k/2^k$ donde $\zeta_k \in \{0,1\}$. Consideremos dos elementos $s,t \in D$ tales que $s < t$. Sea $q \geq 1$ el entero más grande donde la desigualdad $t-s < 2^{-q}$ se cumple. Entonces, existen $0 \leq k \leq 2^q$ y enteros $l, m \geq 0$ tales que

$$\begin{aligned} s &= \frac{k}{2^q} + \frac{\zeta_{q+1}}{2^{q+1}} + + \frac{\zeta_{q+2}}{2^{q+2}} + \ldots + + \frac{\zeta_{q+l}}{2^{q+l}}, \quad \zeta_j = 0 \text{ ó } 1; \\ t &= \frac{k}{2^q} + \frac{\zeta_{q+1}}{2^{q+1}} + + \frac{\zeta_{q+2}}{2^{q+2}} + \ldots + + \frac{\zeta_{q+m}}{2^{q+m}}, \quad \tilde{\zeta}_j = 0 \text{ ó } 1. \end{aligned}$$

Donde $k = [2^q s]$, en el cual $[x]$ es tal que $[x] \leq x \leq [x+1]$. Notemos que $k \leq [2^q t] \leq [2^q(s + 2^{-q})] = k+1$. Definamos los siguiente números,

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{k}{2^q} + \frac{\zeta_{q+1}}{2^{q+1}} + + \frac{\zeta_{q+2}}{2^{q+2}} + \ldots + + \frac{\zeta_{q+i}}{2^{q+i}}, \quad i = 0, 1, \ldots, l \\ t_j &= \frac{k}{2^q} + \frac{\zeta_{q+1}}{2^{q+1}} + + \frac{\zeta_{q+2}}{2^{q+2}} + \ldots + + \frac{\zeta_{q+j}}{2^{q+j}}, \quad j = 0, 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Entonces, de la desigualdad del triángulo obtenemos

$$\begin{aligned} d(X_s, X_t) &= d(X_{s_l}, X_{t_m}) \\ &\leq d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \sum_{i=0}^{l} d(X_{s_i}, X_{s_{i-1}}) + \sum_{j=0}^{m} d(X_{t_j}, X_{t_{j-1}}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{l} K(\omega) 2^{-(q+i)\alpha} + \sum_{j=0}^{m} K(\omega) 2^{-(q+j)\alpha} \quad \text{(haciendo uso de (3.7))} \\ &= K(\omega) 2^{-q\alpha} \left[\sum_{i=0}^{l} 2^{-i\alpha} + \sum_{j=0}^{l} 2^{-j\alpha} \right] \\ &\leq 2K(\omega) 2^{-q\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\alpha} \\ &= 2K(\omega) 2^{-q\alpha} \left[1 + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i\alpha} \right] \quad \text{(serie geométrica)} \\ &= 2K(\omega) 2^{-q\alpha} \left[1 + \frac{2^{-\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}} \right] \\ &= 2K(\omega) 2^{-q\alpha} \left[\frac{1}{1 - 2^{-\alpha}} \right] = \frac{2K(\omega) 2^{-q\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Por último, tenemos que $2^{-(q+1)} < t - s$, entonces

$$\begin{aligned} d(X_s, X_t) &\leq \frac{2K(\omega)2^{-q\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \\ &\leq \frac{2^{\alpha+1}K(\omega)}{1-2^{-\alpha}}(t-s)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $\omega \in \tilde{\Omega}$, la trayectoria $t \to X_t(\omega)$ en el conjunto D es Hölder continua de índice α, y con mayor razón, uniformemente continua en D.

Definamos un nuevo proceso estocástico para todo $t \in I$,

$$\tilde{X}_t(\omega) := \begin{cases} \lim_{s\to t} X_s(\omega), & \text{si } \omega \in \tilde{\Omega}, s \in D, \\ x_0 \in E, & \text{si } \tilde{\Omega}^c. \end{cases}$$

El límite existe gracias a la condición de continuidad uniforme y al criterio de Cauchy. Por definición, el proceso $\tilde{X}$ es Hölder continuo de índice α. Basta ver que $\tilde{X}$ es una modificación del proceso X.

Veamos que para todo $\delta > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(d(X_s, X_t) > \delta\right) &\leq \frac{\mathbb{E}d(X_s, X_t)^p}{\delta^p} \\ &\leq \frac{c|t-s|^{1+\epsilon}}{\delta^p} \xrightarrow{s\to t} 0. \end{aligned}$$

Por lo que, para toda $t \in I$ se tiene que

$$X_t = \lim_{s\to t} X_s, \quad \text{en probabilidad.} \tag{3.8}$$

Como $\tilde{X}_t = \lim_{s\to t} X_s$ casi seguramente, con $s \in D$; por (3.8) tenemos que $X_t = \lim_{s\to t} X_s$ en probabilidad, con $s \in D$. Entonces, $X_t = \tilde{X}_t$ casi seguramente. □

Corolario 3.4. *Sea $B = (B_t, t \geq 0)$ un movimiento Browniano. El proceso B admite una modificación cuyas trayectorias son localmente hölderianas de índice $\alpha = 1/2 - \epsilon$, para $\epsilon \in (0, 1/2)$. En particular, B admite una modificación continua.*

Demostración. Recordemos que $B_t - B_s$ posee la misma distribución que $\sqrt{(t-s)N}$ donde N es una variable aleatoria normal estándar. Entonces, para $p > 0$ tenemos,

$$\mathbb{E}\left[|B_s - B_t|^p\right] = |t-s|^{p/2}\mathbb{E}\left[|N(0,1)|^p\right],$$

Luego, para una $\epsilon \in (0, 1/2)$ tenemos que

$$\mathbb{E}\left[|B_s - B_t|^p\right] = |t-s|^{p/2}\mathbb{E}\left[|\tilde{B}_{t-s}|^p\right] = c(p)|t-s|^{1+(p/2-1)},$$

Tomando $p > 2$, vemos que $\alpha = 1/2 - \epsilon < (p/2-1)/p$. Si tomamos a p suficientemente grande, podemos aplicar el Criterio de Continuidad de Kolmogorov para probar nuestro enunciado. □

3.4. Propiedad de Markov

En esta última sección mostraremos la propiedad de Markov para el movimiento Browniano, la cual a grandes rasgos, nos dice que si un movimiento Browniano $B = (B_t, t \in T)$ comienza en un punto x, entonces el movimiento a tiempo $\tilde{B} = B_{t+s} - B_s, t \in T$ tiene la misma distribución como el proceso que comenzó en t.

Para poder ver este resultado, considere a $\mathcal{F}_t^0$ como la σ-álgebra generada por $\{B_s, s \leq t\}$ y sea $\mathcal{F}_t$ la versión completa de $\mathcal{F}_t^0$, es decir, los conjuntos de $\mathcal{F}_t^0$ junto con los conjunto de medida cero. Se tiene que para $s < t$, entonces $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Teorema 3.5 (Propiedad de Markov)**.** *Sea $s > 0$, el proceso $\tilde{B}_t = (B_{t+s} - B_s, t \geq 0)$ es un movimiento Browniano independiente de $\mathcal{F}_s$.*

Demostración. Notemos fácilmente que $\tilde{B}_t$ es un movimiento Browniano, pues B_{t+s} y B_s son procesos Gaussianos centrados, por lo que la diferencia entre ellos resulta ser un proceso Gaussiano centrado. Además, B_{t+s} y B_s son procesos son continuos, entonces $B_{t+s} - B_s$ es continuo. Por último, veamos que

$$\begin{aligned}
COV\left(\tilde{B}_u, \tilde{B}_v\right) &= \mathbb{E}\left[(B_{u+s} - B_s)(B_{v+s} - B_s)\right] \\
&= \mathbb{E}[B_{u+s}\ B_{v+s}] - \mathbb{E}[B_{u+s}\ B_s] - \mathbb{E}[B_s\ B_{v+s}] + \mathbb{E}[B_s\ B_s] \\
&= (u + s \wedge v + s) - s - s + s \\
&= u \wedge v.
\end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{B}$ es un movimiento Browniano.

Recordemos que si dos vectores (finitos) son independientes, entonces, lo son también para conjuntos de clases bajo intersecciones finitas (Teorema 10.1 de [4, p. 65]) y del Teorema de Clases Monótonas [4, p. 36], entonces, basta ver que para toda $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq s$ y $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m \leq t$, los vectores $(\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_m})$ y $(B_{s_1}, \ldots, B_{s_n})$ son independientes.

Veamos que, $(\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_m}), (B_{s_1}, \ldots, B_{s_n})$ es un vector Gaussiano, y además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\tilde{B}_{t_j} B_{s_i}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(B_{t_j+s} - B_s\right) B_{s_i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_{t_j+s} B_{s_i}\right] - \mathbb{E}\left[B_s B_{s_i}\right] \\
&= s_i - s_i = 0,
\end{aligned}$$

Lo que nos indica la independencia de los vectores y por el argumento previo, tenemos que $\tilde{B}_t$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. $\square$

Otra manera de ver la la propiedad de Markov es la siguiente.

Proposición 3.4. *Sea $s > 0$. Al condicionar el proceso $\widehat{B} = (B_{t+s}, t \geq 0)$ con respecto a $\mathcal{F}_s$, resulta ser un movimiento Browniano que empieza en B_s.*

Demostración. Para toda $t \geq 0$ tenemos que $\widehat{B}_t = \tilde{B}_t + B_s$. Entonces, si $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ y toda función boreliana y acotada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(\widehat{B}_{t_1},\ldots,\widehat{B}_{t_n}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[f\left(\tilde{B}_{t_1}+B_s,\ldots,\tilde{B}_{t_n}+B_s\right)\middle|\mathcal{F}_s\right]\\ &= \mathbb{E}\left[f\left(\tilde{B}_{t_1}+x,\ldots,\tilde{B}_{t_n}+x\right)\middle|B_s = x\right]\\ &= \mathbb{E}\left[f\left(\tilde{B}_{t_1}+x,\ldots,\tilde{B}_{t_n}+x\right)\right] \qquad \text{(prop. de Markov)}\\ &= \mathbb{W}^x\left[f\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)\right],\end{aligned}$$

por lo que, $\widehat{B}$ es un movimiento Browniano que comienza en el punto $B_s = x$. □

3.4.1. Ley de Blumenthal

Presentamos la Ley 0 - 1 de Blumenthal, la cual es una herramienta útil para estudiar ciertas propiedades de las trayectorias del movimiento Browniano, aunque no es el objetivo principal de este capítulo, se darán algunas observaciones.

Teorema 3.6 (Ley 0 - 1 de Blumenthal)**.** *Sea $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{u>t}\mathcal{F}_u$, entonces $\mathcal{F}_{0^+}$ es trivial.*

Demostración. Se dice que una $\mathcal{F}$ σ-álgebra es trivial si, para toda $A \in \mathcal{F}$, se tiene que $\mathbb{P}(A) = 0$ o 1.

Veamos primero que para toda $s \geq 0$, $(B_{t+s} - B_s, t \geq 0)$ es independiente de $\mathcal{F}_{s^+}$. Para obtener este resultado, basta ver que para todo evento A en $\mathcal{F}_{s^+}$, con $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[1_A f\left(\tilde{B}_{t_1},\ldots,\tilde{B}_{t_n}\right)\right] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[f\left(B_{t_1},\ldots,B_{t_n}\right)\right],$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\tilde{B}_{t_i} = B_{t_i+s} - B_s$.

De la propiedad de Markov, observemos que para cualquier $\epsilon > 0$, con $A \in \mathcal{F}_{s^+} \subset \mathcal{F}_{s+\epsilon}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[1_A f\left(\tilde{B}^{(\epsilon)}_{t_1},\ldots,\tilde{B}^{(\epsilon)}_{t_n}\right)\right] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[f\left(B_{t_1},\ldots,B_{t_n}\right)\right],$$

donde $\tilde{B}^{(\epsilon)}_{t_i} = B_{t_i+s+\epsilon} - B_{s+\epsilon}$. Haciendo tender ϵ a 0 y aplicando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue en ambos lados de la igualdad, obtenemos la igualdad deseada.

Por último, si tomamos $s = 0$, tenemos que $(B_t, t \geq 0)$ es independiente de $\mathcal{F}_{0^+}$. Se sigue entonces que $\sigma(B_t, t \geq 0)$ y $\mathcal{F}_{0^+}$ son independientes, sin embargo, tenemos que

$$\mathcal{F}_{0^+} = \bigcap_{u>0}\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_\infty,$$

donde $\mathcal{F}_\infty$ es la versión completa de $\sigma(B_t, t \geq 0)$. De estos hechos podemos deducir que todo conjunto $A \in \mathcal{F}_{0^+}$ es independiente de si mismo, es decir, $\mathbb{P}(A) = 0$ ó 1. □

Una consecuencia de la Ley 0 - 1 de Blumenthal es la siguiente.

Proposición 3.5. *Consideremos un movimiento Browniano B_t y definamos*

$$\tau_0^+ = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t > 0\};$$
$$\tau_0^- = \text{ínf}\{t \geq 0 : B_t < 0\}.$$

Entonces, $\tau_0^+ = 0$ c. s. y $\tau_0^- = 0$ c. s. Además, $\{t : B_t = 0\}$ no es acotado c. s.

Demostración. Es fácil ver que, si B es un movimiento Browniano, entonces $-B$ resulta ser un movimiento Browniano. A esta propiedad se le conoce como simetría del movimiento Browniano, lo que nos permite deducir que si $\epsilon > 0$ entonces

$$\mathbb{P}(B_t \leq 0) = \mathbb{P}(B_t \geq 0) = 1/2, \quad \text{para toda } t \in [0, \epsilon].$$

Así, para toda $\epsilon > 0$ se cumple que $\mathbb{P}(B_t \geq 0, t \in [0, \epsilon]) \leq 1/2$ y $\mathbb{P}(\tau_0^- \leq \epsilon) \geq 1/2$. Haciendo $\epsilon \to \infty$ tenemos que $\mathbb{P}(\tau_0^- = 0) \geq 1/2$.

Luego, podemos ver que $\{\tau_0^- = 0\} \in \mathcal{F}_{0+}$ ya que

$$\{\tau_0^- = 0\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{0 < t < \frac{1}{n}, B_t < 0\right\}.$$

Entonces, τ_0^- debe tener probabilidad 0 ó 1, pero ya sabemos que $\mathbb{P}(\tau_0^- = 0) \geq 1/2$, entonces $\mathbb{P}(\tau_0^- = 0) = 1$, donde el mismo argumento aplica para τ_0^+. □

De acuerdo al último resultado, la trayectoria del movimiento Browniano oscila infinitamente alrededor de su punto de inicio.

3.5. Propiedad Fuerte de Markov

La última parte del capítulo trata sobre la extensión de la propiedad de Markov a tiempo no necesariamente definidos. Consideremos un movimiento Browniano $B = (B_t, t \geq 0)$ definido en un espacio de probabilidad completo (si todos los subconjuntos de eventos nulos son eventos nulos) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y las σ-álgebras como en la sección pasada.

Teorema 3.7 (Propiedad Fuerte de Markov)**.** *Sea τ un tiempo de paro. Considere el proceso $(\tilde{B}_t := B_{t+\tau} - B_\tau, t \geq 0)$, si éste es condicionado con respecto al evento $\{\tau < \infty\}$, entonces, $\tilde{B}_t$ es un movimiento Browniano independiente de $\mathcal{F}_\tau$. Donde $\mathcal{F}_\tau$ es descrita en la Definición 1.3.*

Demostración. Como en la prueba para la Ley de Blumenthal, basta probar que para todo evento $A \in mathcalF_\tau$, con $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ y una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ continua y acotada,

$$\mathbb{E}\left[1_A f\left(\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_n}\right)\right] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[f\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}\right)\right], \tag{3.9}$$

después utilizar el Lema de Clases Monótonas para extender el resultado al proceso completo con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}_\tau$.

Para ver que $\tilde{B}$ es un movimiento Browniano, basta con escoger A como Ω en (3.9) y observando que las trayectorias de $\tilde{B}$ son siempre continuas. Finalmente, veamos que se cumple la ecuación anterior.

Consideremos números diádicos de tal manera que podamos aproximarnos al nuestro proceso, entonces tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1_{\frac{j-1}{2^m}<\tau\leq\frac{j}{2^m}} f\left(B_{\frac{j}{2^m}+t_1} - B_{\frac{j}{2^m}}, \cdots, B_{\frac{j}{2^m}+t_n} - B_{\frac{j}{2^m}}\right) \xrightarrow{m\to\infty} f\left(\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_n}\right).$$

Del Teorema de Convergencia Monótona,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[1_A f\left(\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_n}\right)\right] \\ &\quad= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[1_{A\cap\{\frac{j-1}{2^m}<\tau\leq\frac{j}{2^m}\}} f\left(B_{\frac{j}{2^m}+t_1} - B_{\frac{j}{2^m}}, \cdots, B_{\frac{j}{2^m}+t_n} - B_{\frac{j}{2^m}}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Para un $A \in \mathcal{F}_\tau$ se tiene que el evento $A \cap \{(j-1)/2^m < \tau \leq j/2^m\}$ es $\mathcal{F}_{j/2^m}$-medible, por lo que coincide casi seguramente con un evento de $\sigma(B_s, s \leq j/2^m)$. Al aplicar la propiedad de Markov, obtenemos

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[1_{A\cap\{\frac{j-1}{2^m}<\tau\leq\frac{j}{2^m}\}} f\left(B_{\frac{j}{2^m}+t_1} - B_{\frac{j}{2^m}}, \cdots, B_{\frac{j}{2^m}+t_n} - B_{\frac{j}{2^m}}\right)\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left[1_A 1_{\{\frac{j-1}{2^m}<\tau\leq\frac{j}{2^m}\}} f\left(B_{\frac{j}{2^m}+t_1} - B_{\frac{j}{2^m}}, \cdots, B_{\frac{j}{2^m}+t_n} - B_{\frac{j}{2^m}}\right)\right] \\ &\quad= \mathbb{P}\left(A \cap \left\{\frac{j-1}{2^m} < \tau \leq \frac{j}{2^m}\right\}\right) \mathbb{E}\left[f\left(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

Por lo que, aplicando (3.11) en (3.10) se sigue que,

$$\mathbb{E}\left[1_A f\left(\tilde{B}_{t_1}, \ldots, \tilde{B}_{t_n}\right)\right] = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}\left[f\left(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}\right)\right].$$

□

Capítulo 4

Martingalas continuas

Capítulo 5

Proceso Poisson Compuesto

Bibliografía

[1] Apostol, Tom M. *Calculus.* Reverté Ediciones. México. 1999.

[2] Bartle, Robert G. *The Elements of Real Analysis.* John Wiley & Sons. Londres. 1964.

[2] Billingsley, Patrick. *Convergence of Probability Measures.* John Wiley & Sons. 2da edición. Londres. 1999

[3] Doob, J. L., *Stochastic Processes*, Wiley, Ser. Probab. Math. Stat. New York. 1953.

[4] Jacod, Jean; Protter, Philip E. *Probability essentials.* Universitext, Springer. 2da edición. New York. 2000.

[5] Kyprianou, Andreas E. *A Hands-on Approach to Optimal Stopping*, 6th School of Probability and Stochastic Process. México. 2009.

[6] Marcinkiewicz, J.; Zygmund A. *Sur les fonctions indépendantes*, Fundam. Math. 29 (1937), 309–335.

[7] Mörters, P.; Peres Y. *Brownian Motion*, Cambridge University Press. 2da edición. Cambridge. 2010.

[8] Peskir, Goran; Shiryaev, Albert. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems.* Lectures in Mathematics. ETH Zürich, Springer Science & Business Media. 2006.

[9] Shiryaev, Albert. *Probability.* Graduate Text in Mathematics Vol. 95. Springer. 2da edición. New York. 1995.