1.1 Series de Fourier

Demostrar los siguientes teoremas

1) Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $\underbrace{f(-T/2) = f(T/2)}_{\text{Funcion Par}}$

y $f'(t)$ es continua por partes y diferenciable,

entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n w_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n w_0 t))$$

$\rightarrow$ El que sea acotada en $[-T/2, T/2]$ determina un intervalo de existencia de Dirichlet, de $f(t)$, por lo tanto, considerando las condiciones de $f(t)$, por lo tanto, se puede afirmar la existencia de esta serie, ya que se cumple.

- b) En el intervalo finito hay un numero finito de maximos y minimos
- c) En el intervalo finito hay un numero finito de discontinuidades.

tal que el intervalo que acote la serie es su periodo.

Ahora, una condicion extra de Dirichlet es que converja a un valor M

- Para verificar, planteo que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0t} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{0} C_n e^{inw_0t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inw_0t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c(-n)\, e^{-inw_0t} + \sum_{n=g}^{\infty} C_n e^{iw_0t}$$; Separo el primer término

y obtengo que:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=g}^{\infty} c(-n)\, e^{-inw_0t} + \sum_{n=g}^{\infty} C_n e^{inw_0t}$$

Ahora, puedo relacionar que $g_n(t) = C_n e^{inw_0t}$ donde $|g_n(t)| = |C_n|$

Como $C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-inw_0t}\, dt$, esta integral converge y está acotado para todo $n \in \mathbb{N}$.

El teorema de Parseval permite que se cumpla que:

$$C_n \leq |C_n e^{inw_0t}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

tal que $\sum_{n=\infty}^{\infty} |C_n|^2$ converge.

Entonces:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\cos(nw_0t)) + b_n \operatorname{sen}(nw_0t)$$

como es convergente de manera uniforme,

$$\frac{d}{dt} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(a_n \cos(nw_0t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0t)\right)$$

que es igual a $f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nw_0\left(-a_n \operatorname{sen}(nw_0t) + b_n \cos(nw_0t)\right)$ ■

Para la integral se tiene que:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nw_0t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0t))\right) + \frac{a_0}{2}\right]dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \operatorname{Sen}(nw_0t) - b_n\cos(nw_0t)}{n\omega_0} + \frac{a_0}{2}t\right]\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw_0}\left(a_n\left[\operatorname{sen}(nw_0t_2) - \operatorname{Sen}(nw_0t_1)\right] - b_n\left[\cos(nw_0t_2) - \cos(nw_0t_1)\right]\right) + \frac{a_0(t_2-t_1)}{2}$$

$$= \frac{a_0}{2}(t_2-t_1) + \frac{1}{nw_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left[\operatorname{sen}(nw_0t_2) - \operatorname{Sen}(nw_0t_1)\right] + b_n\left[\cos(nw_0t_1) - \cos(nw_0t_2)\right]\right)$$ ■