

Càlcul de probabilitats

Probabilitat (axiomes)	$0 \leq P(A)$	$P(\Omega) = 1$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A i B disjunts
Propietats	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$P(\emptyset) = 0$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Probabilitat condicionada i d'una intersecció	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si $P(B) > 0$		$P(A \cap B) = P(B A) \cdot P(A) = P(A B) \cdot P(B)$
Fórmula de Bayes	$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$		
Fórmula probabilitats totals ($A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_J$ és una partició del conjunt de resultats)	$P(B) = \sum_{j=1}^J P(B A_j) \cdot P(A_j)$		$P(A_i B) = \frac{P(B A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^J P(B A_j) \cdot P(A_j)}$
Independència	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	$P(B A) = P(B)$	$P(A B) = P(A)$

Indicadors numèrics de variables aleatòries

	Definicions	Propietats
Esperança	$E(X) = \mu_X = \sum_{\forall k} k p_X(k)$ (V.A.D.) $E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$ (V.A.C.)	<ul style="list-style-type: none"> $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ $E(a+b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$
Variància	$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{\forall k} (k - E(X))^2 p_X(k)$ (V.A.D.) $V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$ (V.A.C.)	<ul style="list-style-type: none"> $V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ $V(a+b \cdot X) = b^2 \cdot V(X)$
Covariància i correlació	$Cov(X, Y) = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} (x - E(X))(y - E(Y)) p_{XY}(x, y)$ (V.A.D.) $Cov(X, Y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f_{X,Y}(x, y) dx dy$ (V.A.C.) $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$	<ul style="list-style-type: none"> $Cov(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y)$ $Cov(a \cdot X, b \cdot Y) = a \cdot b \cdot Cov(X, Y)$ $Cov(X, X) = V(X)$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + Cov(X, Y)$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ (si X i Y són independents) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot Cov(X, Y)$ $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot Cov(X, Y)$ $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ (si X i Y són independents)

Distribucions de variables discretes i contínues

Distribució	Declaració	Funció de probabilitat o de densitat	Funció distribució $F_X(k) = \sum_{i \leq k} P_X(i)$ o $\int_{-\infty}^k f_X(x) dx$	Esperança $E(X)$	Variància $V(X)$
Bernoulli	$X \sim \text{Bern}(p)$	$P_X(k) = \begin{cases} q & k = 0 \\ p & k = 1 \end{cases}$	$F_X(k) = \sum_{i \leq k} P_X(i)$	p	$p \cdot q$
Binomial R: <code>*binom(k,n,p)</code>	$X \sim B(n,p)$	$P_X(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$	$F_X(k) = \sum_{i \leq k} P_X(i)$ (taules)	$p \cdot n$	$p \cdot q \cdot n$
Poisson R: <code>*pois(k,λ)</code>	$X \sim P(\lambda)$	$P_X(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$	$F_X(k) = \sum_{i \leq k} P_X(i)$ (taules)	λ	λ
Geomètrica R: <code>*geom(k,p)</code>	$X \sim \text{Geom}(p)$	$P_X(k) = p \cdot q^{k-1}, k = 1, 2, \dots$ $P_{X2}(k) = p \cdot q^k, k = 0, 1, 2, \dots$ (R)	$F_X(k) = 1 - q^{k+1}$ $F_{X2}(k) = 1 - q^{k+1}$ (R)	$1/p$ $E(X2)=q/p$	q/p^2
Binomial Negativa §	$X \sim \text{BN}(r, p)$	$P_X(k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot q^{k-r}, k \geq r$	$F_X(k) = \sum_{i \leq k} P_X(i)$	r/p	$q \cdot r/p^2$
Exponencial R: <code>*exp(x,λ)</code>	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad x > 0$	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Uniforme R: <code>*unif(k,a,b)</code>	$X \sim U(a,b)$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b$	$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$	$\frac{(a+b)}{2}$	$(b-a)^2 / 12$
Normal R: <code>*norm(k,μ,σ)</code>	$X \sim N(\mu, \sigma)$	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$	$F_X(x) = ?$ (taules $N(0,1)$)	μ	σ^2

* = d, p, q, r; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; n, r enter > 0; a, b, μ real; λ, σ real > 0; “~” segueix exactament; “≈” aproxima

$X1 \sim N(\mu_1, \sigma^2_1)$ $X2 \sim N(\mu_2, \sigma^2_2)$ $X1, X2$ independents a, b escalars $X = aX1 + bX2 \sim N(\mu_X = a\mu_1 + b\mu_2, \sigma^2_X = a^2\sigma^2_1 + b^2\sigma^2_2 + 2ab \rho_{XY}\sigma_1\sigma_2)$

TCL: X_1, \dots, X_n i.i.d. ($n \rightarrow \infty$), amb $E(X_i) = \mu$ i $V(X_i) = \sigma^2$, llavors $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{X}_n \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ (i també $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, \sigma^2 n)$)

§ Igual que per el model Geomètric, R implementa la Binomial Negativa com a “nombre de fracassos fins al r-èssim èxit”, enlloc del nombre d'intents: és a dir, $X2 = X - r$.