Programación dinámica (DP)

1. Definiciones

2. Principio de optimalidad y formalización del procedimiento

3. Ejemplo del viajero

4. Ejemplos de sistemas de energía eléctrica
   ✓ Planificación de la expansión de la generación
   ✓ Asignación de unidades térmicas

Definiciones

Técnica matemática orientada a la solución de problemas con *decisiones secuenciales en etapas sucesivas* donde se debe minimizar el coste total de dichas decisiones.

En cada etapa se valora no sólo el *coste actual* de tomar una decisión sino los *costes futuros* que se originan a partir de ella.

Etapas: k *Decisiones* en cada etapa: u_k *Estados* (situaciones en que puede encontrarse el sistema en cada etapa): x_k

El número de estados puede ser finito o infinito.

Mediante una decisión u_k se va de un estado al comienzo de una etapa x_k a otro estado al comienzo de la siguiente x_{k+1}.

Variables estado de etapa k		Decisiones		Variables estado de etapa $k+1$
x_k	$\rightarrow$	u_k	$\rightarrow$	x_{k+1}

En cada etapa se evalúa la decisión óptima para cada uno de sus estados x_k.

Cada estado guarda toda la información necesaria para tomar las decisiones futuras sin necesidad de conocer cómo se ha alcanzado dicho estado.

Es un *procedimiento recursivo* que resuelve de manera iterativa, incorporando cada vez una etapa, partes cada vez mayores del problema original.
El procedimiento puede hacerse *hacia delante* o *hacia atrás*.

Principio de optimalidad de la DP o de Bellman

Dado un estado, la política óptima para las siguientes etapas no depende de la política tomada en las etapas anteriores.

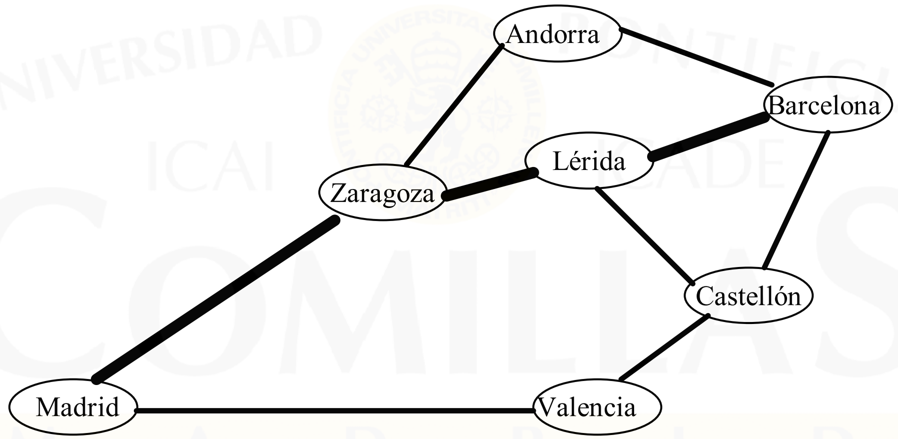
La decisión de óptima inmediata sólo depende del estado en el que se está, no de cómo se llegó hasta él. Toda la información sobre el pasado se resume en el estado en que se encuentra.

Una vez conocida la solución óptima global, cualquier solución parcial que involucre sólo una parte de las etapas es también una solución óptima.

Todo subconjunto de una solución óptima es a su vez una solución óptima para un problema parcial.

Ejemplo

Buscamos el camino más corto entre Madrid y Barcelona y averiguamos que la solución óptima del problema pasa por Zaragoza.



Si nos preguntamos por el camino más corto entre Zaragoza y Barcelona, es obvio que será el mismo que el utilizado en la solución del problema global (Madrid - Barcelona).
Si existiera un camino más corto entre Zaragoza y Barcelona (problema parcial), lo habríamos tomado como parte de la solución del problema global.

Relación recursiva (hacia atrás)

Define la política óptima en la etapa k conocida la política óptima en cualquier estado de la etapa $k+1$

$$f_k^*(x_k) = \min_{u_k} \left\{ c_{x_k u_k} + f_{k+1}^*(x_{k+1}) \right\}$$

x_k estado actual en la etapa k

x_{k+1} estado al que se llega en la etapa $k+1$ dependiente del estado inicial x_k y de la decisión u_k

u_k variable de decisión en la etapa k

$f_k(x_k)$ valor acumulado de la función objetivo para el estado x_k desde la etapa k hasta N

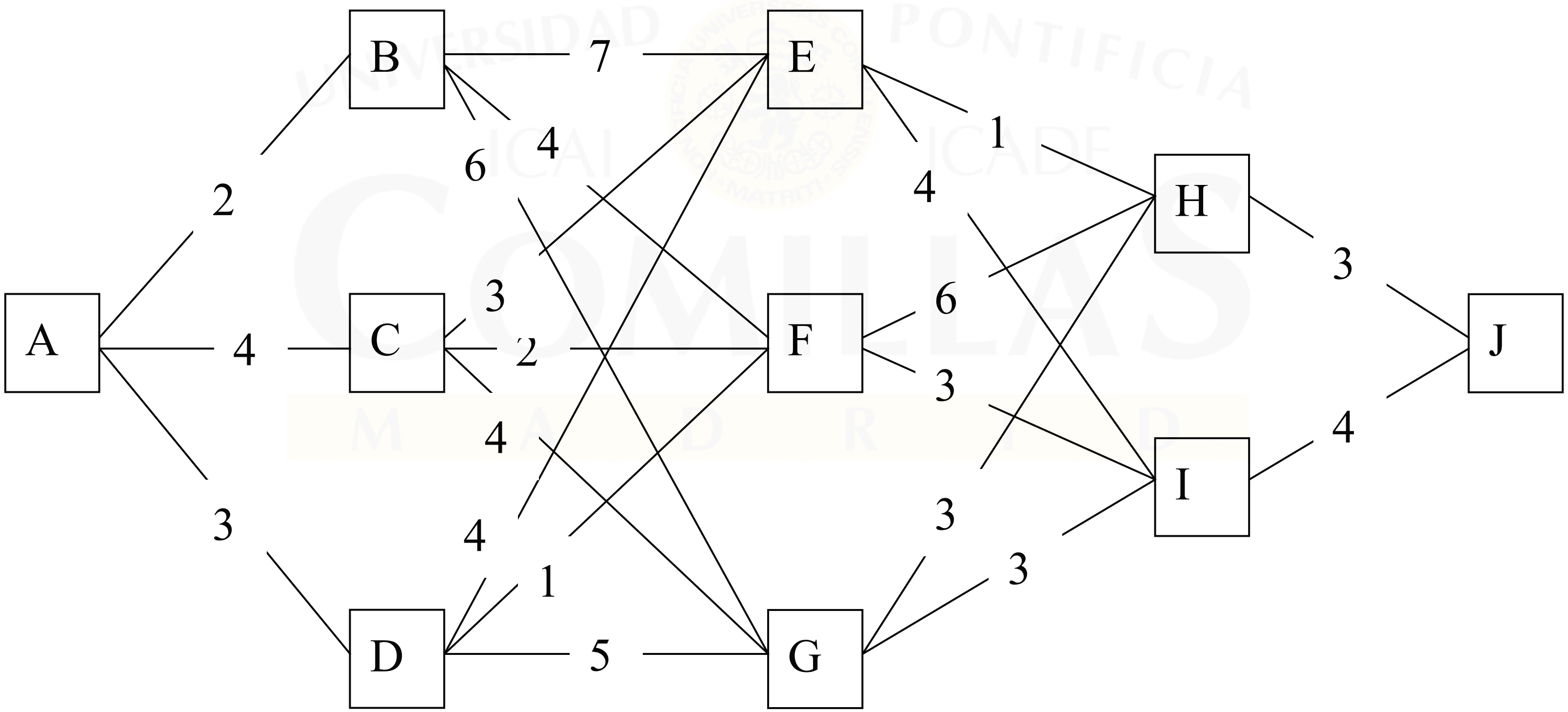
$c_{x_k u_k}$ valor inmediato de tomar la decisión u_k desde el estado x_k

Coste **acumulado** desde una etapa k hasta el final para un estado x_k, $f_k^*(x_k) =$
Coste **inmediato** de dicha etapa $c_{x_k u_k}$ +

Coste **acumulado** desde una etapa $k+1$ hasta el final para un estado x_{k+1}, $f_{k+1}^*(x_{k+1})$

Ejemplo: problema del viajero

El viajero desea ir de la ciudad A a la J por el camino más corto.



DP hacia atrás (*backward DP*)

Empezamos por la etapa $k = 4$

Estados x_4	Distancia acumulada f_4^*	Decisión óptima u_4^*
H	3	J
I	4	J

Para la etapa $k = 3$

	Estados x_4			
Estados x_3	H	I	Distancia acumulada f_3^*	Decisión óptima u_3^*
E	4	8	4	H
F	9	7	7	I
G	6	7	6	H

Para la etapa $k = 2$

	Estados x_3		

Estados x_2	E	F	G	Distancia acumulada f_2^*	Decisión óptima u_2^*
B	11	11	12	11	E, F
C	7	9	10	7	E
D	8	8	11	8	E, F

Finalmente en la etapa $k = 1$

	Estados x_2				
Estado x_1	B	C	D	Distancia acumulada f_1^*	Decisión óptima u_1^*
A	13	11	11	11	C, D

Ruta óptima: A C E H J 4+3+1+3=11

A D E H J 3+4+1+3=11

A D F I J 3+1+3+4=11

El óptimo no coincide con la *decisión miope* A B F I J 2+4+3+4=13

DP hacia adelante (*forward DP*)

Para la etapa $k = 2$

	Estado x_1		
Estados x_2	A	Distancia acumulada f_2^*	Decisión óptima u_2^*
B	2	2	A
C	4	4	A
D	3	3	A

Para $k = 3$

	Estados x_2				
Estados x_3	B	C	D	Distancia acumulada f_3^*	Decisión óptima u_3^*
E	9	7	7	7	C, D
F	6	6	4	4	D
G	8	8	8	8	B, C, D

Para $k = 4$

	Estados x_3				
Estados x_4	E	F	G	Distancia acumulada f_4^*	Decisión óptima u_4^*
H	8	10	11	8	E
I	11	7	11	7	F

Finalmente para la etapa $k = 5$

	Estados x_4			
Estados x_5	H	I	Distancia acumulada f_5^*	Decisión óptima u_5^*
J	11	11	11	H, I

Ruta óptima: J H E C A 3+1+3+4=11

J H E D A 3+1+4+3=11

J I F D A 4+3+1+3=11

Ejemplos característicos de DP de sistemas de energía eléctrica

1. Planificación de la expansión de la generación

2. Programación semanal de grupos térmicos

3. Coordinación hidrotérmica

Planificación de la expansión de la generación

Minimizar los costes totales (fijos y variables) de expansión del equipo generador para un alcance de varios años.

Decisiones: Potencia a instalar de cada tipo de generación en cada año del alcance del modelo.

Restricciones de expansión:
- Potencia instalada inicial conocida.
- Máxima (mínima) potencia instalable, inversión máxima (mínima), número máximo (mínimo) de generadores instalables en cada año.

Restricciones de operación:
- Balance generación demanda en cada año.

Estados: Número total de generadores instalados al comienzo de cada año.

Ejemplo de planificación de la expansión de la generación

Año	Demanda (MW)	Coste de inversión por generador de 1 GW [€/GW año]
1999	1000	50
2000	2000	55
2001	4000	60
2002	6000	65
2003	7000	45
2004	8000	40

- Existe un coste adicional de 15 €/año por año si se construye al menos un generador
- No se pueden instalar más de 3000 MW de generación en ningún año
- Se parte de un sistema eléctrico sin ningún generador instalado

Etapa $k = 2004$

Estado	8000	Cst fut	Inst ópt
7000	15+40=55	**55**	1000
8000	0	**0**	0

Etapa $k = 2003$

Estado	7000	8000	Cst fut	Inst ópt
6000	15+45+**55**=115	15+90=105	**105**	2000
7000	**55**	15+45=60	**55**	0
8000		0	**0**	0

Etapa $k = 2002$

Estado	6000	7000	8000	Cst fut	Inst ópt
4000	15+130+**105**=250	15+195+**55**=265		**250**	2000
5000	15+65+**105**=185	15+130+**55**=200	15+195=210	**185**	1000
6000	**105**	15+65+**55**=135	15+130=145	**105**	0
7000		**55**	15+65=80	**55**	0
8000			0	**0**	0

Etapa $k = 2001$

Estado	4000	5000	6000	7000	8000	Cst fut	Inst ópt
2000	15+120+**250**=385	15+180+**185**=380				**380**	3000
3000	15+60+**250**=325	15+120+**185**=320	15+180+**105**=300			**300**	3000
4000	**250**	15+60+**185**=260	15+120+**105**=240	15+180+**55**=250		**240**	2000
5000		**185**	15+60+**105**=180	15+120+**55**=190	15+180=195	**180**	1000
6000			**105**	15+60+**55**=130	15+120=135	**105**	0

Etapa *k* = 2000

Estado	2000	3000	4000	5000	6000	Cst fut	Inst ópt
1000	15+55+**380**=445	15+110+**300**=425	15+165+**240**=420			**420**	3000
2000		15+55+**300**=365	15+110+**240**=365	15+165+**180**=360		**360**	3000
3000			15+55+**240**=305	15+110+**180**=305	15+165+**105**=285	**285**	3000

Etapa *k*= 1999

Estado	1000	2000	3000	Cst fut	Inst ópt
0	15+50+**420**=485	15+100+**360**=475	15+150+**285**=450	**450**	3000

Solución óptima en potencia a instalar en cada año

1999	3000
2000	3000
2001	0
2002	0
2003	2000
2004	0

Coste total = 15 + 150 + 15 + 165 + 15 + 90 = 450

MÉTODO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Andrés Ramos

Mariano Ventosa

Mayo 1996

CONTENIDO

REFERENCIAS

[1] Bertsekas, 87. "*Dynamic Programming. Deterministic and Stochastic Models*". Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1987.

[2] REE. “*Modelos Hidrotérmicos”*. Documento interno de Red Eléctrica de España.

INTRODUCCIÓN

- **Problemas que aborda la Programación Dinámica:**

  - **Metodología matemática orientada a la solución de problemas en los que se deben tomar decisiones en etapas sucesivas, con el objetivo final de minimizar el coste total de dichas decisiones.**

  - **Las consecuencias de las decisiones pueden no ser completamente predecibles.**

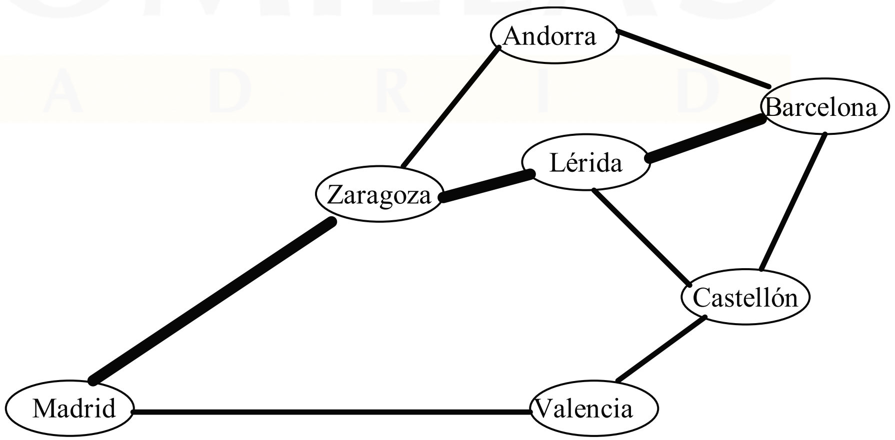
  - **Un aspecto fundamental de este tipo de problemas es que al tomar una opción en una de las etapas, no tenemos que valorar sólo el coste actual de dicha decisión sino los costes futuros en que incurriremos por causa de ella.**

- **El principio de optimalidad de Bellman.**

  - **La idea clave en la búsqueda de la opción de menor coste en una toma de decisiones dividida en varias etapas es que conocida la solución óptima global, cualquier solución parcial que involucre sólo a una parte de las etapas, también es una solución óptima.**

  - **Ejemplo:**

    + **Buscamos el camino más corto entre Madrid y Barcelona y averiguamos que la solución del problema pasa por Zaragoza.**



+ **Si nos preguntamos por el camino más corto entre Zaragoza y Barcelona, es obvio que será el mismo que el utilizado en la solución del problema global (Madrid - Barcelona).**
+ **Si existiera un camino más corto entre Zaragoza y Barcelona (problema parcial), lo habríamos tomado como parte de la solución del problema global.**

- **Esta idea que se conoce como el principio de optimalidad de Bellman es la clave para elaborar el algoritmo de programación dinámica: *Todo subconjunto de una solución óptima es a su vez una solución óptima para un problema parcial*.**

- **Aplicaciones de la Programación Dinámica.**

- La programación dinámica se adapta bien a problemas de carácter secuencial como por ejemplo:
    - + Búsqueda del camino más corto entre dos puntos.
    - + Planificación de tareas.
    - + Gestión de recursos escasos.
    - + Gestión de stocks.
    - + Coordinación hidrotérmica.

ALGORITMO DE LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA

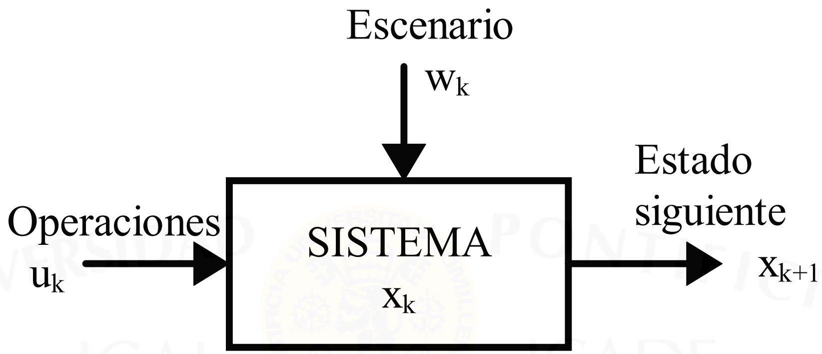
- **Descripción formal del sistema.**

  - **Sistema que evoluciona de forma discreta con el tiempo, con un horizonte finito de N etapas:**

    - **k:** índice de cada etapa. $k = 0 \div N-1$.
    - **x_k:** estado del sistema en la etapa k.
    - **u_k:** decisión tomada en el periodo k y cuya influencia se nota en el periodo k+1.
    - **w_k:** perturbación sobre el sistema en el periodo k y cuya influencia se nota en el periodo k+1. Puede no ser perfectamente predecible.

  - **El estado siguiente a cada etapa depende del estado actual del sistema, de las decisiones tomadas en esa etapa y de las perturbaciones exteriores:**

* $x_{k+1} = f_k\,(x_k, u_k, w_k)$



- **Resolución del problema:**

  - **El principio de Bellman sugiere abordar los problemas de programación dinámica de forma parcial.**

  - **Llamaremos P_0 al problema global y P_k al problema resultante de considerar sólo las etapas a partir de la k hasta el final.**

- **La solución del problema P_{N-1} (considerando sólo la última etapa) se obtiene como sigue:**

  + **El coste futuro en que incurrimos por estar en un determinado estado final x_N es conocido por ser la etapa final.**
  + **Para cada estado x_{N-1} al principio de la etapa podemos calcular el coste asociado a cada una de las posibles decisiones u_{N-1}.**
  + **Nos quedamos para cada posible estado x_{N-1} con la decisión de coste mínimo.**
  + **La solución del problema P_{N-1} consiste en una estrategia y un coste asociado para cada estado inicial posible.**

- **Ahora podemos enfrentarnos al problema P_{N-2}:**

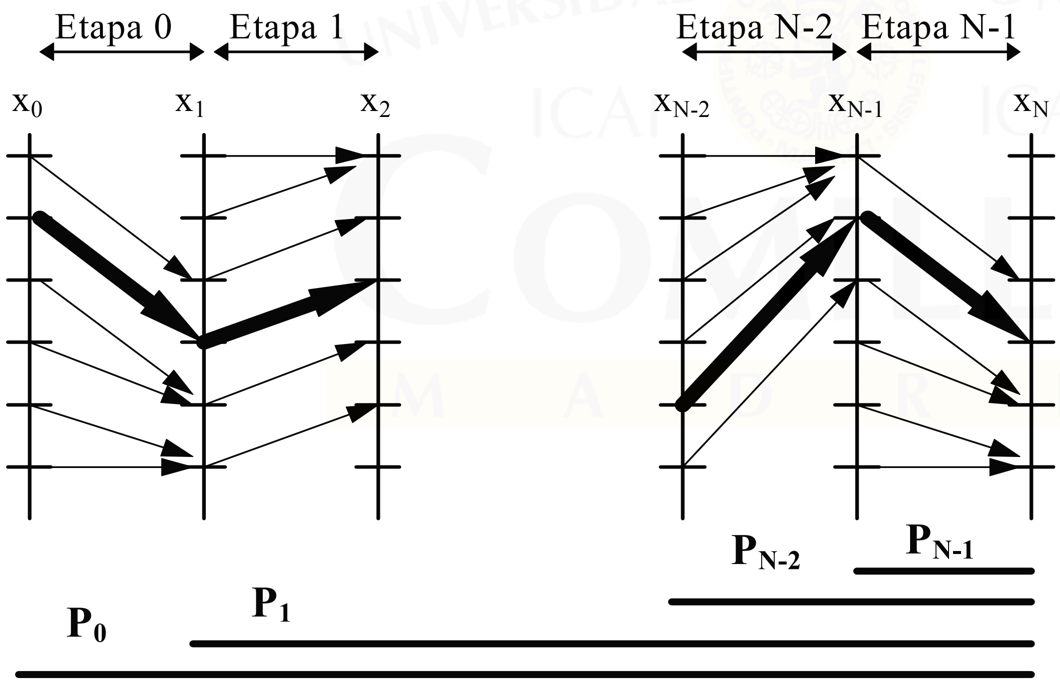
  + **Para cada estado x_{N-2} se calcula el coste asociado a cada una de las posibles decisiones u_{N-2} que estará compuesto por dos términos.**
    * **El coste de la etapa N-2 debido a la decisión tomada.**

* El coste en que incurriremos en el futuro debido al estado final del sistema x_{N-1}. Este valor es la solución del problema P_{N-1}, ya resuelto.

+ El coste futuro para el estado final del sistema x_{N-1} obtenido como óptimo del problema P_{N-1} forma parte de nuestra solución óptima según el principio de Bellman.
+ Nuevamente nos quedamos para cada estado x_{N-2} con la decisión de coste mínimo, obteniendo así la solución del problema P_{N-2}.

- Se procede de forma recursiva hasta llegar a la solución del problema P_0.

- **La siguiente figura ilustra este procedimiento.**



Ejemplo: Gestión de un embalse de bombeo puro

- **Datos del embalse:**

  - **Alcance de la optimización 3 semanas (N = 3 etapas).**

    + Etapas k = 0, 1 y 2.

  - **Estados posibles del embalse x_k: 0, 1, 2 ó 3.**

    + Lleno (3): tres unidades de volumen.

    + Semilleno (2): dos unidades de volumen.

    + Semivacío (1): una unidad de volumen.

    + Vacío (0): cero unidades de volumen.

  - **Sabemos que $x_0 = 1$.**

  - **Las decisiones posibles son acerca del bombeo del embalse en cada semana u_k: 0, 1 ó 2.**

+ **Máxima capacidad de bombeo: 2 unidades.**

- **El coste de las decisiones es de una unidad económica por cada unidad de volumen bombeado.**

- **Existe un coste de almacenamiento, debido a las pérdidas por filtraciones y evaporación, de 0.1 unidades económicas por cada unidad embalsada y no turbinada al final de la semana.**

- **Los valores de la demanda de agua a turbinar w_k:**

    + **Semana 1: $w_0 = 2$ unidades.**
    + **Semana 2: $w_1 = 1$ unidades.**
    + **Semana 3: $w_2 = 3$ unidades.**

- **El coste de la demanda no satisfecha es de 2 unidades económicas por cada unidad de volumen no disponible.**

- **Solución de la última semana (etapa 2):**

- La demanda vale $w_2 = 3$.

- Debemos obtener la gestión óptima y su coste (bombeo + demanda no satisfecha +almacenamiento) para cada estado posible al principio del periodo.

Estado Inicial x_2	Decisión u_2	Estado Final x_3	Coste
0	0	0	0+2+3+0 = 6
	1	0	1+2+2+0 = 5
	2	0	2+2+1+0 = 4
1	0	0	0+2+2+0 = 4
	1	0	1+2+1+0 = 3
	2	0	2+2+0+0 = 2
2	0	0	0+2+1+0 = 2
	1	0	1+2+0+0 = 1
	2	1	2+2+0+0.1 = 2.1
3	0	0	0+2+0+0 = 0
	1	1	1+2+0+0.1 = 1.1
	2	2	2+2+0+0.2 = 2.2

- **Solución de la segunda semana (etapa 1):**

  - **La demanda vale w_1 = 1.**

  - **Debemos obtener la gestión óptima y su coste para cada estado posible al principio del periodo, agregando los costes de la etapa 2.**

Estado Inicial x_1	Decisión u_1	Estado Final x_2	Coste
0	0	0	0+2+1+0+4 = 6
	1	0	1+2+0+0+4 = 5
	2	1	2+2+0+0.1+2 = 4.1
1	0	0	0+2+0+0+4 = 4
	1	1	1+2+0+0.1+2 = 3.1
	2	2	2+2+0+0.2+1 = 3.2
2	0	1	0+2+0+0.1+2 = 2.1
	1	2	1+2+0+0.2+1 = 2.2
	2	3	2+2+0+0.3+0 = 2.3
	0	2	0+2+0+0.2+1 = 1.2

3	**1**	**3**	**1+2+0+0.3+0 = 1.3**
	2	**Imposible**	**-**

- **Solución de la primera semana (etapa 0):**

  - **La demanda vale w_0 = 2.**
  - **El estado inicial x_0 = 1.**
  - **Debemos obtener la gestión óptima y su coste para un sólo estado posible al principio del periodo, agregando los costes de la etapa 1.**

Estado Inicial x_1	Decisión u_1	Estado Final x_2	Coste
1	0	0	0+2+1+0+4.1 = 6.1
	1	0	1+2+0+0+4.1 = 5.1
	2	1	2+2+0+0.1+3.1=5.2

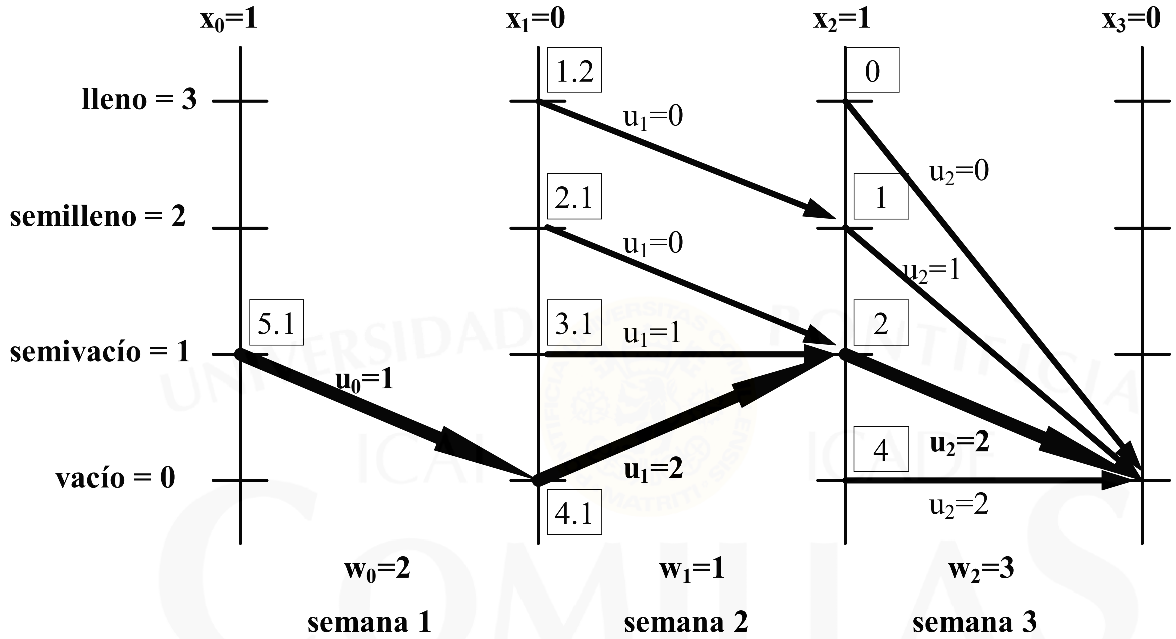
- **La solución de esta etapa nos proporciona el coste mínimo total de 5.1 unidades económicas, con la siguiente política de decisiones:**

  + Bombeo de la semana 1: $u_0 = 1$

  + Bombeo de la semana 2: $u_1 = 2$

  + Bombeo de la semana 3: $u_2 = 2$

- **La siguiente figura es una representación gráfica del problema, donde los costes acumulados aparecen recuadrados.**



- **Nótese que el número de evaluaciones de la función de coste responde a la expresión (N-1)+N_x+ N_u+ N_u - z. En la que N es el número de etapas, N_x es el número de estados posibles de cada etapa, N_u es el número de decisiones posibles para cada estado y z el número de alternativas imposibles.**

- En nuestro ejemplo: 2 + 4 + 3 + 3 - 1 = 26 evaluaciones.

PROGRAMACIÓN DINÁMICA ESTOCÁSTICA

- **Determinista vs Estocástica:**

  - **Determinista:**

    + **Las perturbaciones w_k que actúan sobre el sistema son perfectamente predecibles.**

  - **Estocástica:**

    + **Las perturbaciones w_k que actúan sobre el sistema se consideran variables aleatorias.**

    + **No se conoce el valor exacto de w_k, pero si su función de distribución.**

    + **En este caso la decisión óptima es la que minimiza el coste esperado.**

- **Ejemplo:**

  - **En el caso anterior del embalse de bombeo la demanda se conocía previamente y esto ha permitido optimizar la gestión del bombeo (determinista).**

  - **Hubiera sido más realista considerar una demanda w_k de función de distribución conocida. Por ejemplo:**

    $w_{0,1,2}$= 1 con probabilidad 0.3

    $w_{0,1,2}$= 2 con probabilidad 0.5

    $w_{0,1,2}$= 3 con probabilidad 0.2

  - **Cuando se calcula el coste de cada decisión de bombeo, deberá hacerse para cada valor de la demanda w_k y luego ponderar estos costes con sus probabilidades para obtener el coste esperado.**

- **Programación Dinámica Estocástica aplicada a la Coordinación Hidrotérmica:**

  - **En los modelos de planificación de los sistemas eléctricos las estocasticidades que más influyen son:**

    + **Demanda Eléctrica.**
    + **Hidraulicidad.**
    + **Fallos de los grupos.**

  - **Estas estocasticidades son consideradas en los modelos basados en programación dinámica estocástica mediante:**

    + **Perturbaciones w_k modeladas como variables aleatorias definidas por sus distribuciones de probabilidad.**
    + **Directamente en el cálculo de los costes de cada etapa.**

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

- **Tenemos un sistema dinámico en tiempo discreto:**

$$x_{k+1} = f_k (x_k, u_k, w_k)$$

- **Donde**

  + $k = 0, 1, \dots N-1$.
  + x_k **pertenece a un espacio de estados posibles.**
  + u_k **pertenece a un espacio de controles posibles y puede estar restringido en cada estado de cada etapa a un subconjunto del mismo.**
  + w_k **pertenece a un espacio de perturbaciones posibles y está caracterizada por una función de probabilidad que puede depender explícitamente de x_k y u_k pero no de valores anteriores $w_{k-1} \dots w_0$.**

- **Llamamos $\pi = \{\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{N-1}\}$ a una ley de control que para cada estado x_k proporciona un control u_k:** $u_k = \mu_k(x_k)$

- **Dado un estado inicial x_0 el problema es encontrar una ley de control óptima $\pi^* = \{\mu^*_0, \mu^*_1, ..., \mu^*_{N-1}\}$ que minimice la esperanza (E) del coste definida como:**

$$J_0(x_0) = \underset{w_k}{E}\left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left[f_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k)\right]\right\}$$

- **Sujeto a la restricción $x_{k+1}= f_k(x_k, \mu_k(x_k),w_k)$, y conocidas las funciones de coste g_k.**

- **Si llamamos $J_k(x_k)$ al coste óptimo para la etapa k, el principio de Bellman se formula como:**

$$J_k(x_k) = \min_{u_k} \underset{w_k}{E} \left\{ g_k(x_k, u_k, w_k) + J_{k+1}\left[f_k(x_k, u_k, w_k) \right] \right\}$$

- **Donde k = 0,1, ...,N-1.**

MODELO DE GESTIÓN HIDROTÉRMICA DESARROLLADO POR RED ELÉCTRICA DE ESPAÑA (MITRE):

- **Modelo básico:**

  - **Caracterización del sistema eléctrico (simplificado):**

    + Subsistema hidráulico reducido a un embalse, descrito por el caudal máximo de turbinación, el salto máximo y mínimo, la eficiencia en función del salto ...

    + Subsistema térmico formado por varios grupos, caracterizados por su potencia máxima, eficiencia, costes ...

    + Red eléctrica supuesta como nudo único.

    + Demanda eléctrica modelada por su curva duración-carga por escalones.

    + Hidraulicidad conocida en primera aproximación.

- **El problema de programación dinámica es el siguiente:**
  - **+ La variable de estado *x* en nuestro problema es el volumen de agua embalsado.**
  - **+ La decisión *u* que queremos tomar en cada etapa (semana) es la cantidad de agua a emplear en la generación óptima.**
  - **+ Las perturbaciones *w* del entorno son la demanda y los fallos de los grupos.**
- **Lo que pretendemos es calcular el coste y la estrategia óptima a partir del estado actual mediante programación dinámica.**
  - **+ Para cada estado inicial posible de *x* (nivel de agua) calculamos el coste de explotación de la semana considerada, para distintos valores de generación hidráulica.**
  - **+ Se tendrán en cuenta los costes futuros en que incurriremos por dejar el embalse con un determinado nivel de agua:**
    - **+ Coste del combustible térmico al que sustituiría en el futuro.**

+ **Es necesario disponer de la curva de costes futuros del agua en función del nivel, para cada semana.**

- **Debido al desconocimiento de los costes futuros, el algoritmo de la programación dinámica se plantea hacia atrás, desde la última semana hasta la primera.**

- **La última semana se toma lo suficientemente alejada como para que no influya en el presente (6 años), de este modo le asignamos coste futuro cero.**

- **La curva de costes futuros del agua de la etapa k se calcula a partir de la curva de costes futuros de la etapa k+1.**

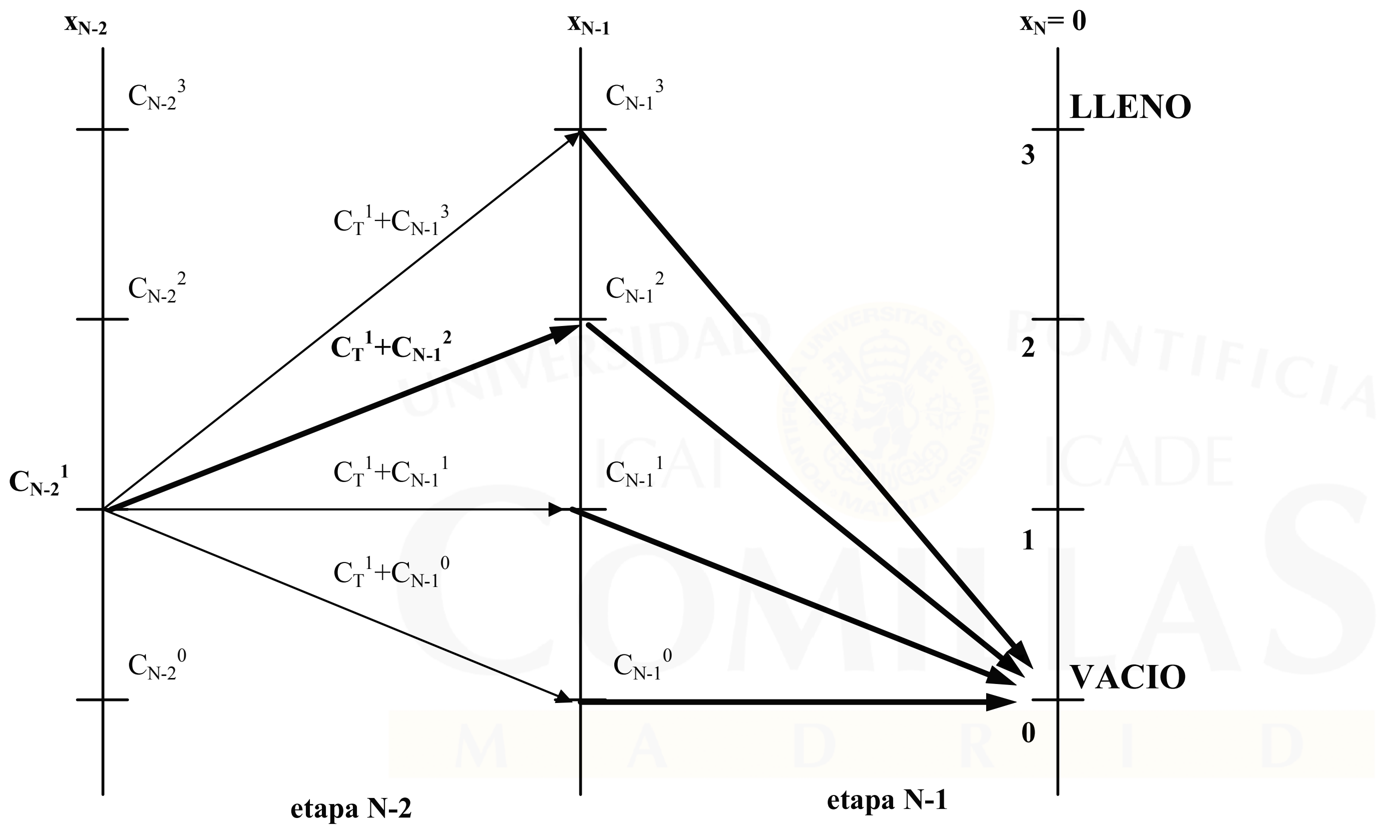
- **Este enfoque de la programación dinámica es determinista, ya que se consideran conocidos a priori los factores de incertidumbre:**

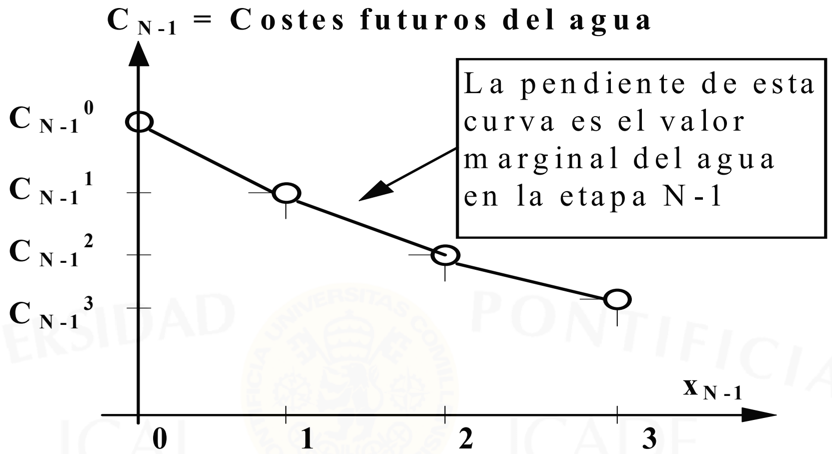
  + **Demanda.**
  + **Aportaciones.**

+ Fallos de los grupos.

- **Proceso de Cálculo.**

  - **La siguiente figura esquematiza el proceso de cálculo de las dos últimas etapas.**


x_{N-2}
x_{N-1}
$x_N = 0$
C_{N-2}^3
C_{N-1}^3
LLENO
3
$C_T^1+C_{N-1}^3$
C_{N-2}^2
C_{N-1}^2
$C_T^1+C_{N-1}^2$
2
C_{N-2}^1
$C_T^1+C_{N-1}^1$
C_{N-1}^1
1
$C_T^1+C_{N-1}^0$
C_{N-2}^0
C_{N-1}^0
VACIO
0
etapa N-2
etapa N-1



- Dado que el coste futuro del agua para la etapa N es igual a cero, la trayectoria óptima en cada caso es la de máxima turbinación.

- La curva de costes futuros C_{N-1} para la etapa x_{N-2} se obtiene de los costes calculados para cada estado x_{N-1}.

- Para la etapa N-2 hay que calcular los costes para cada estado x_{N-2}. La figura muestra el proceso para el nivel 1.

+ **Se ha supuesto que el coste total mínimo (térmico + futuro del agua) se obtiene para X_{N-1} igual a 2.**
+ **Por tanto $C_{N-2}^{1} = C_{T}^{1} + C_{N-1}^{2}$.**

+ **La trayectoria óptima para cada x_k debe coincidir con aquélla que iguale el valor marginal del agua en la curva de costes futuros C_{k+1}, con el coste marginal del equipo térmico C_T de la etapa k.**

- **Tratamiento de la aleatoriedad en la demanda y los fallos térmicos.**

  - **La demanda se modela mediante su curva duración carga, con tres o cinco niveles de carga, distinguiendo entre días laborables y festivos en el segundo caso.**

  - **Se plantean dos situaciones:**

    + **Fallo del 4 % de todo el equipo generador con probabilidad 0.7.**
    + **Fallo del 14 % de todo el equipo generador con probabilidad 0.3.**

  - **El algoritmo de la programación dinámica no se ve modificado por este tratamiento de la demanda y de los fallos, pero se multiplican por 10 (5 demandas y 2 tasas de fallo) el número de cálculos necesarios en cada etapa.**

- **Tratamiento de la aleatoriedad en las aportaciones.**

  - **Las aportaciones de cada semana del año son modeladas mediante sus funciones de distribución, obtenidas de datos históricos, y discretizadas en cinco niveles de aportaciones.**

  - **Para cada estado inicial se calcula la trayectoria óptima en base al coste mínimo esperado. Se calculan cinco costes distintos, uno para cada nivel de aportaciones, ponderándose con sus probabilidades. Esto es equivalente a calcular cinco curvas de costes futuros y luego ponderarlas.**

  - **El enfoque anterior puede mejorarse considerando la correlación existente entre las aportaciones de semanas consecutivas:**

    + **Esto se representa mediante una tabla de probabilidades compuestas (5×5), es decir, la probabilidad condicionada de que a un**

determinado nivel de aportaciones le siga otro cualquiera de los cinco posibles.

+ Ahora las cinco curvas de coste futuro (k+1) se ponderan con las probabilidades compuestas, obteniéndose cinco curvas, una para cada nivel de aportaciones de la etapa k.

- **Múltiples Embalses.**

  - Para una representación realista del caso español son necesarios entre 30 y 40 embalses.

  - El número de estados posibles de cada etapa crece de forma exponencial al considerar múltiples embalses (7^{40}), así como el número de trayectorias a tantear para encontrar la óptima.

  - Esto implica que la solución del problema usando programación dinámica sobre los 40 embalses sea inviable (maldición de la dimensionalidad).

  - Para evitar este inconveniente de la programación dinámica el problema se resuelve de la siguiente forma:

+ La trayectoria óptima para cada estado inicial no se obtiene tanteando todas las posibles, sino directamente, mediante técnicas de programación lineal con restricciones y función objetivo no lineales:
    + Se utiliza la herramienta MINOS.
    + La función objetivo es el coste total, suma del térmico (lineal), más el coste futuro del agua (no lineal).
    + En este cálculo se incluye toda la red hidráulica en detalle agrupada en unos 40 subsistemas.
+ Los resultados obtenidos del problema de optimización planteado, para cada estado inicial, son:
    + La trayectoria óptima.
    + El coste de la trayectoria óptima, para construir las curvas de costes futuros.
    + Los costes marginales del agua para cada embalse.

+ **Para limitar el número de estados iniciales, o lo que es lo mismo para limitar el número de trayectorias óptimas que hay que buscar, el algoritmo de la programación dinámica reduce el número de estados iniciales posibles de forma apriorística.**

- **Mediante el artificio anterior se obtienen resultados desagregados del nivel de cada embalse utilizando sus costes marginales, pese al reducido número de estados iniciales.**

- **El algoritmo de programación dinámica planteado se considera suficientemente aproximado por REE, pese a la simplificación en los estados posibles.**