

# PCA: Motion Capture

## 1 Proložení bodů podprostorem

**1.1** Úlohu budeme řešit tak, že nejprve najdeme bázi hledaného podprostoru  $U$  a pak pomocí ní nalézneme body  $b_1, \dots, b_n$ .

**a)** Součet čtverců vzdálenosti bodů  $a_1, \dots, a_n$  k podprostoru  $U$  je stejná hodnota jako součet čtverců délek projekce těchto bodů na ortogonální doplněk:

$$\|X^T a_1\| + \dots + \|X^T a_n\| = \|X^T A\| = \text{tr}(X^T A A^T X)$$

Pomocí spektrálního rozkladu  $V D V^T = A A^T$  dostaneme matici  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , jejíž  $k$  posledních sloupců budou tvořit bázi našeho hledaného podprostoru.

**b)** Body  $b_1, \dots, b_n$  jsou ortogonálními projekcemi bodů  $a_1, \dots, a_n$  do podprostoru  $U$ , tj.  $b_i = U U^T a_i$ , maticově  $B = U U^T A$ .

**c)** Víme, že  $U U^T = 1$ . Každou stranu rovnice  $B = U C$  zleva vynásobíme maticí  $U^T$  a tak dostaneme body  $c_1, \dots, c_n$

$$C = U^T B = U^T U U^T A = U^T A$$

**1.2** V případě že hledáme afinní podprostor, nejdříve musíme posunout body  $a_1, \dots, a_n$  tak, aby jejich těžiště leželo v počátku, a dále už postupujeme stejně jako při hledání lin. posprostoru.

## 2 Proložení bodů přímkou

Zavoláme pro dané body funkci  $[U, C, b_0] = \text{fitaff}(A, 1)$  a dostáváme:

$$U = \begin{bmatrix} -0.9617 \\ -0.2740 \end{bmatrix}, b_0 = \begin{bmatrix} 5.1231 \\ 4.9876 \end{bmatrix}$$

Body  $b_1, \dots, b_n$  najdeme jako  $b_i = U c_i + b_0$ , tj. rovnici přímky zjistíme takto:

$$\begin{cases} x = u_1 c + b_{0_x} \\ y = u_2 c + b_{0_y} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{u_2}{u_1} (x - b_{0_x}) + b_{0_y} = 0.2849x + 3.5280$$

### 2.1 Nalezení přímky ve tvaru $\{b_0 + uc \mid c \in \mathbb{R}\}$

Najdeme přímku ve tvaru  $\{b_0 + uc \mid c \in \mathbb{R}\}$ , kde norma  $\|b_0\|$  je nejmenší možná (tj. aby  $\|b_0\|$  byla vzdálenost přímky od počátku 0). Jinými slovy hledáme projekci počátku  $(0, 0)$  na přímku  $y = 0.2849x + 3.5280$  a to bude bod

$$b_0 = \begin{bmatrix} 1.0939 \\ 3.8397 \end{bmatrix}$$

Zkusíme do funkce  $[U, C, b0] = \text{fitaff}(A, 1)$  přidat nový vektor  $b_0$ . Dostáváme stejný vektor  $U$  jako jsme měli předtím, tj.

$$u = \begin{bmatrix} -0.9617 \\ -0.2740 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Nalezení přímky ve tvaru $\{b \in \mathbb{R}^2 \mid x^T b = y\}$

Najdeme přímku ve tvaru  $\{b \in \mathbb{R}^2 \mid x^T b = y\}$ . Za  $x$  vezmeme vektor kolmý na vektor  $U$ , tj.

$$x = \begin{bmatrix} 0.2740 \\ -0.9617 \end{bmatrix},$$

za  $b$  dosadíme  $b_0$  a tak najdeme

$$y = 0.2740 * 5.1231 - 0.9617 * 4.9876 = -3.3928$$

# 3 Komprese a analýza sekvence z motion capture

## 3.1

Optimální hodnotu úloh najdeme jako

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{m-k},$$

kde  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$  jsou vlastní čísla matice  $AA^T$ . Při singularním rozkladu matice  $A$  nenulová singulární čísla matice  $A$  jsou druhé odmocniny nenulových vlastních čísel matice  $AA^T$

## 3.2

Minimální dimenze afinního podprostoru je  $k = 1$ . Protože pokud body nemění svoje vzájemné umístění a pohybují se jenom po přímce, tak můžeme ten pohyb reprezentovat jenom jako posunutí jednoho bodu na přímce.