Punto 0.3

$U(x, y+h) = U(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + O(h^3)$ (I) Expansión en serie de Taylor.

De la ecuación 9 del enunciado se tiene que:

$\omega_z = \omega = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ (1)

$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$ (2)

A la derecha del fluido $v_y = 0$, con esto se tiene que:

$\omega_{zd} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{-\partial^2 U}{\partial y^2}$ (3)

Reemplazando (I) en (3) sin tomar en cuenta los términos $\geq h^3$ se tien lo sgte:

$U(x, y+h) = U(x,y) + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{h^2}{2}\underbrace{\left(\frac{-\partial^2 U}{\partial y^2}\right)}_{\omega_{zd}}$

$\omega_{zd} = -2\frac{U(x,y+h) - U(x,y)}{h^2}$ (4)

si discretizamos (4) nos queda:

$W_{i,j}|_{right} = -2\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h^2}$ (II)

De manera análoga se tiene lo sgte:

Si se tiene la barrera en la izquierda $v_x = 0$, y de ②

tendríamos:

$$\omega_{zI} = -\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}.$$

Usando la misma expansión de ① pero en $\upsilon(x, y-h)$

se tendría que:

$$\upsilon(x, y-h) = \upsilon(x,y) - \frac{h^2}{2}\underbrace{\left(-\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}\right)}_{\omega_{zI}}$$

$$\rightarrow \omega_{zI} = -2\,\frac{\upsilon(x,y-h) - \upsilon(x,y)}{h^2}$$

finalmente:

$$\omega_{i,j}|_{left} = -2\,\frac{\upsilon_{i,j-1} - \upsilon_{i,j}}{h^2}$$